

Le vecteur de Poynting instantané de cette onde se calcule en prenant les champs réels :

$$\mathbf{R} = cn \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \mathbf{u}$$

et le vecteur de Poynting, moyenné sur une période :

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} cn \varepsilon_0 E_0^2 \mathbf{u},$$

où $E_0 = \|\mathbf{E}_0\|$ est l'amplitude du champ électrique.

2-4. Milieu absorbant. Indice complexe

Supposons maintenant $\varepsilon(\omega)$ complexe, de la forme $\varepsilon' + i\varepsilon''$; nous avons vu (chap. 4, § 3 et 5) que, pour les divers processus de polarisation envisagés, ε'' était positif et que cela traduit l'existence de phénomènes d'absorption. Pour satisfaire la relation de dispersion $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$, k doit être complexe; posons $k = k' + i k''$ ce qui conduit aux relations :

$$k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon' \quad \text{et} \quad 2 k' k'' = \omega^2 \mu_0 \varepsilon''.$$

Choisissons $k' > 0$ ce qui revient à étudier l'onde progressive se déplaçant dans la direction du vecteur unitaire \mathbf{u} , que nous prendrons dans la suite de ce paragraphe, sans perte de généralité, comme direction de l'axe Ox . La deuxième relation nous indique que k'' est aussi positif si ε'' l'est. Le champ électrique de l'onde plane s'écrit alors, avec $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (k' + i k'')x$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)},$$

on remarque une atténuation exponentielle de l'amplitude de l'onde lors de sa propagation, ce qui justifie les termes d'absorption et de milieu absorbant.

Indice complexe : cette propriété peut être exprimée à l'aide d'un indice complexe n , fonction de la fréquence de l'onde, et défini par :

$$n^2 = (n' + i n'')^2 = \varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon_r \quad \text{avec} \quad n' > 0.$$

soit

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon_r', \quad 2 n' n'' = \varepsilon_r''.$$

Il permet d'exprimer le « nombre d'onde » complexe $k = k' + i k''$:

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad k' = n' \frac{\omega}{c}, \quad k'' = n'' \frac{\omega}{c}.$$

La vitesse de phase d

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$$

et l'amplitude de cette d'indice de réfraction d

Complétons cette étu plane progressive. Le ch

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E}$$

Passons aux notation

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k''x}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E})$$

d'où le vecteur de Poynt

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$$

En moyennant sur un

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{u} cn' \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2$$

expression qui nous mo tiellement en fonction de $2 k'' = 2 n'' \omega/c$.

3. DISPERSION ET QUE

La théorie électromag optiques d'un matériau bien vérifiée par l'expé l'indice n relatives à un

La vitesse de phase de l'onde plane est donnée par :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$$

et l'amplitude de cette onde décroît comme $\exp(-n'' \omega x/c)$; d'où les noms d'indice de réfraction donné à n' et d'indice d'extinction donné à n'' .

Complétons cette étude en explicitant le vecteur de Poynting de l'onde plane progressive. Le champ \mathbf{B} se déduit de \mathbf{E} (cf. § 2-2) :

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = \frac{n}{c} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0) e^{i(kx - \omega t)}$$

Passons aux notations réelles :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k''x} \cos(k'x - \omega t + \varphi),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0) e^{-k''x} [n' \cos(k'x - \omega t + \varphi) - n'' \sin(k'x - \omega t + \varphi)],$$

d'où le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{u} c \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2k''x} [n' \cos^2(k'x - \omega t + \varphi) - n'' \sin(k'x - \omega t + \varphi) \cos(k'x - \omega t + \varphi)].$$

En moyennant sur une période et en remplaçant k'' par $n'' \omega/c$:

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{u} c n' \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \exp\left(-2 n'' \frac{\omega}{c} x\right),$$

expression qui nous montre que le flux énergétique de l'onde décroît exponentiellement en fonction de la distance parcourue, avec le coefficient d'extinction $2k'' = 2n'' \omega/c$.

3. DISPERSION ET ABSORPTION DANS LE DOMAINE OPTIQUE

La théorie électromagnétique de la lumière permet de relier les propriétés optiques d'un matériau à sa constante diélectrique ; la relation $\varepsilon_r = n^2$ est très bien vérifiée par l'expérience à condition de prendre les valeurs de ε_r et de l'indice n relatives à une même fréquence.

