

Corrigé

Polarisation – Milieux anisotropes – Biréfringence



Référence : S. Huard, *Polarisation de la lumière*, Ed. Masson (1994)

EXERCICE I POLARISATION

1. On considère une onde plane de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

où \mathbf{E}_0 est un vecteur a priori complexe, perpendiculaire à \mathbf{k} . On pose, sans perte de généralité, $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ soit

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x} e^{i\varphi_x} \mathbf{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \mathbf{u}_y,$$

où $(E_{0x}, E_{0y}) \in \mathbb{R}^{+2}$ et φ_x, φ_y sont deux phases réelles.

On introduit le vecteur unitaire

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E}}{E_0} = A_x e^{i\varphi_x} \mathbf{u}_x + A_y e^{i\varphi_y} \mathbf{u}_y$$

qui ne caractérise que la direction de \mathbf{E} ¹. On parle d'**état de polarisation** de l'onde. Il est défini à une phase près, et l'on peut donc récrire

$$\mathbf{u} = A_x \mathbf{u}_x + A_y e^{i\Delta\varphi} \mathbf{u}_y,$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Dans le cas général, $\varphi_x(t)$ et $\varphi_y(t)$ sont des fonctions de t . Soit τ le temps de variation typique de $\Delta\varphi$.

- Si $\tau \gg T_{\text{détecteur}}$, alors la phase relative entre les deux polarisations \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y est bien définie : **l'onde est polarisée** ;
- Si $\tau \ll T_{\text{détecteur}}$, la polarisation fluctue beaucoup plus vite que le temps de réponse du détecteur. Il n'y a aucune corrélation entre φ_x et φ_y , $\Delta\varphi$ est aléatoire. L'onde est dite non polarisée.

1. et indirectement celle de \mathbf{B} pour une onde plane.

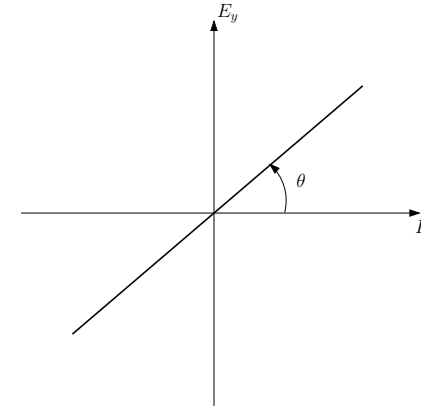
La polarisation d'une onde est complètement caractérisée par le vecteur unitaire \mathbf{u} (représentation de Jones). On peut visualiser la polarisation en traçant $(E_x(t), E_y(t))$ ou $(A_x(t), A_y(t))$ comme courbe paramétrée du temps :

$$\begin{cases} E_x(t) &= E_0 A_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x), \\ E_y(t) &= E_0 A_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y). \end{cases}$$

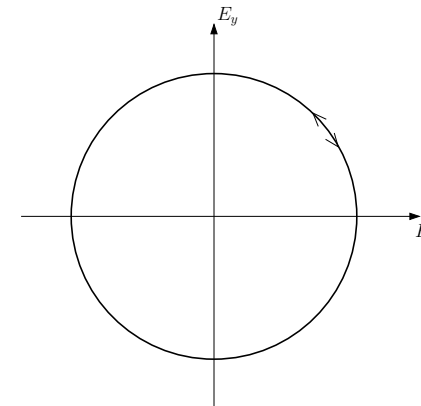
Par convention, on trace cette courbe dans le plan orienté tel que la direction de propagation de l'onde pointe vers le lecteur. Ici, l'axe (Oz) doit pointer hors de la feuille.

Exemples de polarisations

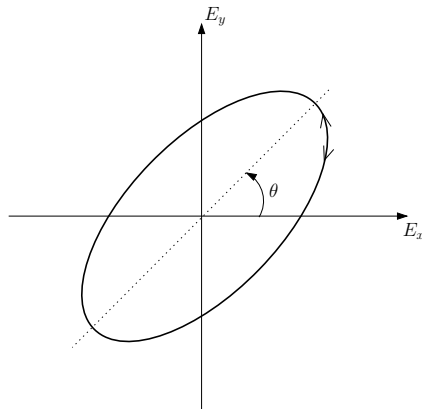
Polarisation rectiligne $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.



Polarisation circulaire $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$.



Polarisation elliptique $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta \end{pmatrix}$.



Remarque Si l'ellipse tourne dans le sens direct dans cette représentation, la polarisation est dite *elliptique gauche*. Si elle tourne dans le sens horaire, on parle de polarisation *elliptique droite*.

Notations On parle parfois de lumière polarisée π , σ^+ ou σ^- . Ces définitions, contrairement à l'état de polarisation défini jusqu'ici, dépendent de la donnée d'un axe dit *axe de quantification*, choisi de façon arbitraire. Pour un système atomique en présence d'un champ électrique ou magnétique, on choisit typiquement la direction de ce champ, indépendamment de la direction de propagation de l'onde considérée.

En prenant par exemple pour axe de quantification l'axe (Oz) orienté dans le sens de \mathbf{u}_z , on dit que

- l'onde est polarisée π si elle est polarisée rectilignement le long de l'axe de quantification. L'état de polarisation est $\mathbf{u}_\pi = \mathbf{u}_z$;
- l'onde est polarisée σ^+ si, en représentant $(E_x(t), E_y(t))$ dans le plan normal à l'axe de quantification, cet axe sortant du plan, la courbe obtenue est un cercle tournant dans le sens direct. Si, par exemple, l'axe de quantification est la direction de propagation de l'onde, l'onde est polarisée σ^+ si elle est circulaire gauche. L'état de polarisation est $\mathbf{u}_{\sigma^+} = (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$;
- l'onde est polarisée σ^- dans le cas où le cercle, dans ce même plan, tourne dans le sens indirect. L'état de polarisation est $\mathbf{u}_{\sigma^-} = (\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$;

- l'onde est plarisée σ si elle est polarisée rectilignement le long d'un axe orthogonal à l'axe de quantification. L'état de polarisation est $\mathbf{u}_\sigma = (\mathbf{u}_{\sigma^+} \pm \mathbf{u}_{\sigma^-})/\sqrt{2} = \mathbf{u}_x$ ou \mathbf{u}_y .

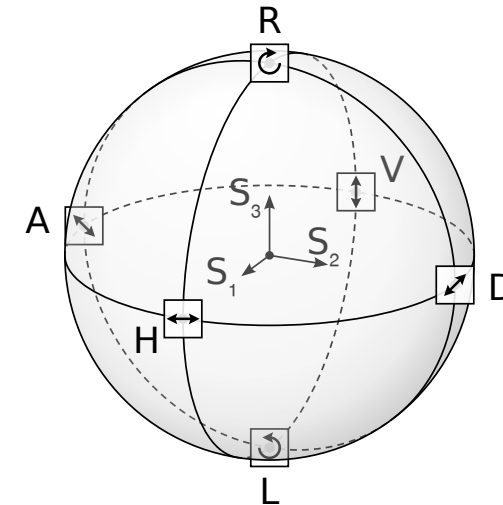


FIGURE 1.1 – Représentation dans la sphère de Poincaré de la polarisation d'une onde lumineuse. À chaque point de la sphère correspond un état de polarisation bien défini. (source Wikimedia commons)

Représentation dans la sphère de Poincaré Plutôt que de donner le vecteur \mathbf{u} pour caractériser l'état de polarisation de la lumière, il est souvent pratique de représenter graphiquement l'état de polarisation sur une sphère, appelée *sphère de Poincaré*. À chaque point de la sphère est associée une unique polarisation de la lumière. Les coordonnées du vecteur position \mathbf{S} , sur cette sphère, correspondent en fait aux *paramètres de Stokes* S_1 , S_2 et S_3 :

- $S_1 = A_x^2 - A_y^2$: $S_1 = +1$ si l'onde est polarisée rectilignement selon (Ox) , $S_1 = -1$ si l'onde est polarisée rectilignement selon (Oy) ,
- $S_2 = A_{x'}^2 - A_{y'}^2$, où les axes x', y' sont les axes orientés à 45° des axes x, y : $S_2 = +1$ si l'onde est polarisée rectilignement selon (Ox') , $S_2 = -1$ si l'onde est polarisée rectilignement selon (Oy') ,

- $S_3 = A_d^2 - A_g^2$: $S_3 = +1$ si l'onde est circulaire droite, $S_3 = -1$ si l'onde est circulaire gauche.

Sur cette sphère, deux polarisations orthogonales (circulaires gauche et droite par exemple) correspondent à deux vecteurs opposés.

Les coefficients A_i ci-dessus correspondent en fait à la décomposition du vecteur \mathbf{u} sur les vecteurs polarisation \mathbf{u}_i suivants :

- Pour S_1 : \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y ,
- Pour S_2 : $\mathbf{u}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)$ et $\mathbf{u}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)$,
- Pour S_3 : $\mathbf{u}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)$ et $\mathbf{u}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)$,

Dans tous les cas, on calcule A_i par

$$A_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i^*,$$

où $*$ dénote le complexe conjugué. On peut vérifier par exemple que pour tous ces vecteurs, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i^* = 1$.

