

# Préparation à l'agrégation de physique

## Hydrodynamique - TD1

Tom BIENAIMÉ ([tom.bienaimé@ens.fr](mailto:tom.bienaimé@ens.fr))

*Une liste de références bibliographiques est donnée à la fin de ce TD. Il est conseillé aux étudiants qui n'ont pas suivi de cours d'hydrodynamique, ou dont les souvenirs sont lointains, de lire les chapitres d'hydrodynamique d'un livre de niveau PC (voir référence 1 par exemple).*

*Merci à Benoît Semin d'avoir partagé les énoncés des années précédentes. Ils ont été repris partiellement dans cette série de TDs.*

### 1 Cinématique des fluides

#### 1.1 Définitions

1. Définir brièvement les notions suivantes : volume mésoscopique, particule de fluide, ligne de courant, trajectoire.
2. Définir brièvement la notion d'écoulement stationnaire. Un écoulement reste-t-il stationnaire lors d'un changement de référentiel ?

#### 1.2 Caractérisation d'un écoulement

On considère le champ de vitesse  $\mathbf{v} = \alpha x \mathbf{u}_x - \alpha y \mathbf{u}_y$ , avec  $\alpha > 0$ .

1. L'écoulement est-il stationnaire, compressible, irrotationnel ?
2. Tracer les lignes de courant associées à cet écoulement.
3. Calculer à l'instant  $t$  la position d'une particule située en  $(x_0, y_0, 0)$  à  $t = 0$ . Tracer la trajectoire des particules.
4. Calculer la vitesse en représentation lagrangienne. Calculer l'accélération en représentation lagrangienne et comparer à l'accélération en représentation eulérienne.

#### 1.3 Ondes de gravité

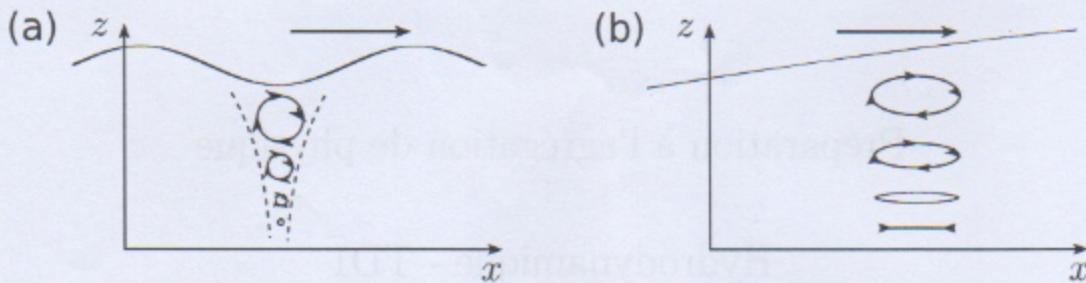
Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période  $T$  et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grandes dimensions, à fond plat et dont les bords sont transparents. On disperse des traceurs dans le bassin et on prend une photographie avec un temps de pose égal à la période  $T$  d'excitation. On constate ainsi que :

- les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques ;
- les ellipses sont quasi-circulaires à la surface ( $z = h$ ) et de plus en plus plates lorsqu'on s'enfonce vers le fond ( $z = h$ ).

Pour interpréter ces observations, on adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel, associé à un potentiel des vitesses de la forme :

$$\phi = f(z) \cos(\omega t - kx),$$

dont la dépendance en  $x$  et  $t$  à  $z$  fixé décrit une onde plane progressive de vitesse  $c = \omega/k$  et de longueur d'onde  $\lambda = cT$ .



**Figure 1** – Trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde ; (a) en eau profonde et loin du fond ( $kz \gg 1$ ) ; (b) en eau peu profonde ( $kz \ll 1$ ). La flèche donne le sens de propagation de l'onde.

1. Établir l'équation différentielle dont est solution  $f(z)$  en exploitant l'incompressibilité de l'écoulement.

2. Justifier la condition aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0,$$

et en déduire  $f(z)$  à une constante multiplicative  $A$  près, puis les composantes  $v_x$  et  $v_z$  du champ eulérien des vitesses.

