Exos sympas

Armand Perrin

February 18, 2024

Exercice 1: Soit $(G, .)$ un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre 2, montrer que son cardinal est une puissance de 2.

Solution : On propose 2 solution, la première très astucieuse et jolie et la deuxième plus accessible et généralisable.

Solution 1: Cette solution consiste à remarquer que $(G, \cdot, \wedge)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel (ça a un sens car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps).
Où la loi externe $\wedge$ est définie par $\wedge : \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (n, x) & \longmapsto & x^n \end{cases}$ En effet :
- $(G, .)$ est un groupe abélien : Soient $x, y \in G \quad 1 = (xy)^2 = xyxy$ et en composant a gauche par x et a droite par y on a bien $xy = yx$.
- $\forall x \in G \quad x^1 = x$
- $\forall x, y \in G, n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (xy)^n = x^n y^n$ car G est abélien.
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x \in G \quad x^{n+m} = x^n x^m$
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x \in G \quad (x^n)^m = x^{nm}$

cet espace vectoriel est de dimension finie car il est fini (tout famille de taille supérieure à $card(G)$ est liée). Notons k sa dimension, la fixation d'une base de G induit un isomorphisme entre G et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ ils sont donc de même cardinal : 2^k.

Solution 2: On démontre par récurrence sur k la propriété : "pour tout groupe G dont tous les éléments sont d'ordre 2 : $card(G) \leq 2^k \implies \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $card(G) = 2^p$ ". Avoir cette propriété pour tout k permet clairement de conclure.
Initialisation : si $k = 0$ c'est bon.
Hérédité : supposons la propriété réalisée pour $k \geq 1$, soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 tel que $card(G) \leq 2^{k+1}$, si $card(G) \leq 2^k$ c'est bon par l'hypothèse, sinon soit H un sous groupe strict de G de cardinal maximal (existe car ils sont en nombre fini) et $a \in G \backslash H$ alors $G = H \cup aH$ et $H \cap aH = \emptyset$, en effet $H \cup aH$ est un sous groupe de G :

-$1 \in H \cup aH$

-Soient $x, y \in H \cup aH$

si $x, y \in H$ alors $xy^{-1} \in H \subset H \cup aH$

si $x, y \in aH \quad \exists h, h' \in H \quad xy^{-1} = ah(ah')^{-1} = hh'^{-1} \in H$ car G est commutatif (voir Solution 1)

si $x \in H, y \in aH$ (ou le contraire, par symétrie) $\exists h, h' \in H \quad xy^{-1} = h(ah')^{-1} = ahh'^{-1} \in aH$ car $a^{-1} = a$.

Alors $H \cup aH = G$ par maximalité de H. Soit $x \in H \cap aH \quad \exists h, h' \in H \quad h' = ah$ absurde car alors $a = h'h^{-1} \in H$. Ainsi $H \cap aH = \emptyset$. En vertue de la bijection $x \mapsto ax, \quad card(H) = card(aH)$. On déduit de ces 3 points que $card(G) = 2card(H)$, donc $card(H) \leq 2^k$ et par l'hypothèse de récurrence $\exists p \in \mathbb{N} \quad card(H) = 2^p$ puis $card(G) = 2^{p+1}$.

Exercice 2 (d'après [2]): Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A_1, \ldots, A_p$ un ensemble de p matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ stable par produit, montrer que

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right) \equiv 0\,[p]$$

Solution : Notons G cet ensemble et $S = \sum_{i=1}^{p} A_i$, il faut remarquer que si $j \in [\![1, p]\!]$

$$\sum_{i=1}^{p} A_j A_i = \sum_{i=1}^{p} A_i = S \text{ car } M \mapsto A_j M \text{ est une permutation de } G$$

$$\text{Alors, } S^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} A_i A_j = p\sum_{i=1}^{p} A_i = pS$$

Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ divise p (c'est à dire si $p.1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$) alors $S^2 = 0$, S est donc nilpotente et sa trace est nulle. On a bien $\mathrm{Tr}(S) \equiv 0\,[p]$.

$$\text{Sinon : } \left(\frac{S}{p}\right)^2 = \frac{pS}{p^2} = \frac{S}{p}$$

$\frac{S}{p}$ est donc un projecteur, sa trace est donc égale à son rang, c'est donc un entier et par linéarité, la trace de S est divisible par p.

Exercice 3: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ nulle en a et b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que $f' + \lambda f$ s'annule sur $]a, b[$.

Solution : Les hypothèses ressemblent à celles du théorème de Rolle, on va chercher à l' appliquer, mais à quelle fonction ?
Analyse : On va chercher par exemple g dérivable vérifiant
- $g(a) = g(b)$
- $g'(c) = 0 \implies f'(c) + \lambda f(c) = 0$

le deuxième point serait vérifié si par exemple $g' = (f' + \lambda f)h$ avec h une fonction strictement positive. Choisissons h de manière à pouvoir primitiver g' on remarque que g' est la dérivée du produit fh si $h' = \lambda h$ ce qui fonctionne avec $h : x \mapsto e^{\lambda x}$.
Synthèse : On applique le théorème de Rolle à $g : x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$, g est continue sur $]a, b[$, dérivable sur $[a, b]$, nulle en a et b donc $\exists c \in]a, b[\quad g'(c) = 0$ or $g'(x) = (f'(x) + \lambda f(x))e^{\lambda x}$ donc $f'(c) + \lambda f(c) = 0$.

Exercice 4: Retrouver le binome de Newton à l'aide de la formule de Leibniz.

