## Mécanique quantique

# TD 6: Oscillateur harmonique quantique

#### **Définitions**

- Donner des exemples physiques faisant intervenir le modèle d'oscillateur harmonique.
- 2. Rappeler l'énergie classique d'un oscillateur harmonique de masse m en fonction de sa pulsation propre ω. En déduire l'expression du hamiltonien quantique à une dimension.
- 3. On définit les opérateurs  $\tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$  et  $\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}P$ . Montrer que le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (\tilde{X}^2 + \tilde{P}^2). \tag{1}$$

4. Sachant que  $[X, P] = i\hbar$ , calculer le commutateur  $[\tilde{X}, \tilde{P}]$ .

#### Opérateurs annihilation et création

On définit les opérateurs

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P})$$
 et  $a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P})$  (2)

appelés respectivement opérateur annihilation et opérateur création.

- Calculer le commutateur [a, a<sup>†</sup>].
- Écrire le hamiltonien H en fonction de ces opérateurs a et a<sup>†</sup>.
- 7. On définit un dernier opérateur  $N = a^{\dagger}a$  appelé opérateur nombre. Calculer les commutateurs [N, a] et  $[N,a^{\dagger}].$

Trouver le spectre du hamiltonien revient à trouver celui de l'opérateur N. On se concentre dans la suite sur ce problème.

#### Spectre de N

Soit  $\lambda$  une valeur propre de N, de vecteur propre associé  $|\phi\rangle$ .

- Écrire la valeur propre λ sous la forme de la norme d'un vecteur, et en déduire son signe.
- 9. En utilisant les commutateurs précédents, montrer que  $a|\phi\rangle$  et  $a^{\dagger}|\phi\rangle$  sont aussi des vecteurs propres de N si  $\lambda \neq 0$ . Donner leur valeur propre respective. Préciser le cas  $\lambda = 0$ .
- 10. En déduire que les valeurs propres de N sont des entiers positifs. Justifier les noms des trois opérateurs  $a, a^{\dagger}$  et N.

### Vecteurs propres de l'hamiltonien

Vus les résultats précédents, on note  $n \in \mathbb{N}$  les valeurs propres de N dont on peut montrer par récurrence qu'elles sont non-dégénérées. Dans cette partie, on cherche les états propres  $|\phi_n\rangle$  associés.

- 11. Calculer la fonction propre  $\phi_0(x)$  associée à  $\lambda = 0$ . On pourra utiliser les résultats de la partie précédente.
- 12. Montrer par récurrence que les états peuvent s'écrire

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^{\dagger}\right)^n |\phi_0\rangle \tag{3}$$

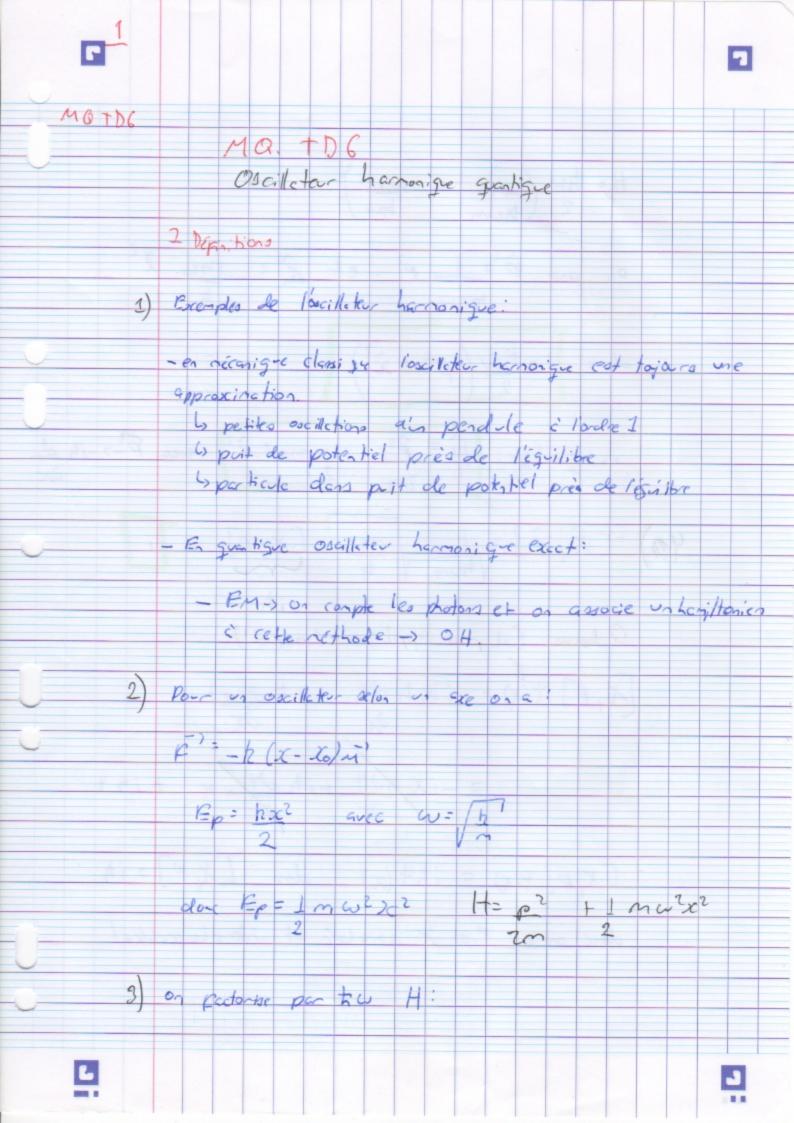
# États cohérents - sperposition des étas propes

