

# Exos sympas

Armand Perrin

October 28, 2023

**Exercice 1\*:** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre 2, montrer que son cardinal est une puissance de 2.

**Exercice 2\*(d'après [2]):** Soit  $A_1, \dots, A_p$  un ensemble de  $p$  matrices de  $GL_n(\mathbb{K})$  stable par produit, montrer que

$$\text{tr}\left(\sum_{i=1}^p A_i\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

**Exercice 3\*:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  nulle en  $a$  et  $b$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Démontrer que  $f' + \lambda f$  s'annule sur  $]a, b[$ .

**Exercice 4:** Retrouver le binôme de Newton à l'aide de la formule de Leibniz.

**Exercice 5 (Bézout dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ):** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det(A) \wedge \det(B) = 1$ , montrer qu'il existe  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que :

$$AU + BV = I_n$$

**Exercice 5\*:** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , démontrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

**Exercice 6\*\*(Théorème de Maschke):** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $G$  un sous groupe fini de  $GL(E)$ . Démontrer que tout sous espace vectoriel de  $E$  stable par tous les éléments de  $G$  admet un supplémentaire également stable par tous les éléments de  $G$ .

**Exercice 7\*\*:** Démontrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Exercice 8\*\*(ENS Lyon 2014):** Déterminer une CNS sur  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  pour que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k) \quad (*)$$

**Solution :** Pour commencer simplifions le problème et cherchons les matrices  $A$  qui vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{tr}(A^k) = 0 \quad (*)$$

C'est classique, on commence par observer que toutes les matrices nilpotentes fonctionnent, puis on montre que ce sont les seules : démontrons que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifie  $(*)$  alors son spectre est réduit à  $\{0\}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres non nulles de  $A$  où les  $\lambda_i$  sont distincts 2 à 2,  $n_i \geq 1$  la multiplicité de  $\lambda_i$  et  $n_0 \geq 0$  la multiplicité de 0. On raisonne par l'absurde en supposant  $r \geq 1$ ,  $(**)$  pour  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$  donne :

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 \lambda_1^0 + \dots + n_r \lambda_r^0 &= n \\ n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r &= 0 \\ n_1 \lambda_1^2 + \dots + n_r \lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ n_1 \lambda_1^r + \dots + n_r \lambda_r^r &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 - n \\ n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système type Vandermonde inversible, on en déduit  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad n_i = 0$  ce qui est absurde, donc  $r = 0$  et  $Sp(A) = \{0\}$

Pour le cas général on peut remarquer que si  $A$  et  $B$  ont le même polynôme caractéristique alors elles vérifient (\*) de plus la réciproque est vraie si  $B = 0$  d'après ce qui précède. On va montrer qu'elle est toujours vraie. Pour une matrice  $M$  notons  $\chi_M$  son polynôme caractéristique et  $\Pi_M$  son polynôme minimal. Fixons  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant (\*). D'abord, la linéarité de la trace permet d'écrire :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad tr(P(A)) = tr(P(B))$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  pour  $P = \chi_B^k$  on a donc d'après Cayley-Hamilton :

$$tr(\chi_B^k(A)) = 0$$

La matrice  $\chi_B(A)$  est donc nilpotente, donc  $\chi_B^n$  annule  $A$ , donc  $\Pi_A | \chi_B^n$  et donc  $Sp(A) \subset Sp(B)$ . Par symétrie on obtient ensuite l'inclusion réciproque, donc  $Sp(A) = Sp(B)$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que les multiplicités des valeurs propres sont les mêmes pour avoir  $\chi_A = \chi_B$ . Notons  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  le spectre commun et  $a_i, b_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$  dans  $\chi_A$  et  $\chi_B$  respectivement. (\*) donne alors :

$$\begin{aligned} a_1 \lambda_1^0 + \dots + a_r \lambda_r^0 &= b_1 \lambda_1^0 + \dots + b_r \lambda_r^0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_1 \lambda_1^{r-1} + \dots + a_r \lambda_r^{r-1} &= b_1 \lambda_1^{r-1} + \dots + b_r \lambda_r^{r-1} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_r - b_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retombe sur une matrice de Vandermonde inversible et on conclut que

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad a_i = b_i$$

ce qui conclut.

