

Titre : Ondes stationnaires

Présentée par :

Rapport écrit par :

Correcteur :

Date : 05/05/2020

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Dunod PCSI-PSI et PC			
Cours Mathieur rubaud MQ			

Plan détaillée

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Prérequis :

Equation d'Alambert
Onde plane/propagation
Fonction d'onde/équation de Schrödinger

Plan:

- I – Construction des ondes stationnaires (OS)
- II – Étude des ondes stationnaires dans une corde fixée à ses extrémités
- III – États stationnaires en mécanique quantique

Introduction :

Quel lien pour lier MQ et mécanique classique ? on verra corde de Melde et particule quantique dans un puits. On impose des conditions limites aux extrémités qui vont nous imposer une restriction sur les ondes qui peuvent exister entre les 2 extrémités.

Rq. On étudiera le puit infini.

I)

On considère 2 ondes planes progressives se propageant selon x dans le sens croissant et décroissant respectivement.

Définir nombre d'onde avec relation de dispersion.

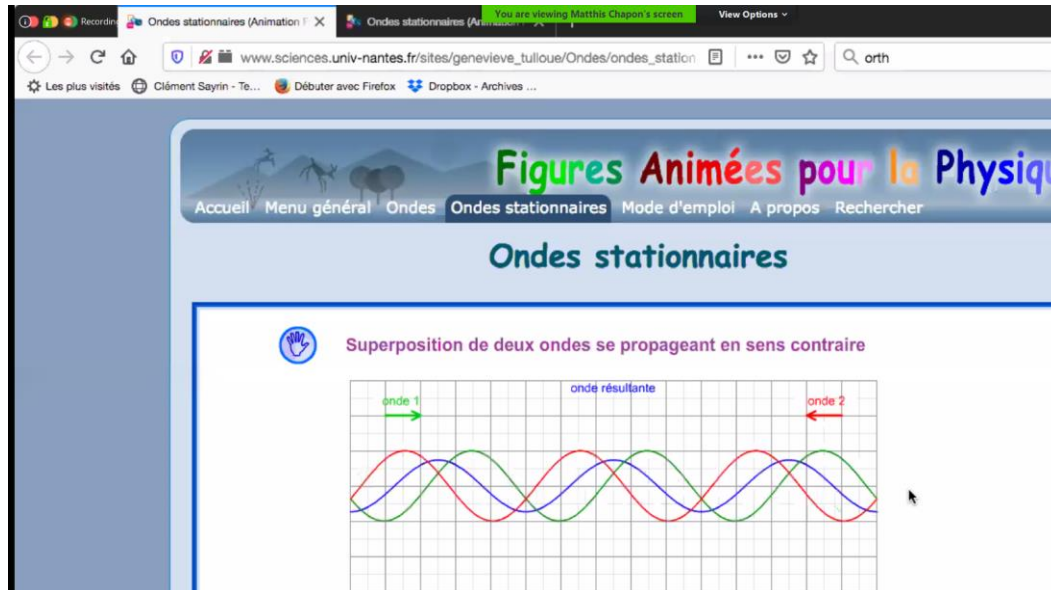
La somme des 2 ondes est l'onde totale dans le milieu. On peut par des relations de trigonométrie arriver à l'expression finale.

I/ Construction des ondes stationnaires (OS)

$$S_+(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_+)$$
$$S_-(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_-)$$
$$S(x,t) = S_+(x,t) + S_-(x,t)$$
$$= 2 \times \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_+ + \varphi_-)\right) \times \cos\left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_- - \varphi_+)\right)$$

On aboutit à une onde stationnaire harmonique avec une amplitude qui dépend du temps ($f(t)$) et de l'espace ($G(x)$).

Montrer simulation



O distingue des points particuliers où l'amplitude est maximale tout comme des points où l'amplitude est nulle pour tout t .

6 :22

Les maxima obéissent à la condition:

I. Combinaison des ondes stationnaires

$$s(x, t) = 2A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi)$$

$$kx + \varphi = m\pi$$

$$x = \frac{m\pi}{k} - \frac{\varphi}{k}$$

$$x = \frac{m\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k}$$

} Ventres distants de $\frac{\lambda}{2}$

Et ils sont distants de $\lambda/2$, ce sont des ventres.

