Pavages de régions du plan

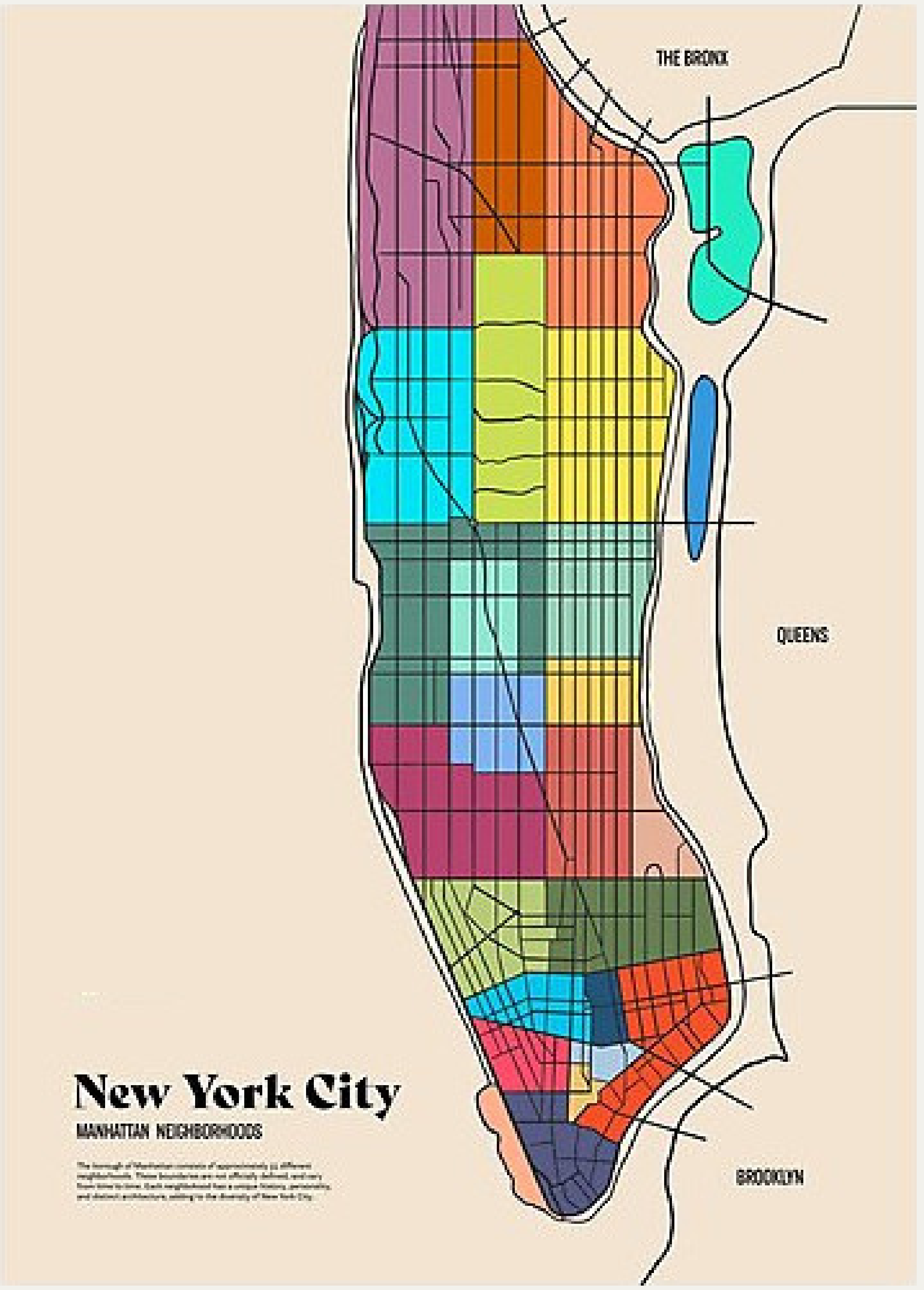
TIPE 2023

Perrin Armand
46676

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

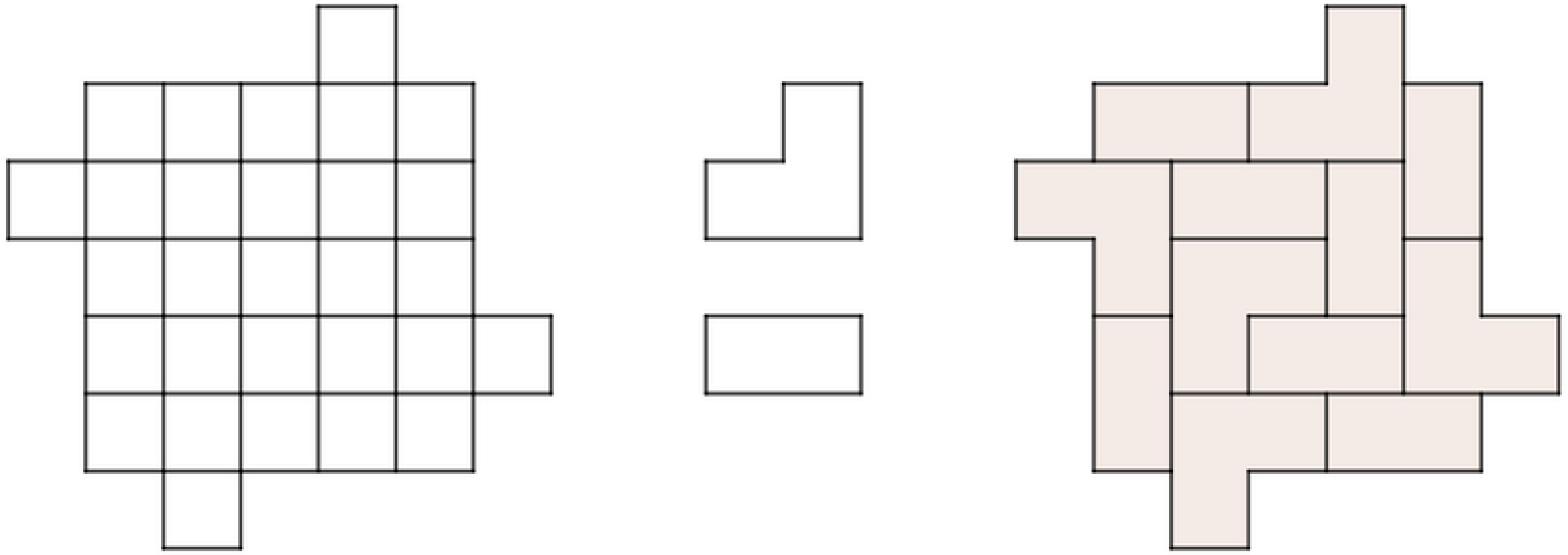
Positionnement du probleme

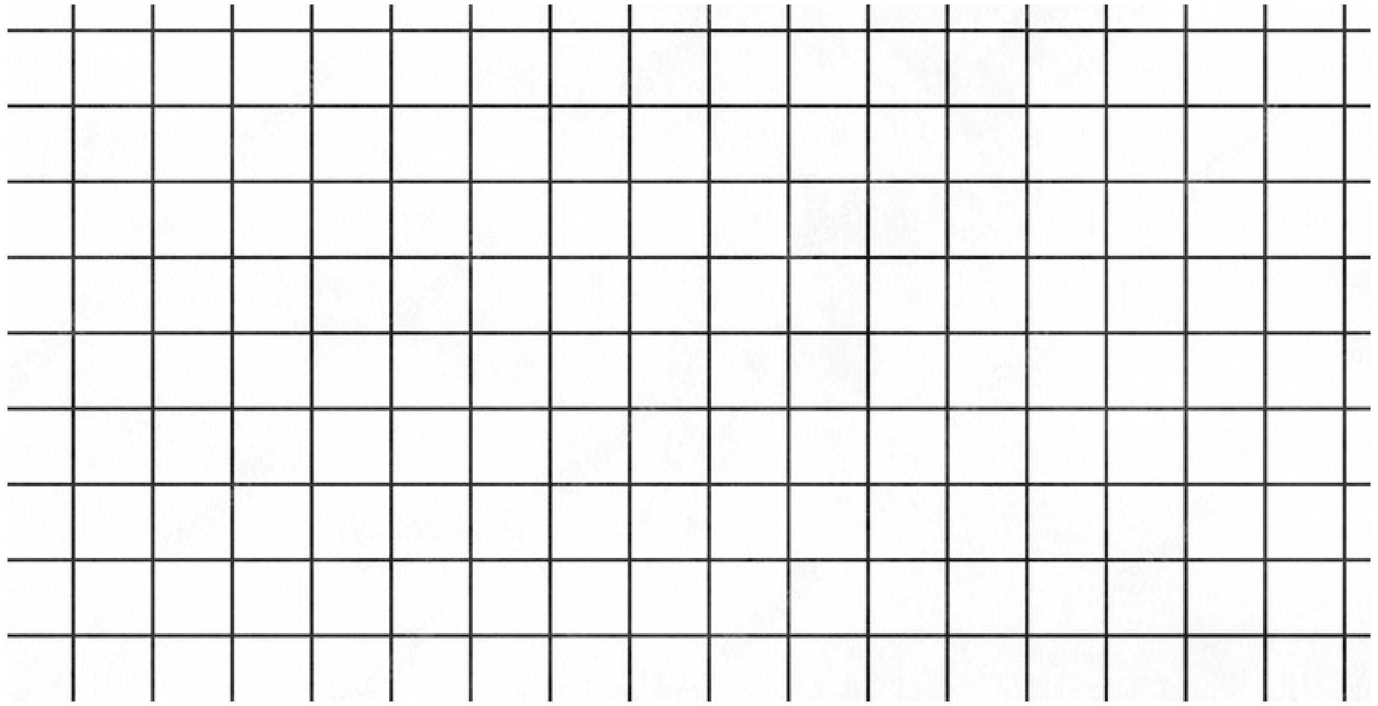


Le développement des grandes villes requiert une bonne organisation de l'espace pour s'adapter aux contraintes du terrain.

On est alors amené à chercher un pavage d'une certaine région par un ensemble de tuiles.

Contexte théorique





Pavage P du plan

On travaille dans le plan euclidien,

On considère P, le pavage du plan par des carrés, nos tuiles et régions seront formées de carrés de P.

On dit qu' un ensemble de tuiles E pave une région R si il existe un ensemble S de translations des tuiles de E recouvrant chaque carré de R exactement une fois.

Problématique, Objectif

Problématique :

Comment déterminer, étant donné un ensemble de tuiles et une région R du plan, si cet ensemble pave R ?

Objectif :

Donner un condition nécessaire algébrique pour qu'un ensemble de tuiles pave une région.

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

Le groupe Libre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit un ensemble de lettres de taille n noté : $X = \{x_1, ..., x_n\}$
et $X^{-1} = \{x^{-1} \,|x \in X\}$

on note $M(X)$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$

un mot de $M(X)$ s'écrit alors $x_{i_1}^{p_1} x_{i_2}^{p_2} ... x_{i_k}^{p_k}$ où les p_j sont des entiers relatifs
et les i_j dans $[\![1, n]\!]$

pour u,v dans $M(X)$ on note uv la concaténation de u et v

Le groupe libre

On dit qu'un mot est réduit si $\forall j \in [\![1, n]\!] \;\; i_j \neq i_{j+1}$ et $p_j \neq 0$

On dispose de l'application R qui a un mot $m \in M(X)$ associe un mot réduit définit récursivement de la manière suivante :

- si m est un mot réduit $R(m) = m$
- si $m = ux_i^p x_i^q v$ où $u, v \in M(X)$, si $p + q = 0$ $R(m) = R(uv)$ sinon $R(m) = R(ux_i^{p+q}v)$

On note F(X) l'ensemble des mots réduits

Proposition 1 :

$F(X)$ munit de la loi $\circ : (u, v) \mapsto R(uv)$ est un groupe appelé groupe libre de base X dont le neutre est le mot vide, noté 1

Sous groupe normal, Quotient

