

EXERCICES

Centre de Montrouge — Année Universitaire 2019–2020

Intervenant : L. Le Guillou (Sorbonne Université / LPNHE)

1^{ère} Partie

La transformation de Galilée — L'expérience de Michelson et Morley — Les postulats d'Einstein — Les équations de Lorentz — Contraction des longueurs, dilatation du temps — Les diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel.

1. Mécanique “classique” : transformation de Galilée

Un navire manœuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante $v = 3$ m/s parallèlement au quai.

1.1 — Sur le quai, un enfant court à la vitesse $u = 2$ m/s par rapport au référentiel du quai, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire ?

1.2 — Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ($h = 10$ m). Décrivez sa trajectoire pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage. Où tombe-t-il ? Ecrivez et résolvez les équations du mouvement dans le référentiel du quai et dans celui du bateau (on pourra utiliser la transformation de Galilée).

1.3 — L'enfant s'arrête sur le quai, puis lance son ballon à la verticale au dessus de lui à la vitesse w ($w = 10$ m/s), puis le rattrape. Ecrivez et résolvez les équations du mouvement du ballon dans les deux référentiels.

2. Pêche à la ligne

On traitera ce problème en mécanique classique (relativité galiléenne).

Un pêcheur s'adonne à son loisir favori dans sa barque, au milieu d'une rivière. Ayant fait bonne pêche, il décide de rentrer chez lui, et il remonte le courant à la rame, en rament à la vitesse constante w par rapport à la rivière.

Passant sous un pont, il perd sans s'en rendre compte son chapeau, qui tombe à l'eau, et est emporté par le courant.

Le pêcheur réalise la perte de son chapeau au bout de 30 minutes. Il décide alors de redescendre la rivière et, en ramant toujours à la même vitesse w par rapport au courant, il parvient à rattraper son chapeau 5 km en aval du pont.

Quelle est la vitesse du courant (par rapport aux berges) ?

3. L'expérience de Michelson et Morley

Une source lumineuse est placée à une distance L d'un miroir et émet un rayon lumineux dans sa direction. Le rayon est réfléchi et revient vers la source.

3.1 — Quel est le temps mis par la lumière pour effectuer l'aller-retour entre la source et le miroir ?

La source et le miroir sont maintenant en translation rectiligne et uniforme dans une direction perpendiculaire à l'axe source-miroir et avec une vitesse v .

3.2 — Représenter graphiquement la situation telle que la voit un observateur immobile. Pour cet observateur, compte-tenu de ce qu'il observe, quel est le temps T_{\perp} mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour entre la source et le miroir ?

3.3 — Répondre à la même question dans le cas où le déplacement se fait dans la direction source-miroir, si cette distance vaut L' . On nomme la durée trouvée T_{\parallel} .

3.4 — On suppose pour cette question que $L = L'$. Comparer T_{\perp} et T_{\parallel} . Commenter ce résultat en faisant le lien avec l'expérience de Michelson et Morley.

3.5 — On suppose maintenant que $L \neq L'$. Quelle devrait être la valeur de L' pour que la condition $T_{\perp} = T_{\parallel}$ soit vérifiée ?

4. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

4.1 — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps ds^2 :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

5. À la croisée des destinées : lignes d'univers et diagrammes de Minkowski

Leia et Han Solo se déplacent avec une vitesse relative constante v . L'axe \mathbf{e}_x des abscisses de Leia est orienté selon la vitesse de Han, l'axe \mathbf{e}_x' des abscisses de Han étant opposé à la vitesse de Leia.

5.1 — Tracez les lignes d'univers, c'est à dire les lignes constituées de l'ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Han :

(i) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia.

(ii) sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Han.

Han et Leia mettent leurs montres à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent : autrement dit, $x = x' = 0$ quand $t = t' = 0$.

5.2 — Représentez, sur le graphe (x, t) , deux événements A et B. Calculer les intervalles de coordonnées $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$ pour Han. Calculer $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$.

5.3 — Représentez, sur le graphe (x, t) , deux événements C et D de la vie de Han. Calculez la valeur de l'intervalle Δt entre C et D pour Leia, en fonction de $\Delta t'$, pour Han, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas $v = 3c/5$, et $\Delta t' = 1$ s.

5.4 — Han garde un bras tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe \mathbf{e}_x'). Déterminez et représentez la ligne d'univers du bout de l'index de Han sur le graphe (x, t) . Quelle définition peut adopter

Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du bras de Han"? Calculez cette longueur $\Delta\ell$ en fonction de la longueur $\Delta\ell'$ pour Han et de sa vitesse. Envisagez le cas $v = 3c/5$, $\Delta\ell' = 1$ m.

5.5 — Tracez sur le graphe (x, t) :

- (i) quelques lignes d'univers du réseau $x' = \text{cte}$ pour Han.
- (ii) quelques lignes du réseau $t' = \text{cte}$ pour Han.

5.6 — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes t' et x' de Han? Soit un événement A. Représentez, sur le graphe (x, t) , ses coordonnées pour Leia et pour Han respectivement.

5.7 — Reste à graduer les axes t' et x' sur le graphe (x, t) .

- (i) Représentez sur le graphe la partie $t > 0$ de l'hyperbole $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$. à quelle valeur de t correspond son intersection avec l'axe t ? A quelle valeur de t' correspond son intersection avec la représentation de l'axe t' ?
- (ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole $x^2 - c^2 t^2 = 1 \text{ m}^2$ et de ses intersections avec les axes x et x' .

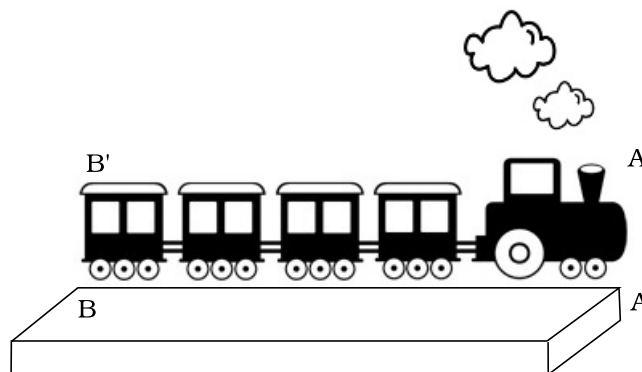
5.8 — Représentez sur le graphique :

- (i) le temps t de l'événement ($t' = 1 \text{ s}$, $x' = 0$) de la vie de Han.
- (ii) la longueur ℓ attribuée au bras de Han par Leia.

6. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exemple permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps. Il existe un certain nombre de variantes de ce problème, avec par exemple deux trains qui se croisent, etc. Une variante plus complexe est le problème célèbre de "la règle et du trou", traité plus loin dans une déclinaison "science-fiction".

On considère un train de longueur L se déplaçant à la vitesse v et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi L et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

- (p) La tête du train A' coïncide avec l'arrière du quai B .
- (q) La tête du train A' (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai A (où se tient le chef de gare).

- (*r*) La queue du train B' coïncide avec l'arrière du quai B .
- (*s*) La queue du train B' coïncide avec l'avant du quai A .

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare (A) et le conducteur du train (A') synchronisent leurs horloges respectives à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'observateurs et d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

6.1 — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements (p), (q), (r) et (s) dans les deux référentiels, \mathcal{R} (le quai) et \mathcal{R}' (le train). On pourra se servir de la transformation de Lorentz.

6.2 — Quelle est la longueur du train dans son référentiel \mathcal{R}' ? vu du quai (référentiel \mathcal{R}) ?

6.3 — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel \mathcal{R}' du train ?

6.4 — Commentez l'ordre des événements (q) et (r) dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai ?

6.5 — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps $\tilde{q}r$? Quelles sont les conséquences en terme de causalité ?

6.6 — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

7. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels \mathcal{R} ($Oxyz$) et \mathcal{R}' ($O'x'y'z'$). \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} à une vitesse \mathbf{v} . On note le point P de vecteur position \mathbf{r} dans \mathcal{R} et \mathbf{r}' dans \mathcal{R}' .

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant t' et \mathbf{r}' en fonction de t et \mathbf{r} et \mathbf{v} , la vitesse relative du repère (x', y', z') par rapport au repère (x, y, z) .

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où \mathcal{R}' se déplace le long de l'axe x de \mathcal{R} .

8. Effet Doppler

Leia et Han ont une vitesse relative v constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine O . Leia choisit son axe x selon la vitesse de Han qui, lui, choisit son axe x' opposé à la vitesse de Leia. À intervalles réguliers à sa montre Han émet (événements O, E_1, E_2, E_3, \dots) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements O, R_1, R_2, R_3, \dots).

8.1 — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Han, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Han.

8.2 — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées Δx et Δt entre les deux événements O et E_1 observés par Leia.

8.3 — Calculez sans transformation de Lorentz, Δt en fonction de v et de l'intervalle $\Delta \tau$ entre les deux émissions O et E_1 à la montre de Han.

8.4 — Calculez l'intervalle de temps Δt_R entre deux réceptions O et R_1 de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

8.5 — Déduisez-en la relation entre la fréquence d'émission des signaux ν_E par Han et la fréquence de réception ν_R par Leia.

