

Exos sympas

Armand Perrin

February 23, 2024

Voici une sélection d'exercices sympatiques rencontrés lors de ma prépa en MPI* au lycée Paul Valéry. Je les ai sélectionnés essentiellement selon le plaisir que j'ai eu à les chercher ainsi que l'élégance de leurs solutions. On y trouvera notamment des exercices type oral ENS dont la difficulté rend le fait de trouver une solution plus satisfaisant encore, ce qui joue indéniablement un rôle dans ma sélection. Lors de la rédaction des solutions (qui est encore en cours), je m'efforce de décrire non seulement la preuve mais aussi le cheminement pour y parvenir. En espérant éviter cet effet "bouquin" de rédaction minimale où l'on ne donne que la synthèse et cache l'analyse qui pourtant est aussi instructive. Par ailleurs ma rédaction est loin d'être parfaite, merci de me faire part de toute erreur, coquille ou suggestion.

Exercice 1: Soit (G, \cdot) un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre 2, montrer que son cardinal est une puissance de 2.

Solution : On propose 2 solution, la première très astucieuse et jolie et la deuxième plus accessible et généralisable.

Solution 1: Cette solution consiste à remarquer que (G, \cdot, \wedge) est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel (ça a un sens car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps).

Où la loi externe \wedge est définie par $\wedge : \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \longrightarrow G \\ (n, x) & \longmapsto x^n \end{cases}$ En effet :

- (G, \cdot) est un groupe abélien : Soient $x, y \in G$ $1 = (xy)^2 = xyxy$ et en composant à gauche par x et à droite par y on a bien $xy = yx$.

- $\forall x \in G \quad x^1 = x$

- $\forall x, y \in G, n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (xy)^n = x^n y^n$ car G est abélien.

- $\forall n, m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x \in G \quad x^{n+m} = x^n x^m$

- $\forall n, m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x \in G \quad (x^n)^m = x^{nm}$

cet espace vectoriel est de dimension finie car il est fini (toute famille de taille supérieure à $\text{card}(G)$ est liée). Notons k sa dimension, la fixation d'une base de G induit un isomorphisme entre G et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ ils sont donc de même cardinal : 2^k .

Solution 2: On démontre par récurrence sur k la propriété : "pour tout groupe G dont tous les éléments sont d'ordre 2 : $\text{card}(G) \leq 2^k \implies \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(G) = 2^p$ ". Avoir cette propriété pour tout k permet clairement de conclure.

Initialisation : si $k = 0$ c'est bon.

Hérédité : supposons la propriété réalisée pour $k \geq 1$, soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 tel que $\text{card}(G) \leq 2^{k+1}$, si $\text{card}(G) \leq 2^k$ c'est bon par l'hypothèse, sinon soit H un sous groupe strict de G de cardinal maximal (existe car ils sont en nombre fini) et $a \in G \setminus H$ alors $G = H \cup aH$ et $H \cap aH = \emptyset$, en effet $H \cup aH$ est un sous groupe de G :

- $1 \in H \cup aH$

- Soient $x, y \in H \cup aH$

si $x, y \in H$ alors $xy^{-1} \in H \subset H \cup aH$

si $x, y \in aH \quad \exists h, h' \in H \quad xy^{-1} = ah(ah')^{-1} = hh'^{-1} \in H$ car G est commutatif (voir Solution 1)

si $x \in H, y \in aH$ (ou le contraire, par symétrie) $\exists h, h' \in H \quad xy^{-1} = h(ah')^{-1} = ah h'^{-1} \in aH$ car $a^{-1} = a$.

Alors $H \cup aH = G$ par maximalité de H . Soit $x \in H \cap aH \quad \exists h, h' \in H \quad h' = ah$ absurde car alors $a = h'h^{-1} \in H$. Ainsi $H \cap aH = \emptyset$. En vertu de la bijection $x \mapsto ax$, $\text{card}(H) = \text{card}(aH)$. On déduit de ces 3 points que $\text{card}(G) = 2\text{card}(H)$, donc $\text{card}(H) \leq 2^k$ et par l'hypothèse de récurrence $\exists p \in \mathbb{N} \quad \text{card}(H) = 2^p$ puis $\text{card}(G) = 2^{p+1}$.

Exercice 2 (d'après [2]): Soit \mathbb{K} un corps et A_1, \dots, A_p un ensemble de p matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ stable par produit, montrer que

$$\text{Tr} \left(\sum_{i=1}^p A_i \right) \equiv 0 [p]$$

Solution : Notons G cet ensemble et $S = \sum_{i=1}^p A_i$, il faut remarquer que si $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\sum_{i=1}^p A_j A_i = \sum_{i=1}^p A_i = S \text{ car } M \mapsto A_j M \text{ est une permutation de } G$$

$$\text{Alors, } S^2 = \left(\sum_{i=1}^p A_i \right)^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_i A_j = p \sum_{i=1}^p A_i = pS$$

Si la caractéristique de \mathbb{K} divise p (c'est à dire si $p.1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$) alors $S^2 = 0$, S est donc nilpotente et sa trace est nulle. On a bien $\text{Tr}(S) \equiv 0 [p]$.

$$\text{Sinon : } \left(\frac{S}{p} \right)^2 = \frac{pS}{p^2} = \frac{S}{p}$$

$\frac{S}{p}$ est donc un projecteur, sa trace est donc égale à son rang, c'est donc un entier et par linéarité, la trace de S est divisible par p .

Exercice 3: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ nulle en a et b . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que $f' + \lambda f$ s'annule sur $]a, b[$.