Soit G un groupe, un sous groupe N de G est dit normal et on le note $N \lhd G$ si $\forall a \in G \ aN = Na$

Propriété : Soit G et N $\lhd$ G l'ensemble $G/N = \{aN, a \in G\}$ muni de la loi $\circ : (aN, bN) \mapsto (ab)N$ est un groupe appelé quotient de G par N

Preuve 2

- La loi est bien définie :

Soient $a, b, x, y \in G$ tels que $aN = xN$ et $bN = yN$:
$(aN) \circ (bN) = (abN) = a(bN) = a(yN) = a(Ny) = (aN)y$
$= (xN)y = x(Ny) = x(yN) = (xy)N = (xN) \circ (yN)$

- Le neutre est $eN = N$ avec e le neutre de G

on a bien $\forall x \in G (xN) \circ (eN) = (eN) \circ (xN) = (ex)N = xN$

- Soit $aN \in G/N$ $\quad (aN) \circ (a^{-1}N) = (a^{-1}N) \circ (aN) = (aa^{-1})N = N$

- L'associtivité de G/N découle de celle de G

Présentation d'un groupe

Une présentation de groupe notée :
$< x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_k >$ consiste en un ensemble
$X = \{x_1, ..., x_n\}$ appelé ensemble des générateurs et un sousensemble
$R = \{r_1, ..., r_k\} \subset F(X),$ appelé ensemble des relations.

On note $Q(R)$ le plus petit sous groupe normal de $F(X)$ contenant R
Le groupe présenté par $< x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_k >$ est par definition :
$G = F(X)/Q(R)$

Si X et R sont finis G est dit de présentation finie.

Présentation d'un groupe

Soit $G = < x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_k >$

Pour mieux comprendre la nature d'une présentation de groupe, on se propose de carractériser les mots de F(X) qui correspondent au neutre dans G,
c'est à dire qui sont dans Q(R)

Proposition 3:
Soit $u \in F(X)$, $u \in Q(R)$ si et seulement si
pour tout groupe H et tout morphisme $\phi : F(X) \mapsto H$
$R \subset Ker(\phi) \Rightarrow u \in Ker(\phi)$

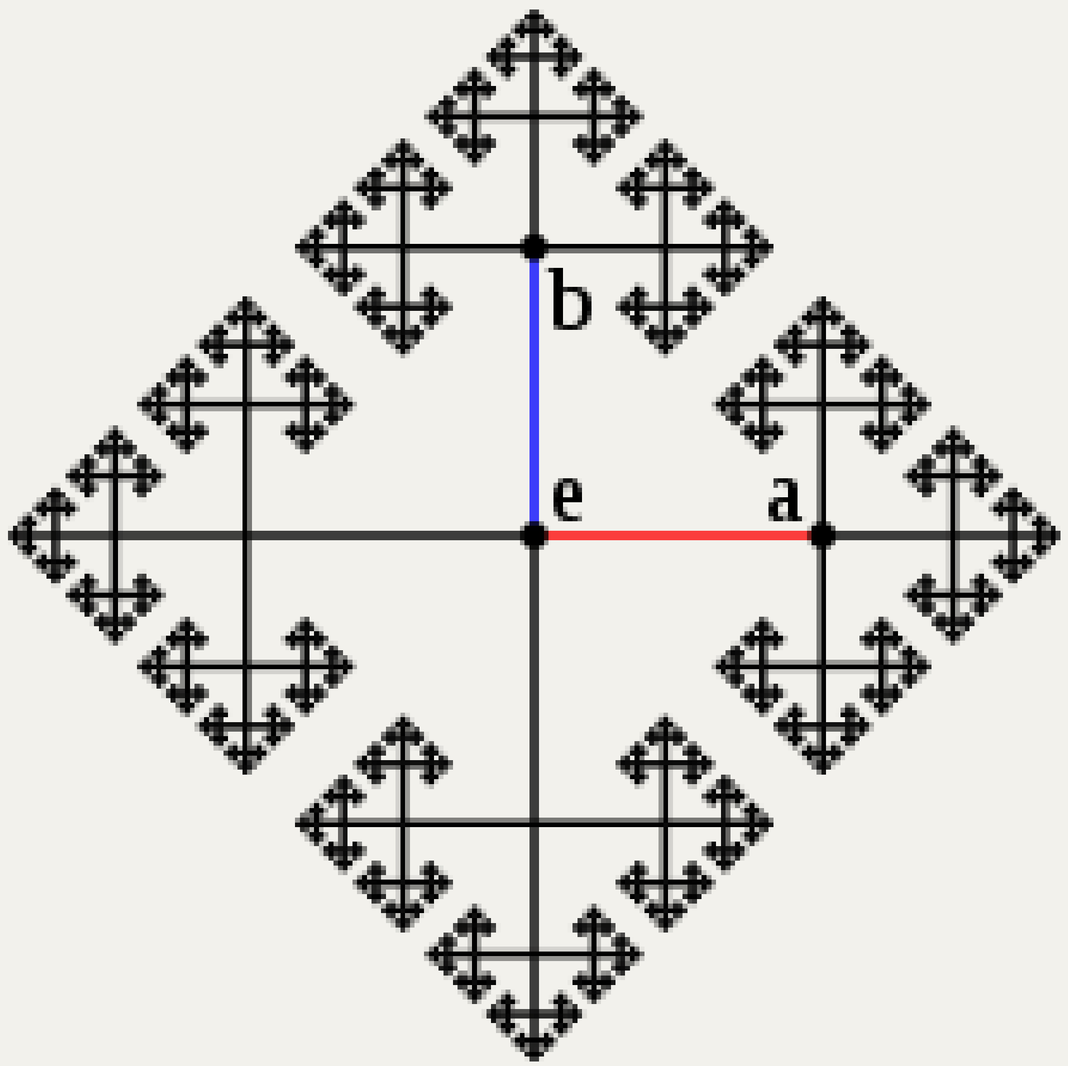
$$\begin{aligned}
< a | a^2 = 1 > &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\
< a, b | aba^{-1}b^{-1} = 1 > &= \mathbb{Z}^2, \\
< a, b, c | aba^{-1}b^{-1} = aca^{-1}c^{-1} = cbc^{-1}b^{-1} = 1 > &= \mathbb{Z}^3, \\
< a, b, c | c^{-1}ab = aba^{-1}b^{-1} = 1 > &= \mathbb{Z}^2. \\
< a, b | a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1 > &= \mathcal{S}_3.
\end{aligned}$$