En faisant le même raisonnement avec les cas où la fonction est nulle on trouve :

I. Construction des ondes stationnaires

$$s(x,t) = 2A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

$$kx + \psi = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$L \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4} + \frac{m\lambda}{2} - \frac{\psi}{k}$$

Remonter la simulation pour discuter quand on rencontre 2 ondes qui vont dans le sens opposée.
Reflexion !

Corde de Melde

10 :14

II

1) Régime libre

Décrire le système de la corde de Melde (neuds aux extrémités). On commence par la laisser vibrer librement.

On écrit l'équation de D'alambert correspondante

ondes stationnaires en Mécanique Classique et quantique

Eq. de D'Alembert
- ondes planes/propagatives
- Eq d'onde / Eq de Schrödinger

II - /
① Rég. libre

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{array} \right\}$$

On cherche des solutions stationnaires que on reinjecte dans l'équation de D'Alembert, on sépare les variables et on trouve 2 équations indépendantes !

$$y(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)g''(t) = 0$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = K$$

$$\begin{cases} f''(x) - K f(x) = 0 \\ g''(t) - K c^2 g(t) = 0 \end{cases}$$

On sait résoudre ces équations

14 :17

On commence par étudier la première (dépendance spatiale).

On étudie les différents cas de figure selon la valeur de K.

$K=0$ fonction affine ne peut pas exister dans nos conditions limites.

$K>0$ somme des 2 exponentielles donc divergence en $x = \pm \infty$ donc fonction nulle est la seule physique dans ce cas

$K<0$ on retrouve la fonction de l'oscillateur harmonique avec les solutions

$\text{si } K=0: f(x)=\alpha x + \beta$
 $\text{si } K>0: f(x)=\alpha e^{\sqrt{K}x} + \beta e^{-\sqrt{K}x}$
 $\text{si } K<0: K=-k^2$
 $f''(x) + k^2 f(x) = 0$
 $f(x) = A \cos(kx + \phi)$

On étudie la deuxième équation pour $K < 0$, donner directement la solution.

$K < 0: K = -k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$
 $g''(t) + k^2 g(t) = 0$
 $g(t) = B \cos(\omega t + \phi)$
 $g(x,t) = Y_0 \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \phi)$

On trouve alors la forme de l'onde totale. On a des constantes à déterminer qui dépendent des conditions limites.

2) Modes propres

On a les conditions limites égales à 0

On détermine la phase


$$y(x,t) = \frac{1}{2} \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \psi)$$

② Modes propres

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

$$\cos(kx + \phi) = 0$$

$$\cos(\phi) = 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + p\pi$$


21 :20

Alors $\cos(kx + \phi) = \sin(kx)$

Condition limite sur L :

Ondes stationnaires en
Mécanique Classique et quantique

$$\cos(kx + \phi) = \sin(kx)$$

C.L. $x = L$:

$$\sin(kL) = 0$$

$$kL = m\pi$$

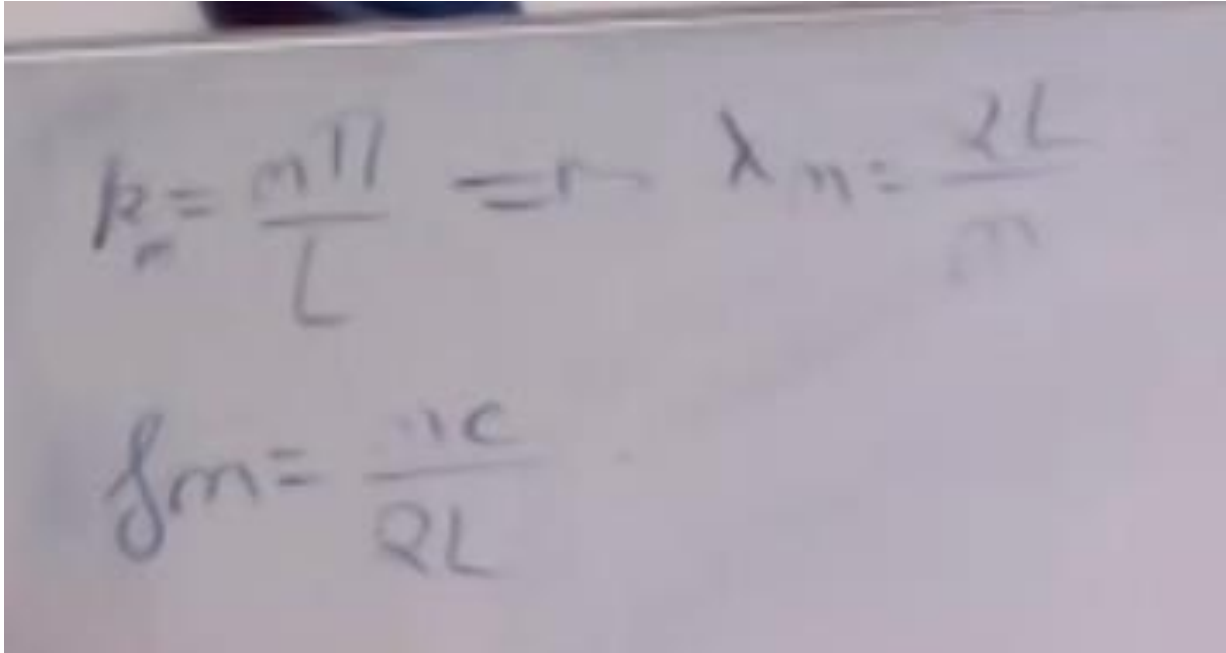
d'où $k = \frac{m\pi}{L}$

& $\omega = kc = \frac{m\pi c}{L}$

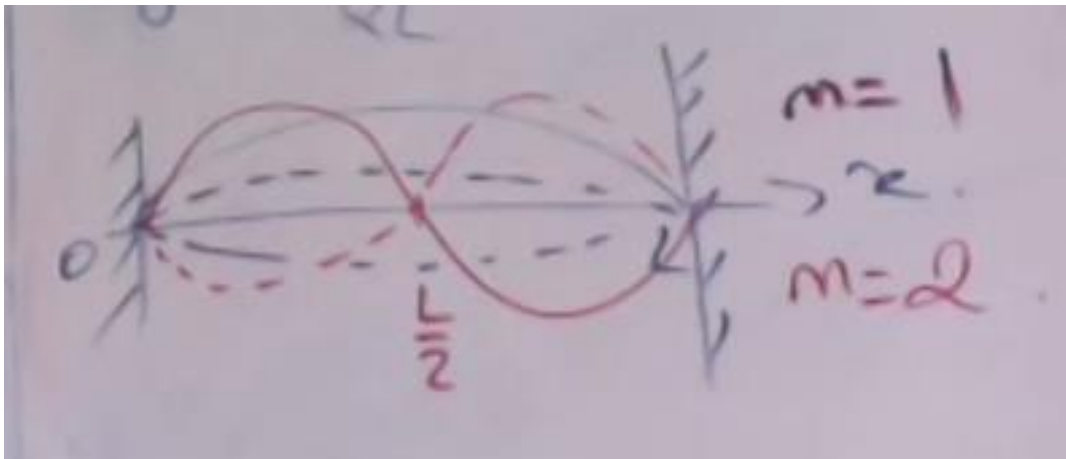
$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L} + \phi\right) \cos\left(\frac{m\pi ct}{L} + \psi\right)$$

On a des conditions sur la fréquence ω qui peut exister, on appelle ceci les modes propre.

En effet :


$$k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

Parler des modes et dessiner les 2 premiers



Quand on pince une corde, par exemple de guitare on a en réalité la superposition de plusieurs modes.

3 Etude énergétique {26 :00}

On balance la formule de l'énergie totale (énergie cinétique linéique et potentielle linéique).

On choisit un mode n et on l'étudie.

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y_m}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y_m}{\partial x} \right)^2$$

