Titre : cinématique relativiste

Présentée par : **Rapport écrit par** :

Correcteur : **Date** :

Bibliographie de la leçon :			
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**	**Année**
[4] TD et cours de Laurent Le Guillou https ://drive.google.com/drive/folders/1fzrRd6G9bKWK6XYqgRSXpLaN83p17Mzc			
[3]Relativité restreinte bases et applications	C Semay	Dunod	2016
[2]Cours relate ens http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/relativite.pdf			

Plan détaillé

Niveau L3

Prérequis
— Cinématique relativiste
— Mécanique classique
— Mouvement de particules chargées

Message On a décrit les transformations de Lorentz : on cherche désormais une nouvelle façon d'écrire les lois de la dynamique respectant le principe de relativité.

Bibliographie

[1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1984.

[2] Jean-Michel RAIMOND. *Électromagnétisme et Relativité*. 2000. URL : http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm.

[3] Claude SEMAY et Bernard SILVESTRE-BRAC. *Relativité restreinte, bases et applications, 3ème édition*. Dunod, 2016.

IDÉES À FAIRE PASSER :

L'importance nouvelle du temps détaillée en cinématique relativiste implique de développer un nouveau formalisme de la dynamique, en dimension quatre : les quadri-vecteurs. Les lois usuelles de la dynamique sont alors modifiées, de même bien sûr que leurs conséquences qui font apparaître des phénomènes nouveaux.

Introduction : En mécanique classique la seconde loi de Newton est invariante par transformation de Galilée et est ainsi vraie dans tout référentiel galiléen. En revanche, le PFD n'est pas covariant au sens de la relativité restreinte. Il faut donc développer de nouvelles lois, covariantes et cohérentes avec celles de la mécanique newtonienne aux faibles vitesses (principe de relativité). Pour cela il faut d'abord exprimer un nouveau formalisme prenant en compte la dimension temporelle de manière adéquate.

On n'a pas le BFR I, mais on n'en a pas besoin de beaucoup de passages. On peut donc inclure des citations dans la fiche.

Rq. Connaitre la définiton de la ligne d'univers : trajectoire suivie dans l'espace temps par un object ponctuel.

Prerequis : calcul matricielle, energie et impulsion d'un photon.

Introduction

1 Formalisme quadrivectoriel

1.1 Espace-temps de Minkowski

On fait essentiellement des rappels de cinématique, nécessaires afin de fixer les notations utilisées. Ne pas faire les démonstrations, et passer vite sur les résultats.

— Deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$; $\mathscr{R}'$ a dans $\mathscr{R}$ une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$. Définition de γ et de β, transformation de Lorentz (avec des x et non pas des Δx, pour être cohérent avec la définition de quadrivecteur ensuite). [1] p 221

— Intervalle entre deux événements $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, et pour deux événements infiniment proches $\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.

— Temps propre : intervalle de temps s'écoulant entre deux « tics » d'une horloge dans $\mathscr{R}'$. Dans ce référentiel l'horloge est immobile, donc $\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$ et le temps propre est $\mathrm{d}\tau$. Dans $\mathscr{R}$ on a $\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ et ainsi

$$\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Rappels
Utiliser slide de lecon cinematique pour illustrer les deux référentiels.

Définition intervalle : grandeur caracteristique d'un couple d'évennements séparés spatialement de deltax et temporellement de deltat dans un référentiel donné et définie par la formule….
Rq. Bien définir la signature pour le cours - + + + et s'y tenir. L'autre signature est équivalente.

Temps propre : variable temporelle associée à un objet matériel, dans le référentiel qui le suit dans son mouvement. Invariant relativiste.

Transformation de Lorentz speciale [3] p. 31 eq 2.28. (ou n'impote quelle reference autre comme les cours)

[2] p 83

— Un point de l'espace-temps est caractérisé par ses cordonnées (ct, x, y, z) : cela définit le quadrivecteur position x^μ ou $\tilde{x}$.
— De façon générale, un quadrivecteur est un ensemble de quatre quantités qui se transforment comme x^μ. [1] p 230
— Pseudo-norme (attentino aux conventions!). [1] p 230
— $\mathrm{d}s^2$ est la pseudo-norme de $\mathrm{d}x^\mu$.
— Produit scalaire, qui est aussi un invariant relativiste. [1] p 230

31

7 *Dynamique relativiste.*

Remarques

Je préfère la notation x^μ pour les quadrivecteurs, cependant pour ne pas rentrer dans des subtilités de contravariant et covariant il vaut mieux écrire $\tilde{x}$ lorsqu'il y aurait des contractions d'indices.