### Exercice 9\*\*\* (D'après [1]):

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{x}}$$

**Solution :** Le  $n^{-n}$  peut nous rappeler la fameuse et magnifique identité :

$$\int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

Baptisée "Sophomore's dream" ou "rêve du deuxième année" ( oui oui, elle est vraie !!)

On va en fait montrer qu'on a même :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^1 t^{-xt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^{-n}$$

Pour  $x = 0$  l'intégrale converge, pour  $x \neq 0$   $t^{-xt} = e^{-xt \ln(t)} \rightarrow 1$  car  $t \ln(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ , l'intégrale converge également. Pour la série entière, son rayon de convergence est clairement infini. Soit  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-xt} dt &= \int_0^1 e^{-xt \ln(t)} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!} dt \\ (*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{+\infty}^0 \frac{(-1)^n x^n e^{\frac{-un}{n+1}} (-u)^n}{n!(n+1)^n} \left( \frac{-e^{-\frac{u}{n+1}}}{n+1} \right) du \quad \text{avec } t = e^{-\frac{u}{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^{-n} \end{aligned}$$

(\*) Notons  $f_n(t) = \frac{(-xt \ln(t))^n}{n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f_n$  est cpm et intégrable sur  $[0,1]$ , de plus  $\sum f_n$  converge simplement vers  $F_x : t \mapsto t^{-xt}$  qui est cpm. Enfin comme  $t \in [0,1]$   $f_n$  est de signe constant, notre calcul à partir de (\*) justifie donc la convergence de  $\sum \int_0^1 |f_n|$ . L'échange série - intégrale est donc justifié. Alors

$$S(x) := \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} \left( \int_0^1 t^{-xt} dt \right)^{\frac{1}{x}}$$

D'abord,  $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \rightarrow 1$  Puis pour  $x \geq 1$  :

$$\left( \int_0^1 t^{-xt} dt \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \int_0^1 (t^{-t})^x dt \right)^{\frac{1}{x}} = \|f\|_x$$

Où  $f : t \mapsto t^{-t}$ . On se rappelle alors de l'exercice affirmant que

$$\|f\|_x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Avec une rapide étude de  $f$  on trouve que sa borne sup vaut  $e^{\frac{1}{e}}$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = e^{\frac{1}{e}} \quad \square$$

**Exercice 10\*\*\* (D'après [2]):** Soit  $(E,d)$  un espace métrique compact et  $f : E \rightarrow E$  continue telle que :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad (*)$$

Démontrer que  $f$  est bijective puis que  $f$  est une isométrie.

**Solution :** Soient  $x, y \in E$  tels que  $f(x) = f(y)$  alors  $0 = d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \geq 0$  donc  $x = y$ , ainsi  $f$  est injective.

Pour la surjectivité fixons  $y \in E$  et remarquons que pour  $x \in E$  et  $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \geq d(f(x), y)$$

On cherche donc  $x$  tel que  $d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ . Comme  $E$  est compact on peut trouver une extractrice  $\phi$  et  $l \in E$  telle que :

$$f^{\phi(n)}(y) \rightarrow l$$

Posons  $x_n = f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)$  et  $a_n = f^{\phi(n)+1}(x_n)$  Alors

$$a_n = f^{\phi(n)+1}(f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)) = f^{\phi(n+1)}(y) \rightarrow l$$

Extrayons une deuxième fois : il existe une extractrice  $\psi$  et  $x \in E$  tels que :

$$x_{\psi(n)} \rightarrow x$$

Comme

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x_{\psi(n)}) \rightarrow l,$$