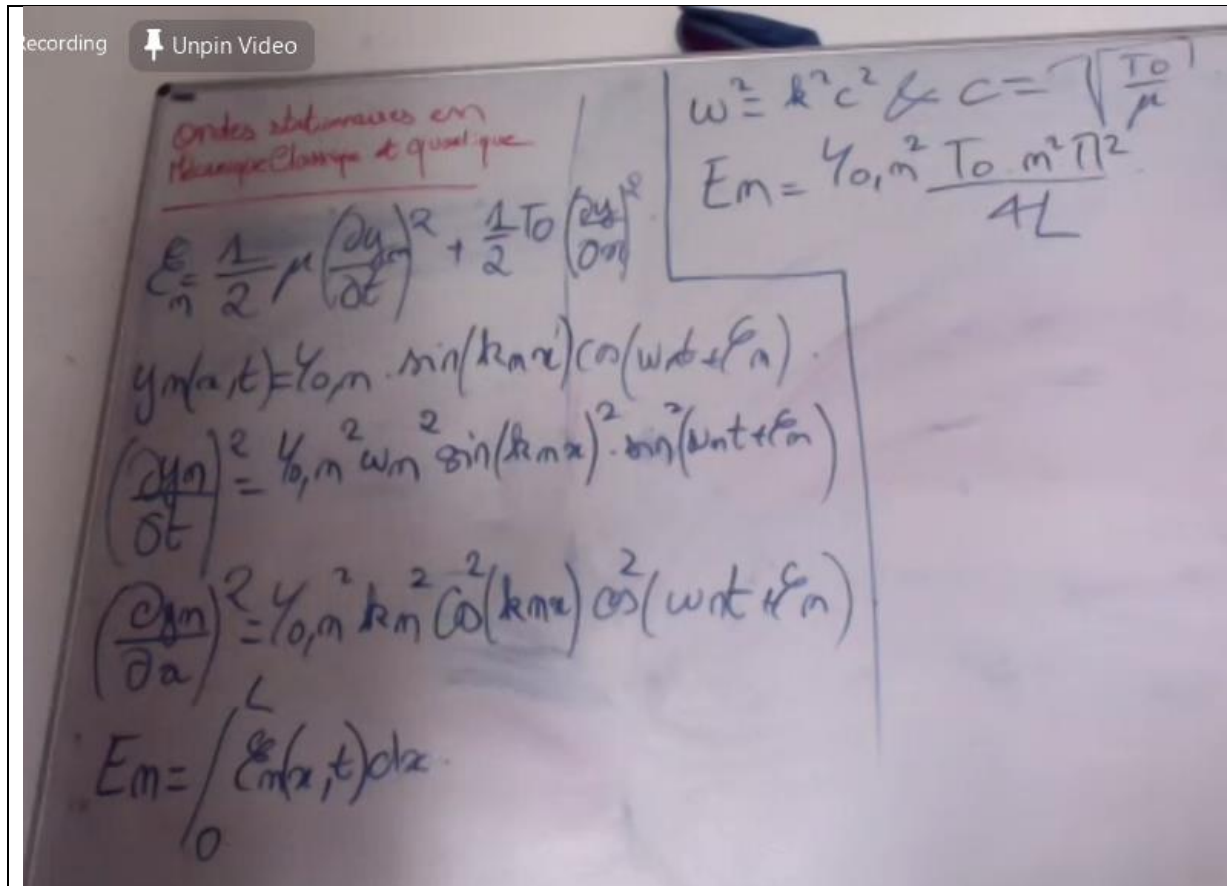
$$y_m(x,t) = y_{0,m} \sin(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi_m)$$

$$\left(\frac{\partial y_m}{\partial t} \right)^2 = y_{0,m}^2 \omega_m^2 \sin^2(k_m x) \sin^2(\omega_m t + \phi_m)$$

$$\left(\frac{\partial y_m}{\partial x} \right)^2 = y_{0,m}^2 k_m^2 \cos^2(k_m x) \cos^2(\omega_m t + \phi_m)$$

Alors l'énergie totale dans la corde est l'intégrale de cette énergie linéique entre 0 et L.

Donner directement le résultat On n'a pas le temps de faire ces calculs.