Espacetemps melange coordonées d'espace et de temps un point est definit par ct, x, y, z. On définit alors le 4-vecteur position. La somme de 2 4-vecteurs reste un 4 vecteur et le produit d'un 4vecteur par une constante reste un 4-vecteur. C'est bien un vecteur.

Important, les composantes d'un 4-vecteur se transforment quand on change de référentiel en suivant la transformation de Lorentz.

Un quadrivecteur quelconque $\widetilde{\mathrm{A}}$ possède ainsi une composante temporelle $A^0 = A^t$, et une composante spatiale $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = (A^x, A^y, A^z)$. Ces composantes se transforment selon les transformations de Lorentz lors d'un changement de référentiel :

$$\mathcal{R} \to \mathcal{R}' \qquad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pas la peinde d'expliquer la contraction à ce stade, juste donner la matrice et dire que c'est equivalent). ATTENTION À LA SIGNATURE !

La forme quadratique de l'intervalle nous fait penser à un produit scalaire entre 2 vecteurs a 4 cordonnées.

- Définir la pseudo norme avec s^2, tout comme la diferentielle ds^2.
- le pseudo produit scalaire (pas al peine de parler de la metrique de Milkowski)

Le produit scalaire de deux 4-vecteurs est un invariant relativiste !.
Expliquer pourqui pseudo (produit scalaire peut être négative !)

À PARTIR DE MAINTENANT ON S'INTERESSE À UNE PARTICULE DE MASSE m

1.2 Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

— On sait que $\mathrm{d}x^\mu$ est un quadrivecteur et que $\mathrm{d}\tau$ est un invariant. Ainsi on peut construire un quadrivecteur

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Interprétons sa signification.

— On a $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t\ \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau = \gamma\,\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ puis

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v})$$

avec $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$.

— Pseudo-norme : $\tilde{u}^2 = -c^2$. [1] p 256

— Quadrivecteur impulsion-énergie $p^\mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$. [1] p 256

— Développement limité de p^0 en $v/c \simeq 0$: reconnaître l'énergie de masse, l'énergie cinétique... ce qui nous fait dire que l'on a $p^0 = E/c$ où $E = \gamma mc^2$. [1] p 258

— L'énergie cinétique est $E_c = (\gamma - 1)mc^2$.

— Calcul de la pseudo-norme de p^μ, relation

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

[1] p 257

— Cas du photon. [1] p 258

Attention

Pour l'écriture du quadrivecteur vitesse d'un mobile ponctuel, on ne considère qu'un seul référentiel. Soit $\mathrm{d}x^\mu$ les composantes du quadrivecteur intervalle entre deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers du mobile. On peut définir le temps propre entre ces deux événements $\mathrm{d}tau = -\mathrm{d}s^2/c^2$, et ainsi la quadrivitesse. On peut ensuite relier cette quadrivitesse à $\vec{v}$ en l'exprimant en fonction de $\mathrm{d}t$, ce qui fait apparaître un facteur γ où la vitesse est $\|\vec{v}\|$. Il faut bien différencier ce γ d'un facteur γ_e proenant d'un changement de référentiel à la vitesse$\vec{}_e$!

Remarques

La vraie façon d'obtenir le quadrivecteur énergie-impulsion est de dériver l'action par rapport au point d'arrivée (cela revient à regarder le générateur des translations spatio-temporelles dans le lagrangien ?). On voit ainsi apparaître directement les impulsions et le hamiltonien ! On en déduit donc que l'on a bien un vecteur qui contient l'énergie et les impulsions.

