Dynamique des solides indéformables. Approximation gyroscopique.

1. Moment cinétique d'un solide et tenseur d'inertie

On considère un solide indéformable S en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$.

1. Rappeler la forme du champ des vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ pour les points M de S dans $\mathcal{R}$.

2. A l'aide de la question précédente et du théorème de König concernant le moment cinétique, exprimer le moment cinétique $\vec{L}_A$ de S en un point A quelconque en fonction du vecteur vitesse angulaire de rotation $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ de S dans $\mathcal{R}$. On fera en particulier apparaître les composantes $I_{ij}^{(G)}$ du tenseur d'inertie de S en G dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de l'espace. Pourquoi a-t-on tout intérêt à choisir $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ fixe dans le référentiel lié à S ?

3. En supposant que O soit un point de S fixe dans $\mathcal{R}$, exprimer $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ en fonction de $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$. En substituant dans l'expression de $\vec{L}_O$ obtenue par le théorème de König, obtenir $\vec{L}_O$ en fonction de $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$. On exprimera en particulier les composantes $I_{ij}^{(O)}$ du tenseur d'inertie de S en O dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de l'espace, en fonction des composantes du tenseur d'inertie de S en G, dans cette même base.

4. Qu'appelle-t-on *base principale d'inertie* ? Qu'appelle-t-on *moment principal d'inertie* ? Quelle(s) relation(s) entre ces derniers les éventuelles symétries continues de S imposent-elles ?

5. Rappeler la définition des *angles d'Euler*. Expliquer les notions de *précession*, *nutation* et *rotation propre*.

2. Mouvement d'Euler-Poinsot d'un solide et polhodie de Chandler

On s'intéresse au mouvement d'un solide S isolé dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

1. Ecrire les équations du mouvement pour S dans la base principale d'inertie, aussi connues sous le nom d'*équations d'Euler*.

2. En supposant que S est un solide de révolution, c'est-à-dire présentant un axe Δ de symétrie qu'on supposera aligné avec l'axe de rotation propre, simplifier les équations d'Euler et les résoudre. Décrire le mouvement du vecteur vitesse de rotation angulaire $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ dans le référentiel lié à S.

On assimile la Terre à un solide de révolution ellipsoïdal, aplati aux pôles, indéformable et homogène.

3. Justifier brièvement que $I_1 = I_2 < I_3$.

En réalité, dans le modèle ci-dessus, on peut estimer que $\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{305}$. On supposera en outre que la Terre est un système isolé.

4. Décrire le mouvement du pôle Nord terrestre – appelé polhodie (du grec πόλος pour pôle et ὁδός pour chemin) de Chandler – dans le référentiel terrestre. Exprimer en particulier sa période en fonction de la période de rotation propre de la Terre. En réalité la polhodie de Chandler a une période de 432 jours. A votre avis, comment s'explique cette différence ?

3. L'approximation gyroscopique

Un *gyroscope* est un solide de révolution tournant à grande vitesse angulaire autour de son axe de symétrie et suspendu de façon parfaite autour d'un point fixe O. Son mouvement de rotation autour de O est donc

totalement libre – cf. figure 1.

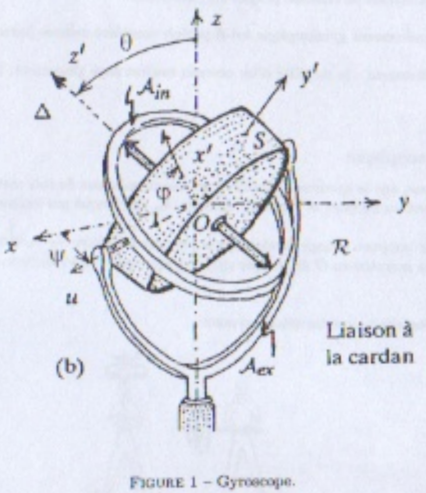


FIGURE 1 – Gyroscope.

1. Définir l'*approximation gyroscopique*. Dans le cadre de cette approximation, comment est orienté le moment cinétique $\vec{L}_O$ du gyroscope au point O ?

On distingue essentiellement deux cas, suivant que le centre de masse G du gyroscope coïncide ou non avec le point O.

2. Gyroscope équilibré, $G = O$.

(a) Pourquoi, en l'absence d'actions mécaniques autres que celle du champ de pesanteur, le moment en O des forces extérieures appliquées au gyroscope est-il nul ? Quelle est la propriété essentielle d'un gyroscope équilibré ?

(b) Comment procéderiez-vous pour détecter la rotation diurne de la Terre ? Expliquer le rôle joué par le(s) gyroscope(s) dans la navigation aérienne, marine et surtout sous-marine, dans le guidage automatique des satellites artificiels et, plus généralement, dans le *guidage inertiel*. Quelle est, selon vous, la principale limite de ce type de guidage ?

