

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD2

Tom BIENAIMÉ (tom.bienaimé@ens.fr)

1 Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire

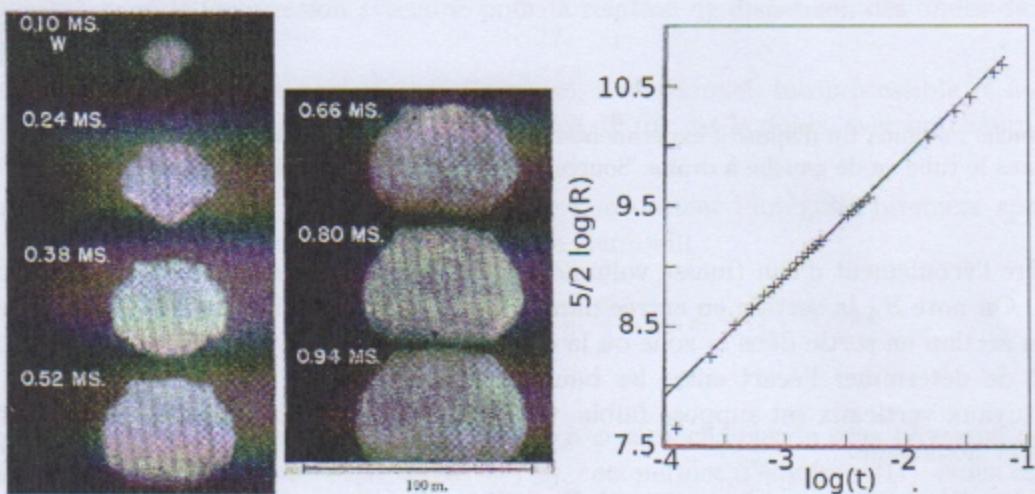


Figure 1 – Gauche : film d'une explosion atomique. La barre horizontale du bas indique 100 m, le temps est en ms. Droite : évolution du rayon R (en cm) de la boule de feu en fonction du temps t (en s) en échelle logarithmique (base 10). Source : *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945*, G. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 175-186.

On cherche à reproduire de manière simplifiée le raisonnement effectué par G. Taylor en 1950 pour déterminer l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique (confidentielle à l'époque) à partir d'un film rendu public (voir figure 1). Ce film nous apprend que le rayon R de l'onde de choc suit au cours du temps une loi d'échelle.

1. Au minimum, de quels paramètres doit dépendre le processus d'expansion de la sphère de gaz ?
2. Relier l'évolution du rayon de l'onde de choc à l'énergie de la bombe.
3. En exploitant la courbe originale de Taylor (voir figure 1), calculer numériquement l'énergie de la bombe (masse volumique de l'air $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$). On exprimera le résultat en kilotonnes de TNT (l'explosion de 1 kg de TNT produit $4.2 \cdot 10^6 \text{ J}$). Comparer votre résultat à la puissance de 15 à 20 kilotonnes de TNT annoncée par l'armée américaine.

2 Couche limite

La notion de couche limite intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois.

Il s'agit d'une notion très importante en hydrodynamique. Cette année, nous l'aborderons dans le sujet du DM.

3 Équations d'Euler et de Bernoulli

3.1 Phénomène de Venturi

1. Donner les conditions de validité du modèle du fluide parfait.

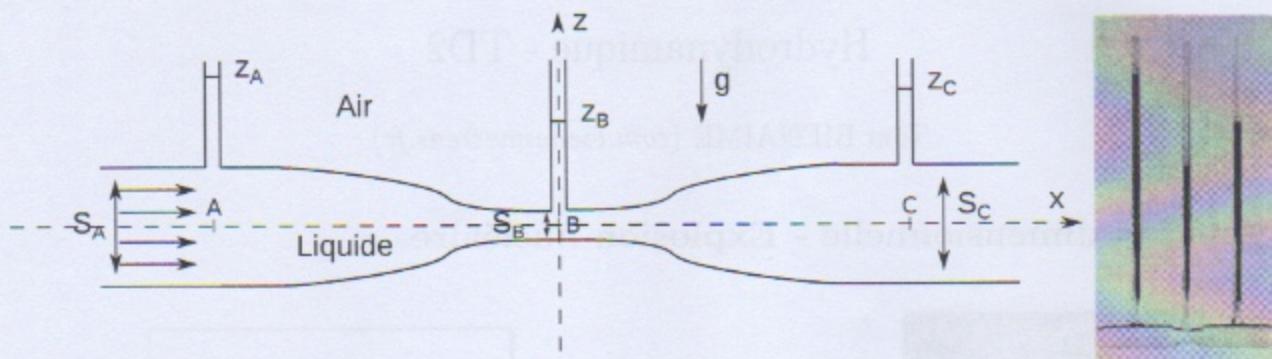


Figure 2 – Gauche : schéma du dispositif expérimental. Droite : mise en évidence expérimentale de l'effet Venturi. L'écoulement dans le tube va de gauche à droite. Source : D. J. Tritton. Physical fluid dynamics, Oxford University Press, 1988.