9. L'attaque de l'Étoile Noire

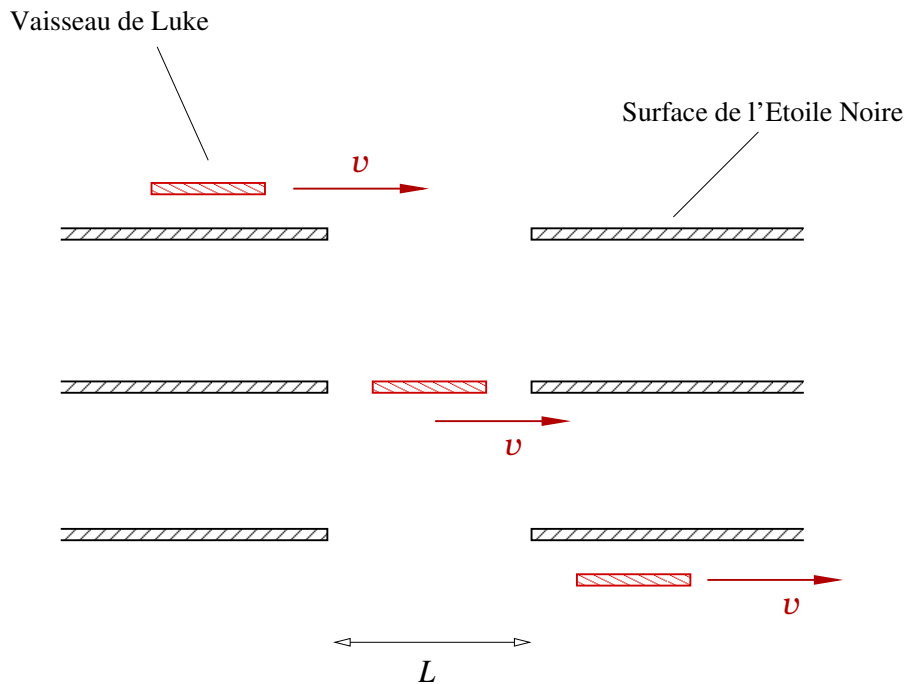


FIGURE 1 – Plan d'attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l'Étoile Noire.

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur L) par un orifice de l'Étoile de même diamètre L (figure 1). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$, Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur L .

9.1 — Que vaut le facteur $\gamma(v)$ du vaisseau de Luke dans le référentiel de l'Étoile Noire (supposé galiléen) ?

9.2 — Dans le référentiel de l'Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite) ? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l'ouverture de diamètre L ?

9.3 — L'amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c'est le trou à la surface de l'Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l'échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau de Luke ?

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l'Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

- Le référentiel \mathcal{R} représenté sur la figure 2 : dans \mathcal{R} , la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon \mathbf{e}_z avec une vitesse faible $u \ll c$. À $t = 0$, la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan xOy . Dans ce même référentiel \mathcal{R} , le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe Ox , à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine O à $t = t' = 0$.
- Le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R} : $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$. L'origine O' du référentiel \mathcal{R}' est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec O à $t = t' = 0$.

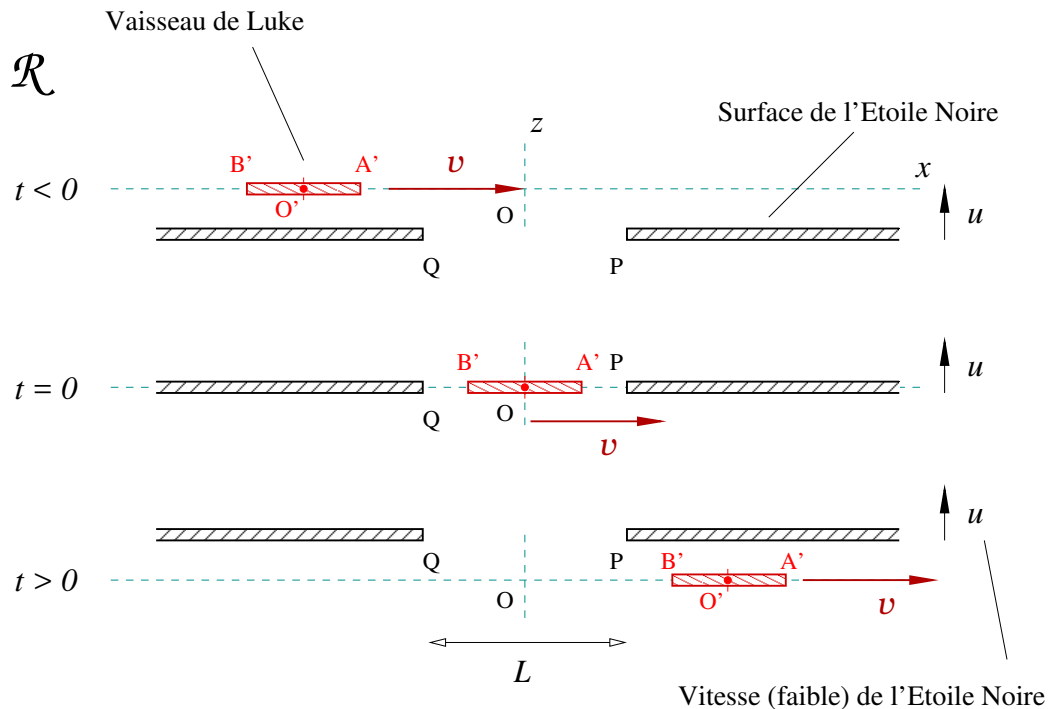


FIGURE 2 – Plan d'attaque de Luke pour détruire l'étoile noire, vu dans le référentiel \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x , tandis que la surface de l'Étoile Noire se déplace à la vitesse faible $u \ll c$ selon l'axe des z .

9.4 — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' . De même, écrivez la transformation inverse.

9.5 — Dans le référentiel \mathcal{R} , quelle est la position $x(O')$ du centre du vaisseau en fonction du temps t ? À $t = 0$, que valent les abscisses des extrémités avant $x(A')$ et arrière $x(B')$ du vaisseau, dans le référentiel \mathcal{R} ? Au même instant $t = 0$, que valent les abscisses $x(P)$ et $x(Q)$ des extrémités du trou? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou?

On s'intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau.

9.6 — Dans le référentiel \mathcal{R}' dessinez dans le plan $x'O'z'$ le vaisseau de longueur L , en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l'on complétera aux questions suivantes.

9.7 — Soit un point $M(x, y, z)$ quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement x dans l'intervalle $]-\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$. Que vaut z en fonction du temps t dans \mathcal{R} ?

9.8 — Déterminez les coordonnées (x', y', z') des points M de la surface de l'Étoile Noire en fonction

du temps t' dans \mathcal{R}' . Quel est le lieu des points M de la surface à l'instant $t' = 0$ dans le plan $x'O'z'$? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ sur le dessin précédent.

9.9 — Que valent les coordonnées des extrémités P et Q du trou dans le référentiel \mathcal{R} ? Déduisez-en l'équation de la trajectoire $z' = f(x')$ pour chacun de ces deux points dans le référentiel \mathcal{R}' .

9.10 — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités P et Q avec l'axe des x' . Dessinez les trajectoires de P et Q dans le plan $x'O'z'$.

9.11 — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte?

Cet exercice est une déclinaison *GeorgeLucaesque* du célèbre problème relativiste connu comme “*le paradoxe de la règle et du trou*”, où on considère une règle de longueur L que l'on fait glisser sur une table, dans laquelle il y a un trou de même longueur. Ce paradoxe a notamment été discuté en détail par Rindler (*American Journal of Physics* 29, 365 (1961); <https://doi.org/10.1119/1.1937789>).

2^{ème} Partie

Composition des vitesses — Mouvement hyperbolique — Paradoxe des jumeaux — Voyages intersidéraux.

1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules A et B s'éloignent de l'origine choisie O dans des directions opposées avec chacune une vitesse $3c/4$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

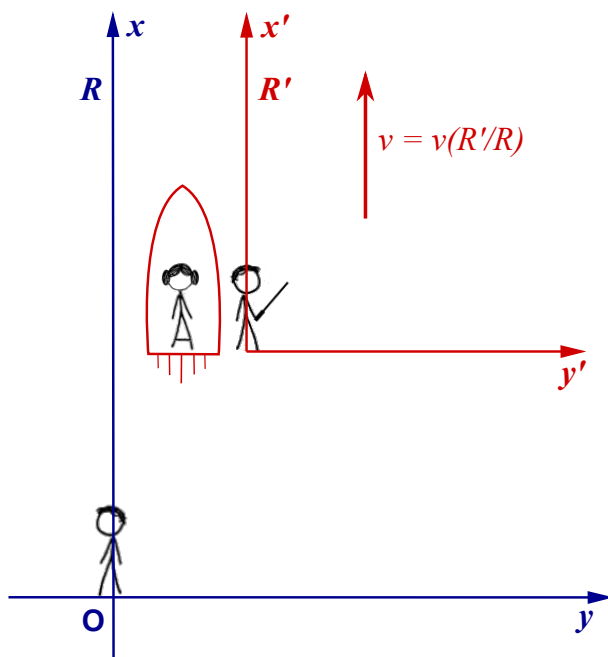
1.1 — Est-il correct de dire que la vitesse relative de A par rapport à B est $3c/2$, c'est à dire supérieure à c ? Quelle est la vitesse de A par rapport à B ? Et réciproquement?

1.2 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

2. Mouvement accéléré, référentiel tangent, mouvement hyperbolique

Leia effectue avec son vaisseau un mouvement rectiligne accéléré (donc non uniforme). À un instant donné (événement E_1), sa vitesse est v par rapport à Han, inertiel (i.e. dépourvu d'accélération), et sa vitesse est nulle par rapport à Luke, lui aussi inertiel. Un peu plus tard (événement E_2), après un temps dt' pour Luke, la vitesse de Leia est passée à $v + dv$ pour Han, et à dv' pour Luke.