Si on veut faire de la mécanique il faut commencer par définir un quadrivecteur vitesse. Une définition naturelle est de prendre $\tilde{u} = d\tilde{x}/d\tau$. C'est bien un quadrivecteur car $d\tilde{x}$ est un quadrivecteur (différence de quadrivecteurs) et $d\tau$ est un scalaire, invariant par changement de référentiel.

On a $-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^{\,2} = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)$ donc $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ d'où on tire

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{d\tilde{x}}{dt}$$

Insiter que pour définir une vitesse il faut faire le rapport entre la variation de la position par rapport à un temps, mais comme le temps est relatif en relativité il faut trouver un temps invariant de Lorentz. D'où le fait qu'on utilise le temps propre associée à la particule ! La variation du 4-vecteur position peut être du à un observateur en mouvement par rapport à la particule.

La quadri-vitesse ou quadrivecteur vitesse :

$$\widetilde{\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\tau} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{Sa pseudo-norme carrée est } \widetilde{\mathrm{U}}^2 = \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2.$$

[4-cours] **ATTENTION CE COURS UTILISE UNE AURTE SIGNATURE norme –c^2 pour nous.**

Introduire le 4-vecteur energie-impulsion en multipliant la 4-vitesse par m (p=mv en mecanique classique).

On retrouve pour les 3 composantes de position les 3 composantes de l'impulsion. Nottament, quand v<<c on retrouve gamma ~ 1 et donc la formulation classique de l'impulsion **p**.

Quen est-il de la composante P0 (première composante de la 4-energie-impulsion) ? On fait un DL pour v<<c

Les coordonnées de $\tilde{u}$ sont donc $(\gamma c, \gamma\vec{v})$ et il a pour pseudo-norme $\tilde{u}^2 = -c^2$. Pour faire de la dynamique on peut, par analogie avec la mécanique newtonienne, définir l'impulsion d'une particule libre : $\tilde{p} = m\tilde{u} = (p^0 = \gamma mc, \vec{p} = \gamma m\vec{v})$. On voit réapparaître l'impulsion classique, reste à comprendre qui est p^0. Pour cela on va en faire le développement limité lorsque $v/c \to 0$:

$$p^0 = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx mc\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{1}{c}\left[mc^2 + mv^2/2 + \ldots\right]$$

31

On retrouve alors l'expression de Ec/c. On admetra que cette composante est E/c. Ceci nous permet aussi d'introduire l'énergie de masse.

Que ce passe t'il quand la particule est immobile ?

La norme P^2 est alors E^2/c = gamma m*c d'où E = mc^2. Énergie de masse ou énergie au repos de la paticule. **Lire [2] p. 118-119 pour avoir des notions sur cette énergie de masse**. C'est ici qu'on observe l'équivalence masse et énergie en relativité.

Si on fait la pseudo-norme de P^2 pour un cas général (pas dans le ref. ou la particule est au repos). On trouve :

P^2 = p^2 - E^2/c^2 = m^2*gamma^2(v^2 – c^2) = -m^2*c^2

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4.$$

D'où :

Rq. On peut aussi parler de l'énergie cinétique T = E-mc^2 si on veut (cf. [4] p. 9)

Pour le photon, le fait que v = c fait que la relation E/c = gamma*m*c soit indeterminée et oblige m = 0 car si non on aurait une ;energie infinie !. Or on ne sait pas ce que vaut E.

L'étude du rayonnement fait que on associe E photon = h*nu.

La relation pour E^2 que nous avons établis plus tôt nous donne une forme pour p du photon ! p = E/c

La norme du 4-vecteur energie impulsion du photon est donc 0. (cf. [4] p. 9). L cas du photon est necessaire pour la partie suivante.

7 Dynamique relativiste.

1.3 Lois de conservation. Effet Compton.

— E et $\vec{p}$ sont toujours conservés (mêmes propriétés d'invariance de l'espace-temps), donc p^μ est conservée.

— Effet Compton en mettant à profit cette loi de conservation. [2] p 123

Écran

Notations et schéma

Transition : On a vu que les quadrivecteurs sont les bonnes quantités à observer car ils se transforment bien. On cherche donc à faire de la dynamique avec des quadrivecteurs et notamment à trouver un « PFD relativiste ». En fait, par principe de relativité les lois physiques doivent être les mêmes dans tous les référentiels, donc on cherche à écrire le PFD avec des quadrivecteurs.

