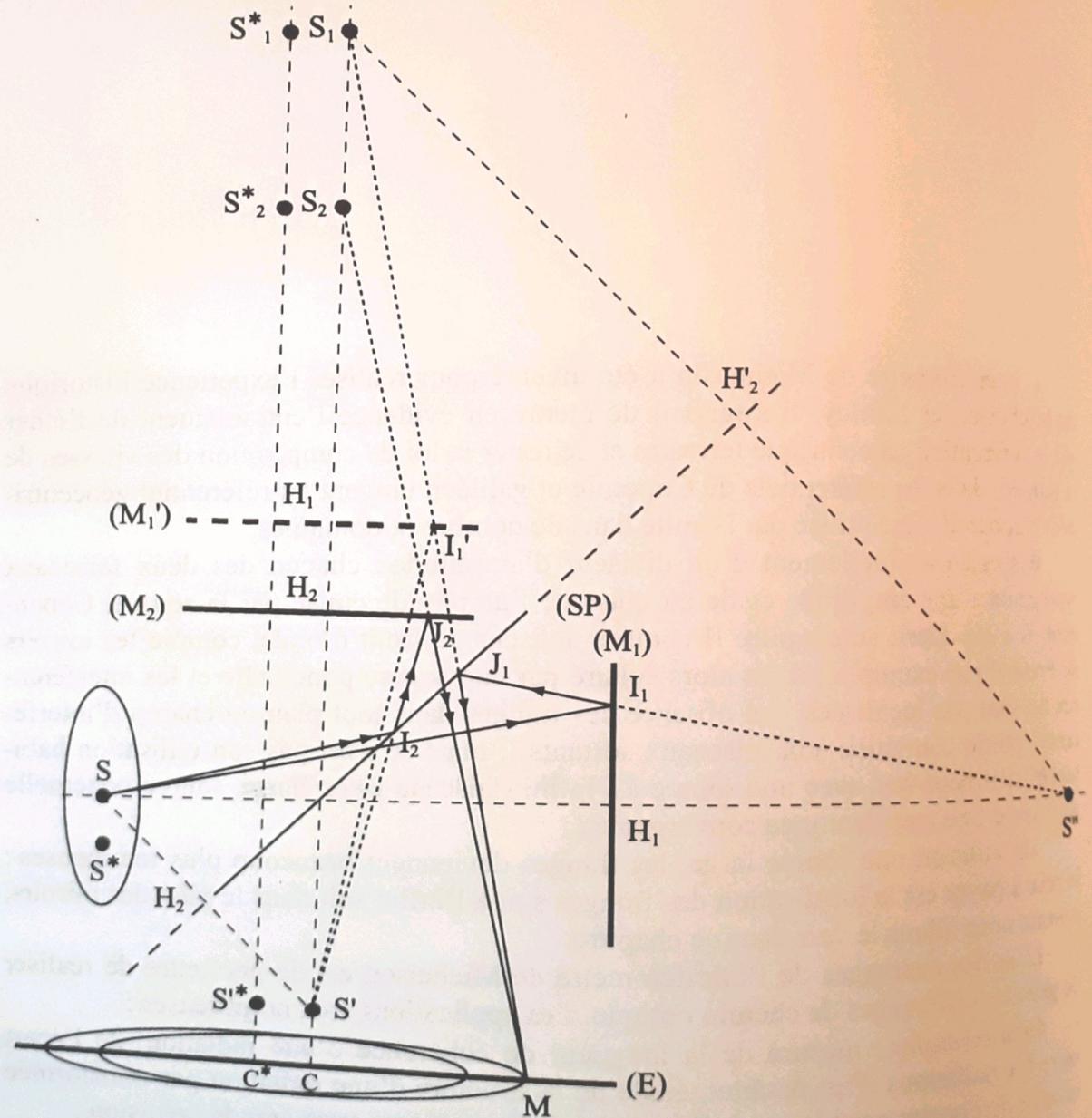


## 1. Localisation, théorème de localisation

L'interféromètre de Michelson a été décrit en II.2.2.6. Pour comprendre le phénomène de localisation, il faut étudier l'influence de l'élargissement de la source.

### 1.1 Élargissement de la source



**Figure III-1.** Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles avec source large

Par hypothèse, la source large est spatialement incohérente ; les intensités produites par chaque point source s'ajoutent au point considéré du champ d'interférence. Cha-

cun d'eux fournit deux sources secondaires ; si l'interféromètre est réglé en lame d'air à faces parallèles, le point source considéré produit son propre système d'anneaux sur l'écran (E) dans le champ d'interférence : S donne  $S_1$  et  $S_2$  et un système d'anneaux centrés en C sur l'axe  $S_1S_2$ ,  $S^*$  donne  $S_1^*$  et  $S_2^*$  et un système d'anneaux centrés en  $C^*$  sur l'axe  $S_1^*S_2^*$  (fig.III-1). Si la source n'est pas très large, la superposition des divers systèmes d'anneaux conduit à un élargissement des anneaux ; si elle est plus large, les anneaux se brouillent. Si l'on observe dans la direction de  $M_\infty$  à l'infini, le système des deux rayons parallèles  $S_1M_\infty, S_2M_\infty$  se déduit du système des deux rayons parallèles  $S_1M_\infty, S_2M_\infty$  par translation ; leurs différences de marche respectives et les intensités créées sont les mêmes, les anneaux à l'infini sont centrés dans la même direction et ont même rayon angulaire : il ne se produit aucun brouillage quelle que soit l'étendue de la source ; les anneaux sont dits *localisés à l'infini*. Il est alors facile de voir que deux rayons qui interfèrent à l'infini sont issus d'un même incident. Nous établirons que c'est une condition d'observation d'interférences avec une source étendue. L'infini optique n'étant pas l'infini mathématique, à quelques mètres seulement on peut observer des anneaux non brouillés avec une source large (lampe à vapeur de sodium : la surface est de quelques centimètres carrés) ; mais les anneaux sont plus nets si l'on observe dans le plan focal image d'une lentille mince convergente de grande focale ( $f' \approx 1 \text{ m}$ ).