3. Trouver les équations des lignes de courant associées à cet écoulement.

4. En déduire que les coordonnées  $(x^*(t), z^*(t))$  d'une particule de fluide donnée sont solutions du système différentiel :

$$\frac{dx^*}{dt} = kA \cosh(kz^*) \sin(\omega t - kx^*) \quad ; \quad \frac{dz^*}{dt} = kA \sinh(kz^*) \cos(\omega t - kx^*).$$

5. Ce système non-linéaire couplé n'a pas de solution analytique. Pour simplifier le système, on peut mettre à profit une observation supplémentaire : le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse sont petits par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$ . On remplace alors  $kx^*$  et  $kz^*$  par leurs moyennes temporelles  $k\bar{x}^*$  et  $k\bar{z}^*$  dans le membre de droite du système différentiel.

(a) Justifier la validité de cette approximation.

(b) Montrer que les expressions de  $x^*(t)$  et  $z^*(t)$  en fonction de  $\omega$ ,  $t$ ,  $k$ ,  $\bar{x}^*$ ,  $\bar{z}^*$ ,  $A$ . On exploitera le fait que  $\bar{x}^*$  et  $\bar{z}^*$  sont les valeurs moyennes de  $x^*(t)$  et  $z^*(t)$  pour déterminer les constantes d'intégration.

(c) Interpréter les résultats.

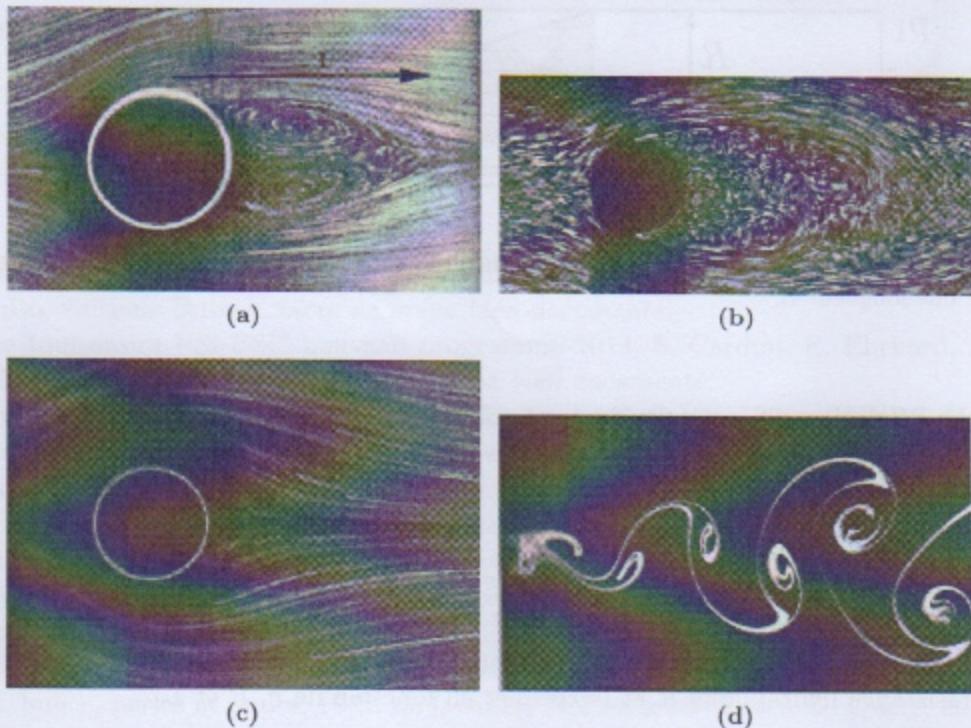
6. Que peut-on en conclure quant à l'identité entre trajectoire et ligne de courant ?

**Bilan** Dans un écoulement stationnaire, quel est le lien entre les lignes de courant et les trajectoires des particules (cf. exercice 1.2) ? Qu'en est-il pour un écoulement non-stationnaire (cf. exercice 1.3) ?

## 2 Équations du mouvement et régimes d'écoulement

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\eta$ . On note  $dF/d\tau$  la force extérieure par unité de volume subie par le fluide.

