Titre : Oscillateurs amortis.

Présentée par :

Rapport écrit par :

Correcteur :

Date :

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
BFR mécanique 1	Bertin, Faroux, Renault	Dunod, Bordas	1985
Physique Spé Mp*, MP, et PT*, PT	Hubert Gié, Sarmant, Olivier, More	Tec et Doc	2000
Dictionnaire de physique			
Dunod PCSI Physique 2013			
Perez Mécanique			

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE (cf. questions)
Pré-requis : (cf. questions)

- Oscillateur harmonique
- Notation complexe
- Frottements solides
- Diagramme de bode et fonction de transfert

Introduire en disant que l'oscillateur harmonique à déjà été vu et que dans la réalité on a souvent un amortissement.

I. Frottement fluide en régime libre

1) Mise en équations

Faire schéma. [1] p. **197-201**

On considère un ressort de raideur *k*, au bout duquel est attachée une masse *m*. L'axe *Ox* du repère est confondu avec l'axe du ressort et orienté de sa base vers la masse. On choisit l'origine de façon à ce qu'elle soit confondue avec la position d'équilibre de la masse.

La masse es placé sur un support mais on suppose dans cette partie que le solide glisse sans frottements. Le poid et la réacton du spport se compensent à tout instant et donc on ne s'interessera pas à ces forces.

La masse est soumise, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, à la force de rappel élastique du ressort :

$$\vec{F_r} = -kx\vec{e_x}$$

ainsi qu'à une force de frottement modélisée par un frottement fluide :

$$\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$$

Ainsi, en projetant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe *Ox*, on obtient l'équation de mouvement : $\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0$, où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ est la pulsation propre du système et $\tau = \frac{m}{\alpha}$ a la dimension d'un temps.

2) Résolution

Le polynôme caractéristique associé à l'équation du mouvement sont solution de : $r^2 + \frac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$ que l'on peut réécrire : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, en ayant introduit le facteur de qualité $Q = \tau\omega_0$.

Ainsi les racines sont : $r_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \omega_0\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)^{1/2}$.

- Pour une valeur de $Q > \frac{1}{2}$, on a : $r_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\omega_a$, avec $j^2 = -1$ et $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

La solution est donc oscillante amortie. Sachant que l'on cherche des solutions réelles, on a :

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{2\tau}}cos(\omega_a t + \varphi),$$

(les constantes associées aux exponentielles complexes sont égales forcement et ça donne sinus + cosinus que on met comme cosinus déphasé).

où C et φ sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ D'où :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\frac{t}{2\tau}} sin(\omega_0 t).$$

Slide : plot de la solution

Preciser que c'est la solution pseudo-periodique. La pulsation aosscié est wa et non wz avec w_a<w_0. Quand Q tend vers l'infini wa se rapproche de w0, amortisssement negligeables et donc oscillateur harmonique!.

- Si $Q < 1/2$: la solution n'oscille plus. La résolution complète avec le même ensemble de conditions initiales abouti à :

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta} e^{-\frac{t}{2\tau}} sinh(\beta t)$$

avec $\beta = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$. Les racines du polynome caracteristiques sont positives.

Slide : plot de la solution critique et non oscillant

- Si $Q = 1/2$, on se trouve dans le régime critique où la solution s'écrit (même CI que précédemment) :

$$x(t) = v_0 t e^{-\frac{t}{2\tau}}.$$

Il est amorti le plus rapidement.

[1] p. 201-202
Si l'on calculait l'évolution temporelle de l'énergie, on pourrait montrer que τ correspond au temps caractéristique de décroissance de l'énergie. Dans ce cas on regarde le carré du signal ce qui fait disparaitre le ½ de l'exponentielle.

On montre aussi que la variation relative d'énergie mécanique entre deux « périodes » (c.a.d. 2 maxima des oscillations) s'écrit en fonction de Q :

$$\frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{2\pi}{Q}$$

ce qui fournit une interprétation physique du facteur de qualité. C'est l'inverse de l'amortissement relatif en énergie.

(17 min).

II. Frottement fluide en régime sinusoïdal
On force l'oscillateur avec une action exterieure.

On s'intéresse à un circuit RLC série pour changer.

