

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD3

Tom BIENAIMÉ (tom.bienaimé@ens.fr)

1 Force de traînée sur une sphère en mouvement

1. Dans la limite des faibles vitesses, on suppose que la résistance au mouvement de la sphère dans le fluide est essentiellement d'origine visqueuse. Une sphère de rayon a , en mouvement de translation à la vitesse \mathbf{u} , subit de la part du fluide une force de trainée $\mathbf{F} = -6\pi\eta a \mathbf{u}$ (loi de Stokes).

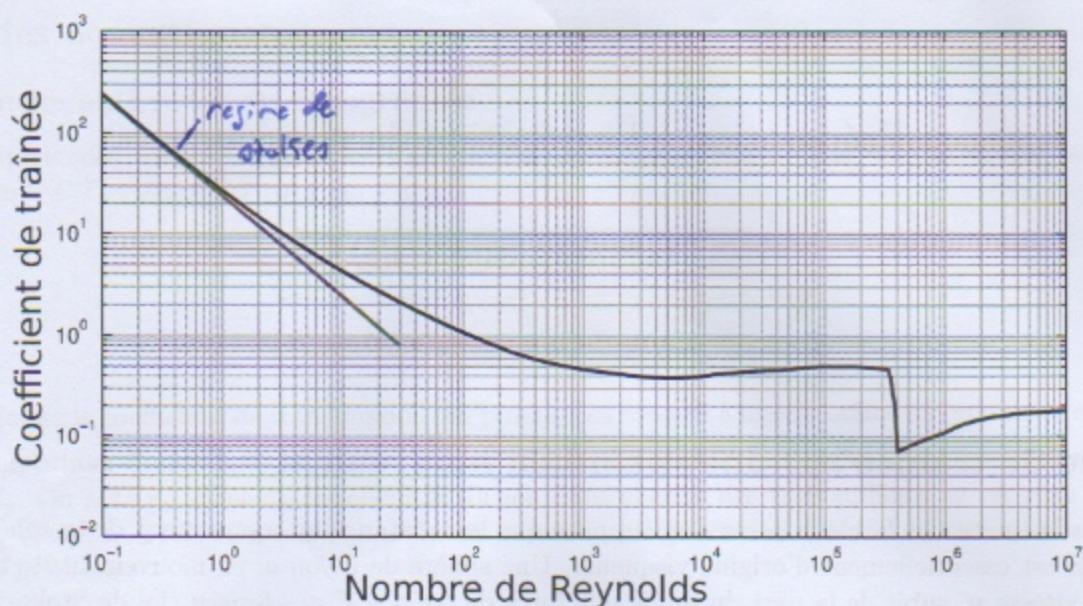
- (a) Que vaut la poussée d'Archimède subie par la sphère dans le fluide ? Dépend-elle de la vitesse relative entre la sphère et le fluide ?
- (b) La sphère, de masse volumique constante ρ_b , est lachée sans vitesse initiale dans le fluide. On supposera $\rho_b > \rho_{\text{eau}}$. Établir l'équation du mouvement de la bille :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

où l'on précisera les expressions de τ et u_∞ en fonction des données du problème.

- (c) Calculer l'évolution de la vitesse $u(t)$ au cours du temps. Que devient-elle lorsque $t \rightarrow \infty$? Commenter. Tracer cette fonction $u(t)$.
- (d) Calculer u_∞ associée respectivement à une gouttelette de brouillard (rayon 1 μm), puis à une goutte de pluie (rayon 1 mm) dans l'air. Ce dernier résultat vous paraît-il réaliste ?
- (e) Quelle condition doit vérifier le nombre de Reynolds pour que la loi de Stokes puisse rendre compte du mouvement ? Donner le nombre de Reynolds dans le cas de la goutte de brouillard et de la goutte d'eau. Que peut-on en conclure ?
2. À grande vitesse, on suppose que la contribution de la force de Stokes est négligeable dans la résistance au mouvement de la sphère dans le fluide.

- (a) Quelle est l'origine physique de la force de traînée dans ce cas ?
- (b) Proposer un dispositif expérimental permettant de mesurer la force de traînée exercée par le fluide sur la sphère.
- (c) On suppose que les grandeurs caractéristiques du problème sont la densité ρ et la viscosité dynamique η du fluide, la vitesse relative u entre la sphère et le fluide, le diamètre a de la sphère et la force de traînée F . Montrer que l'on peut former deux nombres sans dimension à partir de ces paramètres. Donner leurs expressions.
- (d) En plus du nombre de Reynolds Re , quelle est l'autre grandeur sans dimension C_x caractéristique du problème que l'on peut construire ?
- (e) D'après la figure ci-contre, déterminer la dépendance de C_x en fonction de Re sur la plage $Re \in [10^3, 10^5]$.
- (f) Déduire des deux questions précédentes la manière dont F dépend de u sur cette plage de nombre de Reynolds.

Figure 1 – Évolution de C_d en fonction du nombre de Reynolds Re .

2 Écoulement parfait autour d'un cylindre – Portance des avions

On considère une aile cylindrique d'axe horizontal z et de rayon R , en mouvement rectiligne uniforme à vitesse $U \mathbf{u}_x$ dans le référentiel terrestre (R_0) (voir figure 2). Loin de l'aile, l'air est au repos et la pression est constante, notée p_∞ . Il est commode, pour exprimer les conditions aux limites périodiques sur l'aile, de traiter le problème dans le référentiel (R) lié à l'aile, où nous noterons \mathbf{v} le champ eulérien des vitesses. Loin de l'aile, la loi de composition des vitesses donne immédiatement $\mathbf{v}_\infty = -U \mathbf{u}_x$.

Nous supposons que i) l'écoulement est *parfait* et *stationnaire* ii) l'écoulement est *incompressible* (valable pour un écoulement subsonique) iii) l'écoulement est *irrotationnel*¹ iv) l'écoulement est plan et invariant par translation le long de l'axe de l'aile. On se place donc en coordonnées cylindriques et on cherche le vecteur vitesse sous la forme $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r, \theta)\mathbf{u}_r + v_\theta(r, \theta)\mathbf{u}_\theta$.