2.1 — En utilisant la composition des vitesses, établissez l'expression de dv' en fonction de v et dv .



2.2 — Quelle est l'expression de l'accélération propre a de Leia, en fonction de dv' et de dt' ? Quelle est l'expression de la durée dt' en fonction de v et de dt ? En déduire l'expression de la durée dt en fonction de a , v et dv .

2.3 — En surveillant bien le poids (apparent) d'une masse test, Leia, pilote sa fusée en maintenant son accélération propre a constante. Sachant qu'elle a quitté Han en douceur, avec une vitesse $v(0)$ nulle à l'instant $t = 0$, quelle est l'expression de sa vitesse $v(t)$ à l'instant t pour Han toujours inertiel ?

2.4 — En déduire l'expression de la position $x(t)$ de Leia à l'instant t pour Han.

2.5 — Quelles sont les expressions approchées de $x(t)$ et de $v(t)$ lorsque t est petit ? lorsque t est grand ? (par rapport à quoi d'ailleurs ?) Représenter sur un graphe d'espace-temps dans le repère (x, t) de Han : (i) la ligne d'univers de Han, (ii) la ligne d'univers de Leia, (iii) la ligne d'univers de Luke, inertiel, qui à l'instant t_1 coïncide, en douceur, avec Leia. Pourquoi désigne-t-on ce type de mouvement comme "hyperbolique" ?

2.6 — Quelle est, en général, la durée $d\tau$ écoulée pour Leia, entre E_1 et E_2 , en fonction de dt ? en fonction de dt et de v ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante a , que devient cette durée $d\tau$ en fonction de dt , a et t ?

2.7 — En déduire le temps propre $\tau(t)$ à la montre de Leia, en fonction de a et de t pour Han. Quelles sont les expressions approchées de $\tau(t)$ pour t petit ? pour t grand ?

2.8 — Leia se donne l'accélération "de confort" $a = g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$. Exprimez a en ly.y^{-2} (année-lumière par année carrée). Calculez $\tau(t)$ après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

3. Le paradoxe des jumeaux

Luke et Leia dérivent dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke en se donnant une accélération propre constante $a = g$ pendant une durée finie $\Delta\tau$ (temps propre de Leia). Puis elle stoppe les turbopropulseurs à l'arrière de son vaisseau, allume ceux à l'avant qui lui fournissent désormais une accélération $a = -g$, et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée $2\Delta\tau$. Enfin, elle arrête les propulseurs à l'avant et rallume les propulseurs à l'arrière, se donnant ainsi une accélération propre $a = g$ pendant $\Delta\tau$ pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Luke est resté au repos.

3.1 — Représentez toute cette épopée sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Luke.

3.2 — Calculez le temps $4\Delta\tau$ qui s'est écoulé pour Leia si toute cette histoire a duré $4\Delta t = 12$ mois pour Luke. Faites de même pour $4\Delta t = 12$ ans et pour $4\Delta t = 40$ ans. Concluez.

4. Voyages intersidéraux

4.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante v sur une étoile située à $D = 8$ années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années. Quelle est la vitesse v du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante a jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante $-a$, de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

4.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années pour les occupants du vaisseau.

4.3 — Soit \mathcal{R} le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et \mathcal{R}' le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant t donné. Dans le référentiel tangent \mathcal{R}' , la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t (ou t'), et vaut dv' à l'instant $t + dt$ (ou $t' + dt'$). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$dv' = \gamma^2(v)dv$$

4.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre $d\tau = dt'$ en fonction de dt et $\gamma(v)$. Déduisez-en une expression de dv/dt en fonction de a et $\gamma(v)$.

4.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que $d\tau$ est proportionnel à $d\varphi$ où φ est la rapidité ($\beta = \tanh \varphi$). En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez $\Delta\tau$ en fonction de la rapidité à mi-parcours $\varphi_{1/2}$.

4.6 — En se souvenant que $dx = vdt$, exprimez dx en fonction de $d\varphi$. Déduisez-en une expression de $\varphi_{1/2}$ en fonction de la distance totale à parcourir D .

4.7 — On souhaite déterminer l'accélération a qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance $D = 8$ années-lumière en un temps propre de $\Delta\tau = 8$ ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est $8\xi \simeq 1.616$ soit $\xi \simeq 0.202$. Sachant que $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, Exprimez a en unités $c \times 1 \text{ an}^{-1}$ et en unités SI.

4.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre? Exprimez Δt en fonction de c , a et $\varphi_{1/2}$. Application numérique.

On donne : $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, et $\sinh(1.616) \simeq 2.417$.



3^{ème} Partie

Formalisme quadrivectoriel — Invariants — Quadrivecteurs position, vitesse, accélération — Quadri-force — Tenseurs — composantes covariantes et contravariantes.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Soit un quadrivecteur $\tilde{\mathbf{A}}$. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}^2 &= (A_t)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 - (A_z)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \\ &= A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, le produit pseudo-scalaire :

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_\mu B^\mu$$

est invariant de Lorentz.

1.2 — Montrez que l'intervalle de temps propre $d\tau$ est un invariant de Lorentz.

1.3 — À partir du quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$? Est-ce un invariant ?

2. Vitesse relative

Vus d'un repère \mathcal{R} , Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_H$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$ de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

3. Quadri-accélération

3.1 — Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales \mathbf{A} de la quadri-accélération d'une particule $\tilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement \mathbf{u} et $\dot{\mathbf{u}}$.

3.2 — En déduire les valeurs A'^0 et \mathbf{A}' des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut \mathbf{a} .

3.3 — En déduire l'expression de \mathbf{a}^2 en fonction de \mathbf{u} et de $\dot{\mathbf{u}}$.

3.4 — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à \mathbf{u} ?

4. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse \tilde{U} qui subit une quadriforce $\tilde{f} = d\tilde{p}/d\tau$.

4.1 — Rappeler ce que vaut $\tilde{U}^2 = U_\mu U^\mu$. Déduisez-en $U_\mu dU^\mu/d\tau$.

4.2 — Montrez que le produit $\tilde{f} \cdot \tilde{U}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = dE/dt$. Quel résultat retrouve-t-on ?

5. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

5.1 — Soient un quadrivecteur \tilde{V} et un quadritenseur \tilde{T} de composantes :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$$

Ecrivez les composantes de

$$T_{\mu\nu} \quad T^\mu{}_\nu \quad T_\mu{}^\nu \quad T_\lambda{}^\lambda \quad V_\mu V^\mu \quad V_\mu T^{\mu\nu}$$

5.2 — Écrivez les composantes contravariantes p^μ du quadrivecteur énergie-impulsion \tilde{p} d'une particule. Comment obtient-on les composantes covariantes p_μ ? Ecrivez ces composantes explicitement.

5.3 — On peut écrire l'opérateur gradient sous forme tensorielle :

$$\tilde{\nabla} : \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Explicitez ∂_μ et ∂^μ .

5.4 — Explicitez la contraction $\partial_\mu \partial^\mu$. Que reconnaissez-vous ?

4^{ème} Partie

Dynamique relativiste — Quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) — Défaut de masse — Collisions élastiques et inélastiques de particules — Effet Compton — Energie seuil — Boson de Higgs.

1. Energie et impulsion

1.1 — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m , de temps propre τ , de ligne d'univers $\tilde{x}(\tau)$.

1.2 — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m , de vitesse \mathbf{u} .

1.3 — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse \mathbf{u} de la particule de masse m .

1.4 — On considère la diffusion élastique proton-proton vue du laboratoire : proton cible immobile, énergie cinétique du proton incident 437 MeV, masse du proton 938 MeV. On s'intéresse au cas où les deux protons de l'état final ont la même énergie. Considérant la conservation de la quadri-impulsion totale, et donc de son carré, calculez l'angle formé par les directions de propagation des protons de l'état final. Et dans le cas d'un proton incident de 1 TeV (produit par le TEVATRON du Fermilab) ?

1.5 — On considère la collision inélastique, $m + m \rightarrow m'$, d'une particule de masse m , de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m , immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

2. Défaut de masse, énergie de liaison

Uranium-238. Calculez le défaut de masse de l'uranium ^{238}U connaissant sa masse $m = 238.0507826 \text{ u}$. Exprimez le résultat en MeV.

Retrouvez ce résultat à partir de l'excès de masse $\Delta = 47.3089 \text{ MeV}$.

Données :

$$\begin{aligned}
 m_n &= 1.008665 \text{ u} &= 939.565 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_p &= 1.007276 \text{ u} &= 938.272 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_e &= 0.000549 \text{ u} &= 511 \text{ keV}/c^2 \\
 1 \text{ u} &= 1.660538 \times 10^{-27} \text{ kg} &= 931.494 \text{ MeV}/c^2.
 \end{aligned}$$

Rappel : l'excès de masse est une grandeur pratique dépourvue de sens particulier, positive ou négative, définie comme la différence entre la masse *atomique* et A fois une unité atomique :

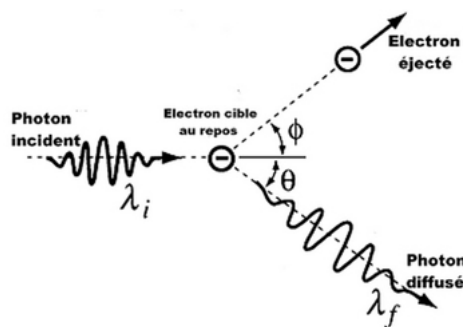
$$\Delta({}_Z^AX) = m({}_Z^AX) - A \times 1 \text{ u}$$

Elle est en général exprimée en MeV.