1. Écrire l'équation locale de conservation de la masse.
2. Écrire l'équation d'incompressibilité.
3. On considère à partir de maintenant que le fluide est incompressible. Écrire l'équation de Navier-Stokes. Nommer et discuter physiquement les différents termes. À la conservation de quelle quantité cette équation est-elle associée ?
4. Définir le nombre de Reynolds.
5. Classer les images de la figure 2 par nombre de Reynolds croissant.



**Figure 2** – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds. La vitesse est uniforme en amont du cylindre. Source : Guyon, Hulin, Petit, hydrodynamique physique, éditions CNRS.

6. Décrire les écoulements de la figure 2 et donner les termes qui les caractérisent (laminaire, turbulent, stationnaire, etc).
7. Comment varie l'écoulement dans un tuyau cylindre en fonction du nombre de Reynolds ? (l'écoulement dans un tuyau est celui pour lequel Reynolds a défini pour la première fois le nombre qui porte maintenant son nom).

### 3 Dynamique des fluides visqueux – Écoulements parallèles

#### 3.1 Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$  induit par une différence de pression  $\Delta p$  sur une longueur  $L$  d'un tube cylindrique horizontal de rayon  $R$  d'axe  $z$ . Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme :

$$\mathbf{v} = v_z(r, z) \mathbf{u}_z \quad ; \quad p = p(r, z).$$

Pour un tel champ, on donne :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad ; \quad \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z.$$

1. On suppose que l'écoulement est incompressible. Montrer que  $v_z(r, z)$  ne dépend pas de  $z$ .
2. On néglige la pesanteur. Dans ce cas, on rappelle que l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \mathbf{a} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

- (a) Montrer que le champ des accélérations  $\mathbf{a}$  est nul.
- (b) Montrer que la pression ne dépend pas de  $r$ .

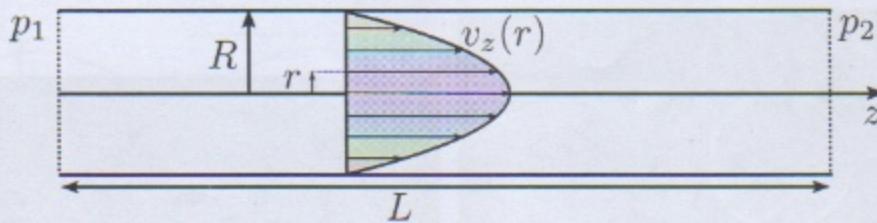
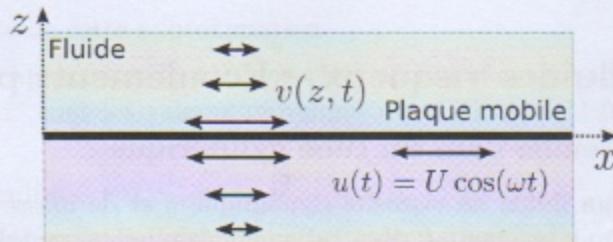


Figure 3 – Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon  $R$ , induit par une différence de pression  $\Delta p = p_1 - p_2$  sur une longueur  $L$ .

- (c) Établir l'équation différentielle dont est solution  $v_z(r)$  et montrer que  $dp/dz$  est une constante  $C$ . En exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite, expliciter  $C$  et  $v_z(r)$  (on admet que  $dv_z/dr$  est bornée).
3. Débit volumique et loi d'Ohm.
  - (a) En déduire l'expression du débit volumique  $D_v$  en fonction des pressions  $p(z = 0) = p_1$  à l'entrée et  $p(z = L) = p_2$  à la sortie de la conduite.
  - (b) Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique  $\mathcal{R}$  et l'exprimer en fonction de  $\eta$ ,  $R$  et  $L$ .
  - (c) Comparer l'influence du rayon  $R$  sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

### 3.2 Force subie par une plaque en mouvement sinusoïdal forcé

Une plaque confondue avec le plan d'équation  $z = 0$  est en translation avec une vitesse  $u(t) = U \cos(\omega t) \mathbf{u}_x$  dans un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ , de viscosité cinématique  $\nu = \eta/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$  (valeur de l'eau), remplissant tout l'espace. On note  $p(z, t)$  le champ de pression et  $\mathbf{v}(r, t) = v(z, t) \mathbf{u}_x$  le champ des vitesses dans le fluide.



1. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

Montrer que le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion. En déduire sans calcul l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite, domaine hors duquel le fluide reste quasiment au repos. Réaliser l'application numérique pour une fréquence de 100 Hz.

2. On cherche en régime sinusoïdal forcé un champ des vitesses de la forme :

$$v(z, t) = \Re \{ U \exp(i\omega t - ikz) \}.$$

Déterminer  $k$  et en déduire les expressions de  $v(z > 0, t)$  et  $v(z < 0, t)$ .

3. On rappelle l'expression  $d\mathbf{F} = \eta (\partial v / \partial z) dS \mathbf{u}_x$  de la force de viscosité exercée sur un élément de surface  $dS$ , de cote  $z$  par le fluide situé à une cote supérieure à  $z$ . En déduire l'expression de la force subie par unité de surface par la plaque et la puissance de cette force. Commenter.

## TD1 Hydrodynamique

I Cinétique des fluides

## 1) Définitions

## 1.1- volume méso scopique :

longueur méso scopique : longeur  $\sigma \ll L$  taille caractéristique du système considéré

$$\sigma \gg \sigma' \leftarrow \text{taille microscopique}$$

la taille microscopique peut être caractérisée par : - taille atomes

- " molécules
- distance moléculaire
- $\sigma^3$  libre parcours moyen
- etc.

$$\text{Donc } \sigma \ll \sigma' \ll L$$

Alors un volume méso scopique  $\sigma^3$  est un volume qui vérifie  $\sigma^3 \ll \sigma'^3 \ll L^3$

## Particule de fluide :

Un élément de volume méso scopique du fluide.

## Ligne de courant :

lignes de champ du champ extérieur des vitesses  $\vec{V}(\vec{r}, t)$   
 C.-à-d. lignes tangentes au champ des vitesses.

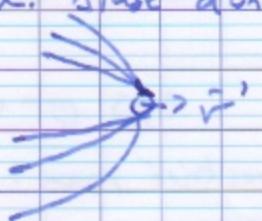
## Trajectoire d'une particule

L'ensemble des positions occupées par la particule de fluide au cours du mouvement.

## 2) écoulement stationnaire

Écoulement dont les champs extérieurs (v( $\vec{r}, t$ ),  $p(\vec{r}, t)$ ,  
tous les  $T(\vec{r}, t)$ ,  $S(\vec{r}, t)$ ...) ne dépendent pas du temps.

A) La nature stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel (ex. siège d'un bateau / canard, voir photo (C)).



si dans  $\Omega$  on a  $v(x, t) = v(x)$

alors dans  $\Omega'$  qui bouge  $\hat{\in} V_0$  on aura  $v(x - \underline{v}t)$

1. 2 caractérisation d'un écoulement:

on se place dans  $(\Omega)$

1) soit  $\vec{v} = \alpha \vec{x} \vec{u}_x - \alpha \vec{y} \vec{u}_y$  avec  $\alpha > 0$

•  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ ,  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  vecteurs directeurs unitaires fixes dans  $\Omega$ .  
 $\alpha = cb$  fixe

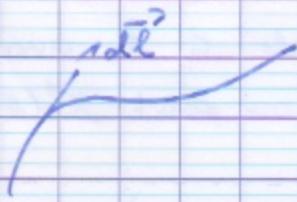
$\Rightarrow$  • écoulement stationnaire.

•  $\text{div}(\vec{v}) = \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow$  écoulement incompressible.

•  $\text{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_x & 0 \\ \partial_y & -\partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$  irrotationnel

2 lignes de courant:

TD hydro 2

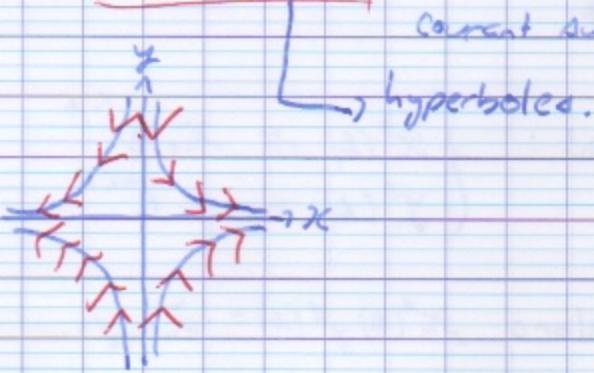


$$\vec{dl} \wedge \vec{v}(r, t) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Pour notre équation :

$$\frac{dx}{v_x} = -\frac{dy}{v_y} \Rightarrow d \ln(xy) = -d \ln(y)$$
$$\Rightarrow d \ln(xy) = 0$$