Faire le schéma du circuit RLC avec les tensions associées avec le genérateur bien entendu. [4] p. 340

D'après la loi des mailles :

$$u = u_L + u_R + u_C = L\frac{dL}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

$$\frac{u}{L} = \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau} + \omega_0 q$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\tau = \frac{L}{R}$.

L est l'inductance.

Ainsi en faisant une analogie entre l'électrocinétique et la mécanique, on voit que la masse s'identifie à l'inductance, le coefficient de frottement fluide à la résistance et la raideur à l'inverse de la capacité. **[1] p. 201**

On passe en notation complexe, alors dériver par rapport au temps des signaux sinusoïdaux revient à les multiplier par $j\omega$, avec ω leur pulsation.

On choisit le signal de sortien comme étant la tension aux bornes du condensateur, donc s = q/C et le signal d'entrée sera e= u/L.

On montre alors que la fonction de transfert du circuit s'écrit H = s/e:

$$H = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

(Ne pas oublier de mettre en souligné les grandeurs complexes s et e !)

Slide : diagramme de Bode,- gain = module de H, on s'interesse surtout à lui et on constat que selon la valeur de Q on a different comportements. :

- Q grand donc faiblement amortis on a une résonance (voir dic phys pour définition). La résonance n'est pas à w0 mais à une autre pulsation w0*(1-1/2Q^2)^1/2, légérement inferieure à w0
- On retrouve aussi le comportement à haute fréquence comme la somme de 2 filtres d'ordre 1 donc décoirssance de 40dB et pas 20.
- On retrouve ici le comportement du filtre passe bas aussi.-

discussion sur les différents comportement en fonction de la valeur de Q (résonance ou pas, position de la résonance, comportement passe-bas…).

Rq, on voit ici le choix de j à la place de i pour éviter les confusion entre complexes et courant.

On s'niteresse maintenant à un autre type de frottement qui se comporte très differament. Le frottement solide

(24 :30)

III. Frottement solide [2] p. 263-265

1) Description du système

On considère à présent un pavé de masse *m* relié à un ressort de raideur *k*, capable de glisser latéralement sur un support. Même système que precedamment mais on néglige les frottements fluide et on s'interesse au frottements avec le support et au poid !

Faire le schéma.

Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} - kx\vec{e}_x$$

En projection et e separatn R sur la partie x et y on a donc :

$$m\ddot{x} + kx = R_x$$
$$0 = R_y - mg$$

D'après les lois de Coulomb **À ENONCER ! [2]p.257** du frottement solide, en introduisant le coefficient de frottement dynamique μ on a : $|R_x| = \mu|R_y|$
On en déduit l'équation du mouvement : $\ddot{x} + \omega_0^2 = \pm\mu g$

En efet Rx s'oppose au mouvement donc selon le sens du mouvement Rx sera positive ou négative.

(27 :30)

2) Résolution

Resolution d'une eq. Dif avec second membre constant.

$x(t) = Ccos(\omega_0 t + \varphi) \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$, avec + si $\dot{x} < 0$ et - si $\dot{x} > 0$.
On pose D1 = (mu*g)/w$_0$^2

On se donne les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = D_0 = Ccos(\varphi) + D_1$$
$$\ddot{x}(0) = 0 = -\omega_0 Csin(\varphi)$$

D_0 position qlq et on pars avec une vitesse nulle qui deviendra algébriquement négative. Vitesse nulle pas accélération !

En en déduit donc que $\varphi = 0$ et $C = D_0 - D_1$ Donc :

$$x(t) = (D_0 - D_1)cos(\omega_0 t) + D_1$$

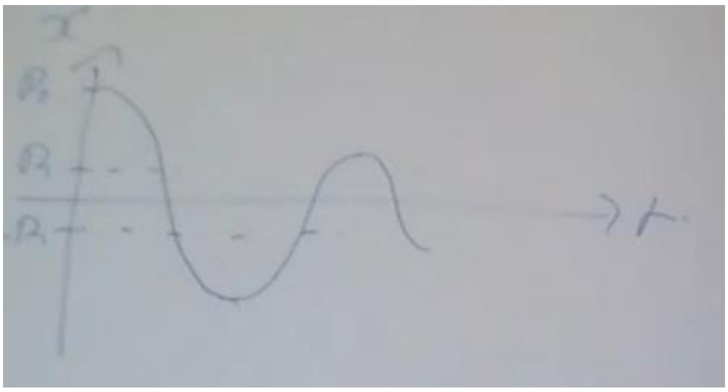
Au bout de combine de temps on a inversion du signe de D1 ? une demi-période, donc cos(w0*tau) = -1.