Solution : Si $a \in \mathbb{C}$ on cherche une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour laquelle on ait une relation simple entre $f^{(k)}$ et a^k pour tout k. Dans la lignée de l'exercice précédant on va considerer les fonctions exponentielles, posons : $f_a : x \mapsto e^{ax}$ alors $f_a^{(k)} = a^k f_a$. Soient $a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ on a avec Leibniz :

$$(a+b)^n = (a+b)^n e^{(a+b)\times 0} = f_{a+b}^{(n)}(0) = (f_a f_b)^{(n)}(0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_a^{(k)}(0) f_b^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 5 (Bézout dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$): Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $det(A) \wedge det(B) = 1$, montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$AU + BV = I_n$$

Solution : C'est direct quand on pense à la formule $MCom(M)^T = det(M)I_n$, car une relation de Bézout dans $\mathbb{Z}$ permet d'écrire :

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \quad ACom(A)^T u + BCom(B)^T v = (det(A)u + det(B)v)I_n = I_n$$

Exercice 6: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, démontrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de simlitude est fermée.

Solution : $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons M diagonalisable,
on note $C = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ la classe de similitude de M, démontrons qu'elle est fermée. Soit $(M_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons Π_M le polynome minimal de M et χ_M son polynome caractéristique. L'applcation $M \mapsto det(XI_n - M) = \chi_M$ étant continue car polynomiale, on a $\chi_{M_n} \to \chi_L$ or $\forall n \in \mathbb{N} \quad \chi_{M_n} = \chi_M$ donc $\chi_M = \chi_L$. De plus, on a classiquement pour $P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \Pi_M(PMP^{-1}) = P\Pi_M(M)P^{-1} = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Pi_M(M_n) = 0$ et par continuitée de $\Pi_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme polynome, $\Pi_M(L) = 0$ or Π_M est scindé, à racines simples puisque M est diagonalisable, donc L est aussi diagonalisable. M et L ont le même polynome caractéristique et sont diagonalisables donc semblables a une même matrice diagonale, elles sont donc semblables entre elles et $L \in C$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la classe de similitude C de M est fermée. On veut démontrer que M est diagonalisable, ce qui équivaut à dire que C contient une matrice diagonale. Il suffit donc de trouver une suite d'éléments de C convergeant vers une matrice diagonale, puisque C est fermée. M est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ donc on peut trouver $T \in C$ triangulaire supérieure. Considérons pour $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice digonale inversible : $P_k = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k^n \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{k^n} \end{pmatrix}$. La suite $(U_k)_k = (P_k T P_k^{-1})_k$ de C converge vers $diag(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$ où $T = (t_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. En effet le coefficient d'indice (i, j) de U_k vaut $t_{i,j}k^{i-j}$. Si $i > j$ alors $t_{i,j} = 0$, si $i < j \quad k^{i-j} \to 0$ et si $i = j \quad t_{i,j}k^{i-j} \to t_{i,i}$. □

Remarque : On peut démontrer avec la même méthode que M est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{C}$ (l'adhérence de C).

Exercice 7 (Théorème de Maschke): Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous groupe fini de $GL(E)$. Démontrer que tout sous espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire également stable par tout les élément de G.

Solution : Disons d'un sous-espace qu'il est stable par G si il est stable par tous les éléments de G. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par G. On va travailler avec des projecteurs, il est bien de se rendre compte que à un couple de sous espaces supplémentaire on peut toujours faire correspondre un projecteur et vice versa car le noyeau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires. Soit donc p un projecteur sur F. L'idée pricipale pour construire un supplémentaire stable par G est de chercher à construire un projecteur à partir de p et G ayant aussi F pour image et dont le noyeau est stable par G. On a déja remarqué dans l'exercice 2 que la somme des éléments d'un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ divisée par son cardinal est un projecteur, on peut donc s'en inspirer et poser $s = \frac{1}{n}\sum_{g \in G}^{n} gpg^{-1}$, où $n = card(G)$, de cette manière :

$$s^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{g \in G}^{n}\sum_{h \in G}^{n} hph^{-1}gpg^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{g \in G}^{n} gpg^{-1} = s$$

car $p_{|F} = id_F$ et $F = Im(p)$ est stable par G. s est le projecteur recherché, on a $Im(s) = F$ en effet :
$\boxed{\subset}$ Cette incluson est claire pusique F est stable par G.
$\boxed{\supset}$ si $x \in F$ alors $x = p(x) = \frac{1}{n}\sum_{g \in G}^{n} gpg^{-1}(x) \in Im(s)$ car $p_{|F} = id_F$.

On a aussi $Ker(s)$ stable par G : soit $x \in Ker(s)$, et $h \in G$

$$s(h(x)) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}^{n} gpg^{-1}(h(x)) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}^{n} hh^{-1}gp(h^{-1}g)^{-1}(x) = hs(x) = 0$$

car $g \mapsto h^{-1}g$ est une permutation de G. Donc $Ker(s)$ est stable par G. Finalement comme $Ker(s) \oplus F = Ker(s) \oplus Im(s) = E$, $Ker(s)$ est le supplémentaire recherché.

Remarque : Cette preuve est vraie pour tout corps $\mathbb{K}$ tel que $n.1_{\mathbb{K}} \neq 0$ (pour pouvoir diviser par n), c'est à dire dont la caractéristique ne divise pas n.

Autre solution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: On identifie E et $\mathbb{R}^p$ que l'on munit du produit scalaire canonique $< .,. >$, et on pose le produit scalaire $(.|.)$ sur E définit par :

$$\forall x, y \in E \quad (x|y) = \sum_{g\in G}^{n} < g(x), g(y) >$$

On travaille dans l'espace euclidien $(E, (.|.))$, encore par la bijection $g \mapsto hg$ pour $h \in G$, on constate que tout les éléments de G conservent le produit scalaire, donc sont autoadjoints et donc $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F stable par G.