Ce exercise est posé dans la question 3.2 de [4-TD] p. 60-61. Suivre le problème mais pour les calcules (on utilise une signature différente) suivre : la feuille ci-dessous.

Lire [2] p. 122-123 pour les interprétations physiques.

Calcul effet compton, on suit [4] p 61

$$-\tilde{p}_f^{\,2} = \tilde{p}_i^{\,2} + \tilde{q}_i^{\,2} + \tilde{q}_f^{\,2} + 2\tilde{p}_i\cdot\tilde{q}_i - 2\left(\tilde{p}_i\cdot\tilde{q}_f + \tilde{q}_i\cdot\tilde{q}_f\right)$$

$$-m_e c^2 \qquad -m_e c^2 \qquad 0 \qquad 0$$

métrique $\boxed{-+++}$

$$2\tilde{p}_i\cdot\tilde{q}_i = 2m_e\cancel{c}\cdot\frac{h\nu_i}{\cancel{c}} = 2m_e h\nu_i$$

$$2\tilde{p}_i\cdot\tilde{q}_f = -2m_e\cancel{c}\cdot\frac{h\nu_f}{\cancel{c}} = -2m_e h\nu_f$$

$$2\tilde{q}_i\cdot\tilde{q}_f = \left(-\frac{h\nu_i\nu_f}{c^2} + \hbar^2\,\vec{k}_i\cdot\vec{k}_f\right)2$$

alors $-\cancel{m_e c^2} + \cancel{m_e c^2} = -2m_e h\nu_i + 2m_e h\nu_f + \frac{h\nu_i\nu_f}{c^2} - \hbar^2\,\vec{k}_i\cdot\vec{k}_f$

$$\Leftrightarrow m_e h(\nu_i - \nu_f) = \frac{h\nu_i\nu_f}{c^2} - \hbar^2\,\vec{k}_i\cdot\vec{k}_f$$

2 Lois de la dynamique relativiste

2.1 Principe fondamental de la dynamique

- Étant donné le PFD en classique, on recherche une relation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = f^\mu,$$

  où f^μ est la quadriforce, que l'on va devoir relier à la force connue en classique. [3] p 167
- Limite non relativiste : on retrouve bien le PFD.

La physique doit être invariante dans tous les référentiels. Ceci veut dire que la forme des équations ne doit pas dependre du référentiel.

Nottamment, un 4-vecteur ce transforme par transformé de Lorentz en un autre 4-vecteur. Donc une égalité de 4-vecteurs est invariante par transformée de Lorentz. Donc toute loi physique qui est exprimé comme une égalité de 4-vecteurs est invariante par changement de référentiel relativiste.

On cherche dans un premier temps une forme similaire au PFD mais avec l'utilisation des 4-vecteurs. On connait déjà le 4-vecteur energie impulsion d'un coté de l''egalité. Ceci nous ammène le vecteur 4-force.

Pour que cette equaton ai un quelquconque intêret, il faut relier les composantes du 4-vecteur force à des valeurs mesurables et connues dans les problèmes physiques. Le but de cette leçon n'est pas de faire un inventaire des 4-vecteurs forces qui dependent des problèmes considérées, mais plutôt de évaluer les propriétés que doivent respecter les 4-vectceurs force.

2.2 Propriétés de la quadri-force

— Produit scalaire par u^μ : on a

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\tilde{u}^2}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{u}\cdot\tilde{f} \quad \text{or} \quad \tilde{u}^2 = -c^2 \quad \text{donc} \quad \tilde{u}\cdot\tilde{f} = 0.$$

— La partie spatiale de f^μ est $\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = \gamma\,\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \gamma\vec{f}$, avec $\vec{f}$ la force. [3] p 174

— On a donc

$$\frac{\mathrm{d}\gamma m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f},$$

ce qui est très différent du PFD, à cause du facteur γ !