Les états propres  $|\phi_n\rangle$  sont des états purement quantiques, dans lesquels se trouvent un nombre déterminé d'excitations élémentaires (de quanta d'énergie). À l'inverse, on peut justifier que les états les plus fidèle à la mécanique classique sont les états propres de l'opérateur a. Ces états sont appelés états cohérents.

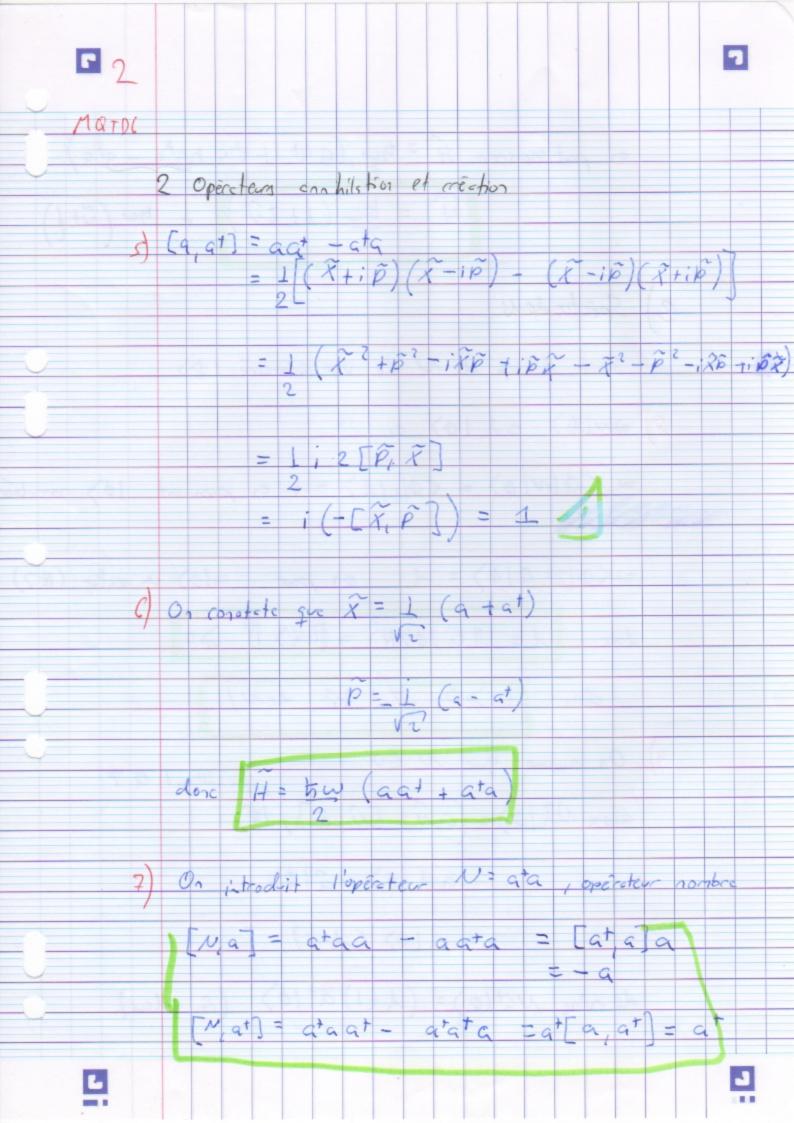
- 13. Chercher un état cohérent  $|\alpha\rangle$  de valeur propre  $\alpha$  sous la forme d'une superposition d'états propres de
- 14. Calculer les valeurs moyennes  $\langle X \rangle_{\alpha}$ ,  $\langle P \rangle_{\alpha}$ , ainsi que  $\langle H \rangle_{\alpha}$  l'énergie moyenne d'un tel état en fonction de  $\hbar\omega$  et  $\alpha$ .
- 15. On montre que  $\langle H^2 \rangle_{\alpha} = \hbar^2 \omega^2 (|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + 1/4)$ . En déduire l'étalement en énergie  $\Delta H_{\alpha}$  de l'état cohérent. L'état a-t-il une énergie bien déterminée ?
- 16. Donner l'évolution temporelle de l'état  $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ . Montrer que celui-ci est toujours vecteur propre de a. Que remarque-t-on?