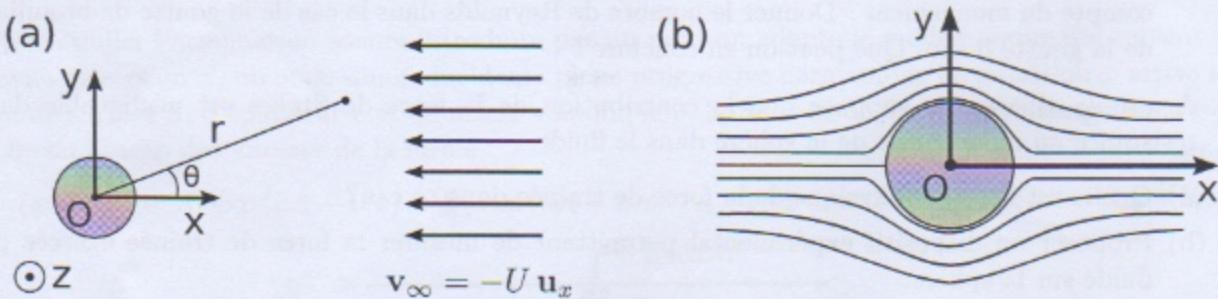


Figure 2 – (a) Écoulement autour d'une aile cylindrique. (b) Lignes de courant de l'écoulement.

1. L'écoulement étant irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$. Montrer que le potentiel des vitesses est solution de l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$.
2. On cherche un potentiel des vitesses $\phi(r, \theta)$, et on admet que la solution de l'équation de Laplace

1. Ce choix est guidé par des arguments de dynamique des fluides avancée : Kelvin a montré que partant du repos, l'écoulement autour de l'aile ne peut pas devenir tourbillonnaire si on néglige la viscosité de l'air. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

est de la forme :

$$\phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta),$$

où les $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ sont des paramètres quelconques. Déterminer ces constantes en exploitant i) la symétrie du problème par rapport au plan $y = 0$, ii) la condition aux limites à l'infini, iii) la condition aux limites sur le bord du cylindre. Montrer que l'on obtient :

$$\phi(r, \theta) = \beta_0 - U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta,$$

où on remarquera que la constante β_0 peut-être omise car celle-ci n'influence pas le champ des vitesses.

3. En déduire le champ des vitesses $\mathbf{v}(r, \theta)$ et tracer les lignes de courant de l'écoulement (voir figure 2). Calculer la norme du vecteur vitesse $v = \|\mathbf{v}\|$ sur l'aile *i.e.* en $r = R$.
4. Utiliser le théorème de Bernoulli pour montrer que la pression autour de l'aile s'écrit :

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

Démontrer que la résultante des forces de pression sur l'aile est nulle, et donc que l'avion ne subit aucune portance et aucune force de traînée. Commenter.

Remarques sur l'écoulement autour d'une aile réelle L'absence de portance est dû au fait que l'écoulement adopté dans le modèle précédent est symétrique par rapport au plan horizontal $\theta = 0$. Pour une aile réelle, l'écoulement est dissymétrique (voir figure 3) : les lignes de champ s'écartent au voisinage de B et se resserrent au voisinage de A , de telle sorte que :

$$v_B < v_\infty = U \quad ; \quad v_A > v_\infty = U,$$

et le théorème de Bernoulli assure que $p_B > p_A$. C'est donc la dissymétrie de l'écoulement autour de l'aile qui donne naissance à la portance. On peut noter que cette dissymétrie est équivalente au fait que la circulation de \mathbf{v} sur le contour limitant la section de l'aile orienté dans le sens trigonométrique autour de \mathbf{u}_z , est positive :

$$\oint_{(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} > 0,$$

car la contribution positive du voisinage de A (où $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{l}$) l'emporte sur la contribution négative du voisinage de B (où $\mathbf{v} \parallel -d\mathbf{l}$).

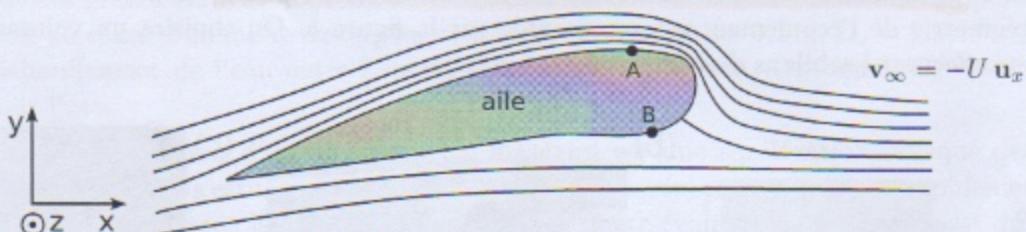


Figure 3 – Illustration des lignes de courant autour d'une aile réelle.

Ceci nous donne l'idée de superposer à l'écoulement précédent un *vortex* d'intensité Γ pour obtenir :

$$v_r = -U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad ; \quad v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

5. Calculer la valeur de la vitesse sur le cylindre, puis la pression sur le cylindre via le théorème de Bernoulli.
6. Calculer la résultante des forces de pression sur le cylindre et montrer que l'on obtient une force de portance dès que $\Gamma > 0$.

Remarque L'intensité de la vorticité Γ apparaît comme une indéterminée du problème due au caractère excessif du modèle de l'écoulement parfait. En pratique, c'est la viscosité dans la couche limite qui fixe la valeur de Γ .

3 Bilans macroscopiques

3.1 Amincissement d'un jet libre par la viscosité

On considère un fluide visqueux sortant d'un tube cylindrique de diamètre R_0 . Le système est en apesanteur de sorte que les forces de gravité n'interviennent pas dans le problème. L'écoulement est supposé incompressible et stationnaire. Comme nous l'avons vu dans l'exercice sur l'écoulement de Poiseuille (voir TD1), le profile radial de l'écoulement en sortie du tube est donné par $v(r) : 2U_0 [1 - (r/R_0)^2]$. On suppose qu'à l'infini, le profil des vitesses est uniforme et a pour valeur U_∞ (les forces de viscosité ont uniformisé le profil des vitesses). Le rayon du jet est R_∞ . Le but de l'exercice est de calculer U_∞ et R_∞ .

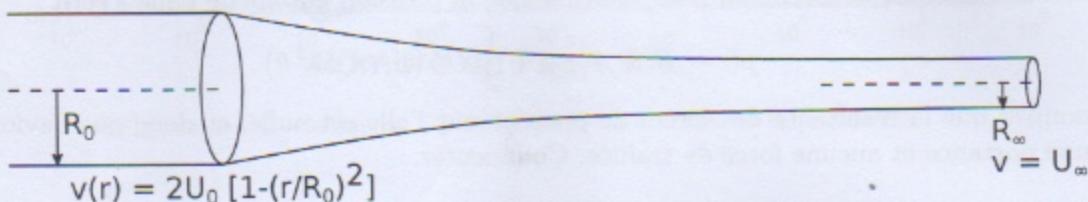


Figure 4 – Amincissement d'un jet libre par la viscosité.