Preuve 3

• $\Rightarrow$: Soit $u \in Q(R)$, et ϕ un morphisme, notons $K = Ker(\phi)$
Montrons que $K \triangleleft F(x)$:
Soit $m \in F(x)$,
$\forall x \in K \quad \phi(mxm^{-1}) = \phi(m)\phi(x)\phi(m)^{-1} = \phi(m)\phi(m)^{-1} = 1$
donc $mKm^{-1} \subset K$ De même Soit $x \in K$
$x = mm^{-1}xmm^{-1} \in mKm^{-1}$
Ainsi $K = mKm^{-1}$ i.e $K \triangleleft F(X)$
K est un sous groupe normal qui contient R, donc $Q(R) \subset K$ puis $u \in K$

• $\Leftarrow$: Soit ψ le morphisme canonique :
$\psi : F(X) \to F(X)/Q(R)$
$a \mapsto aQ(R)$
On a $R \subset Ker(\psi)$ donc $u \in Ker(\psi)$ or $Ker(\psi) = Q(R)$
On a bien $u \in Q(R)$ $\square$

Graphe de Cayley



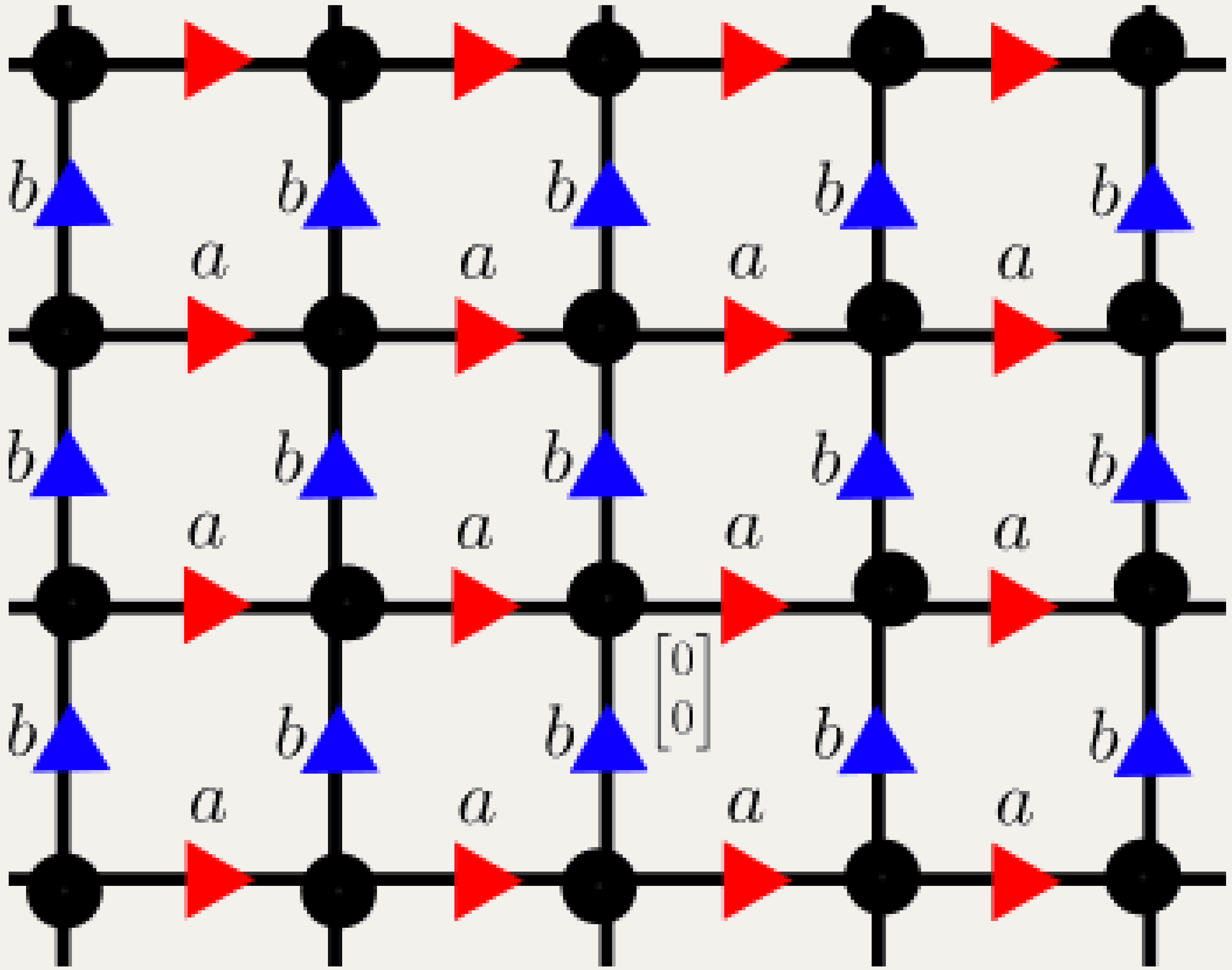
Graphe de cayley de F({a,b})

On définit le graphe de Cayley d'un groupe G de présentation finie $< x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_k >$ avec pour ensemble de sommets les éléments de G et $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall a \in G$ une arête entre a et ax_i étiquetée par x_i, on le note $\widetilde{\Gamma}(G)$.

Le graphe de Cayley non orienté est défini de la même manière mais sans orientation des arêtes. On le note $\Gamma(G)$.

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

Un gaphe de Cayley



On note $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ le graphe de Cayley non orienté de $\mathbb{Z}^2 =< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 >$.

