Quelques rappels élémentaires de Mécanique classique

1. L'espace-temps de la mécanique classique

1. Décrire brièvement la structure de l'espace-temps de la mécanique classique.

2. Comment définit-on la notion d'événements *simultanés*. Dépend-elle de l'observateur ?

3. Peut-on parler, dans l'absolu, d'événements se produisant au même lieu à des dates différentes ? Pourquoi ?

4. Qu'appelle-t-on *repère orthonormé* ? Comment relier les coordonnées respectives d'un point de l'espace dans deux repères orthonormés R et R'. Comment appelle-t-on de telles transformations ?

5. Comment définit-on un *référentiel* ?

6. Etant donné un référentiel $\mathcal{R}$, comment définit-on la dérivée temporelle $(d\vec{V}/dt)_{\mathcal{R}}$ d'un vecteur de l'espace $\vec{V}$ dépendant du temps, dans ce référentiel ?

7. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels et soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ des bases fixes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Montrer qu'il existe un pseudo-vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, appelé *vitesse angulaire instantanée de rotation* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, tel que

$$\left(\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_i{}'.$$

En déduire que pour tout vecteur d'espace $\vec{V}$ dépendant du temps, on a

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}.$$

8. Etant donnés deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, relier les vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ d'un même point matériel M par rapport aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Qu'appelle-t-on vitesse d'entraînement ? Comment l'interpréter ?

9. Relier de même les accélérations $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Qu'appelle-t-on : accélération d'entraînement ? accélération de Coriolis ?

2. Déterminisme newtonien et relativité galiléenne

Le déterminisme newtonien consiste à supposer qu'il est possible de déterminer l'évolution future (et éventuellement aussi l'évolution passée) d'un système mécanique à partir de la seule connaissance à une date t des positions et des vitesses de tous ses constituants dans un référentiel $\mathcal{R}$, en résolvant des équations différentielles d'ordre 2 de la forme

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{f}_{\mathcal{R}}(M, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}, t). \tag{1}$$

Il appartient alors au physicien d'énumérer et de modéliser les forces (réelles ou fictives) intervenant dans l'expression de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$.

1. En utilisant 1.9., réécrire l'équation du mouvement (1) dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{\mathcal{R}'},$$

où l'on exprimera $\vec{f}_{\mathcal{R}'}$ en fonction de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis.

2. Qu'appelle-t-on forces d'inertie (ou forces fictives, ou encore forces de référentiel) ? En quoi leur présence dans l'équation du mouvement est-elle conceptuellement problématique ?

3. A quelle(s) condition(s) sur $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ le bilan des forces aboutissant à l'expression de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$ est-il suffisant pour déterminer $\vec{f}_{\mathcal{R}'}$? Comment sont reliées les coordonnées d'un même point matériel M dans deux repères fixes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

4. Comment appelle-t-on l'exigence plus générale que toutes les lois de la Physique se transforment de manière covariante sous ces transformations ? Est-elle toujours vérifiée ? Donner un (contre-)exemple.

3. Principe d'inertie et référentiels galiléens

1. Enoncer le *principe d'inertie*. Au vu de l'exercice précédent (en particulier de la question 2.2.), quel est son rôle ?

2. Qu'appelle-t-on *référentiel galiléen* ? Est-ce une notion bien définie ? Comment la met-on en œuvre ?

3. En utilisant 2.3., déduire la relation existant entre les différents référentiels galiléens.

4. Etant donné un système matériel S dans un référentiel $\mathcal{R}$, comment définit-on le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_S^*$ de S ? A quelle(s) condition(s) sur S et $\mathcal{R}$ le référentiel $\mathcal{R}_S^*$ est-il galiléen ?

5. Quels sont les référentiels galiléens couramment utilisés en mécanique ? A quelle(s) condition(s) peuvent-ils être considérés comme galiléens ? Citer des manifestations de leur caractère non-galiléen.

4. Référentiel de Copernic et marées galactiques

1. Définir le référentiel de Copernic.

2. Ecrire, dans le référentiel de Copernic supposé galiléen, l'équation du mouvement d'un point matériel P, de masse m soumis à une force réelle $\vec{F}$.

Le système solaire dans son ensemble est en réalité en chute libre dans le champ de gravitation galactique $\vec{g}$. Sous l'action de ce dernier, il décrit une trajectoire qu'on supposera circulaire, de rayon $R = 10^5$ A.L. avec une périodicité $T = 225$ Ma.

3. Ecrire, dans le référentiel de Copernic à présent supposé non-galiléen, l'équation du mouvement d'un point matériel P, de masse m soumis à une force réelle $\vec{F}$. Comment s'appelle le nouveau terme apparaissant dans le membre de droite de l'équation du mouvement ?

4. En supposant que la champ gravitationnel galactique $\vec{g}$ varie sur des distances caractéristiques de l'ordre du rayon galactique, lui même de l'ordre de $R = 10^5$ A.L., estimer l'influence du caractère non-galiléen du référentiel de Copernic : sur le mouvement de la Terre autour du Soleil qu'on supposera circulaire de rayon $r = 1,5.10^8$ km; sur le mouvement d'une comète du nuage d'Oort située sur une orbite qu'on supposera circulaire avec un rayon de l'ordre de 1 A.L.