Solution : Les hypothèses ressemblent à celles du théorème de Rolle, on va chercher à l'appliquer, mais à quelle fonction ?

Analyse : On va chercher par exemple g dérivable vérifiant

$$- g(a) = g(b)$$

$$- g'(c) = 0 \implies f'(c) + \lambda f(c) = 0$$

le deuxième point serait vérifié si par exemple $g' = (f' + \lambda f)h$ avec h une fonction strictement positive. Choisissons h de manière à pouvoir primitiver g' on remarque que g' est la dérivée du produit fh si $h' = \lambda h$ ce qui fonctionne avec $h : x \mapsto e^{\lambda x}$.

Synthèse : On applique le théorème de Rolle à $g : x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$, g est continue sur $]a, b[$, dérivable sur $[a, b]$, nulle en a et b donc $\exists c \in]a, b[\quad g'(c) = 0$ or $g'(x) = (f'(x) + \lambda f(x))e^{\lambda x}$ donc $f'(c) + \lambda f(c) = 0$.

Exercice 4: Retrouver le binôme de Newton à l'aide de la formule de Leibniz.

Solution : Si $a \in \mathbb{C}$ on cherche une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ pour laquelle on ait une relation simple entre $f^{(k)}$ et a^k pour tout k . Dans la lignée de l'exercice précédant on va considérer les fonctions exponentielles, posons : $f_a : x \mapsto e^{ax}$ alors $f_a^{(k)} = a^k f_a$. Soient $a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ on a avec Leibniz :

$$(a+b)^n = (a+b)^n e^{(a+b) \times 0} = f_{a+b}^{(n)}(0) = (f_a f_b)^{(n)}(0)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_a^{(k)}(0) f_b^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 5 (Bézout dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$): Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$, montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$AU + BV = I_n$$

Solution : C'est direct quand on pense à la formule $M \operatorname{Com}(M)^T = \det(M) I_n$, car une relation de Bézout dans \mathbb{Z} permet d'écrire :

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \quad A \operatorname{Com}(A)^T u + B \operatorname{Com}(B)^T v = (\det(A)u + \det(B)v) I_n = I_n$$

Exercice 6: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, démontrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Solution : \Rightarrow Supposons M diagonalisable, on note $C = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ la classe de similitude de M , démontrons qu'elle est fermée. Soit $(M_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons Π_M le polynôme minimal de M et χ_M son polynôme caractéristique. L'application $M \mapsto \det(XI_n - M) = \chi_M$ étant continue car polynomiale, on a $\chi_{M_n} \rightarrow \chi_L$ or $\forall n \in \mathbb{N} \quad \chi_{M_n} = \chi_M$ donc $\chi_M = \chi_L$. De plus, on a classiquement pour $P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \Pi_M(PMP^{-1}) = P\Pi_M(M)P^{-1} = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Pi_M(M_n) = 0$ et par continuité de $\Pi_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme polynôme, $\Pi_M(L) = 0$ or Π_M est scindé, à racines simples puisque M est diagonalisable, donc L est aussi diagonalisable. M et L ont le même polynôme caractéristique et sont diagonalisables donc semblables à une même matrice diagonale, elles sont donc semblables entre elles et $L \in C$.

\Leftarrow Supposons que la classe de similitude C de M est fermée. On veut démontrer que M est diagonalisable, ce qui équivaut à dire que C contient une matrice diagonale. Il suffit donc de trouver une suite d'éléments de C convergeant vers une matrice diagonale, puisque C est fermée. M est trigonalisable dans \mathbb{C} donc on peut trouver $T \in C$ triangulaire supérieure. Considérons pour $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice digo-

nale inversible : $P_k = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k^n \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{k^n} \end{pmatrix}$. La suite $(U_k)_k = (P_k T P_k^{-1})_k$

de C converge vers $\operatorname{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$ où $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. En effet le coefficient d'indice (i,j) de U_k vaut $t_{i,j} k^{i-j}$. Si $i > j$ alors $t_{i,j} = 0$, si $i < j \quad k^{i-j} \rightarrow 0$ et si $i = j \quad t_{i,j} k^{i-j} \rightarrow t_{i,i}$. \square

Remarque : On peut démontrer avec la même méthode que M est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{C}$ (l'adhérence de C).

Exercice 7 (Théorème de Maschke): Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous groupe fini de $GL(E)$. Démontrer que tout sous espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire également stable par tout les élément de G .

Solution : Disons d'un sous-espace qu'il est stable par G si il est stable par tous les éléments de G . Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par G . On va travailler avec des projecteurs, il est bien de se rendre compte que à un couple de sous espaces supplémentaire on peut toujours faire correspondre un projecteur et vice versa car le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires. Soit donc p un projecteur sur F . L'idée principale pour construire un supplémentaire stable par G est de chercher à construire un projecteur à partir de p et G ayant aussi F pour image et dont le noyau est stable par G . On a déjà remarqué dans l'exercice 2 que la somme des éléments d'un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$

divisée par son cardinal est un projecteur, on peut donc s'en inspirer et poser $s = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} gpg^{-1}$, où $n = \text{card}(G)$, de cette manière :

$$s^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} hph^{-1}gpg^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} gpg^{-1} = s$$

car $p|_F = \text{id}_F$ et $F = \text{Im}(p)$ est stable par G . s est le projecteur recherché, on a $\text{Im}(s) = F$ en effet :

$\boxed{\subset}$ Cette inclusion est claire puisque F est stable par G .

$\boxed{\supset}$ si $x \in F$ alors $x = p(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} gpg^{-1}(x) \in \text{Im}(s)$ car $p|_F = \text{id}_F$.