(c'est une suite extraite de  $a_n$ ), on aimerait en conclure que :

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x) \rightarrow l$$

Attention ici à ne pas essayer d'utiliser la continuité de  $f^{\phi(\psi(n))+1}$ , la dépendance en  $n$  nous en empêche. Nous allons pour cela montrer le résultat suivant :

**Lemme** Soient  $u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ ,  $b_n \in E^{\mathbb{N}}$  tendant vers  $b \in E$  et  $l, l'$  dans  $E$  tels que :

$$f^{u_n}(b_n) \rightarrow l \quad \text{et} \quad f^{u_n}(b) \rightarrow l'$$

Alors  $l = l'$

**Preuve** Soit  $\epsilon > 0$  :

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_k}(b_n), l) \quad (1)$$

De plus, en appliquant (\*), si  $u_n \geq u_k$ :

$$d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n-u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l, f^{u_n-u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), f^{u_n}(l))$$

Par compacité, on dispose d'une extractrice  $\phi$  et de  $l_1 \in E$  telle que  $f^{u_{\phi(p)}}(l) \rightarrow l_1$

Finalement, en injectant dans (1) :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), l_1) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

On peut donc trouver  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq N_1 \quad d(f^{u_{\phi(p)}}(l), l_1) \leq \epsilon$  Il existe aussi  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq N_2 \quad d(l', f^{u_p}(b)) \leq \epsilon$ . Fixons donc  $p_1 \geq \max(N_1, N_2)$  et posons  $k = \phi(p_1)$  Ainsi  $k \geq p_1 \geq N_2$  et  $k \geq N_1$  Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq 2\epsilon + d(f^{u_n}(b), l') + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

Maintenant que  $k$  est fixée, on peut utiliser la continuité de  $f^{u_k}$  :

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_3 \quad d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) \leq \epsilon \quad (N_3 \text{ dépend de } k)$$

$$\exists N_4 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_4 \quad d(f^{u_p}(b_p), l) \leq \epsilon$$

Soit donc  $p_2 \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$  et  $n := \phi(p_2)$  vérifiant  $u_n \geq u_k$  (possible car  $u$  tends vers  $+\infty$ ) donc  $n \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$

On peut conclure :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq 6\epsilon$$

Ainsi  $l$  est une valeur d'adhérence de  $(f^{u_n}(b))_n$  et comme elle converge vers  $l'$  on a bien  $l = l'$   $\square$

Pour utiliser notre lemme, on a donc besoin que  $f^{\phi(\psi(n))+1}(x)$  converge, ce n'est pas forcément le cas, extrayons : il existe  $\gamma$  une extractrice et  $l' \in E$  tels que

$$f^{\phi(\psi(\gamma(n)))+1}(x) \rightarrow l'$$

Notons  $u_n = \phi(\psi(\gamma(n)))$ . On a :

$$f^{u_n+1}(x_{\psi(\gamma(n))}) \rightarrow l \quad \text{et} \quad x_{\psi(\gamma(n))} \rightarrow x$$

Donc par le lemme :

$$f^{u_n+1}(x) \rightarrow l$$

On obtient donc

$$d(f^{u_n+1}(x), f^{u_n}(y)) \geq d(f(x), y)$$

En passant a la limite :

$$d(f(x), y) \leq d(l, l) = 0$$

Ainsi  $f(x) = y$ , ce qui démontre la surjectivité de  $f$ .

