Préparation à l'Agrégation 2019-2020 Le 5 Novembre 2019.

Quelques questions de Mécanique du point

1. Le problème à deux corps et le mouvement dans un champ de force central

1. Soit $\mathfrak{R}$ un référentiel galiléen. On considère un système isolé constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 exerçant, l'un sur l'autre, des forces qu'on notera $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$. Etablir les équations du mouvement de ces deux points matériels dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Montrer qu'elles se ramènent à l'équation du mouvement, dans le référentiel barycentrique $\mathfrak{R}^*$ du système, d'une unique particule, dite *particule réduite*, soumise à la force $\vec{F}_{1\to 2}$. On explicitera la masse m de la particule réduite, également appelée *masse réduite*, en fonction de m_1 et m_2 et on montrera comment les mouvements de M_1 et M_2 se déduisent de celui de M. Montrer que si la force $\vec{F}_{1\to 2}$ est portée par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, la particule réduite est soumise à une force centrale.

c'est en fait $\mathfrak{R}^*$ d'ici ?

2. Dans ce dernier cas, ayant ramené le problème à deux corps à un problème à un corps soumis à une force centrale, on s'intéressera dans toute la suite au mouvement d'une unique particule M de masse m soumise à une force centrale $\vec{F}$ de centre O, l'origine du référentiel galiléen $\mathfrak{R}$. Montrer que les composantes du moment cinétique $\vec{L}$ de M en O sont des constantes du mouvement. Discuter les conséquences de cette conservation sur la nature du mouvement de M.

3. On introduit les coordonnées polaires (r,θ) dans le plan orthogonal à $\vec{L}$. Comment se traduit la conservation de $\vec{L}$ dans ces coordonnées ? Quelle loi retrouve-t-on ainsi ?

4. En supposant la force centrale $\vec{F}$ conservative, montrer que l'énergie mécanique de M est une constante du mouvement. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique dans les coordonnées polaires (r,θ). Que peut-on en déduire quant au mouvement de M ? On distinguera notamment les états de diffusion des états liés. Dans le cas des états liés, à quelle condition a-t-on un mouvement périodique ? Que dire si cette condition n'est pas vérifiée ?

5. En définitive, combien existe-t-il de constantes du mouvement indépendantes ? A quelles symétries du problème peut-on les relier ? Quel théorème général illustre-t-on ainsi ?

2. Le problème de Kepler classique

Le problème de Kepler est un cas particulier de mouvement à force centrale conservative, où la force centrale dérive de l'énergie potentielle

$$U(r) = -\frac{K}{r}$$

avec K une constante réelle. Ce problème recouvrant à la fois les interactions newtonienne et coulombienne, il se retrouve naturellement dans bon nombre de problèmes de physique, de l'astronomie à la physique atomique.
1. A quelle condition peut-on avoir des états liés pour le problème de Kepler ? Que peut-on dire de l'énergie mécanique du point matériel M s'il est dans un tel état lié ? Dans la suite, on s'intéresse exclusivement à cette situation.

2. Soient $\vec{r}$ et $\vec{p}$ la position et l'impulsion de M. On définit le *vecteur de Laplace* – ou de *Runge-Lenz* – par la relation

$$\vec{A} = \frac{1}{mK}\vec{L}\wedge\vec{p} + \frac{\vec{r}}{r}.$$ $\leftarrow \vec{u}_r$

Montrer que $\vec{A}$ est une constante du mouvement. *Indication : on établira au préalable que*

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\vec{L}}{mr^2}\wedge\vec{u}_r \qquad \text{où} \qquad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

3. Evaluer $\vec{A}\cdot\vec{L}$ et indiquer l'orientation de $\vec{A}$ par rapport au plan de la trajectoire.

4. On choisit dorénavant l'axe Oz suivant la direction de $\vec{L}$ et l'axe Ox suivant celle de $\vec{A}$. En formant $\vec{r}\cdot\vec{A}$ et en utilisant les coordonnées polaires (r,θ) du plan xOy, établir l'équation de la trajectoire. Quelle est alors l'interprétation géométrique de $\vec{A}$?

5. Evaluer le carré scalaire $\vec{A}^2$. En déduire une relation entre $A = \|\vec{A}\|$, $L = \|\vec{L}\|$ et l'énergie mécanique E. Quelles sont alors les valeurs possibles de $\vec{A}^2$ pour un état lié ? Qu'en conclure quant aux trajectoires correspondantes ?