Degré de polarisation La norme du vecteur \mathbf{S} , qui définit l'état de polarisation de l'onde dans la sphère de Poincaré, est appelé *degré de polarisation*.

- Si $|\mathbf{S}| = 1$, l'onde est parfaitement polarisée ;
- Si $|\mathbf{S}| = 0$, l'onde est dite *non-polarisée*. C'est par exemple le cas si le champ lumineux contient autant de photons polarisés circulaire gauche que de photons polarisés circulaire droit : $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-) = \mathbf{0}$;
- Si $0 < |\mathbf{S}| < 1$, la lumière est *partiellement polarisée*. On peut alors la décomposer en la somme d'une lumière polarisée et d'une lumière non polarisée. Par exemple, si la source contient une fraction de $p < 0,5$ de photons circulaires droits et une fraction $1 - p$ de photons circulaires gauches, $\mathbf{S} = p\mathbf{S}_+ + (1 - p)\mathbf{S}_-$, de norme $1 - 2p$, que l'on peut récrire comme $\mathbf{S} = 2p\mathbf{S}_+$. L'onde est dite alors partiellement polarisée circulaire gauche. Dans la représentation de Poincaré, le point correspondant à cet état de polarisation est à l'intérieur de la sphère, et non plus sur la sphère.

Remarque Cette représentation est en fait exactement analogue à celle utilisée pour représenter l'état d'un système quantique à deux niveaux : on parle alors de *sphère de Bloch*.

- Pour une source thermique, chaque atome émet un train d'onde, polarisé, sur une durée τ de l'ordre du temps de cohérence, qui peut être long devant $T_{\text{détecteur}}$. Cependant, la polarisation de chaque train d'onde est aléatoire (processus désordonné), et différente d'un atome à l'autre : la phase relative entre deux trains d'onde est aléatoire pour chacune des composantes E_x et E_y , sans corrélations entre elles. La lumière émise par l'ensemble des atomes correspond donc à la superposition d'un ensemble de trains d'onde de polarisations aléatoires (pour chaque atome émetteur). Il en résulte une lumière non polarisée, appelée aussi lumière naturelle.

3. Méthodes pour polariser la lumière (Cf. TP Polarisation I)

- Réflexion à l'angle de Brewster,
- Diffusion,
- Polariseur dichroïque.

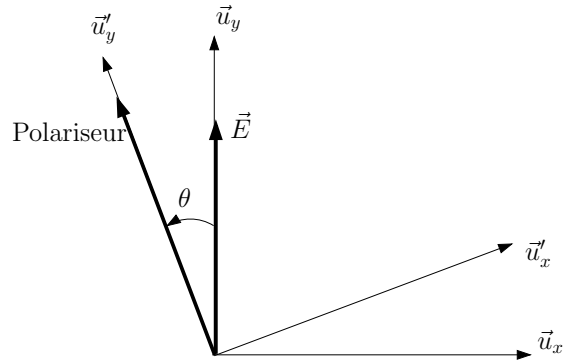
Les lames à retard, quant à elles, permettent de *modifier* l'état de polarisation d'une lumière polarisée, mais ne modifient pas le degré de polarisation (proportion de lumière polarisée dans une lumière partiellement polarisée) : une lumière naturelle reste non polarisée après n'importe quelle lame de phase.

Remarques

- Deux polarisations orthogonales n'interfèrent pas entre elles ;
- Si le milieu traversé par l'onde électromagnétique n'est pas sensible à la direction de \mathbf{E} , donc à sa polarisation, on peut se placer dans l'approximation scalaire (on ne tient pas compte du caractère vectoriel de l'onde).

4. Loi de Malus

On considère une lumière polarisée selon \mathbf{u}_y . Elle intercepte un polariseur faisant un angle θ avec \mathbf{u}_y (on repère ici la direction de «transmission»). On se place dans la base \mathcal{B}' , tournée de θ par rapport à Oxy , de vecteurs de base \mathbf{u}'_x et \mathbf{u}'_y , ce dernier étant aligné avec la direction du polariseur.



On a

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x &= \cos \theta \mathbf{u}'_x - \sin \theta \mathbf{u}'_y, \\ \mathbf{u}_y &= \sin \theta \mathbf{u}'_x + \cos \theta \mathbf{u}'_y. \end{cases}$$

Donc, dans la base \mathcal{B}' , on a

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_y = E_0 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Après le polariseur, la composante selon \mathbf{u}'_x est absorbée, donc en sortie, on a une onde polarisée selon \mathbf{u}'_y :

$$\mathbf{E}' = E_0 \cos \theta \mathbf{u}'_y.$$

D'où, pour une intensité incidente $I_0 = |E_0|^2$, l'intensité après le polariseur est

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta.$$

C'est la loi de Malus.

EXERCICE II MILIEUX ANISOTROPIQUES

- On considère un milieu diélectrique homogène et linéaire. Le champ électrique \mathbf{E} et la polarisation volumique \mathbf{P} sont reliés par (Cf. BFR *Électromagnétisme 4*)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \mathbf{E},$$

où $[\chi_e]$ est le tenseur de susceptibilité diélectrique. Ce tenseur est symétrique (conservation de l'énergie). De plus, par définition du vecteur \mathbf{D} , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ &= \varepsilon_0 (1 + [\chi_e]) \mathbf{E}, \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Les vecteurs propres de $[\varepsilon_r]$, ou de $[\chi_r]$, définissent **les axes principaux du milieu**, aussi appelés *axes propres*, que l'on note (x, y, z) . Les valeurs propres sont les susceptibilités diélectriques associées. Dans la base des axes principaux, on a

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rz} \end{pmatrix}.$$

Si $\varepsilon_{rx} \neq \varepsilon_{ry} \neq \varepsilon_{rz}$, on dit que le milieu est *biaxe*.

Si $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} \neq \varepsilon_{rz}$, on dit que le milieu est *uniaxe* (cas le plus courant). Dans ce cas là, on a deux indices optiques associées aux différents axes :

- un indice dit *ordinaire* $n_o = n_x = n_y = \sqrt{\varepsilon_{rx}}$,
- un indice dit *extraordinaire* $n_e = n_z = \sqrt{\varepsilon_{rz}}$.

Rappel :

On rappelle les équations de Maxwell dans les milieux :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{libre}}, \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \vec{\text{rot}} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dans un milieu diélectrique, non magnétique, elles deviennent

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \vec{\text{rot}} \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

D'où

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \mathbf{B}.$$

Or $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \mathbf{E}) = \nabla(\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$, donc

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0.$$

Dans le cas d'un milieu linéaire,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \mathbf{E},$$

soit

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} [\varepsilon_r] \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

En se plaçant dans la base des axes principaux, il devient immédiat que l'on associe trois indices $\sqrt{\varepsilon_{ri}}$ aux trois axes principaux. La vitesse de phase, pour la composante E_i , est c/n_i .

2. Cf. Électromagnétisme : Les vecteurs $(\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ forment un trièdre direct, d'après l'équation de Maxwell-Ampère. En outre le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$ s'écrit

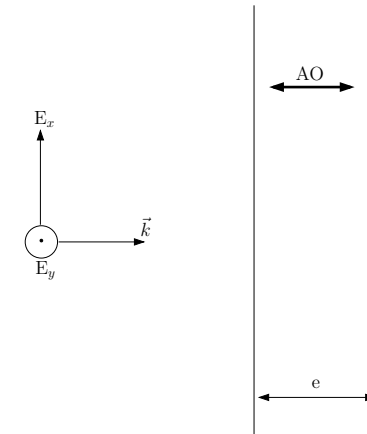
$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Les vecteurs $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ forment à leur tour un trièdre direct. Comme \mathbf{D} et \mathbf{E} ne sont pas colinéaires en général dans un milieu, $\mathbf{\Pi}$ et \mathbf{k} ne sont pas colinéaires a priori ! Autrement dit, la direction du rayon lumineux, qui est la direction du vecteur de Poynting, n'est pas nécessairement la direction du vecteur d'onde.

En fait, d'après l'équation (II.1), \mathbf{D} et \mathbf{E} ne sont colinéaires que si \mathbf{E} est un vecteur propre de $[\varepsilon_r]$, i.e. si l'onde est polarisée le long d'un des axes principaux du milieu.

3. De nombreux cristaux sont des milieux biréfringents uniaxes. Les plus courants sont les cristaux de quartz et de calcite, parfois encore appelé spath.
4. On considère maintenant un milieu *uniaxe*, tel que $n_x = n_y = n_o$ et $n_z = n_e$.

Cristal perpendiculaire Dans ce cas, l'axe extraordinaire, aussi appelé *axe optique* du milieu, est perpendiculaire à la surface de la lame. Pour une onde plane en incidence normale, les deux composantes du champ électrique sont parallèles à un axe principal ordinaire de la lame et «voient» donc le même indice, i.e. l'indice ordinaire n_o . Tout se passe comme si le milieu était isotrope.