3. L'effet Compton

En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde $\Delta\lambda$ dépend de l'angle de diffusion θ . Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.

3.1 — On considère la collision d'un photon d'énergie $h\nu_0$ avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire.



3.2 — Déduisez-en le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$ du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion θ .

3.3 — Expérimentalement (A. H. Compton, *Phys. Rev.*, **21** (1923), 483.), A. H. Compton trouve qu'à 90° la longueur d'onde de la raie $K\alpha$ ($\lambda_i = 0.0708$ nm) du molybdène est mesurée à $\lambda_f = 0.0730$ nm. Déduisez-en une estimation de la masse de l'électron.

3.4 — Le processus inverse de l'effet Compton, baptisé diffusion Compton inverse, se produit lorsque des électrons très énergétiques sont freinés par les photons du milieu. Ce phénomène est observé en astrophysique, par exemple lorsque les photons du rayonnement fossile micro-onde interagissent avec les électrons très énergétiques du gaz chaud d'un amas de galaxies (effet Sunyaev-Zel'dovich).

Montrez que dans ce cas, le photon diffusé *gagne de l'énergie* aux dépens de l'électron (astuce : reprendre le calcul précédent en se plaçant dans le référentiel de l'électron après la collision).

3.5 — Montrez qu'un processus où le photon disparaîtrait par absorption par un électron libre est impossible, du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Commentez pour l'effet photoélectrique.

3.6 — Un photon peut aussi disparaître et se matérialiser sous la forme d'une paire électron-positron $e^- e^+$. Quelle est l'énergie minimale qu'un photon doit posséder pour produire une paire $e^- e^+$? Montrez que ce processus de production de paire ne peut pas se produire dans le vide (il ne se produit en fait qu'en présence d'un champ électromagnétique externe, par exemple dans la matière à proximité d'un noyau atomique).

3.7 — Montrez, de même, que l'annihilation d'une paire $e^+ e^-$ ne peut pas s'effectuer en produisant un photon unique, mais au minimum deux photons (la désintégration d'une paire $e^+ e^-$ s'effectue en fait en produisant soit deux photons, soit trois photons).

4. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

4.1 — La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse m_ν , et l'on souhaite calculer l'énergie E_μ du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

5. Collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse m .

Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

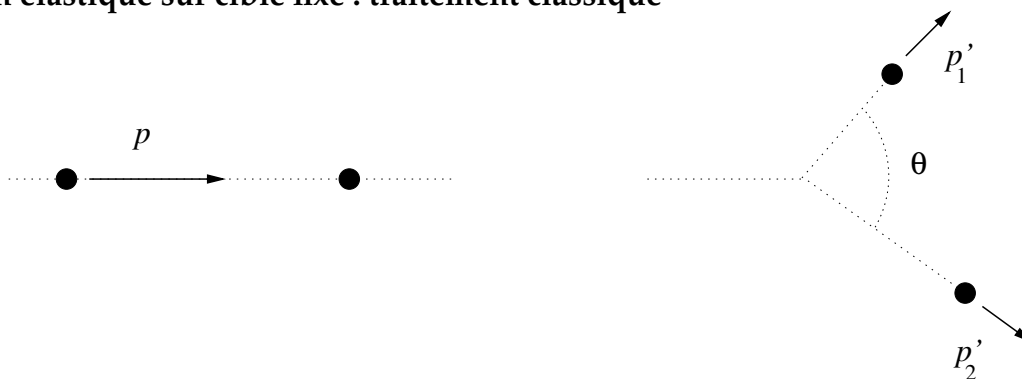


FIGURE 3 – Collision élastique sur cible fixe.

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse m , d'impulsion \mathbf{p} et d'énergie cinétique T sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 3).

5.1 — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

5.2 — Montrez que l'angle θ entre les impulsions \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ dans le cadre classique.

Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

On traite maintenant le même phénomène dans le cadre de la dynamique relativiste.

5.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

5.4 — Exprimez l'angle θ entre \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 en fonction de E , m , E'_1 et E'_2 , où E'_1 et E'_2 sont les énergies des deux particules après la collision.

5.5 — Dans le cas particulier où $E'_1 = E'_2$, exprimez θ en fonction de E et m ; montrez que θ est nécessairement inférieur à $\pi/2$. Comparez avec le résultat en mécanique classique.

5.6 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , en fonction de E et m ?

Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie E et des impulsions opposées de même norme p (fig. 4).

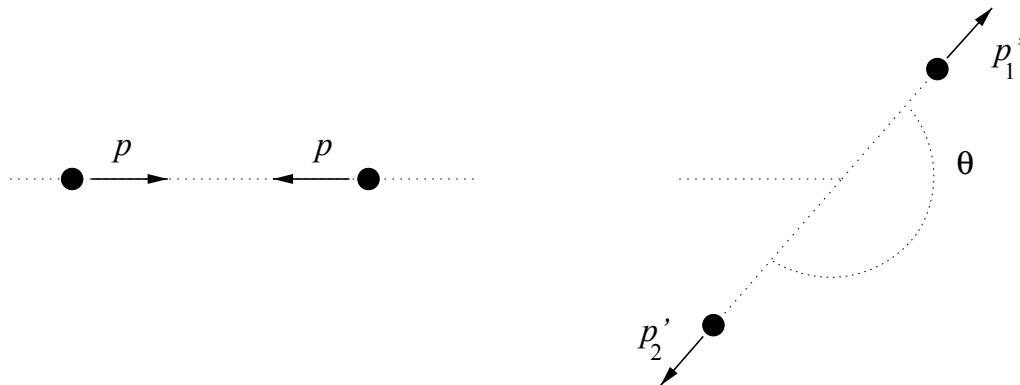


FIGURE 4 – Collision symétrique (collisionneur).

5.7 — Écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

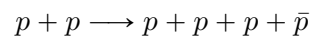
5.8 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système \mathcal{R}^* ?

5.9 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , en fonction de E et m ?

Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons \bar{p} en faisant collisionner des protons p :



5.10 — En utilisant la notion de masse invariante, déterminer l'énergie cinétique minimale T_1 qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

5.11 — En procédant de même, déterminer l'énergie cinétique minimale T_2 qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

5.12 — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton : $m_p = m_{\bar{p}} = 938 \text{ MeV}/c^2$.



FIGURE 5 – Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'anti-proton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.

6. La physique au Large Hadron Collider (LHC)

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le *Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons W^+ , W^- et Z ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Collision inélastique : production d'une paire $X \bar{X}$

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction inélastique suivante, qui vise à produire une paire de particules quelconques X et \bar{X} (X et son anti-particule) de mêmes masses m_X en faisant collisionner des protons p (on suppose ici les protons intacts après la collision, ce qui n'est généralement pas le cas pour les collisions intéressantes au LHC) :

$$p + p \longrightarrow p + p + X + \bar{X}$$

- 6.1 — Écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion pour cette réaction.
- 6.2 — Exprimez la masse invariante du système, avant et après la réaction.
- 6.3 — Déterminer l'énergie cinétique minimale T qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire une particule X de masse m_X et son antiparticule \bar{X} de même masse (en supposant les protons intacts après la collision).

Détection du boson de Higgs dans le canal $\gamma\gamma$

Si l'énergie dans le centre de masse est suffisante, il est possible de produire un boson de Higgs dans la collision. Le boson de Higgs est instable et peut se désintégrer de différentes manières (on parle de "voies" ou de "canaux de désintégration"). Il peut par exemple se désintégrer en deux photons gamma (canal diphoton) : cette signature est l'une des plus faciles à mettre en évidence ("canal en or").

- 6.4 — Écrivez l'équation-bilan de la désintégration du boson de Higgs (noté H) en deux photons gamma. On se place dans le référentiel du boson de Higgs \mathcal{R}_H : écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration.
- 6.5 — Que vaut la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ du système formé par les deux photons issus de la désintégration du Higgs ? Quelle est l'énergie de chaque photon dans le référentiel du Higgs \mathcal{R}_H ? Que vaut nécessairement l'angle entre les deux photons émis dans \mathcal{R}_H ?
- 6.6 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du Higgs en deux photons dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Exprimez la masse invariante en fonction des énergies E_1 et E_2 de chacun des deux photons et de l'angle θ_{12} entre les deux photons. Exprimez la masse m_H du boson de Higgs en fonction de E_1 , E_2 et θ_{12} .
- 6.7 — La figure 6 représente la distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ pour les événements où sont apparus deux photons γ de haute énergie. Il s'agit du premier lot de mesures effectuées dans l'expérience ATLAS au LHC, ayant permis la découverte du Higgs. Déduisez-en la masse du boson de Higgs.