Exercice 8: Démontrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ On va exhiber une application continue $\phi : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\phi(0) = I_n$ et $\phi(1) = A$
Regardons pour commencer le chemin en ligne droite : $\psi_A(t) = tA + (1-t)I_n$ il n'a pas de raison de rester dans $GL_n(\mathbb{C})$ mais pour

$$t \in]0,1] \quad \psi_A(t) \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \quad A + \frac{1-t}{t} I_n \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} \notin Sp(A)$$

Il suffit donc que A n'ait aucune valeur propre réelle pour que ce chemin ψ_A soit à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. Que faire si ce n'est pas le cas ? Trouver un chemin continu de A à une matrice dont les valeurs propres ne sont pas réelles. Posons

$$r : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t}A \end{cases}$$

Si $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors $Sp(r(t)) = \{e^{2i\pi t}\lambda_1, \dots, e^{2i\pi t}\lambda_n\}$.
Puisque l'ensemble $\{t \in [0,1] \,|\, \exists k \in [\![1,n]\!] \quad e^{2i\pi t}\lambda_k \in \mathbb{R}\}$ est fini on peut trouver $t_0 \in [0,1]$ tel que $Sp(r(t_0)) \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Notons $B = r(t_0)$. La restriction de r à $[0, t_0]$ est donc un chemin continu à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ joignant A et B, de même ψ_B continu à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ joint B et I_n, on construit donc facilement ϕ comme il faut.

Exercice 9 (ENS Lyon 2014): Determiner une CNS sur A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad tr(A^k) = tr(B^k) \quad (*)$$

Solution : Pour commencer simplifions le problème et cherchons les matrices A qui vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad tr(A^k) = 0 \quad (**)$$

C'est classique, on commence par observer que toutes les matrices nilpotentes fonctionnent, puis on montre que ce sont les seules : démontrons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ verifie $(**)$ alors son spectre est réduit à $\{0\}$. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A où les λ_i sont distinct 2 à 2, $n_i \geq 1$ la multiplicité de λ_i et $n_0 \geq 0$ la multiplicité de 0. On raisonne par l'absurde en supposant $r \geq 1$, $(**)$ pour $k \in [\![0, r]\!]$ donne :

$$\begin{aligned} n_0 + n_1\lambda_1^0 + \ldots + n_r\lambda_r^0 &= n \\ n_1\lambda_1 + \ldots + n_r\lambda_r &= 0 \\ n_1\lambda_1^2 + \ldots + n_r\lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ n_1\lambda_1^r + \ldots + n_r\lambda_r^r &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0^1 & \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0^r & \lambda_1^r & \ldots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 - n \\ n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système type Vandermonde inversible, on en déduit $\forall i \in [\![1, r]\!] \quad n_i = 0$ ce qui est absurde, donc $r = 0$ et $Sp(A) = \{0\}$

Pour le cas général ont peut remarquer que si A et B ont le même polynome caractéristique alors elles vérifient $(*)$ de plus la réciproque est vraie si $B = 0$ d'après ce qui précède. On va montrer qu'elle est toujours vraie. Pour une matrice M notons $\chi_{_M}$ son polynome caractéristique et Π_M son polynome minimal. Fixons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) vérifiant $(*)$. D'abord, la linéarité de la trace permet d'écrire :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad tr(P(A)) = tr(P(B))$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour $P = \chi_{_B}^k$ on a donc d'après Cayley-Hamilton :

$$tr(\chi_{_B}^k(A)) = 0$$

La matrice $\chi_{_B}(A)$ est donc nilpotente, donc $\chi_{_B}^n$ annule A, donc $\Pi_A | \chi_{_B}^n$ et donc $Sp(A) \subset Sp(B)$. Par symétrie on obtient ensuite l'inclusion réciproque, donc $Sp(A) = Sp(B)$.

Il ne reste plus qu'a montrer que les multiplicités des valeurs propres sont les mêmes pour avoir $\chi_{_A} = \chi_{_B}$. Notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ le spectre commun et a_i, b_i la multiplicité de λ_i dans $\chi_{_A}$ et $\chi_{_B}$ respectivement. $(*)$ donne alors :

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1^0 + \ldots + a_r\lambda_r^0 &= b_1\lambda_1^0 + \ldots + b_r\lambda_r^0 \\ \vdots \qquad &\vdots \qquad \vdots \\ a_1\lambda_1^{r-1} + \ldots + a_r\lambda_r^{r-1} &= b_1\lambda_1^{r-1} + \ldots + b_r\lambda_r^{r-1} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_r - b_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retombe sur une matrice de Vandermonde inversible et on conclut que

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad a_i = b_i$$

ce qui conclut.

Exercice 10 (Cassini): Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On pose $f_0 = g$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1} = \int_a f_n$$

Étudier la convergence de la série de fonctions :

$$\sum_{n\geq 0} f_n$$

et calculer sa somme.