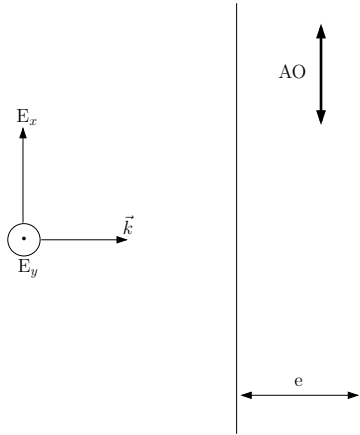


Attention ! On donne malheureusement le nom d'*axe optique* à deux axes différents, ce qui prête régulièrement à confusion. On prendra toujours garde à distinguer :

- l'axe optique de la lame, qui correspond à l'axe d'indice extraordinaire,
- l'axe optique du montage optique global, qui correspond à l'axe sur lequel sont alignées les optiques, et proche duquel se propagent tous les faisceaux dans le cadre de l'approximation de Gauss.

En particulier, l'axe optique de la lame n'est pas toujours confondu avec l'axe optique du montage ! Les cas suivants en sont des exemples.

Cristal parallèle On a $n_e = n_x$ indice extraordinaire pour le champ selon \mathbf{u}_x et $n_o = n_y$ indice ordinaire pour le champ selon \mathbf{u}_y .



Après avoir traversé une lame d'épaisseur e en incidence normale, les deux composantes du champ accumulent des phases différentes, car les indices sont différents :

$$E_x \leftrightarrow n_e \Rightarrow \text{après } e, E_x \text{ est déphasé de } \frac{2\pi}{\lambda} n_e e,$$

$$E_y \leftrightarrow n_o \Rightarrow \text{après } e, E_y \text{ est déphasé de } \frac{2\pi}{\lambda} n_o e.$$

Il apparaît donc un déphasage de $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)e$ entre E_x et E_y . Il s'en suit **une modification de l'état de polarisation de l'onde suite au passage à travers une lame anisotrope**.

Exemple :

$$\underbrace{\mathbf{E}_{0e} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}}_{\text{vibration rectiligne}} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{E}_{0s} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)e} \end{pmatrix}}_{\text{vibration elliptique}}$$

Si on prend une vibration rectiligne telle que $E_{0x} = E_{0y}$ et l'épaisseur e telle que $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)e = \pi/2$, on obtient une vibration circulaire. **On parle de lame $\lambda/4$, car c'est une lame pour laquelle la différence de marche entre les deux polarisations est $e\Delta n = \lambda/4$.**

Remarque : Si la lumière incidente est polarisée rectilignement suivant un axe propre (ou principal) du cristal, la polarisation de la lumière émergente n'est pas modifiée. On dit dans ce cas que les axes \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y sont les **axes neutres** de la lame : si l'onde est polarisée selon l'un de ces axes, l'état de polarisation n'est pas modifié en sortie de la lame.

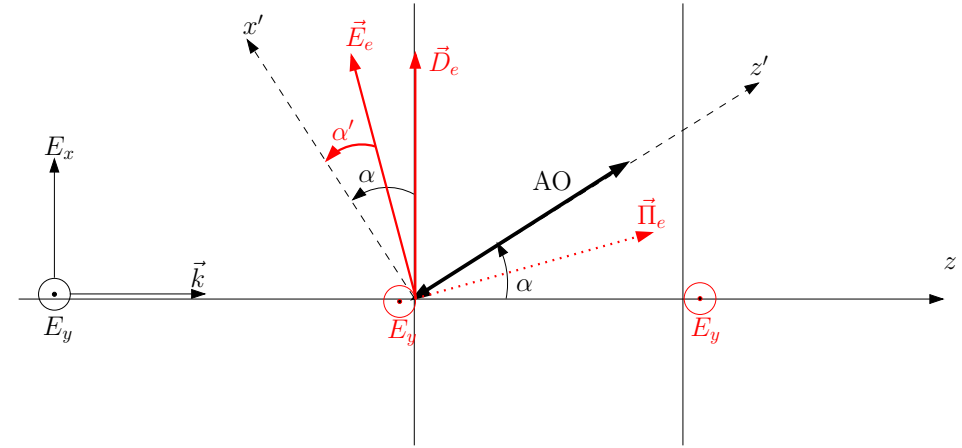


FIGURE 2.1 – Effet d'une lame biaxe, d'axe optique quelconque, sur une vibration lumineuse.

Effet d'une lame quelconque Le cristal est maintenant taillé de façon quelconque par rapport à l'axe optique, noté (Oz) (perpendiculaire à la face d'entrée, l'onde étant en incidence normale). On choisit le système de coordonnées tel que le plan formé par l'axe optique du montage et l'axe extraordinaire de la lame soit le plan (Ox, Oz) (voir FIG. 2.1). Les axes principaux de la lame sont les axes (Ox') , (Oy) et (Oz') , avec (Oz') choisi le long de l'axe optique de la lame.

Dans ce cas, on a $n_y = n_o$. Une onde polarisée selon (Oy) , un axe propre de la lame, est donc simplement déphasée de $\frac{2\pi}{\lambda}n_o e$ sans être déviée (l'onde voit un milieu d'indice n_o).

La situation est plus compliquée pour une onde $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_x$ polarisée selon (Ox) , qui n'est pas un axe propre de la lame. Plus spécifiquement, on ne peut pas ici décomposer le champ électrique en deux ondes polarisées selon (Ox') et (Oz') , les deux autres axes propres de la lame, comme on l'avait fait dans le cas précédent : (Ox') et (Oz') ne sont pas orthogonaux à \mathbf{k} , et l'on perdrait donc le caractère transverse de l'onde incidente.

Pour calculer l'évolution de l'onde dans la lame, il faut calculer les champs \mathbf{E} et \mathbf{D} dans le milieu. On utilise alors les relations de passage de l'électromagnétisme :

$$\mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0$$

$$\mathbf{D}_{2\perp} - \mathbf{D}_{1\perp} = \sigma_{\text{libre}} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Dans un diélectrique, $\sigma_{\text{libre}} = 0$. Donc $\mathbf{D}_{2\perp} = \mathbf{D}_{1\perp} = 0$. Dans la lame, \mathbf{D} est donc

orienté selon \mathbf{u}_x . En revanche, on ne peut rien dire a priori sur le champ \mathbf{E} .

Dans le repère $(Ox'y'z')$,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{ro} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ro} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{re} \end{pmatrix} \mathbf{E}.$$

Si on note le champ dans la lame $\mathbf{E}_e = \begin{pmatrix} E'_x \\ 0 \\ E'_z \end{pmatrix}$, on obtient aisément

$$\mathbf{D}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_{ro} E'_x \\ 0 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{re} E'_z \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{D_{ex'}}{D_{ez'}} = \frac{\varepsilon_{ro} E'_x}{\varepsilon_{re} E'_z} \stackrel{\mathbf{D}_e \perp \mathbf{u}_z}{=} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha},$$

d'où

$$\frac{E'_x}{E'_z} = \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ro}} \frac{1}{\tan \alpha} = \left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2 \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Si on note α' l'angle (Ox', \mathbf{E}_e) , on obtient la relation

$$\tan \alpha' = \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \tan \alpha.$$

Or, comme on a

$$\mathbf{\Pi}_e = \mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e,$$

α' est aussi l'angle que fait le vecteur de Poynting avec l'axe (Oz) . Il repère donc la direction de propagation de l'énergie, *i.e.* la direction du rayon extraordinaire.

Dans ce cas, les rayons extraordinaire et ordinaire n'ont donc pas la même direction et sont séparés en sortie de la lame. Ce phénomène est appelé *double réfraction*.

Notons finalement que, en utilisant les mêmes relations de continuité du champ \mathbf{D} à la sortie de la lame qu'à son entrée, on constate que la polarisation de l'onde émergente est la même que celle de l'onde incidente, *i.e.* polarisée rectilignement le long de (Ox) . Pour les deux polarisations rectilignes considérées, (Ox) et (Oy) , la polarisation en sortie est donc la même que la polarisation en entrée. Ces deux axes sont appelés **axes neutres** de la lame. Seul (Oy) , en revanche, est un axe *propre* de la lame (voir question 6).

5. — Si $n_e > n_o$, alors $\alpha' < \alpha$, $\Delta n = n_e - n_o > 0$, on dit qu'on a une lame uniaxe positive. Le rayon extraordinaire «se rapproche» de l'axe optique.

Exemple : le quartz, $\Delta n = 9 \cdot 10^{-3} > 0$.

- Si $n_e < n_o$, alors $\alpha' > \alpha$, $\Delta n < 0$, on parle d'une lame uniaxe négative. Le rayon extraordinaire «s'éloigne» de l'axe optique.

Exemple : la calcite (le spath), $\Delta n = -0,17 < 0$.

- Si $n_e = n_o$, le milieu est isotrope, il n'y a pas de séparation entre les deux rayons.