À l'instant $t = \frac{T_0}{2}$: $x\left(\frac{T_0}{2}\right) = 2D_1 - D_0$

On a donc de nouvelles conditions initiales :
$x(t) = Ccos(\omega_0 t + \varphi) - D_1$
$x(0) = 2D_1 - D_0$
$\dot{x}(0) = 0$

D'où x(t)= $(D_0 - 3D_1)cos(\omega_0 t + \varphi) - D_1$

Tracer x = f(t)



Alternance de sinusoides centrée en D1 jusqu'à ce que la vitesse d'annule, puis autre sinudoide centrée en –D1 jusqu'à ce que la vitesse s'annule. Le pvt ce repète ainsi de suite.

(33 :53)

Discussion sur les différences de comportement par rapport au frottement fluide :

- l'introduction du frottement de change pas la pulsation

Ici on a w = w0 pour la pulsation des pseudo-oscillations contrairement à wa qui était plus petit que w0.

- l'enveloppe de l'oscillation est affine et non pas exponentielle

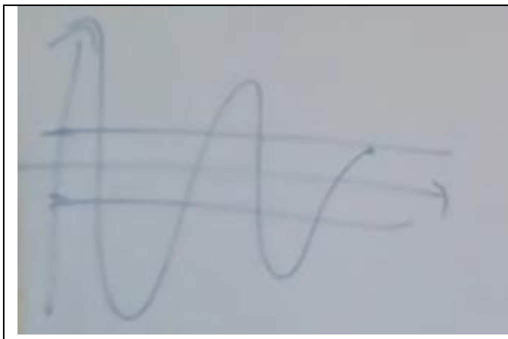
Amplitude max de la deuxième oscillation positive est D0-4*D1, on fait apparaitre une suite géométrique avec le prochain maxima égal à D0-8*D1. Donc si on trasse l'enveloppe de l'amortissement des oscillations on trouve des droites lineaires. L'Enveloppe était exponentielle dans le cas des frottements fluides. On peut ainsi savoir quel type de frottement est prédominant dans un mouvement amorti.

- le mobile s'arrête en temps fini

Étant donné la décroissance lineaire des oscillations, le mobile s'arreterà au bout d'un temps fini ! Les droites se croiseront forcement. Conditon d'arret ?

I Force tangentielle I = mu*force verticale
Donc I k*x I = mu*m*g

Donc x apartient à l'intervalle [-D1 ;D1]. Si on regarde ce que avec un graphique :



Avec les bandes correspondant à D1 et –D1 et le dernier point c'est le point d'arrêt du mobile.

ODG : un ressort de taille normale avec k = 3N*m-1 et m = 0.1kg et mu = 0.1 ça nous donne D1 = 2.4 cm.

Conclusion : On a étudié des oscillateurs macroscopiques mais il existe aussi des oscillateurs microscopies. On aurait pu étudier le modèle de l'électron élastiquement lié comme exemple d'oscillateur amorti microscopique. Amortissement du au rayonnement de l'électron.

Super leçon.

Questions posées par l'enseignant

- À quelle année de CPGE correspond ce plan ? CPGE première année (ça n'avait pas été précisé au tableau en début de leçon !)

On peut préciser tout de suite qu'effectivement on se place au programme de PCSI (voir par exemple
https://groupe-reussite.fr/wp-content/uploads/Programmes/physique-pcsi.pdf
p.18 pour ce qui est des oscillateurs amortis au sens strict.) Soyez au courant que les frottements solides sont aussi au programme de PCSI sous l'encart suivant :

Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Et prêtez attention au fait que, dans le paragraphe sur les oscillateurs amortis, est introduite la notion de portrait de phase.

- Quels prérequis faudrait-il rajouter ici ? Il manquait une grosse partie de prérequis sur l'électrocinétique.

Aussi vu la vitesse à laquelle on est passé, dans la leçon, sur le diagramme de Bode et l'interprétation du phénomène de résonance, il faut que ce soit en prérequis (ce qui me paraît un peu bizarre, on a l'impression que ça se mord un peu la queue, à voir !)