Solution : Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f_n^{(k)} = f_{n-k}$ et si $n \neq 0$ $f_n(a) = 0$. g est bornée sur le segment $[a,b]$ car elle y est continue notons M une borne de g. Soit $x \in [a,b]$ le théorème de Taylor-Lagrange appliqué à f_n entre a et x s'écrit :

$$\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M(x-a)^n}{n!}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!}$$

Par passage au *sup* on déduit que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge. Donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$.
Calculons maintenant sa somme, que l'on note s :
Soit $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x s(t)dt = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt$$

La convergence uniforme nous autorise ici à échanger série et intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^x s(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x) \\ &= s(x) - g(x) \\ \text{Notons } S(x) &= \int_a^x s(t)dt. \end{aligned}$$

Alors $S' - S = g$, équation différentielle facile à résoudre, on obtient avec la condition $S(a) = 0$ que :

$$S(x) = e^x \int_a^x g(t)e^{-t}dt$$

et

$$s(x) = g(x) + e^x \int_a^x g(t)e^{-t}dt$$

Exercice 11: Soit $A \subset \mathbb{C}$, exhiber un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in L(E)$ tel que $Sp(f) = A$.

Solution : Considérons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $D : f \mapsto f'$ l'endomorphisme de dérivation sur E, puis pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$.
On pose $F = Vect_{\mathbb{C}}\Big((f_\lambda)_{\lambda\in A}\Big) = Vect_{\mathbb{R}}\Big((f_\lambda)_{\lambda\in A},(if_\lambda)_{\lambda\in A}\Big)$ qui est dans tous les cas un sous espace vectoriel de E vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la suite de la preuve est similaire que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

On constate que F est stable par D, notons $d = D_{|F} \in L(F)$:

$$\forall \lambda \in A \quad d(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

Et comme les f_λ sont tous non nuls, $A \subset Sp(d)$. Soit maintenant $\lambda \in Sp(d)$,

$$\exists f \in F \quad f' = \lambda f$$

On peut résoudre cette équation différentielle, et on obtient

$$\exists K \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{\lambda x}$$

On a aussi $f \in F$, et la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est $\mathbb{K}$-libre, donc nécessairement $f = Kf_\lambda$ avec $\lambda \in A$. Ainsi $A = Sp(d)$.

Exercice 12 (Théorème de Burnside): On dit qu'un groupe G est d'exposant fini si :

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall g \in G \quad g^N = 1$$

Le plus petit entier N vérifiant cela est alors appelé l'exposant de G, c'est aussi le plus petit multiple commun des ordres des éléments de G.

Démontrer qu'un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est d'exposant fini si et seulement si il est fini.

Solution : Il est clair que si G est fini $\forall g \in G \quad g^{|G|} = 1$ donc G est d'exposant fini. Réciproquement supposons G d'exposant fini, on va montrer que G est fini en construisant une injection de G dans un ensemble fini. Soit $B = (B_1, \ldots, B_r)$ une famille libre de G de cardinal maximal, on vérifie facilement que c'est une base de $Vect(G)$.
Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} Vect(G) & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \\ A & \longmapsto & (Tr(AB_1), \ldots, Tr(AB_r)) \end{array} \right.$ f est linéaire, montrons que $f_{|G}$ est injective:
On vérifie facilement qu'il suffit pour ça de montrer que $Ker(f) \cap G = \{0\}$. Soit $A \in Ker(f) \cap G$ et $k \in \mathbb{N}$, on peut decomposer A^k dans la base B, notons :

$$A^k = \sum_{i=1}^r a_i B_i$$

$$Tr(A^{k+1}) = \sum_{i=1}^r a_i Tr(AB_i) = 0$$

Car $A \in Ker(f)$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad Tr(A^k) = 0$$

Cela implique que A est nilpotente (exercice classique, voir exo 9). Or le ploynome scindé à racines simples $X^N - 1$ annule A puisque $A \in G$, donc A est diagonalisable et nilpotente, elle est donc nulle. $f_{|G}$ est donc injective.
Pour conclure montrons que $f(G)$ est fini. Déja $f(G) \subset E^r$ où
$E = \{Tr(A), A \in G\}$. Il suffit donc de montrer que E est fini, et en effet si $A \in G$, les valeurs propres de A sont des racines de $X^N - 1$ qui sont en nombres fini, la trace de A est la somme de ses valeurs propres, donc peut également prendre un nombre fini de valeurs, ainsi E est fini.

Exercice 13: Déterminer les endomorphismes de groupe continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Solution : Soit f un tel morphisme, posons $g = \ln \circ f \circ \exp$. On a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) &= \ln(f(e^{x+y})) \\ &= \ln(f(e^x e^y)) \\ &= \ln(f(e^x)f(e^y)) \\ &= \ln(f(e^x)) + \ln(f(e^y)) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

L'application g est continue comme composée, et additive, donc linéaire (c'est un exercice classique), donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= ax \\ \ln(f(e^x)) &= ax \\ f(e^x) &= e^{ax} \quad \text{par surjectivité de exp } \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad y = e^x \\ \text{donc } \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(y) &= y^a \end{aligned}$$

Réciproquement, les fonctions de la forme $x \mapsto x^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont bien des endomorphismes continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Autre Solution : Soit f un tel morphisme, il vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = f(x)f(y) \qquad (1)$$

En particulier $f(1)^2 = f(1)$ donc $f(1) \in \{0, 1\} \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $f(1) = 1$. On va chercher une équation différentielle vérifiée par f, pour montrer qu'elle est dérivable, intégrons (1) (bonne idée paradoxale) : puisque f est continue et strictement positive :

$$C := \int_1^2 f(y)dy > 0$$

puis, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(xy)dy &= \int_1^2 f(x)f(y)dy \\ \int_x^{2x} f(u)\frac{du}{x} &= f(x)\int_1^2 f(y)dy \quad \text{avec le changement de variables } u = xy \\ \text{d'où } f(x) &= \frac{1}{xC}\int_x^{2x} f(u)du \end{aligned}$$

f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc maintenant dériver (1) par rapport à x :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad yf'(xy) = f'(x)f(y)$$

et en $x = 1$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad yf'(y) = f'(1)f(y)$$

En résolvant cette équation différentielle on obtient :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = Kx^{f'(1)}$$

puis en évaluant en 1 il vient $K = 1$. Enfin on conclut car toutes les fonctions $x \mapsto x^a$ où $a \in \mathbb{R}$ conviennent.