- Montrer que la conservation du débit volumique donne une relation entre U_0 , U_∞ , R_0 et R_∞ .
- En faisant un bilan de quantité de mouvement, en déduire U_∞ et R_∞ en fonction de U_0 et R_0 .
- Estimer l'ordre de grandeur de la distance nécessaire pour passer de R_0 à R_∞ .

3.2 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile (changement brutal de la profondeur de h_1 en amont, à h_2 en aval ; ce changement s'effectue sur une distance comparable à la profondeur, avec $h_1 < h_2$). Pour simplifier l'analyse, on modélise cet écoulement en négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide et en supposant les vitesses d'écoulement v_1 et v_2 uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut. La géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure 5. On choisira un volume de contrôle approprié pour effectuer les bilans des différentes grandeurs.

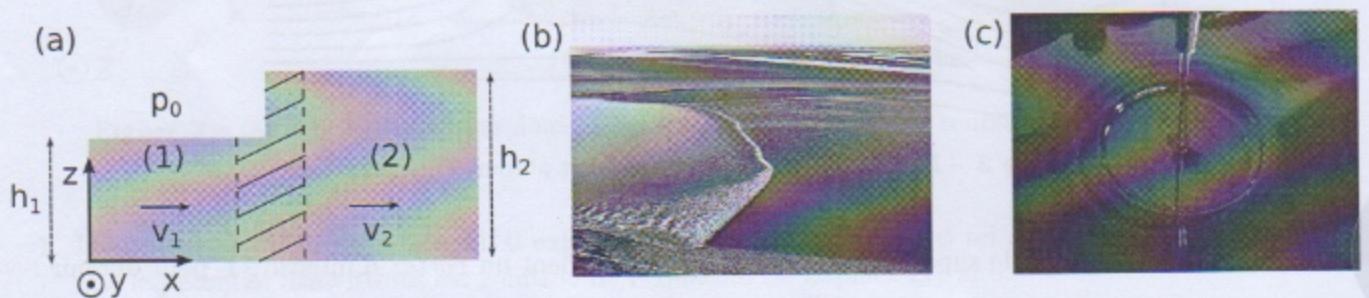


Figure 5 – (a) Schéma du ressaut hydraulique. (b) Le mascaret est un phénomène naturel très spectaculaire qui se produit sur une centaine de fleuves, rivières et baies. Ce phénomène de brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire est provoqué par l'onde de la marée montante lors des grandes marées. (c) Autre exemple courant de ressaut hydraulique qui se manifeste par une onde circulaire stationnaire autour du jet d'eau au fond d'un évier.

1. Monter que la répartition de la pression dans le fluide est hydrostatique. Exprimer la pression $p(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique p_0 .
2. *Équation de conservation de la masse.* Donner l'expression du débit volumique D_v en fonction de (v_1, h_1, L) et (v_2, h_2, L) , L étant la largeur du canal. En déduire la relation liant v_1, h_1, v_2, h_2 .
3. *Equation de transport de la quantité de mouvement.*
 - (a) Montrer que l'équation-bilan de la densité de quantité de mouvement conduit à la relation :

$$\frac{1}{2}gh_1^2 + v_1^2h_1 = \frac{1}{2}gh_2^2 + v_2^2h_2,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- (b) Calculer v_1 et v_2 en fonction de h_1, h_2 et g .
- (c) On définit les nombres de Froude en amont et en aval par :

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{h_2}{h_1}.$$

Exprimer Fr_1 et Fr_2 en fonction de α .

- (d) Montrer que pour $\alpha > 1$, on a $Fr_1 > 1$ (régime super-critique ou torrentiel) et $Fr_2 < 1$ (régime sous-critique ou fluvial).
- (e) Application numérique : avec un débit par unité de largeur de $1.5 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ et une profondeur avant ressaut de 0.2 m , calculer Fr_1 puis h_2 .
4. *Bilan énergétique.*

- (a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse \mathbf{v} dans un champ de pesanteur, la densité d'énergie est $e = \rho(v^2/2 + gz)$ et que la puissance fournie par les forces de pression p à travers une surface $d\mathbf{S}$ est $-p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$. En établissant l'équation-bilan de la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation :

$$-\dot{Q} = \iint_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

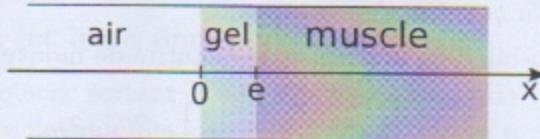
où \dot{Q} est la puissance dissipée sous forme de chaleur dans le volume de contrôle par la turbulence et SC est la surface de contrôle.

- (b) En déduire l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction du débit volumique D_v , des grandeurs v et h en amont et en aval, ainsi que de ρ et g . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau ($h_1 = 0.2 \text{ m}$, $D_v = 1.5 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$). En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut. On donne $C_p = 4.18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l'eau.
5. *Vitesse de propagation d'un mascaret.* Un mascaret est une surélévation brusque des eaux, qui se produit dans certains estuaires au moment du flux de marée, et qui progresse rapidement à la célérité $-c \mathbf{u}_x$ vers l'amont sous la forme d'une vague déferlante (voir figure 5). En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est h_1 et le liquide a une vitesse d'écoulement $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{u}_x$. En aval, la hauteur d'eau est h_2 ($h_1 < h_2$) et le liquide est immobile $\mathbf{v}_2 = 0$.
 - (a) Représenter sur une figure le volume de contrôle dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $-c$ par rapport au sol ainsi que les vitesses d'écoulement v'_1 et v'_2 en amont et en aval de la discontinuité.
 - (b) En utilisant un changement de référentiel adéquat ainsi que les résultats obtenus pour le ressaut, calculer la vitesse de propagation c en fonction de h_1, h_2 et g .
 - (c) Dans le cas limite où $h_2 \rightarrow h_1$, que devient la vitesse de propagation ?

4 Ondes acoustiques

4.1 Couche anti-reflet en échographie

Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 4.0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $Z_m = 1.7 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.



1. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle et commenter.