6. Que vaut $\vec{A}$ pour une orbite circulaire ? Que dire de la trajectoire si $\vec{L} = \vec{0}$?

7. Représenter graphiquement une trajectoire et placer les vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{A}$ sur la figure.

8. Déterminer les demi-axes a et b de la trajectoire en fonction de L et de A. En déduire que l'énergie E d'une particule parcourant une trajectoire donnée est déterminée par la demi-longueur du grand axe a, indépendamment de b. *Indication : pour une ellipse, on a* $b^2 = a^2(1-e^2)$.

9. En utilisant la loi des aires, obtenir l'expression de la période de révolution T. Montrer que, pour une énergie E donnée, elle est indépendante de L. *Indication : la surface plane délimitée par la trajectoire vaut πab.*

10. Montrer que T peut s'exprimer en fonction de a seulement. Comment s'appelle la relation obtenue ?

11. En définitive, combien existe-t-il de constantes du mouvement *indépendantes* pour le problème de Kepler ? Comparer au nombre de degrés de liberté du problème. Pourquoi, selon vous, qualifie-t-on un tel système de *maximalement (super-)intégrable* ?

3. La précession anormale du périhélie de Mercure

Un théorème démontré par Bertrand en 1873 stipule que le problème de Kepler et le problème de l'oscillateur harmonique isotrope sont, en dimension 3, les deux seuls problèmes à force centrale conservative dont tous les états liés appartiennent à des trajectoires périodiques. Ce sont en fait les deux seuls mouvements à force centrale conservative maximalement super-intégrables. En conséquence, tout écart, même faible, du potentiel à l'une de ces deux lois se traduit par la perte des symétries cachées responsables de la périodicité de toutes les trajectoires bornées. Dans cette section, on se propose d'illustrer ce résultat en étudiant l'*avance anormale du périhélie de Mercure*. Il s'agit d'une précession résiduelle de 42,98 ± 0,04 secondes d'arc par siècle du périhélie de cette planète qui reste inexpliquée après la prise en compte des effets newtoniens dominants : l'influence des autres planètes du système solaire sur sa trajectoire et la légère non-sphéricité du Soleil. L'un des grands succès de la théorie de la Relativité Générale est d'avoir expliqué, dans un cadre naturel et avec une grande précision, cette précession résiduelle mise en évidence pour la première fois par Le Verrier en 1859.

Données : Pour Mercure, on donne, en unités de masse solaire $M_\odot = 1,9891.10^{30}$ kg *et en unités astronomiques* 1 U.A. $= 1,4960.10^{11}$ m,

$$m = 1,6601.10^{-7}\ M_\odot\,; \qquad a = 0,3871\ \text{U.A.}\,; \qquad T = 0.2408\ \text{ans}\,; \qquad e = 0.2052\,.$$

1. Dans le cadre de la Relativité Générale, on montre que les équations du mouvement d'un point matériel de masse m dans le champ de gravitation d'un corps de masse M à symétrie sphérique se ramènent aux équations newtoniennes du mouvement de ce même point matériel doté de l'énergie potentielle

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}.$$

Justifier que cette expression admet une limite classique correcte. Montrer que le second terme du membre de droite peut être traité comme une perturbation du potentiel newtonien.

TD meca 1S

Quelques questions de mécanique du point

I) Problème à deux corps et mvt à force centrale

1) Dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen, on a :

$$\begin{cases} m_1 \left(\dfrac{d\vec{OM_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{2\to1} & (1) \\ m_2 \left(\dfrac{d\vec{OM_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{1\to2} & (2) \end{cases}$$

rq. on néglige le champ gravitationnel des autres astres qui ajouterai un champ de forces aux les 2 points. On peut faire ceci si la variation de ces champs sont petites sur la durée de l'exercice.

$$(1) + (2) = (m_1 + m_2)\left(\frac{d\vec{OG}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0}$$

avec G le barycentre défini par :

$$m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2} = (m_1 + m_2)\vec{OG}$$

Le barycentre est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. $\mathcal{R}^*$ est donc Galiléen.