5. Gyroscope MEMS et force de Coriolis

Un gyroscope MEMS (pour *MicroElectroMechanical Systems* en Anglais) est un dispositif permettant de mesurer la vitesse angulaire de rotation des équipements (téléphone portable, tablette etc) à bord desquels il est embarqué. Il repose sur la mesure de la force de Coriolis agissant sur un oscillateur entretenu. On en propose la modélisation suivante : un mobile de masse m, assimilable à un point matériel M, effectue des oscillations forcées suivant l'axe Ox lié au référentiel mobile $\mathcal{R}'$ et l'on détecte ses déplacements suivant l'axe Oy fixe dans $\mathcal{R}'$. On supposera qu'il est soumis à une force de rappel $-k_x x\vec{u}_x - k_y y\vec{u}_y$, à une force de frottement fluide $-\lambda_x \dot{x}\vec{u}_x - \lambda_y \dot{y}\vec{u}_y$, ainsi qu'à une force excitatrice $F_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$. Le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ est constante.

en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

1. Ecrire l'équation du mouvement du point M dans $\mathcal{R}'$.

2. Justifier le fait que, typiquement, $\Omega \ll \omega$. En déduire qu'en régime sinusoïdal forcé à la pulsation $\omega \simeq \omega_x \simeq \omega_y$, on a $|y/x| \ll 1$. Déterminer finalement le rapport $|y/x|$. Comment améliorer la sensibilité du capteur ? Quelle(s) contrainte(s) cela entraine-t-il sur la conception du capteur ?

4. Discuter l'avantage d'un dispositif à oscillateurs couplés (typiquement un quartz en forme de diapason) dont on exciterait le mode antisymétrique, de sorte que les deux masses aient, à chaque instant, des vitesses opposées.

6. Moment cinétique, moment dynamique

On considère un système matériel fermé S caractérisé par une distribution de masse $dm_M = \mu(M)dV_M$ et un champ de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.

1. Soit A un point de l'espace. Définir, dns $\mathcal{R}$, le moment cinétique $\vec{L}_A$ de S en A.

2. Montrer que pour tout couple de points de l'espace A et B, on a

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P},$$

où $\vec{P} = M\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ désigne la quantité de mouvement totale de S dans $\mathcal{R}$, avec $M = \int_S dm_M$ la masse totale de S et G le barycentre de masse de S. Comment s'appelle cette propriété ? Qu'appelle-t-on torseur cinétique ?

3. Définir de même dans $\mathcal{R}$, le moment dynamique $\vec{\delta}_A$ de S en un point A. Montrer qu'on a également pour tous A et B

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R},$$

où $\vec{R}$ est un vecteur qu'on précisera. Qu'appelle-t-on torseur dynamique.

4. Introduire le torseur des actions mécaniques. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour le système S. Enoncer en particulier le théorème du moment dynamique.

5. Montrer que

$$\vec{\delta}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + M\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}},$$

où G désigne le barycentre de masse du système.

6. Enoncer le théorème du moment cinétique.

7. Dans quel(s) cas courant(s) le champ des vitesses d'un système matériel fermé S constitue-t-il le moment d'un torseur ? Quelle est, dans ce(s) cas, la résultante associée ? Comment appelle-t-on ce torseur ?

7. Théorèmes de König

On considère un système matériel fermé S caractérisé par une distribution de masse dm_M et un champ de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.

1. Définir le moment cinétique barycentrique $\vec{L}_S^*$ de S. Montrer qu'il est indépendant du point où on le calcule.

2. Enoncer et prouver le théorème de König relatif au moment cinétique.

3. Enoncer et prouver le théorème de König relatif à l'énergie cinétique.

8. Formation d'un pulsar

Un pulsar est une étoile à neutrons issue de l'effondrement gravitationnel d'une étoile suffisamment massive ayant épuisé son combustible nucléaire. En supposant qu'une étoile isolée, d'un rayon initial $R_i = 7.10^5$ km (environ un rayon solaire), effectuant initialement une rotation propre en $T_i = 20$ jours, se contracte sans perdre de matière jusqu'à atteindre un rayon final $R_f = 10$ km, déterminer sa période de rotation propre finale T_f.

Indication : on rappelle que pour une boule homogène de masse M et de rayon R, le moment d'inertie en son centre O vaut $I_O = 2MR^2/5$ - cf. TD de Mécanique des solides.

9. Système Terre-Lune

On considère le système Terre-Lune comme isolé dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Les masses de la Terre et de la Lune sont $M_T \simeq 6.10^{24}$ kg et $M_L \simeq 7.10^{22}$ kg. Justifier qu'en première approximation on peut confondre le barycentre du système avec celui de la Terre.

2. On note ω_T la vitesse angulaire de rotation propre de la Terre. Elle décroît au cours du temps, aboutissant à un allongement de la durée du jour terrestre de l'ordre de 2 ms par siècle. A quoi est dû le ralentissement de la rotation propre de la Terre.

On considère pour simplifier que la Lune décrit autour de la Terre une orbite circulaire dans le plan orthogonal aux vecteurs vitesse angulaire de rotation $\vec{\omega}_T$ et $\vec{\omega}_L$ supposés colinéaires.

3. On note Ω la vitesse angulaire de rotation orbitale de la Lune et par ω_L sa vitesse angulaire de rotation propre. Quelle observation courante aboutit à conclure que $\Omega = \omega_L$? A quoi est due cette égalité ?

4. Ecrire le moment cinétique total $\vec{L}$ du système Terre-Lune.

5. On assimile la Terre et la Lune à des boules homogènes de masses respectives M_T et M_L et de rayons respectifs $R_T \simeq 6.10^3$ km et $R_L \simeq 2.10^3$ km. Comparer les moments cinétiques $\vec{L}_T$ et $\vec{L}_L$ respectivement associés aux rotation propres de la Terre et de la Lune. En déduire que $\|\vec{L}_T\| \gg \|\vec{L}_L\|$. On négligera donc dans la suite la contribution de $\vec{L}_L$ au moment cinétique total du système Terre-Lune.

6. Déterminer le moment cinétique orbital $\vec{L}_{TL}$ du système en fonction de la distance Terre-Lune d_{TL}.

7. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que la distance Terre-Lune d_{TL} croît au cours du temps. Estimer l'importance de ce phénomène.

10. Freinage d'un satellite artificiel par la haute atmosphère

Un satellite artificiel évolue sur orbite circulaire autour de la Terre. Outre l'attraction gravitationnelle terrestre, on suppose qu'il subit un faible frottement fluide sur les couches résiduelles de l'atmosphère terrestre. Montrer que la dissipation d'énergie par frottement entraîne une augmentation de la vitesse du satellite.