Cette séparation des deux polarisations par une lame uniaxe constitue une méthode efficace de polarisation de la lumière.

6. Les axes principaux d'une lame, et notamment son axe optique, sont liés au cristal : ce sont les axes propres qui correspondent aux vecteurs propres du tenseur de permittivité $[\varepsilon_r]$. Les axes neutres, en revanche, dépendent de la direction de propagation de l'onde. Si une onde est polarisée selon un axe neutre de la lame, sa direction de polarisation n'est pas modifiée, et tout se passe comme si l'onde traversait un milieu isotrope. La direction de propagation dans le cristal et l'indice «vu» par l'onde dépendent en revanche de son état de polarisation.

En se plaçant toujours dans le cas d'un cristal uniaxe, au moins l'un des axes propres de la lame est contenu dans le plan de la face d'entrée. C'est la première ligne neutre de la lame (axe Oy sur la figure 2.1), l'indice vu par l'onde est l'indice ordinaire n_o . Dans le cas d'une onde en incidence normale, la seconde ligne neutre est obtenue par projection sur la face d'entrée de l'axe optique, ou axe extraordinaire, de la lame. Sur la figure 2.1, cela correspond à l'axe Ox . L'indice vu par l'onde est alors compris entre n_e et n_o . Cet axe neutre n'est donc pas, en général, un axe propre de la lame.

On appelle alors **axe rapide** l'axe neutre pour lequel l'indice est le plus faible (vitesse de propagation de la lumière c/n la plus élevée) et **axe lent** l'axe neutre pour lequel l'indice est le plus grand (vitesse de propagation de la lumière c/n la plus faible).

7. **Ellipsoïde des indices** Pour trouver l'indice n vu par l'onde polarisée le long du second axe neutre, il faut écrire que, pour une onde de vecteur d'onde \mathbf{k} dans le milieu, $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$ et $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$, donc

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_0 \omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} (\mathbf{E} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{j}) = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} (1 - |\mathbf{j}\rangle\langle \mathbf{j}|) \mathbf{E}, \quad (\text{II.2})$$

où $\mathbf{k} = k \mathbf{j}$ et $k = n k_0 = n(\omega/c)$. Comme par ailleurs, $\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} [\varepsilon_r^{-1}] \mathbf{D}$, on a l'équation

aux valeurs propres

$$(1 - |j\rangle\langle j|)[\varepsilon_r^{-1}]\mathbf{D} = \frac{1}{n^2}\mathbf{D},$$

dont la résolution permet de trouver la valeur de n en fonction de la direction de \mathbf{D} ou de \mathbf{k} . De façon générale, on trouve l'équation constitutive

$$n_{x'}^2 k_{x'}^2 (n^2 - n_{y'}^2)(n^2 - n_{z'}^2) + n_{y'}^2 k_{y'}^2 (n^2 - n_{z'}^2)(n^2 - n_{x'}^2) + n_{z'}^2 k_{z'}^2 (n^2 - n_{x'}^2)(n^2 - n_{y'}^2) = 0,$$

$$\frac{n_{x'}^2}{n^2 - n_{x'}^2} k_{x'}^2 + \frac{n_{y'}^2}{n^2 - n_{y'}^2} k_{y'}^2 + \frac{n_{z'}^2}{n^2 - n_{z'}^2} k_{z'}^2 = 0,$$

la seconde équation n'étant valable que si $n \neq n_{x'}, n_{y'}, n_{z'}$. Si l'on note $\mathbf{v} = n\mathbf{k}/k$, le vecteur de norme n et de direction la direction de \mathbf{k} , ses coordonnées vérifient :

$$n_{x'}^2 v_{x'}^2 \left(1 - \frac{n_{y'}^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{n_{z'}^2}{v^2}\right) + n_{y'}^2 v_{y'}^2 \left(1 - \frac{n_{z'}^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{n_{x'}^2}{v^2}\right) + n_{z'}^2 v_{z'}^2 \left(1 - \frac{n_{x'}^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{n_{y'}^2}{v^2}\right) = 0. \quad (\text{II.3})$$

On trouve en fait l'équation d'une surface à deux nappes, appelée *surface des indices*, voir FIG. 2.2. Elle permet de retrouver, dans une direction du vecteur d'onde \mathbf{k} donnée, la valeur de l'indice pour chacune des deux polarisations : chaque nappe correspond à une polarisation de l'onde incidente le long d'un des deux axes neutres.

Dans notre cas, par exemple, $v_{y'} = 0$, $v_{x'} = n \sin \alpha$, $v_{z'} = n \cos \alpha$ et $n_{x'} = n_e$, $n_{y'} = n_{z'} = n_o$. On obtient alors

$$n_e^2 (n^2 - n_o^2)^2 \sin^2 \alpha + n_o^2 (n^2 - n_o^2) (n^2 - n_e^2) \cos^2 \alpha = 0.$$

On retrouve bien que $n = n_o$ si $\alpha = \pi/2$ (si $k \parallel (Ox)$ alors $\mathbf{D} \parallel (Oz)$ ou (Oy) qui sont tous deux des axes ordinaires) alors que $n = n_e$ ou n_o si $\alpha = 0$ ($\mathbf{D} \parallel (Ox)$ ou (Oy)). Dans ces deux cas, $\alpha' = \alpha$ et il n'y a pas séparation des faisceaux.

En partant de l'équation (II.2), dont on prend le produit scalaire avec \mathbf{D} , on peut aussi écrire, en notant que $\mathbf{D} \cdot \mathbf{j} = 0$,

$$D^2 = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = n^2 \mathbf{D} \cdot [\varepsilon_r^{-1}] \mathbf{D},$$

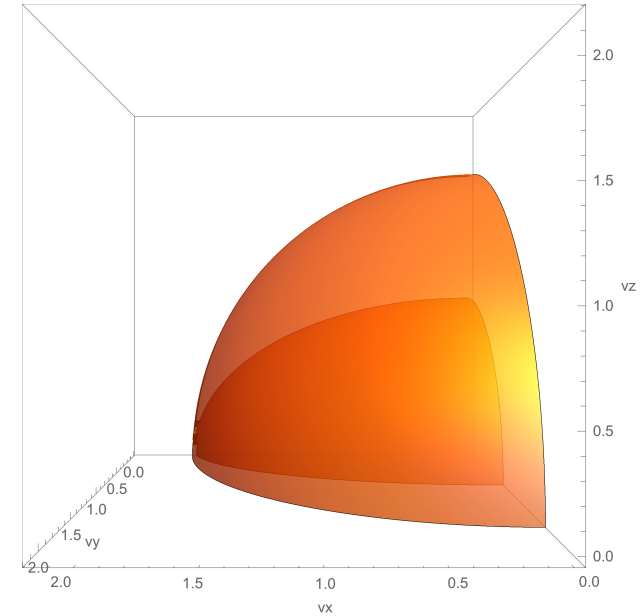


FIGURE 2.2 – Surface des indices obtenue dans le cas $n_{x'} = 1$, $n_{y'} = n_{z'} = 1,8$. L'indice n est la norme du vecteur \mathbf{v} , défini comme $\mathbf{v} = n\mathbf{k}/k$. Chaque nappe correspond à une polarisation différente de l'onde lumineuse.

que l'on peut récrire

$$D^2 = \frac{n^2}{n_{x'}^2} D_{x'}^2 + \frac{n^2}{n_{y'}^2} D_{y'}^2 + \frac{n^2}{n_{z'}^2} D_{z'}^2.$$

Si l'on note $\mathbf{u} = n\mathbf{D}/D$, le vecteur de norme n et de direction la direction de \mathbf{D} , ses coordonnées vérifient l'équation

$$\frac{u_{x'}^2}{n_{x'}^2} + \frac{u_{y'}^2}{n_{y'}^2} + \frac{u_{z'}^2}{n_{z'}^2} = 1. \quad (\text{II.4})$$

Cette équation est l'équation d'un ellipsoïde, appelée *ellipsoïde des indices*, voir FIG. 2.3. Cette surface n'a qu'une seule nappe : à une direction de \mathbf{D} donnée est associée une unique valeur de n . On trouve ainsi la valeur de n en lisant simplement sur le dessin le rayon $n = |\mathbf{u}|$ du point de l'ellipsoïde dans la direction de \mathbf{D} .

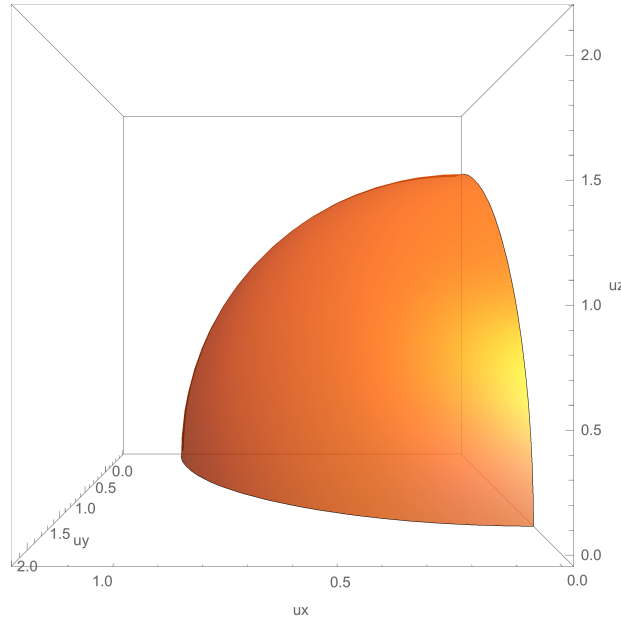


FIGURE 2.3 – Ellipsoïde des indices obtenue dans le cas $n_x = 1$, $n_y = n_z = 1,8$. L'indice n est la norme du vecteur \mathbf{u} , défini comme $\mathbf{u} = n\mathbf{D}/D$.