Exercice 14: Soit $R > 0$ et A une partie de la sphère de rayon R, que l'on note $\mathcal{S}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Existe-t-il une série entiere $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R tel que l'ensemble des points de $\mathcal{S}(0, R)$ en lesquels f est bien définie (i.e la série converge) soit exactement A ?

Solution : On va démontrer que le résultat est faux en général par arguments de cardinalité :
Soit $R > 0$, pour une série entiere f notons $C(f)$ l'ensemble des points de $\mathcal{S}(0, R)$ où f converge. On raisonne par l'absurde en supposant que le résultat est vrai : pour tout $A \subset \mathcal{S}(0, R)$ il existe une série entiere f de rayon R telle que $C(f) = A$. On va commencer par démontrer le résultat suivant :

Lemme : Si $(a_n)n$ est une suite de complexes, il existe une suite $(q_n)_n$ de $\mathbb{Q}[i]$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge } \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} q_n z^n \text{ converge} \right)$$

Preuve : Soit $(a_n)n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, par densité de $\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{C}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists q_n \in \mathcal{B}(a_n, \frac{1}{n!}) \cap \mathbb{Q}[i]$$

Si on note $\varepsilon_n = q_n - a_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = a_n + \varepsilon_n$ et $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{n!}$, donc la série entiere $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n z^n$ a un rayon de convergence infini, de plus :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{n\geq 0} q_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} \varepsilon_n z^n$$

On a donc bien le résultat voulu puisque le terme le plus à droite converge toujours. □
Pour $u = (u_n)_n$ une suite complexe, on note $f_u : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Notre hypothèse implique d'après ce lemme que

$$\forall A \subset \mathcal{S}(0, R) \quad \exists q \in \mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}} \text{ tel que } f_q \text{ soit de rayon } R \text{ et } C(f_q) = A$$

Donc l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}} & \to & \mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R)) \\ q & \mapsto & C(f_q) \end{cases}$ est surjective. Or on peut montrer avec une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et l'équipotence de $\mathbb{Q}[i]$ et $\mathbb{Q}$ que $\mathbb{Q}[i]^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. De plus $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, exhibons une surjection, (c'est suffisant pour notre preuve) : à un réel x dont une écriture en base 11 est une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans $\{0, \ldots, 9, A\}$ on associe, si $(x_n)_n$ possède deux A consécutifs ou un nombre fini de A, la suite nulle et sinon la suite $(a_n)_n$ definit par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n$ est l'entier dont l'écriture décimale est $x_{i_n+1} \ldots x_{i_{n+1}-1}$ où i_n désigne le rang du n-ième A dans $(x_n)_n$. Cette application est facilement surjective, par composition, on dispose donc d'une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R))$. Or $\psi : \begin{cases} [0, 1[& \to & \mathcal{S}(0, R) \\ t & \mapsto & Re^{2i\pi t} \end{cases}$ est bijective et donc démontre, connaissant l'équipotence de $[0, 1[$ et $\mathbb{R}$, que $S(0, R)$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, il vient ensuite que $\mathcal{P}(\mathcal{S}(0, R))$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a donc grace à tout ce qui précède, une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ce qui est absurde d'après le théorème de Cantor.

Exercice 15 (D'après [1]):

Calculer

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : Le n^{-n} peut nous rappeler la fameuse et magnifique identité :

$$\int_0^1 t^{-t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

Baptisée "Sophomore's dream" ou "rêve du deuxième année" (oui oui, elle est vraie !!)

On va enfait montrer qu'on a même :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^1 t^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^{-n}$$

Pour $x = 0$ l'intégrale converge, pour $x \neq 0$ $t^{-xt} = e^{-xt\ln(t)} \to 1$ car $t\ln(t) \to 0$ quand $t \to 0$, l'intégrale converge également. Pour la série entière, son rayon de convergence est clairement infini. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-xt\ln(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-xt\ln(t))^n}{n!}\mathrm{d}t \\
(*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-xt\ln(t))^n}{n!}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{+\infty}^0 \frac{(-1)^n x^n e^{\frac{-un}{n+1}}(-u)^n}{n!(n+1)^n}\Big(\frac{-e^{-\frac{u}{n+1}}}{n+1}\Big)\mathrm{d}u \qquad \text{avec } t = e^{-\frac{u}{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u}u^n\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}n^{-n}
\end{aligned}$$

(*) Notons $f_n(t) = \frac{(-xt\ln(t))^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est cpm et intégrable sur [0,1], de plus $\sum f_n$ converge simplement vers $F_x : t \mapsto t^{-xt}$ qui est cpm. Enfin comme $t \in [0,1]$ f_n est de signe constant, notre calcul à partir de (*) justife donc la convergence de $\sum \int_0^1 |f_n|$. L'échange série - intégrale est donc justifié. Alors

$$S(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{n}\Big)^n\right)^{\frac{1}{x}} \;=\; x^{\frac{1}{x}}\left(\int_0^1 t^{-xt}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$$

D'abord, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \to 1$ Puis pour $x \geq 1$:

$$\left(\int_0^1 t^{-xt}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\int_0^1 (t^{-t})^x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} = \|f\|_x$$

Où $f : t \mapsto t^{-t}$. On se rappelle alors de l'exercice affirmant que

$$\|f\|_x \xrightarrow[x\to\infty]{} \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Avec une rapide étude de f on trouve que sa borne sup vaut $e^{\frac{1}{e}}$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = e^{\frac{1}{e}} \quad \square$$

Exercice 16 (D'après [2]): Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ continue telle que :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \qquad (*)$$

Démontrer que f est bijective puis que f est une isométrie.

