Rétroaction et oscillations

Nathan Vaudry

Décembre 2019

Contents

1 Introduction

La conception d'un système physique destiné à délivrer une grandeur de sortie (tension, vitesse. . .) en fonction d'une grandeur d'entrée doit tenir compte des conditions extérieures. Exemple d'un forêt sans et avec asservissement. Cet

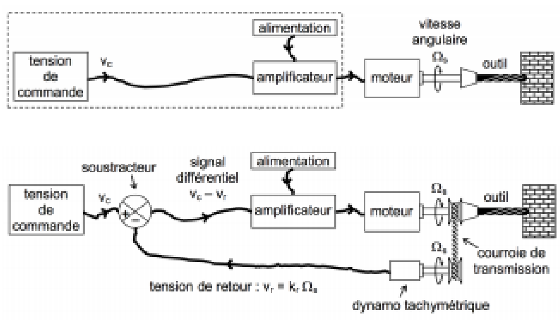

Figure 1: Perceuse non régulée et perceuse régulée

exemple permet d'introduire la boucle de rétroaction et de la notion de système bouclé.

2 Rétroaction d'un système

2.1 Présentation

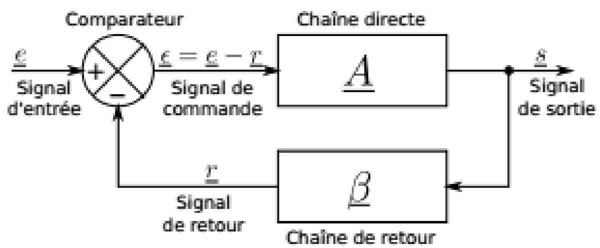

Figure 2: Système bouclé général

Exemple de l'amplificateur non-inverseur, qui suit juste après.

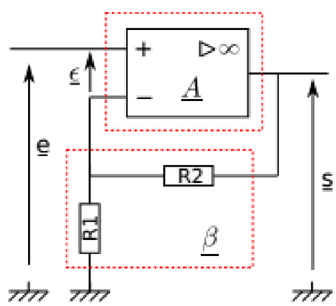

Figure 3: Amplificateur non inverseur

Le système considéré comprend une chaîne directe de fonction de transfert $\underline{A}(j\omega)$ ici égale à $\frac{A_0}{1+j\omega\tau}$ avec $A_0 = 2.10^5$ et $\tau = 5.10^{-2}$s reliant l'entrée à la sortie et une chaîne de rétroaction (ou chaîne de retour) qui permet de contrôler la valeur de sortie obtenue à celle initialement prévue (la fonction de transfert est notée $\underline{\beta}(j\omega)$). Pour effectuer la rétroaction on place un comparateur au niveau de l'entrée.
Le schéma bloc indique

$$\underline{s}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{\epsilon}(j\omega)$$
$$\underline{\epsilon}(j\omega) = \underline{e}(j\omega) - \underline{\beta}(j\omega)\underline{s}(j\omega)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée

$$\underline{H_{BF}}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)}$$

Maintenant déterminons $\underline{\beta}(j\omega)$ à l'aide de la formule du pont diviseur de tension. On obtient $\underline{\beta}(j\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2} = \beta$ (valeurs numériques avec $R_1 = 1k\Omega$ et $R_2 = 2,03k\Omega$. Dorénavant nous considérerons la fonction de transfert $\underline{H_{BF}}(j\omega)$ plus particulièrement ses différents comportements.