Alors on réduit  $|xy = \text{cte.}|$  ce qui donne les lignes de courant suivantes :



3) Trajectoire d'une particule :

position d'une particule de fluide  $(x^*(t); y^*(t))$  ;

soit la position initiale :  $x^*(0) = x_0$   
 $y^*(0) = y_0$

alors  $\frac{dx^*}{dt} = v_x(x^*(t), y^*(t), t)$

La particule de fluide coïncide à  $t$  avec le champ Eulerien des vitesses évalué au point  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ .

$$\frac{dy^*(t)}{dt} = v_y(x^*(t), y^*(t), t)$$

Dato nofe (co  $\frac{dR}{dt}(r^*, t) = 0$

Donc on a dans notre cas on a :

$$\frac{dx^k}{dt} = x^k \cdot \vec{v}(x^1, x^2, t) \cdot \hat{e}_k = \dot{x}^k$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} x^*(t) = x_0 e^{kt} \\ y^*(t) = y_0 e^{-kt} \end{cases}$$

$$\text{along } x^*(t) y^*(t) = x_0 y_0.$$

Dans cette situation, les lignes de champ sont concordantes avec les trajectoires, mais ce n'est pas toujours le cas (c'est vrai si on a un écoulement stationnaire).

- 4) Dans la représentation Lagrangienne on suit une particule de fluide tandis que en Eulerienne on étudie les lignes de champ. (i.e. l'écoulement).

TD hydro 13

En Lagrangienne :

$$\rightarrow \vec{r}^*(t) = \begin{cases} \frac{dx^*}{dt} \\ \frac{dy^*}{dt} \end{cases} = \begin{cases} x_0 e^{kt} \\ -y_0 e^{-kt} \end{cases}$$

$$\vec{\alpha}^*(t) = \begin{cases} \frac{d^2x^*}{dt^2} \\ \frac{d^2y^*}{dt^2} \end{cases} = \begin{cases} k^2 x_0 e^{kt} = \alpha x^*(t) \\ k^2 y_0 e^{-kt} = -\alpha y^*(t). \end{cases}$$

En Eulerienne :

$$\vec{\alpha}(r^*, t) = \frac{dr^*}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}^*$$

!!

équation stationnaire

$$(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}) \vec{r}^* = \begin{cases} \alpha v_x \\ -\alpha v_y \end{cases}$$

coincidence en identifiant  
 $v_x = v_x^*$   
 $v_y = v_y^*$

On a le droit de faire l'identification car :

$$\vec{\alpha}^*(t) = \vec{\alpha}(r^*(t), t) \leftarrow \text{évaluation du champ } \vec{v}$$

en  $x^*$  et  $y^*$  à  $t$  !

7.3 Ordre de gravité



hypothèse :

fluide incompressible :  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

irrotationnel :  $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

o. suppose alors comme  $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$  que  $\vec{v} = \vec{grad}(\phi)$   
où  $\phi$  est un potentiel de vitesse et :

$$\phi = f(z) \cos(wt - kx)$$

1)  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{grad}(\phi)) = 0$

d'où  $\Delta \phi = 0$ , équation de Poisson.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{car } \phi \text{ est indépendant de } y.$$

d'où on trouve  $f''(z) \cos(wt - kz) = -k^2 f(z) \cos(wt - kz)$

d'où :  $f''(z) - k^2 f(z) = 0$

2)  $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z=0) = 0$  car au fond du récipient ( $z=0$ ), la

composante normale de la vitesse doit s'annuler car l'eau ne peut pas traverser le sol.

$$v_z(x, z=0, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_z}{\partial z}(x, z=0, t) = 0$$