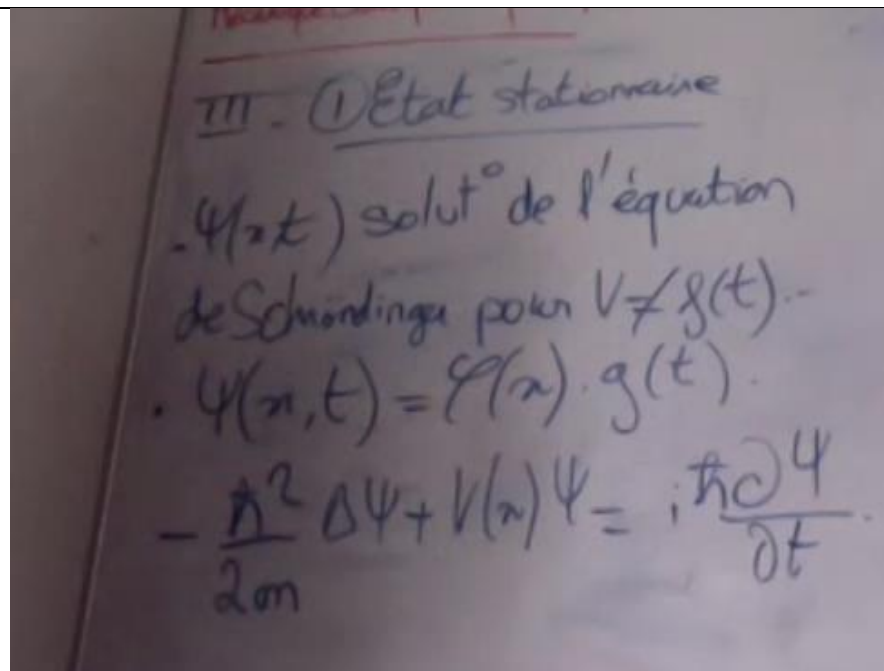


Nous allons comparer ceci à la MQ

III – 30 :20

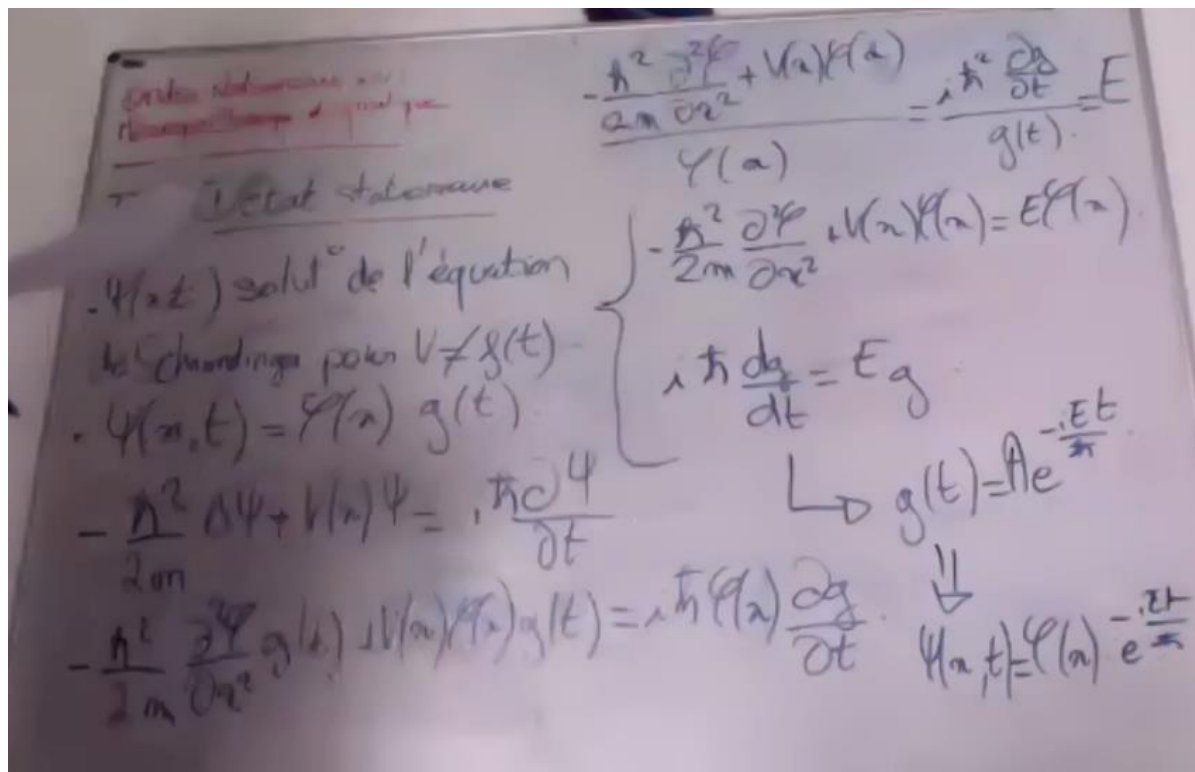
1) Etat stationnaire

On cherche des solutions stationnaires. Donc une fonction d'onde avec une forme particulière, on injecte ceci dans Heisenberg. Hamiltonien ne dépend pas du temps.



