propagation. Seule une étude énergétique microscopique, c'est-à-dire à l'échelle atomique et moléculaire, permet de donner des réponses non ambiguës; on montre alors que le flux d'énergie à travers une surface fermée, associé à la propagation du champ électromagnétique dans la matière, est égal au flux à travers cette surface du vecteur de Poynting **R** :

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}} \, .$$

Il est important de signaler que le champ électromagnétique peut être la cause d'autres formes macroscopiques de flux d'énergie dont il faut tenir compte dans un bilan global : flux de chaleur par exemple dans un milieu absorbant, ou même parfois d'énergie mécanique.

Pour un *milieu non magnétique*, $\mathbf{R} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$; formellement cette expression est alors identique à celle que nous avons donnée pour les ondes électromagnétiques dans le vide. Volontairement, nous ne parlerons pas dans ce paragraphe de densité d'énergie associée à l'onde électromagnétique qui se propage; en effet dans la matière cette notion est très délicate à définir correctement et sa formulation explicite éventuelle nécessite une connaissance des contraintes thermiques et mécaniques auxquelles est soumis le matériau (cf. ex. 3, 5 et 6 de ce chapitre).

2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN MILIEU DIÉLECTRIQUE

2-1. Ondes monochromatiques dans un diélectrique linéaire, homogène et isotrope

Nous supposerons que le milieu diélectrique est un très bon isolant, c'est-à-dire sans charges libres. Les équations de Maxwell dans ce milieu se réduisent alors aux équations :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \, , \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \, ,$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \, , \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0} \, .$$

Pour aller plus loin, il est nécessaire de préciser les propriétés du matériau. Supposons-le d'abord *non magnétique*, soit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ d'où $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ partout. Prenons alors un diélectrique à réponse linéaire; nous ne pouvons écrire de façon simple le lien général entre $\mathbf{D}(t)$ et $\mathbf{E}(t)$; en effet en régime dynamique la polarisation $\mathbf{P}(t)$ dépend de la valeur du champ **E** non seulement à l'instant t mais aussi aux temps antérieurs. Ce n'est que pour les champs évoluant sinusoïdalement en temps, ou champs monochromatiques, que nous pouvons écrire une relation de proportionnalité entre **D** et **E** avec une cons-

tante diélectrique $\varepsilon(\omega)$ dépendan
tions des équations de Maxwell s

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega \, e^{-i\omega t} \, , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

où, selon un usage fréquent, no
(réel) et sa représentation comple

Pour un *milieu isotrope :* $\mathbf{D}_\omega =$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \, \mathbf{E}_\omega) = 0 \, ,$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E}_\omega - i \, \omega \, \mathbf{B}_\omega = \mathbf{0} \, ,$$

Dans un *milieu homogène*, $\varepsilon(\omega$
le champ électromagnétique sinu

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\omega = 0 \, ,$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E}_\omega - i \, \omega \, \mathbf{B}_\omega = \mathbf{0} \, ,$$

ce jeu d'équations est formellem
électromagnétique dans l'espace
remplacée par ε. On en conclut q
se propager dans un milieu di
sont semblables dans leur struct
L'élimination de $\mathbf{B}_\omega$ conduit par

$$\Delta \, \mathbf{E}_\omega + \omega^2 \, \varepsilon \mu_0 \, \mathbf{E}_\omega = \mathbf{0}$$

Deux différences fondamental
les ondes de fréquences différe
identique (phénomène de dispe
grandeur complexe, la partie in
d'absorption.

2-2. Onde plane progressi linéaire, homogène et

Cherchons des solutions mon
propageant dans la direction O
points d'un même plan perpen
« homogènes »); ces solutions s
unitaire de la direction **Ou**; en p

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \, ,$$

Les équations de Maxwell don

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \, , \qquad \mathbf{k} \cdot$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \omega \, \mathbf{B} \, , \qquad \mathbf{k} \wedge$$

tante diélectrique $\varepsilon(\omega)$ dépendant de la pulsation. Cherchons donc des solutions des équations de Maxwell sous la forme :

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_\omega\, e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}_\omega\, e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{D}=\mathbf{D}_\omega\, e^{-i\omega t},$$

où, selon un usage fréquent, nous notons par un même symbole le champ (réel) et sa représentation complexe.