On considère l'écoulement d'eau (masse volumique ρ) dans une conduite où se trouve une constriction (voir figure 2). On note S_A la section en entrée dans la zone où la conduite est parallèle, S_B la section au milieu et S_C la section en sortie dans la zone où la conduite est parallèle. On prend $S_A = S_C$.

Le but est de déterminer l'écart entre les hauteurs d'eau dans les tuyaux verticaux z_A , z_B et z_C . Le rayon des tuyaux verticaux est supposé faible. On suppose que l'écoulement est parfait, stationnaire, incompressible et homogène.

2. On considère l'écoulement unidimensionnel. En utilisant la conservation du débit volumique, exprimer v_B en fonction de v_A , S_A , S_B .
3. En notant que l'axe de la conduite constitue une ligne de champ particulière, appliquer le théorème de Bernoulli entre A et B et en déduire $p_B - p_A$. Donner l'expression du débit volumique D_V en fonction de p_A , p_B , S_A , S_B , ρ .
4. En déduire les hauteurs z_A , z_B et z_C . Expliquer qualitativement les différences de hauteurs observées expérimentalement (voir figure 2).
5. Que se passe t'il si la pression au point B devient trop faible ? – *cavitation*.
6. Donner des applications de l'effet Venturi.

3.2 Retour sur les ondes de gravité - Relation de dispersion

Lors de l'étude cinématique des ondes de gravité, nous avons déterminé complètement le champ des vitesses dans le fluide sans avoir écrit en apparence une seule ligne de dynamique : cet écoulement semble indépendant des forces appliquées. Cela semble paradoxal. En réalité il n'en est rien et l'hypothèse selon laquelle les seules forces sont les forces de pression et le poids est "dissimulée" dans l'hypothèse "irrotationnel" que nous avons utilisée. Nous poursuivons ici cette étude. Dans les ondes de gravité, c'est la *gravité* qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale. C'est la *gravité* qui sert de force de rappel lorsque l'onde se propage.

Rappel On considère une couche de liquide limitée inférieurement par le plan $z = 0$ et d'épaisseur moyenne h . L'écoulement est incompressible et irrotationnel, ce qui permet d'introduire le potentiel des vitesses ϕ , qui est solution de l'équation de Poisson $\Delta\phi = 0$. De plus, au fond du récipient en $z = 0$, la composante normale de la vitesse doit s'annuler, ce qui impose $\partial_z\phi(z = 0) = 0$. On rappelle que l'on avait

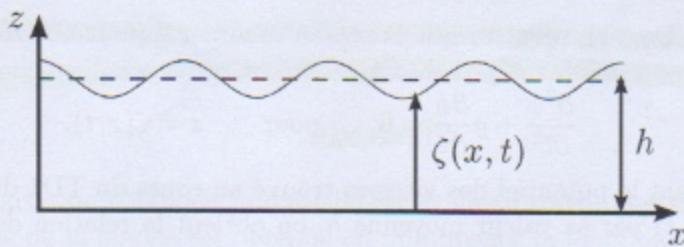


Figure 3 – Géométrie de la couche de fluide pour l'étude de la propagation des ondes de gravité.

trouvé le potentiel des vitesses $\phi = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ au cours du TD1. On néglige les effets de tension superficielle.

- Après avoir identifié les paramètres pertinents du problème, donner, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, la forme de l'expression attendue pour la relation de dispersion des ondes de gravité $\omega(k)$. Discuter le résultat.
- On considère un écoulement parfait, instationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène dans un référentiel galiléen. On suppose que la seule force $d\mathbf{F}/d\tau$ est le poids, avec un champ de pesanteur \mathbf{g} uniforme. Écrire l'équation l'Euler.
- En partant de l'équation d'Euler, démontrer que l'on obtient l'intégrale première spatiale, valable dans tout le fluide et qui généralise le théorème de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction du temps uniquement.