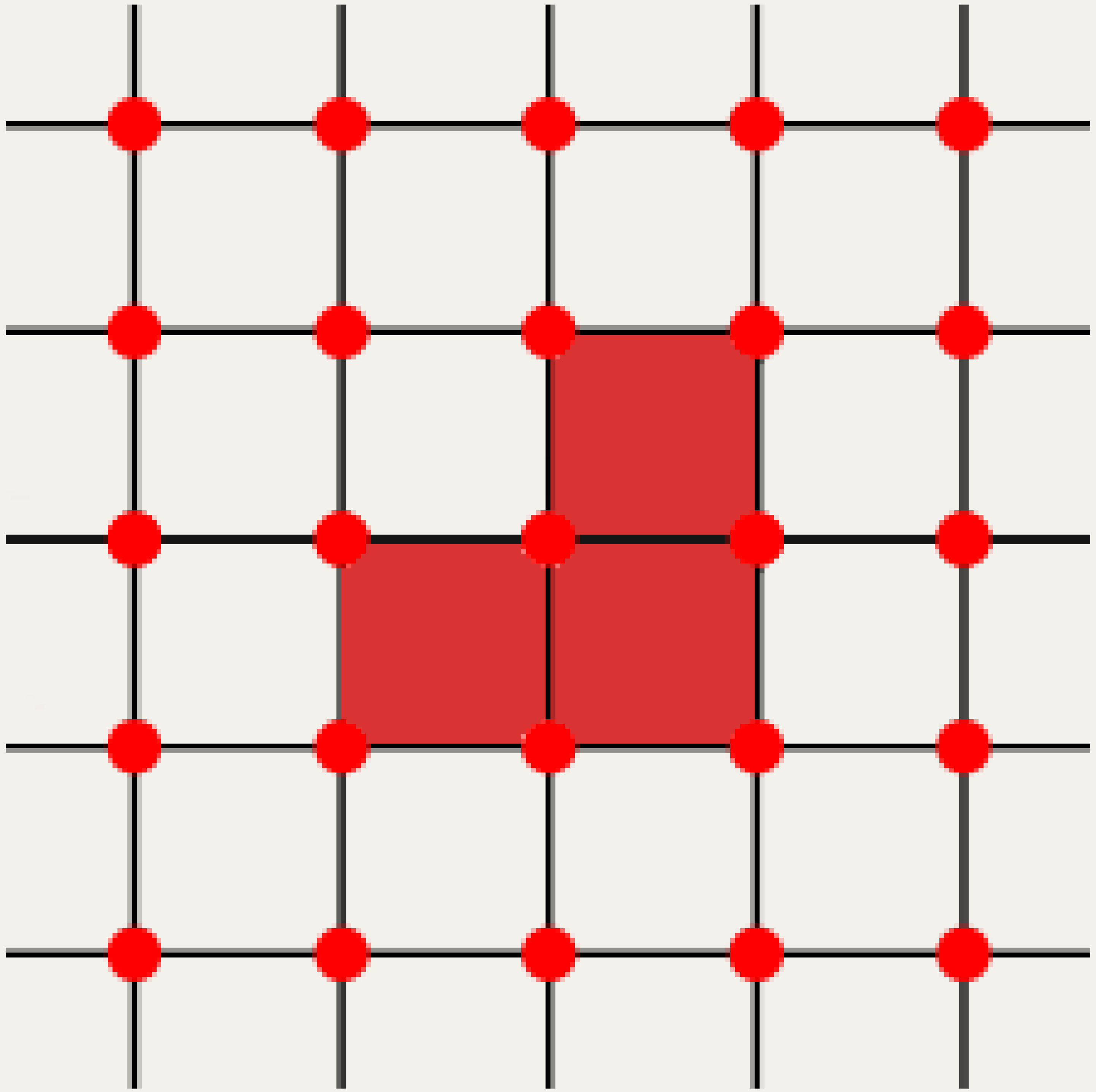
Choisissons comme système de générateurs :
$a = (1, 0) \quad b = (0, 1)$

On remarque que $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ est un graphe planaire, on va donc le plonger dans $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

- le sommet de $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ correspondant a $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ est envoyé sur le point (n, m) de $\mathbb{R}^2$

- l'arête allant de (n, m) à $(n + 1, m)$ est envoyée sur le segment $[(n, m), (n + 1, m)]$ et celle allant de (n, m) à $(n, m + 1)$ sur le segment $[(n, m), (n, m + 1)]$

Région du plan



On note $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}^2))$ la partie de $\mathbb{R}^2$ ainsi obtenue

Une cellule est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $[a, a+1] \times [b, b+1]$ où $a, b \in \mathbb{Z}$

Une région est une réunion finie de cellules

Frontière d'une région

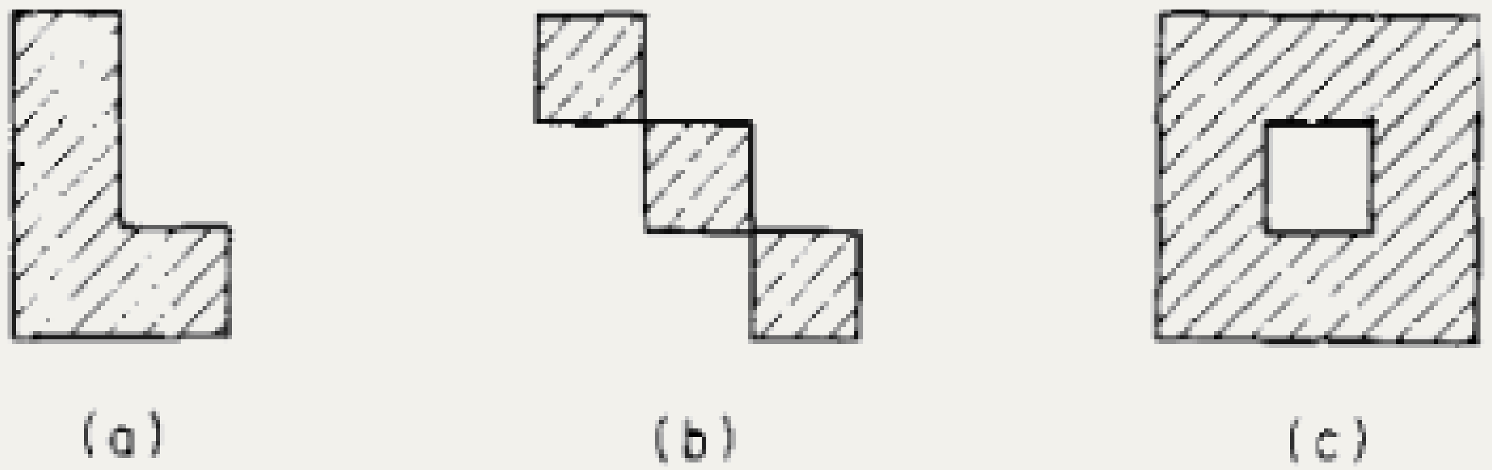
Soit R une région du plan, on considère $Fr(R)$ sa frontière topologique.

$Fr(R)$ est contenue dans $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}^2))$

On définit alors ∂R le plus petit ensemble d'arêtes vérifiant $Fr(R) \subset \Phi(\partial R)$