2.2 Caractéristiques

On peut souhaiter d'un système bouclé qu'il soit :
-immunisé aux perturbations (introduction d'une perturbation $\underline{u}(j\omega)$ après $\underline{A}(j\omega)$ mais l'on constate que cette perturbation est fortement atténuée à cause du terme $1 + \underline{A}(j\omega)\beta$
-rapide (il atteindra la valeur de commande au bout d'un temps très court) pour cela

$$\underline{H_{BF}}(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)\beta} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau_c}$$

avec $H_0 = \frac{A_0}{1+A_0\beta}$ et $\tau_c = \frac{\tau}{1+A_0\beta}$ Application numérique pour τ_c de l'ordre de 10^{-7} s ! Système plus rapide et donc bande passante plus grande car filtre passe-bas. De plus l'on constate que

$$H_0/\tau_c = A_0/\tau = cte \tag{1}$$

Le produit gain-bande est conservé : plus le gain du système bouclé augmente moins l'amplification s'effectue sur une grande gamme de fréquences ;
-stable (entrée bornée implique sortie bornée) pour cela passage en temporel et obtention de

$$\tau_c \frac{ds}{dt} + s(t) = H_0 e(t)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qui donne $s(t) = s_0 exp(-\frac{t}{\tau_c}) + s_p(t)$. Le terme $s_p(t)$ est le terme correspondnt au régime permanent. Il est donc de la même forme que $e(t)$. Le terme d'intérêt est ainsi le terme exponentiel.

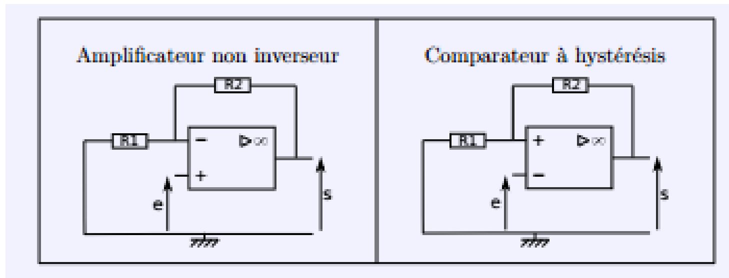

Figure 4: Rétroaction négative contre rétroaction positive

Si $\tau_c > 0$ alors le système est stable. Mais il existe des systèmes effectuant rétroaction sur borne + de l'AO (comparateur à hystérésis) et alors nous obtenons $\tau_c = \frac{\tau}{1-A_0\beta} < 0$. Dans ce cas le système instable. Finalement rétroaction positive implique système instable, rétroaction négative implique système stable.
Nous avons étudié jusqu'ici des systèmes qui étaient stables, ils atteignent une valeur d'équilibre qui leur convient. Néanmoins il existe des systèmes dont on souhaite qu'ils ne soient pas à l'équilibre. C'est le cas des oscillateurs.

3 Oscillateurs quasi-sinusoïdaux

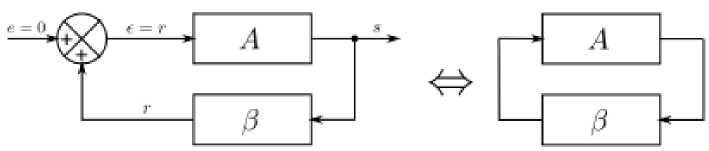

Figure 5: Présentation d'un oscillateur

Oscillateur constitué d'un amplificateur et d'un filtre passe-bande.

3.1 Présentation

L'oscillateur que nous allons considérer est l'oscillateur à Pont de Wien. La chaîne directe est composée d'un amplificateur opérationnel (AO) montée en non-inverseur et la chaîne de retour d'un filtre linéaire composé de résistances et de condensateurs. Le schéma bloc se lit

$$\begin{aligned} \underline{s}(j\omega) &= \underline{A}(j\omega)\underline{r}(j\omega) \\ \underline{r}(j\omega) &= \underline{\beta}(j\omega)\underline{s}(j\omega) \\ \longrightarrow \underline{s}(j\omega)(1 - \underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)) &= 0 \end{aligned}$$

