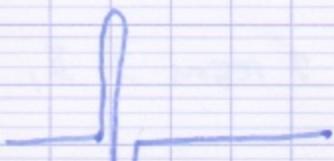


4

MQ.CH4

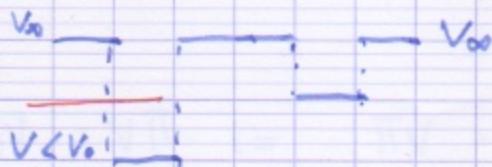


$$\Psi''(x) = \psi''(x_0) + (\dots) \delta'(x-x_0)$$

↳ non bornée

Donc si $\Psi(x)$ est discontinue, nécessairement $\Psi''(x)$ est non bornée.

Puits de Potentiel:



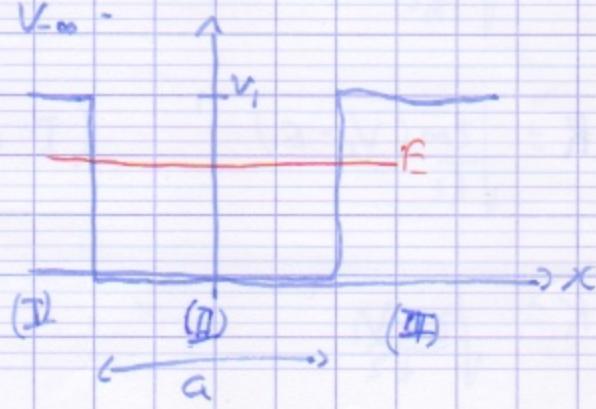
$$\langle x \rangle \text{ défini (borné)} \\ \langle p \rangle = 0$$

On suppose $V_0 < V_{\infty}$ et que $V_0 < E < V_{\infty}$

Souvent on pose $V_{\infty} = 0 \Rightarrow$ équations aux relati. $E < 0$.

On fera pas ceci pour la suite. On se place dans un unique puit symétrique.

Alors $V_{\infty} = V_{-\infty} -$



On a 3 régions I, II, III, à largeur du puit.

II est la zone "classement" autorisé car $E > V \Rightarrow E_c > 0$
Par contre I et III sont des zones "classement interdites".

On a un potentiel qui est symétrique! \Rightarrow pair

$$\text{alors } \Pi V \Pi = V$$

l'opérateur paire.

$$\text{rg: } \Pi X \Pi = X \quad \text{et } \Pi^2 = \text{Id.}$$

$$\Pi \rho \Pi = -\rho$$

$$\text{par ailleurs } \Pi V \Pi^2 = V \Pi \quad \Rightarrow \quad \Pi V = V \Pi \Rightarrow [V, \Pi] = 0$$

$$\text{alors } \left[\frac{p^2}{2m}, \Pi \right] \rightarrow [H, \Pi] = 0$$

Schrödinger:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi = 0$$

(on pose ceci:

$$\text{soit } k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - 0)} \quad (\text{II})$$

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_1 - E)} \quad (\text{I et III})$$

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_1}$$

5

MQCH

II

$$\text{alors } \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

parité

pair $A = B$

$$\psi = C \cos(kx)$$

impair $A - B$

$$\psi = C \sin(kx)$$

III $\psi(x) = A e^{-kx} + B e^{+kx}$ ↗ fonction bornée!
 x peut aller à $+\infty$

I $\psi(x) = A e^{-kx} + B e^{+kx}$ ↗ fonction bornée!
 x peut aller à $-\infty$

pair: $\psi_{\text{II}}(\pm \frac{\pi}{2}) = \psi_{\text{III}}(\pm \frac{\pi}{2})$

$$\psi_{\text{II}}(-\frac{\pi}{2}) = \psi_{\text{I}}(\frac{\pi}{2})$$

Idem pour ψ'

impair? $\psi_{\text{I}, \text{III}} = C e^{-k|x|} \cdot \text{sign}(x)$ ↗ fonction paire!
 dans I, III?