Quand l'interféromètre est réglé en coin d'air, on observe des franges rectilignes. Il est plus difficile d'expliquer qualitativement la localisation de ces franges au niveau du plan des miroirs par élargissement de la source (l'arête du coin d'air étant dans le champ d'observation). Expérimentalement, on observe les franges rectilignes dans le plan conjugué du plan des miroirs par rapport à une lentille convergente d'assez courte focale.

## 1.2 Le théorème de localisation

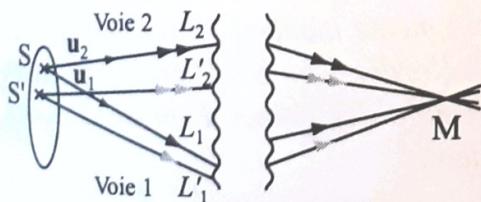


Figure III-2. Source large et système à deux voies

Soit un système optique à deux voies (fig.III-2), par exemple, l'interféromètre de Michelson ou le système des miroirs de Fresnel. La source large est supposée spatialement incohérente et est décomposable en sources quasi ponctuelles produisant en M des intensités qui s'ajoutent ; l'élargissement de la source ne produira pas de brouillage si l'intensité en M due à S ne varie pas quand S se déplace en S', donc s'il ne se produit pas de variation de chemin optique quand S donne S' ; or la variation des différences de chemin optique quand S donne S' voisin de S est :

$$\Delta\delta(M) = \delta(S', M) - \delta(S, M) = (L'_2 - L'_1) - (L_2 - L_1) = (L'_2 - L_2) - (L'_1 - L_1).$$

D'après l'expression de la différentielle du chemin optique (I.2.6.5.3), la source étant dans un milieu d'indice de réfraction uniforme  $n$ , en notant  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  les vecteurs unitaires des rayons issus de S ayant suivi les voies 1 et 2 :

$$L'_1 - L_1 = -n\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{SS}' , \quad L'_2 - L_2 = -n\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{SS}' , \quad \Delta\delta(M) = n(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{SS}' .$$

L'intensité au point d'interférence n'est pas modifiée quand S devient  $S'$  à condition que  $\Delta\delta(M) = 0$ . Ce résultat amène à distinguer deux types de systèmes :

- *Les diviseurs de front d'onde* :  $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ ; les rayons qui interfèrent en M ne sont pas issus d'un même incident (fig.III-3.a) ;  $\Delta\delta(M) = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{SS}'$ ; ceci est possible si le dispositif interférentiel possède un plan de symétrie; par exemple : miroirs de Fresnel, fentes d'Young, interféromètre de Michelson avec source ponctuelle; la source ponctuelle peut être remplacée par une fente infiniment fine perpendiculaire au plan de symétrie. Il est possible d'élargir la fente source (II.3.1) mais il se produit une diminution du contraste et un brouillage des franges. Pour ces dispositifs, rappelons que les interférences se produisent si  $\delta(M) < l = c\tau$  et qu'elles ne sont pas localisées (on observe des franges sur tout écran dans le champ d'interférence); les deux ondes qui interfèrent ont pratiquement même amplitude que l'onde incidente, sauf pour l'interféromètre de Michelson, où, après une réflexion et une transmission au niveau de la séparatrice, l'intensité est divisée par quatre pour chaque voie.

- *Les diviseurs d'amplitude* : le dispositif interférentiel possède une lame semi-transparente ou séparatrice, comme pour l'interféromètre de Michelson. Par réflexion et transmission sur la séparatrice, un train d'ondes donne deux trains d'ondes images symétriques l'un de l'autre par rapport à la séparatrice (fig.III-3.b); la surface des fronts d'onde n'est donc pas modifiée mais l'intensité est divisée par deux. Si  $\delta(M) < l = c\tau$ , ce sont les trains d'ondes images d'un train d'onde donné par rapport à la séparatrice (rencontrée deux fois) qui interfèrent en M. Un même rayon incident peut alors donner deux émergents et la condition  $\Delta\delta(M) = 0$  peut être réalisée si  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ : si les deux rayons qui interfèrent en M sont issus d'un même incident l'élargissement de la source n'altère pas les interférences, du moins à l'ordre 1 en  $\mathbf{SS}'$ . Les franges sont alors localisées sur une surface formée par l'ensemble des points d'intersection des couples de rayons émergents issus d'un même incident.

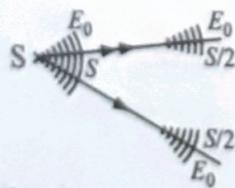
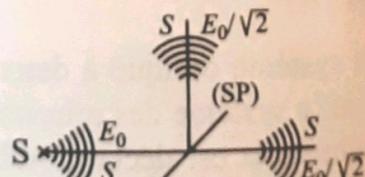


Figure III-3. a) Diviseur de front d'onde



b) Diviseur d'amplitude

Il reste à faire l'étude de l'interféromètre de Michelson avec source large, donc en tant que diviseur d'amplitude et à déterminer les surfaces de localisation ainsi que les caractéristiques des franges observées.