Pour un *milieu isotrope :* $\mathbf{D}_\omega=\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_\omega$; il vient alors :

$$\operatorname{div}(\varepsilon\,\mathbf{E}_\omega)=0\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}_\omega=0\,,$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_\omega-i\,\omega\,\mathbf{B}_\omega=\mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{B}_\omega+i\,\omega\varepsilon\mu_0\,\mathbf{E}_\omega=\mathbf{0}\,.$$

Dans un *milieu homogène,* $\varepsilon(\omega)$ ne dépend pas des coordonnées d'espace et le champ électromagnétique sinusoïdal obéit alors aux équations :

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_\omega=0\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}_\omega=0\,,$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_\omega-i\,\omega\,\mathbf{B}_\omega=\mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{B}_\omega+i\,\omega\varepsilon\mu_0\,\mathbf{E}_\omega=\mathbf{0}\,,$$

ce jeu d'équations est formellement identique à celui satisfait par un champ électromagnétique dans l'espace vide, la constante ε_0 y étant simplement remplacée par ε. On en conclut que les ondes monochromatiques qui peuvent se propager dans un milieu diélectrique, linéaire, homogène et isotrope, sont semblables dans leur structure à celles qui se propagent dans le vide. L'élimination de $\mathbf{B}_\omega$ conduit par exemple à l'équation :

$$\Delta\,\mathbf{E}_\omega+\omega^2\,\varepsilon\mu_0\,\mathbf{E}_\omega=\mathbf{0}\,.$$

Deux différences fondamentales sont à souligner ; d'une part ε dépend de ω, les ondes de fréquences différentes ne se propagent donc pas de façon identique (phénomène de dispersion) ; mais de plus ε est en général une grandeur complexe, la partie imaginaire étant associée à des phénomènes d'absorption.

2-2. Onde plane progressive monochromatique dans un diélectrique linéaire, homogène et isotrope

Cherchons des solutions monochromatique des équations de Maxwell se propageant dans la direction **Ou**, et ayant même amplitude pour tous les points d'un même plan perpendiculaire à **Ou** (ondes planes dites parfois « homogènes ») ; ces solutions sont des fonctions de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}$ où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire de la direction **Ou** ; en posant $\mathbf{k}=k\,\mathbf{u}$, elles sont de la forme :

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,, \qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,.$$

Les équations de Maxwell donnent les relations :

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0\,, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0\,,$$
$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{E}=\omega\,\mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{k}\wedge\mathbf{B}=-\omega\varepsilon\mu_0\,\mathbf{E}\,,$$

les deux premières relations montrent que les champs **E** et **B** sont transverses (perpendiculaires à la direction de propagation définie par **u**) ; les deux autres relations montrent que **u**, **E** et **B** forment un trièdre direct. Pour qu'elles soient compatibles, il faut, qu'en éliminant **E** (ou **B**) entre les deux, on obtienne une identité :

$$k^2\ \mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{E}) = -\omega^2\ \varepsilon\mu_0\ \mathbf{E}\ ,$$

soit, en utilisant la formule du double produit vectoriel, et en tenant compte de la transversalité de **E** :

$$\boxed{k^2 = \omega^2\ \varepsilon(\omega)\ \mu_0}\ .$$

Cette relation porte le nom de *relation de dispersion ;* elle s'écrit encore :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\ \varepsilon_r(\omega)\ ,$$

où $c = (\varepsilon_0\,\mu_0)^{-1/2}$ est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide et $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ est la constante diélectrique du milieu à la fréquence angulaire ω.

La relation entre **E** et **B** s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{k}{\omega}\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{E}}\ .$$

L'onde étudiée a une structure semblable à celle de l'onde plane électromagnétique dans le vide. Cependant il faut rappeler que ε peut être complexe ; il en sera alors de même pour k. Étudions d'abord le cas ε réel.

2-3. Milieu diélectrique non absorbant. Indice

Soit un milieu non absorbant pour la fréquence angulaire ω choisie ; $\varepsilon(\omega)$ est réel ; il en est de même pour k et la relation de dispersion du paragraphe précédent s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\ .$$

La vitesse de phase de l'onde électromagnétique de fréquence ω est alors donnée par :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}\ .$$