Pour supprimer l'onde réfléchie dans l'air, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur e en gel, d'impédance Z_g . On note c_a , c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux, et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesses dans les trois milieux de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{v}_1(x < 0, t) &= A_a \exp(i\omega t - ik_a x), \\ \underline{v}_1(0 < x < e, t) &= \underline{A}_g \exp(i\omega t - ik_g x) + \underline{B}_g \exp(i\omega t + ik_g x), \\ \underline{v}_1(x > e, t) &= \underline{A}_m \exp(i\omega t - ik_m x).\end{aligned}$$

2. Donner les expressions des surpressions dans les trois milieux en fonction des impédances Z_a , Z_g et Z_m et des expressions des champs des vitesses.
3. Écrire les conditions aux limites aux interfaces.
4. En déduire la relation suivante entre les impédances et e :

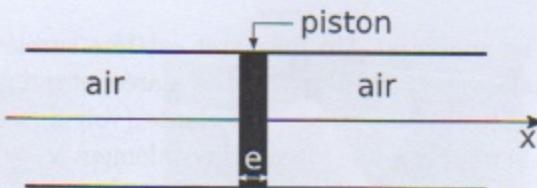
$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \exp(-2ik_g e).$$

5. Vérifier la pertinence de l'expression ci-dessus sur un cas particulier. Déterminer les valeurs de e et Z_g pour avoir la meilleure transmission possible (condition d'adaptation d'impédance).

4.2 Isolation phonique

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle sommaire suivant : dans un tuyau de section S , un onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur un piston de surface S , d'épaisseur e et de masse volumique ρ , libre de se déplacer au voisinage de $x = 0$. On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\underline{v}_1(x < 0, t) = A_1 \exp(i\omega t - ikx) + \underline{B}_1 \exp(i\omega t + ikx) \quad ; \quad \underline{v}_1(x > e, t) = \underline{A}_2 \exp(i\omega t - ikx + ike).$$



1. Justifier cette forme et écrire les surpressions $\underline{p}_1(x, t)$ correspondantes.
2. Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que :

$$\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} = \left(1 + i \frac{\rho e \omega}{2 \rho_0 c}\right)^{-1}.$$

3. En déduire le facteur de transmission en puissance \mathcal{T} du mur. On donne $\rho_0 = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho = 2.1 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $c = 340 \text{ m s}^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur minimale du mur si on veut une atténuation d'au moins -40 décibels pour $f = 1 \text{ kHz}$? Et pour $f = 100 \text{ Hz}$?

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD3 - Approfondissements et corrections

Tom BIENAIMÉ (tom.bienaimé@ens.fr)

1 Approfondissements

Pour approfondir deux points importants abordés lors du TD3, je vous conseille de lire deux chapitres du cours d'hydrodynamique de Marc Rabaud (cours de L3 FIP de l'ENS). Il s'agit d'une excellente référence. Le polycopié est disponible à l'adresse suivante :

http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf

1.1 Portance sur une aile

Lire le chapitre 13, de la page 159 à la page 167.

1.2 Théorème du transport

Lire le chapitre 3, de la page 29 à la page 35.

2 Correction : Force de traînée sur une sphère en mouvement

1. (a) La poussée d'Archimède subie par la sphère dans le fluide vaut :

$$\mathbf{F}_a = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{\text{eau}} g \mathbf{u}_z,$$

dans le cas où la gravité est orienté selon $-\mathbf{u}_z$.

La poussée d'Archimède ne dépend pas de la vitesse relative entre la sphère et le fluide.

Dans un écoulement en présence de gravité, on peut faire apparaître le terme de poussée d'Archimède comme le gradient d'un potentiel. Ainsi, on peut travailler dans le fluide avec une pression effective débarrassée des effets de gravité. Pour la force appliquée à l'objet, il faut tenir compte du poids, de la pression hydrodynamique et de la pression hydrostatique (les deux ne rétroagissent pas l'une sur l'autre). Donc, finalement, du poids apparent qui tire vers le bas et de la force de traînée qui s'oppose au mouvement.

(b) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère s'écrit :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_b \frac{du}{dt} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_b g - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{\text{eau}} g - 6\pi \eta a u.$$

L'équation du mouvement de la bille peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau},$$

où $\tau = 2a^2 \rho b / (9\eta)$ et $u_\infty = 2a^2 g (\rho_b - \rho_{\text{eau}}) / (9\eta)$.

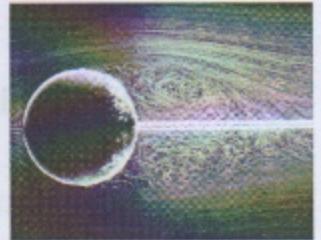
- (c) L'évolution de la vitesse au cours du temps est donnée par

$$u(t) = u_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

- (d) La viscosité dynamique de l'air vaut $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Pl. Pour la gouttelette de brouillard $u_\infty = 0.12 \text{ mm s}^{-1}$. Pour la goutte de pluie $u_\infty = 120 \text{ m s}^{-1}$, ce qui n'est pas réaliste.

- (e) La loi de Stokes est valide lorsque $Re = vap/\eta = va/\nu < 1$. Pour la goutte de brouillard $Re = 9 \cdot 10^{-6}$. Pour la goutte de pluie $Re = 9 \cdot 10^3$. La loi de Stokes ne s'applique pas pour décrire le mouvement de la goutte de pluie.

2. (a) À grande vitesse (*i.e.*, de façon plus précise, à grand nombre de Reynolds), il apparaît derrière la sphère un large sillage turbulent. Ce sillage fait que l'écoulement moyen derrière la sphère est pratiquement nulle et que la pression est donc proche de p_∞ . Comme devant on a la pression de stagnation $p_\infty + 1/2\rho u^2$ cela donne une force de traînée en $1/2\rho u^2$ fois la section de la sphère πa^2 fois un coefficient numérique qu'on appelle le coefficient de traînée C_D ou C_x . C'est le travail de cette force qui est dissipé dans le sillage turbulent.



- (b) La mesure de la vitesse limite d'une sphère tombant dans un fluide au repos.

- (c) Les grandeurs caractéristiques du problème sont ρ, η, u, a, F . $[\rho] \sim ML^{-3}$, $[\eta] \sim ML^{-1}T^{-1}$, $[u] \sim LT^{-1}$, $[a] \sim L$, $[F] \sim MLT^{-2}$. On a 5 paramètres, 3 dimensions. On peut donc former deux nombres sans dimension. Par exemple on peut choisir :

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho a^2 u^2} \quad \text{et} \quad \pi_2 = Re = \frac{\rho u a}{\eta}.$$

Ce deuxième nombre sans dimension est le nombre de Reynolds. Il n'est pas surprenant de le voir apparaître, puisque nous savons qu'il suffit à déterminer la nature de l'écoulement autour de la sphère. L'analyse dimensionnelle nous permet d'affirmer que :

$$\frac{F}{\rho a^2 u^2} = f(Re),$$

où f est une fonction inconnue.