## 2. L'interféromètre de Michelson avec source large

### 2.1 Lame d'air, franges d'égale inclinaison, anneaux à l'infini

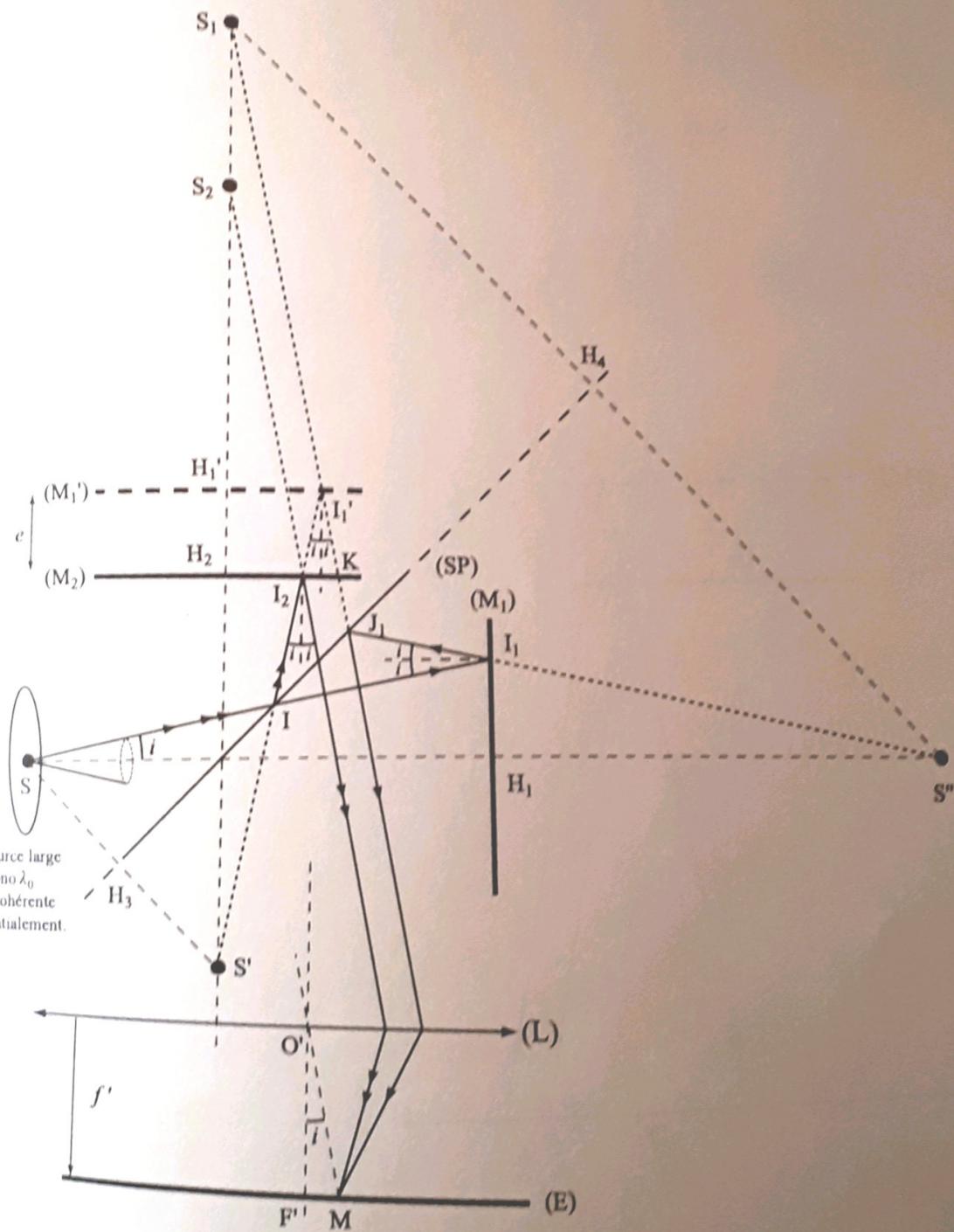
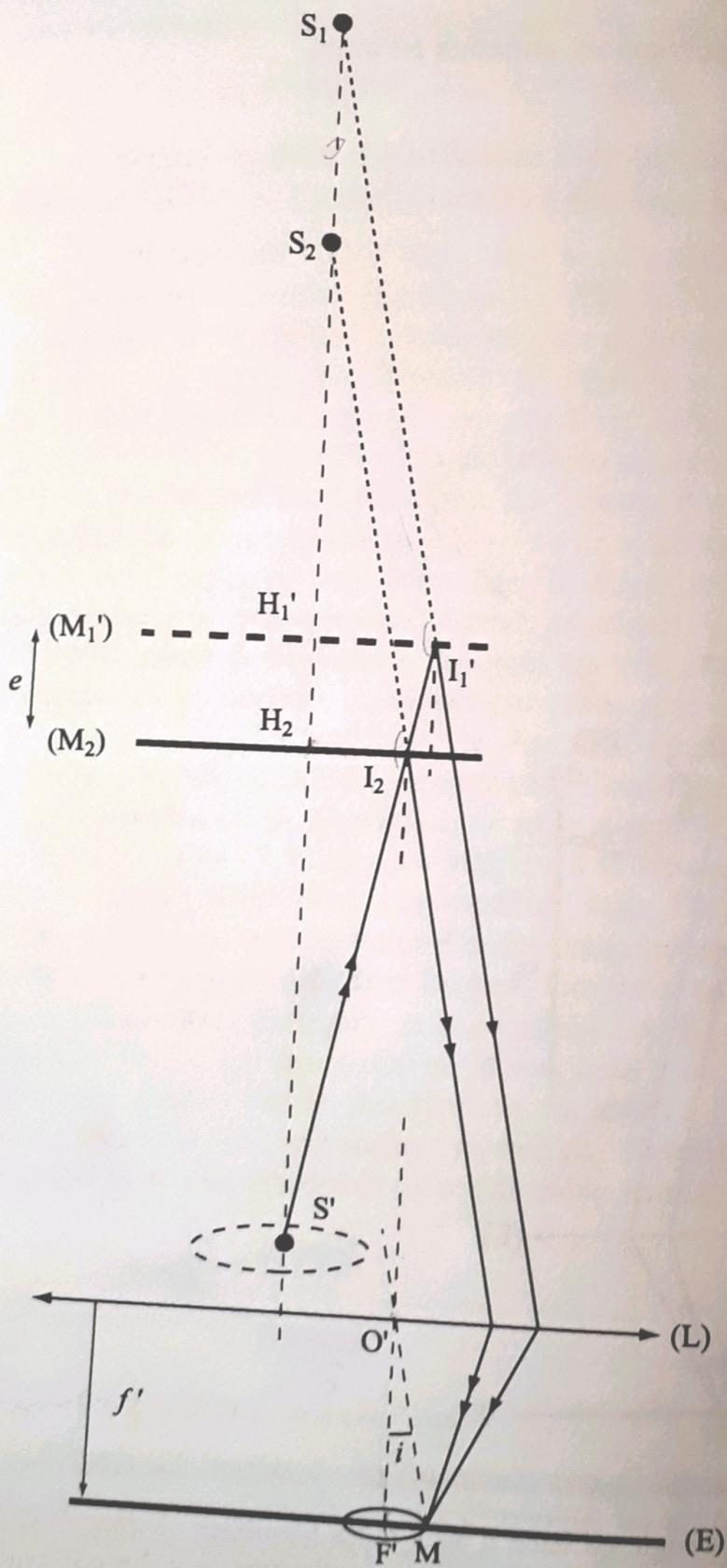