Démontrons maintenant que  $f$  est une isométrie :  
Comme  $f$  est bijective on peut maintenant écrire :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \quad (**)$$

Pour  $x, y \in E$  posons  $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))$ . D'après (\*\*),  $(d_n)$  est décroissante, de plus elle est minorée par 0, elle est donc convergente, notons  $l$  sa limite. Comme  $E$  est compact il existe  $\gamma, \psi$  des extractrices et  $a, b \in E$  tels que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \rightarrow b$$

Notons  $\phi = \gamma \circ \psi$ . Alors comme  $d_{\phi(n)} \rightarrow l$  on a :  $d(a, b) = l$ , de plus par continuité de  $f$  :

$$f^{-\phi(n)+1}(x) \rightarrow f(a), \quad f^{-\phi(n)+1}(y) \rightarrow f(b)$$

Donc

$$d(f^{-\phi(n)+1}(x), f^{-\phi(n)+1}(y)) \rightarrow d(f(a), f(b))$$

Mais  $d_{\phi(n)-1}$  tends aussi vers  $l$  donc

$$d(f(a), f(b)) = d(a, b) = l$$

Ce qui ressemble pas mal a ce q'on cherche, on le veut pour tout  $a, b \in E$ . Fixons donc  $a, b \in E$ . Il suffirait donc d' avoir l' existence de  $x, y \in E$  ainsi que de  $\gamma$  et  $\psi$  des extractrices telles que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \rightarrow b$$

Commençons avec  $a$ , ce n'est pas évident... On peut essayer d'exprimer  $x$  en fonction de  $a$  et naïvement écrire " $x = f^{\gamma(n)}(a)$ " ce qui n'a pas de sens, mais  $(f^n(a))_n$  est bien une suite de  $E$  dont on peut donc extraire une suite convergente notons justement, pour voir  $\gamma$  l'extractrice et  $x$  la limite :

$$f^{\gamma(n)}(a) \rightarrow x$$

Notons  $x_n = f^{\gamma(n)}(a)$ . Alors comme  $f^{-\gamma(n)}(x_n) = a$  on a :

$$f^{-\gamma(n)}(x_n) \rightarrow a \quad \text{et} \quad x_n \rightarrow x$$

Cela nous rappelle notre lemme, il nous manque l'hypothèse : " $f^{-\gamma(n)}(x)$  converge ", mais quitte a extraire et a remplacer  $\gamma$  par  $\gamma \circ \gamma'$  par exemple, on peut la supposer vraie. Autre problème : la suite

$(-\gamma(n))_n$  ne tends pas vers  $+\infty$

Adaptons notre lemme aux suites de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  qui tendent vers  $-\infty$ . En regardant la preuve on voit que l'hypothèse " $u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ " n'est utilisé que pour avoir la continuité de  $f^{u_k}$  car  $f^{-1}$  n'est a priori pas continue, sauf qu'en fait si car elle est directement 1-lipschitzienne par (\*\*) on peut donc prendre  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ . L'hypothèse " $u_n \rightarrow +\infty$ " par contre est nécessaire pour trouver  $n$  vérifiant  $u_n \geq u_k$  et appliquer la majoration  $d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n - u_k}(l))$ . Bon... reprenons les mêmes notations et changeons la première ligne en :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l)$$

Dès que  $u_n$  est négative,  $d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) \leq d(b, b_n)$  en itérant (\*\*). Mais comme  $b_n \rightarrow b$  et  $f^{u_n}(b_n) \rightarrow l$  on a directement  $f^{u_n}(b) \rightarrow l$  puis  $l = l'$ . Donc c'est bon, c'était plus simple comme ça !

On peut donc utiliser cette version du lemme et conclure que  $f^{-\gamma(n)}(x) \rightarrow a$ . Tout se passe exactement pareil pour trouver  $y$  et  $\psi$  si on commence par extraire de la suite  $(f^{\gamma(n)}(b))_n$ . Cela conclut la preuve.

## References

- [1] Omid Amini et Igor Kortchemski. *Sujets posés - Ulm 2019*. URL: [https://www.ens.psl.eu/sites/default/files/2019\\_mathsulm\\_sujets-1.pdf](https://www.ens.psl.eu/sites/default/files/2019_mathsulm_sujets-1.pdf).
- [2] Igor Kortchemski. *Kholles de maths à Louis Le Grand*. URL: <http://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/exos.html>.