On a aussi $\text{Ker}(s)$ stable par G : soit $x \in \text{Ker}(s)$, et $h \in G$

$$s(h(x)) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} gpg^{-1}(h(x)) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} hh^{-1}gp(h^{-1}g)^{-1}(x) = hs(x) = 0$$

car $g \mapsto h^{-1}g$ est une permutation de G . Donc $\text{Ker}(s)$ est stable par G . Finalement comme $\text{Ker}(s) \oplus F = \text{Ker}(s) \oplus \text{Im}(s) = E$, $\text{Ker}(s)$ est le supplémentaire recherché.

Remarque : Cette preuve est vraie pour tout corps \mathbb{K} tel que $n \cdot 1_{\mathbb{K}} \neq 0$ (pour pouvoir diviser par n), c'est à dire dont la caractéristique ne divise pas n .

Autre solution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: On identifie E et \mathbb{R}^p que l'on munit du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et on pose le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E définit par :

$$\forall x, y \in E \quad (x | y) = \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle$$

On travaille dans l'espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$, encore par la bijection $g \mapsto hg$ pour $h \in G$, on constate que tout les éléments de G conservent le produit scalaire, donc sont autoadjoints et donc F^\perp est un supplémentaire de F stable par G .

Exercice 8 : Démontrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ On va exhiber une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\phi(0) = I_n$ et $\phi(1) = A$

Regardons pour commencer le chemin en ligne droite : $\psi_A(t) = tA + (1-t)I_n$ il n'a pas de raison de rester dans $GL_n(\mathbb{C})$ mais pour

$$t \in]0, 1] \quad \psi_A(t) \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \quad A + \frac{1-t}{t}I_n \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} \notin Sp(A)$$

Il suffit donc que A n'ait aucune valeur propre réelle pour que ce chemin ψ_A soit à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. Que faire si ce n'est pas le cas ? Trouver un chemin continu de A à une matrice dont les valeurs propres ne sont pas réelles. Posons

$$r : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto e^{2i\pi t} A \end{cases}$$

Si $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors $Sp(r(t)) = \{e^{2i\pi t}\lambda_1, \dots, e^{2i\pi t}\lambda_n\}$.

Puisque l'ensemble $\{t \in [0, 1] \mid \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e^{2i\pi t}\lambda_k \in \mathbb{R}\}$ est fini on peut trouver $t_0 \in [0, 1]$ tel que $Sp(r(t_0)) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Notons $B = r(t_0)$. La restriction de r à $[0, t_0]$ est donc un chemin continu à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ joignant A et B , de même ψ_B continu à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ joint B et I_n , on construit donc facilement ϕ comme il faut.

Exercice 9 (ENS Lyon 2014) : Déterminer une CNS sur A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k) \quad (*)$$

Solution : Pour commencer simplifions le problème et cherchons les matrices A qui vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{tr}(A^k) = 0 \quad (**)$$

C'est classique, on commence par observer que toutes les matrices nilpotentes fonctionnent, puis on montre que ce sont les seules : démontrons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $(**)$ alors son spectre est réduit à $\{0\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A où les λ_i sont distincts 2 à 2, $n_i \geq 1$ la multiplicité de λ_i et $n_0 \geq 0$ la multiplicité de 0. On raisonne par l'absurde en supposant $r \geq 1$, $(**)$ pour $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ donne :

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 \lambda_1^0 + \dots + n_r \lambda_r^0 &= n \\ n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r &= 0 \\ n_1 \lambda_1^2 + \dots + n_r \lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ n_1 \lambda_1^r + \dots + n_r \lambda_r^r &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 - n \\ n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système type Vandermonde inversible, on en déduit $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad n_i = 0$ ce qui est absurde, donc $r = 0$ et $Sp(A) = \{0\}$

Pour le cas général on peut remarquer que si A et B ont le même polynôme caractéristique alors elles vérifient $(*)$ de plus la réciproque est vraie si $B = 0$ d'après ce qui précède. On va montrer qu'elle est toujours vraie. Pour une matrice M notons χ_M son polynôme caractéristique et Π_M son polynôme minimal. Fixons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $(*)$. D'abord, la linéarité de la trace permet d'écrire :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \text{tr}(P(A)) = \text{tr}(P(B))$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour $P = \chi_B^k$ on a donc d'après Cayley-Hamilton :

$$\text{tr}(\chi_B^k(A)) = 0$$

La matrice $\chi_B(A)$ est donc nilpotente, donc χ_B^n annule A , donc $\Pi_A | \chi_B^n$ et donc $Sp(A) \subset Sp(B)$. Par symétrie on obtient ensuite l'inclusion réciproque, donc $Sp(A) = Sp(B)$.

Il ne reste plus qu'à montrer que les multiplicités des valeurs propres sont les mêmes pour avoir $\chi_A = \chi_B$. Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ le spectre commun et a_i, b_i la multiplicité de λ_i dans χ_A et χ_B respectivement. $(*)$ donne alors :

$$\begin{aligned} a_1 \lambda_1^0 + \dots + a_r \lambda_r^0 &= b_1 \lambda_1^0 + \dots + b_r \lambda_r^0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_1 \lambda_1^{r-1} + \dots + a_r \lambda_r^{r-1} &= b_1 \lambda_1^{r-1} + \dots + b_r \lambda_r^{r-1} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_r - b_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retombe sur une matrice de Vandermonde inversible et on conclut que

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad a_i = b_i$$

ce qui conclut.

Exercice 10 (Cassini): Soit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On pose $f_0 = g$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1} = \int_a f_n$$

Étudier la convergence de la série de fonctions :

$$\sum_{n \geq 0} f_n$$

et calculer sa somme.