Nous pouvons toujours ajouter une fonction $g(t)$ à ϕ sans changer le sens physique de $\Delta\phi = 0$. Si l'on ajoute $g(t)$ à ϕ de telle sorte que $dg/dt = f(t)$, ceci permet d'éliminer $f(t)$. Nous choisirons donc $f(t) = 0$ par la suite.

- Soit $z = \zeta(x, t)$ l'équation de la surface libre et h la moyenne temporelle ou temporelle de $\zeta(x, t)$. Interpréter sommairement la condition aux limites à la surface :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

En déduire $\zeta(x, t)$, en admettant que l'on peut évaluer l'équation ci-dessus en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h .

- En appliquant l'intégrale de Bernoulli en $z = \zeta(x, t)$, où $p = p_0$, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t). \quad (1)$$

Le problème complet se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} && z = \zeta(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta &= 0 && \text{pour} && z = \zeta(x, t) \\ \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} && z = 0 \end{aligned}$$

Pour avoir une idée des solutions, nous allons linéariser les équations. Nous négligeons tous les termes nonlinéaires. La linéarisation revient à supposer que l'amplitude de l'onde est assez faible pour que les termes $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ soient négligeables.

6. Après avoir linéarisé l'Eq. (1), montrer que l'on peut éliminer ζ pour obtenir l'équation suivante, qui ne dépend que de ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

7. Montrer qu'en reportant le potentiel des vitesses trouvé au cours du TD1 dans l'équation précédente et en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h , on obtient la relation de dispersion des ondes de gravité :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

8. Discuter cette relation de dispersion dans les deux cas : i) eau peu profonde $h \ll \lambda$ et ii) eau profonde $h \gg \lambda$ (λ est la longueur d'onde). Les ondes de gravité sont-elles dispersives ?

3.3 Température du nez d'un avion

Un avion se déplace dans un référentiel galiléen à une vitesse constante $U = 300 \text{ m s}^{-1}$. Dans le référentiel de l'avion, l'air possède à l'infini une vitesse uniforme $V_\infty = -U$, une pression uniforme $p_\infty = 1 \text{ bar}$ et une température uniforme $T_\infty = 273 \text{ K}$; une ligne de champ part de l'infini et arrive sur le nez A de l'avion. On assimile l'air à un gaz parfait de masse moléculaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, de constante $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = c_p/c_V = 1.40$.

Déterminer la température T_A et la pression p_A sur le nez de l'avion, en supposant l'écoulement parfait et stationnaire.

4 Capillarité - Goutte pendante

Nous présentons une technique usuelle pour mesurer la tension de surface γ . Le principe est de laisser une goutte pendre au bout d'un fin tube capillaire de rayon R (voir figure 4) et d'en étudier la forme. Celle-ci est déterminée par un équilibre entre les effets de tension de surface qui favorisent une forme sphérique, et la gravité qui conduit à la déformation de la goutte.

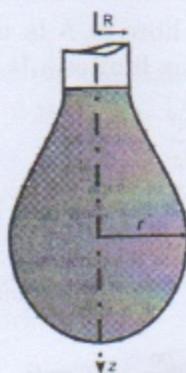


Figure 4 – Goutte pendante au bout d'un tube de diamètre intérieur R .

- Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'une goutte pendante ? Introduire la longueur capillaire par analyse dimensionnelle.
- La goutte étant symétrique autour de l'axe z , on se place en coordonnées cylindriques. La surface de la goutte est décrite par une fonction $r(z)$. Montrer que la surface et l'énergie potentielle de la goutte s'écrivent respectivement :

$$S = \int 2\pi r \sqrt{1+r'^2} dz, \quad E_p = \int \rho g z \pi r^2 dz.$$

3. On rappelle l'interprétation énergétique de la tension superficielle : le travail qu'un opérateur extérieur doit fournir pour accroître l'aire d'une interface liquide/vapeur d'une quantité dS est :

$$\delta W = \gamma dS.$$

En écrivant que la variation d'énergie potentielle est égale au travail des forces extérieures $dE_p = \delta W$, montrer que la forme de la goutte est obtenue en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$F[r, r'] = \int dz \left[2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g z \pi r^2 \right] = \int dz f(r, r').$$

4. En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r},$$

montrer que l'on obtient l'équation non-linéaire suivante :

$$\gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \right] = \rho g z. \quad (2)$$

On rappelle que l'équation de Young-Laplace décrit la différence de pression capillaire à travers une interface entre deux fluides en raison du phénomène de tension de surface. Cette équation relie la différence de pression à la forme de la surface à travers la loi :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = 2\gamma C = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

où $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$ est la différence de pression, γ est la tension de surface, C est la courbure moyenne de l'interface, et R_1, R_2 sont les rayons de courbures principaux.