$$\partial R = \bigcap_{Fr(R) \subset \Phi(A)} A$$

Région simplement connexe



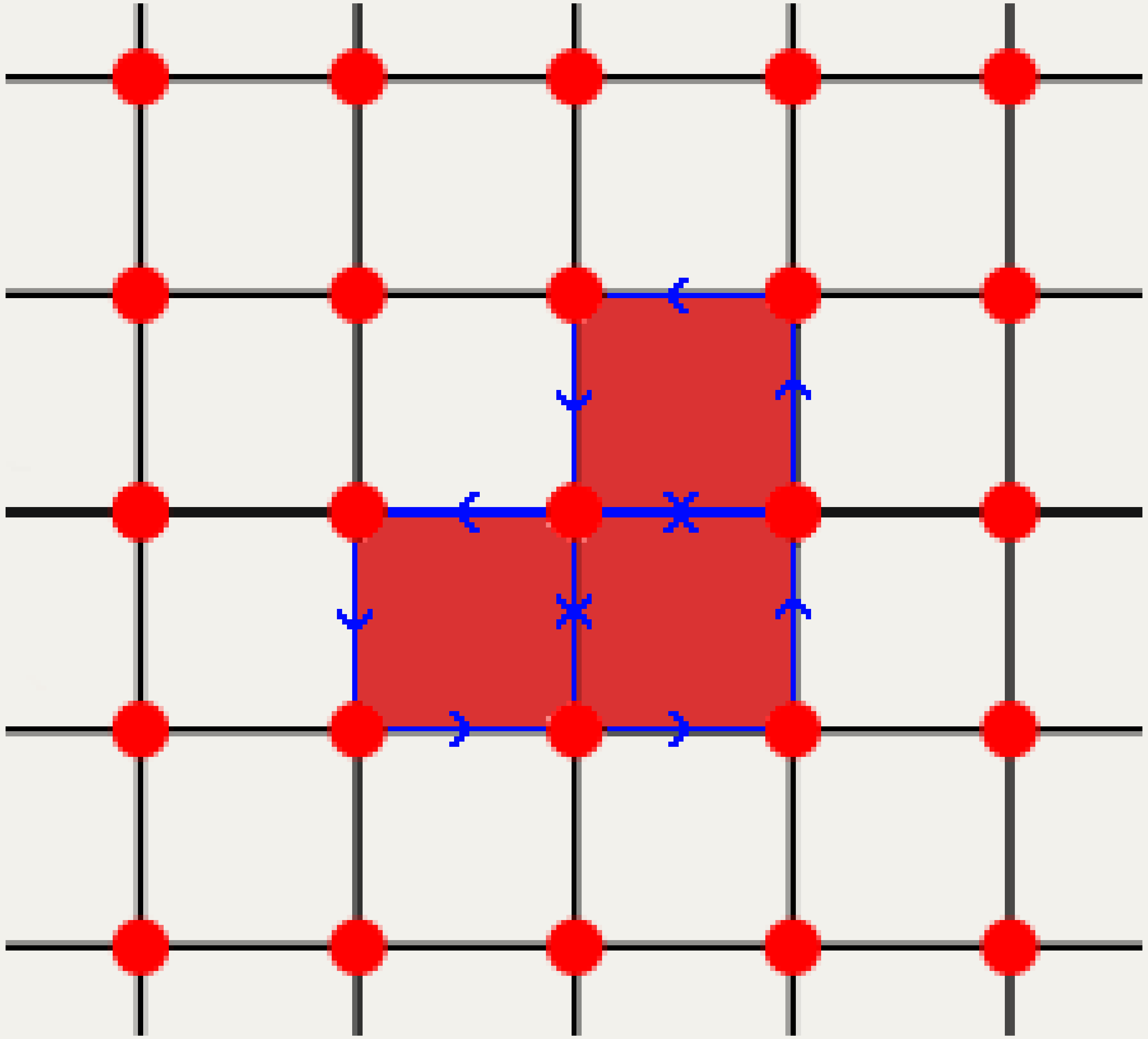
Une cycle de $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ noté $s_0 \to ... \to s_n \to s_0$ est dit simple si les $s_i, i \in [\![0, n]\!]$ sont 2 à 2 distincts

R est dite simplement connexe si ∂R peut etre ordonnée en un cycle simple de $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$

On admet que tout cycle simple définit une région simplement connexe.

On appelle tuile un région simplement connexe

Orientation de la frontière

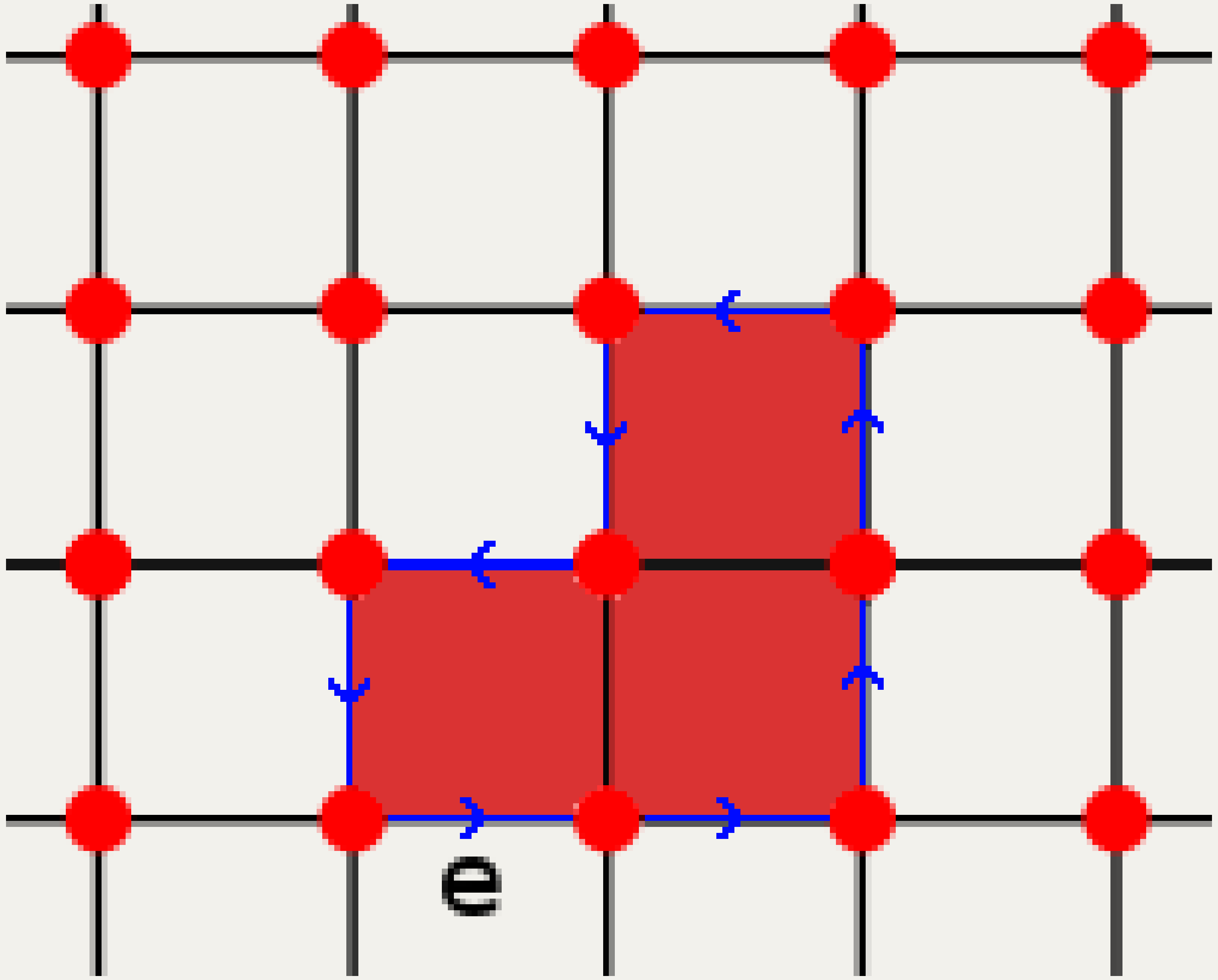


Les arêtes formant la frontiére d'une cellule peuvent être orientées dans le sens trigonométrique. On peut donc attribuer une orientation a la frontière d'une région simplement connexe en considérant l'ensemble des arêtes orientées de ses cellules et en ignorant celles qui apparaissent deux fois dans un sens opposé.

On note $\widetilde{\partial R}$ cet ensemble d'arêtes orientées.

<u>Proposition 4 :</u>
Pour $e \in \widetilde{\partial R}$ il existe une unique suite d' arêtes de $\widetilde{\partial R}$ formant un cycle simple dans $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ et qui commence par e. On la note $\widetilde{\partial R}(e)$

Mots associés à la bordure



$$a^2b^2a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

Soit e $\in \widetilde{\partial R}$,
Nous allons lui associer un lettre $\psi(e)$:
e est une arête de $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ à laquelle on a ajouté une orientation on a donc $e = (x, y), x, y \in \mathbb{Z}^2$ donc

- Soit $(x, y) \in \widetilde{\Gamma}(\mathbb{Z}^2)$ étiqueté par $g \in \{a, b\}$ alors $\psi(e) := g$
- Soit $(y, x) \in \widetilde{\Gamma}(\mathbb{Z}^2)$ étiqueté par $g \in \{a, b\}$ alors $\psi(e) := g^{-1}$

On peut alors étendre ψ :
en posant pour $\widetilde{\partial R}(e_0) = (e_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$
$\psi(\widetilde{\partial R}(e_0)) := \psi(e_0)\psi(e_1)...\psi(e_n) \in F(\{a, b\})$

Proposition 5 :

Les mots de $\{\psi(\widetilde{\partial R}(e)), e \in \widetilde{\partial R}\}$ sont conjugués dans $F(\{a, b\})$

Preuve 5

Soit $e_0 \in \widetilde{\partial R}$ notons $\widetilde{\partial R}(e_0) = (e_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$