Solution : Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $0 = d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \geq 0$ donc $x = y$, ainsi f est injective.
Pour la surjectivité fixons $y \in E$ et remarquons que pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \geq d(f(x), y)$$

On cherche donc x tel que $d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \to 0$. Comme E est compact on peut trouver une extractrice ϕ et $l \in E$ telle que :

$$f^{\phi(n)}(y) \to l$$

Posons $x_n = f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)$ et $a_n = f^{\phi(n)+1}(x_n)$ Alors

$$a_n = f^{\phi(n)+1}(f^{\phi(n+1)-\phi(n)-1}(y)) = f^{\phi(n+1)}(y) \to l$$

Extrayons une deuxième fois : il existe une extractrice ψ et $x \in E$ tels que :

$$x_{\psi(n)} \to x$$

Comme

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x_{\psi(n)}) \to l,$$

(c'est une suite extraite de a_n), on aimerait en conclure que :

$$f^{\phi(\psi(n))+1}(x) \to l$$

Attention ici à ne pas essayer d'utiliser la continuité de $f^{\phi(\psi(n))+1}$, la dépendance en n nous en empèche. Nous allons pour cela montrer le résultat suivant :

Lemme Soient $u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, $b_n \in E^{\mathbb{N}}$ tendant vers $b \in E$ et l, l' dans E tels que :

$$f^{u_n}(b_n) \to l \quad et \quad f^{u_n}(b) \to l'$$

Alors $l = l'$

Preuve Soit $\epsilon > 0$:

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_k}(b_n), l) \quad (1)$$

De plus, en appliquant (*), si $u_n \geq u_k$:

$$d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n - u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l, f^{u_n - u_k}(l)) \leq d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), f^{u_n}(l))$$

Par compacité, on dispose d'une extractrice ϕ et de $l_1 \in E$ telle que $f^{u_{\phi(p)}}(l) \to l_1$
Finalement, en injectant dans (1) :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), l') + d(l', f^{u_k}(b)) + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(f^{u_k}(l), l_1) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

On peut donc trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_1 \quad d(f^{u_{\phi(p)}}(l), l_1) \leq \epsilon$ Il existe aussi $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_2 \quad d(l', f^{u_p}(b)) \leq \epsilon$. Fixons donc $p_1 \geq max(N1, N2)$ et posons $k = \phi(p_1)$ Ainsi $k \geq p_1 \geq N_2$ et $k \geq N_1$ Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq 2\epsilon + d(f^{u_n}(b), l') + d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l) + d(l_1, f^{u_n}(l))$$

Maintenant que k est fixé, on peut utiliser la continuité de f^{u_k} :
$\exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_3 \quad d(f^{u_k}(b), f^{u_k}(b_n)) \leq \epsilon \qquad$ (N_3 dépend de k)
$\exists N_4 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N_4 \quad d(f^{u_p}(b_p), l) \leq \epsilon$

Soit donc $p_2 \geq max(N_1, N_2, N_3, N_4)$ et $n := \phi(p_2)$ vérifiant $u_n \geq u_k$ (possible car u tends vers $+\infty$) donc $n \geq max(N_1, N_2, N_3, N_4)$
On peut conclure :

$$d(f^{u_n}(b), l) \leq 6\epsilon$$

Ainsi l est une valeur d'adhérence de $(f^{u_n}(b))_n$ et comme elle converge vers l' on a bien $l = l'$ $\square$

Pour utiliser notre lemme, on a donc besoin que $f^{\phi(\psi(n))+1}(x)$ converge, ce n'est pas forcément le cas, extrayons : il existe γ une extractrice et $l' \in E$ tels que

$$f^{\phi(\psi(\gamma(n)))+1}(x) \to l'$$

Notons $u_n = \phi(\psi(\gamma(n)))$. On a :

$$f^{u_n+1}(x_{\psi(\gamma(n))}) \to l \quad et \quad x_{\psi(\gamma(n))} \to x$$

Donc par le lemme :

$$f^{u_n+1}(x) \to l$$

On obtient donc

$$d(f^{u_n+1}(x), f^{u_n}(y)) \geq d(f(x), y)$$

En passant a la limite :

$$d(f(x), y) \leq d(l, l) = 0$$

Ainsi $f(x) = y$, ce qui démontre la surjectivité de f.

Démontrons maintenant que f est une isométrie :
Comme f est bijective on peut maintenant écrire :

$$\forall x, y \in E \;\; d(x, y) \geq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \qquad (**)$$

Pour $x, y \in E$ posons $\forall n \in \mathbb{N} \;\; d_n = d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))$. D'après (**), (d_n) est décroissante, de plus elle est minorée par 0, elle est donc convergente, notons l sa limite. Comme E est compact il existe γ, ψ des extractrices et $a, b \in E$ tels que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \to a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \to b$$