3 Gyroscope déséquilibré, $G \neq O$.

(a) Le gyroscope est déséquilibré, c'est-à-dire que son centre de masse ne coïncide pas avec le point fixe O. On note ℓ la distance qui sépare G de O. Etablir que, dans le cadre de l'approximation gyroscopique et en l'absence d'actions mécaniques autres que celle du champ de pesanteur, les équations du mouvement du gyroscope sont de la forme

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{\omega} \wedge \vec{L}_O ,$$

où $\vec{\omega}$ est un vecteur que l'on précisera.

(b) Préciser le type de mouvement observé. Montrer en particulier que le gyroscope n'a pas de mouvement de nutation et que sa vitesse de rotation propre est constante.

(c) Pourquoi le mouvement gyroscopique est-il parfois considéré comme paradoxal ?

(d) Expliquer brièvement : la stabilité d'un cerceau roulant sans glissement; le phénomène de précession des équinoxes.

4. Couple gyroscopique

On considère à présent que le gyroscope équilibré est rendu solidaire de son carter : l'anneau extérieur $\mathcal{A}_{ex}$ est bloqué par rapport au support et l'anneau inférieur $\mathcal{A}_{in}$ est bloqué par rapport à $\mathcal{A}_{ex}$ – cf. figure 1.

1. Montrer que si le support change d'orientation (vitesse angulaire de rotation $\vec{\omega}_{support}$), le gyroscope exerce sur celui-ci un moment en O dit *couple gyroscopique* que l'on explicitera. Comment mesureriez-vous ce couple ?

2. Expliquer la constatation expérimentale suivante :

FIGURE 2 – Une personne, montée sur un plateau immobile, porte une roue en rotation rapide autour d'un axe initialement horizontal. Lorsqu'elle oriente l'axe de rotation de la roue selon la verticale, le plateau sur lequel elle se trouve se met à tourner dans une direction opposée à celle de la roue.

3. Comment réaliser un *actionneur gyroscopique* afin par exemple de contrôler l'allure d'un satellite ? Comment réaliser un dispositif anti-roulis gyroscopique ?

TDmeca 25

Dynamique des solides indéformables approximation gyroscopique

Exercice 1 Dynamique des solides

1) Pour tout point M de S :

$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{G/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{GM}}$$

2) D'après le théorème de König :

$$\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_{G/R} + \vec{L}^*$$

avec $\vec{L}^* = \vec{L}_G^* = \int_S dm_M \, \vec{GM} \wedge \vec{v}_{M/R^*}$

car $\vec{v}_{G/R^*} = \vec{0}$ par définition.

$$= \int_S dm_M \, \vec{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{/R} \wedge \vec{GM} \right)$$

$$= \int_S dm_M \left[\vec{GM}^2 \vec{\Omega}_{S/R} - \left(\vec{GM} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \right) \vec{GM} \right]$$

Dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_3)$:

$$L_i^* = \int_S dm_M \left[\vec{GM}^2 \Omega_i - \sum_{j=1}^{3} GM_j \Omega_j GM_i \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \underbrace{\int_S dm_M \left[\vec{GM}^2 \delta_{ij} - GM_i GM_j \right]}_{I_{ij}^{(G)}} \Big\} \Omega_j$$

donc $\boxed{L_i^* = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}^{(G)} \Omega_j}$

rq : Dans une base liée au solide $I_{ij}^{(G)}$ est une cte du mouvement.

3) Soit O un point fixe dans $\mathcal{R}$, alors $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \cancel{\vec{v}_{O/\mathcal{R}}}^{=0} + \Omega_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{OG}$

$$\vec{L_O} = \vec{OG} \wedge M\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{L}^*$$

$$= \vec{OG} \wedge M(\vec{\Omega} \wedge \vec{OG}) + \vec{L}^*$$

$$= M\left[(\vec{OG}^2)\vec{\Omega} - (\vec{OG}.\vec{\Omega})\vec{OG}\right] + \vec{L}^*$$

$I_{ij}^{(O)}$

4) base principale d'inertie :

$I_{ij}^{(\dots)}$ a des coefficients réelles et est symétrique.

$\Rightarrow$ $I_{ij}^{(\dots)}$ est diagonalisable.

$\boxed{\text{On appelle base principale d'inertie, une base orthonormée directe où } I_{ij}^{(\dots)} \text{ est diagonale.}}$

Dmerci 2C

Les valeurs propres de I_{ij} sont les moments principaux d'inertie.

5) angles d'Euler : à voir dans un bouquin.
↳ permettent le passage d'une base à une autre.

Exercice II mouvement d'Euler – Poinsot d'un solide et polhodie de Chandler

1) $\left(\dfrac{d\vec{L_G}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{d\vec{L_G}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{L_G} = \vec{0}$

rep. du solide

On pose $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ $I^{(G)} = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$

$\vec{L_G} = \begin{pmatrix} I_1 \Omega_1 \\ I_2 \Omega_2 \\ I_3 \Omega_3 \end{pmatrix}$

alors $\vec{\Omega} \wedge \vec{L_G} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_1 \Omega_1 \\ I_2 \Omega_2 \\ I_3 \Omega_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)\, \Omega_3 \Omega_2 \\ (I_1 - I_3)\, \Omega_1 \Omega_3 \\ (I_2 - I_1)\, \Omega_1 \Omega_2 \end{pmatrix}$$ d'où :

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \frac{I_3 - I_2}{I_1}\, \Omega_2 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{I_1 - I_3}{I_2}\, \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{I_2 - I_1}{I_3}\, \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned}\right\} \text{Equations d'Euler}$$

En général ces équations sont peu utiles car on est dans le rep. du solide. Sauf ! pour la Terre !