Robert Zeger

TDmec 1

TD mécanique

1) L'espace-temps de la mécanique classique

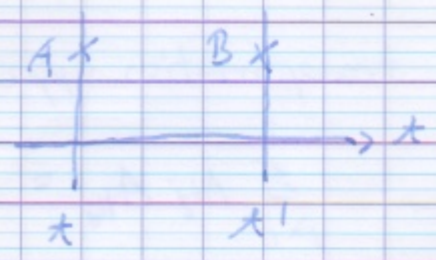
1) • Il existe un temps absolu ; la durée entre 2 evenements est identique pour tous les observateurs

Par Q2 • evenement simultanés A et B, ⇒ $t_A = t_B$ ∀ observateur

Ensemble d'évennements à t :
espace homogène et isotrope à 3 dimensions

2) répond dans question (1)

3)



Non, l'espace est homogène et isotope. On ne peut pas parler, dans l'absolu, d'évènements se produisant à des dattes différentes dans le même lieu, car on n'a pas une identification canonique de l'espace homogène et isotope entre ces deux dates.

Il manque un repère !

4) une origine et une base de l'espace $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$
↳ un point particulier

orthonormée, c.a.d. $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij}\ \forall i,j = 1\dots 3$, directe

On peut alors repérer un point par ses coordonnées
$\vec{OM} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e_i} \Rightarrow (t, x_1, \dots, x_3)$.

Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: où $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1} \dots \vec{e_3})$, $\mathcal{R}' = (O', \vec{e_1}' \dots \vec{e_3}')$

$$\vec{OM} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e_i} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \sum_{i=1}^{3} B_i \vec{e_i}' + \sum_{i=1} x_i' \vec{e_i}'$$

$$= \sum_{i=1}^{3} B_i \vec{e_i} + \sum_{i=1}^{3} x_i' \underbrace{(\vec{e_i}' \cdot \vec{e_j})}_{A_{ij}} \vec{e_j}$$

projection sur $\vec{e_j} \in \mathcal{R}$

alors $\boxed{\vec{OM} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\, x_j' + B_i}$

Matrice de rotation — translation

On appelle ceci une transformation affine.

$A_{ij} = (\vec{e_j}' \cdot \vec{e_i})$, $\sum_{j=1}^{3} A_{ij} A_{kj} = \delta_{ik}$

$\vec{e_i}' \cdot \vec{e_j}' = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$

En effet $\vec{e_i}' = \sum_{j=1}^{3} (\vec{e_i}' \cdot \vec{e_j}) \vec{e_j}$

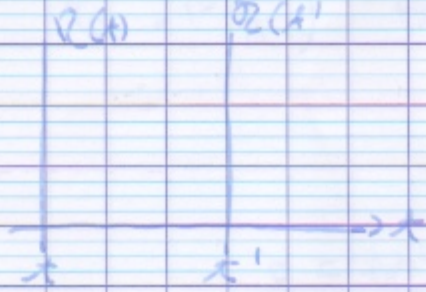
On preserve le produit scalaire $\Rightarrow$ rotation

5) Référentiel :

- Horloge
- Solide de référence $\xrightarrow{\text{donne}}$ Repère à chaque date

TD meca 2

alors :



* Le repère est donné par le solide à rotation constante près

6) Par définition :

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dV_i}{dt} \vec{e}_i$$

dans une base fixe $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_3)$ dans $\mathcal{R}$:

7) $\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ ← vecteur de $\mathcal{R}'$; regardé dans $\mathcal{R}$

(on veut trouver $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}'_i$

preuve :

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dA_{ji}}{dt} \vec{e}_j \quad \text{car } \vec{e}'_i = A_{ji}\vec{e}_j$$

(voir Q. 3)

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \frac{dA_{ji}}{dt} A^{-1}_{kj} \cdot \vec{e}'_k$$

$$= A^{-1} \frac{dA}{dt} \quad \text{or on a } A^T A = A A^T$$

donc $A^{-1}\dfrac{dA}{dt} = A^T\dfrac{dA}{dt}$ (A est une rotation, donc $A^{-1} = A^T$)

On a $A^TA = \mathbb{I}$

$$\Rightarrow \frac{dA^T}{dt}A + A^T\frac{dA}{dt} = 0$$

d'où $A^T\dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{dA^T}{dt}A = -\left(A^T\dfrac{dA}{dt}\right)^T$

donc $A^T\dfrac{dA}{dt}$ est une matrice 3x3 antisymétrique

$$A^T\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement $A^T\dfrac{dA}{dt}\begin{pmatrix}\vec{e}'_1\\ \vec{e}'_2\\ \vec{e}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & +\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}'_1\\ \vec{e}'_2\\ \vec{e}'_3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\Omega_3\vec{e}'_2 + \Omega_2\vec{e}'_3 \\ \Omega_3\vec{e}'_1 - \Omega_1\vec{e}'_3 \\ -\Omega_2\vec{e}'_1 + \Omega_1\vec{e}'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{\Omega}\wedge\vec{e}'_i \quad \text{où } \vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$$

En conséquence :

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}'_i\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \frac{dv_i}{dt}\vec{e}'_i + \sum_{i=1}^{3} v_i\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

TD méca 3

d'où : $\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R'} &= \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R'} + \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e}_i\\ &= \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}\end{aligned}}$

∀ vecteur $\vec{V}$ n'est pas forcément la vitesse mais un vecteur qq.

avec $\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{e}_i'$

8) Par identification dans $R(O; \vec{e}_i)$ $R' = (O'; \vec{e}_i')$

$$\vec{V}_{M/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$$

$$= \frac{d(\vec{OO'} + \vec{O'M})}{dt}\bigg|_R$$

calculé à la q. précédente !

$$= \vec{V}_{O'/R} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R$$

$$= \vec{V}_{O'/R} + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$

$$\boxed{= \vec{V}_{M/R'} + \underbrace{\vec{V}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement } \vec{V}_e}}$$

$\vec{V}_e$ c'est la vitesse du point fixe dans R' et coïncidant avec M à chaque date.

g : la vitesse d'entraînement est également le champ des vitesses d'un "solide" constitué des points fixes dans $\mathcal{R}'$ (et donc par rapport au solide de référence définissant $\mathcal{R}'$!).