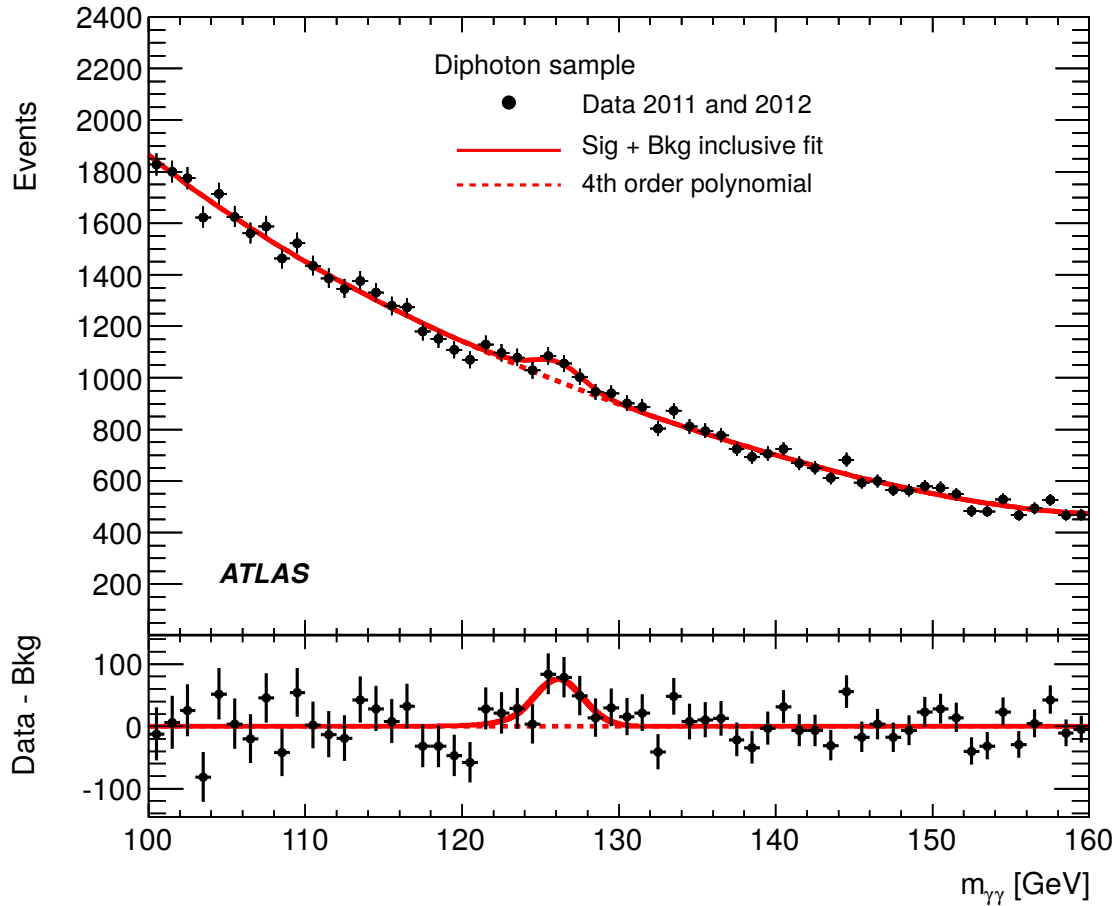


FIGURE 6 – Distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ mesurée pour tous les événements avec 2 photons de haute énergie dans l'expérience ATLAS au LHC (points noirs). En pointillés rouges, modélisation du fonds dû à toutes les autres réactions produisant principalement deux photons gamma. Première analyse du canal "diphoton", thèse de doctorat de Heberth Torres (2013), LPNHE.

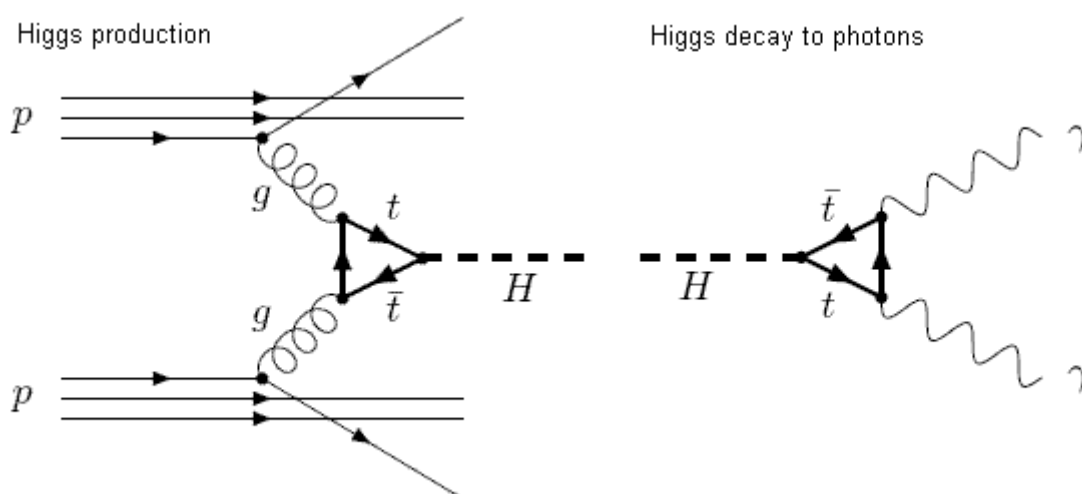


FIGURE 7 – Diagrammes de Feynman (le temps va de gauche à droite) : à gauche, production d'un boson de Higgs dans une collision de protons par fusion de gluons (les protons sont "détruits" dans ce type de collision); à droite, désintégration du boson de Higgs en deux photons.

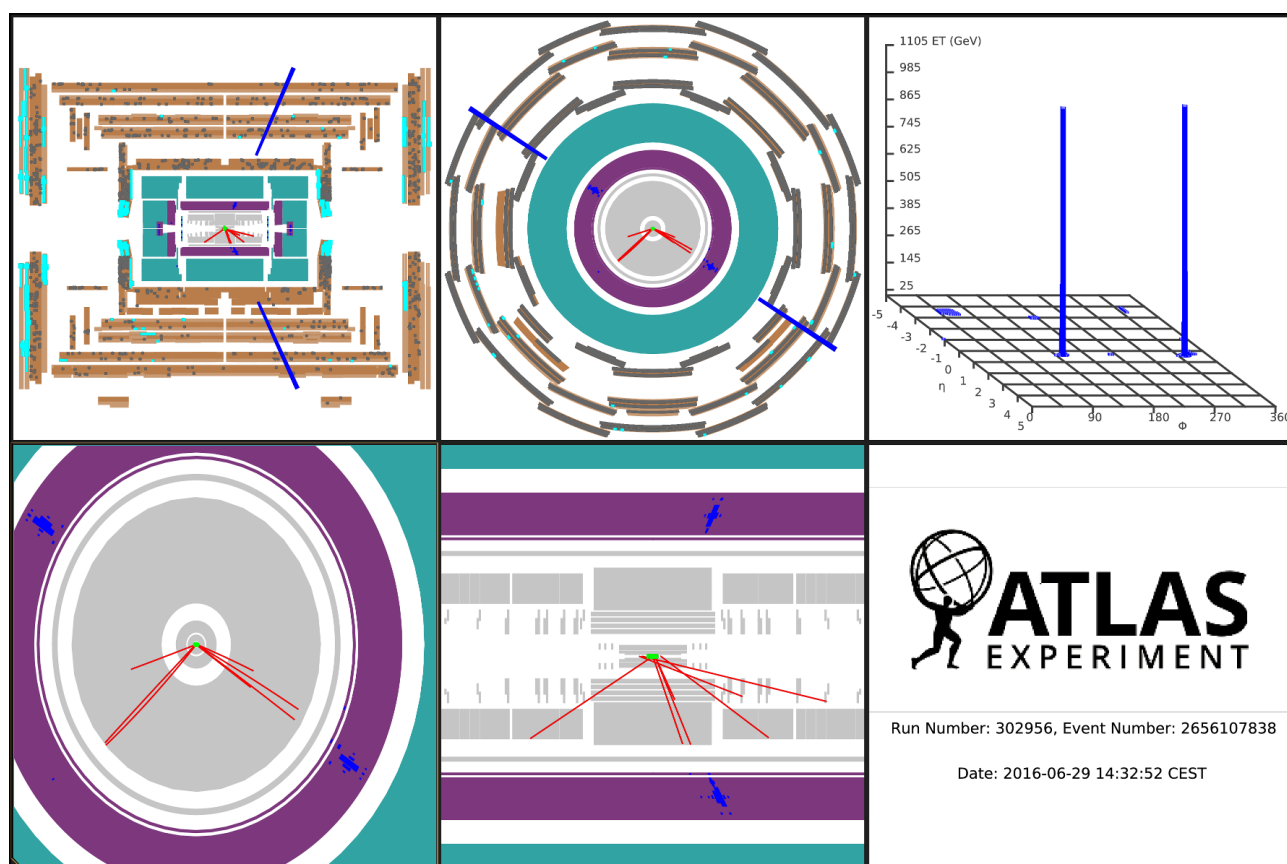


FIGURE 8 – Événement avec production de deux photons isolés de haute énergie dans l'état final. Expérience ATLAS, LHC. Les deux photons gamma se convertissent dans le détecteur, et forment deux gerbes de particules chargées (dépôts d'énergie indiqués en bleu)

5^{ème} Partie

Représentation relativiste du champ électromagnétique – Invariance de jauge – Force de Lorentz – Equation d'onde – Optique

1. Equations de Maxwell, invariance de jauge

1.1 — À partir des équations du champ électromagnétique sous leur forme relativiste,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

retrouvez les quatre équations de Maxwell dans le vide.

1.2 — Rappelez les expressions des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} en fonction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \mathbf{A} .

1.3 — En partant du quadripotiel $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$, Montrez comment les composantes parallèles $\mathbf{E}_\parallel, \mathbf{B}_\parallel$ et perpendiculaires $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp$ se transforment par changement de référentiel.

1.4 — Le potentiel $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ n'est pas défini de façon univoque. Montrez que pour toute fonction scalaire χ , la transformation suivante :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

laisse \mathbf{E} et \mathbf{B} inchangés. On parle d'*invariance de jauge*. Montrez que $F^{\mu\nu}$ vérifie l'invariance de jauge.