De même, $-(1)/m_1 + (2)/m_2$

$$: \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2} - \frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{\vec{F}_{1\to2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2\to1}}{m_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1\to2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2\to1}}{m_1}$$

$$(3) \quad \frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \overrightarrow{F_{1\to2}}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

On définit • la $\boxed{\text{masse réduite } m \text{ par } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$

• la position M de la particule réduite par

$$\boxed{\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}}$$

(3) s'écrit alors : comme le PFD pour la particule réduite dans $\mathcal{R}^*$ (ou $\mathcal{R}$ c'est pareil) :

$$\boxed{m\left(\frac{d^2\overrightarrow{GM}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{F_{1\to2}}}$$

Il est évident que si $\vec{F}_{1\to2}$ est portée par $\overrightarrow{M_1M_2}$, alors $\vec{F}_{1\to2}$ est $/\!/$ à $\overrightarrow{GM}$ et donc M a un mouvement à force centrale autour de G $\Leftarrow$ car G est fixe dans $\mathcal{R}^*$

TD meca 16

1) Par définition :

$$\vec{0} = m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = m_1 \overrightarrow{GM_1} + \underbrace{m_2 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{M_1M_2}}_{m_2 \overrightarrow{GM_2}}$$

$$= (m_1 + m_2)\overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM}$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{GM_1} = \dfrac{-m_2 \overrightarrow{GM}}{m_1 + m_2}}$

de même $\boxed{\overrightarrow{GM_2} = \dfrac{m_1 \overrightarrow{GM}}{m_1 + m_2}}$

2) On a d'après le TMC :

• $\left.\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right|_{R} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = 0$ si $\vec{F} \,//\, \overrightarrow{OM}$

Or on pose $R^* = R$ et $G = O$ par la suite.

alors $\vec{L} = cte$.

et • $\forall t$: $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L} = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V}_{M/R}) = 0$

d'où $\overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \vec{L} = 0$

Le mouvement de M s'effectue donc dans le plan orthogonal à $\vec{L}$

3) Dans les coordonnées polaires (r, θ) du plan orthogonal

à t, on a :

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u_r}$$

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \vec{V}_{M/R} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

On en déduit que :

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{V}_{M/R}$$

$$= mr\vec{u_r} \wedge [\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}]$$

$\vec{u_r}$ donc $= 0$!

$$\boxed{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z} \qquad \text{d'où } mr^2\dot{\theta} = \text{cte du mvt.}}$$

On a également $r^2\dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{cte}$

Le mouvement s'effectue donc à vitesse aréolaire constante (loi des aires).

4) Si $\vec{F}$ est conservative, on a :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (-\vec{grad}(U))$$

et donc $m\left(\frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt}\right) = -\vec{\nabla U}$

$\cdot \vec{V}_{M/R}$

$$m\vec{V}_{M/R} \cdot \left(\frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt}\right) = -\vec{V}_{M/R} \cdot \vec{\nabla U} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r})$$

car $U = f(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2_{M/R}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

TD meca 17

$$d'où \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\, v_{M/R}^2\right) = -\frac{dU}{dt}$$

(avec $\frac{dE_c}{dt}$ et $\frac{dE_p}{dt}$ au-dessus)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{où} \quad E_m = \frac{1}{2} m v_{M/R}^2 + U(r)$$

$\Leftrightarrow \quad E_m = cte.$

Dans les coordonnées polaires, on a :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right]^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + U(r)$$

or $L = mr^2\dot{\theta} = cte$ donc $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{r^2 m^2}$

$$\text{donc } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + U(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + U(r)}$$

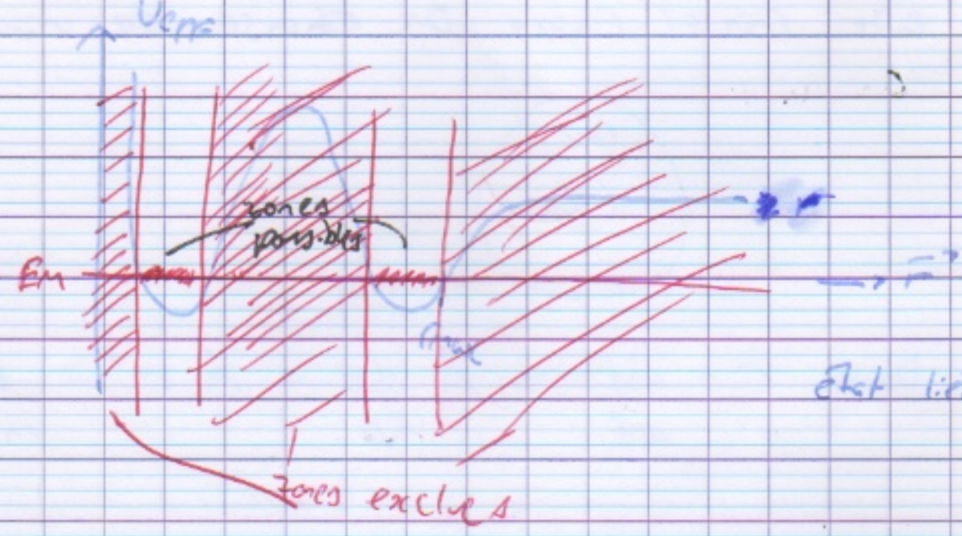
$$U^{eff}_{(r)} = U(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

$$\text{donc } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U^{eff}_{(r)}$$