Notons $\phi = \gamma \circ \psi$. Alors comme $d_{\phi(n)} \to l$ on a : $d(a, b) = l$, de plus par continuité de f :

$$f^{-\phi(n)+1}(x) \to f(a), \quad f^{-\phi(n)+1}(y) \to f(b)$$

Donc

$$d(f^{-\phi(n)+1}(x), f^{-\phi(n)+1}(y)) \to d(f(a), f(b))$$

Mais $d_{\phi(n)-1}$ tends aussi vers l donc

$$d(f(a), f(b)) = d(a, b) = l$$

Ce qui ressemble pas mal a ce q'on cherche, on le veut pour tout $a, b \in E$. Fixons donc $a, b \in E$. Il suffirait donc d' avoir l' existence de $x, y \in E$ ainsi que de γ et ψ des extractrices telles que

$$f^{-\gamma(n)}(x) \to a, \quad f^{-\gamma(\psi(n))}(y) \to b$$

Commençons avec a, ce n'est pas évident... On peut essayer d'exprimer x en fonction de a et naivement écrire "$x = f^{\gamma(n)}(a)$" ce qui n'a pas de sens, mais $(f^n(a))_n$ est bien une suite de E dont on peut donc extraire une suite convergente notons justement, pour voir γ l'extractrice et x la limite :

$$f^{\gamma(n)}(a) \to x$$

Notons $x_n = f^{\gamma(n)}(a)$. Alors comme $f^{-\gamma(n)}(x_n) = a$ on a :

$$f^{-\gamma(n)}(x_n) \to a \quad et \quad x_n \to x$$

Cela nous rappelle notre lemme, il nous manque l'hypothèse : "$f^{-\gamma(n)}(x)$ converge ", mais quitte a extraire et a remplacer γ par $\gamma \circ \gamma'$ par exemple, on peut la supposer vraie. Autre problème : la suite $(-\gamma(n))_n$ ne tends pas vers $+\infty$

Adaptons notre lemme aux suites de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers $-\infty$. En regardant la preuve on voit que l'hypothèse "$u_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ " n'est utilisé que pour avoir la continuité de f^{u_k} car f^{-1} n'est a priori pas continue, sauf qu'en fait si car elle est directement 1-lipschitzienne par (**) on peut donc prendre $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. L'hypothèse "$u_n \to +\infty$" par contre est nécessaire pour trouver n vérifiant $u_n \geq u_k$ et appliquer la majoration $d(f^{u_k}(b_n), l) \leq d(f^{u_n}(b_n), f^{u_n - u_k}(l))$. Bon... reprenons les mêmes notations et changeons la première ligne en :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{u_n}(b), l) \leq d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) + d(f^{u_n}(b_n), l)$$

Dès que u_n est négative, $d(f^{u_n}(b), f^{u_n}(b_n)) \leq d(b, b_n)$ en itérant (**). Mais comme $b_n \to b$ et $f^{u_n}(b_n) \to l$ on a directement $f^{u_n}(b) \to l$ puis $l = l'$. Donc c'est bon, c'était plus simple comme ça !

On peut donc utiliser cette version du lemme et conclure que $f^{-\gamma(n)}(x) \to a$. Tout se passe exactement pareil pour trouver y et ψ si on commence par extraire de la suite $(f^{\gamma(n)}(b))_n$. Cela conclut la preuve.

Exercice 17 (Preuve topologique de Cayley-Hamilton): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
1) Démontrer que si A est diagonalisable, alors $\chi_A(A) = 0$.
2) En déduire que $\chi_A(A) = 0$.

Solution : 1) On note $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, P inversible. On a facimement $\chi_A(A) = \chi_D(A) = \chi_D(D)$. Mais cette matrice est diagonale, et s'écrit $\prod_{i=1}^{n}(D - \lambda_i I_n)$. Où $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Et comme les coefficients diagonaux de D sont aussi les valeurs propres de A, on peut voir que ce produit de matrices diagonales est nul.
2) On va conclure par densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: on dispose d'une suite $(A_n)_n$ de matrices diagonalisables qui tends vers A. Cela ne dépend pas des normes, en dimension finie. Il suffit d'après 1) de montrer que $\chi_{A_n}(A_n) \to \chi_A(A)$ car il s'agirait alors de la limite de la suite nulle. L'application $f : M \mapsto \chi_M$ est continue puisque $\chi_M = \det(XI_n - M)$ et le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice. Choisissons des normes qui nous arrangent : la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $B = \mathcal{B}_f(A, 1)$ et on pose pour $P \in \mathbb{C}_n[X] \quad \|P\| := \sup_{M \in B} \|P(M)\|_\infty$. Le sup est bien définit car P est continue sur le compact B donc majorée. Montrons qu'on définit ainsi une norme :
Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
• Homgénéité : $\|\lambda P\| = \sup_{M \in B} \|\lambda P(M)\|_\infty = \sup_{M \in B} |\lambda| \|P(M)\|_\infty = |\lambda| \|P\|$.
• Inégalité triangulaire : $\forall M \in B \quad \|P(M) + Q(M)\|_\infty \leq \|P(M)\|_\infty + \|Q(M)\|_\infty \leq \|P\| + \|Q\|$ par passage au sup : $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.
• Definition : Supposons $\|P\| = 0$, P est donc nul sur B. Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut trouver $U \in GL_n(\mathbb{C}) \cap \mathring{B}$. Soit λ une valeur propre de U (il en existe toujours car son polynome caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$) et X un vecteur propre associé, comme U est inversible, nécéssairement $\lambda \neq 0$. Puisque $\mathring{B}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(U, \varepsilon) \subset \mathring{B}$ En particulier $\forall t \in [0, \varepsilon[\quad P(tU) = 0$. Puis pour $t \in [0, \varepsilon[$:

$$tUX = t\lambda X$$
$$P(tU)X = P(t\lambda)X = 0$$

Or $X \neq 0$ donc $P(t\lambda) = 0$, λ étant non nul, P admet une infinité de racines dans $\mathbb{C}$, donc $P = 0$. (Remarquons que cela définit même une norme sur $\mathbb{C}[X]$.)