TD hydro 1

4

$$\text{d'où : } f'(z=0) = 0.$$

$$\text{On a que } f(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz)$$

$$\rightarrow f'(0) \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\text{d'où : } f(z) = A \cosh(kz)$$

$$\text{alors } \phi(x, z, t) = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kz)$$

$$\text{donc } V_x = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial x} = kA \cosh(kz) \sin(\omega t - kz)$$

$$V_z = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} = kA \sinh(kz) \cos(\omega t - kz).$$

3) Lignes de courant :

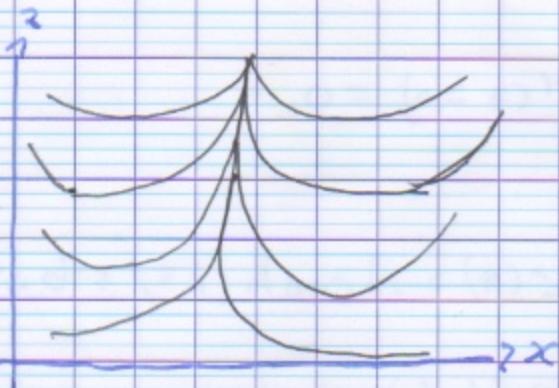
$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dz}{V_z} \rightarrow \frac{dx}{\cosh(kz) \sin(\omega t - kz)} = \frac{dz}{\sinh(kz) \cos(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\tan(\omega t - kz)} = \frac{dz}{\tanh(kz)}$$

$$\text{d'où : } -d(\ln \sin(\omega t - kz)) = d(\ln \sinh(kz))$$

$$\Rightarrow d[\ln(\sinh(kz) \sin(\omega t - kz))] = 0$$

$$\text{Équation des lignes de courant : } \sin(kz) \sin(\omega t - kz) = \text{cte}$$



Ex. Chaque ligne de courant est donnée par une valeur de la constante

$$4) \frac{d\vec{v}_c^*}{dt} = V_x(x^*(t), z^*(t), t) = ikA \cosh(k^* z) \sinh(wt - kz)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = V_y(x^*(t), z^*(t), t) = kA \sinh(k^* z) \cosh(wt - kz)$$

On évalue  $V_x$  et  $V_y$  à  $x^*$ ,  $y^*$  et  $t$ .

5) On émet une nouvelle hypothèse :  
en ignorant  $\delta x$  et  $\delta z$  petit  $\delta x, \delta z \ll 1$

$$\text{alors on suppose } \begin{aligned} x^*(t) &= \bar{x}^* + \delta x^*(t) \\ z^*(t) &= \bar{z}^* + \delta z^*(t) \end{aligned}$$

$$\text{on a fait la approximation } \left| \frac{\delta x^*}{1} \right| \ll 1$$

$$\left| \frac{\delta z^*}{1} \right| \ll 1$$

$$\text{alors } \cosh(kz^*(t)) = \cosh(k\bar{z}^* + k\delta z^*(t)) \approx \cosh(k\bar{z}^*)$$

5

## II) hydro 1

c) On peut faire une expérience pour justifier l'approximation (on compare  $\bar{x}$  et les ellipses obtenues avec le théorème). Si non on peut vérifier que notre résultat final prédit correctement la réalité.

$$\text{b) alors } \begin{cases} \frac{dx^*(t)}{dt} = h A \cosh(k\bar{z}^*) \sin(\omega t - k\bar{x}^*) & (1) \\ \frac{dz^*(t)}{dt} = h A \sinh(k\bar{z}^*) \cos(\omega t - k\bar{x}^*) & (2) \end{cases}$$

équations décomposées.

$$\text{d'où } x^*(t) = -\frac{hA}{\omega} \cosh(k\bar{z}^*) \cos(\omega t - k\bar{x}^*) + \bar{x}^*$$

$$y^*(t) = \frac{hA}{\omega} \sinh(k\bar{z}^*) \sin(\omega t - k\bar{x}^*) + \bar{z}^*$$

On sait que la cte. d'intégration vaut  $\bar{x}^*/e^*$  car :

$$\begin{aligned} \langle x^*(t) \rangle &= \langle \text{cte} \rangle + \left\langle -\frac{hA}{\omega} \dots \cos(\omega t - k\bar{x}^*) \right\rangle \\ (\Rightarrow) \quad \bar{x}^*(t) &= \text{cte.} \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &= 0! \end{aligned}$$

c) Pour interpréter il faut se débarrasser de  $t$  dans les équations. (ex. parenthésé).