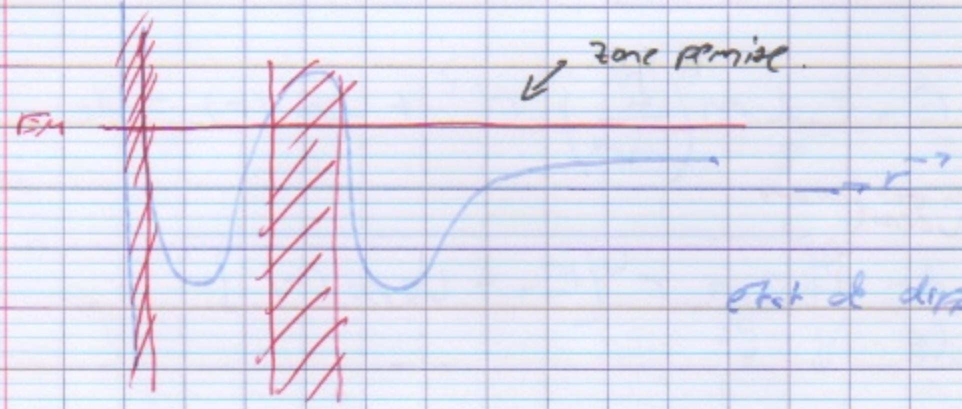
TD meca 18

On constate que $E_m - U^{eff}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ qui est ≥ 0

Ceci est la base des les états liées et de dispersion.



état lié, r contraint



état de dispersion!

On parle d'état lié si $E_m - U^{eff}(r) \geq 0$ entraîne $r < r_{max} < \infty$ pour toute condition initiale. On parle d'état de dispersion sinon.

Pour un état lié, on a $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
or $\dot{r}$ peut changer de signe. Par contre $\dot{\theta}$ non! En effet $L = r^2 m \dot{\theta} = cte$. donc suivant les conditions initiales L aura un signe fixe comme r^2 et $m > 0$ alors $\dot{\theta}$ est de même signe que L!

donc pendant que r varie θ varie lors du mouvement.

On veut donc regarder l'évolution de r par rapport à θ entre r_{min} et r_{max}. On change de variable $r(t) \to r(\theta)$

Donc $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} r' = \frac{L}{mr^2} r'$

En substituant dans E_m, on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r'^2 + U_{eff}(r) = cte$$

on est pas sûr du signe

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2m}{L^2} r^4 \left[E_m - U_{eff}(r)\right]}$$

On en déduit que pour avoir un mvt. périodique :

2 fois car 2 fois on va de r_{min} à r_{max} et vice versa

$$\Delta\theta = \int d\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\left(\frac{2m}{L^2} r^4 \left[E_m - U_{eff}(r)\right]\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \cdot \frac{p}{q} \quad (*)$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$, $q \neq 0$

On a $\frac{p}{q}$ car il faut qu'on passe une boucle au bout d'un certain temps (un nombre entier d'aller retours (p) où θ balaie 2π un nb. entier de fois (q))

TD meca 14

On reboucle ⇒ mvt périodique !

Si ce n'est pas le cas, au bout d'un temps très long on va explorer l'ensemble des positions $\sigma = f(r_{max})$. Donc au bout d'un **certain temps** on passera très proche d'un point déjà exploré.

Or comme on a conservation des angles de balayage dans l'intégrale (*) on repassera au bout d'un temps T à une distance fixe d'un point déjà balayé et à $2T$ à la même distance fixe de ce dernier point.

C'est un mouvement pseudo-périodique.