— On utilise la condition $\tilde{u}\cdot\tilde{f} = 0$ pour obtenir $f^0 = \vec{f}.\vec{v}\gamma/c$, soit

$$f^\mu = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{f}.\vec{v}, \gamma\vec{f}\right)$$

— La composante 0 du PFD donne $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \vec{f}.\vec{v}$: il s'agit du théorème de l'énergie cinétique !

Remarques

Fondamentalement, rien ne nous dit que la force est toujours $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$. Cependant, c'est ainsi qu'on la définit, et on peut s'attendre à ce que la définition coïncide au moins pour certaines forces comme celle de Lorentz.

Transition : Appliquons maintenant les lois de la dynamique relativiste à des cas particuliers. Comment atteindre des vitesses très élevées ? On peut accélérer des électrons à l'aide d'un champ $\vec{E}$.

La partie spatiale ce comprend des notes. Pour la partie temporelle remarquer que :

Avec ce qui précède et le fait que $\tilde{u}.\tilde{f} = 0$ on déduit la partie temporelle de $\tilde{f}$:

$$\tilde{u}.\tilde{f} = 0 \Leftrightarrow -\gamma c f^0 + \gamma\vec{f}.\gamma\vec{v} = 0 \Leftrightarrow f^0 = \gamma/c\,\vec{f}.\vec{v}$$

donc la composante zéro du quadri-vecteur force est en fait la puissance de la force newtonienne ! Ainsi,

$$\tilde{f} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{f}.\vec{v}, \gamma\vec{f}\right) \tag{7.1}$$

et la force newtonienne n'est effectivement pas covariante, au contraire de la quadri-force.

U.f = 0, en effet f = mdU/dtau, et U^2 = c^2 = cte !

Ceci implique l'égalité ci-dessus quand on écrit le produit scalaire U.f et on arrive à f0. Si on injecte dans l'équation on retrouve le TEC.

Rq. Ce developpement utilise sur l'energie :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{d\tilde{x}}{dt}$$

La composante zéro du pfd donne exactement $\frac{d}{dt}(m\gamma c) = \frac{\gamma}{c}\vec{f}.\vec{v}$ et on a déjà démontré que $\frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$ de sorte que :

$$\vec{f}.\vec{v} = \frac{c}{\gamma}\gamma\frac{d}{dt}(m\gamma c) = \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \frac{dE_c}{dt}$$

car $E_c = (\gamma - 1)mc^2$.

3 Application : mouvement dans un champ électromagnétique constant

3.1 Accélération par une différence de potentiel

Écran

Expérience de Bertozzi ([1] p 266)

— Classique : $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ donc

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2eU}{mc^2}$$

— Relativiste : $mc^2(\gamma - 1) = eU$ par théorème de l'énergie cinétique soit

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{eU}{mc^2}}\right)^2$$

[1] p 286

— Seul le cas relativiste correspond à l'expérience, et on a bien une vitesse limitée par c.

Remarques

La particule est accélérée mais le référentiel considéré est celui du laboratoire : la relativité restreinte est bien toujours applicable.

Voir [3] p. 245, 252 et 297.

3.2 Champ magnétique uniforme et constant

Au lieu de cette partie, on peut décider d'illustrer le PFD relativiste par un cas où le facteur γ joue un rôle plus crucial : une particule chargée dans un champ $\vec{E}$.

— La force à mettre dans le PFD est la force de Lorentz

— La force ne travaille pas, donc l'énegrie reste constante et le module de la vitesse v aussi. [1] p 289

— Le PFD relativiste

$$\frac{\mathrm{d}\gamma m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

donne la même équation qu'en classique (précession), où la masse m est remplacée par γm. On a donc une pulsation synchrotron $\omega_c = qB/\gamma m$. C'est important dans les accélérateurs de particules où l'on atteint des vitesses très élevées.

Conclusion

— Formulation covariante des lois de la dynamique

— On peut explorer la physique des hautes énergies, par exemple les collisions entre particules dans les accélérateurs !

Remarques

Bien qu'ils ne soient pas présentés lors de la leçon, revoir les chocs en dynamique relativiste. On pourra lire [3], chapitre 10 (et notamment la partie « Désintégrations et collisions ») et le chapitre 16 de [1].

Questions posées par l'enseignant

Partie réservée au correcteur