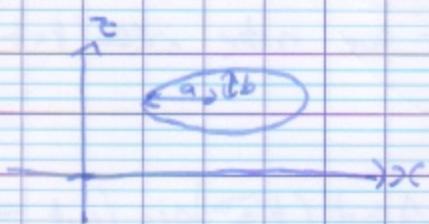
or on sait que  $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$\text{donc } \left[ \frac{\omega \cdot (z^*(t) - \bar{z}^*)}{h A \sinh(k\bar{z}^*)} \right]^2 + \left[ \frac{\omega \cdot (x^*(t) - \bar{x}^*)}{h A \cosh(k\bar{z}^*)} \right]^2 = 1$$

$\downarrow$   
les deux sont  $\sin^2$

$\cos^2$

On reconnaît l'équation d'une ellipse :



$$\text{où } b = \frac{hA}{\omega} \sinh(k\bar{z}^*)$$

$$a = \frac{hA}{\omega} \cosh(k\bar{z}^*)$$

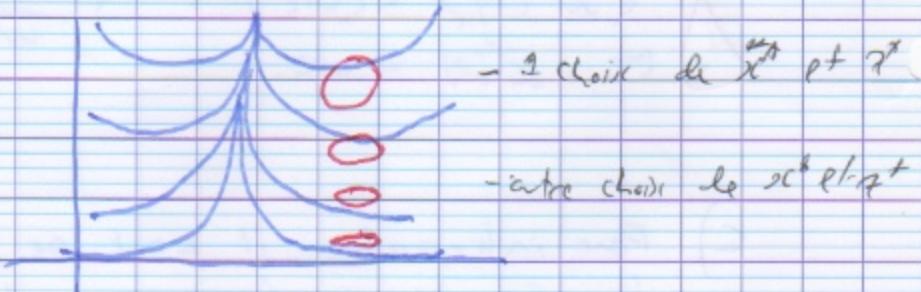
Alors proche de la surface on a  $\bar{z}^* k^* \gg 2$

$\Rightarrow a \approx b \Rightarrow$  trajectoires circulaires

proche des fonds :  $k\bar{z}^* \ll 1$

$\Rightarrow b \ll a \rightarrow$  les ellipses sont des lignes.

rg. On a fait un choix de  $\bar{x}^*$  et  $\bar{z}^*$  au moment où on a évalué  $\vec{r}(\bar{r}, t)$  aux points  $x^*$  et  $z^*$  de la particule de fluide :



- 6) Les trajectoires sont confondues avec les lignes de courant si on a un écoulement stationnaire. Si non, on peut plus l'apprendre!

Méthode 2

6

## Exercice 2 Équations du mouvement et régimes d'équilibre

pliée:  $\rho, g$

Soit  $\frac{dF}{dt}$  force extérieure par unité de volume.

1)  $\frac{d\ell}{dt} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}^2) = 0$  *& conservation de la masse!*

2) Incompressibilité:  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

réf: si on part de  $\frac{d\ell}{dt} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}^2) = 0$

$$\Rightarrow \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla \rho) + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt}$$

Si l'équation est incompressible:  $\frac{d\rho}{dt} = 0$

et comme  $\rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0$

ceci implique que  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ .

3) Navier Stokes: fluide incompressible:

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{v}}{dt}}_1 + \underbrace{\cancel{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}}_3 = -\vec{\nabla} p + \rho g \vec{i} + \underbrace{\frac{d\vec{F}}{dt}}_2$$

force de pression

Conservation de la gte de mouvement du fluide.