$$(\text{pair} \Rightarrow \psi_{\text{I}, \text{III}} = C e^{-k|x|})$$

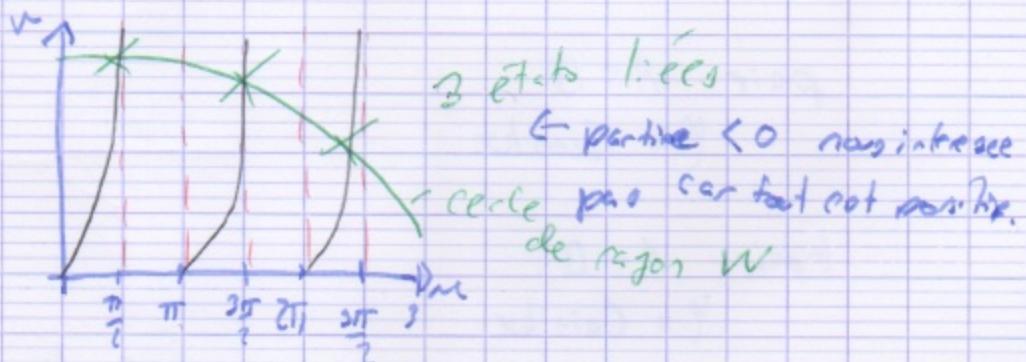
Pair: $\begin{cases} C_{\text{I}} \cos(k \frac{\pi}{2}) = C_{\text{II}} e^{-k \frac{\pi}{2}} \\ -k C_{\text{I}} \sin(k \frac{\pi}{2}) = -k C_{\text{II}} e^{-k \frac{\pi}{2}} \end{cases}$

on divise l'une par l'autre: $-k \tan(k \frac{\pi}{2}) = -k$

or k est quasi-dans continu \Rightarrow div de droite.

on resout alors graphiquement :

on pose $\mu = \frac{h}{r}$ $r = \frac{Kg}{2}$



on constate que $\mu^2 + v^2 = W^2$

donc $\mu^2 + v^2 = W^2$ avec $W = \frac{Kg}{2}$

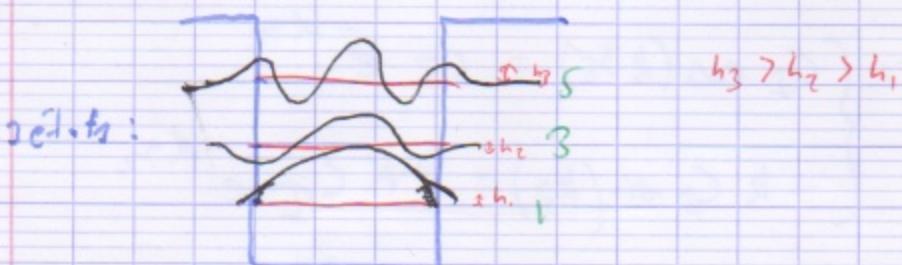
on a donc 2 équations : $\mu \tan \alpha = v$ (1)

$\mu^2 + v^2 = W^2$ (2)

L'obj. d'intrale de rayon W

$$(2) \Rightarrow v = \sqrt{W^2 - \mu^2}$$

donc dans cet exemple :



plus on avance F plus la partie énergieante (qui rentre dans H et t) est grande (h) (en valeur absolue).

6

MQ CHY

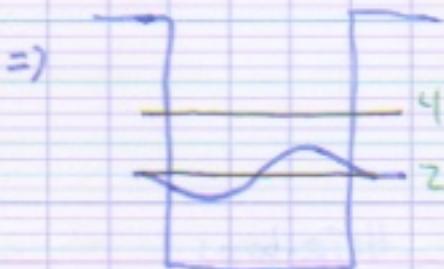
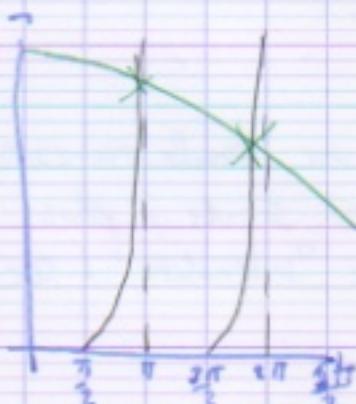
Pour les positions initiales:

$$V = \sqrt{W^2 + M^2}$$

$$\begin{cases} C_I \sin(kz_0) = C_{II} e^{-kz_0} \\ C_I k \cos(kz_0) = -C_{II} K e^{-kz_0} \end{cases}$$

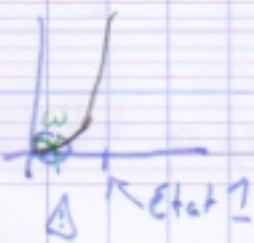
en divisant on trouve $-K \cot(kz_0) = V$

On résout ça aussi graphiquement:



D)

Dans un tel cas il ya toujours au moins 2 état liés pair si W est assez petit:



On arrondit au nombre d'états liés par :

$$N_{\text{liés}} = \lceil \left(\frac{2M}{\pi} \right) + 1 \rceil$$

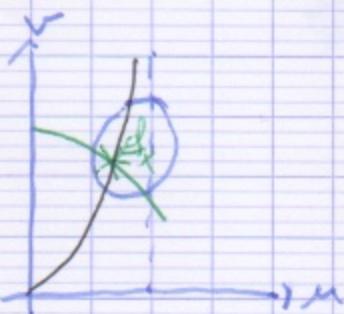
Si $M > 2L$, alors :

premiers états liés pair : $M \approx \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi$

premiers états impairs : $M \approx n\pi$

On appelle point de reboussement les limites de la zone "élargissement autorisé".

Dans tout les cas, il y a une énergie qui penètre dans I et II. Plus E est grande, plus l'onde énergie penètre dans la zone "interdite". Ceci est graphiquement montré dans :



rencontrant à l'inégalité de Heisenberg :

$$\frac{M \approx \pi}{2} \Rightarrow \frac{h \cdot a}{2} \approx \frac{\pi}{2}, \quad \Delta x \approx a$$

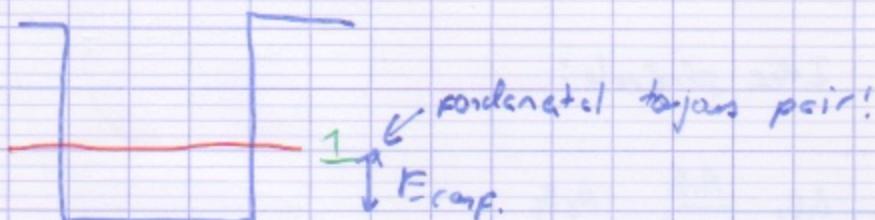
$$\Delta p \approx \frac{h}{a}$$

$\Delta x \Delta p \approx h \approx \pi a^2$ en bon ordre de grandeur mais
qui n'est pas le valeur minimal obtenu par un état gaussien !
ici on n'a pas d'état Gaussien !

7

MQ CH4

Energie de confinement:



L'énergie de l'état fondamental ne correspond pas à l'énergie 0 du potentiel. Il y a un décalage.

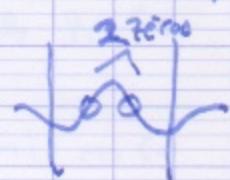
En effet :

$$E_{n=1} = 0 + \frac{\pi^2 k_z^2}{2m}$$

$$\hbar a \approx \frac{\lambda}{2} \Rightarrow E_{n=1} = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \text{ en } \frac{\text{J}}{\text{m}^2}!$$

Rg: Pour un puit infini on n'a pas de pénétration!

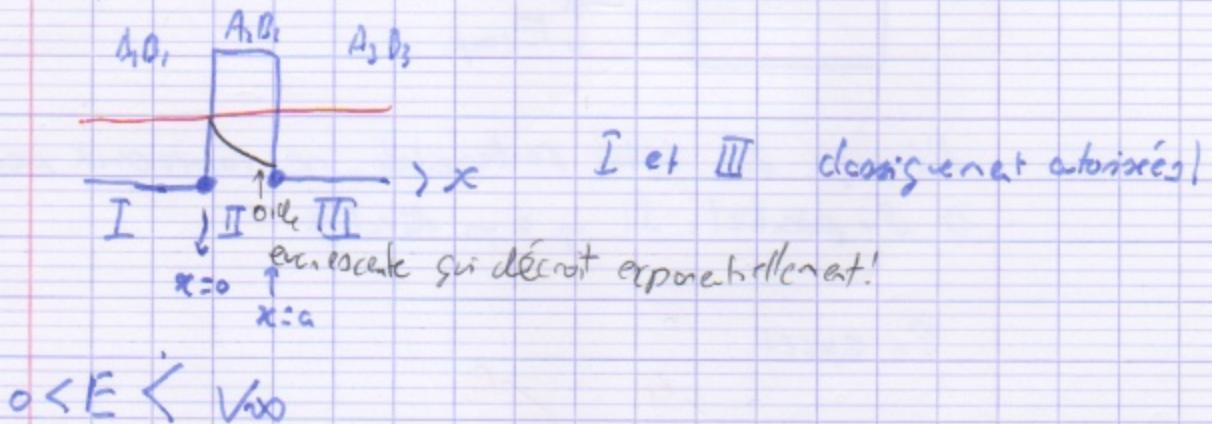
Les zéros dans les dif. états viennent des interférences destructives entre les ondes réfléchies sans le puit.