- (d) La relation précédente est usuellement exprimée sous la forme suivante :

$$F = \frac{1}{2} C_x(Re) \rho \pi a^2 u^2.$$

Le coefficient C_x , fonction du nombre de Reynolds, est appelé coefficient de traînée :

$$C_x(Re) = \frac{2F}{\rho \pi a^2 u^2}.$$

Cette équation fait intervenir des nombres sans dimension. Elle exprime une relation universelle : deux sphères différentes, placées dans deux fluides différents s'écoulant à des vitesses différentes, seront caractérisées par le même coefficient C_x pourvu que le nombre de Reynolds soit le même dans les deux cas.

- (e) Sur la plage $Re \in [10^3, 10^5]$, la figure montre que le coefficient C_x est quasiment indépendant du nombre de Reynolds et vaut approximativement 0.4.
- (f) Sur la plage $Re \in [10^3, 10^5]$, la force de traînée prend la forme suivante :

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho \pi a^2 u^2.$$

À la différence de la loi de Stokes (valable à $Re < 1$), la norme de la force de traînée varie comme le carré de la norme de la vitesse.

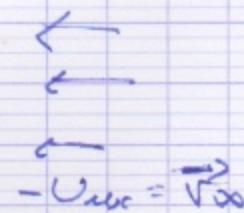
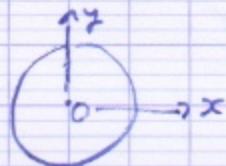
TD 3
hydro

1

TD 3 hydro.

Ne peu dire fluide parfait mais évidemment parfait !

exercice 2



On suppose le courant parfait
stationnaire
incompressible et
irrotationnel

1) Cf. TD 1 $\operatorname{div}(\vec{\text{grad}} \phi) = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0$

2) i) Symétrie du problème: $\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta)$ car

symétrie / plan x et / plan y.

$\Rightarrow \delta_n \text{ et } f_n = 0$ (les sin = 0!).

ii) $\nabla(r_{\infty}, \theta) = -U_{\infty} \hat{x} = -\operatorname{grad}(V_{\infty})$
 $= \operatorname{grad}(-U_{\infty} \cos \theta)$

donc $\boxed{\phi(r_{\infty}, \theta) = -U_{\infty} \cos \theta}$

donc $\lambda_0 = 0$

$$\lambda_1 = -Ur \quad \text{car } -\text{grad}(Ur \cos \theta) = \text{cte.}$$

$$\lambda_n \quad \forall n \geq 2 = 0 \Rightarrow \phi(r=\infty, \theta) = -Ur \cos \theta$$

rg. $x = r \cos \theta$!

$$\text{iii)} \quad v_r(r=R, \theta) = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial r} (r=R, \theta) = \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n R^{n-1} \cos(n\theta) (-n) \\ + \alpha_1 \cos(\theta) \end{array} \right.$$

donc $U \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n R^{n-1} \cos(n\theta) (-n)$

$$\Rightarrow -U \cos \theta = \frac{\beta_1 \cos(\theta)}{R^2} + \sum_{n=2}^{\infty} -\beta_n R^{n-1} \cos(n\theta) \cdot n$$

donc $\boxed{\beta_1 = -UR^2}$ et $\forall n \geq 2 \quad \boxed{\beta_n = 0}$.

alors

$$\phi(r, \theta) = \beta_0 - U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$

$\lambda_1 \quad \beta_1$

2) $\boxed{v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta}$ et $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$

$$v_r(r=R, \theta) = 0, \text{ normal.}$$

$$v_\theta = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

2

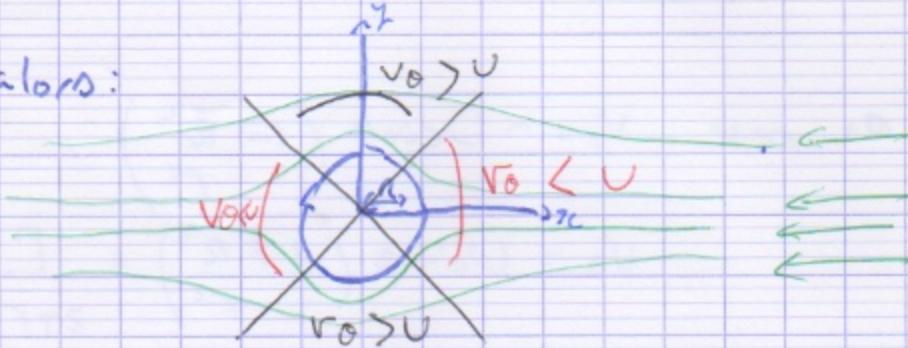
TB gyro 3

en $r = R$

$$V_r = 0$$

$$\sqrt{\alpha} = 2v \sin \theta = \|v\| \text{ en } r = R$$

alors :



4) écoulement parfait, incompressible, irrotationnel.

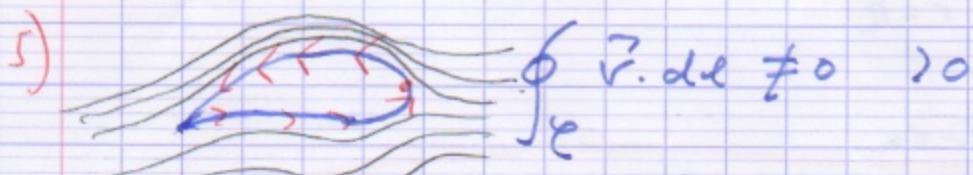
alors Bernoulli : $\left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} \right) = \text{cte.}$

à l'infini $P = P_\infty$, on néglige la hauteur et $\frac{V_0^2}{2} = \frac{V^2}{2}$

donc $P(r=R, \theta) = P_\infty + \frac{1}{2} \rho V^2 (1 - 2 \sin^2 \theta)$

$\begin{aligned} &\text{résultant des forces sur le cylindre} \\ F &= - \int_0^{2\pi} P(r=R, \theta) \cdot L R d\theta [\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y] \\ &= \vec{0}! \end{aligned}$

avec L longeur transversale du cylindre



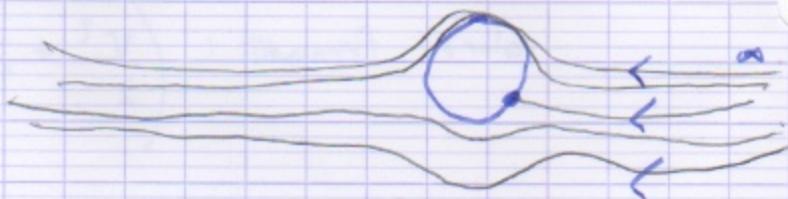
$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \neq 0 > 0$$

car surface au dessus > surface en dessous !