En fonction du problème traité, on pourra choisir la *jauge* la plus adaptée. On rencontre généralement les deux choix de jauge suivants :

$$\text{Jauge de Coulomb :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{Jauge de Lorenz :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

1.5 — Montrez que la condition de la jauge de Lorenz s'écrit simplement $\partial_\mu A^\mu = 0$.

1.6 — Écrivez l'équation de propagation du potentiel $\tilde{\mathbf{A}}$ dans le vide. Montrez que cette équation prend une forme très simple dans la jauge de Lorenz.

1.7 — Vérifiez que toute fonction de la forme $f(\tilde{\mathbf{r}}) = C e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}}$ avec $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est solution de l'équation $\square f = 0$.

1.8 — Que reconnaissez-vous dans le produit $\varphi = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}} = k_\mu r^\mu$? Est-ce un invariant de Lorentz ?

2. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le

Modèle Standard : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons W^+ , W^- et Z ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Le boson de Higgs a été mis en évidence au *Large Hadron Collider* dans des collisions de protons dont l'énergie cinétique est de plusieurs téra-électrons-volts (TeV). Pour atteindre cette énergie, les protons sont injectés et accélérés dans une succession d'accélérateurs de plus en plus puissants (fig. 9). Les faisceaux de protons entrent en collision en 4 points du LHC, où sont placés 4 énormes détecteurs de particules dédiés : ATLAS, CMS, LHCb et ALICE.

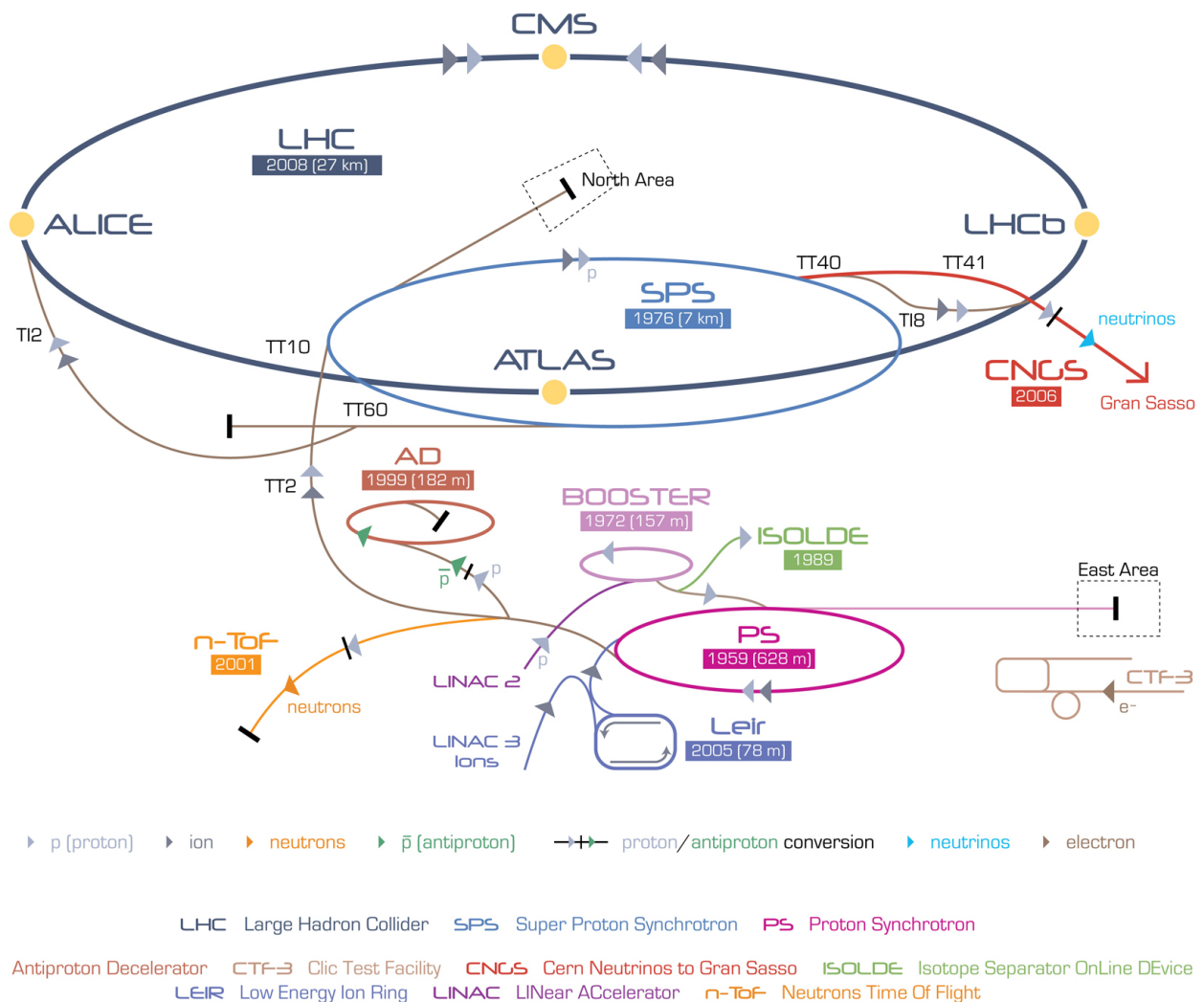


FIGURE 9 – Structure des accélérateurs de particules du CERN (Genève). Les protons sont d'abord accélérés dans l'accélérateur linéaire "LINAC 2" ($T = 50$ MeV), puis injectés et accélérés dans le synchrotron "PS Booster" ($T = 1.4$ GeV), puis dans le PS ($T = 25$ GeV), le SPS ($T = 450$ GeV) et enfin le LHC lui-même ($T = 7$ TeV).

Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

La source des protons du LHC est une bouteille d'hydrogène gazeux, située à l'entrée du LINAC 2. L'hydrogène est soumis à un champ électrique, qui arrache ses électrons afin de ne laisser entrer dans l'accélérateur que les protons.

Dans sa forme la plus simple, un accélérateur linéaire LINAC consiste en un tube à vide contenant une succession de cylindres conducteurs, dont les charges électriques alternent (fig. 10). Les par-

ticules chargées sont injectées par paquets, et on inverse périodiquement la charge électrique des conducteurs cylindriques, afin de toujours accélérer les particules lors du franchissement de l'espace séparant deux cylindres de charges opposées (région de champ électrique uniforme \mathbf{E}_{kin} sur la figure).

On se propose dans cette première partie de calculer dans le cadre relativiste le comportement d'une particule accélérée sous l'effet d'un champ électrique uniforme.

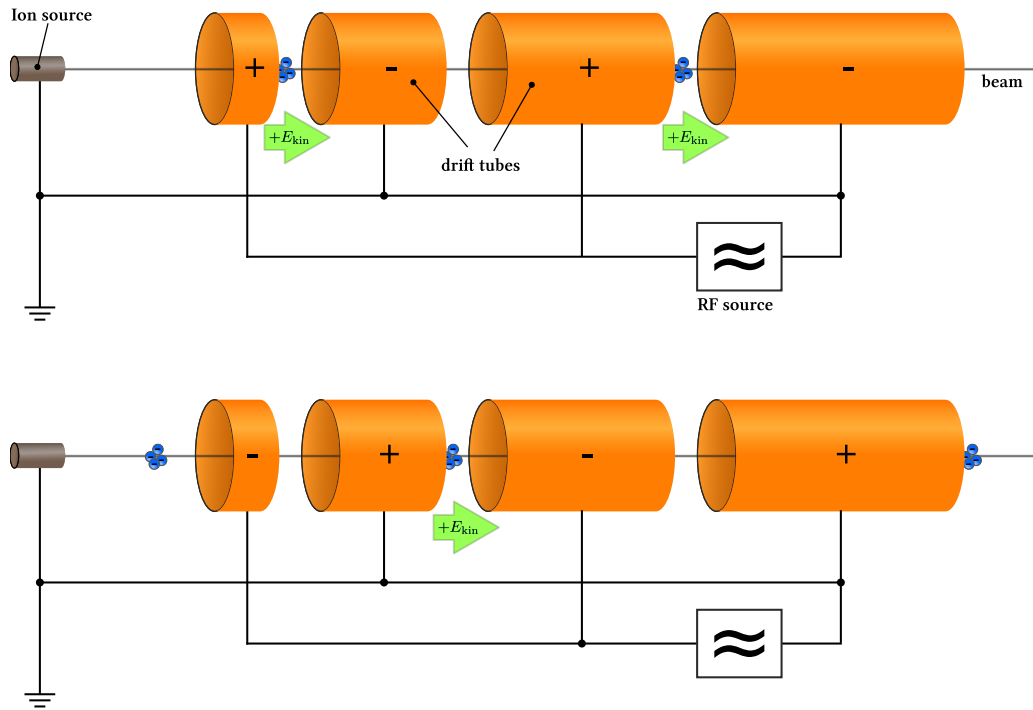


FIGURE 10 – Principe de fonctionnement d'un accélérateur linéaire (LINAC) dans sa forme la plus simple. Les particules sont injectées par paquets (pulses). Les cylindres conducteurs portent des charges électriques alternées, que l'on inverse périodiquement. Lorsque les particules passent d'un cylindre au suivant, elles subissent le champ électrique \mathbf{E}_{kin} : l'inversion périodique des charges des cylindres permet de toujours accélérer les particules dans le même sens.

2.1 — Question de cours : à partir de l'équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes contravariantes p^μ et covariantes p_μ .

2.3 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\tilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\tilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie E de la particule et de sa quantité de mouvement \mathbf{p} .