5. Réinterpréter l'équation (2) en écrivant l'équilibre des forces de pression en tout point de la goutte. Identifier le terme de Laplace, le terme hydrostatique, ainsi que les rayons de courbure R_1 et R_2 .

→ on chose γ jusqu'à obtenir forme de la goutte. (on appelle cette forme en photo).

L'équation nonlinéaire (2) peut être résolue numériquement. L'idée est de traiter la tension de surface comme un paramètre ajustable et de modifier sa valeur jusqu'à ce que le profil simulé ajuste le profil expérimental. La précision de cette méthode pour extraire γ est d'environ 1%. La figure 5 montre les photos de deux gouttes possédant des tensions de surface différentes.

6. Décrire qualitativement l'effet de l'ajout d'un produit tensioactif et son influence sur la forme de la goutte pendante (voir figure 5).

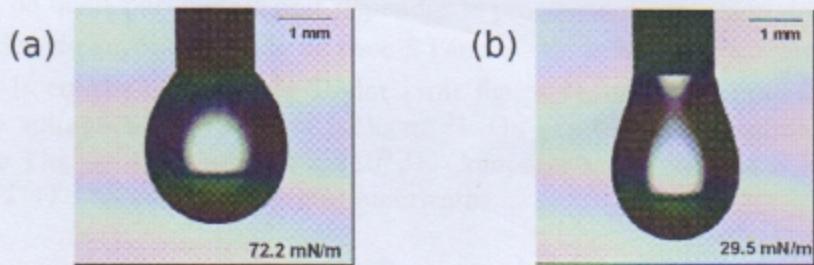


Figure 5 – (a) Goutte pendante d'eau pure dont on extrait $\gamma = 72.2 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$. (b) Goutte d'eau à laquelle on a ajouté un tensioactif. Dans ce cas on trouve $\gamma = 29.6 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$.

1

TD2 - Hydro

Hydrogénage - TD2

Théorème II: Une relation homogène en dimension $m_i = f(u_1, \dots, u_k)$

- k paramètres physiques u_1, \dots, u_k

- r grandeurs dimensionnelles sont indépendantes (dont r indépendantes (les m_i sont sans dimensions))

\Rightarrow On peut écrire $\Pi_i = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{k-r})$ où les Π_i sont sans

- dimensions.

1) Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire

1) Paramètres (les u_1, \dots, u_k):

- rayon de la sphère R

- le temps

- Energie

- l'air = ρ

paramètres minimaux : $k=4$

$$\begin{aligned} [R] &= L \\ [t] &= T \\ [E] &= m \cdot L^2 \cdot T^{-2} \\ [\rho] &= m \cdot L^{-3} \end{aligned}$$

} 3 dimensions indépendantes (m, T, L)
 $\Rightarrow r = 3$

Alors 3 1 seul nombre sans dimension Π_1

$$R = \Pi_1 \cdot t^x E^y \rho^z \quad \left(\text{on peut faire } \Pi_1 + g \frac{R}{r_1 r_2 r_3} \text{ soit } \text{ordonnée avec } \Pi_1 = \text{cte.} \right)$$

$$2) [R] = L = T^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} P^{\delta} T^{-\eta} P^{\zeta} M^{\varepsilon} L^{-\rho}$$

clm: $\begin{cases} L = 2\beta - \gamma \\ 0 = \beta + \gamma \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = -\gamma \\ \alpha = 2\beta \\ 1 = 2\beta + 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{5} \end{array}$

d'où: $\beta = \frac{1}{5}$
 $\alpha = 2\beta = \frac{2}{5}$

$$\gamma = -\frac{1}{5}$$

clm: $R = \pi_1 \cdot A^{\frac{2}{5}} E^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{1}{5}}$

$$3) \log(R) = \frac{2}{5} \log(A) + \log(\pi_1) + \frac{1}{5} \log\left(\frac{E}{e}\right)$$