Figure III-4. Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles avec source large

L'interféromètre est supposé réglé en lame d'air à faces parallèles : l'image  $(M_1')$  de  $(M_1)$  par rapport à la séparatrice est parallèle à  $(M_2)$ , et distante de  $e$ . La construction (fig.III-4) des deux rayons qui interfèrent se fait comme en II.2.2.6.2 mais les

rayons doivent être issus d'un même incident sur (SP), condition pour pouvoir utiliser une source large. La construction de la figure III-5 fournit un tracé simplifié.



**Figure III-5.** Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles avec source large, schéma simplifié

Les deux rayons ne se coupent qu'à l'infini. Les interférences sont localisées à l'infini. On observe dans le plan focal image d'une lentille (L) de grande focale (pour un bon grossissement). Le rayon issu de S sous l'angle  $i$  par rapport à la perpendiculaire  $SH_1$  au miroir ( $M_1$ ) produit une certaine intensité sur (E) en M défini par l'axe secondaire O'M incliné de l'angle  $i$  sur l'axe optique de la lentille. Tous les rayons issus de S sous l'angle  $i$ , selon les génératrices d'un cône de demi-angle au sommet  $i$  (fig.III-4), d'axe de révolution parallèle à  $SH_1$ , contribuent à la formation d'un anneau de même axe que celui de la lentille.

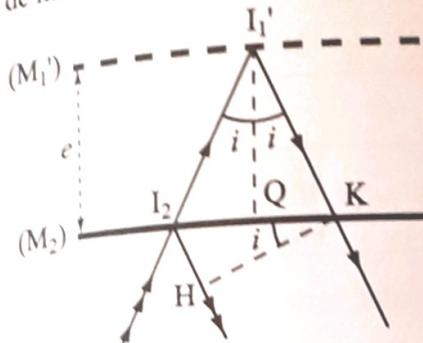


Figure III-6. Mise en évidence de la différence de chemin optique entre deux rayons issus d'un même incident

Soit les deux rayons issus de l'incident SI (fig.III-6). L'air a un indice de réfraction  $n$ . D'après la loi du retour inverse, en considérant M comme une source ponctuelle, les chemins optiques (MH) et (MK) entre M (source) et le plan d'onde de trace KH, sont égaux. La différence de chemin optique en M est donc :

$$\delta(M) = (I_2 \Gamma_1 K) - (I_2 H) = n \left( \frac{2e}{\cos i} - 2I_2 Q \sin i \right) = n \left( \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i \right),$$

$$\boxed{\delta(M) = 2ne \cos i}$$

La lame d'air ayant une épaisseur uniforme, la différence de chemin optique est la même en tous les points M de l'anneau considéré ; il en est de même pour l'intensité ; un anneau défini par l'angle  $i$  a une intensité uniforme : les franges sont circulaires et sont dites *d'égale inclinaison*. La source peut être très large : les différents points source donnent des systèmes de franges d'interférence circulaires identiques de même centre ; la source étant supposée spatialement incohérente, les intensités dues aux différents points source s'ajoutent, le système de franges circulaires obtenu est bien plus lumineux qu'avec une source ponctuelle :

*Les franges obtenues avec une lame d'air à faces parallèles et une source large sont dites d'égale inclinaison ; elles sont localisées à l'infini, observées dans le plan focal d'une lentille mince de grande focale pour être vues plus grandes, circulaires, de même axe que l'axe optique de la lentille.*

*La source étant étendue, la luminosité des anneaux est bien plus grande qu'avec une source ponctuelle.*

*Rayons des anneaux brillants successifs*

L'ordre d'interférence en M est :

$$p(M) = \frac{2ne \cos i}{\lambda_0}, \text{ maximum au centre } F' (i=0) : p(F') = \frac{2ne}{\lambda_0} = E\left(\frac{2ne}{\lambda_0}\right) + \varepsilon,$$

avec  $\varepsilon \in [0,1[$  excédent fractionnaire et  $E(x)$  partie entière de  $x$ ; pour les anneaux brillants,  $p(M) \in \mathbb{N}^*$ ; pour le 1<sup>e</sup>,  $p_1 = E(2ne/\lambda_0)$ , pour le 2<sup>e</sup>,  $p_2 = p_1 - 1$ , ...; pour le q<sup>e</sup>,  $p_q = p_1 - q + 1$  d'où le rayon angulaire  $i_q$  du q<sup>e</sup> anneau brillant vu depuis O' :

$$\frac{2ne \cos i_q}{\lambda_0} = E\left(\frac{2ne}{\lambda_0}\right) - q + 1 \text{ et, si } i_q \text{ est petit, } \frac{2ne(1-i_q^2/2)}{\lambda_0} = \frac{2ne}{\lambda_0} - \varepsilon - q + 1,$$

$$i_q \approx \sqrt{\frac{\lambda_0}{ne}(\varepsilon + q - 1)} \text{ d'où le rayon linéaire } \rho_q \approx f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{ne}(\varepsilon + q - 1)^{1/2}}$$

Si  $\varepsilon = 0$ , le centre est brillant, les rayons des anneaux varient alors comme les n<sup>es</sup> cines des entiers successifs.