on pose $V_r = -U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$

$$V_0 = U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{P}{2\pi r}$$

alors $\oint_C \vec{v}^2 \cdot d\vec{\ell} = \int \dots > 0$ avec notre cylindre



sur l'isle $\| \vec{v} \| = U_0 \sin \theta + \frac{P}{2\pi R} = V_0$

alors Bernoulli :

$$p(r=R, \theta) = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{4 \sin \theta \cdot 1}{2\pi R} - \frac{P}{\rho U^2 R} \right)$$

alors $P = \int_0^{2\pi} R d\theta p(r=R, \theta) (\cos \theta + \sin \theta)$

3

II) hydro3

$$6) \vec{F} = - \int_0^{2\pi} L R \cos \theta \left(- \frac{e \Gamma U \sin \theta}{\pi R} \right) (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

(les autres termes disparaissent comme à la q. 4).

$$= \underline{\frac{L e \Gamma U}{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \alpha$$

$$= L e \Gamma U \bar{\cos}^2 \theta = \vec{F}$$

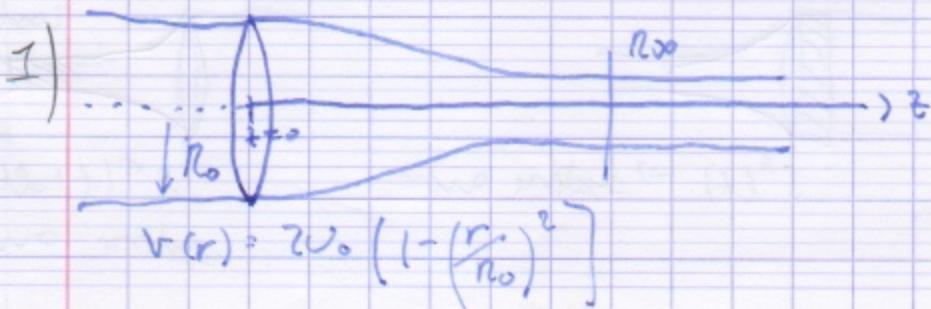
portance vers le haut si $\Gamma > 0$!ici Γ est une indéterminée du problème, or on peut montrer que $\Gamma \propto U$ et alors la portance \vec{F} est en U^2

d'où $\Gamma = C_3 e S V^2$

\hookrightarrow intérêt
 \hookrightarrow corps de portance

3) Bilans macroscopiques

3.1 Amincissement d'un jet par la viscosité



On fait un bilan de débit volumique.

On est statique et incompressible.

dépend pas du temps!

conservation de D_V

$$D_V(z=0) = \int dS v^2 = \int_{dS} (2\pi r) dr \cdot 2U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)$$

car $\int dS = 2\pi r$

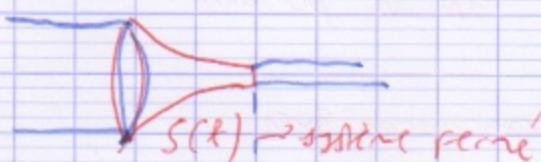
$$= 4 U_0 \pi \left[\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{4} \right] = \pi U_0 R_0^2$$

$$D_V(z=\infty) = \pi R_\infty^2 U_\infty \quad \text{car} \quad S = \pi R_\infty \text{ et } U_\infty = v_\infty$$

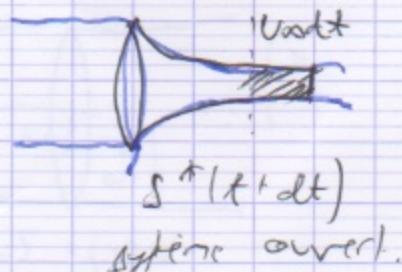
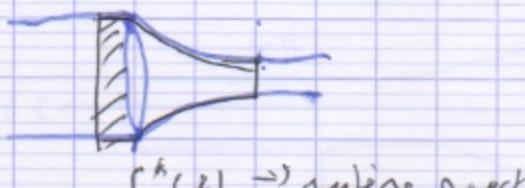
conservation du débit $\Rightarrow D_V(z=0) = D_V(z=\infty)$

$$\Leftrightarrow U_\infty R_\infty^2 = U_0 R_0^2$$

2) Bilan de gé de mouvement:



à t:



4

II) hydrog

$$\begin{aligned}
 \text{alors } P^*(t+dt) &= P(t+dt) + \cancel{\rho \pi R_0^2 U_0 dt} \underbrace{\rho \times U_0}_{\substack{\text{dV sortant} \\ \text{volum}}} \\
 &\quad \downarrow \\
 s(t) &\quad S(t) \\
 P^*(t) &= P(t) + \rho \int_0^{R_0} 2\pi r dr \underbrace{U(r) \cdot dt}_{\substack{ds \\ dt}} \cdot \underbrace{U_r}_{\substack{ds \\ dt}} \\
 &= P(t) + \rho dt 8\pi U_0^2 \int_0^{R_0} dr \cdot r \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)^2 \\
 &= P(t) + \rho dt 8\pi U_0^2 \int_0^{R_0} dr \left(r - \frac{2r^3}{R_0^2} + \frac{r^5}{R_0^4}\right) \\
 &= P(t) + \rho dt 8\pi U_0^2 \left[\frac{R_0^2}{2} - \frac{2}{4} R_0^2 + \frac{1}{6} R_0^4 \right] \\
 &= P(t) + \rho dt + \frac{4}{3} \pi U_0^2 R_0^2
 \end{aligned}$$

en régime stationnaire, $P(t+dt) = P(t)$.