Or on connaît pas π_1 , on va alors supposer que π_1 est proche de l'unité
 $\Rightarrow \log(\pi_1) \approx 0$ car $\pi_1 \approx 1$

par ailleurs R dans la figure dont on a extrait la courbe est en cm. Donc on pose \tilde{R} (en cm) = $R \cdot 100$
on passe à 100 pour faciliter le calcul

clm: $\frac{5}{2} \log\left(\frac{\tilde{R}}{100}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{E}{e}\right) + \log(A)$

$$\downarrow$$

$$\log(\tilde{R}) \sim 2$$

2

Hydro TD 2

$$\text{alors } \frac{5}{2} \log(\tilde{R}) = S + \frac{1}{2} \log\left(\frac{R}{c}\right) + \log(t)$$

Alors on extrapole la courbe pour trouver en $\log(t) = 0$
l'ordonnée à l'origine $\approx -11,9$

$$\text{alors } R = c \cdot 10^{-11,9-S} \approx 18 \text{ kT de TNT}$$

(Hiroshima $\sim 12 \text{ kT de TNT}$)

plus grosse bombe classique est $\sim 11 \text{ T de TNT}$

plus grosse bombe qui existe: $\sim 10^6 \text{ T de TNT}$

- 2) couche limite

proche des surfaces écoulement visqueux
ailleurs \sim écoulement parfait

Les 2 écoulements de la cordent
à voir TRÈS IMP! en Annexe.

exercice 3) : Équations d'Euler et de Bernouilli

3.1 phénomène de Venturi

- 1) fluide parfait: un fluide est dit parfait si l'écoulement peut être décrit en négligeant: - viscosité - effets de conduction (thermique).

\Rightarrow le mouvement du fluide est adiabatique décrit par l'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \frac{d\vec{F}}{dt}$$

2) écoulement unidimensionnel

Conservation du débit volumique

$$V_A S_A = V_B S_B \Rightarrow V_A = V_B \left(\frac{S_A}{S_B} \right)$$

3) Sur une ligne de champs :

D'après l'analyse vectorielle : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} p \cdot (\vec{v}^2) + \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{v}$

alors on a l'équation :

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \vec{\nabla} p \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{g}$$

stationnaire

$$-\vec{\nabla} p \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

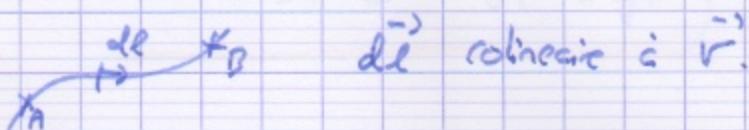
incompressible
et homogène

3

Hydro TTD

sur une ligne de courant:

$$\oint_A^B \left[\vec{g} \cdot d\vec{l} + \frac{\rho}{2} \left(\vec{v}^2 + \frac{P}{e} + g z \right) + \vec{r} \cdot \vec{\omega} (\vec{r}) \times \vec{v} \right] = 0$$



$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_A}{e} + g z_A = \frac{v_0'^2}{2} + \frac{P_B}{e} + g z_B$$

3) $P_B - P_A = e \frac{v_0'^2}{2} \left(1 - \left(\frac{s_A}{s_B} \right)^2 \right)$ sur l'axe de la conduite ($z_A = z_B$ on est sur l'axe x)

et on utilise v_0' qu'on a troué avant.

Pour $s_0 < s_A$ on a bien $P_B < P_A \rightarrow$ dépression au niveau de la constriction!

4) $Dv = s_A v_A = s_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{e} \frac{s_0'^2}{s_A s_{B'}^2}}$

4) lignes de courant // \Rightarrow la pression est hydrostatique $\Rightarrow \vec{g} = -\nabla p$

en effet Euler: $\ell \left(\frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \vec{\nabla}) v \right) = -\nabla p + \vec{g}$

Car lignes de courant // pas décelération corrective.

alors, $\left\{ \begin{array}{l} P_A = P_0 + \rho g z_A \\ P_B = P_0 + \rho g z_B \\ P_C = P_0 + \rho g z_C \end{array} \right.$

comme $V_A = V_C \Rightarrow P_A = P_C \Rightarrow z_A = z_C$

$V_B > V_A \Rightarrow P_B < P_A \Rightarrow z_B < z_A$

L'hypothèse du fluide parfait est un peu trop forte.

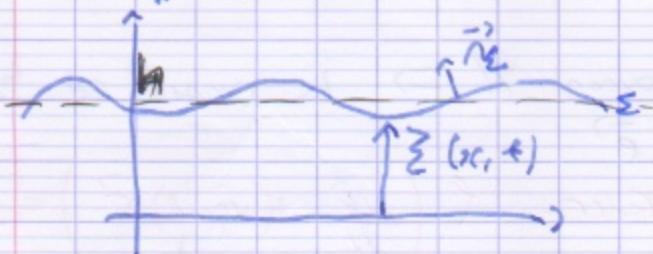
En effet on connaît des expérimentalement $z_A > z_C$.