Puisque f est continue on a $\chi_{A_n} \to \chi_A$ pour $\|.\|$ i.e $\|\chi_{A_n} - \chi_A\| \to 0$ i.e la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ converge uniformément vers χ_A sur B. Donc pour n suffisament grand, $A_n \in B$ et

$$\begin{aligned}\|\chi_{A_n}(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty &\leq \|\chi_{A_n}(A_n) - \chi_A(A_n)\|_\infty + \|\chi_A(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty \\ &\leq \|\chi_{A_n} - \chi_A\| + \|\chi_A(A_n) - \chi_A(A)\|_\infty\end{aligned}$$

On a vu que le terme de gauche tend vers 0, celui de droite tend aussi vers 0 par continuité de $M \mapsto \chi_A(M)$ comme polynome. On a bien $\chi_{A_n}(A_n) \to \chi_A(A)$.

Exercice 18 (D'après [1]): Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et telle que $I := \int_0^{+\infty} f^2(x)dx < \infty$. Déterminier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}$$

Solution : Il faut ici reconaitre la solution d'une équation différentielle de la forme :

$$y' + y = f \qquad (1)$$

Si on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad y(x) = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$$

alors y est clairement solution de (1). Faisons maintenant aparaître I :

$$\begin{aligned} y' + y &= f \\ (y'+y)^2 &= f^2 \\ y'^2 + 2yy' + y^2 &= f^2 \\ \text{En intégrant : } \int_0 y'^2 + \int_0 2yy' + \int_0 y^2 &= \int_0 f^2 \\ \int_0 y'^2 + y^2 - y(0)^2 + \int_0 y^2 &= \int_0 f^2 \qquad (2) \\ \text{puis } \int_0 y^2 &\leq \int_0 y'^2 + y^2 + \int_0 y^2 \\ &\leq y(0)^2 + \int_0 f^2 \\ &\leq y(0)^2 + I \end{aligned}$$

La fonction $\int_0 y^2$ étant croissante car de dérivée $y^2 \geq 0$ et majorée, elle admet un limite en $+\infty$. Il en est de même pour $\int_0 y'^2$, on voit donc avec (2) que y^2 converge également en $+\infty$, notons l sa limite puisque $\int_0^{+\infty} y^2$ est convergente, nécéssairement $l = 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$

.

Exercice 19: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable, montrer que :

$$\det(f)' = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(f)^T f')$$

de deux manières différentes.

Solution : Première méthode. Notons $f_{i,j}$ les applications coordonnés de f dans la base cannonique.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\operatorname{Com}(f)^T f') &= \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{Com}(f)^T f'\right]_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Com}(f)^T\right]_{i,k} f'_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\Delta_{k,i} f'_{k,i}
\end{aligned}$$

Pause, calculons $\Delta_{k,i}$ pour $1 \leq i,k \leq n$, en notant $\tilde{f}$ la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ déduite de f en retirant la k-ème ligne et la i-ème colone :

$$\begin{aligned}
\Delta_{k,i} &= \det(\tilde{f}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{f}_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \prod_{l<m} \Big(\frac{\sigma(l)-\sigma(m)}{l-m}\Big) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{f}_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(i)=k} \prod_{l<m, l,m\neq i} \Big(\frac{\sigma(l)-\sigma(m)}{l-m}\Big) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{l\neq i}^{n} \Big(\frac{\sigma(l)-\sigma(i)}{l-i}\Big)^{-1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{l\neq i}^{n} \Big(\frac{l-i}{\sigma(l)-k}\Big) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j}
\end{aligned}$$

La valeur absolue de ce premier produit vaut 1 et il contient $i-1$ numérateurs négatifs et $k-1$ dénominateurs négatifs, il vaut donc $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}$. Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\operatorname{Com}(f)^T f') &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\Delta_{k,i} f'_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{2i+2k} \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(i)=k} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j} f'_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j} f'_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_{\sigma(j),j} f'_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} f_{\sigma(j),j}\right)' \\
&= \det(f)'
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. On va calculer la différentielle du determinant :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ∇M le gradient du determinant en M et $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique.

Avec la formule de dérivation des formes n-linéaires et en notant C_i la fonction "colone i" sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
[\nabla M]_{i,j} = \frac{\partial \det}{\partial e_{i,j}}(M) &= \sum_{k=1}^{n} \det(C_1, \ldots, \frac{\partial C_k}{\partial e_{i,j}}, \ldots, C_n)(M) \\
&= \det(C_1, \ldots, \frac{\partial C_j}{\partial e_{i,j}}, \ldots, C_n)(M) \\
&= \begin{vmatrix} m_{1,1} & \ldots & 0 & \ldots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i,1} & \ldots & 1 & \ldots & m_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & 0 & \ldots & m_{n,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

En développant suivant la j-ème colone il vient $[\nabla M]_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ puis $\nabla M = \mathrm{Com}(M)$. Notons D_M la différentielle du det en M, alors :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad D_M(H) =< \nabla M, H >= \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T H)$$

Puis, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \det(f)'(x) = d(\det \circ f)_x(1) = D_{f(x)} \circ \, df_x(1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(f(x))^T f'(x))$

References

[1] Omid Amini et Igor Kortchemski. *Sujets posés - Ulm 2019*. URL: https://www.ens.psl.eu/sites/default/files/2019_mathsulm_sujets-1.pdf.

[2] Igor Kortchemski. *Kholles de maths à Louis Le Grand*. URL: http://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/exos.html.