D'après le PFD:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP^*}{dt} &= \frac{P^*(t+dt) - P^*(t)}{dt} = \frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{forces de pression} \\
 &= \sum F_{ext} = - \int_{S(t)} \rho v ds \stackrel{v=0}{=} 0 \text{ car jet libre!}
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } R_{20}^2 U_{20} = R_0^2 U_0$$

$$\text{du coup : } U_{20} = \frac{1}{3} U_0$$

$$R_{20} = R_0 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

3) Ordre de grandeur de L pour passer de R_0 à R_{20} ?

$$\text{on écrit que } \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \gamma \Delta \vec{v} - \vec{g} \text{ grad}(p)$$

$$\rho \|\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\| \approx \rho \frac{U_0^2}{L} \quad (\text{en ordre de grandeur})$$

$$\|\vec{g} \Delta \vec{v}\| \sim \frac{\gamma U_0^2}{R_0^2}$$

↑ viscosité dépend de R pas de L !

on égale les 2 termes :

$$\frac{\rho \frac{U_0^2}{L}}{\gamma} = \frac{\rho U_0^2}{R_0} \Rightarrow \frac{L}{R_0} \simeq \frac{R_0 \rho U_0}{\gamma} = \frac{R_0 U_0}{V}$$

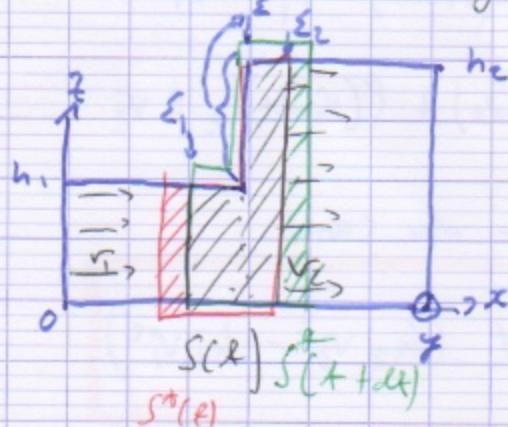
$$\text{donc } \frac{L}{R_0} = \text{Re!}$$

Re!

5

TD hydro 3

3.2 pression hydrostatique dans un canal



On peut négliger la viscosité en gravité et en frottement mais pas la viscosité du résistant.

1) On a un écoulement // et horizontal

$$\text{stationnaire : } \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$$

Écoulement // : $\bar{v} \cdot \text{grad}(\bar{v}) = 0$

$$\hookrightarrow -\text{grad } p + (\bar{g}) = 0 \rightarrow \text{pression hydrostatique !}$$

$$p_1(z) = p_0 + \rho g (h_1 - z) \text{ pour } z < h_1$$

$$p_2(z) = p_0 + \rho g (h_2 - z) \text{ pour } z < h_2$$

$$2) Dv_1 = \int v_1 ds_1 = V_1 \cdot L \cdot h_1$$

$$Dv_2 = V_2 L \cdot h_2$$

stationnaire et incompressible liquide résistant : $V_1 h_1 = V_2 h_2$

$$Dv_1 = Dv_2$$

$$3) a) P_x^*(t) = P(t) + \ell(v_i dt) \cdot h_1 \cdot v_i$$

$$P^*(t+dt) = P(t+dt) + \ell(v_i dt) h_2 \cdot v_2$$

avec L la largeur du canal.

alors:
$$\frac{dP^*}{dt} = \ell L (h_2 v_2^2 - h_1 v_1^2)$$

$$F_x = \int_0^{h_1} p_1(z) \cdot L dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 \cdot L dz - \int_0^{h_2} p_0(z) L dz$$

rs $P(z) = P_0 + \dots$, donc contribution des diff. p_0 s'annule!

$$F_x = \int_0^{h_1} e_s(h_1 - z) L dz - \int_0^{h_2} e_s(h_2 - z) L dz$$

$$= e_s L \left(h_1 - \frac{h_1^2}{2} - h_2^2 + \frac{h_2^2}{2} \right) = \frac{e_s L}{2} (h_1^2 - h_2^2)$$

alors $\frac{dP^*}{dt} = \cancel{\ell L} (h_2 v_2^2 - v_1^2 h_1) = \cancel{\ell s L} \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2}$

$$(3) \quad h_1 v_1^2 + \frac{h_2^2}{2} = \frac{1}{2} h_1^2 + v_1^2 h_1 \quad (*)$$

b) on utilise $v_i h_i = v_2 h_2$

On fait les substitutions correctes sur (*) et on trouve:

6

TD hydro 3

$$h_2 V_1^2 \left(\frac{L_1^2}{h_2} \right) + g \frac{h_2^2}{2} = h_1 V_1^2 + g \frac{h_1^2}{2}$$

$$\text{d'où } V_1^2 \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{h_2} \right) = \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2)$$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{g(h_1^2 - h_2^2)}{2}} \cdot \frac{h_2}{h_1^2 - h_1 h_2} = \sqrt{\frac{g(h_1 + h_2) h_2}{2}} \cdot \frac{h_2}{h_1(h_1 - h_2)}$$

Idem: $V_2 = \sqrt{g \frac{h_1}{h_2} \frac{h_2 + h_1}{2}}$

3c) on pose $\alpha = \frac{h_2}{h_1}$ alors $F_{r_1} = \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}}$

$$F_{r_2} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2\alpha^2}}$$

d) si $\alpha > 1 \Rightarrow h_2 > h_1, F_{r_1} > 1 \rightarrow \text{régime turbulent}$
 $F_{r_2} < 1 \rightarrow \text{régime planatif}$
 (dans critique)

quantité

à vérif. $F_{r_1/2}$ la vitesse d'une onde / vitesse écoulement.

e) $V_1 h_1 = 1,5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \left. \right\} \Rightarrow V_1 = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow F_{r_1} = 5,4 \rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2F_{r_1}^2 = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{h_2}{h_1} = 7,1$$

$$\text{d'où } h_2 = 7,1 \text{ m.}$$

4 Bilan d'énergie.

$$e = \rho (r^2/2 + gz)$$

$$\dot{P}_p = -\rho \vec{v} \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{dE^*}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

$$E^*(t+dt) = E(t+dt) + \underbrace{\int_0^{h_2} v_i dt dz L}_{\text{Volume sortant}} e(v_i, z)$$

$$E^*(t) = E(t) + \int_0^{h_1} v_i dt dz L e(v_i, z)$$

volume entrant.

$$\text{alors } \frac{dE^*}{dt} = \int_0^{h_2} v_i dz L e(v_i, z) - \int_0^{h_1} v_i dz L e(v_i, z)$$

$$P_{ext} = t \left(\int_0^{h_1} p_i(z) L dz V_i - \int_0^{h_2} p_o(z) L dz V_o \right)$$

\uparrow
entrant
 $\Rightarrow \bar{p}^2$ pour des
(e sens \vec{x})

$$P_{int} = \frac{dE^*}{dt} - P_{ext} = \int_0^{h_2} L v_i dz [e(v_i, z) + p_i(z)]$$

$$- \int_0^{h_1} L v_i dz [e(v_i, z) + p_i(z)]$$

7

TB hydro 3

a) on déroule le calcul, on trouve :

$$P_{int} = \rho Dv \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g h_2 - g h_1 \right) \text{ avec } Dv = V_1 h_1 L \\ = V_1 h_1 L$$

alors $P_{int} = - \frac{\rho c Dv (h_2 - h_1)^3}{4 h_2 h_1}$

, Ainsi traduit correctement dissipative des forces de viscosité

rg: sur l'expression de P_{int} dans 4b on a fait une substitution.

en effet pendant le calcul on doit trouver:

$$P_{int} = \dots + \underbrace{\left(\int_0^{h_2} (V_2 L dz) \rho_0 - \int_0^h (V_1 L dz) \rho_0 \right)}_{(V_2 L h_2 \rho_0 - V_1 L h_1 \rho_0) \text{ or conservation du débit!}}$$

$$\rho_0 L \left(\frac{Dv}{L} - \frac{Dv}{L} \right) = 0$$

\Rightarrow plus de terme en ρ_0 !

