

**Titre** : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

**Présentée par** : Théo Le Bret

**Rapport écrit par** :

**Correcteur** : S. Fauve

**Date** : 15/02/2020

Bibliographie de la leçon :			
Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Tout-en-un PCSI		Dunod	
Dynamique Galactique	Binney & Tremaine	Princeton University Press	2008
TD optique clément serrin <a href="http://www.lkb.upmc.fr/cqed/wp-content/uploads/sites/14/2019/09/optique_TD_coherence.pdf">http://www.lkb.upmc.fr/cqed/wp-content/uploads/sites/14/2019/09/optique_TD_coherence.pdf</a> <a href="http://www.lkb.upmc.fr/cqed/wp-content/uploads/sites/14/2019/09/optique_TD_coherence.pdf">http://www.lkb.upmc.fr/cqed/wp-content/uploads/sites/14/2019/09/optique_TD_coherence.pdf</a>			

**Plan détaillé**

Niveau : CPGE

Prérequis :

- Électronique :
- RLC
- 
- fonction de transfert
- Induction
- Interférences
- Optique : différence de marche

I Résonance à un degré de liberté RLC forcé

- a) Résonance en tension
- b) Résonance en intensité
- c) Aspect énergétique

II) Résonance à deux degrés de liberté : RLC couplés

III) Résonance à une infinité de degré de liberté

Intro, phénomène de résonance présent dans beaucoup de domaines de la physique.

DEF résonance : on dira d'un système physique qu'il est résonant à une fréquence  $\omega_0$  si, quand on l'excite à cette fréquence, un de ses paramètres où **degrés de liberté** présentent une réponse maximale.

On verra aussi que la résonance met en évidence les modes propres du système.

2 :20

Ia)

On étudie un système LC, dessiner le schéma, on regarde l'ke condensateur en sortie.

Avec impédances complexes on trouve (tout surligné :

The image shows a handwritten diagram of an LC circuit and the derivation of its transfer function. The circuit consists of an AC voltage source  $E_0 e^{j\omega t}$  in series with an inductor  $L$  and a capacitor  $C$ . The current  $I$  flows through the circuit. Below the circuit, the transfer function  $H = \frac{I}{E}$  is derived using complex impedances:  $H = \frac{I}{E} = \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ , where  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  is the natural frequency. The result is noted as  $H \in \mathbb{R}$ .

Définir :

- $\omega_0$
- $x = \omega/\omega_0$

- et le module de  $H$  qui appartient à  $\mathbb{R}$ .

Pour  $\omega = \omega_0$  divergence ! donc résonance.

Or on a négligé la dissipation d'énergie qui existe toujours en physique.

Refaire le schéma avec RLC, alors on trouve  $H$  :

Définir  $Q$  facteur de qualité  
mettre  $H$  sous forme canonique et regarder le module.

Handwritten equations on grid paper:

$$H = \frac{1}{1 - \omega^2 + j \frac{\omega}{Q}}$$

$$|H|^2 = \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{Q}\right)^2}$$

Below the equations, it is written:  $|H|_{\text{optimal}} \quad \omega = 0$

On regarde la dérivée et on étudie quand elle est extrémale (ne pas l'écrire), donner directement condition pour avoir une fonction extrémale (dérivée s'annule)

Handwritten equations on grid paper:

$$|H|_{\text{optimal}} \quad \boxed{\omega = 0} \quad \boxed{\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}} \quad \text{quand } \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$U_{\text{max}} = E \times \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$U_{\text{max}} > E$  donc résonance.

On peut ensuite montrer à la pailasse que on a résonance en fonction des valeurs de  $R$  (donc on modifie  $Q$ ).

Montrer simulation de l'université de lemans pour montrer la finesse de la résistance.

**11:00**

b)

On regarde maintenant la tension aux bornes de la résistance.

Lien entre intensité et tension pour le condensateur, donner directement la valeur de la résonance en intensité :

2)  $i = C \frac{dU_C}{dt} \dots \dots \boxed{I = \frac{E/R}{\left[1 - Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right]}}$

Résonant pour  $x = 1$

Toujours la même fréquence de résonance peu importe Q, par contre la largeur varie (monter sur simulation.)