*Intensité résultante*

Chaque faisceau a l'intensité  $I_0/2$  et le déphasage entre deux rayons qui interfèrent est  $\Delta\phi(M) = 2\pi p(M)$  d'où l'intensité résultante et ses représentations (fig.III-7.a,b) :

$$I(M) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \Delta\phi) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{4\pi ne \cos i}{\lambda_0}).$$

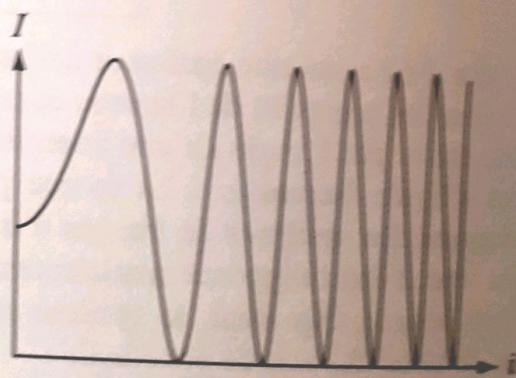
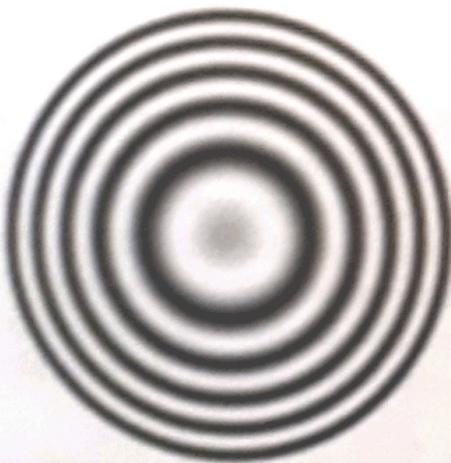


Figure III-7. a) Anneaux à l'infini

b) Variation de l'intensité I en fonction de l'angle i

Si la distance  $e$  entre  $(M_2)$  et  $(M'_1)$  diminue, le rayon des anneaux brillants augmente et, du fait que l'ordre d'interférence diminue au centre, un anneau brillant disparaît au centre chaque fois que l'épaisseur optique de la lame ne varie de  $\lambda_0/2$ . Quand  $e = 0$ , les rayons sont infinis : l'interféromètre est réglé au zéro optique, l'intensité observée sur l'écran est uniforme (teinte plate).

## 2.2 Coin d'air, franges d'égale épaisseur, franges rectilignes

À partir du zéro optique, on fait tourner le miroir ( $M_2$ ) d'un petit angle  $\alpha$ ; l'image ( $M'_1$ ) de ( $M_1$ ) par rapport à la séparatrice forme un coin d'air avec ( $M_2$ ); l'arête du coin d'air est supposée située au voisinage du milieu de ( $M_2$ ). La construction des deux rayons (fig.III-8) qui interfèrent se fait comme en II.2.2.6.1, les deux rayons étant issus d'un même incident sur (SP) (utilisation d'une source large).