Solution : Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est de classe \mathcal{C}^n et $f_n^{(k)} = f_{n-k}$ et si $n \neq 0$ $f_n(a) = 0$. g est bornée sur le segment $[a, b]$ car elle y est continue notons M une borne de g . Soit $x \in [a, b]$ le théorème de Taylor-Lagrange appliqué à f_n entre a et x s'écrit :

$$\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M(x-a)^n}{n!}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!}$$

Par passage au *sup* on déduit que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge. Donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$.

Calculons maintenant sa somme, que l'on note s :

Soit $x \in [a, b]$:

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt$$

La convergence uniforme nous autorise ici à échanger série et intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^x s(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x) \\ &= s(x) - g(x) \end{aligned}$$

Notons $S(x) = \int_a^x s(t) dt$.

Alors $S' - S = g$, équation différentielle facile à résoudre, on obtient avec la condition $S(a) = 0$ que :

$$S(x) = e^x \int_a^x g(t) e^{-t} dt$$

et

$$s(x) = g(x) + e^x \int_a^x g(t) e^{-t} dt$$

Exercice 11: Soit $A \subset \mathbb{C}$, exhiber un \mathbb{K} -espace vectoriel pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $f \in L(E)$ tel que $Sp(f) = A$.

Solution : Considérons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D : f \mapsto f'$ l'endomorphisme de dérivation sur E , puis pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$.

On pose $F = \text{Vect}_{\mathbb{C}}((f_\lambda)_{\lambda \in A}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((f_\lambda)_{\lambda \in A}, (if_\lambda)_{\lambda \in A})$ qui est dans tous les cas un sous espace vectoriel de E vu comme \mathbb{K} -espace vectoriel, la suite de la preuve est similaire que \mathbb{K} soit \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

On constate que F est stable par D , notons $d = D|_F \in L(F)$:

$$\forall \lambda \in A \quad d(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

Et comme les f_λ sont tous non nuls, $A \subset \text{Sp}(d)$. Soit maintenant $\lambda \in \text{Sp}(d)$,

$$\exists f \in F \quad f' = \lambda f$$

On peut résoudre cette équation différentielle, et on obtient

$$\exists K \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{\lambda x}$$

On a aussi $f \in F$, et la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est \mathbb{K} -libre, donc nécessairement $f = Kf_\lambda$ avec $\lambda \in A$. Ainsi $A = \text{Sp}(d)$.

Exercice 12 (Théorème de Burnside): On dit qu'un groupe G est d'exposant fini si :

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall g \in G \quad g^N = 1$$

Le plus petit entier N vérifiant cela est alors appelé l'exposant de G , c'est aussi le plus petit multiple commun des ordres des éléments de G .

Démontrer qu'un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est d'exposant fini si et seulement si il est fini.

Solution : Il est clair que si G est fini $\forall g \in G \quad g^{|G|} = 1$ donc G est d'exposant fini. Réciproquement supposons G d'exposant fini, on va montrer que G est fini en construisant une injection de G dans un ensemble fini. Soit $B = (B_1, \dots, B_r)$ une famille libre de G de cardinal maximal, on vérifie facilement que c'est une base de $\text{Vect}(G)$.

Posons $f : \begin{cases} \text{Vect}(G) & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \\ A & \longmapsto & (Tr(AB_1), \dots, Tr(AB_r)) \end{cases}$ f est linéaire, montrons que $f|_G$ est injective:

On vérifie facilement qu'il suffit pour ça de montrer que $\text{Ker}(f) \cap G = \{0\}$. Soit $A \in \text{Ker}(f) \cap G$ et $k \in \mathbb{N}$, on peut décomposer A^k dans la base B , notons :

$$A^k = \sum_{i=1}^r a_i B_i$$

$$Tr(A^{k+1}) = \sum_{i=1}^r a_i Tr(AB_i) = 0$$

Car $A \in \text{Ker}(f)$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad Tr(A^k) = 0$$

Cela implique que A est nilpotente (exercice classique, voir exo 9). Or le polynôme scindé à racines simples $X^N - 1$ annule A puisque $A \in G$, donc A est diagonalisable et nilpotente, elle est donc nulle. $f|_G$ est donc injective.

Pour conclure montrons que $f(G)$ est fini. Déjà $f(G) \subset E^r$ où

$E = \{Tr(A), A \in G\}$. Il suffit donc de montrer que E est fini, et en effet si $A \in G$, les valeurs propres de A sont des racines de $X^N - 1$ qui sont en nombre fini, la trace de A est la somme de ses valeurs propres, donc peut également prendre un nombre fini de valeurs, ainsi E est fini.

Exercice 13: Déterminer les endomorphismes de groupe continus de (\mathbb{R}_+^*, \times) .

Solution : Soit f un tel morphisme, posons $g = \ln \circ f \circ \exp$. On a

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) &= \ln(f(e^{x+y})) \\ &= \ln(f(e^x e^y)) \\ &= \ln(f(e^x) f(e^y)) \\ &= \ln(f(e^x)) + \ln(f(e^y)) \\ &= g(x) + g(y)\end{aligned}$$

L'application g est continue comme composée, et additive, donc linéaire (c'est un exercice classique), donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= ax \\ \ln(f(e^x)) &= ax \\ f(e^x) &= e^{ax} \quad \text{par surjectivité de } \exp \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad y = e^x \\ \text{donc } \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(y) &= y^a\end{aligned}$$

Réciproquement, les fonctions de la forme $x \mapsto x^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont bien des endomorphismes continus de (\mathbb{R}_+^*, \times) .