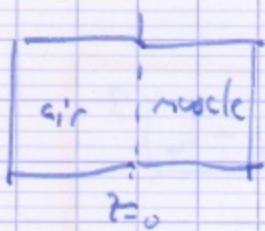
$$\text{on pose } L = 1m \quad h_1 = 0,2m \quad \text{et } Dv = 1,5 m^3 s^{-1}$$

$$\text{alors } P_{int} = -22,7 \text{ kW} \quad \text{or } \dot{Q} = -P_{int} = \rho Dv C_p \Delta T$$

$$\text{donc } \Delta T = 3,6 \text{ mK}$$

4 Ondes acoustiques

4.1 couche anti-replet en échographie

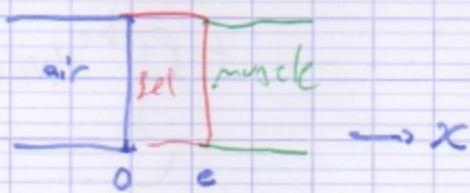


Les ρ_0 et τ_m muscle sont données.

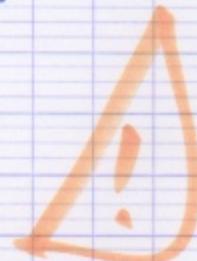
$$1) \quad T = \frac{4 \rho_m \tau_a}{(\tau_m + \tau_a)^2} = 9,4 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

très faible puissance transmise !

2) on cherche:



$P = \tau V \text{ si } \vec{v} \parallel \vec{x} \text{ dans sens}$
 $P = -\tau V \text{ si } \vec{v} \text{ dans sens opposé.}$



$$P_1(x < 0) = \tau_a A_0 e^{i\omega t - ik_0 x}$$

$$P_1(0 < x < e) = \tau_g A_0 e^{i\omega t - ik_g x} - \tau_g B_0 e^{i\omega t + ik_g x}$$

$$\theta_1(x)e) = \tau_m A_0 e^{i\omega t - ik_m x}$$

3) Conditions limites:

8

TD hydro 3

$$\text{en } z_c = 0 : \text{ continuité de } v : A_a = \underline{A_s} + \underline{B_s} \quad (1)$$

$$\text{ " } p : z_a A_a = z_s A_s - z_s B_s \quad (2)$$

$$\text{en } z_c = c : \text{ continuité de } v : A_s e^{-iksc} + B_s e^{iksc} = A_m e^{-ikmc} \quad (3)$$

$$\text{ " } P_6 : z_s A_s e^{-iksc} - z_s B_s e^{iksc} = z_m A_m e^{-ikmc} \quad (4)$$

4 équations pour 4 inconnues.

(1) + (2) pour éliminer A_a

$$\Rightarrow z_a (A_s + B_s) = z_s A_s - z_s B_s$$

$$\Leftrightarrow A_s (z_a - z_s) = B_s (z_s - z_a) \quad (5)$$

(1) + (4) pour éliminer $A_m e^{-ikmc}$

$$z_s A_s e^{-iksc} - z_s B_s e^{iksc} = z_m (A_s e^{-iksc} + B_s e^{iksc})$$

$$\text{alors } A_s e^{-iksc} (z_s - z_m) = B_s e^{iksc} (z_m + z_s) \quad (6)$$

$$\text{on divise } \frac{(5)}{(6)} \Rightarrow \frac{z_a - z_s}{z_s - z_m} e^{iksc} = \frac{-z_s - z_a}{z_m + z_s} e^{-iksc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_g - z_a}{z_s + z_a} = \frac{z_s - z_m}{z_s + z_m} e^{-2iksc}$$

5) si $z_s = z_n$ il faut que $z_a = z_s$ pour avoir transmission totale. Quand on a écrit les 3 charges de vitesses, dans l'air on n'a que une onde incidente \Rightarrow pas de réflexion donc transmission totale !

6) e et z_s pour meilleure transmission possible ?

$$\text{Re : } \frac{z_s - z_n}{z_s + z_n} = \frac{z_s - z_n}{z_s + z_n} \cos(2k_s e)$$

réel! réel. partie réelle de e

$2k_s e = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Si on veut cette équation il faut annuler la partie imaginaire de $e^{2ik_s e}$.

$$\text{Im : } \sin(2k_s e) = 0$$

$$2k_s e = \cancel{\frac{\pi}{2}} \quad (2n+1)\pi$$

Solution $\Rightarrow z_a = z_s = z_m$ donc pas intéressante.

Solution $\Rightarrow e = (2n+1) \frac{k_s}{4}$ et $z_s^2 = z_a z_m$

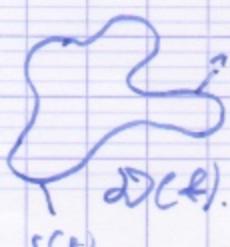
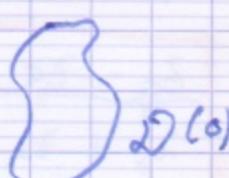
$$z_s = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Fn.

Théorème de Reynolds :

Transport de quantité de mouvement

$$t=0$$



$v_r^2(M, t)$ pour tous les points de la surface $S(t)$

9

TD hydro 3

$$\text{PFO: } \vec{F}'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial D} d^3 r' (\rho v') \right)$$

avec $\vec{F}(t)$ la résultante des forces s'exerçant sur $\partial D(t)$

Théorème du transport:

$$\vec{F}'(t) = \int_{\partial D} d^3 r' \frac{d}{dt} (\rho v') + \underbrace{\oint_{S(t)} (\vec{F} \cdot d\vec{s})}_{S(t)} (\rho v')$$