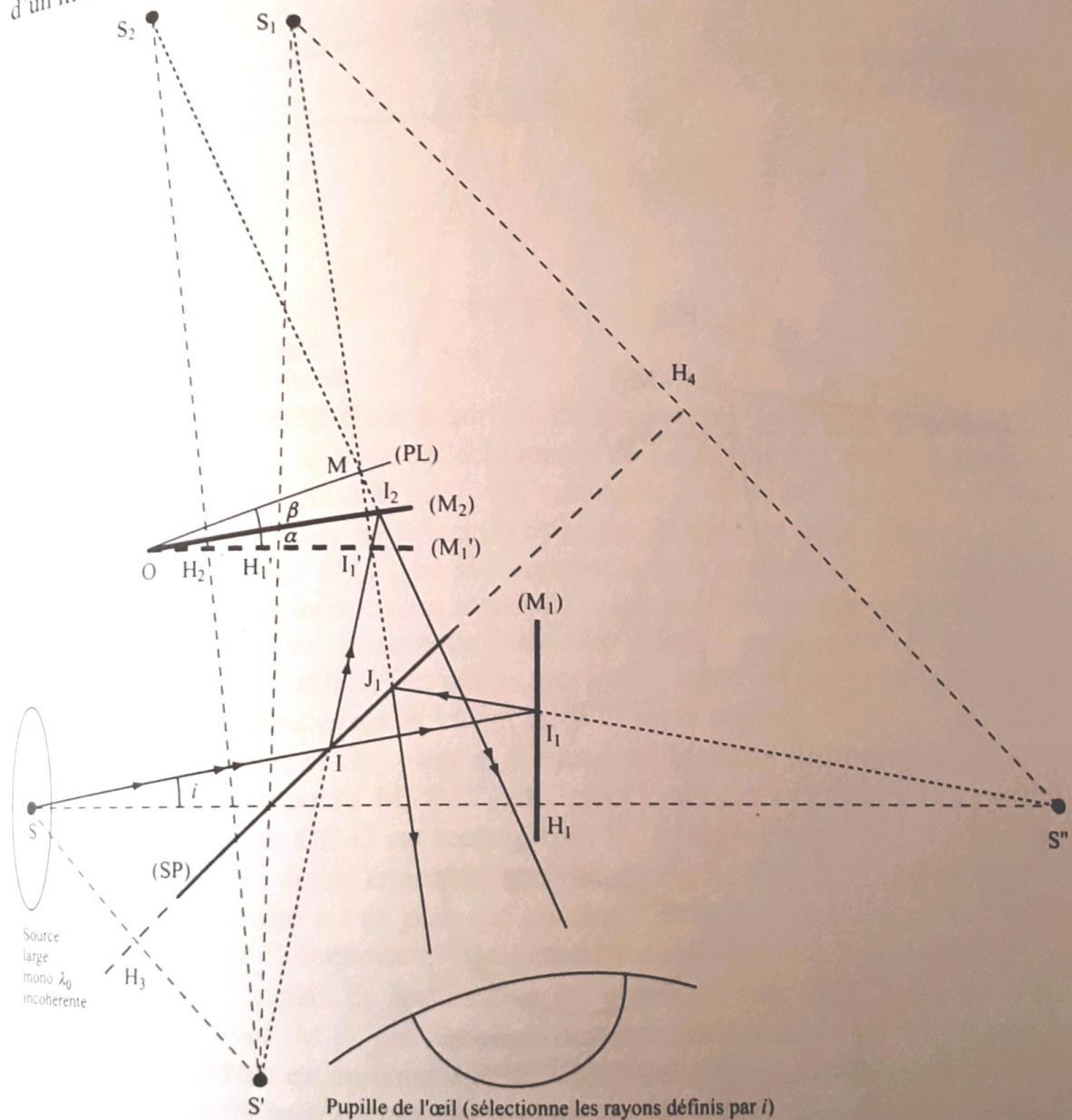
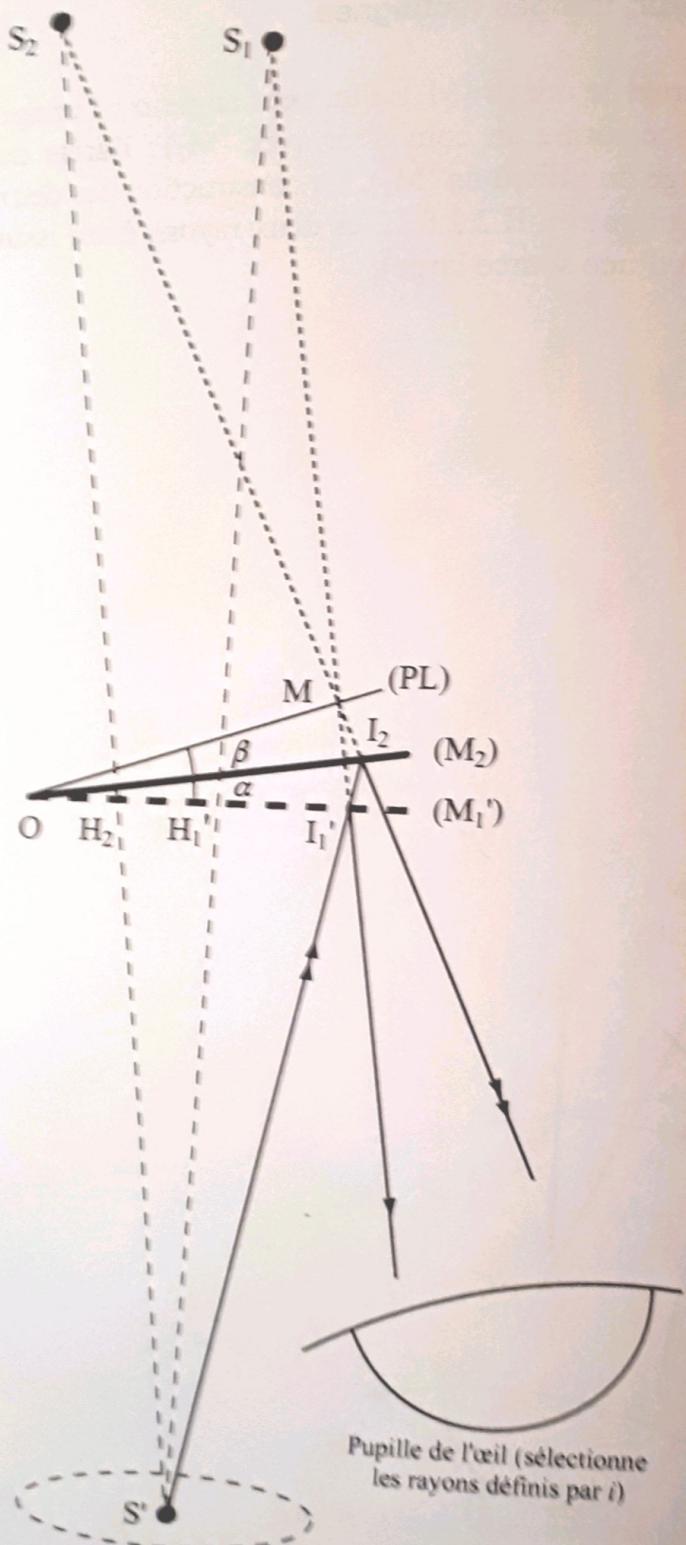


Figure III-8. Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air avec source large

La construction (fig.III-9) donne un tracé simplifié. L'œil de l'observateur sélectionne une plage étroite de valeurs de l'angle  $i$ ; idéalement un angle  $i$  précis devrait être sélectionné.