Intéressons-nous plus en détail aux matériaux isotropes (fluides, verres) transparents dans le domaine optique visible, c'est-à-dire non absorbants pour les rayonnements de longueur d'onde dans le vide comprise entre 0,4 et 0,75 μm ; ils correspondent à des fréquences de l'ordre de $5 \cdot 10^{14}$ Hz. A ces fréquences, la polarisation d'orientation, qui possède des temps caractéristiques d'évolution typiques de 10^{-10} s beaucoup plus longs que la période du champ électromagnétique, ne joue aucun rôle. L'indice de réfraction et sa variation avec la fréquence sont dus d'une part aux raies ou bandes d'absorption, liées à une polarisation d'origine électronique et situées à plus haute fréquence dans l'ultraviolet, d'autre part aux bandes de rotation-vibration moléculaires situées à fréquence plus basse dans l'infrarouge, leur importance respective dépendant de leur plus ou moins grande proximité. Dans les deux cas, dans la région de transparence, la dispersion qui en résulte est représentée par un indice de réfraction n fonction croissante de la fréquence (donc décroissante en fonction de la longueur d'onde). On parle alors de « dispersion normale ».

Cette propriété tout à fait générale s'interprète aisément avec le modèle de la charge « élastiquement liée » (chap. 4, § 3); la polarisabilité, atomique ou moléculaire, correspondante est donnée par :

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega},$$

expression que l'on peut, en dehors de la bande d'absorption, c'est-à-dire pour $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, approximer par la polarisabilité réelle :

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Pour un milieu dilué, comportant N « oscillateurs » de ce type par unité de volume, les relations $\chi = N \alpha$, $\epsilon_r = 1 + \chi$ et $n^2 = \epsilon_r$, conduisent à :

$$n^2 - 1 = \frac{N q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

ce qui donne n fonction croissante de ω .

En général le milieu possède plusieurs régions d'absorption, de pulsations différentes ω_i et leur prise en considération donne l'expression :

$$n^2 - 1 = \sum_i \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad C_i = \frac{N_i q_i^2 f_i}{\epsilon_0 m_i}.$$

Exprimons ω en fonction de la longueur d'onde dans le vide $\lambda = 2\pi c/\omega$; on obtient alors l'expression :

$$n^2 = A + \sum_i \frac{D_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad \text{où } A \text{ et } D_i \text{ sont des constantes,}$$

dite « formule de Selmeier » découverte empiriquement.

Pour les fréquences domaine visible, et u de Cauchy :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Par contre, pour $\lambda^2 \ll \lambda_i^2$, et un dévelop de ces bandes d'absor visible, à ajouter des formule de Briot :

$$n^2 = A' \lambda^2$$

De telles formules gaz, mais aussi ceux quatre décimales exa

Pour les milieux d la polarisation elle-m à symétrie cubique, — en la supposant e d'onde très supérieur l'expression $\epsilon_r - 1 = \sum$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} =$$

et le remplacement c

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} =$$

Pour un fluide, à au nombre N de mo est assez bien vérifi $(n^2 - 1)/\rho(n^2 + 2)$ va fluide, ce qui est polarisabilité α . De Lorentz conduit poi

(*) Cette relation physicien danois de professeur à l'unive

Pour les fréquences de résonance λ_i situées dans l'ultraviolet, $\lambda^2 \gg \lambda_i^2$ dans le domaine visible, et un développement limité conduit à la *formule empirique de Cauchy* :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad A, B, C \text{ constantes positives.}$$

Par contre, pour les fréquences de résonance situées dans l'infrarouge, $\lambda^2 \ll \lambda_i^2$, et un développement limité conduit, pour tenir compte de l'influence de ces bandes d'absorption dans l'infrarouge sur la dispersion dans le spectre visible, à ajouter des termes en λ^2 (éventuellement en λ^4) ce qui donne la *formule de Briot* :

$$n^2 = A' \lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad A', A, B, C \text{ constantes positives.}$$

De telles formules permettent de représenter non seulement les indices des gaz, mais aussi ceux de fluides, comme l'eau ou le sulfure de carbone, avec quatre décimales exactes sur tout le spectre visible.