Autre Solution : Soit f un tel morphisme, il vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad (1)$$

En particulier $f(1)^2 = f(1)$ donc $f(1) \in \{0, 1\} \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $f(1) = 1$. On va chercher une équation différentielle vérifiée par f , pour montrer qu'elle est dérivable, intégrons (1) (bonne idée paradoxale) : puisque f est continue et strictement positive :

$$C := \int_1^2 f(y) dy > 0$$

puis, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(xy) dy &= \int_1^2 f(x)f(y) dy \\ \int_x^{2x} f(u) \frac{du}{x} &= f(x) \int_1^2 f(y) dy \quad \text{avec le changement de variables } u = xy \\ \text{d'où } f(x) &= \frac{1}{xC} \int_x^{2x} f(u) du\end{aligned}$$

f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . On peut donc maintenant dériver (1) par rapport à x :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad y f'(xy) = f'(x) f(y)$$

et en $x = 1$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad y f'(y) = f'(1) f(y)$$

En résolvant cette équation différentielle on obtient :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = K x^{f'(1)}$$

puis en évaluant en 1 il vient $K = 1$. Enfin on conclut car toutes les fonctions $x \mapsto x^a$ où $a \in \mathbb{R}$ conviennent.

Exercice 14: Soit $R > 0$ et A une partie de la sphère de rayon R , que l'on note $\mathcal{S}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Existe-t-il une série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R tel que l'ensemble des points de $\mathcal{S}(0, R)$ en lesquels f est bien définie (i.e la série converge) soit exactement A ?

Solution : On va démontrer que le résultat est faux en général par arguments de cardinalité : Soit $R > 0$, pour une série entière f notons $C(f)$ l'ensemble des points de $\mathcal{S}(0, R)$ où f converge. On raisonne par l'absurde en supposant que le résultat est vrai : pour tout $A \subset \mathcal{S}(0, R)$ il existe une série entière f de rayon R telle que $C(f) = A$. On va commencer par démontrer le résultat suivant :

Lemme : Si $(a_n)_n$ est une suite de complexes, il existe une suite $(q_n)_n$ de $\mathbb{Q}[i]$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} q_n z^n \text{ converge} \right)$$

Preuve : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, par densité de $\mathbb{Q}[i]$ dans \mathbb{C} :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists q_n \in \mathcal{B}(a_n, \frac{1}{n!}) \cap \mathbb{Q}[i]$$

Si on note $\varepsilon_n = q_n - a_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = a_n + \varepsilon_n$ et $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{n!}$, donc la série entière $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n z^n$ a un rayon de convergence infini, de plus :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{n \geq 0} q_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n z^n$$

On a donc bien le résultat voulu puisque le terme le plus à droite converge toujours. \square

Pour $u = (u_n)_n$ une suite complexe, on note $f_u : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Notre hypothèse implique d'après ce lemme que

$$\forall A \subset \mathcal{S}(0, R) \quad \exists q \in \mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}} \text{ tel que } f_q \text{ soit de rayon } R \text{ et } C(f_q) = A$$

Donc l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R)) \\ q & \mapsto & C(f_q) \end{cases}$ est surjective. Or on peut montrer avec une bijection

de \mathbb{N} dans \mathbb{Q} et l'équipotence de $\mathbb{Q}[i]$ et \mathbb{Q} que $\mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. De plus \mathbb{R} est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, exhibons une surjection, (c'est suffisant pour notre preuve) : à un réel x dont une écriture en base 11 est une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans $\{0, \dots, 9, A\}$ on associe, si $(x_n)_n$ possède deux A consécutifs ou un nombre fini de A , la suite nulle et sinon la suite $(a_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n$ est l'entier dont l'écriture décimale est $x_{i_n+1} \dots x_{i_n+1-1}$ où i_n désigne le rang du n -ième A dans $(x_n)_n$. Cette application est facilement surjective, par composition, on dispose donc d'une surjection de \mathbb{R} dans $\mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R))$. Or $\psi : \begin{cases} [0, 1[& \rightarrow & \mathcal{S}(0, R) \\ t & \mapsto & Re^{2i\pi t} \end{cases}$ est bijective et donc démontre, connaissant l'équipotence de $[0, 1[$ et \mathbb{R} , que $\mathcal{S}(0, R)$ est en bijection avec \mathbb{R} , il vient ensuite que $\mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R))$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a donc grâce à tout ce qui précède, une surjection de \mathbb{R} dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ce qui est absurde d'après le théorème de Cantor.

Exercice 15 (D'après [1]):

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : Le n^{-n} peut nous rappeler la fameuse et magnifique identité :

$$\int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

Baptisée "Sophomore's dream" ou "rêve du deuxième année" (oui oui, elle est vraie !!)