On a une partie de charges de vitesse due aux protéines visqueuses proche des parois.

5) Si P_0 est trop faible on a le phénomène de cavitation.
apparition des bulles car liquide se vaporise.

c) Débitmètre, tronc à eau.

3.2. Mettre sur les ondes de Seigné - relation de dispersion



on voit $z(x,t)$ qui donne la forme de la surface.

TD2. hydro

TD2. hydro

Rappel, dans le TD1 on a montré que :

- $\exists \Delta\phi = 0$ avec $\vec{v} = \vec{grad}(\phi)$
- condition limite en $z=0$: $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

en résolvant ces équations on trouve que $\phi = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kz)$

On analyse la tension superficielle :

1) Paramètres :

$$\omega, k, \cancel{A}, \cancel{B}, h$$

relation de dispersion ordre de grandeur

$$\text{Dimension } [\omega] = T^{-1}$$

$$[k] = L^{-1}$$

$$[s] = LT^{-2}$$

$$\cancel{[C] = M L^{-2}}$$

$$[h] = L$$

Il rentre pas dans nos paramètres car ça fait rentrer M dans nos paramètres qui peut pas enlever (pour raisons de symétrie)

(peut prendre en compte $\frac{m^2}{h^2}$)

Ceci est du aux fait qu'on a résolu la tension superficielle

\Rightarrow 2 dimensions L, T et 4 paramètres.

$$\boxed{\Pi_1 = kh}$$

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\omega^2}{h^2}}$$

$\Rightarrow \bar{\Pi}_2 = \bar{\Phi}(\Pi_1)$ d'après le théorème II

$$\Rightarrow \omega^c = R_S \bar{\Phi}(h)$$

On a juste évoqué la partie strate et pas la partie capillaire.

2) Eq. d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P) + \vec{g}$$

$$\rho c p f = t - \vec{g} = 0$$

$$\text{incompressible} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$$

$$\text{incompressible} \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$$

+

$$\text{homogène: } \rho = \text{cte.}$$

3) on rappelle que $\vec{V} = \text{grad } \phi$

$$\text{alors } \text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) = \vec{0}$$

on déduit alors que :

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = f(r)}$$

$\rightarrow \phi$ dépend de x et t , donc si $\text{grad}(\phi(x,t)) = 0$
 $\Rightarrow \phi(t) !$

TD 2 hydro

Or l'énoncé dit que :

$$\text{si } \tilde{\phi}(t) = \phi(t) + f(t)$$

alors on a aussi $\Delta \tilde{\phi} = 0 \rightarrow \Delta \phi' = 0$ et l'équation que l'on recherche est ϕ .

$$\text{donc on pose } \tilde{\phi} = \phi + g(t) \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = f(t)$$

alors si on utilise $\tilde{\phi}$:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)' + \frac{p}{\rho} + g z = f(t) - \frac{ds}{dt} = 0 !$$

- 9) On considère des ondes de gravité : grande longueur d'onde, et que la surface est peu inclinée.

alors: $\vec{n}_\Sigma \approx \vec{u}_\Sigma$ & approx.

\hookrightarrow normale à la surface de l'eau!

- Un point de la surface a une vitesse:

$$v_\Sigma = \frac{ds}{dt}(x, t) \vec{n}_\Sigma \leftarrow \text{est défini comme ça.}$$

- Vitesse du fluide : $\vec{v} = \vec{s} \cos \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\text{CL en } z = \{x, t\}: \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma = \vec{v}_\text{surface} \cdot \vec{h}_\text{fluide}$$

Continuité car fluide purifiant!

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \xi(x, t)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = hA \sinh(kh) \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi(x, t) = \frac{hA}{\omega} \sinh(kh) \sin(\omega t - kx) + \rho(x).$$

$$\langle \xi(x, t) \rangle_x = h \Rightarrow \rho(x) = h$$

L'équation de la surface : $\xi(x, t) = \frac{hA \sinh(kh)}{\omega} \sin(\omega t - kx) + h$

5) on évalue Bernoulli en $z = \xi(x, t)$ (c.f. Q. 2).

$$\text{et } p = p_0$$

On obtient de manière immédiate que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + p_0 + g\xi(x, t) = 0$$

Le problème complet s'écrit alors :

TD 2 hydro

- $\Delta \phi = 0$ dans tout l'espace

- CL en $z=0$ $\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} (z=0, t) = 0$

- CL en $z = \xi(x, t)$ $\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{P_0 + g \xi(x, t)}{c} = 0 \end{cases}$

b) Nous allons linéariser les équations.