9) Par définition dans $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_i)$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}\,'_i)$

$$\vec{a}_M = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}\right]_{\mathcal{R}}$$

$$= \overset{1}{\left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}} + \overset{2}{\vec{a}_{O'/\mathcal{R}}} + \overset{3}{\left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\right) \wedge \vec{O'M}}$$
$$+ \overset{4}{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}$$

$$1 = \overset{a}{\left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}} + \overset{b}{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}$$

$$2 = \overset{c}{\vec{a}_{O'/\mathcal{R}}}$$

$$3 = \overset{d}{\left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}}$$

$$4 = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\overset{e}{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}} + \overset{f}{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}}\right)$$

TD meca 4

d'où :

$$\vec{a}_{M} = \underbrace{\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}}_{a} + \overbrace{\underbrace{\vec{a}_{O'/\mathcal{R}}}_{c} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}}_{d} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}\right)}_{f}}^{\text{accélération d'entrainement } a_e}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}_{b \text{ re}}}_{\text{accélération de coreolis } a_c}$$

rq : L'accélération d'entrainement est l'accélération du point fixe dans $\mathcal{R}'$ coincidant avec M. En effet si on prend un point fixe dans $\mathcal{R}'$ on trouve comme accélération l'accélération d'entrainement !

$$a_e \neq \left.\frac{d v_e}{dt}\right)_R \text{ en général}$$

exercice 2

Déterministe newtonien et relativité galiléenne

Rq : Une mécanique qui engendrait des équations d'ordre supérieur à 2, en mécanique analytique donnerait une énergie cinétique non bornée par le bas. Ceci donnerait lieu à des instabilités où le système à tout intérêt d'augmenter son énergie cinétique.

1) On regarde des particules ponctuelles.

D'après ex 1 Q.9, on a dans $\mathcal{R}'$:

par l'équation :

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}_{\mathcal{R}}$$

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\mathcal{R}} - m\,\vec{a}_e - m\,\vec{a}_c = \vec{F}_{\mathcal{R}'}$$

2) $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ sont des forces fictives ou de référentiel ou d'inertie.

La présence de forces d'inertie dans les équations du mouvement entraîne leur dépendance dans un référentiel à priori inconnu, dans lequel le référentiel d'étude présente lui aussi un mouvement inconnu.

3) Il faut que les termes d'inertie soient nuls pour avoir $\vec{F}_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\mathcal{R}'}$ ce qui sera suppprimant

Ceci se traduit en s'assurant que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 0$ et $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = 0$

Donc les forces d'inertie entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'annulent pour tout mouvement de M seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}\\ \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}\end{array}}$$

Alors $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$.

cte dans $\mathcal{R}$

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\,x'_j + v_i^{O'}\,t + B_i^{(0)} \quad \text{et} \quad t = t' - t_0}$$

L rotation indépendante du temps !

TDmeca 1

On appelle ceci la transformation de Galilée.

4) En exigeant que toutes les lois de la physique se transforment de manière covariante sous la transformation de galilée, on postule le principe de Relativité galiléenne.

Non, les éq. de maxwell sont covariantes de Lorentz et non galilée.

exercise 3 principe d'inertie et référentiel galiléen

1) Principe d'inertie:
∃ des référentiels, dit galileens, dans lesquels un point matériel isolé est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. -> utiliser ceci pour définir un ref. galileen.

2) La notion est mal défini car circulaire. Le principe d'inertie garantie (en postulant) l'existance de référentiels dans lesquels les équations du mouvement peuvent être établies en énumerant les systèmes agissant sur le système étudié. i.e. => pas de forces d'inertie.

La définition proposé par le principe d'inertie est une définition circulaire. En effet on doit connaître la définition d'une force qui ne peut être fait que dans un référentiel galileen.

Pour le mettre en oeuvre il faut:

- définir un référentiel
- faire le bilan des forces connues
- résoudre les équations du mouvement
- faire l'expérience

→ soit accord satisfaisant
→ soit désaccord.

En cas de désaccord :
- Force oubliée
- Force mal modélisée
- Caractère insuffisamment galiléen du référentiel.
  ↳ Forces d'inertie à prendre en compte.

2) On arrive donc une hiérarchie de référentiels ± galiléens.

3) de 3.1 et 2.3 il en découle naturellement que deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

4) Soit $\mathcal{R}$ un référentiel et soit S un système matériel.

On définit $\mathcal{R}_S^* = (G, \vec{e_1} \dots \vec{e_3})$ ← déf. du rep. barycentrique.

axes du rép. de départ !

Où G est le barycentre de S et $\vec{e_1}, \dots \vec{e_3}$ sont fixes dans $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}_S^*$ est galiléen si $\mathcal{R}$ est galiléen et si G est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$. Ceci est le cas, par exemple si S est (pseudo) isolé.

TD meca 6

5) - Référentiel terrestre :

. origine : n'importe quel point fixe par rapport à la Terre

. axes fixes par rapport à la Terre.

↳ galiléen pour échelles de temps $T \ll 24$ h.

↳ ex. gyroscope, pendule de Foucault.