3) Symétrie de révolution d'axe $\vec{u_3}$ pour la Terre :

$\Rightarrow I_1 = I_2$

Par ailleurs l'aplatissement de la Terre fait que :

$$I_1 = I_2 < I_3$$

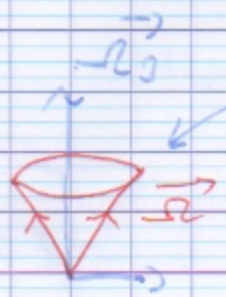
TD meca 27

Si $I_1 = I_2$ alors $\dot{\Omega}_3 = 0$

$\Rightarrow \Omega_3 = cte$

d'où :
$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \underbrace{-\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\,\Omega_3}_{cte} \cdot \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \underbrace{-\dfrac{I_1 - I_3}{I_1}\,\Omega_3}_{cte}\,\Omega_1 \end{cases}$$

2 équations couplées qui donnent :



rotation autour d'une "moyenne" $\vec{\Omega}_3$!

pulsation $\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\,\Omega_3$!

Exercice 3 approximation gyroscopique :

1) approximation gyroscopique :

$$\left\| \vec{L}_0 - I_3\,\Omega_3\,\vec{u}_3' \right\| \ll \left\| \vec{L}_0 \right\|$$

moment du solide constituant le gyroscope en O

↓

intersection des 2 axes voir Ex 1.

composante du moment cinétique suivant l'axe de rotation

symétrie de révolution du solide !

2) Gyroscope équilibré $G = O$

a) $\left(\dfrac{d\vec{L_o}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L_o} = \text{cte}$

propriété du gyroscope équilibré.

b) On a déjà entretenu le gyroscope pendant 24 h
et comme $\vec{M_{z'}} = \text{cte}$ (d'après approximation gyroscopique)
on a que l'axe ne bouge pas tandis que la terre bouge.

utile dans les sous-marins!

pt! pt.

3) Gyroscope déséquilibré, $G \neq O$

a) Théorème du moment cinétique:

$$\left(\frac{d\vec{L_o}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

$\vec{OG}$ est colinéaire à $\vec{L_o}$ dans l'approximation gyroscopique

$$\Rightarrow \quad = l \frac{\vec{L_o}}{\|\vec{L_o}\|} \wedge m\vec{g}$$

$$= \underbrace{\frac{-ml\vec{g}}{\|\vec{L_o}\|}}_{\vec{\Omega}\,!} \wedge \vec{L_o}$$

TD meca 28

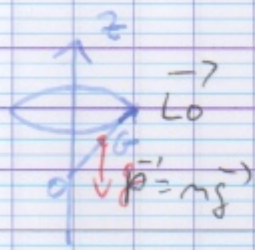
on déduit que $\vec{\omega} = \dfrac{-m\,l\,\vec{g}}{\|\vec{L_0}\|}$

b) on a donc • $\vec{L_0} \cdot \dfrac{d\vec{L_0}}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{L_0}\| = cte$

$\Rightarrow \Omega_3 = cte$. d'après l'approximation gyroscopique.

• $\dfrac{d\vec{L_0}}{dt} \cdot \vec{u_z} = 0 \Rightarrow \vec{L_0} \cdot \vec{u_z} = cte$

alors :



c) surprenant car une contrainte vertical (poid) fait que le gyroscope se met à tourner !

d) —

Ex 4 Couple gyroscopique

1) On suppose toutes les liaisons bloquées.

plateau tournant.

Théorème du moment cinétique !

$$\left(\frac{d\vec{L_0}}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_0^{supp \to gyro}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{L_0}}{dt}\right)_{support} + \vec{\Omega}_{supp/R} \wedge \vec{L_0} = \vec{\mathcal{M}}_0^{supp \to gyro.}$$

$\downarrow$

comme gyro fixé sur le support ses axes sont fixes, donc

$$\left(\frac{d\vec{L_0}}{dt}\right)_{support} = 0 \quad \text{car } \vec{L_0}\ \text{support} = \text{cte.}$$

Donc $\vec{\mathcal{M}}_0^{gyro \to support} = \vec{L_0} \wedge \vec{\omega}_{support}$

3) en mesurant le moment du couple gyroscopique, permet de contrôler un mouvement.

$\hookrightarrow$ si ex. un satellite tourne, le couple gyroscopique résultant peut servir pour l'asservissement et savoir de combien il peut tourner pour compenser le mouvement.