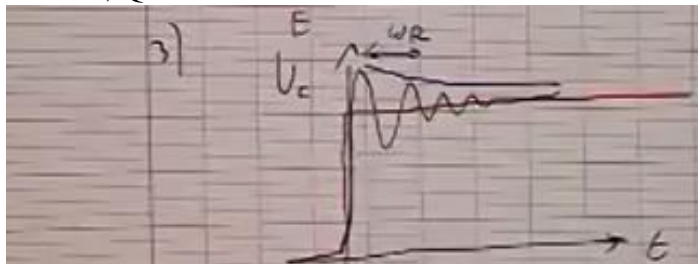
On définit alors la largeur de la résonance  $\Delta\omega$  :

3)  $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$

13 :58

C) universalité

Parler de l'échelon de tension ou on excite toutes les fréquences, alors le système oscille de manière amortie, Q liée au nombre d'oscillations avant amortissement.



On peut transposer ce système à un ressort avec un amortissement frottement fluide.

Écrire l'équation avec le PFD, définir  $\omega_0$  et Q, terme de rappel, etc.

Système à 1D peuvent tous être étudiés ainsi.

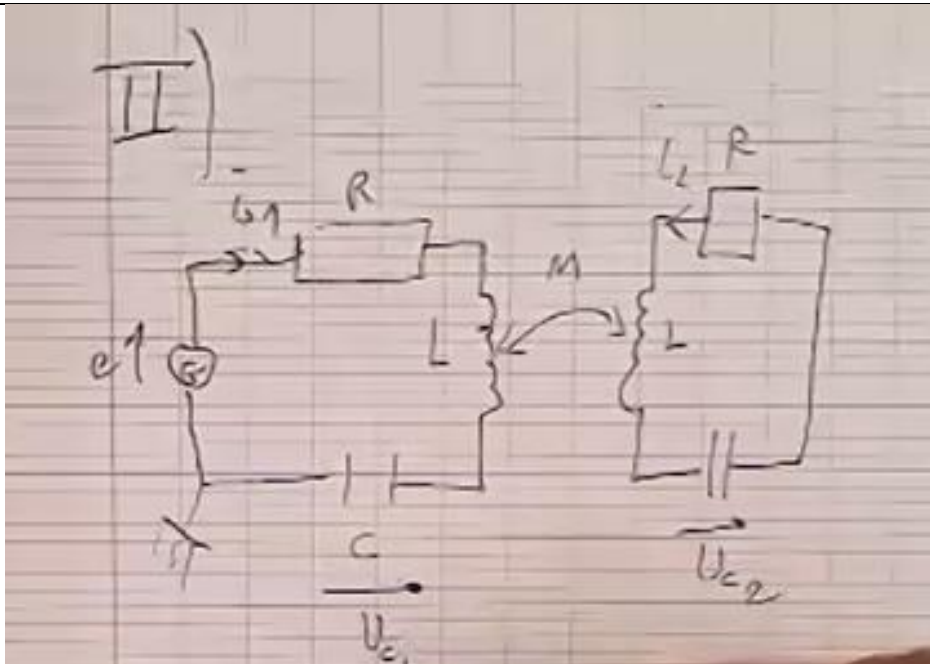
Que se passe-t-il si on couple deux systèmes ?

On s'intéresse au RLC couplé.

18 :10

II)

Dessiner les circuits RLC couplés par des bobines. Ne pas oublier le couplage par induction M. Expliciter les conventions (générateur pour le deuxième circuit).



On applique loi de mailles pour les 2 circuits. Ce qui nous intéresse est toujours  $U_c$ .

$$e = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + U_{C1} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$U_{C2} = R i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On se ramène à 2 degrés de liberté car courant et tension condensateur couplés.

ATTENTION AU SENS DU COURANT POUR  $i_2$  c'est  $-C dU_{C2}/dt$

D'où :

$$\begin{cases} e = R C \frac{dU_{C1}}{dt} + L C \frac{d^2 i_1}{dt^2} + U_{C1} - M C \frac{d^2 U_{C2}}{dt^2} \\ U_{C2} + R C \frac{dU_{C2}}{dt} + L C \frac{d^2 U_{C2}}{dt^2} - M C \frac{d^2 U_{C1}}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

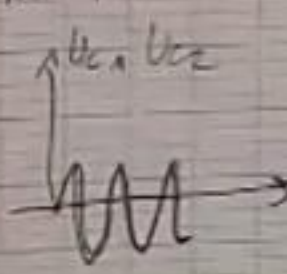
On a 2 équations couplées, technique de découplage classique, on ne détaille pas le calcul.

$$\begin{cases} \sigma = U_{c1} + U_{c2} \\ \delta = U_{c1} - U_{c2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = \sigma + RC \frac{d\sigma}{dt} + (L-M) \frac{d^2\sigma}{dt^2} \\ 0 = \delta + RC \frac{d\delta}{dt} + (L+M) \frac{d^2\delta}{dt^2} \end{cases}$$

On a 2 équations résonantes, on trouve :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}}$$

Deux fréquences de résonance. Ce sont delta et sigma les résonateurs.

$$U_{c1} = \frac{\sigma + \delta}{2}$$


On observe la création d'un mode symétrique et un mode antisymétrique. On retrouve ceci en chimie quand on crée des orbitales moléculaires (orbitale liante symétrique et antiliante antisymétrique) si on couple les 2 orbitales S par exemple.