- Comment justifier la forme de la force visqueuse ? Pourquoi la choisir en *v* plutôt que *v^2* ?
- OdG du Re pour le système masse-ressort ? Conclure sur l'expression la plus adaptée pour la force de frottement.
- Nom de la force de frottement proportionnelle à la vitesse ? (force de Stokes)

Toutes ces questions vont bien sûr ensemble et relèvent de l'hydrodynamique. Pour la première vous avez deux points de vue possibles : 1) intuiter le fait que la force de frottement dépend nécessairement de la vitesse en faire le DL : l'ordre 0 est nul (pas de force si le mobile est immobile) donc on s'arrête à l'ordre 1. 2) Justifier par la force de Stokes mais en ayant à l'esprit que dans la plupart des expériences communes on est turbulent et qu'il faudrait plutôt prendre en compte une force en v^2. Une force type Stokes est justifiée dans un milieu visqueux (glycérol, etc.) ou avec un système de frottements induits par courants de Foucault par exemple.

- Donner des odg de τ, quelle est son interprétation sachant que $\tau = \frac{m}{\alpha}$?

Lorsque vous introduisez des grandeurs comme ce temps, n'hésitez pas à en interpréter les dépendances ! C'est le temps caractéristique de l'amortissement : bien sûr il est d'autant plus grand que la masse m est grande (il y a de l'inertie donc il est difficile d'amortir votre système) et d'autant plus petit que le frottement est important (of course). C'est peut-être un détail pour vous mais pour des élèves ça veut dire beaucoup !!!

- Donner des odg du facteur de qualité pour des systèmes typiques.

Pour un élève de sup la notion de facteur de qualité n'est pas du tout triviale ! Il faut l'interpréter comme précédemment et il faut en donner des odg… Est-ce que ça varie de 0,1 à 10, de 1000 à 10 000 ??? Rattachez sans cesse vos leçons au réel !

- Lors de l'établissement du régime sinusoïdal forcé, y a-t-il un temps de réponse du système ?

Régime transitoire, qui revient mathématiquement au régime libre étudié précédemment…

- Quelles sont les différentes interprétations de *Q* ?

(largeur de la bande-passante, nombre d'oscillations, hauteur de la résonance et fraction d'énergie dissipée par période)

- Que doit-on retenir du I. ?
- Quel est le nom des trois régimes définis par les différentes valeurs de Q?

Grande question pédagogique qui sort parce qu'on a très peu encadré de résultat etc. du coup on se perd un peu sur ce qui est important ou non : ici un élève doit retenir l'apparition d'un terme en vitesse dans l'équa diff qui mène en fonction du rapport des différentes caractéristiques du système à trois régimes bien distincts et qu'il doit retenir : le régime pseudopériodique, le régime apériodique et un régime un peu idéal qui sert de frontière entre les deux : le régime critique.

- Comment est dissipée l'énergie dans les différents systèmes présentés ?

Une question qu'il est typiquement dommage de devoir poser : la réponse est évidente mais ça n'a pas été dit alors que le titre porte explicitement sur l'amortissement…

- Comment trouver les caractéristiques de la résonance par le calcul ?
- Y at-il résonance pour des oscillateurs non amortis ?

La phénoménologie de l'oscillateur harmonique forcé est un peu particulière puisque vous injectez en permanence de l'énergie dans un système qui n'en dissipe pas ! Donc, selon que vous injectez cette énergie bien en phase avec votre système ou pas vous avez différents phénomènes : évidemment si votre excitation est soit beaucoup trop forte soit beaucoup trop lente pour avec une amplitude quasi-nulle ou au contraire de l'ordre de celle de l'excitation. Si par contre la fréquence d'excitation coïncide avec la pulsation propre vous avez une résonance dont l'amplitude va diverger à égalité des deux fréquences (cf. résolution dans n'importe quel livre de sup, voir aussi le Pérez de mécanique éventuellement, le Landau de mécanique ou le BFR 1 ☺)

- Que retenir de la partie sur le régime sinusoïdal ?