#### Cas d'un oscillateur dans un champ électrique homogène

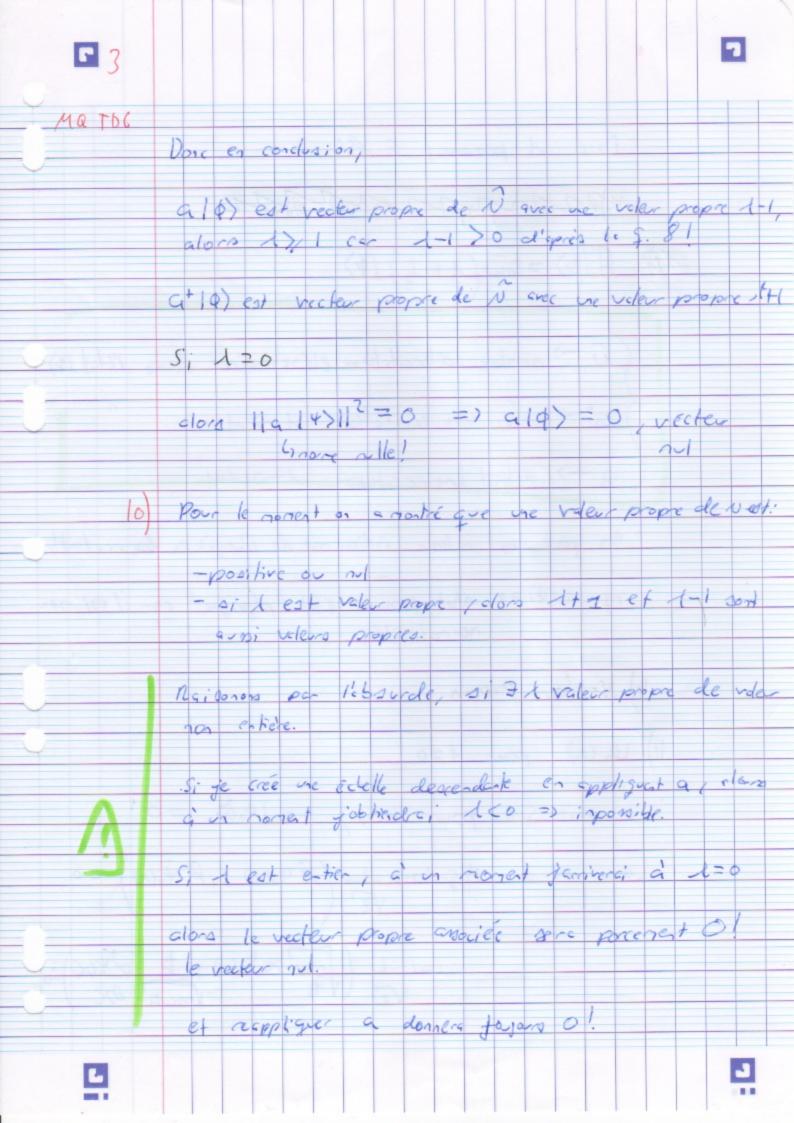
- Identifier une situation physique où une particule subit à la fois un potentiel harmonique, et un champ électrique.
- 18. Écrire l'énergie classique associée à la particule en fonction du champ  $\mathscr E$  constant selon l'axe Ox de l'oscillateur. En déduire le hamiltonien quantique H du problème.
- 19. Expliciter l'équation aux valeurs propres que vérifie une fonction propre  $\psi$ .
- 20. Montrer que le problème se ramène à celui d'un oscillateur harmonique, et donner l'expression des énergies propres du problème.



H= hy (pt + nouse) on poor pi= \_ pi et ? = ma 2° alon Hothu (pr + xx) en grahign: Hi = p2 + 1 mare x2 quec P2 > -its d 40) [X, P] = 1 my [X, P] = 1 Q bonus (il part ioppliquer due pol!) [X, P] Y(x) = - ; x th 24 + ; th 2/(x) = -ix x y + it, 24/.20 + it 4 (x,p] +(x) = i+ 4(x) don [x,p] = i+ donc on a Pet X namelione et intra lageables!



or part expirer H = true (a at + xta + ata - ata) 4 = bw (1+20) = bu (5+1) 3) Spéctre de N Soit I Up de V de vp associé 10> 8) =) N(\$) = (10) si => < Q[N] Q) = < Q[ 10 ) = 1 en prement 10 ) nomelisée => < 0 | at a (0) = 1 on pose a (0) in vector (12) dac 1= 11 a 10 x 112 = (14) 11 >0 clare 1 >0 to to dev! 9) On suppose que 10 €0 wer Hilipent Q.7. aloro Na 10) = (an+ [n , a] 19) = a 1/0) - a 10) = a187 (1-1) de nere Natle) = (1+1) at 10) (à cala)



Dorc 1 parener & W F10) = 50 (1+ 1/2) (4) 10 -> nombre descritations élémentaires dans l'état (4) at o cree une excitation 1 -> 1+1 a -> dépuit ne excitation 1-1 On pert pas referer indigneral de l'agric en les contant! rg. a 14) = 0 nest per on the "physique" car il est son noralisable 4) Vectors propres 11) Wo (x) pour (=0 or sait que pour (600) altour =0 donc on a l'égodion: 1 (x 4000) +ip 4000) =0 (2) 1 (mw )c (000) + th 2400 30