- Référentiel géocentrique

. origine : Barycentre de la Terre

. axes : Fixé par trois étoiles lointaines. ← fixes / mvt orbital de la Terre

(on veut s'affranchir de la rotation de la Terre)

↳ galiléen pour échelles de temps $T \ll 1$ an

- Héliocentrique

. origine : Barycentre du Soleil ← on s'affranchit du mvt de translation de la Terre

. axes fixés pour 3 étoiles lointaines

↳ galiléen pour échelles de temps $T \ll 250$ M années

- Copernique :

origine : **barycentre du système solaire**

± identique pour le reste au réf. Héliocentrique.

exercice 4 Référentiel de Copernic et marées galactiques

1) c.f. Q. 5 ex 3

2) On suppose le réf. de Copernic $\mathcal{R}_c$ galiléen. Alors pour un point P :

$$m \vec{a}_{P/\mathcal{R}_c} = \vec{F}$$

3) On suppose $\mathcal{R}_c$ non galiléen.

Le barycentre G du système solaire est soumis à une accélération :

* $\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \vec{g}(G)$ — PFD pour G dans $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ un réf. galiléen autre.

Comme $\mathcal{R}_c$ est non galiléen : on considère que le réf. ne tourne pas ! ↳ en effet on considère que les étoiles qui servent à [illegible] fixer les axes dans $\mathcal{R}_c$ [illegible] sont aussi celles qui fixent les axes de $\mathcal{R}$

$$m\,\vec{a}_{P/\mathcal{R}_c} = \underbrace{m\left[\vec{g}(P) - \vec{g}(G)\right]}_{\text{terme de marée galactique !}} + \vec{F}$$

4) Comme on s'intéresse à l'influence des marées à des distances plus petites que la distance caractéristique de $\vec{g}$, on peut faire un DL à l'ordre 1 autour P.

$$\vec{a}_{P/\mathcal{R}_c} = \left(\vec{GP}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{g}(G) + \frac{\vec{F}}{m} + o\left(\|\vec{GP}\|^2\right)$$

On a donc, en ordre de grandeur :

* car $\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = R\Omega^2$.

$$\frac{\|\vec{GP}\|}{R}\, g(G) = \frac{\|\vec{GP}\|}{R}\cdot R\,\Omega^2$$

$$= \|\vec{GP}\|\,\Omega^2 = \|\vec{GP}\|\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Il suffit de comparer $\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$ à l'attraction de la Terre par le soleil.

TD meca - 7

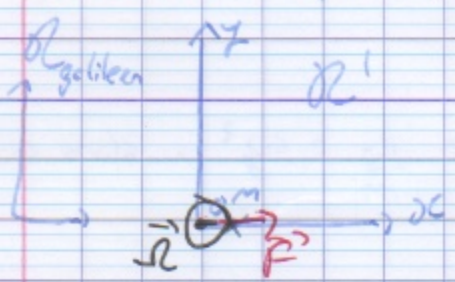
donc $\frac{4\pi^2 r}{T^2} \ll \frac{G_N M_S}{r^2}$ => Référentiel de Copernic supposé galiléen.

Nettement : $\frac{4\pi^2 r}{T^2} \cdot \frac{r^2}{G_N M_S} = \frac{4\pi^2 \boxed{r^3}}{G_N M_S \boxed{T^2}}$ si $r \nearrow$ indépendamment on peut sortir de l'approximation galiléenne :

avec : $r_{crit} \sim \left(\frac{G_N M_S T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

typiquement, les comètes du nuage d'Oort sont un des premiers objets dont on ne peut négliger le champ de marées galactiques

exercice 5 Gyroscope MEMS et force de Coriolis



$\mathcal{R}'$ - ref liée à l'appareil

oscillateur anisotrope amorti de masse m

1) Dans $\mathcal{R}'$:

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = -k_x x \vec{u}_x - k_y y \vec{u}_y - \lambda_x \dot{x}\vec{u}_x - \lambda_y \dot{y} \vec{u}_y + F_0\cos(\omega t)\vec{u}_x - m\vec{\Omega}\wedge[\vec{\Omega}\wedge(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)] - 2m\vec{\Omega}\wedge[\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y]$$

On projette :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \lambda_x \dot{x} + k_x x = F_0 \cos(\omega t) + m\Omega^2 x + 2m\Omega\dot{y} \\ m\ddot{y} + \lambda_y \dot{y} + k_y y = m\Omega^2 y - 2m\Omega\dot{x} \end{cases}$$

2) Typiquement $\Omega << \omega_r$ fréquence propre d'un quartz, qui est souvent utilisé dans ces appareils.

On a :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\lambda_x}{m}\dot{x} + \frac{k_x x}{m} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) + \Omega^2 x + 2\Omega\dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{\lambda_y \dot{y}}{m} + \frac{k_y y}{m} = \Omega^2 y - 2\Omega\dot{x} \end{cases}$$

On pose $\frac{k_x}{m} = \omega_x^2$ et $\frac{k_y}{m} = \omega_y^2$, alors en RSF :

$$-\omega^2 x + i\omega\frac{\lambda_x}{m} + \omega_x^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} + \Omega^2 x + 2\Omega i\omega y$$

$$-\omega^2 y + i\omega\frac{\lambda_y}{m} + \omega_y^2 \cdot y = \Omega^2 y - 2i\omega\Omega x$$

or $\left(\omega_x^2 - \underset{<<\omega_x^2}{\underset{\uparrow}{\Omega^2}}\right)x \simeq \omega_x^2$ donc on néglige !

et on prendra ω proche de ω_x

Meca 8

On constate alors que

$$\frac{y}{x} = \frac{2i\omega\Omega}{(\omega_y^2-\omega^2)+i\frac{\omega\lambda_y}{m}} \sim \frac{\Omega}{\omega} \ll 1$$

alors comme $\frac{\lambda_x}{m}$ n'est pas trop petit devant 1

$$i\omega\left(\frac{\lambda_x}{m}\cdot x - 2\Omega y\right) \simeq i\omega\frac{\lambda_x}{m}x$$

Donc sur $\vec{u_x}$ on a :

$$-\omega^2 x + i\omega\frac{\lambda_x}{m}x + \omega_x^2 x = \frac{F_0}{m}$$ ← oscillateur harmonique amorti et entretenu

$$\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2\omega\Omega}{\left[(\omega_y^2-\omega^2)^2+\omega^2\frac{\omega_y^2}{Q_y^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$ avec $\frac{\omega_y}{Q_y} = \frac{\lambda_y}{m}$

$$\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2\Omega}{\omega_y}\frac{1}{\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2+\frac{1}{Q_y^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| \underset{\omega=\omega_y}{=} \frac{2\Omega Q_y}{\omega_y}$$ car on minimise le dénominateur pour cette valeur de ω.