Dans le cas étudié précédemment, $u_x = n \cos \alpha$, $u_y = 0$ et $u_z = n \sin \alpha$. L'équation (II.4) permet alors d'écrire

$$n = \sqrt{\frac{n_e^2}{1 + \sin^2 \alpha \left(\left(\frac{n_e}{n_o} \right)^2 - 1 \right)}}.$$

On retrouve bien que $n = n_e$ si $\alpha = 0$ et $n = n_o$ si $\alpha = \pi/2$.

8. On peut avoir de la biréfringence induite par contrainte, par effet Kerr,... (Cf. Sextant, Bruhat, Pérez...).

EXERCICE III ACTION D'UNE LAME BIRÉFRINGENTE

1. On note \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y les directions associées aux axes principaux de la lame, respectivement ordinaire et extraordinaire. On peut décomposer le champ \mathbf{E} incident selon

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y.$$

Après la traversée de la lame, on a ($k = n \frac{2\pi}{\lambda}$ dans la lame),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x e^{\frac{2i\pi}{\lambda} n_o e} \mathbf{u}_x + E_y e^{\frac{2i\pi}{\lambda} n_e e} \mathbf{u}_y, \\ &= e^{\frac{2i\pi}{\lambda} n_o e} \left(E_x \mathbf{u}_x + E_y e^{i\Delta\varphi} \mathbf{u}_y \right). \end{aligned}$$

On a donc un retard de phase

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta n e}{\lambda}.$$

En général, Δn dépend faiblement de λ .

2. Une lame d'épaisseur e' telle que $\Delta\varphi' \equiv \Delta\varphi [2\pi]$, i.e. $e' \equiv e[\lambda/\Delta n]$ introduirait le même déphasage entre les deux composantes du champ électrique. On écrit donc

$$e = e_0(\lambda) + p \frac{\lambda}{\Delta n}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq e_0 < \frac{\lambda}{\Delta n}.$$

La donnée de $e_0(\lambda)$ suffit à caractériser l'action de la lame pour une lumière de longueur d'onde λ . L'entier p est appelé l'ordre de la lame à retard. Une lame est dite *mince* si p est «faible», i.e. de quelques unités seulement, soit

$$e \lesssim \frac{\lambda}{\Delta n}.$$

Exemple : le Quartz, $\Delta n = n_e - n_o = 9 \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 633 \text{ nm}$, alors $e \lesssim 70 \mu\text{m}$.

A priori, une lame mince se comporte de la même façon qu'une lame épaisse qui induirait un déphasage $\Delta\varphi' = \Delta\varphi + 2p\pi$, avec p grand. Toutefois, une faible variation de la longueur d'onde ou de l'épaisseur de la lame (dilatation thermique par exemple)

2. La très faible valeur de e trouvée est la raison pour laquelle une lame mince, d'ordre zéro, n'est le plus souvent pas constituée d'une lame unique (Cf. Sextant, note 41 p.286).

pourrait alors induire une variation notable de $\Delta\varphi'$, $e_0(\lambda)$ variant d'autant plus vite avec λ que p est grand :

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\lambda} = -\frac{2\pi\Delta ne}{\lambda^2} \text{ est d'autant plus grand que } e \text{ est grand,}$$

$$\frac{\partial e_0(\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{p}{\Delta n} \text{ est d'autant plus grand que } p \text{ est grand.}$$

Plus la lame est mince, plus la sensibilité à ces fluctuations est donc faible. Les lames à retard d'ordre zéro, quoique plus difficiles à réaliser, sont donc en général préférées à des lames d'ordre élevé puisqu'elles autorisent une variation plus grande de longueur d'onde sans pour autant changer significativement l'effet de la lame sur la polarisation.

Cf. Sextant p.285 pour plus de détails.

3. — Une lame demi-onde est une lame d'épaisseur e telle que $e_0\Delta n = \frac{\lambda}{2}$ soit

$$\Delta\varphi = \pi.$$

Action d'une lame $\lambda/2$ sur une polarisation rectiligne : On note \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y les directions des axes neutres de la lame. Une onde polarisée rectilignement se transforme alors selon

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lame } \lambda/2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix}.$$

On obtient une vibration lumineuse polarisée rectilignement dans la direction symétrique à la direction incidente par rapport aux axes neutres. **On modifie la direction de polarisation sans en affecter le caractère rectiligne.**

- Une lame quart d'onde est une lame d'épaisseur e telle que $e_0\Delta n = \frac{\lambda}{4}$ soit

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Action d'une lame $\lambda/4$ sur une polarisation rectiligne : Avec les mêmes notations que précédemment,

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lame } \lambda/4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ i\sin\theta \end{pmatrix}.$$

On obtient une polarisation elliptique. Si $\theta = \pm\pi/4$, i.e. si la direction de polarisation est à 45° des axes neutres de la lame, la polarisation devient circulaire.

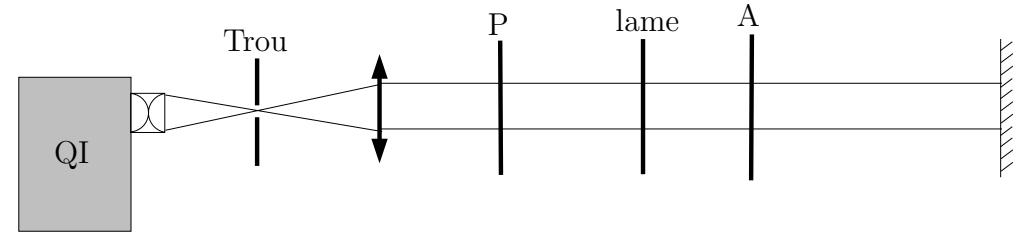


FIGURE 3.1 – Configuration Polariseur-Analyseur croisés pour l'étude d'une lame biréfringente.

Action d'une lame $\lambda/4$ sur une polarisation elliptique :

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lame } \lambda/4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, on obtient une vibration elliptique, **sauf** si les axes neutres sont alignés avec les axe de l'ellipse (i.e. $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$). **On obtient alors une vibration rectiligne.**

4. Le déphasage introduit par la lame est $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n e$. Dans la base associée aux axes neutres de la lame, on associe au polariseur (resp. analyseur) la direction \mathbf{u}_P (resp. \mathbf{u}_A), définie comme

$$\mathbf{u}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

car la lame est tournée de 45° par rapport au système Polariseur–Analyseur. Au passage par un polariseur ou analyseur de direction \mathbf{u} , une onde subit la transformation

$$\mathbf{E} \mapsto (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u}.$$

Après le polariseur, le champ s'écrit donc $\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et après le passage par la lame

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lame}} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{analyseur}} \frac{E_0}{2} (1 - e^{i\Delta\varphi}) \mathbf{u}_A.$$

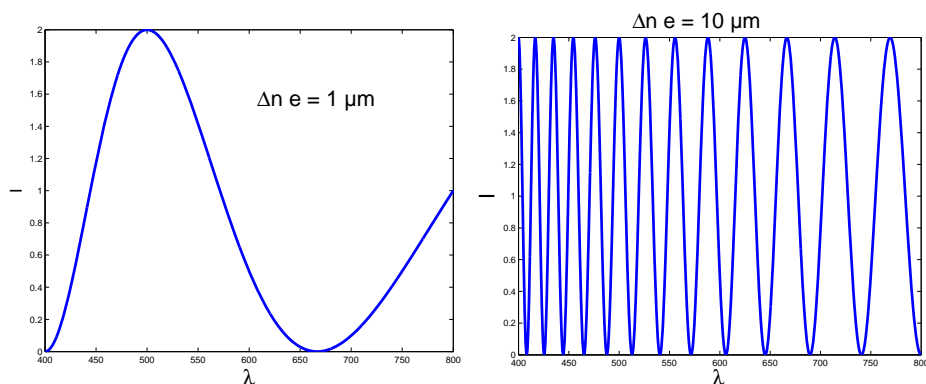


FIGURE 3.2 – Intensité normalisée en fonction de λ (en nm), restreint au domaine du visible. lame de $1 \mu\text{m}$: la teinte observée sur l'écran est colorée. lame de $10 \mu\text{m}$: la teinte sur l'écran est un blanc d'ordre supérieur, son spectre est cannelé.