$\psi(\widetilde{\partial R}(e_i)) = \psi(e_i)\psi(e_{i+1})...\psi(e_{i-1}),$ notons $m = \psi(e_0)\psi(e_1)...\psi(e_{i-1})$
$m\psi(\widetilde{\partial R}(e_i))m^{-1} = \psi(e_0)...\psi(e_n)\psi(e_0)...\psi(e_{i-1})m^{-1}$
$= \psi(e_0)...\psi(e_n) = \psi(\widetilde{\partial R}(e_0))$

Ainsi les $\psi(\widetilde{\partial R}(e_i))$ sont tous conjuguées à $\psi(\widetilde{\partial R}(e_0))$
ils sont donc tous dans la même classe de conjuguaison. $\square$

Bordure algébrique

On appelle bordure algébrique la classe de conjuguaison de $\psi(\widetilde{\partial R}(e))$ dans $F(\{a,b\})$, notée :

$[\partial R] = \{m\,\psi(\widetilde{\partial R}(e))\,m^{-1}, m \in F(\{a,b\})\}$

Par la proposition 5, $[\partial R]$ ne dépend pas de $e \in \widetilde{\partial R}$

Problème de pavages

Soit $\Sigma = \{R_1, ..., R_k\}$ un ensemble de tuiles et R une région,

Soit $p \in \mathbb{Z}^2, A \subset \mathbb{R}^2$ on note $p{+}A = \{p{+}a, a \in A\}$ la translation de A par p,

on dit que Σ pave R si $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p_0, ..., p_n \in \mathbb{Z}^2 \quad \exists k_0, ..., k_n \in [\![1, k]\!]$ tels que

$$R = \bigcup_{i=0}^{n} (p_i + R_{k_i}) \qquad \text{avec } \forall i \neq j \quad (p_i + R_{k_i}) \cap (p_j + R_{k_j}) \text{ d'intérieur vide.}$$

On appelle pavage l'ensemble des $p_i + R_{k_i}$

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

Groupe de paveur de Conway

Pour $\Sigma = \{R_1, ..., R_k\}$ le groupe des tuiles noté $T(\Sigma)$
est définit comme le plus petit sous groupe normal de $F(\{a, b\})$ contenant les $[\partial R_i]$

Le groupe de paveur de Conway est ensuite définit par $G(\Sigma) = F(\{a, b\})/T(\Sigma)$

<u>Proposition 6 :</u>

Pour i $\in [\![1, k]\!]$ Soit $e_i \in \widetilde{\partial R_i}$, on pose $r_i := \psi(\widetilde{\partial R_i}(e_i))$
Le groupe $G(\Sigma)$ admet la présentation $< a, b, \mid r_1, ..., r_k >$

Preuve 6

Il suffit de montrer que $T(\Sigma)$ est le plus petit sous groupe normal contenant les r_i :

- $T(\Sigma)$ est par définition un sous groupe normal contenant les r_i
- C'est le plus petit :

  Soit N un sous groupe normal contenant les r_i, Soit $i \in [\![1, k]\!]$

  Comme N est normal $\forall m \in F(\{a, b\}) \quad m r_i m^{-1} \in N$

  Donc la classe de conjuguaison de $[\partial R_i]$

  de r_i est incluse dans N

  Finalement N est est un sous groupe normal contenant les $[\partial R_i]$

  Donc $T(\Sigma) \subset N$ $\square$

Méthode de Conway

On dispose du morphisme cannonique :

$$\phi : F(\{a,b\}) \to G(\Sigma)$$
$$a \mapsto aT(\Sigma)$$

<u>Théorème (Conway):</u>

Soit R une région simplement connexe,
Soit $e \in \widetilde{\partial R}$ on pose $r = \psi(\widetilde{\partial R}(e))$
un mot décrivant la frontière de R,
si Σ pave R alors $\phi(r) = 1$

Preuve du théorème

Lemme :

Si R est une région simplement connexe non vide par pavée Σ avec plus de 2 tuiles, alors il existe 2 régions non vides S et T pavées par Σ telles que :

$S \cup T = R, \quad \mathring{S} \cap \mathring{T} = \emptyset \quad \exists e_1 \in \widetilde{\partial R} \quad \exists e_2 \in \widetilde{\partial T} \quad \psi(\widetilde{\partial R}(e_1)) = \psi(\widetilde{\partial S}(e_1))\, \psi(\widetilde{\partial T}(e_2))$

Preuve du théorème :

Il suffit de le montrer pour un r decrivant R quelquonque d'après la proposition 5.

On fait une récurence sur le nombre de tuiles d'un pavage $\mathcal{T}$ de R par Σ :

- Si $\mathcal{T}$ ne contient q'une tuile T decrite par le chemin $t \in F(\{a, b\})$,
  Soit r comme dans l'énoncé, $\phi(r) = \phi(t) = 1$ car R = T et $t \in T(\Sigma)$

Preuve du théorème

- Sinon, on applique le lemme : On a
  $\psi(\widetilde{\partial R}(e_1)) = \psi(\widetilde{\partial S}(e_1))\,\psi(\widetilde{\partial T}(e_2))$
  ce qui se réécrit $\quad r = st, \quad s, t$ décrivant S et T
  par l'hypothèse de reccurrence appliquée à S et T
  qui sont pavées d'apres le lemme par un nombre strictement inférieur de tuiles,
  on a $\phi(r) = \phi(s)\phi(t) = 1$ $\square$

<u>Preuve du lemme :</u>
Soit donc R correspondant aux hypothèses, et A une tuile du pavage de R par Σ, adjacente à $\widetilde{\partial R}$
en $a \in \widetilde{\partial R} \cap \widetilde{\partial A}$, on note $\widetilde{\partial R}(a) = (u_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \quad \widetilde{\partial A}(a) = (v_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$
posons : $k := min\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \neq v_i\}, \quad e_1 := u_k, \quad e_2 := v_k$

Preuve du théorème

Les bordures orientées $\widetilde{\partial R}(a)$ et $\widetilde{\partial A}(a)$, définissent respectivement les cycles :

$C_1 = s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{u_1} \dots \xrightarrow{u_n} s_0$ et $C_2 = s_0 \xrightarrow{a} s_1' \xrightarrow{v_1} \dots \xrightarrow{v_m} s_0$

On définit alors $j := min\{i > k \mid s_i \in C_2\}$ et $s := s_j = s_l'$

Soit S la région simplement connexe définie par le cycle simple :

$s_k \xrightarrow{u_k} s_{k+1} \dots \xrightarrow{u_{j-1}} s \xrightarrow{v_{l-1}^{-1}} \dots s_{k+1}' \xrightarrow{v_k^{-1}} s_k$

$T := R \setminus S$ a pour frontière :