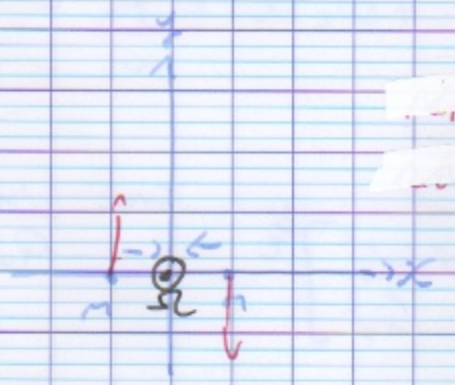
pour améliorer la sensibilité on peut :

$Q_y \nearrow$ ou si $m \nearrow \Rightarrow \omega_y \downarrow$

On peut augmenter Q_y pour réduire l'amortissement. Surtout on peut augmenter m mais on a des limites de densité donc au bout d'un moment on devra augmenter la taille.

Donc ce type de gyroscopes sont petits et portatifs mais au prix de la sensibilité Ω qui est liée à $\left|\frac{y}{x}\right|$.

4) schématiquement on aura :



La force de Coriolis est linéaire en vitesse donc la réponse de coriolis sera opposé pour les 2 masses.
↳ ceci sera constructif pour les mvt. de rotation

Cependant une accélération linéaire aura une contribution opposé pour les 2 masses (par ex. sur y) ! Ceci n'est pas le cas pour un système à une masse !

TD meca 9

exercice 6 Moment cinétique, moment dynamique

1) $\vec{L}_A = \int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R}$

2) Soient A et B 2 points de l'espace.

$\vec{L}_A = \int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R}$

$= \int_S dm_M \, \vec{AB} \wedge \vec{v}_{M/R} + \underbrace{\int_S dm_M \, \vec{BM} \wedge \vec{v}_{M/R}}_{=}$

$= \int_S dm_M \, \vec{AB} \wedge \vec{v}_{M/R} + \vec{L}_B$

or $\vec{AB}$ depend pas du point sur lequel on somme, donc

$\vec{L}_A = \vec{AB} \wedge \int_S dm_M \, \vec{v}_{M/R} + \vec{L}_B$

or $\int_S dm_M \, \vec{v}_{M/R} = \int_S dm_M \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$

$= \frac{d}{dt}\left[\int_S dm_M \, \vec{OM}\right]_R$

$= \frac{d}{dt}\left[M \vec{OG}\right]_R$

$= M \frac{d\vec{OG}}{dt} = \vec{p}$

d'où $\boxed{\vec{L_A} = \vec{L_B} + \vec{AB} \wedge \underbrace{m \vec{v_{G/R}}}_{\vec{P} \text{ dans cet exo.}}}$

• On dit que $\vec{L_A}$ est un champ antisymétrique ou équiprojectif

c.a.d. $(\vec{L_A} - \vec{L_B}) \cdot \vec{AB} = 0$

Torseur cinétique : torseur dont les éléments de réduction sont $\vec{L_A}$ et $\vec{P}$; $\{\vec{L_A}, \vec{P}\}$

3) Moment dynamique :

$$\boxed{\vec{\delta_A} = \int_{S} dm_M \, AM \wedge \vec{a}_{M/R}} \leftarrow \text{définition}$$

(S : système)

On a $\forall A, B$

$$\vec{\delta_A} = \int_S dm_M \, (\vec{AB} + \vec{BM}) \wedge \vec{a}_{M/R} \quad \text{(chasles)}$$

$$= \int_S dm_M \, \vec{AB} \wedge \vec{a}_{M/R} + \vec{\delta_B}$$

$$= \vec{\delta_B} + \underbrace{\vec{AB}}_{\text{cst car système matériel}} \wedge \overbrace{\int_S dm_M \, \vec{a}_{M/R}}^{\vec{R} \text{ dans l'exercice}}$$

5/XI/2019

TD méca 10

On peut aller plus loin :

$$\vec{\delta_A} = \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge \int_S dm_M \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R$$

$$= \vec{\delta_B} + \underbrace{\vec{AM} \wedge M\vec{a}_{G/R}}_{\vec{R}}$$

barycentre.

avec G barycentre de S

et $M = \int_S dm_M$

Finalement :

$$\boxed{\vec{\delta_A} = \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge M\vec{a}_{G/R}}$$

accélération du barycentre × la masse totale dans R.

Torseur dynamique : $\{\vec{\delta_A}, \vec{R}\}$

4) On a definit jusqu'ici le membre de gauche du PFD sous forme de torseur. Il nous reste maintenant de définir le champ de forces subit par le système.