D'où une intensité

$$I = \frac{I_0}{2} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\Delta n e}{\lambda}\right) \right].$$

Ne sont visibles sur un écran placé après l'analyseur que les longueurs d'onde pour lesquelles $\Delta n e = (p + 1/2)\lambda$, $p \in \mathbb{Z}$.

Pour des lames minces ($\Delta n e \lesssim \lambda$, $p \sim 1$), $\Delta n e/\lambda$ varie relativement peu sur le spectre visible. On obtient une teinte colorée : seule une zone du spectre visible est absente.

Pour les lames épaisses, en revanche ($\Delta n e \gg \lambda$, $p \gg 1$), $\Delta n e/\lambda$ varie rapidement sur le spectre visible, et on obtient du blanc d'ordre supérieur : le spectre de la lumière sur l'écran est cannelé (voir FIG. 3.2).

EXERCICE IV POUVOIR ROTATOIRE

- Certaines substances ont la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'une onde polarisée rectilignement, lorsque celle-ci les traverse, d'un angle qui ne dépend pas de la polarisation incidente. On parle de **pouvoir rotatoire** ou **activité optique**.

Exemples de milieux optiquement actifs :

- le quartz $^3 \text{SiO}_2$,
- l'essence de térébenthine $\text{C}_{10}\text{H}_{16}$,
- le saccharose $\text{C}_{10}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$.

Remarque : Une lame $\lambda/2$ ne présente pas d'activité optique, puisque l'angle de rotation de la polarisation dépend de la polarisation incidente.

Un milieu optiquement actif présente les propriétés suivantes :

- L'angle de rotation du plan de polarisation est proportionnel à l'épaisseur de substance traversée. Pour un solide ou un liquide pur, le **pouvoir rotatoire** est défini par

$$\alpha \triangleq \frac{\theta(l)}{l} = \frac{d\theta}{dl},$$

où $\theta(l)$ est l'angle dont a tourné le plan de polarisation sur une longueur l . Le pouvoir rotatoire est une caractéristique de cette substance. Pour une solution de concentration c , on définit le **pouvoir spécifique** α_c

$$\alpha_c \triangleq \frac{\theta(l)}{lc}.$$

De façon générale, α_c dépend de c , mais pour les solutions diluées, dans la plupart des cas, c'est une constante caractérisant la substance.

Par convention, α est positif si un observateur qui regarde l'onde arriver vers lui doit tourner l'analyseur vers la droite pour rétablir l'éclairement initial. Autrement dit, $\alpha > 0$ si l'état de polarisation tourne dans le sens horaire dans le plan utilisé précédemment pour représenter la polarisation de l'onde. Si α est positif (resp. négatif), la substance est dite **dextrogyre** (resp. **lévogyre**) ;

- L'angle de rotation dépend aussi de λ , de façon générale selon la loi

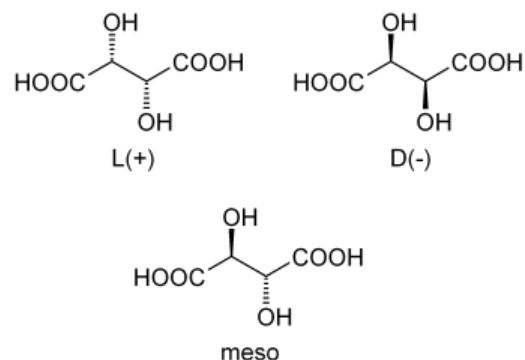
$$\theta(l) \propto \frac{l}{\lambda^2} ;$$

- Pour la **polarisation rotatoire «naturelle»**, le sens de rotation du plan de polarisation ne dépend pas du sens de propagation de la lumière dans le milieu. Ce n'est en revanche pas le cas de la polarisation rotatoire **induite** par un champ magnétique \mathbf{B} , du fait des propriétés de symétrie du champ \mathbf{B} par renversement du temps.

3. On considère dans ce cas-là une lame perpendiculaire, pour ne pas avoir à tenir compte du fait que le quartz est aussi biréfringent (uniaxe).

Origine microscopique de la polarisation rotatoire L'activité optique est liée à une dissymétrie de la substance, cristalline ou moléculaire, plus exactement une **chiralité** (Cf. Chimie).

Chiralité moléculaire Une molécule chirale présente en général une activité optique. Dans ce cas là, le milieu est optiquement actif, même en phase amorphe (gaz, liquide). Exemple : l'acide tartrique⁴ (acide 2,3-dihydroxydebutanedioïque) dont l'isomère (2S,3S) est dextrogyre, l'isomère (2R,3R) est lévogyre, et le méso est inactif optiquement.



Chiralité cristalline Certaines substances, sous phase amorphe, ne présentent pas d'activité optique. Par contre, l'arrangement cristallin présente une dissymétrie (que l'on peut révéler par diffraction des rayons X, Cf. TD Diffraction (2)). Exemple : le quartz. Attention, le quartz est aussi biréfringent, phénomène en général beaucoup plus marqué que le pouvoir rotatoire. Il convient donc d'utiliser des lames taillées perpendiculairement à l'axe optique pour étudier la polarisation rotatoire seule.

Biréfringence circulaire Le pouvoir rotatoire d'une lame peut en fait être interprété comme une *biréfringence circulaire* du milieu optiquement actif. Dans le cas des lames parallèles vues précédemment, la biréfringence Δn est la différence des indices correspondants à deux polarisations rectilignes orthogonales de l'onde incidente. Si on suppose maintenant que le milieu est tel qu'une onde polarisée circulaire gauche «voit» un indice n_g alors qu'une onde polarisée circulaire droite «voit» un indice n_d ,

4. L'acide tartrique et son activité optique furent étudiés par Pasteur au début de sa carrière (1849). Il mit en évidence l'existence de propriétés physiques différentes pour des composés de même formule brute. Cela déboucha sur la notion de chiralité et d'isomères.

calculons l'état de polarisation d'une onde polarisée rectilignement en entrée du milieu. On note $\Delta n = n_g - n_d$ la biréfringence circulaire de ce milieu.

En entrée du milieu, l'état de polarisation s'écrit

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi} \mathbf{u}_+ + e^{+i\varphi} \mathbf{u}_- \right) = \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \varphi \mathbf{u}_y.$$

Il s'agit de l'onde polarisée rectilignement dont la direction de polarisation fait avec l'axe (Ox) l'angle φ . En sortie de la lame, l'état de polarisation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi} e^{i2\pi \frac{n_g e}{\lambda}} \mathbf{u}_+ + e^{+i\varphi} e^{i2\pi \frac{n_d e}{\lambda}} \mathbf{u}_- \right) \\ &= e^{i2\pi \frac{(n_g + n_d)e}{2\lambda}} \left(\cos(\varphi - \varphi_r) \mathbf{u}_x + \sin(\varphi - \varphi_r) \mathbf{u}_y \right), \end{aligned}$$

où $\varphi_r = 2\pi \frac{\Delta n e}{\lambda}$. La polarisation en sortie du milieu est donc toujours rectiligne, tournée d'un angle φ_r indépendant de l'état de polarisation incident mais proportionnel à l'épaisseur du milieu traversée. On retrouve bien ici le comportement d'un milieu optiquement actif.

- Certaines substances optiquement inactives acquièrent une activité optique sous l'action d'un champ magnétique \mathbf{B} parallèle au faisceau lumineux. On appelle cet effet *effet Faraday*.

On peut montrer que l'angle de rotation θ est, pour un champ \mathbf{B} et une longueur l de matériau,

$$\theta = V B_z l,$$

où V est la constante de Verdet, caractéristique du matériau, et qui dépend de λ a priori, et où $B_z = \mathbf{B} \cdot \mathbf{k}/k$ est la projection du champ magnétique sur la direction de propagation de l'onde.

Ordre de grandeur : Flint, à $\lambda = 589 \text{ nm}$, $V = 700^\circ \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pour mettre en évidence cet effet, on peut suivre le protocole suivant :

TP Polarisation II.

On place un cristal de Flint dans l'entrefer d'un électro-aimant. Un faisceau lumineux monochromatique traverse successivement un polariseur, le cristal entre les pièces polaires perforées et un analyseur A. L'analyseur A permet de mesurer la déviation angulaire du plan de polarisation après avoir traversé le Flint, en fonction de l'intensité du champ magnétique.

3. Il est ici important de constater que l'angle θ dont tourne la polarisation dépend du signe du champ magnétique. Contrairement à un milieu optiquement actif, l'effet sur la polarisation de l'onde est donc différent si l'onde se propage selon les z croissants ou les z décroissants. En fait, la polarisation tourne toujours d'un angle θ_0 autour de l'axe orienté dans le sens de \mathbf{B} (voir FIG. 4.1). Autrement dit, si la polarisation tourne de $\theta_+ = \theta_0$ autour de l'axe (Oz) orienté dans le sens de $\mathbf{B} = +B\mathbf{e}_z$ quand l'onde se propage selon les z croissants, elle tourne de $\theta_- = +\theta_0$ autour de l'axe (Oz) orienté dans le sens de $\mathbf{B} = +B\mathbf{e}_z$ quand l'onde se propage selon les z décroissants, mais donc de $-\theta_0$ autour de l'axe (Oz) orienté dans le sens de $\mathbf{k} = -k\mathbf{e}_z$.