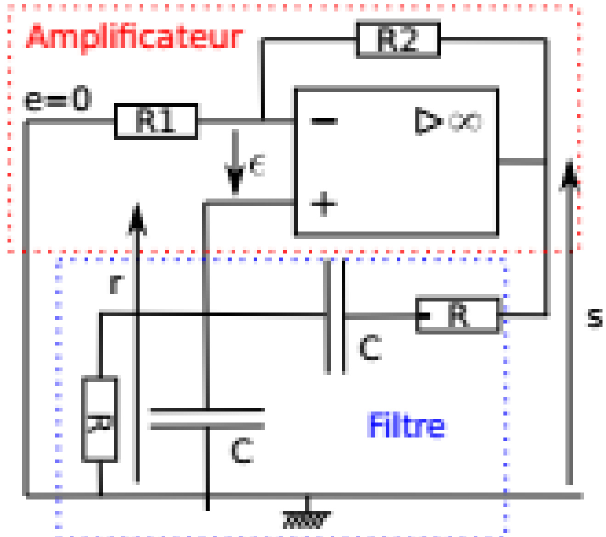

Figure 6: oscillateur à pont de Wien

On voit apparaître un critère pour l'obtention des oscillations : il doit exister ω tel que $1-\underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)$=0. Cette condition s'appelle la condition de Barkhausen. Petite intuition avec la stabilité du système AO non-inverseur avec $\tau_c = \frac{\tau}{(1+A_0\beta)}$ mais cette fois-ci nous avions instabilité si $-1 = A_0\beta$ La fonction de transfert de l'AO non-inverseur est $\underline{A}(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A > 1$ (amplification) et pour la chaîne de retour nous avons une résistance et un condensateur en parallèle puis ces deux derniers composants en série. Ce qui donne $\underline{\beta}(j\omega) = \frac{Z_{R//C}}{Z_{R//C}+Z_{RC}}$ (formule du pont diviseur de tension). Soit

$$\underline{\beta}(j\omega) = \frac{1}{1 + Y_{R//C}Y_{RC}}$$

avec $Y_{R//C} = \frac{1}{R} + jC\omega$ et $Y_{RC} = \frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}$ Ce qui donne

$$\underline{\beta}(j\omega) = \frac{H_1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \tag{2}$$

avec $Q = H_1 = \frac{1}{3}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ Etude de la condition d'oscillations.

3.2 Condition d'oscillations

La condition de Barkhausen nous permet d'écrire :

$$\frac{H_1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{1}{A} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \beta$$

On obtient alors

$$\beta + jQ\beta(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) = H_1$$

On a égalité entre un nombre complexe et un nombre réel. Il faut donc que la partie réelle du complexe soit égale au réel et que la partie imaginaire du complexe soit nulle. Ainsi $\beta = H_1$ et $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ donc $\frac{R_1}{R_1+R_2} = H_1 = \frac{1}{3}$ et $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ Ainsi

$$R_2 = 2R_1 \tag{3}$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC} \tag{4}$$

En pratique ce n'est pas possible d'avoir exactement $R_2 = 2R_1$ en fonction des incertitudes sur les différents composants électroniques si bien que l'on se place toujours légèrement au-dessus (ici $R_2 = 2,03R_1$). C'est pour cela que l'on appelle ces oscillateurs des oscillateurs quasi-sinusoïdaux. L'équation différentielle suivie par s s'écrit :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0(2 - \frac{R_2}{R_1})\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \tag{5}$$

Ecriture des différents signes de $2 - \frac{R_2}{R_1}$. Finalement on se place toujours au-dessus du seuil d'oscillations à cause des incertitudes liées aux résistances.

4 Conclusion

Dans cette leçon introduction de la boucle de rétroaction d'un système et de ses différentes propriétés (stabilité et rapidité peuvent s'affronter), puis oscillateurs quasi-sinusoïdaux fonctionnant selon la condition de Barkhausen. Oscillateur à pont de Wien de $Q = \frac{1}{3}$ donc peu sélectif. Privilégier dans les montages électroniques les oscillateurs à quartz beaucoup plus sélectifs.