On définit à present le champ densité volumique des forces subies par le système $\vec{f_M}$ de sorte que la résultante $\vec{F} = \int_S dV_M \vec{f_M}$.

moment des forces en A :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}_A} = \int_S dV_M \vec{AM} \wedge \vec{f_M}}$$

On peut verifier avec Chasles que $\boxed{\vec{\mathcal{M}_A} = \vec{\mathcal{M}_B} + \vec{AB} \wedge \vec{F}}$

On a donc : torseur des actions mécaniques $\{\vec{\mathcal{M}_A}, \vec{F}\}$

PFD :

$$\vec{F} = \int_S dV \, \vec{f_M} \overset{PFD_{\text{sur } M}}{=} \int_S \underbrace{dm_M}_{\rho(M)\, dV(M)} \, \vec{a}_{M/R} = \vec{R}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \int_S dV \, \vec{AM} \wedge \vec{f_M} = \int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{a}_{M/R} = \vec{\delta_A}$$

Relation fondamentale de la dynamique pour S : $\begin{cases} \vec{\delta_A} = \vec{\mathcal{M}_A} \\ \vec{R} = \vec{F} \end{cases}$

Rq : On peut distinguer les actions extérieures et intérieures

$$\vec{F} = \int_S dV_M \, \vec{f_M} = \underbrace{\int_S dV_M \int dV_N \, \vec{f}_{N \to M}} + \int_S dV_M \, \vec{f}_M^{\,ext}$$

on intègre sur N et sur M, comme $f_{N\to M} = -f_{M \to N}$ ceci vaut 0 !

$$= \int_S dV_M \, \vec{f}_{M\,ext} = \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \int_S dV_M \, \vec{AM} \wedge \vec{f_M}$$

$$= \int_S dV_M \int dV_N \, \vec{AM} \wedge \vec{f}_{N \to M} + \int_S dV_M \, \vec{AM} \wedge \vec{f}_{ext\,M}$$

M et N variables muettes, on peut les intervertir dans l'intégrale ou séparer en 2 parties $\vec{AN}$ et $\vec{AM}$.

$$= \frac{1}{2} \int_S dV_M \int dV_N \left[\underbrace{\vec{AM} \wedge f_{N \to M}}_{\vec{MA} \wedge f_{M \to N}} + \vec{AN} \wedge f_{M \to N} \right] + \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S dV_M \int_S dV_N \, \vec{MN} \wedge \vec{f}_{M \to N} + \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}$$

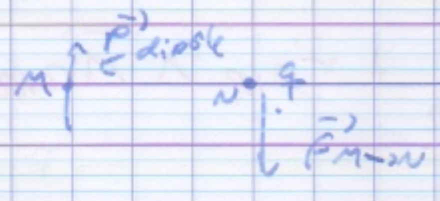
TD méca 11

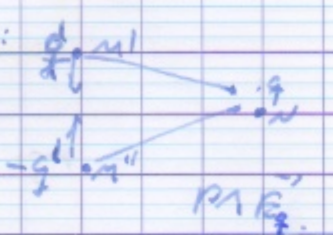
Si on suppose en outre que $\vec{f}_{M\to N} \parallel \vec{MN}$, alors

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}}$$

de même on suppose $\vec{F}_{M\to N} = -\vec{F}_{N\to M}$ (pas vrai avec des potentiels retardés)

rq : parfois $\vec{F}_{M\to N} \not\parallel \vec{MN}$

ex : 

ceci est un pb. de limite car en réalité : 

Dans la limite dipolaire il faut prendre en compte la distribution des moments de forces $\vec{p}\wedge\vec{E}$

L'électromagnétisme est riche en situations où nos hypothèses sont plus vraies.

5) ~~Alors~~ Par définition :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(\int_S dm_M \, \vec{AM}\wedge\vec{v}_{M/R}\right)$$

$$= \int_S dm_M \left[\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{v}_{M/R} + \vec{AM}\wedge\left(\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R\right]$$

On a pas supposé A fixe ! A est qq.
Il faut introduire un point fixe.

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_R = \int_S dm_M \left[\left(\frac{d\vec{AO}}{dt}\right)_R \wedge \vec{v}_{M/R} + \cancel{\underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\vec{v}_{M/R}} \wedge \vec{v}_{M/R}}\right] + \vec{\delta}_A$$

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = -\vec{v}_{A/R} \wedge \int_S dm_M \vec{v}_{M/R} + \vec{\delta_A}$$

$$= -\vec{v}_{A/R} \wedge M\vec{v}_{G/R} + \vec{\delta_A}$$

finalement :

$$\boxed{\vec{\delta_A} = \left(\frac{dL_A}{dt}\right)_R + \vec{v}_{A/R} \wedge \vec{M}v_{G/R}}$$

rq : si $\vec{v}_{A/R} = \vec{0}$ ou si $A = G$ on retrouve la formulation classique du théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\vec{\delta_A} = \left(\frac{dL_A}{dt}\right)_R}$$

6) On formule alors le théorème du moment cinétique :

Si A est un point fixe ou le barycentre G du système, on a :

$$\left.\frac{dL_A}{dt}\right)_R = \vec{M}^A_{ext}$$

7) Pour un solide indéformable, on a :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

rq : $(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{AB} = 0$ équiprojectivité $\rightarrow$ solide indéformable.

TD meca 12

ceci est équivalent à : $\frac{d\vec{AB}}{dt} \cdot \vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d\|\vec{AB}\|^2}{dt} = 0$ à nouveau indéformable

Pour les solides indéformables, on définit le torseur cinématique : $\{ \vec{v_A}, \vec{\Omega}_{S/R} \}$

exercice 7 : Théorème de König :

1) Soit $\mathcal{R}$ un référentiel et $\mathcal{R}^*$ le référentiel barycentrique de S associé.