Si une onde se propage à travers un milieu de Faraday, et voit sa polarisation tourner de θ_+ , après réflexion sur un miroir et passage en retour à travers le milieu de Faraday, sa polarisation aura donc tourné, par rapport à la polarisation initiale, de $\theta = \theta_+ + \theta_- = 2\theta_+$. En choisissant B tel que $\theta_+ = \pi/4$, la polarisation de l'onde après réflexion est alors orthogonale à la polarisation incidente. Un polariseur en entrée du milieu de Faraday permet de l'absorber. On constitue ce qu'on appelle un *isolateur de Faraday*.

Dans le cas d'un milieu optiquement actif, on aurait eu $\theta_- = -\theta_+$. Dans ce cas en effet, la polarisation tourne d'un angle θ_0 autour de l'axe (Oz) orienté dans le sens de \mathbf{k} . On a donc $\theta = 0$: la polarisation après réflexion est la même que la polarisation incidente. C'est le résultat auquel on s'attend par symétrie par renversement du temps : on ne doit pas voir de différence selon que le temps se propage dans un sens ou dans un autre (*i.e.* que la lumière se propage vers les z croissants ou les z décroissants). Si cette symétrie est brisée dans le cas de l'effet Faraday, le coupable est à chercher du côté du champ magnétique. Ce dernier est en effet antisymétrique par renversement du temps ! Pour préserver la symétrie, et donc retrouver la même polarisation après réflexion qu'en entrée, il faudrait donc changer le signe de \mathbf{B} .

4. On considère le montage polariseur-analyseur croisés. On intercale une lame faite d'un milieu optiquement actif. On considère une composante spectrale donnée λ . On se place dans la base associée au polariseur.

À la traversée des différents éléments, le champ \mathbf{E} s'écrit

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\text{Polariseur}} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lame}} E_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

avec $\varphi = \alpha \frac{e}{\lambda^2}$ où e est l'épaisseur de la lame et α une constante. On projette ensuite

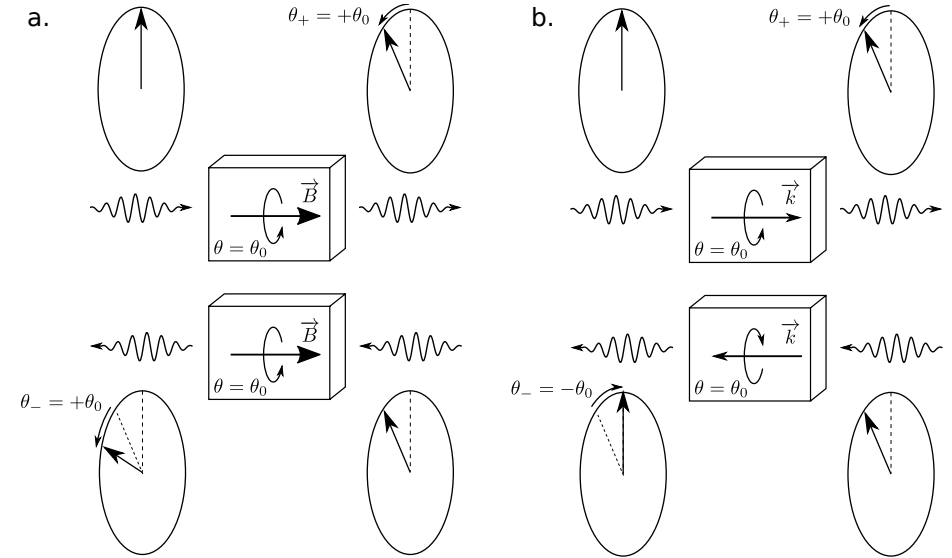


FIGURE 4.1 – Rotation de la polarisation en fonction du sens de propagation dans un milieu présentant un pouvoir rotatoire ou de l'effet Faraday. **a.** Effet Faraday : la direction dans laquelle tourne la polarisation est fixée par le champ magnétique \mathbf{B} . Que la lumière se propage vers la gauche ou la droite, la polarisation tourne toujours dans le même sens dans un plan fixe. Après un aller-retour, la polarisation a tournée de $2\theta_0$. **b.** Pouvoir rotatoire : la direction dans laquelle tourne la polarisation est fixée par le vecteur d'onde \mathbf{k} . Le signe de l'angle de rotation change donc quand la direction de propagation change. Après un aller-retour, la polarisation n'a pas tourné.

sur la direction de l'analyseur pour obtenir l'amplitude $E = E_0 \sin \varphi$, et l'intensité

$$I = I_0 \sin^2 \left(\alpha \frac{e}{\lambda^2} \right).$$

De même que dans le cas d'une lame biréfringente, si la lame est mince, on observe une teinte colorée, et si la lame est épaisse, du blanc d'ordre supérieur.

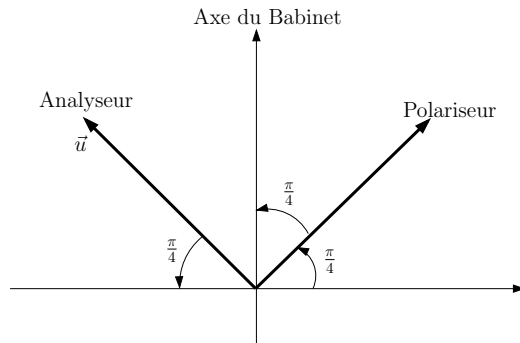
5. — Isolateur optique (basé sur l'effet Faraday)
— Dosage des sucres (Cf. Chimie)
— Étude des molécules chirales

EXERCICE V COMPENSATEUR DE BABINET

1. Le compensateur de Babinet étant constitué de deux lames biréfringentes dont l'épaisseur dépend de la côte x du rayon incident, il induit une modification de la polarisation de l'onde incidente, sauf si celle-ci est polarisée le long des axes neutres des lames du compensateur. Cela implique, en particulier, que les axes neutres des deux lames du compensateur soient alignés !

Pour aligner correctement le compensateur avec les polariseurs et analyseurs, il faut repérer les directions des axes neutres du compensateur. On suit la procédure suivante :

- 1.1 On commence par croiser polariseur et analyseur. En tout point de l'écran, il y a extinction totale ;
- 1.2 On place le Babinet entre le polariseur et l'analyseur. A priori, l'extinction complète n'est plus réalisée : la polarisation de l'onde a été modifiée par le compensateur d'une façon qui dépend de la côte x . On modifie alors l'orientation globale du compensateur ainsi que l'orientation relative des deux lames du Babinet jusqu'à ce que l'extinction totale soit rétablie. Les axes neutres du compensateur de Babinet sont alors alignés avec les axes du polariseur et de l'analyseur ;
- 1.3 On tourne enfin le compensateur de Babinet, à partir de cette position, de 45° .
2. Une fois le compensateur de Babinet correctement aligné avec les polariseur et analyseur, la situation suivante est réalisée.



On note e_1 et e_2 l'épaisseur de la première et de la seconde lame, respectivement, traversées par un rayon lumineux. Après la traversée du Babinet ⁵

5. Cf. TP Polarisation II, Bruhat d'Optique p.432 et Sextant

- E_x est déphasé de $\frac{2\pi}{\lambda} (n_1 e_1 + n_2 e_2)$,
- E_y est déphasé de $\frac{2\pi}{\lambda} (n_2 e_1 + n_1 e_2)$.

Les longueurs e_1 et e_2 sont données par

$$e_1 = \tan \theta \left(\frac{h}{2} - x \right) \approx \theta \left(\frac{h}{2} - x \right),$$

$$e_2 \approx \theta \left(\frac{h}{2} + x - \Delta \right).$$

À la traversée du compensateur, E_y est donc déphasé par rapport à E_x de

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} [(n_2 - n_1)e_1 + (n_1 - n_2)e_2], \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[(n_2 - n_1) \theta \left(\frac{h}{2} - x \right) - (n_2 - n_1) \theta \left(\frac{h}{2} + x - \Delta \right) \right], \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \theta \Delta n (\Delta - 2x), \end{aligned}$$

avec $\Delta n = n_2 - n_1$. Après le Babinet, le champ électrique s'écrit

$$\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Babinet}} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \theta \Delta n (\Delta - 2x)} \end{pmatrix}.$$

La différence de marche correspondante est

$$\delta(x) = \theta \Delta n (\Delta - 2x).$$

3. La différence de marche entre les deux polarisations de l'onde incidente est linéaire en la position x du rayon incident. Ce résultat est l'exact analogue de ce que nous avons obtenu pour l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air. Dans ce cas, la différence de marche entre les deux bras du Michelson est donnée par

$$\delta(x) = 2\alpha x,$$

où α est l'angle du coin d'air. Les résultats que nous avons obtenus pour le coin d'air du Michelson sont donc exactement transposables au compensateur de Babinet. En particulier, les franges d'interférence sont localisées au niveau du compensateur de Babinet, qu'il faut éclairer en lumière parallèle. Il faut faire l'image du compensateur sur l'écran pour obtenir des franges bien contrastées.