26 :40

III)

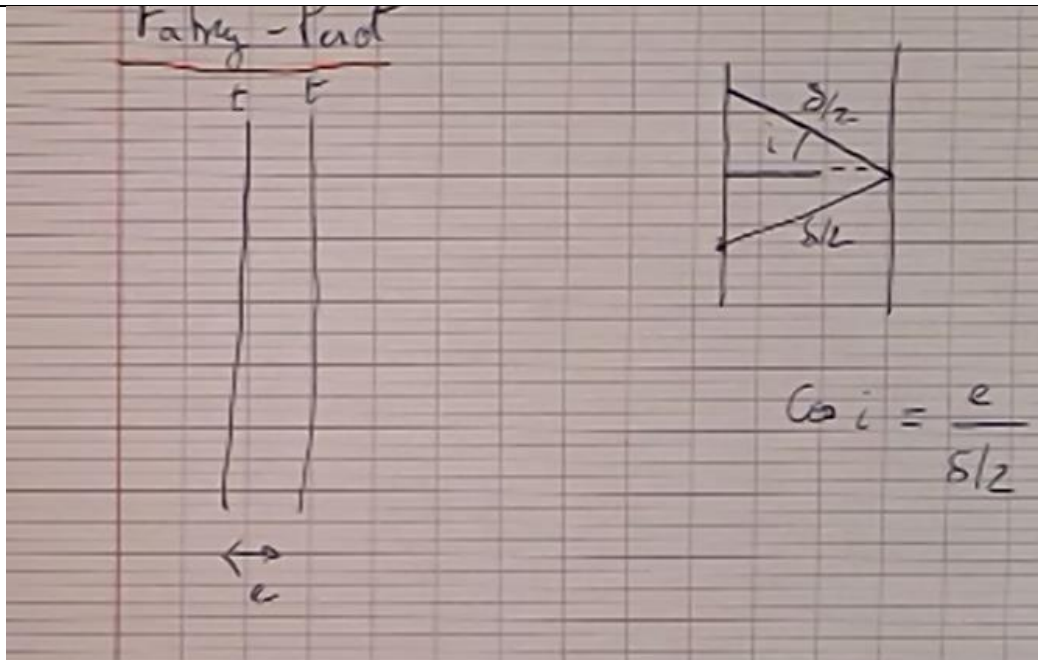
Fabry perot.

On présente le schéma sur slide.

Faire au tableau la représentation en 2 miroirs. Le rayon est en partie réfléchi et transmis, à chaque réflexion on a une différence de marche qui apparaît.

Lier l'angle de réflexion et l'épaisseur entre les miroirs.





**ERREUR SUR LES ANGLES !!!!**

On arrive à

$$S_0 = 2e \cos i$$

On arrive à un déphasage alors de :

$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda) \lambda S_0 = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$$

Alors si on regarde le rayon qui arrive au deuxième miroir et les rayons réfléchis 1 et n fois on trouve ::

$$D_0 = \tilde{D}_0 e^{i\phi/2}$$

$$D_n = D_0 (r^2 e^{i\phi})^n$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\frac{1-R}{(1-R)^2} \frac{\phi}{2}}$$

On a intensité maximale quand  $\phi$  égal à zéro, on définit

$$\nu_m = \frac{c}{2d \sin \theta} m \quad m \in \mathbb{N}$$

Si on a le temps, parler de la finesse des résonances :

$$SQ = \frac{2(1-R)}{R}$$

$$Q \sim \frac{1}{2(1-R)}$$

Or si on change l'ordre des paramètres et on les converti en variables :

$$\frac{2c\gamma}{c} \omega_i = m$$



On peut résonner sur chaque variable/paramètre.

Conclusion :

Ouverture sur électron élastiquement liée, absorption.

À SAVOIR :

DÉFINITION D'UN DEGRÉ DE LIBERTÉ. Cf. dictionnaire de physique.