\Rightarrow Alors on néglige $(\frac{\partial \phi}{\partial z})^2$.

On obtient alors : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{P_0}{c} + g \xi = 0$

On dérive pour supprimer P_0 :

alors $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = \xi(x, t)} \quad (\star)$

alors CL : $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial z} (z=0, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = \xi(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} (z=0, t) = 0 \end{cases}$

7) $\phi = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ d'après le TDJ.

On reporte ceci sur (*)

$$\Rightarrow -\omega^2 \cosh(kz) + gk \sin(kz) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = gk \tanh(kz)}$$

8) • pour $h \gg \lambda$, alors $kh \gg 1$, cas propulsé

$$\Rightarrow \tanh(kz) \approx 1$$

d'où $\omega = \sqrt{gk}$

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}}$$

et $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_\phi}{2}$ (on dérive $d\omega = \sqrt{gk}$).

\Rightarrow Ordre dissipatif !!!

• pour $h \ll \lambda$: $kh \ll 1$, $\tanh(kz) \approx kh$

alors $\omega^2 = gh/z^2$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{gh}{z^2}} = v_\phi}$$

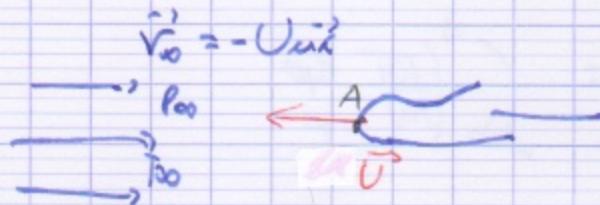
$$\Rightarrow$$
 Ordre non dissipatif $v_g = v_\phi = \sqrt{gh}$

67

TD hydro

3.3 Température du net du courant

- écoulement compressible!
- fluide parfait
- Écoulement stationnaire.



Équation d'Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho g$$

$$= \cancel{\int_A^B} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_r^2}{2} \right) + v_r \nabla_r v_r + \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$$

sur une ligne de charge: — avec $v_r = v_z$

$$\Rightarrow \frac{V_b^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} + \int_{A_0}^{\infty} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{on suppose } V_A \approx 0)$$

$$\text{donc } \frac{U^2}{2} = \int_{A_0}^A \frac{dp}{\rho}$$

Comment calculer l'intégrale?

gas parfait!

$$PV = nRT$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{n \cdot M}{V} = \frac{MP}{RT}$$

$$\text{d'où } \int_{P_0}^P \frac{dp}{\rho} = \int_{T_0}^T \left(\frac{R\Gamma}{M} \frac{dT}{P} \right)$$

on a une évolution adiabatique car fluide parfait.

$$\text{donc } PV^\gamma = C \quad \text{et} \quad P \left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = C'$$

$$\text{d'où } P^{1-\gamma} T^\gamma = C'$$

$$\text{on différencie} \Rightarrow (1-\gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$$

$$\text{d'où : } \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{dT}{T}$$

$$\text{alors } \int_{P_0}^P \frac{dp}{\rho} = \int_{T_0}^T \frac{R}{M(\gamma-1)} \cdot dT$$

$$\text{d'où } \frac{U^2}{2} = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_A - T_{A0})$$

Th 8

TJ 2-hydro

et donc :

$$T_A = \frac{m}{n} \frac{U^2}{2} \frac{(g-1)}{\gamma} + T_\infty = 318K$$

On sait que $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_\infty^{1-\gamma} T_\infty^\gamma$

donc $\left(\frac{P_A}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_\infty}{T_A}\right)^\gamma$

d'où $P_A = P_\infty \left(\frac{T_\infty}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 1,7 \text{ bar}$

4 Capillarité

La capillarité c'est un coût en énergie pour déformer les surfaces.

1) paramètres du problème ?