2.4 — Montrez que pour une particule de quadrivitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ subissant une quadriforce $\tilde{\mathbf{f}}$, on a $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$. Déduisez-en que :

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(u)m\mathbf{u})}{dt}$$

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

2.5 — Donnez explicitement $F^{\mu\nu}$ dans la région de l'espace où $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

On considère une particule de charge q placée dans le champ : on note $\tilde{\mathbf{r}}$ sa position, \mathbf{u} son vecteur vitesse et $\tilde{\mathbf{U}}$ sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadriforce de Lorentz $\tilde{\mathbf{f}}$ qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu. \quad (2)$$

2.6 — Rappelez l'expression des composantes contravariantes U^μ et covariantes U_μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$.

2.7 — À partir de l'équation (2), donnez explicitement les composantes f^0, f^1, f^2 et f^3 du quadrivecteur $\tilde{\mathbf{f}}$.

2.8 — Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie E et la quantité de mouvement \mathbf{p} de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

2.9 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Déduisez-en l'expression de la vitesse u en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité φ).

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers quelle valeur tend u ? Comparez avec le cas classique.

2.10 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t . On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{arctanh} \beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

3. Champ électromagnétique produit par un fil infini chargé

On considère un fil infini le long de l'axe Oz , de section s négligeable devant les dimensions du problème. On se placera toujours à l'extérieur du fil.

Dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, solidaire avec le matériau constituant le fil, le fil porte une charge électrique uniformément répartie : la densité volumique de charge est ρ , et la densité linéique $\lambda = \rho s$. Ces charges électriques sont animées d'un mouvement uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$, créant ainsi dans le fil une densité de courant $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$.

3.1. Courant et densité de charge

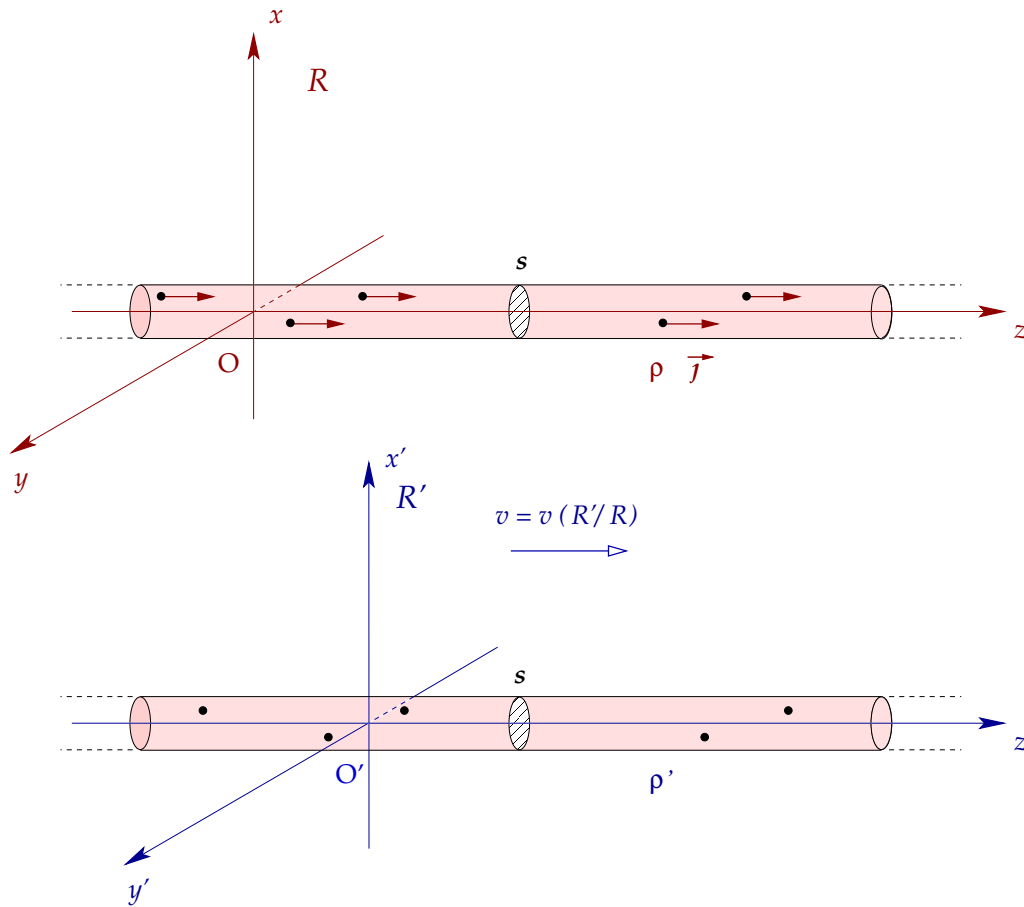


FIGURE 11 – Fil infini chargé, parcouru par un courant. Points de vue : dans le référentiel \mathcal{R} du fil (haut); dans le référentiel \mathcal{R}' en mouvement avec les charges (bas).

3.1 — Exprimez le courant électrique I qui circule dans le fil en fonction de \mathbf{j} et s , puis en fonction de ρ , v et s .

On se place maintenant dans le référentiel \mathcal{R}' , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse \mathbf{v} , tel que $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$.

3.2 — Dans le référentiel \mathcal{R}' , que vaut le courant électrique I' dans le fil? La densité de courant \mathbf{j}' ?

3.3 — Écrivez la transformation de Lorentz entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . **Attention! Le mouvement relatif n'est pas selon Ox mais selon Oz !**

3.4 — Montrez que pour un quadrivecteur quelconque $\tilde{\mathbf{A}}$ de composantes contravariantes A^ν , la matrice $[\mathbf{L}]$ qui permet d'exprimer les composantes $A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu$ dans \mathcal{R}' en fonction des composantes A^ν dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donnez la matrice inverse \mathbf{L}^{-1} telle que $A^\mu = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu A'^\nu$. Comment se transforment les composantes covariantes A_ν lorsqu'on passe du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' ?

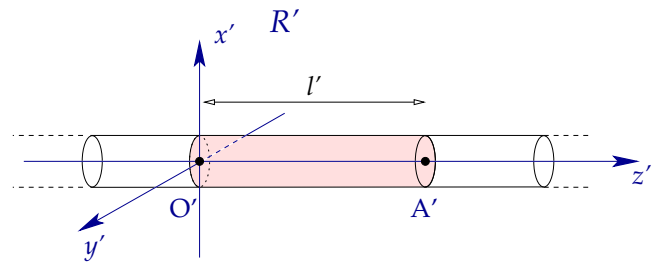
Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé : le mouvement relatif est selon e_z .

3.5 — Que vaut l'abscisse z' du point origine O' dans le référentiel \mathcal{R}' ? Exprimez $z'(O')$ en fonction de sa position $z(O')$ dans \mathcal{R} et du temps t .

3.6 — Considérons un point A' fixe dans \mathcal{R}' , placé sur l'axe $O'z'$ à une distance $z'(A') = \ell'$ de l'origine O' . Exprimez $z'(A')$ dans \mathcal{R}' en fonction de sa position $z(A')$ dans \mathcal{R} et du temps t .

3.7 — En vous souvenant que la longueur d'un objet se mesure dans un référentiel donné en repérant la position de ses extrémités *au même instant* dans ce référentiel, déduisez-en la relation entre $\ell = z(A') - z(O')$ et $\ell' = z'(A') - z'(O')$.

3.8 — Considérons le volume cylindrique du fil délimité par les points O' et A' (figure ci-contre). Quel est son volume V (respectivement V') dans le référentiel \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}') ? En utilisant le fait que la charge électrique totale Q contenue dans ce cylindre est la même dans les deux référentiels, déduisez-en la relation qui relie la densité de charge électrique ρ vue dans \mathcal{R} et ρ' vue dans \mathcal{R}' .



3.9 — Retrouvez la relation entre ρ et ρ' en écrivant le quadrivecteur-courant $\tilde{\mathbf{j}}$: $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ dans les deux référentiels et en exploitant l'invariance de $\tilde{\mathbf{j}}^2 = j^\mu j_\mu$.

3.2. Champ électrique

Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' : dans \mathcal{R}' les charges sont immobiles, et nous sommes en présence d'un problème classique d'électrostatique.