Très important. La quantification du puit vient des conditions limites (fr. p't. de curie donnée) et non de l'équation de Schrödinger elle-même.

Effet Tunnel

Idee générale:



$$0 < E < V_0$$

On a : 2 points de transition •

6 degrés de liberté : $A_1 B_1$,

$$A_2 B_2$$

$$A_3 B_3$$

On peut écrire si 4 équations de continuité.

\Rightarrow 2 degr. de liberté restent.

\rightarrow on imposera que l'onde entrante dans III soit nulle!

\rightarrow pb. à 1 dimension.

rg: les conditions limites q'on impose au pb sont différentes.

$$\Psi_I = A_1 e^{ikx} + D_1 e^{-ikx}$$

$$\Psi_{II} = A_2 e^{-kx} + B_2 e^{+kx}$$

$$\Psi_{III} = A_3 e^{ik(x-a)} + B_3 e^{-ik(x-a)}$$

on devrait prendre A_1 et

B_1 pour TD mais on

choisi de retenir le

éta thermique de phase par ex. np. A et B (ce qui signifie donc on prend A_3 et B_3)

8

MG CA4

$$\text{I} - \text{II} : A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

deuxième: $\rightarrow i\hbar(A_1 - B_1) = -k(A_2 - B_2)$

$$\text{II} \rightarrow \text{III}: A_2 \gamma^{-1} + B_2 \gamma = A_2 + B_2 \quad \text{avec } \gamma = e^{+ik\alpha}$$

$$-k(A_2 \gamma - B_2 \gamma) = i\hbar(A_2 - B_2)$$

on divise par A_1 :

$$\text{II} \quad a_1 = \frac{A_2}{A_1} \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}$$

On a choisi que $B_2 = 0$ $\frac{A_2}{A_1} = k_B$

$$\frac{b_2}{A_1} = r_B$$

On introduit le terme $q = -i\frac{\hbar}{k}$

on peut alors prendre une notation matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{I} \rightarrow \text{II}$$

$$\begin{bmatrix} q^{-1} \gamma \\ q^{-1} - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_B \\ q k_B \end{bmatrix} \quad \text{II} \rightarrow \text{III}$$

on peut reprendre ce pb. C.F. ex. IV. 4 p. 79 du polj.

Alors on trouve :

$$r_0 + r^* \beta_B \lambda_B = r^*$$

$$r_0 + r \beta^{-1} \lambda_0 = r$$

avec r = coef. de réflexion de II-III.

or onde envenante !

$$\text{normalc} = 1 \Rightarrow r^* = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{g-1}{g+1} = \frac{-ih - k}{-ih + k}$$

on résout et on trouve

$$\lambda_B = \frac{r - r^*}{r^* - r^* \gamma}$$

$$\text{et } r_B = \frac{\gamma^{-1} - \gamma}{r \gamma^{-1} - r^* \gamma}$$

si $k \gg 1$ alors $r \rightarrow 1$ $\lambda_B \rightarrow 0$

$V_i \rightarrow \infty$ $\Rightarrow r_0 \rightarrow r$ (coef de réflexion de la gare) $\lambda_B \rightarrow 0$ (la gare cherche l'égalité de la gare)

si $V_i \rightarrow 0$:

$\alpha_a \rightarrow \alpha_a \Rightarrow r \rightarrow 0$ tout est écrasé,

$k \rightarrow 0$

$\lambda_0 = 1$

(il n'y a plus de barrières)

$\beta \rightarrow 0$

$\gamma \rightarrow 1$

9

MQ.CH4

Conservation du rayon de probabilité impose $(r_0)^2 + (t_0)^2 = 2$

$$T = |f_0|^2 = \frac{1}{1 + \frac{K^4}{4 h^2 K^2}} \sinh^2(Ka)$$

↑
rayon de
transmission de
la barrière

$$\left(\frac{J}{2\pi} \right)^2$$

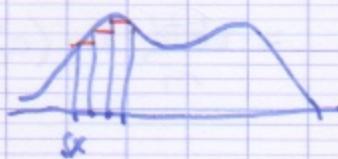
FB états de diff.