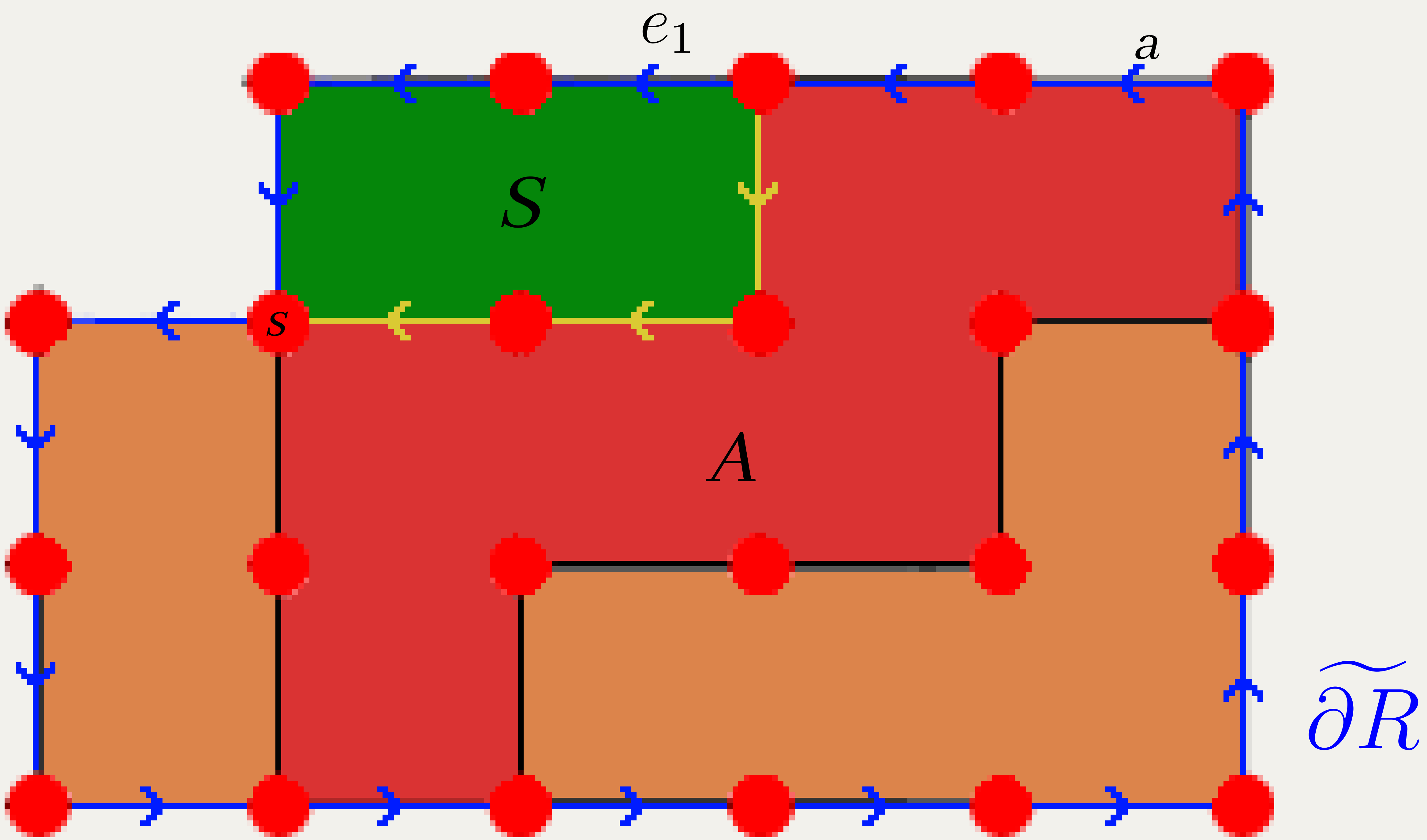
$s_k \xrightarrow{v_{k+1}} s_{k+1}' \dots \xrightarrow{v_l} s \xrightarrow{u_j} s_{j+1} \dots \xrightarrow{u_n} s_0 \xrightarrow{u_0} \dots \xrightarrow{u_{k-1}} s_k$

et est donc simplement connexe, de plus $R = S \cup T$, $\mathring{S} \cap \mathring{T} = \emptyset$

De plus comme la frontière ∂S est contenue dans $\partial R \cup \partial A$,

on peut restreindre à S et à T le pavage $\mathcal{T}$ de R donnant ainsi des pavages $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ de S et T par Σ

Preuve du théorème



Preuve du théorème

Il reste à montrer : $\psi(\widetilde{\partial R}(e_1)) = \psi(\widetilde{\partial S}(e_1))\ \psi(\widetilde{\partial T}(e_2))$:

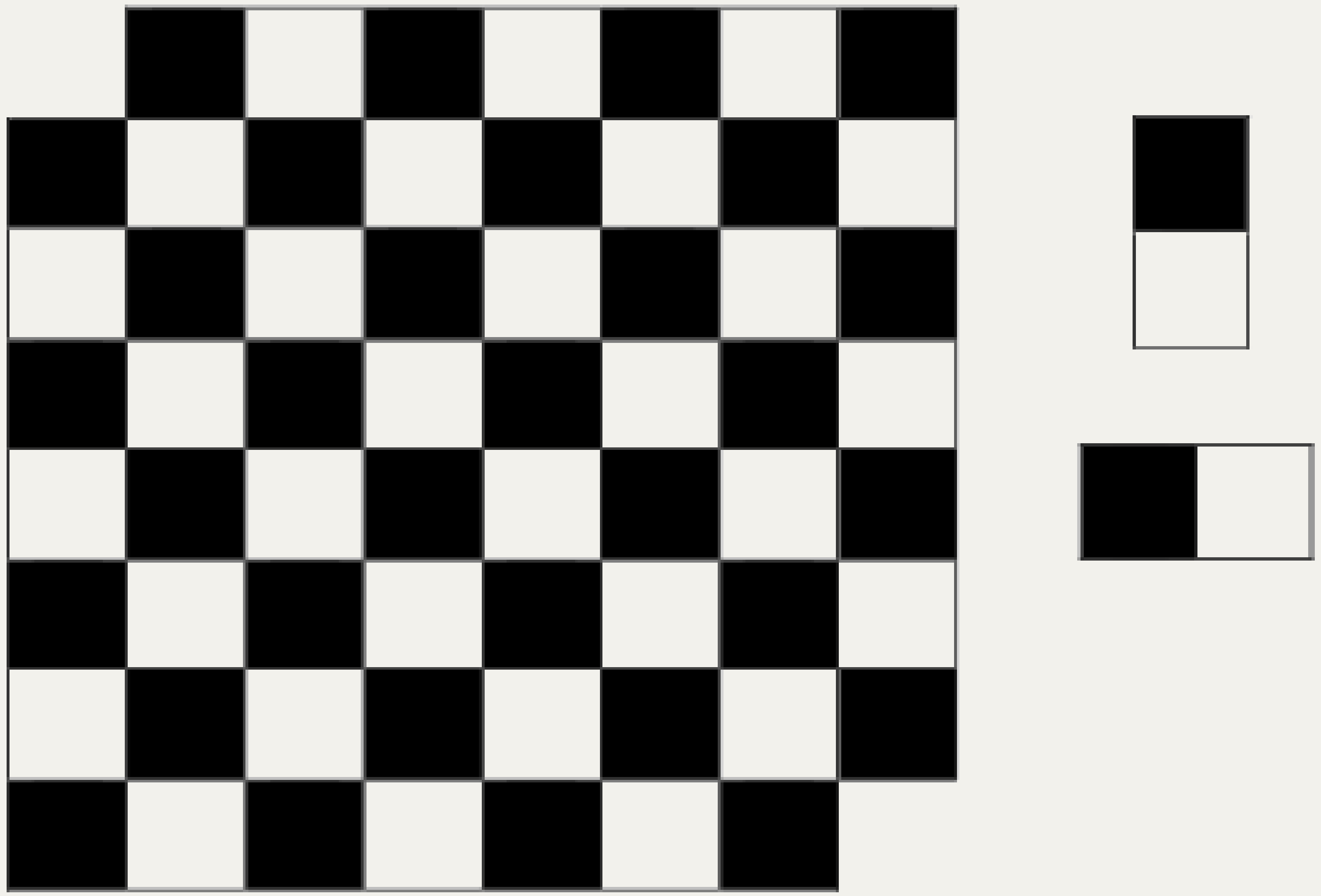
$$\begin{aligned}
\psi(\widetilde{\partial R}(e_1)) &= \psi(u_k)...\psi(u_{j-1})\ \psi(u_j)...\psi(u_{k-1}) \\
&= \psi(u_k)...\psi(u_{j-1})\Big(\psi(v_{l-1}^{-1})...\psi(v_k^{-1})\psi(v_k)...\psi(v_{l-1})\Big)\psi(u_j)...\psi(u_{k-1}) \\
&= \Big(\psi(u_k)...\psi(u_{j-1})\psi(v_{l-1}^{-1})...\psi(v_k^{-1})\Big)\Big(\psi(v_k)...\psi(v_{l-1})\psi(u_j)...\psi(u_{k-1})\Big) \\
&= \psi(\widetilde{\partial S}(e_1))\ \psi(\widetilde{\partial T}(e_2))
\end{aligned}$$

- Introduction
- Outils sur les groupes
- Pavages
- Méthode de Conway
- Application