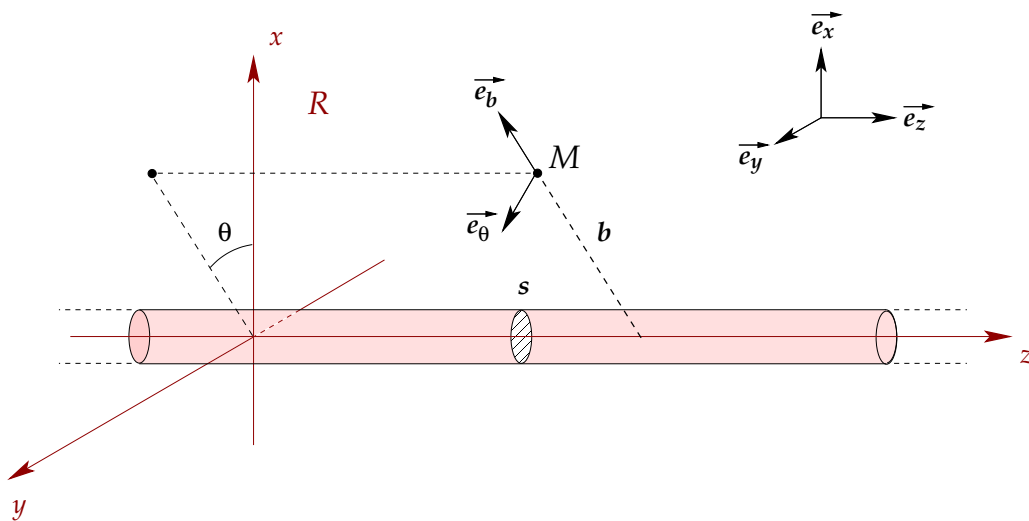
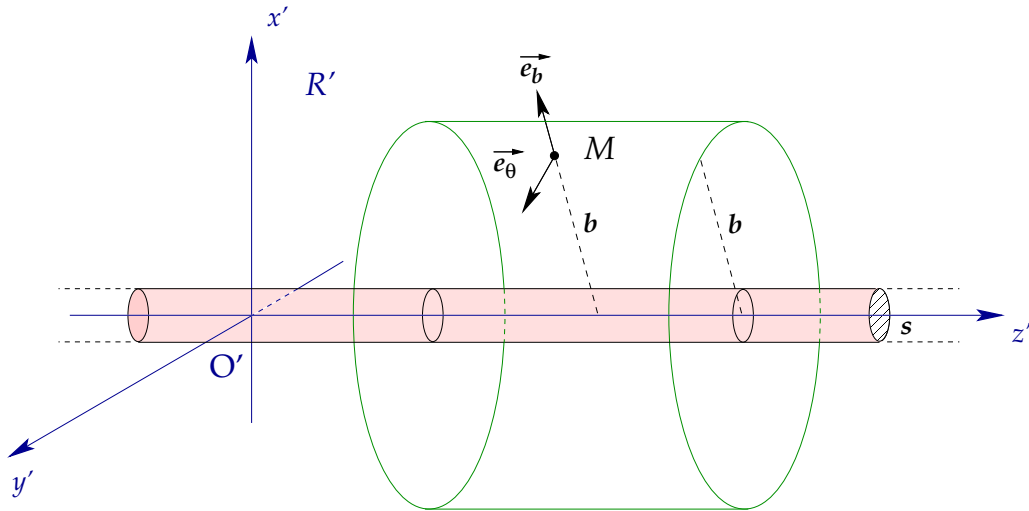


FIGURE 12 – Choix des coordonnées : on notera b la distance d'un point quelconque M au fil.

Soit un point M quelconque dans le référentiel \mathcal{R}' , situé à une distance b de l'axe z' du fil infini.

3.10 — On repère le point M par ses coordonnées polaires b', θ', z' dans le référentiel \mathcal{R}' , et b, θ, z dans \mathcal{R} (figure 12). Exprimez b et θ en fonction de b' et θ' .

3.11 — En utilisant des arguments de symétrie, montrez que le champ électrique $\mathbf{E}'(M)$ est nécessairement radial, et qu'il n'est fonction que de b : $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$.

FIGURE 13 – Volume cylindrique de rayon b pour le calcul du champ électrique par le théorème de Gauss.

3.12 — En appliquant le théorème de Gauss pour un volume cylindrique bien choisi (voir fig. 13), montrez que l'expression de l'intensité du champ électrique $\mathbf{E}'(b)$ à l'extérieur du fil est :

$$\mathbf{E}'(b) = E'(b) \mathbf{e}_b = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On rappelle la forme générale du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

3.13 — Donnez explicitement l'expression du tenseur $\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu}$ dans le référentiel \mathcal{R}' pour un point quelconque M situé à l'extérieur du fil chargé.

3.14 — Rappelez comment se transforme un tenseur contravariant de rang 2 par changement de référentiel galiléen. **Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé.**

3.15 — En utilisant le résultat précédent, déduisez-en l'expression du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ dans le référentiel \mathcal{R} . Identifiez avec l'expression générale du tenseur $F^{\mu\nu}$, et donnez l'expression des composantes (E_x, E_y, E_z) et (B_x, B_y, B_z) des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dans le référentiel \mathcal{R} .

3.16 — En vous plaçant dans le référentiel \mathcal{R} et en utilisant de nouveau le théorème de Gauss, retrouvez l'expression du champ $\mathbf{E}(M)$ dans le référentiel \mathcal{R} . Commentez.

3.3. Champ magnétique

On considère maintenant le système dans le référentiel \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le fil est parcouru par un courant I .

3.17 — Montrez que, par symétrie, l'intensité du champ magnétique B en un point M quelconque (à l'extérieur du fil) n'est fonction que de b , et que \mathbf{B} est nécessairement orthoradial : $\mathbf{B} = B(b) \mathbf{e}_\theta$.

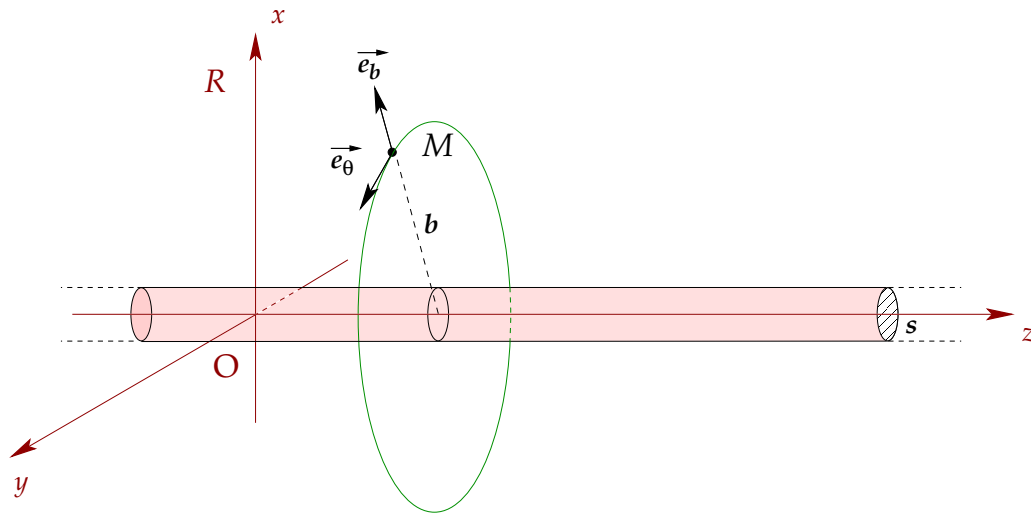


FIGURE 14 – Contour circulaire de rayon b pour le calcul du champ magnétique au point M par le théorème d'Ampère.

3.18 — En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour astucieusement choisi (fig 14), montrez que le champ magnétique vaut :

$$\mathbf{B}(b) = B(b) \mathbf{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B(b) = \frac{\mu_0 j s}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

3.19 — Montrez que ce résultat est cohérent avec les composantes (B_x, B_y, B_z) que vous avez obtenues précédemment par transformation du tenseur $F^{\mu\nu}$.

Commentez : en quoi le champ magnétique est-il un effet purement relativiste ?

4. Effet Doppler

En utilisant le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, retrouvez la loi de l'effet Doppler relativiste.

5. Distribution angulaire de la lumière émise (effet phare)

5.1 — Une source de lumière O' émet des photons de manière isotrope dans son référentiel R' . Cette source lumineuse est animée d'une vitesse $c/2$ par rapport au référentiel R . Étudiez la distribution angulaire des photons dans R autour de la direction Ox (direction du mouvement relatif).

6. Aberration de la lumière

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley en 1725 : lorsqu'on observe une étoile au cours de l'année, celle-ci semble décrire une ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile. L'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement.



6.1 — Considérons un observateur lié au soleil qui voit une étoile lointaine dans la direction du pôle de l'écliptique (axe Oz de l'orbite terrestre). On appelle v la vitesse d'un astronome situé sur terre observant la même étoile. Calculez l'angle apparent θ' que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique pour l'astronome. Faites l'application numérique ($v \simeq 30 \text{ km.s}^{-1}$).

6.2 — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle θ par rapport au pôle de l'écliptique. Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de θ .

7. Physique des tachyons

Le tachyon est une particule hypothétique dont la vitesse u est supérieure à c . En se basant uniquement sur cette hypothèse, on peut tenter de décrire les propriétés d'une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

7.1 — Montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R} on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$.

7.2 — Sur un diagramme d'espace-temps, indiquez les axes x et t du référentiel \mathcal{R} . Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine $O(t = 0, x = 0)$ (Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).

7.3 — Sur ce diagramme, dessinez :

- la ligne d'espace-temps d'un objet immobile en $x = x_0$;
- la ligne d'espace-temps d'un objet se déplaçant à la vitesse constante $w < c$;
- la ligne d'espace-temps d'un photon émis vers l'avant au point événement $A(t_A, x_A)$ avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

7.4 — Dans le référentiel \mathcal{R} , un tachyon est émis en $A(t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en $B(t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d'univers (attention ! souvenez-vous que sa vitesse u est supérieure à c !).



FIGURE 15 – Tachyon en peluche, The Particle Zoo.

7.5 — Quelle est la nature de l'intervalle d'espace-temps \widetilde{AB} ?

7.6 — Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen \mathcal{R}' avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$: indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel \mathcal{R}' , la réception du tachyon (événement B) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement A). Dessinez les axes t' et x' de ce référentiel \mathcal{R}' sur votre dessin, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel \mathcal{R}' , $t'_B < t'_A$.

7.7 — Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité ? Proposez une interprétation de la succession des événements A et B dans le référentiel \mathcal{R}' .

7.8 — On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u . Exprimée ainsi, son énergie est imaginaire, mais que pouvez-vous dire du comportement de $|E(u)|$ en fonction de u ? Combien d'énergie faut-il fournir pour faire ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$? Pour un tachyon, comment évolue son énergie (ou plutôt le module de son énergie) lorsqu'il accélère ?

7.9 — Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte ?