limite de la barrière EPASSE

$$Ka \gg 1$$

$$T \approx \frac{(6 h^2 k^2)}{K^4} e^{-2Ka}$$

Généralisation à $V \neq$ cte



↑
décomposition dans petits éléments δx à potentiel cte. —

δx reste grand
 $K(\delta x) \gg 1$

$$T = \prod_{i=1}^n \frac{(6 K_i^2)}{K_i^4} e^{-2K_i \delta x_i} \propto \exp \left[- \sum_i K_i \delta x_i \right]$$

$$T \propto \exp \left(-2 \int_0^a K(x) dx \right)$$

avec $|q| = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

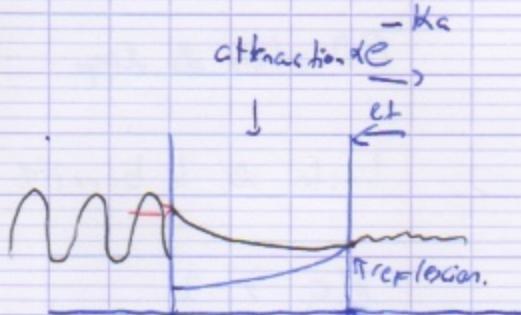
$$h = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$K(x) = \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}}$$

Donc $p \approx$:

$$T = 16 \frac{\hbar^2 K^2}{K^4} e^{-2K_a}$$



$$J(x) = \frac{t}{m} \operatorname{Im}(4^* \nabla 4) = \frac{t}{m} k \operatorname{Im} \left((c_2^* e^{-kx} + b_2 e^{+kx}) - (c_2 e^{-kx} + b_2^* e^{+kx}) \right)$$

$$4(x) = a_2 e^{-kx} + b_2 e^{+kx} \quad \begin{aligned} &= \frac{t k}{m} \operatorname{Im} (c_2^* b_2 - b_2^* c_2) \\ &= \frac{2 t k}{m} \operatorname{Im} (c_2^* b_2) \end{aligned}$$

$$c_2 = \gamma(1+\xi) \frac{t q_1}{2}$$

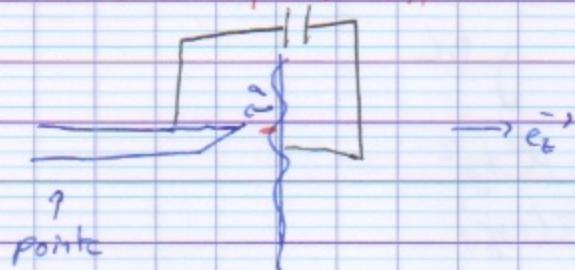
$$b_2 = \gamma^{-1}(1-\xi) \frac{t q_1}{2}$$

Le produit réflexion attraction de l'onde en cascade $\rightarrow c \in$
est $\frac{1+\xi}{1-\xi} |t q_1|^2$

MQ.CH4

Application de l'effet tunnel

Sur microscope à effet tunnel:



$$\text{transmission pointe-échantillon : } e^{-2Kd}$$

Par quel moyen pourra détecter il faut un champ E' ! \Rightarrow on applique une diff. de potentiel

\hookrightarrow Ceci est "grossièrement" lié à la diff. entre les niveaux de Fermi des 2 matériaux (pointe - échantillon)

K est dit le potentiel d'attraction (travail de sortie) $\sim g_s \cdot eV$.

courants $\sim p_A$

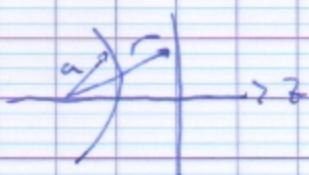
on déplace pointe avec les micros en 3D.

réduction en \vec{r} est lié à l'angle d'incidence.

\hookrightarrow $a \ll$ taille atomique (dizaine de pm).

résolution transversale

imp



$$e^{-K(r-a)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

r = distance à centre-position

$$Z = a + g e^{i\theta}$$

$\Re Z = a$ on tarbe!

$$g \gg a, \quad) \text{DC}$$

alors $r^2 = a^2 + \frac{x^2 + y^2}{2a}$

$$\psi(x,y) = e^{-Kf} e^{-\frac{K(x^2+y^2)}{2a}}$$

$$w = \sqrt{\frac{a}{K}}$$

sensibilité grande tâche
sur Z

\Rightarrow il faut $a \ll 1$

\Rightarrow pointe avec atome unique! (à si DC n'est pas assez car $A \approx 10K$)
transverse

Dans ce cas resolution \approx taille atome.

• double p-i-t \rightarrow Ar poly

• Théorie de Gomov de la radioactivité