5)

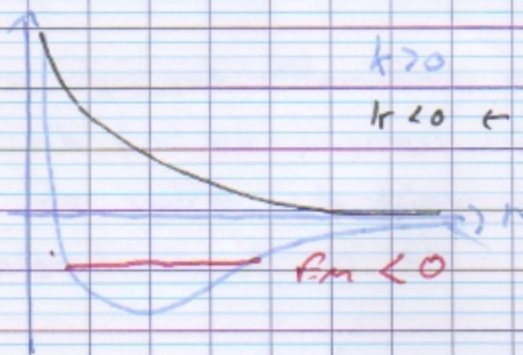
Constantes du mouvement :	symétrie
$\vec{L}$ → 3 composantes du vecteur	invariance par rotation
E_m ← scalaire	invariance par translation dans le temps des propriétés physiques (e.g. $U^{eff}(r)$)
⇒ 4 cstes !	

C'est le théorème de Noether qui relie les symétries continues à les constantes du mouvement.

II Problème de Kepler

$U(r) = -\frac{k}{r}$ avec $k \in \mathbb{R}$

1) On a des états liés ssi $k > 0$



2) On pose $\vec{A} = \frac{1}{mk} \vec{L} \wedge \vec{p} + \vec{u_r}$ ← Laplace

pour le pb. de Kepler ceci est une cte. du mvt.

On a $\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{u_\theta} = \frac{L}{mr^2} \underbrace{\vec{u_z} \wedge \vec{u_r}}_{\vec{u_\theta}}$

donc $\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}$

$\vec{L}$ cte. du mvt !

On a donc $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{mk} \vec{L} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}$

$$\boxed{= \frac{-1}{mk} \vec{L} \wedge \frac{k}{r^2} \vec{u_r} + \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}}$$

car $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U = -\frac{d\left(-\frac{k}{r}\right)}{dr} \vec{u_r} = -\frac{k}{r^2} \vec{u_r}$

TD meca 20

d'où on a $-\frac{1}{m}\vec{L} \wedge \frac{\vec{u_\theta}}{r^2} + \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r} = \vec{0}$

d'où $\vec{A} = \text{cte}!$ → cte du mvt.

3) $\vec{A}\cdot\vec{L} = \frac{1}{mk}\underbrace{(\vec{L}\wedge\vec{p})\cdot\vec{L}}_{=0} + \underbrace{\vec{u_r}\cdot\vec{L}}_{=0} = 0$

$\vec{L}\wedge\vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{L}$. car $\vec{L}$ porté par $\vec{u_z}$

Donc $\vec{A} \perp \vec{L}$. A dans le plan de la trajectoire.

4) On a, dans les coordonnées polaires :

$\vec{r}\cdot\vec{A} = \frac{1}{mk}\vec{r}\cdot(\vec{L}\wedge\vec{p}) + r$

permutation circulaire.

$= -\frac{1}{mk}\vec{L}\cdot\underbrace{(\vec{r}\wedge\vec{p})}_{\vec{L}} + r$

$= -\frac{\vec{L}^2}{mk} + r$

donc $r\|\vec{A}\|\cos\theta = -\frac{\vec{L}^2}{mk} + r$

$$\Leftrightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{L^2/mk}{1-\|A\|\cos\theta} = \frac{p}{1-e\cos\theta}}$$

r

équation d'une conique !

La conique a $\begin{cases} \text{paramètre : } p = \vec{L}^2 / mk \\ \text{excentricité : } e = \|\vec{A}\| \end{cases}$

Avec le problème de Kepler on a donc que des trajectoires **coniques !**

5) $\vec{A}^2 = \left[\dfrac{1}{mk} \vec{L} \wedge \vec{p} + \vec{u_r}\right]^2$

$$= \frac{1}{m^2k^2}(\vec{L} \wedge \vec{p})^2 + \frac{2}{mk}(\vec{L} \wedge \vec{p}).\vec{u_r} + 1 \quad \left(\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\vec{p} \perp \vec{L}$

$$= \frac{1}{m^2k^2}\vec{L}^2\vec{p}^2 - \frac{2}{mkr}\vec{L}.\underbrace{(\vec{r} \wedge \vec{p})}_{\vec{L}} + 1$$

(cp propriété par mixte et $\vec{L}$!)

$$= \frac{1}{m^2k^2}\vec{L}^2\vec{p}^2 - \frac{2}{mkr}\vec{L}^2 + 1$$

$$= \frac{2\vec{L}^2}{mk^2}\underbrace{\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}\right]}_{Em!} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}^2 = \frac{2L^2 Em}{mk^2} + 1}$$

Pour un état lié $Em < 0 \Rightarrow \|A\| \in [0 ; 1[$

$\Rightarrow$ trajectoire forcement périodique ! $\rightarrow$ ellipse !