On va en fait montrer qu'on a même :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^1 t^{-xt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^{-n}$$

Pour $x = 0$ l'intégrale converge, pour $x \neq 0$ $t^{-xt} = e^{-xt \ln(t)} \rightarrow 1$ car $t \ln(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, l'intégrale converge également. Pour la série entière, son rayon de convergence est clairement infini. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-xt} dt &= \int_0^1 e^{-xt \ln(t)} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!} dt \\ (*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{+\infty}^0 \frac{(-1)^n x^n e^{-\frac{un}{n+1}} (-u)^n}{n!(n+1)^n} \left(\frac{-e^{-\frac{u}{n+1}}}{n+1} \right) du \quad \text{avec } t = e^{-\frac{u}{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^{-n} \end{aligned}$$

(*) Notons $f_n(t) = \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est cpm et intégrable sur $[0,1]$, de plus $\sum f_n$ converge simplement vers $F_x : t \mapsto t^{-xt}$ qui est cpm. Enfin comme $t \in [0,1]$ f_n est de signe constant, notre calcul à partir de (*) justifie donc la convergence de $\sum \int_0^1 |f_n|$. L'échange série - intégrale est donc justifié. Alors

$$S(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} \left(\int_0^1 t^{-xt} dt \right)^{\frac{1}{x}}$$

D'abord, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \rightarrow 1$ Puis pour $x \geq 1$:

$$\left(\int_0^1 t^{-xt} dt \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\int_0^1 (t^{-t})^x dt \right)^{\frac{1}{x}} = \|f\|_x$$

Où $f : t \mapsto t^{-t}$. On se rappelle alors de l'exercice affirmant que

$$\|f\|_x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Avec une rapide étude de f on trouve que sa borne sup vaut $e^{\frac{1}{e}}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = e^{\frac{1}{e}} \quad \square$$

Exercice 16 (D'après [2]): Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ continue telle que :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad (*)$$

Démontrer que f est bijective puis que f est une isométrie.

Solution : Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $0 = d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \geq 0$ donc $x = y$, ainsi f est injective.

Pour la surjectivité fixons $y \in E$ et remarquons que pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \geq d(f(x), y)$$

On cherche donc x tel que $d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \rightarrow 0$. Comme E est compact on peut trouver une extractrice ϕ et $l \in E$ telle que :

$$f^{\phi(n)}(y) \rightarrow l$$

Posons $x_n = f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)$ et $a_n = f^{\phi(n)+1}(x_n)$ Alors

$$a_n = f^{\phi(n)+1}(f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)) = f^{\phi(n+1)}(y) \rightarrow l$$

Extrayons une deuxième fois : il existe une extractrice ψ et $x \in E$ tels que :

$$x_{\psi(n)} \rightarrow x$$

Comme

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x_{\psi(n)}) \rightarrow l,$$

(c'est une suite extraite de a_n), on aimerait en conclure que :

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x) \rightarrow l$$

Attention ici à ne pas essayer d'utiliser la continuité de $f^{\phi(\psi(n))+1}$, la dépendance en n nous en empêche. Nous allons pour cela montrer le résultat suivant :

Lemme Soient $u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, $b_n \in E^{\mathbb{N}}$ tendant vers $b \in E$ et l, l' dans E tels que :

$$f^{u_n}(b_n) \rightarrow l \quad \text{et} \quad f^{u_n}(b) \rightarrow l'$$

Alors $l = l'$

Preuve Soit $\epsilon > 0$:

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_k}(b_n), l) \quad (1)$$

De plus, en appliquant (*), si $u_n \geq u_k$:

$$d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n-u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l, f^{u_n-u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), f^{u_n}(l))$$

Par compacité, on dispose d'une extractrice ϕ et de $l_1 \in E$ telle que $f^{u_{\phi(p)}}(l) \rightarrow l_1$

Finalement, en injectant dans (1) :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), l_1) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

On peut donc trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_1 \quad d(f^{u_{\phi(p)}}(l), l_1) \leq \epsilon$ Il existe aussi $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_2 \quad d(l', f^{u_p}(b)) \leq \epsilon$. Fixons donc $p_1 \geq \max(N_1, N_2)$ et posons $k = \phi(p_1)$ Ainsi $k \geq p_1 \geq N_2$ et $k \geq N_1$ Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq 2\epsilon + d(f^{u_n}(b), l') + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

Maintenant que k est fixé, on peut utiliser la continuité de f^{u_k} :

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_3 \quad d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) \leq \epsilon \quad (N_3 \text{ dépend de } k)$$

$$\exists N_4 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_4 \quad d(f^{u_p}(b_p), l) \leq \epsilon$$

Soit donc $p_2 \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$ et $n := \phi(p_2)$ vérifiant $u_n \geq u_k$ (possible car u tends vers $+\infty$) donc $n \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$
On peut conclure :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq 6\epsilon$$

Ainsi l est une valeur d'adhérence de $(f^{u_n}(b))_n$ et comme elle converge vers l' on a bien $l = l'$ \square

Pour utiliser notre lemme, on a donc besoin que $f^{\phi(\psi(n))+1}(x)$ converge, ce n'est pas forcément le cas, extrayons : il existe γ une extractrice et $l' \in E$ tels que

$$f^{\phi(\psi(\gamma(n)))+1}(x) \rightarrow l'$$

Notons $u_n = \phi(\psi(\gamma(n)))$. On a :

$$f^{u_n+1}(x_{\psi(\gamma(n))}) \rightarrow l \quad \text{et} \quad x_{\psi(\gamma(n))} \rightarrow x$$

Donc par le lemme :

$$f^{u_n+1}(x) \rightarrow l$$

On obtient donc

$$d(f^{u_n+1}(x), f^{u_n}(y)) \geq d(f(x), y)$$

En passant a la limite :

$$d(f(x), y) \leq d(l, l) = 0$$

Ainsi $f(x) = y$, ce qui démontre la surjectivité de f .