- L taille de la goutte
 - γ tension de surface
 - g gravité
 - e masse volumique.
- 4 paramètres

$$[L] = L$$

$$[\gamma] = m \cdot T^{-2} \Rightarrow 3 \text{ dimensions.}$$

$$[g] = L \cdot T^{-2}$$

$$[e] = m \cdot L^{-3}$$

On peut former un seul nombre dans dimensions :

$$\frac{\chi}{\rho g L^2} = \Pi_1$$

si on suppose que $\Pi_1 \approx ?$

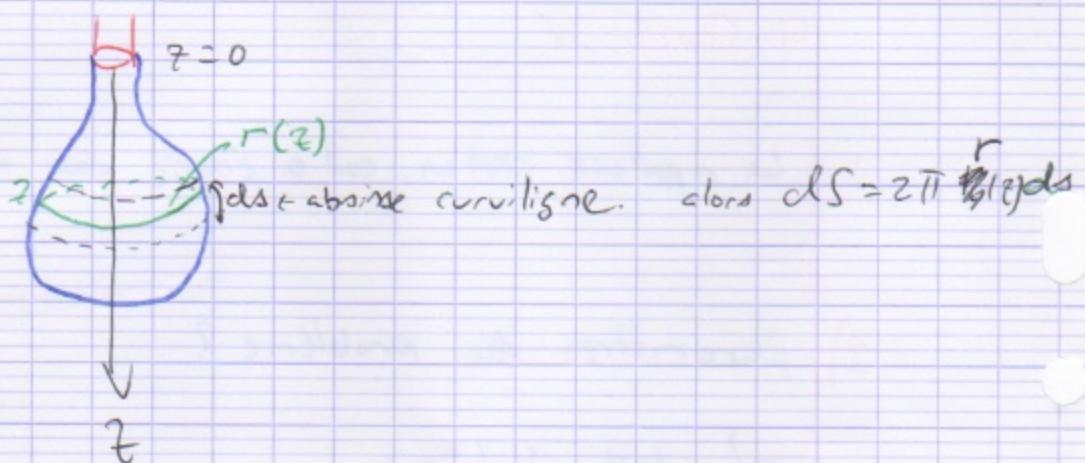
$$\Rightarrow L_c = \sqrt{\frac{\chi}{\rho g}}$$

longueur capillaire

dans l'air $L_c \approx 3\text{mm}$ interface air eau.

idéal pour intro de lesson, sphère pour alcool dans
"on marche sur la fine" avec cpt. Acdac.

2)



soit

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{dz}{dr}} dr \Rightarrow dz = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dr$$
$$= dz \sqrt{1 + r'^2(z)}$$

alors

$$S = \int dz 2\pi r(z) \sqrt{1 + r'^2(z)}$$

9

TD Lycée 2

volume élémentaire

$$dV = \pi r^2(z) dz$$

$$dE_p = g \rho (dV \cdot z)$$

$$\Rightarrow E_p = \int dE_p = \boxed{\int g \rho z \pi r^2 dz}$$

énergie volumique !

- 3) Interprétation énergétique de la tension superficielle : Le travail qu'un opérateur extérieur doit fournir pour accroître l'aire d'une interface liquide/vapeur d'une quantité dS est :

$$\delta W = \gamma dS$$

$$dE_p = \delta W = \gamma dS$$

$$d\left(\int dz (\rho g z \pi r^2)\right) = \gamma d\left(\int dz z \pi r \sqrt{1+r'^2}\right)$$

$$d\left[\int dz \left(2\pi \gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g z \pi r^2\right)\right] = 0$$

$$d(F(r, r')) = 0$$

$$dF(r, r') = \int dz \left(2\pi \gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g z \pi r^2\right) = \underbrace{\int dz f(r, r')}$$

à la place du temps on a z dans "l'équation"

4) On utilise donc Euler Zesroux:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2\pi r \sqrt{1+r^2} - 2\rho g 2\pi r$$

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = 2\pi r' r \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}$$

$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r'} \right)$: à calculer, c'est long et pénible.

on doit trouver $\gamma \left[-\frac{r''}{(1+r^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r^2)^{1/2}} \right] = \rho g z$

5) $p_{int} - p_{ext} = \gamma \gamma \zeta = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

donc pour une source d'eau (ici $R_1 = R_2 = R$)

alors $p_{int} - p_{ext} = \frac{2\gamma}{R}$

$$\Rightarrow p_{int} = p_{ext} + \frac{2\gamma}{R}$$

[La pression à l'intérieur d'une petite bulle est supérieure à la pression à l'intérieur d'une grande bulle!
↳ inverse du ballon de Bégauduche!]

16

T) 2 hydro

On peut reinterpréter alors :

$$\frac{-r''}{(1+r'^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{R_2}$$

ce qui \Rightarrow therme de pression hydrostatique due à la gravité !

6) un tensioactif \rightarrow effet de tension de surface.

$\Rightarrow L_c \downarrow$ car effet de gravité domine.