Intro : Les phénomènes de résonance apparaissent dans de nombreux domaines de la vie quotidienne (balançoire, instruments de musique)

Définition : Dans un système physique soumis à une excitation périodique, on a résonance lorsque la réponse en amplitude du système est maximale. La présence de résonance met en évidence l'existence d'un mode propre d'oscillation dans le système étudié (ex balançoire poussée à sa fréquence d'oscillation propre, colonne d'air vibrant dans un instrument à vent)

1) Résonance dans un système électronique à un degré de liberté : le RLC

a) Résonance en tension

b) Résonance en intensité

c) Aspect énergétique

Transition : on a étudié un système 1d et amorti, on passe maintenant à un exemple issu de l'astronomie, pour un système 2d, non-amorti, excité par la présence d'une perturbation non pas temporelle mais spatiale.

### Questions posées par l'enseignant

Dans le cas du RLC, qu'est-ce que l'absence de résistance change au phénomène de résonance ?

→ On a un « facteur de qualité infini », et l'amplitude des oscillations forcées à la fréquence de résonance croît alors linéairement avec le temps, sans limite. (En réalité on est évidemment toujours limité par la présence de dissipation, même faible)

Pourquoi alors ne pas avoir introduit le circuit LC au début ?

→ Manque de temps, et la notion de facteur de qualité fait partie des notions importantes, donc on ne peut pas sacrifier la partie RLC entièrement (même si on aurait pu introduire cette notion autrement, par ex en parlant du Fabry-Perot, pas abordé dans cette leçon)

Que se passe-t-il lorsqu'on a plusieurs degrés de liberté/plusieurs fréquences de résonance ?

→ on peut avoir une transition vers le « chaos » (c'est à dire dépendance sensible aux conditions initiales) lorsque plusieurs résonances sont excitées simultanément (exemple du double pendule)

On s'intéresse ici à un forçage harmonique (tension du GBF sinusoidale dans le cas du RLC), est-ce le cas général ?

→ En fait oui, tout forçage periodique peut être décomposé en sa série de Fourier (somme de signaux harmoniques)

### Commentaires donnés par l'enseignant

Deuxième partie trop longue, il faudrait abrégé la partie calculatoire et en extraire la physique.

On pourrait introduire les résonances avec un exemple d'oscillateur non-amorti (circuit LC au lieu de RLC), car la présence de phénomènes dissipatifs masque la résonance.

On pourrait également évoquer les résonances dans les cavités Fabry-Perot (et application au LASER), parler de résonances paramétriques (ex de la balançoire), etc. Bien sur il faut choisir, on ne peut pas tout faire.

**Partie réservée au correcteur**

### **Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)**

Choix de plan risqué. Après une discussion de la résonance d'un circuit RLC, le reste du temps a été passé à discuter une résonance en astrophysique. Du coup, plusieurs notions importantes n'ont pas pu être présentées.

### **Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates**

Pour pouvoir transférer efficacement de l'énergie ou de la quantité de mouvement en forçant un système, il faut que le forçage satisfasse une condition de résonance qui peut être une relation entre deux fréquences ou une relation entre deux longueurs.

Dans le cas temporel, la condition entre les deux fréquences dépend du type de forçage, additif ou paramétrique.

La dissipation masque le phénomène de résonance. Sans dissipation, la réponse du système forcé est qualitativement différente à résonance (transfert moyen d'énergie non nul) ou hors résonance (pas de transfert moyen d'énergie quel que soit l'intensité du forçage).

Il ne faut pas se limiter au circuit RLC ou à son équivalent mécanique. La formule de Bragg se montre en 2 lignes de calcul et permet de discuter de nombreux exemples de résonance. En incidence normale, elle permet de discuter l'effet d'un forçage spatial d'une onde par le potentiel cristallin et d'expliquer l'existence de bandes de conduction. Elle est analogue à la condition de résonance paramétrique dans le cas temporel. On peut aussi discuter le Fabry-Pérot (plus long).

### **Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)**

Circuit RLC ou son équivalent mécanique.

Oscillateur paramétrique avec un pendule de longueur adaptée suspendu à un ressort.

Résonances acoustiques dans un tuyau, résonances dans un long câble coaxial, dans un Fabry-Pérot, etc

### **Bibliographie conseillée**

Landau-Lifchitz, Mécanique : discussion de la résonance de l'oscillateur harmonique sans dissipation.

Soutif, Vibration, propagation, diffusion : oscillateur paramétrique, divers exemples de résonance.

Rocard, Dynamique générale des vibrations : résonance par confusion de fréquences.