Énoncé

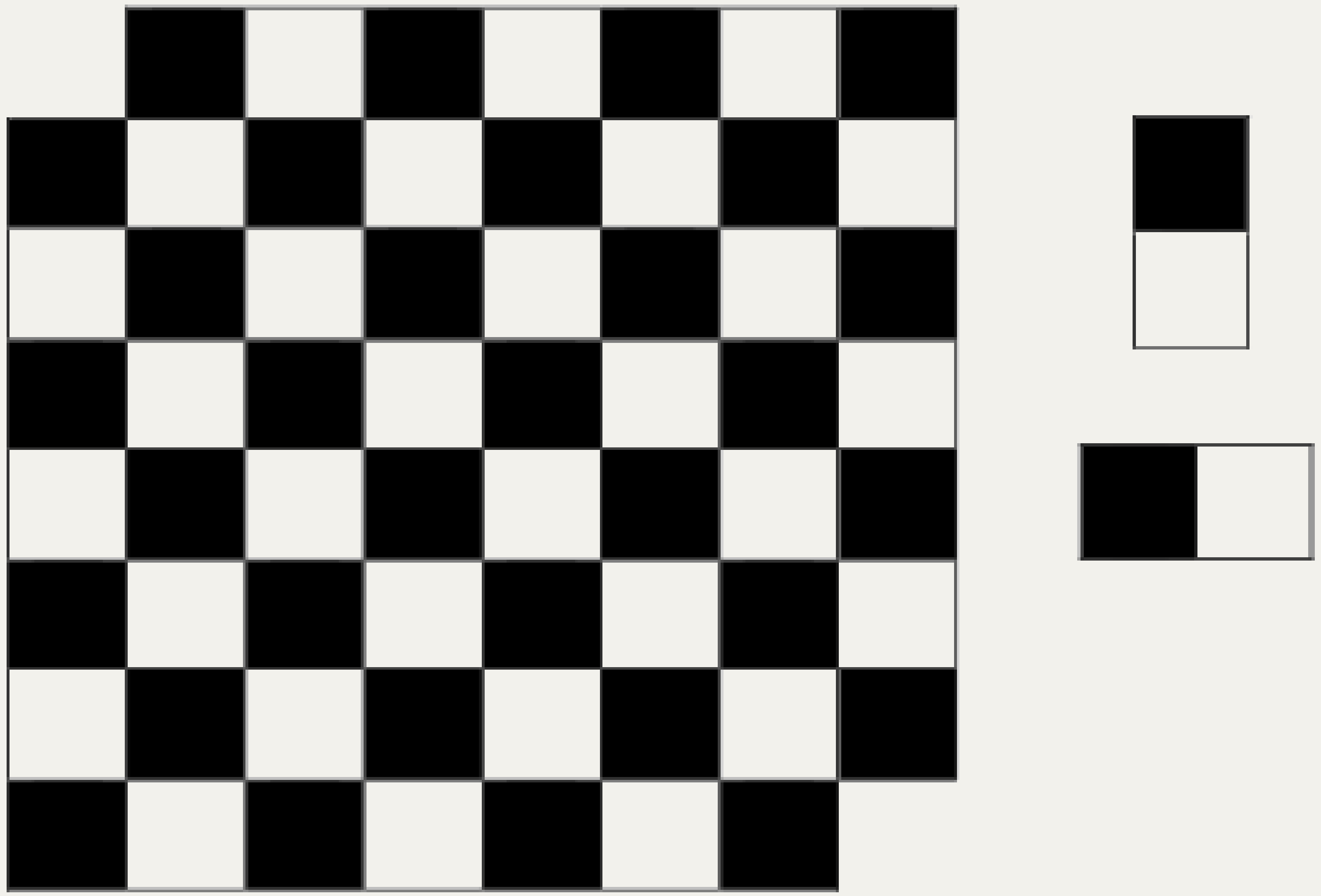
<u>Problème :</u>

Est-il possible de paver un damier 8x8 dont on a retiré deux angles d'une même digonale avec des dominos 2x1 et 1x2 ?



Première solution

On remarque grace à ce coloriage que chaque domino couvre une case noire et une case blanche, il devrait donc y avoir autant de cases noires que de blaches pour q'un pavage existe or il y a 2 cases noires en moins, un pavage n'est donc pas possible.



Deuxième solution

On peut aussi le montrer par la méthode de conway :
La réginon R est décrite par le mot $\psi(\widetilde{\partial R}(e)) = a^7bab^7a^{-7}b^{-1}a^{-1}b^{-7}$

notons le r et les dominos par $t_1 = a^2ba^{-2}b^{-2}, \quad t_2 = ab^2a^{-1}b^{-2}$

On en déduit que $G(\Sigma) =< a, b \mid ab^2 = b^2a, \ a^2b = ba^2 >$

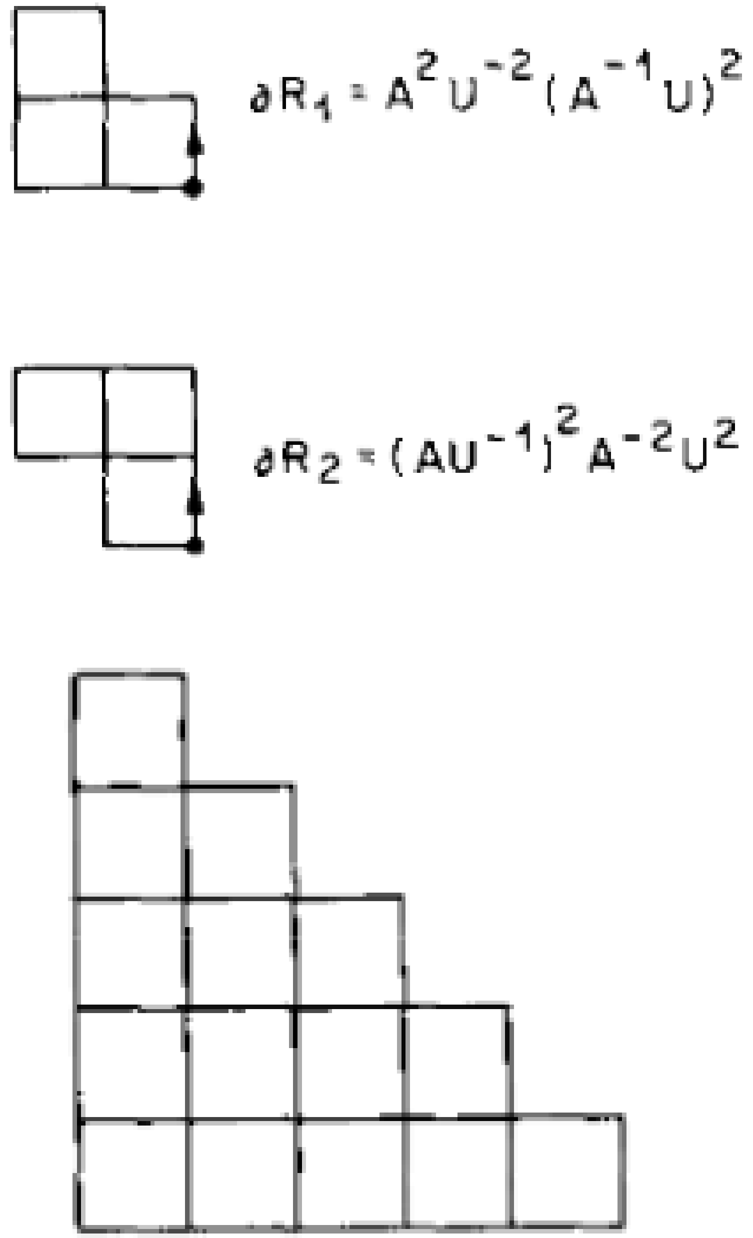
Il suffit donc de montrer que r n'est pas trivial dans $G(\Sigma)$

On utilise alors la proposition 3 : Il suffit d'exhiber un groupe H
et un morphisme $f : F(\{a, b\}) \to H$ verifiant $f(t_1) = f(t_2) = 1$
et $f(r) \neq 1$

On considère donc $\mathcal{S}_7$ et f le morphisme induit par
$f(a) = x = (14)(23)(57), \quad f(b) = y = (27)(36)(45)$
On a $x^7 = x, y^7 = y$
donc si $r = 1,$ on aurais $xyxy = yxyx,$ ce qui est faux
(considerer l'image de 1).

D'autres problèmes

Conway démontre également que certains problèmes de pavages sont résolubles par sa méthode, mais pas par un argumument de type coloriage



Fin

$$< a \mid a^2 >$$

La présentation est finie

Merci !