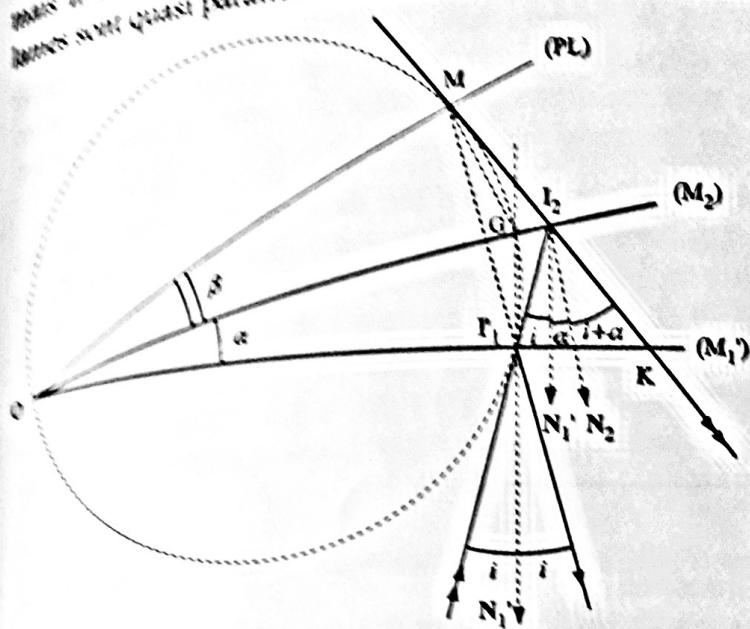


**Figure III-9.** Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air avec source large, schéma simplifié

Ce sont les parties virtuelles des rayons émergents qui interfèrent en M (fig.III-9). La différence de chemin optique en M est encore donnée en fonction de l'épaisseur locale  $e$  de la lame en  $I_2$  par :

$$\delta(M) \approx 2ne \cos i$$

mais il s'agit d'une expression approchée, d'autant mieux que localement les deux lunes sont quasi parallèles ; elle n'est donc valable que pour un très petit angle  $\alpha$ .



**Figure III-10.** Le plan (PL) est la surface de localisation

Il faut maintenant déterminer la surface de localisation (fig.III-10). Quand un miroir tourne d'un angle  $\alpha$ , le rayon réfléchi tourne de  $2\alpha$  par rapport au rayon incident : des rayons réfléchis sur ( $M'_1$ ) et sur ( $M_2$ ), conjugués d'un même incident, font donc entre eux l'angle  $2\alpha$ . D'après les lois de la réflexion, la trace du miroir ( $M_2$ ) est bissectrice intérieure du triangle  $Ml_1l'_1$  en son sommet  $l_2$  et la normale en  $l'_1$  à la trace de ( $M'_1$ ) est bissectrice intérieure en son sommet  $l'_1$ . Les trois bissectrices intérieures étant concourantes, la troisième bissectrice intérieure relative au sommet  $M$  passe par l'intersection  $G$  des deux autres. Les angles entre  $Ml'_1$  et  $MG$  d'une part et entre  $MG$  et  $Ml_2$  d'autre part sont donc égaux et valent  $\alpha$ . Si  $O$  est la trace de l'arête du coin d'air, puisque l'angle entre  $OG$  et  $Ol'_1$  vaut  $\alpha$ , il sous-tend la même corde que l'angle entre  $Ml'_1$  et  $MG$  : les quatre points  $M$ ,  $O$ ,  $l'_1$  et  $G$  sont situés sur un même cercle, de diamètre  $OG$  car le triangle  $Ol'_1G$  est rectangle en  $l'_1$ . L'angle  $\beta$  entre  $OM$  et  $OG$  sous-tend le même arc sur le cercle considéré que l'angle  $i$  entre  $l'_1G$  et  $l'_1M$  et donc  $\beta = i$ . La surface de localisation est un plan qui contient l'arête du coin d'air et fait l'angle  $\beta$  avec ( $M_2$ ). Si l'observateur vise perpendiculairement à la direction de ( $M'_1$ ),  $i \approx 0$  et alors  $\beta \approx 0$ . Le plan de localisation est confondu avec ( $M_2$ ), lui-même pratiquement confondu avec ( $M'_1$ ), car l'angle  $\alpha$  est très petit (quelques minutes d'arc). Si de plus l'arête du dièdre est au voisinage du milieu des miroirs, l'épaisseur locale d'air  $e$  est faible et la différence de chemin optique en  $M$ ,  $\delta(M) \approx 2ne$ , est inférieure à la longueur de cohérence (supposée petite voire très petite) de la source, condition impérative d'observation des franges. Les franges du coin d'air sont dites localisées sur les miroirs de l'interféromètre de Michelson. Pour les observer agrandies, il suffit de projeter le plan quasi commun des miroirs sur un écran d'observation à l'aide d'une lentille mince convergente d'assez courte distance focale (environ 20 cm), telle que le

plan de localisation constitue un plan de front objet réel. Sur l'écran d'observation, on doit voir l'image nette du pourtour circulaire de chacun des deux miroirs.

À angle  $i$  sélectionné par l'œil de l'observateur, la différence de chemin optique  $\delta(M)$  est uniforme sur une ligne d'épaisseur uniforme  $e$ ; dans le plan de localisation (PL), les franges d'interférence sont rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air qui constitue l'une d'elles. Ce sont des franges d'égale épaisseur.