On arrive à l'équation d'onde stationnaire de Schrödinger.

Introduire l'énergie. Donner la solution pour la partie temporelle.

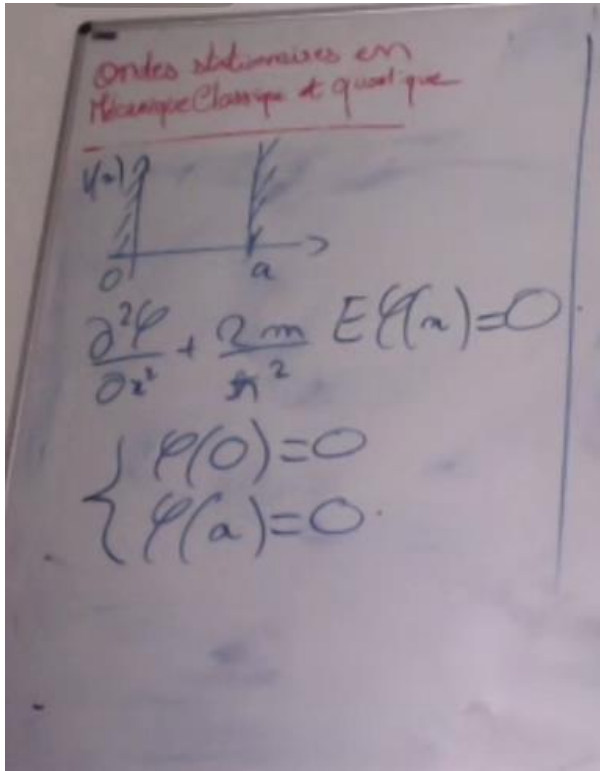


Intéressant, ce qui nous intéresse est l'intégrale du module de la densité de probabilité, donc la phase disparaît et cette probabilité ne dépend que de x .

2) Puit de potentiel infini {35 :30}

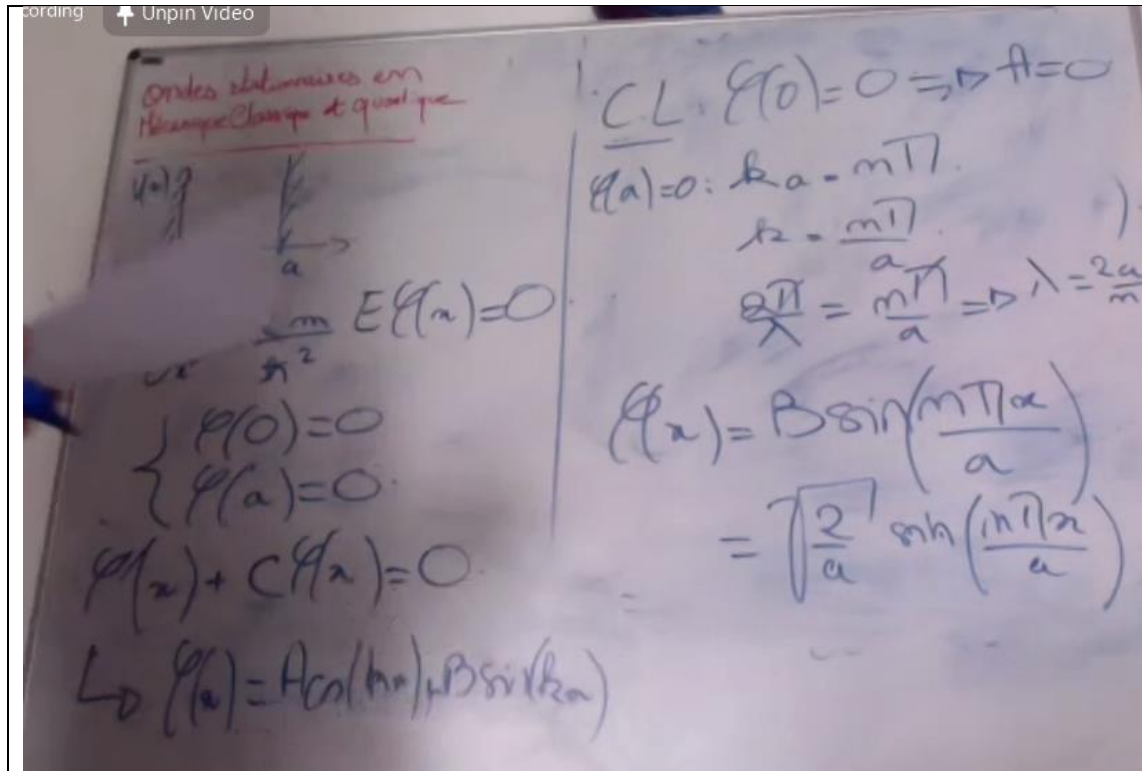
Traiter le cas infini pour gagner de temps.