Démontrons maintenant que f est une isométrie :

Comme f est bijective on peut maintenant écrire :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \quad (**)$$

Pour $x, y \in E$ posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))$. D'après (**), (d_n) est décroissante, de plus elle est minorée par 0, elle est donc convergente, notons l sa limite. Comme E est compact il existe γ, ψ des extractrices et $a, b \in E$ tels que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \rightarrow b$$

Notons $\phi = \gamma \circ \psi$. Alors comme $d_{\phi(n)} \rightarrow l$ on a : $d(a, b) = l$, de plus par continuité de f :

$$f^{-\phi(n)+1}(x) \rightarrow f(a), \quad f^{-\phi(n)+1}(y) \rightarrow f(b)$$

Donc

$$d(f^{-\phi(n)+1}(x), f^{-\phi(n)+1}(y)) \rightarrow d(f(a), f(b))$$

Mais $d_{\phi(n)-1}$ tends aussi vers l donc

$$d(f(a), f(b)) = d(a, b) = l$$

Ce qui ressemble pas mal a ce q'on cherche, on le veut pour tout $a, b \in E$. Fixons donc $a, b \in E$. Il suffirait donc d' avoir l' existence de $x, y \in E$ ainsi que de γ et ψ des extractrices telles que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \rightarrow b$$

Commençons avec a , ce n'est pas évident... On peut essayer d'exprimer x en fonction de a et naïvement écrire " $x = f^{\gamma(n)}(a)$ " ce qui n'a pas de sens, mais $(f^{\gamma(n)}(a))_n$ est bien une suite de E dont on peut donc extraire une suite convergente notons justement, pour voir γ l'extractrice et x la limite :

$$f^{\gamma(n)}(a) \rightarrow x$$

Notons $x_n = f^{\gamma(n)}(a)$. Alors comme $f^{-\gamma(n)}(x_n) = a$ on a :

$$f^{-\gamma(n)}(x_n) \rightarrow a \quad \text{et} \quad x_n \rightarrow x$$

Cela nous rappelle notre lemme, il nous manque l'hypothèse : “ $f^{-\gamma(n)}(x)$ converge”, mais quitte à extraire et à remplacer γ par $\gamma \circ \gamma'$ par exemple, on peut la supposer vraie. Autre problème : la suite $(-\gamma(n))_n$ ne tends pas vers $+\infty$

Adaptons notre lemme aux suites de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers $-\infty$. En regardant la preuve on voit que l'hypothèse “ $u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ” n'est utilisé que pour avoir la continuité de f^{u_k} car f^{-1} n'est a priori pas continue, sauf qu'en fait si car elle est directement 1-lipschitzienne par (**) on peut donc prendre $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. L'hypothèse “ $u_n \rightarrow +\infty$ ” par contre est nécessaire pour trouver n vérifiant $u_n \geq u_k$ et appliquer la majoration $d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n - u_k}(l))$. Bon... reprenons les mêmes notations et changeons la première ligne en :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l)$$

Dès que u_n est négative, $d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) \leq d(b, b_n)$ en itérant (**). Mais comme $b_n \rightarrow b$ et $f^{u_n}(b_n) \rightarrow l$ on a directement $f^{u_n}(b) \rightarrow l$ puis $l = l'$. Donc c'est bon, c'était plus simple comme ça !

On peut donc utiliser cette version du lemme et conclure que $f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a$. Tout se passe exactement pareil pour trouver y et ψ si on commence par extraire de la suite $(f^{\gamma(n)}(b))_n$. Cela conclut la preuve.

Exercice 17 (Preuve topologique de Cayley-Hamilton): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

- 1) Démontrer que si A est diagonalisable, alors $\chi_A(A) = 0$.
- 2) En déduire que $\chi_A(A) = 0$.

Solution : 1) On note $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, P inversible. On a facilement $\chi_A(A) = \chi_D(A) = \chi_D(D)$. Mais cette matrice est diagonale, et s'écrit $\prod_{i=1}^n (D - \lambda_i I_n)$. Où $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Et comme les coefficients diagonaux de D sont aussi les valeurs propres de A , on peut voir que ce produit de matrices diagonales est nul.

2) On va conclure par densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: on dispose d'une suite $(A_n)_n$ de matrices diagonalisables qui tends vers A . Cela ne dépend pas des normes, en dimension finie. Il suffit d'après 1) de montrer que $\chi_{A_n}(A_n) \rightarrow \chi_A(A)$ car il s'agirait alors de la limite de la suite nulle. L'application $f : M \mapsto \chi_M$ est continue puisque $\chi_M = \det(XI_n - M)$ et le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice. Choisissons des normes qui nous arrangent : la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $B = \mathcal{B}_f(A, 1)$ et on pose pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ $\|P\| := \sup_{M \in B} \|P(M)\|_{\infty}$. Le sup est bien défini car P est continue sur le compact B donc majorée. Montrons qu'on définit ainsi une norme :

Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

- Homogénéité : $\|\lambda P\| = \sup_{M \in B} \|\lambda P(M)\|_{\infty} = \sup_{M \in B} |\lambda| \|P(M)\|_{\infty} = |\lambda| \|P\|$.
- Inégalité triangulaire : $\forall M \in B \quad \|P(M) + Q(M)\|_{\infty} \leq \|P(M)\|_{\infty} + \|Q(M)\|_{\infty} \leq \|P\| + \|Q\|$ par passage au sup : $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.
- Définition : Supposons $\|P\| = 0$, P est donc nul sur B . Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut trouver $U \in GL_n(\mathbb{C}) \cap \overset{\circ}{B}$. Soit λ une valeur propre de U (il en existe toujours car son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{C}) et X un vecteur propre associé, comme U est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Puisque $\overset{\circ}{B}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(U, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{B}$. En particulier $\forall t \in [0, \varepsilon[\quad P(tU) = 0$. Puis pour $t \in [0, \varepsilon[$:

$$\begin{aligned} tUX &= t\lambda X \\ P(tU)X &= P(t\lambda)X = 0 \end{aligned}$$

Or $X \neq 0$ donc $P(t\lambda) = 0$, λ étant non nul, P admet une infinité de racines dans \mathbb{C} , donc $P = 0$. (Remarquons que cela définit même une norme sur $\mathbb{C}[X]$.)