Même problème que précédemment… Et c'est compliqué d'apporter une réponse convaincante vu la vitesse à laquelle cette partie a été expédiée alors qu'elle contient des choses potentiellement nouvelles (Bode notamment) …

- Citer les lois de Coulomb du frottement solide

La dichotomie « mouvement sans glissement » Vs « mouvement avec glissement » doit apparaître très nettement. De plus, vous ne devez pas écarter les précisions apportées par ces lois sur le sens de la force via le fait qu'elle soit dissipative donc de puissance négative de sorte que la force est effectivement opposée à la vitesse.

- Est-ce que dans le frottement fluide le mouvement ne s'arrête pas en temps fini ? Qu'est-ce qui fait que ça s'arrête ?

En théorie le frottement fluide ne peut arrêter un mouvement, bien sûr dans les mouvements réels soit des frottements solides viennent s'en charger, soit le mouvement devient tellement lent qu'il est *de facto* arrêté !
C'est dans tous les cas une différence entre frottement fluide et solide qu'il faut souligner.

- Quel est l'intérêt du tracé d'un portrait de phase par rapport à la simple évolution temporelle ?

Le portait de phase est un outil très riche, bien plus qu'un tracé temporel individuel. En effet un tracé de x(t) ne vous renseigne que sur la trajectoire d'un système parti de conditions initiales données : dans la plupart des systèmes physiques réels le mouvement est assez dépendant de ces conditions de sorte que connaître un mouvement particulier ne vous renseigne pas de manière générale sur votre système. De plus, le tracé temporel périodique est **redondant** dans le sens où vous allez devoir tracer une infinité de périodes là où le tracé d'une unique période quelconque aurait suffi.
Comme les équations qui régissent le mouvement sont d'ordre 2, pour un oscillateur à une dimension le couple (x0, v0) fixe complètement le mouvement. Le portrait de phase renseigne donc de manière exhaustive sur les mouvements d'un système quelles que soient les CI et ce sans redondance puisque si ledit mouvement est périodique la trajectoire de phase boucle et vous n'avez pas à tracer indéfiniment.
De plus, il est particulièrement utile de discuter les phénomènes non-linéaires sur un portrait de phase (cf. celui du pendule par exemple). Par exemple, mouvement non-harmonique = trajectoire de phase non-elliptique, ce qui est beaucoup plus simple à voir que « est-ce que x(t) ressemble à un sinus ou non ? »

- Justifier l'expression des forces dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Historiquement, ce modèle s'inscrit dans le cadre du modèle de l'atome "plum-pudding" de Thomson (sphère uniformément chargée positivement avec des électrons ponctuels dedans).
<u>Force de rappel élastique :</u>

Dans le modèle de Thomson on peut explicitement calculer l'effet du champ électrique de la matière positive, ce qui donne une force harmonique.
Pour un modèle d'électrons qui orbitent autour du noyau, ce qui nous intéresse est le déplacement du barycentre de cette trajectoire circulaire. Autrement dit, ce sont des petites perturbations de la position du barycentre autour de la position d'équilibre r=0 -> rappel élastique.

Force de dissipation fluide :

Elle modélise l'ensemble des phénomènes de dissipation d'énergie de l'électron. Citons notamment le rayonnement d'une particule chargée accélérée, modélisé usuellement par une force en **mτ(da/dt)** (force dite de réaction de rayonnement ou de Abraham-Lorentz, et dont l'expression pose certains problèmes, mais bref).
Pour un oscillateur de facteur de qualité Q >> 1 (typiquement 10^7 pour un électron élastiquement lié), la résonance du mouvement forcé sera piquée autour d'une pulsation extrêmement proche de la pulsation propre. On peut alors montrer que l'effet de cette force dissipative est, au premier ordre, le même que celui d'une force **-mγ(dr/dt)**. Une bonne référence : le cours de Jean-Michel Raimond https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092954/document p 256 et suivantes.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

La leçon présentée était en demi-teinte :

- Sur le contenu, la maîtrise scientifique, la fluidité du discours et la clarté de l'exposé il n'y pas grand-chose à redire (à part connaitre le nombre de Reynolds UL/ν et le nom des lois utilisées…)
- C'est sur la forme qu'il y a des choses à corriger : il faut hiérarchiser les éléments – s'arrêter sur les résultats importants, encadrer les formules à retenir, ECRIRE EN TOUTES LETTRES au tableau suffisamment de choses pour que le cours puisse être suivi par quelqu'un qui n'écouterait pas (un élève étourdi ou un jury assoupi par la chaleur de l'été…). Aussi, il faut plus de rigueur ! On ne peut pas utiliser la loi des mailles sans la nommer au moins une fois, ni se permettre de traiter du frottement solide sans référer clairement aux lois de Coulomb, les énoncer en détail, et les utiliser avec soin !