*L'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, avec source large, donne des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air, pratiquement localisées sur le plan des miroirs.*

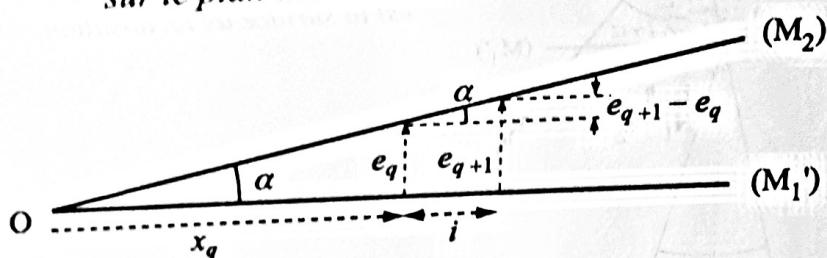


Figure III-11. Épaisseurs au niveau des franges  $q$  et  $q+1$

#### Calculs de l'interfrange et de l'intensité

L'interfrange s'obtient sans grande difficulté; les franges brillantes sont obtenues pour  $\delta(M) = q\lambda_0 + \delta(O)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ; la constante  $\delta(O)$  est due à d'éventuels déphasages à la transmission et à la réflexion sur la séparatrice; si réflexions et transmissions sur (SP) produisent un déphasage nul modulo  $2\pi$ ,  $\delta(O)$  est nul et une frange brillante coïncide avec l'arête du coin d'air; si le déphasage est de  $\pi$  au total,  $\delta(O)$  est égal à une demi-longueur d'onde dans le vide et une frange noire coïncide avec l'arête du coin d'air. La condition d'interférence totalement constructive donne l'épaisseur (fig. III-11) de la lame d'air au niveau des franges brillantes :

$$2ne_q = q\lambda_0 + \delta(O) \text{ et comme } \alpha \approx \tan \alpha = \frac{e_{q+1} - e_q}{i} = \frac{\lambda_0}{2ni}, \boxed{i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}}$$



Figure III-12. Franges rectilignes localisées en projection sur un écran (le contour est défini par l'image du bord des miroirs)

L'interfrange augmente si l'angle entre le miroir ( $M_2$ ) et l'image ( $M'$ ) du miroir ( $M_1$ ) par rapport à la séparatrice diminue. Il tend vers l'infini quand  $\alpha$  tend vers zéro, on obtient alors une lame à faces parallèles de faible épaisseur.

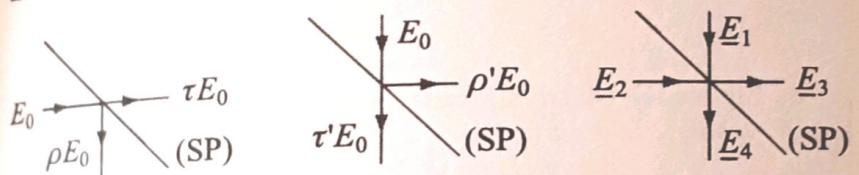
Si  $x$  est la distance (fig.III-11) du point considéré à l'arête du coin d'air, l'intensité est :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} [1 + \cos \Delta\varphi(M)] = \frac{I_0}{2} \{1 + \cos[\Delta\varphi(O) + \frac{2\pi x}{i}]\}.$$

L'arête du coin d'air est une frange dont l'intensité est déterminée par la constitution de la séparatrice.

Le contraste des franges rectilignes localisées est moins bon que celui des franges circulaires car l'angle  $i$  n'est pas très bien défini, en particulier lors d'une projection, la lentille de projection a un diamètre d'ouverture de 10 cm environ et est placée à 25 cm du plan de localisation : l'angle  $i$  est défini à environ  $10^\circ$  près et bien qu'il figure par son cosinus dans l'expression du chemin optique, il en résulte une superposition de systèmes de franges d'interfranges pas tous identiques d'où la diminution du contraste.

### 2.3 Constitution de la séparatrice ; nécessité d'une compensatrice



**Figure III-13.**  
Coefficients de réflexion  
et transmission complexes

La séparatrice transmet sans déviation et réfléchit un rayon lumineux incident. Elle admet, *a priori*, des coefficients de réflexion et transmission *complexes*  $\rho, \tau$  quand la lumière arrive sur une face et  $\rho', \tau'$  quand elle arrive sur l'autre face ; la séparatrice est supposée *non absorbante* ; on peut donc traduire la conservation de l'énergie ; le flux d'énergie étant proportionnel au carré de l'amplitude, avec les notations utilisées dans les figures III-13, on a :

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1, \quad |\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1, \quad |\underline{E}_1|^2 + |\underline{E}_2|^2 = |\underline{E}_3|^2 + |\underline{E}_4|^2$$

et en supposant un comportement linéaire de la séparatrice :

$$\underline{E}_3 = \rho' \underline{E}_1 + \tau \underline{E}_2 \text{ et } \underline{E}_4 = \rho \underline{E}_2 + \tau' \underline{E}_1,$$

$$|\underline{E}_1|^2 + |\underline{E}_2|^2 = |\rho' \underline{E}_1 + \tau \underline{E}_2|^2 + |\rho \underline{E}_2 + \tau' \underline{E}_1|^2,$$

$$\rho'^* \underline{E}_1 \underline{E}_2^* + \rho'^* \tau \underline{E}_1^* \underline{E}_2 + \rho \tau'^* \underline{E}_1^* \underline{E}_2 + \rho^* \tau' \underline{E}_1 \underline{E}_2^* = 0,$$

$$(\rho'^* \tau + \rho^* \tau') \underline{E}_1 \underline{E}_2^* + (\rho'^* \tau + \rho \tau'^*) \underline{E}_1^* \underline{E}_2 = 0,$$

$$\operatorname{Re}[(\rho'^* \tau + \rho^* \tau') \underline{E}_1 \underline{E}_2^*] = 0 \quad \forall \underline{E}_1, \underline{E}_2,$$

et donc si :  $\underline{E}_2 = \underline{E}_1$ ,  $\operatorname{Re}(\rho'^* \tau + \rho^* \tau') = 0$  et si  $\underline{E}_2 = i \underline{E}_1$ ,  $\operatorname{Im}(\rho'^* \tau + \rho^* \tau') = 0$ ,