Puisque f est continue on a $\chi_{A_n} \rightarrow \chi_A$ pour $\|\cdot\|$ i.e $\|\chi_{A_n} - \chi_A\| \rightarrow 0$ i.e la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ converge uniformément vers χ_A sur B . Donc pour n suffisamment grand, $A_n \in B$ et

$$\begin{aligned}\|\chi_{A_n}(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty &\leq \|\chi_{A_n}(A_n) - \chi_A(A_n)\|_\infty + \|\chi_A(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty \\ &\leq \|\chi_{A_n} - \chi_A\| + \|\chi_A(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty\end{aligned}$$

On a vu que le terme de gauche tend vers 0, celui de droite tend aussi vers 0 par continuité de $M \mapsto \chi_A(M)$ comme polynôme. On a bien $\chi_{A_n}(A_n) \rightarrow \chi_A(A)$.

Exercice 18 (D'après [1]): Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et telle que $I := \int_0^{+\infty} f^2(x)dx < \infty$. Déterminier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x}$$

Solution : Il faut ici reconnaître la solution d'une équation différentielle de la forme :

$$y' + y = f \quad (1)$$

Si on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad y(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

alors y est clairement solution de (1). Faisons maintenant apparaître I :

$$\begin{aligned}y' + y &= f \\ (y' + y)^2 &= f^2 \\ y'^2 + 2yy' + y^2 &= f^2 \\ \text{En intégrant : } \int_0^x y'^2 + \int_0^x 2yy' + \int_0^x y^2 &= \int_0^x f^2 \\ \int_0^x y'^2 + y^2 - y(0)^2 + \int_0^x y^2 &= \int_0^x f^2 \quad (2) \\ \text{puis } \int_0^x y^2 &\leq \int_0^x y'^2 + y^2 + \int_0^x y^2 \\ &\leq y(0)^2 + \int_0^x f^2 \\ &\leq y(0)^2 + I\end{aligned}$$

La fonction $\int_0^x y^2$ étant croissante car de dérivée $y^2 \geq 0$ et majorée, elle admet une limite en $+\infty$. Il en est de même pour $\int_0^x y'^2$, on voit donc avec (2) que y^2 converge également en $+\infty$, notons l sa limite puisque $\int_0^{+\infty} y^2$ est convergente, nécessairement $l = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

.

Exercice 19: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable, montrer que :

$$\det(f)' = \text{Tr}(\text{Com}(f)^T f')$$

de deux manières différentes.

Solution : Première méthode. Notons $f_{i,j}$ les applications coordonnées de f dans la base canonique.

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\text{Com}(f)^T f') &= \sum_{i=1}^n [\text{Com}(f)^T f']_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [\text{Com}(f)^T]_{i,k} f'_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \Delta_{k,i} f'_{k,i}\end{aligned}$$

Pause, calculons $\Delta_{k,i}$ pour $1 \leq i, k \leq n$, en notant \tilde{f} la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ déduite de f en retirant la k -ème ligne et la i -ème colonne :

$$\begin{aligned}\Delta_{k,i} &= \det(\tilde{f}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{f}_{\sigma(j),j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \prod_{l < m} \left(\frac{\sigma(l) - \sigma(m)}{l - m} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{f}_{\sigma(j),j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=k} \prod_{l < m, l, m \neq i} \left(\frac{\sigma(l) - \sigma(m)}{l - m} \right) \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{l \neq i}^n \left(\frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{l - i} \right)^{-1} \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{l \neq i}^n \left(\frac{l - i}{\sigma(l) - k} \right) \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j}\end{aligned}$$

La valeur absolue de ce premier produit vaut 1 et il contient $i - 1$ numérateurs négatifs et $k - 1$ dénominateurs négatifs, il vaut donc $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}$. Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\text{Com}(f)^T f') &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \Delta_{k,i} f'_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{2i+2k} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j} f'_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j} f'_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{\sigma(j),j} f'_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n f_{\sigma(j),j} \right)' \\ &= \det(f)'\end{aligned}$$

Deuxième méthode. On va calculer la différentielle du déterminant :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ∇M le gradient du déterminant en M et $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique.

Avec la formule de dérivation des formes n -linéaires et en notant C_i la fonction "colone i " sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
[\nabla M]_{i,j} &= \frac{\partial \det}{\partial e_{i,j}}(M) = \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, \frac{\partial C_k}{\partial e_{i,j}}, \dots, C_n)(M) \\
&= \det(C_1, \dots, \frac{\partial C_j}{\partial e_{i,j}}, \dots, C_n)(M) \\
&= \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & 1 & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & 0 & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant suivant la j -ème colone il vient $[\nabla M]_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ puis $\nabla M = \text{Com}(M)$. Notons D_M la différentielle du \det en M , alors :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad D_M(H) = \langle \nabla M, H \rangle = \text{Tr}(\text{Com}(M)^T H)$$

Puis, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \det(f)'(x) = d(\det \circ f)_x(1) = D_{f(x)} \circ df_x(1) = \text{Tr}(\text{Com}(f(x))^T f'(x))$

References

- [1] Omid Amini et Igor Kortchemski. *Sujets posés - Ulm 2019*. URL: https://www.ens.psl.eu/sites/default/files/2019_mathsulm_sujets-1.pdf.
- [2] Igor Kortchemski. *Kholles de maths à Louis Le Grand*. URL: <http://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/exos.html>.