Enfin, il fallait à mon avis faire un choix entre résonance et frottement solide, cf. ci-dessous.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

La notion à laquelle vous ne pouvez pas couper (mais je pense que ça ne viendrait à l'idée de personne) est l'étude du régime libre de l'oscillateur amorti par frottement fluide. Cela constituera probablement la première partie. Vous pouvez décider de le traiter sur le RLC, un oscillateur mécanique, les deux en faisant l'analogie (ou en la supposant connue) ou sur un autre système si vous préférez…

Ensuite de l'avis général il y a deux solutions : soit traiter de la résonance des oscillateurs amortis, soit étudier l'amortissement par frottements solides. La morale de la présentation de Gabriel me semble être que traiter les deux est illusoire ! Il faut choisir (mais il n'y a pas de bon ou de mauvais choix)

- Si vous traitez la résonance, ne perdez pas de vue que vous traitez une leçon « Oscillateurs amortis » et non pas « résonance » (qui pourrait elle aussi exister !). De ce fait ne vous bornez pas à décrire toute la phénoménologie de la résonance mais attachez-vous à étudier ce qui fait que la résonance des oscillateurs amortis et un phénomène différent de celle de l'oscillateur harmonique (qui relève du prérequis !).
- Si vous traitez des frottements solides, vous prenez moins de risque de « hors-sujet » mais bien sûr il faut traiter ce cas avec beaucoup de rigueur, ce qui devrait être à la portée de tout agrégatif mais il faut y aller calmement et prendre bien son temps ☺

Dans tous les cas le portrait de phase est un outil très riche, au programme de sup, et qui pourrait permettre de rendre cette leçon un peu plus sexy… À bon entendeur ! A ce sujet, vous pourrez consulter utilement la référence suivante le BUP suivant sur *le portrait de phase des oscillateurs* : http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=3036

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Il y a beaucoup d'expériences possibles pour cette leçon et il serait d'ailleurs dommage de s'en priver (Le jury rappelle systématiquement que la physique est une science expérimentale et que de ce fait il apprécie toujours une illustration des propos par l'expérience).

- Le plus évident / simple / efficace / instructif à mon avis est de faire monter par les préparateurs un circuit RLC. Vous pourrez regarder, selon vos choix dans le corps de la leçon, les régimes libres (changer Q revient à varier R), le régime forcé, la résonance, le portrait de phase…

- On peut faire un oscillateur amorti par frottement visqueux avec une masse un ressort et un vase de glycérol (très visqueux pour garantir une force de Stokes) mais ça me paraît un peu pénible à monter, mettre en œuvre devant le jury et interpréter… Il ne faut pas non plus qu'une expérience en leçon vous prenne plus de qq minutes !
- Enfin une expérience très parlante est de faire résonner un diapason d'abord dans l'air (amortissement très faible) puis dans l'eau (amortissement fort) pour interpréter le changement de Q. C'est très simple à faire, très riche en interprétation mais attention aux éventuelles questions sur les détails (qui ne viendront que si votre leçon a été très satisfaisante mais auxquelles il vaut mieux savoir répondre quand même !). Pour cela une référence : le BUP "Résonance aiguë et auto-oscillation d'un diapason", disponible à http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=7420.

<u>Bibliographie conseillée</u>

- N'importe quel livre de sup (Dunod, Supermanuel de Physique, Tec&Doc …)
- Le Pérez de mécanique, en faisant comme toujours dans cette collection, bien attention aux erreurs de calculs et autres fautes de frappe !
- Le BFR de Méca 1 traite efficacement le problème.
- Le landau de mécanique aborde le sujet avec le style du Landau mais pour une fois ça reste lisible !

Si on veut parler plus du protrait de phase et/ou oscillateurs non lineaires prendre :

Mécanique PCSI-MPSI de Pascal Brasselet 1ere année cours et exercises, collectio physique chimie prepa, Presses universités de France, 200 et voir p 101-109 et 110-114.