Introduire les conditions aux limites.



On résout. Et on trouve la forme de la partie spatiale.

ON traite les conditions aux limites et on trouve la quantification du nombre d'onde. Donner directement le résultat en disant que on intègre pour avoir probabilité égale à 1.



On trouve l'énergie cinétique avec la marche de potentiel avec $(p^2)/2m$

Conclusion

Questions posées par l'enseignant

Peux-tu nous définir une onde stationnaire proprement ?

C.F. dictionnaire de physique

Que dirait tu d'une onde évanescence, est-elle stationnaire ?

Que t'autorise à ne considérer que des ondes harmoniques ?

Théorie de Fourier et que le fait que l'équation de D'Alembert est linéaire.

Dans quelle cas particulier la simulation se fait ?

Réflexion parfaite, pas de pertes. Ex. réflexion entre 2 conducteurs (dépend de la permittivité ?)

À quoi ressemble l'onde stationnaire si une des 2 ondes a une amplitude plus grande ?

On n'aura pas des nœuds mais des minima à leur place ou l'amplitude est non nulle.

Taux d'onde stationnaire ?

Hypothèses principales pour établir l'équation de d'Alembert dans une corde de Melde ?

Filiforme, on néglige le déplacement de la corde selon x , on néglige l'influence de la pesanteur, la corde est sans raideur, petits angles (l'essentiel des mvt son selon z /verticaux)

Quelle caractéristique caractérise un mode ?

Nombre d'onde, fréquence et longueur d'onde.

Quand on passe d'un mode à l'autre la célérité varie ?

Non, pas dans la corde de Melde elle est non dispersive

Comment peut-on voir un mode ?

Comment aurait-tu alimenté ton vibreur ?

Avec un amplificateur

Pourquoi as-tu besoin d'un amplificateur ?

On a besoin d'adapter l'impédance

Pourquoi un GBF a une grande impédance ?

Il utilise des courants faibles.

Le vibreur a besoin de gros courants (relativement) pour pouvoir fonctionner, il a donc une petite impédance.

Si la célérité doublait, qu'est-ce qu'on observerait dans la corde ?

On verrait alors la moitié des fuseaux (on double la longueur d'onde)

Une corde plus tendue sera retissante à faire plus d'oscillations.

Question 12 bis : C'est quoi le spectre d'une corde de guitare ?

Question 13 : Qu'est-ce qui décide la répartition de l'énergie dans les modes lors d'une excitation ?

Question 14 : Pourrais-tu décrire sur une corde oscillante où se concentre l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, l'énergie mécanique

Ventres : énergie cinétique

Nœuds : énergie potentielle

Tu peux nous en parler des modes résonants ? Dif. Entre mode propre et mode résonant ?

Résonance en vitesse et en amplitude.

Tu as parlé de confinement longitudinal seulement, tu peux ouvrir sur un confinement latéral ?
Cable coaxial, fibre optique, le guide d'ondes, on fait apparaître des modes accessibles !
(monomode, multimode)

Dans quel cas le Hamiltonien ne dépend pas du temps (le potentiel ne dépend pas du temps) ?
électron isolé (pas de champ électrique pas d'autres atomes/électrons),

Qui a proposé le modèle de l'atome d'Hydrogène quantifié et quand ?
Début du XX siècle, Bohr 1913.

1 Commentaires donnés par l'enseignant

Économiser du temps quand on résout les équations indépendantes, on fait une et on balance le résultat de l'autre.

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Bibliographie conseillée