On définit :

$$\boxed{\vec{L}_A^* = \int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}}$$

$\forall$ t :

$$L_B^* = \int_S dm_M \, \vec{BM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}$$

$$= \int_S dm_M (\vec{BA}) \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*} + \int_S dm_M (\vec{AM}) \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}$$

$$= \vec{BA} \wedge \int_S dm_M \, \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*} + L_A^*$$

or $\vec{v}_{M/\mathcal{R}^*} = \left.\frac{d\vec{GM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}^*}$ et donc $\int_S dm_M \, \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_S dm_M \, \overrightarrow{GM}\right)_{\mathcal{R}^*} = 0$$ par définition du barycentre du système G.

donc $\boxed{L_A^* = L_B^* = L^*}$

2) Théorème de König 1 :

$$\vec{L}_A = \int_S dm_M \, \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

$$= \int_S dm_M \, \overrightarrow{AM} \wedge \left[\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}\right]$$

↳ car $dm \, \overrightarrow{GM} = 0$!

$$= M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + L^*$$

d'où : $\boxed{L_A^{(\mathcal{R})} = \vec{L}^* + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}}}$

3) Théorème de König 2

$$E_c = \frac{1}{2}\int_S dm_M \, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_S dm_M \left[\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}\right]^2$$

indep. de M ⇒ sort de intégrale

$$= \frac{1}{2}\int_S dm_M \left[\vec{v}_{G/\mathcal{R}}^{\,2} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}^{\,2} + 2\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}^*}\right]$$

TD meca 13

$$E_c = \frac{1}{2} M \vec{v_G}^2 + E_c^* + \vec{v}_{G/R} \cdot \underbrace{\int_S dm_M \vec{v_M}_{/R^*}}_{=0}$$

$\left(\frac{d}{dt} (\underbrace{\vec{O^*G}}_{0} + \vec{GM}) \right)$ car fixes, $dm \vec{GM} = 0$

$$\boxed{E_c^{(R)} = E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{v_G}^2}$$

exercise 9 Système Terre-Lune :

Soit $\mathcal{R}$ supposé Galiléen.

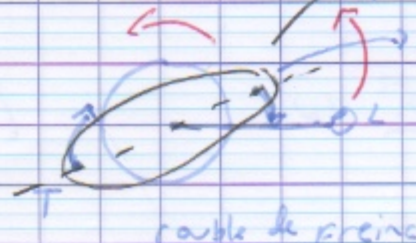
1) barycentre G : $\int_S dm \vec{GM} = 0 \Leftrightarrow \int_T \vec{GM} dm_T + \int_L dm_L \vec{GM} = 0$

Le barycentre G du système Terre-Lune est défini par :

$$\vec{GT} + \frac{M_L}{M_T} \vec{GL} = \vec{0} \quad \text{avec } \frac{M_L}{M_T} \lesssim 10^{-2}$$

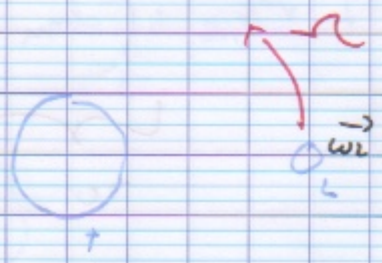
donc $\simeq \vec{GT} = \vec{0}$

2) Effet de marée :



couple de freinage ⇒ + 2ms / siècle pour T jour

3)



$\vec{\Omega} = \vec{\omega_L}$ car on observe sur terre toujours la même face de la lune.

Ceci est dû au verrouillage orbitale par effet de marée (Tidal locking), plus important sur la lune que sur la Terre.

4) Moment cinétique Total calculé au centre de la Terre :

$$\vec{L}_T^{\,Total} = \vec{L}_T^{\,Terre} + \vec{L}_T^{\,Lune}$$

$$= \vec{L}^{*}_{Terre} + \underbrace{\vec{L}_T^{\,orbital\ lune} + \vec{L}^{*}_{lune}}_{\text{König}}$$

5) Pour $\vec{L}^{*}_{Terre} = \dfrac{2 M_T R_T^2}{5} \vec{\omega_T}$

mécanique du solide avec indication Q.8.

$\vec{L}^{*}_{lune} = \dfrac{2 M_L R_L^2}{5} \vec{\omega_L}$

pour des boules incompressibles homogènes.

or $\dfrac{\|\vec{L}^{*}_{lune}\|}{\|\vec{L}^{*}_{Terre}\|} = \dfrac{M_L R_L^2 \|\vec{\omega_L}\|}{M_T R_T^2 \|\vec{\omega_T}\|} \leq 10^{-3}$

$\sim 10^{-2}$ $\sim 10^{-1}$

TD meca IV

alors on se permet de négliger L^*_{lune}.

alors $\vec{L}_T^{total} = \vec{L}^*_{terre} + \vec{L}_T^{orbital\ lune}$

or $L_T^{orbital\ lune} = \vec{TL} \wedge M_L \vec{v}_{L/R_T^*}$

distance Terre Lune

$$= M_L d_{TL} v_{L/R_T^*} \vec{u}_z$$

$$= M_L d_{TL} \left(d_{TL}\Omega\right) \vec{u}_z$$

Pour un mouvement orbital circulaire de la lune on va se placer dans le référentiel de centre T où la lune est fixe.

cte. gravit. attraction gravitationelle

On a alors $\cancel{M_L}\Omega^2 d_{TL} = \frac{G_N M_T \cancel{M_L}}{d_{TL}^2}$

Force centrifuge car ref. tournant

on trouve alors $\Omega = \left(\frac{G_N M_T}{d_{TL}^3}\right)^{1/2}$

donc finalement :

$$\vec{L}_T^{total} = \left[\frac{2M_T R_T^2}{5}\omega_T + M_L d_{TL}^2 \frac{(G_N M_T)^{1/2}}{d_{TL}^{3/2}}\right]\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_T^{total} = \left[\frac{2M_T R_T^2}{5}\omega_T + G_N^{1/2} M_T^{1/2} M_L d_{TL}^{1/2}\right]\vec{u}_z}$$

7) On applique le théorème du moment cinétique (en $T \equiv G_{Terre}$ fixe)

$$\vec{L} \cdot \vec{u_z} = \left[\frac{2 M_T R_T^2}{5} \omega_T + G^{1/2} M_T^{1/2} M_L d_{TL}^{1/2} \right]$$

$$= cte$$

car système isolé donc $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext} = 0$

Comme on constate que $\omega_T \downarrow \implies d_{TL} \nearrow$