Dans le cas du compensateur de Babinet, les rôles des deux bras du Michelson sont joués par les deux polarisations possibles de l'onde incidente. Pour observer des interférences, il faut recombinaison des chemins. Dans le cas du Michelson, la séparatrice permet de recombinaison des rayons lumineux : elle dévie les rayons dans une direction commune. Ici, ce rôle est joué par l'analyseur : il permet de projeter les deux polarisations sur une composante commune.

Notons qu'on comprend alors bien pourquoi on a choisi un angle de 45° entre les polariseur-analyseur et les axes neutres du compensateur : cela permet d'avoir la même intensité lumineuse dans les deux chemins que l'on fait interférer. C'est la situation qui permet de maximiser le contraste des interférences.

4. À l'entrée du Babinet, on a $E_{0x} = E_{0y} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ dans la base associée au Babinet, soit en sortie

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Babinet}} \mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix}.$$

En sortie de l'analyseur, on projette le champ sur la direction $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En d'autres termes, on fait subir au champ la transformation $\mathbf{E} \mapsto (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Analyseur}} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e^{i\Delta\varphi}}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{u}, \\ &= \frac{E_0}{2} \underbrace{\left(-1 + e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \theta \Delta n (\Delta - 2x)} \right)}_{-2i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\theta \Delta n}{2} (\Delta - 2x)\right)} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Finalement, l'intensité sur l'écran s'écrit donc

$$I = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta n \theta (\Delta - 2x) \right).$$

On obtient bien une figure d'interférences similaire à celle du coin d'air du Michelson. En lumière monochromatique, on observe un système de franges sombres et brillantes, d'interfrange $i = \frac{\lambda}{2\theta \Delta n}$. En $x = -\Delta/2$, on a une frange sombre. En chariotant le prisme, on change Δ et l'on déplace donc la figure d'interférence.

En lumière blanche, chaque composante spectrale ayant son propre système de franges, qui s'additionnent en intensité, on a un brouillage des franges d'interférence.

Plus précisément, au centre de la figure, comme dans le cas du Michelson, on a une frange centrale sombre, localisée en $x_0 = -\Delta/2$. Dans ce cas en effet, la différence de marche est nulle et le déphasage est indépendant de la longueur d'onde. Autour de cette frange achromatique, on observe des irisations puis du blanc d'ordre supérieur.

5. On suppose que le compensateur est éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ . On repère initialement une frange sombre. On déplace alors le prisme de Δ_0 jusqu'à ce qu'on ait observé N franges sombres défilé devant notre repère. La différence de marche induite par le déplacement de Δ_0 est alors de $N\lambda$, le déphasage induit est de $2N\pi$. On peut ainsi écrire

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \theta \Delta_0 = 2N\pi,$$

soit

$$N = \frac{\Delta n \theta \Delta_0}{\lambda}.$$

Cette mesure permet de calibrer le compensateur de Babinet : la différence de marche induite par un déplacement de Δx du prisme est

$$\delta = \alpha \Delta x \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{N\lambda}{\Delta_0}.$$

Le constructeur donne en général une valeur indicative de α , qu'il est bon de ré-étalonner.

- 6.1 On introduit une lame biréfringente (de biréfringence $\Delta n'$ et d'épaisseur e') avant le Babinet, dont les axes neutres sont alignés avec ceux du compensateur. On introduit une différence de marche supplémentaire entre E_y et E_x de $\Delta n' e'$. L'intensité de la figure sur l'écran s'écrit alors

$$I = I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\theta \Delta n (\Delta - 2x) + e' \Delta n') \right] \right\}.$$

On obtient alors un décalage du système de franges de

$$\delta x = \frac{e' \Delta n'}{2\Delta n \theta}.$$

On éclaire en lumière blanche car il est facile de repérer la frange achromatique et donc de mesurer le décalage du système de frange. En lumière monochromatique, on verrait une figure globalement décalée, sans pouvoir donner le nombre de franges dont elle s'est décalée.

6.2 Facteurs limitant la précision :

- incertitude sur le chariotage Δ_0 (lecture de la vis micrométrique),
- incertitude sur l'étalonnage, *i.e.* la mesure de $\Delta n\theta$, elle-même due à une imprécision sur la mesure du Δ_0 correspondant au défilement de N franges (le lieu exact des franges sombres ou brillantes est difficile à repérer avec précision),
- les ondes doivent être en incidence normale sur le Babinet. On peut avoir un facteur géométrique supplémentaire si on a un léger angle qui modifie l'épaisseur effective des prismes.

6.3 On chariote de Δ' pour faire revenir la frange achromatique à sa position initiale. On rajoute une différence de marche δ' qui compense le déphasage introduit

$$\delta' = \alpha\Delta' = -e'\Delta n',$$

d'où

$$\Delta n' = -\alpha \frac{\Delta'}{e'}.$$

Pour pouvoir déterminer le signe de $\Delta n'$, il faut connaître le signe de $\theta\Delta n$, *i.e.* savoir si Ox est l'axe rapide ou l'axe lent du premier prisme. Il faut que le fournisseur du Babinet donne cette information, sinon, on ne peut pas conclure.

6.4 Dans cette méthode, on repère la frange achromatique. Elle est bien adaptée aux lames minces. Dans le cas des lames épaisses, le décalage de la frange achromatique est trop important pour être visible, et on n'observe plus que du blanc d'ordre supérieur.

7. Une méthode adaptée aux lames épaisses consiste à mesurer la période (en longueur d'onde) du spectre cannelé du blanc d'ordre supérieur. En faisant l'hypothèse que Δn varie peu sur l'intervalle de longueur d'onde considéré, on obtient alors une valeur moyenne de Δn .

EXERCICE VI EXPÉRIENCE DE FRESNEL-ARAGO

1. Pour la source secondaire 1, le champ électrique juste avant P_s est

$$\mathbf{E}_1^0 e^{i\varphi_1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

et pour la source 2

$$\mathbf{E}_2^0 e^{i\varphi_2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

L'amplitude du champ en M , en l'absence de P_s , est alors

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_1^0 e^{i\varphi_1} + \mathbf{E}_2^0 e^{i\varphi_2}.$$

que l'on peut récrire, à une phase globale près,

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_1^0 + \mathbf{E}_2^0 e^{i\Delta\varphi},$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

2. On a $I \propto \|\mathbf{E}\|^2$, soit pour $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_1(M) + \mathbf{E}_2(M)$,

$$I(M) \propto \|\mathbf{E}_1(M)\|^2 + \|\mathbf{E}_2(M)\|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{E}_1(M) \cdot \mathbf{E}_2(M)^*).$$

Si on se place dans le cas où P_s est absent,

$$I(M) \propto \|\mathbf{E}_1^0\|^2 + \|\mathbf{E}_2^0\|^2 + 2\mathbf{E}_1^0 \cdot \mathbf{E}_2^0 \cos(\Delta\varphi).$$

De plus, par symétrie $\|\mathbf{E}_1^0\| = \|\mathbf{E}_2^0\| = E_0$, donc en introduisant l'intensité $I_0 \propto E_0^2$,

$$I(M) = I_0 \left[1 + \mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{u}_2^0 \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right],$$

où $\mathbf{u}_i^0 = \mathbf{E}_i^0/E_0$ est le vecteur polarisation du champ \mathbf{E}_i . Ici, le contraste des interférences est donné par

$$C = \mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{u}_2^0.$$

Deux polarisations orthogonales n'interfèrent donc pas entre elles : $C = 0$.

Si l'on ajoute le polariseur P_s devant l'écran, en notant \mathbf{u}_s le vecteur unitaire qui repère sa direction de transmission, on a sur l'écran

$$I(M) = I_0 \left[(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_1^0)^2 + (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_2^0)^2 + 2(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_1^0)(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_2^0) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right].$$

Ici, le contraste des interférences est donné par

$$C = \frac{2(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_1^0)(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_2^0)}{(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_1^0)^2 + (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_2^0)^2}.$$

Même si $\mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{u}_2^0 = 0$, il suffit de trouver une direction \mathbf{u}_s sur laquelle \mathbf{u}_1^0 et \mathbf{u}_2^0 ont une projection non nulle pour retrouver des interférences ($C \neq 0$). Si $|\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_1^0| = |\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_2^0|$, le contraste est maximal ($C = 1$).

3.

Cas	\mathbf{u}_0	\mathbf{u}_1^0	\mathbf{u}_2^0	$\mathbf{u}_1(M)$	$\mathbf{u}_2(M)$	Interf. ?
1	Non polarisé	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	oui, $C = 1$
2	Non polarisé	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	non, $C = 0$
3	Non polarisé	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{e^{i\varphi_1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{e^{i\varphi_2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	oui, $C = 1$
4	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\pm e^{i\varphi_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	oui, $C = 1$