Pour les milieux denses, on ne peut cependant négliger le champ créé par la polarisation elle-même ; mais pour les fluides, les verres, et certains cristaux à symétrie cubique, si l'on adopte l'expression du champ local de Lorentz — en la supposant encore valide pour des champs variables mais de longueur d'onde très supérieure aux dimensions des molécules — il vient, à la place de l'expression $\epsilon_r - 1 = \sum_i N_i \alpha_i$:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{3}$$

et le remplacement de ϵ_r par n^2 donne la « *relation de Lorenz-Lorentz* » (*) :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{3}$$

Pour un fluide, à fréquence donnée, la proportionnalité de $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ au nombre N de molécules par unité de volume donc à la masse volumique ρ est assez bien vérifiée sur une large gamme de valeurs de ρ ; en particulier $(n^2 - 1)/\rho(n^2 + 2)$ varie peu lors d'un changement d'état (liquide \rightleftharpoons gaz) du fluide, ce qui est cohérent avec une origine purement moléculaire de la polarisabilité α . De plus il est aisé de montrer que la formule de Lorenz-Lorentz conduit pour n^2 à des développements limités exactement de la même

(*) Cette relation fut obtenue indépendamment en 1880 par L. Lorenz, physicien danois de Copenhague, et peu de temps après par H. A. Lorentz, professeur à l'université de Leiden aux Pays-Bas !

forme que ceux obtenues ci-dessus pour les milieux dilués; ce qui justifie pour les milieux denses l'emploi de formules empiriques de Cauchy et de Briot.

Au voisinage d'une bande d'absorption ($n'' \neq 0$), l'indice de dispersion $n'(\omega)$ varie de façon très rapide, présentant en particulier une partie rapidement décroissante en fonction de ω , zone dite de « dispersion anormale ». L'étude expérimentale en est difficile car l'absorption y est importante. Par ailleurs le modèle simple de la « charge élastiquement liée » est trop élémentaire pour décrire valablement la polarisabilité dynamique des atomes ou molécules; l'emploi de la Mécanique quantique est alors indispensable. Indiquons aussi que si n' devient très élevé au voisinage d'une zone d'absorption, la longueur d'onde dans le milieu, $\lambda = \lambda_0/n$, devient très petite, invalidant de ce fait une description purement macroscopique du champ et de la matière à l'aide de grandeurs spatialement nivelées; la structure atomique du milieu ne peut être ignorée; c'est en particulier le cas dans certains cristaux.

Pour terminer, donnons quelques détails techniques sur les verres utilisés en optique. Dans les catalogues des fabricants ils sont référencés par une lettre suivie d'un nombre de 4 chiffres, exemple : B 1664; la lettre donne les deux premiers chiffres de l'indice moyen n_d selon le code suivant :

$$A = 1,4 \dots B = 1,5 \dots C = 1,6 \dots D = 1,7 \dots E = 1,8 \dots$$

les deux premiers chiffres du nombre sont la 2^e et la 3^e décimale de cet indice moyen n_d , qui correspond à la raie d de l'hélium, dans le jaune à 5876 Å. Ainsi le verre B 1664 a un indice moyen $n_d = 1,516$. Les deux derniers chiffres donnent la « **constringence** » ou « coefficient de dispersion », désigné par la lettre v et défini par :

$$v = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C},$$

où n_F et n_C sont les indices du verre pour la raie F bleu-vert de l'hydrogène à 4861 Å et pour la raie C rouge à 6563 Å. La différence $n_F - n_C$ sert donc à caractériser la dispersion moyenne du verre dans le visible. Pour le verre pris comme exemple et qui est un « *crown* » : $v = 64$; c'est un verre relativement peu dispersif. Par contre le verre C 2036, un « *flint* », a comme indice moyen $n_d = 1,620$ et comme constringence $v = 36$; c'est un verre nettement plus dispersif que le précédent.

4. INTERFACE DE DEUX DIÉLECTRIQUES; RÉFLEXION, RÉFRACTION

4-1. Relations de passage à l'interface de deux diélectriques linéaires et isotropes

Soient deux milieux diélectriques linéaires, isotropes, séparés par une surface que nous confondrons localement, au voisinage du point O , avec son plan tangent xOy ; la direction Oz est donc normale à cette surface. Nous

admettrons que l'o
milieux par une zo
plan xOy . Dans ce
varient très fortem
forte valeur des dé
quelconque des ch
 $\partial g/\partial t$ gardent des v

Pour obtenir le
aux chapitre 1, §
par rapport à la v
dérivées partielles

En tenant comp
donnent :

div \mathbf{D}

rot \mathbf{E}

div \mathbf{B}

rot \mathbf{H}

Avec $\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_r$
par \mathbf{E}_T et \mathbf{E}_N les
l'interface, on ob

$\mathbf{E}_{T2} =$