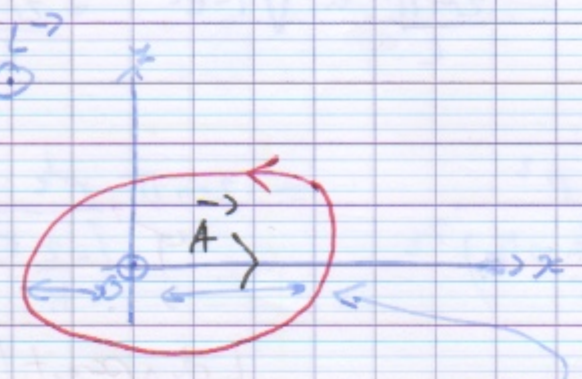
TD meca 21

6) Pour une orbite circulaire $r(\theta) = cte \Rightarrow \|\vec{A}\| = 0$

$\Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$

Si $\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow r(\theta) = 0 \Rightarrow E_m = -\infty$

7) $\vec{L}$ $\odot$



graphiquement on voit que

8) $a = \frac{1}{2}\left[r(0) + r(\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}\right]$

$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$ $p = \frac{\vec{L}^2}{mK}$ et $p = \frac{L^2}{mk}$

$b = a\sqrt{1-e^2}$ ← d'après l'énoncé $= \boxed{\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = b}$

9) On a donc $1 - e^2 = -\frac{2\vec{L}^2}{mk^2} E_m = -\frac{2}{k} p . E_m$

donc $\boxed{\frac{-k}{2a} = E_m}$

donné par énoncé

9) $T = \dfrac{\pi a b}{V_{\text{aréolaire}}} = \dfrac{2\pi a b}{r^2 \dot\theta}$

$\downarrow$

$\frac{1}{2} r \dot\theta^2 = cte!$

$= \dfrac{2\pi\, a b}{L/m} = \dfrac{2m\pi}{L} a^2 \sqrt{1-e^2} = \dfrac{2m\pi}{L} \dfrac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}$

$= \dfrac{2m\pi}{L} \dfrac{p^2}{\left(-\frac{2}{K} p E_m\right)^{3/2}}$ $= \boxed{\dfrac{2m\pi}{L} \dfrac{p^{1/2}}{\left(-\frac{2}{K} E_m\right)^{3/2}}}$

L disparaît !

$b = a\sqrt{1-e^2} = \dfrac{K}{-2E_m} \sqrt{-\dfrac{2p}{K} E_m} = \dfrac{K^{1/2} p^{1/2}}{(-2E_m)^{1/2}}$

alors $T = \dfrac{\pi a b}{\left|\frac{1}{2} r^2 \dot\theta\right|} = \dfrac{2\pi a b m}{|L|}$

$= \dfrac{2m\pi}{|L|} \dfrac{K}{-2E} \cdot \dfrac{K^{1/2} p^{1/2}}{(-2E)^{1/2}}$

$= \dfrac{2\pi m K^{3/2} \cancel{|L|}}{\cancel{|L|} m^{1/2} K^{1/2} (-2E)^{3/2}}$

$\boxed{T = \dfrac{2\pi m^{1/2} K}{(-2E)^{3/2}}}$

TD meca 22

10) On substitue avec $a = \frac{K}{-2E}$

on trouve : $T = \frac{2\pi m^{1/2} K a^{3/2}}{K^{3/2}} = \boxed{2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}}}$

3ème loi de Kepler.

11) Constantes du mouvement :

$\vec{L}, E_m, \vec{A}$ → 2 vecteurs et 1 scalaire ⇒ 7 c^{tes} conservées.

Or relation entre elles :

$$\left.\begin{array}{l} - \vec{L} \cdot \vec{A} = \vec{0} \quad \text{C.Q.F.D.} \\ - \vec{A}^2 = 1 + \dfrac{2\vec{L}^2}{mK^2} E_m \rightarrow \text{C.Q.F.D.} \end{array}\right\} \text{2 relations}$$

⇒ 5 constantes du mvt indépendantes

On est partie de 6 variables (3 d'espace et 3 d'impulsion pour partic. fixée)
On a 5 constantes donc il reste 1 variable ⇒ trajectoire. (car courbes).
avoir 6 ctes ⇒ pt. fixes.
espace de phases à 6 dimensions

Dynamique entièrement contrôlée par les constantes de mouvement.