1)- variation de gte de mouvement par un observateur statique

2)- Transport diffusif de gte de mouvement

3)- Transport convectif de gte de mouvement

4) Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\|\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}\|}{(\rho g L^2)} = \frac{\text{therme convectif}}{\text{therme diffusif}}$$

$$= \frac{\rho v^2}{\eta L} \quad \text{avec}$$

$L$  = longeur caractéristique

$v$  = vitesse caractéristique de l'écoulement

$\eta$  = viscosité

$\rho$  = masse volumique

Si on a une seule longueur caractéristique alors:

$$= 1 \quad Re = \frac{v L}{\eta} \quad \text{ouvert} \quad V = \frac{g}{\rho} d^3 \omega R_e = \frac{v L}{\eta}$$

7  
TD hydro 2:

5) écoulement des images par  $Re \rightarrow \infty$

$$C < A < D < B \quad (Re)$$

6) C: Re faible ( $Re \ll 1$ )

- lignes de courant bien identifiées
- couches de fluide glissent les unes sur les autres
  - ( $\hookrightarrow$ ) écoulement lamininaire
- lignes de courant symétriques / plan median de la sphère
  - ( $\hookrightarrow$ ) reversibilité de l'écoulement
  - $(\vec{v}^2 \rightarrow -\vec{v}^2)$  pas de ch. de l'écoulement

A:  $Re \sim 1-10$ :

centre de l'écoulement.

- en aval de l'écoulement on a un tourbillon de recirculation fixe / sphère.
- plus  $Re \nearrow$ , plus la taille des tourbillons  $\nearrow$   
(cf. TD 2 - considérations sur couche limite).

D: Recritique  $\sim 47$  pour la sphère:

- écoulement cesse d'être stationnaire
  - $\Rightarrow V_{\text{fluide}} = f(t)$ .
  - $\Rightarrow$  tourbillons émis périodiquement en aval de l'écoulement.

↳ ces tourbillons forment une double filet de Bénard - Von Karman.

$$\beta : Re \gg 1$$

- des mvt turbulents incohérents se superposent aux allées de Bénard - Von Karman
- Ces mvt turbulents ont des longueurs caractéristiques d'autant plus petites que  $Re$  est grand

↳ Typiquement la turbulénté intérieure  $\propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$

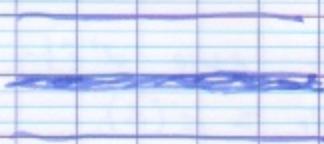
7) Question cours :

Expérience de Reynolds :



2 types d'écoulement différents pour  $Re \approx 2000$

Pour un écoulement



Écoulement laminaire  $Re \ll Re_c$

TD hydro<sup>8</sup>

- les lignes de courant glissent sans se réfléchir.
- 2 particules de fluide voisines le restent au cours du temps.

Si  $Re \geq Re_c$



Écoulement turbulent:

- ↳ relâche important des couches de fluide
- appariition de turbulences dans l'écoulement sous forme de tourbillons.
- écoulement présente des fluctuations aléatoires dans les tourbillons

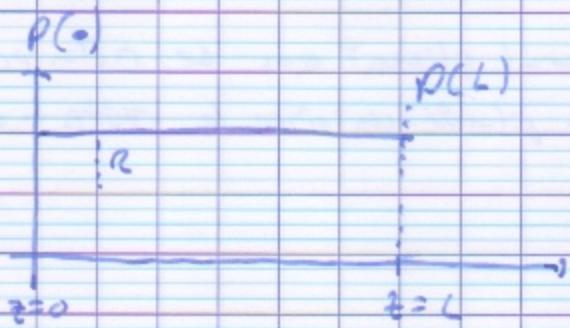
La transition n'est pas brutale, il y a une zone de transition.

Exercice 3 Dynamique des fluides visqueux - Écoulements parallèles

3.1 Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

fluide:  $\eta$  et  $\rho$

induit par  $\Delta P$  le long de  $L$  d'un tube de rayon  $R$   
d'axe z:



$$\Delta P = P(0) - P(L)$$

On suppose du aux hypothèses du problème que:  $\vec{v} = v_z(r, z) \hat{z}$

$$\begin{aligned} p &= p(r, z) \\ (\text{rg. coord. cylind. } (r, \theta, z))' \end{aligned}$$

1) incompressibilité  $\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

$$\text{d'où } \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z(r, z) = V_0(r)$$

2)  $\rho a = -\operatorname{grad} p + \gamma \Delta V$  dans notre cas d'épaisseur finie

$$a) \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}$$

$$\downarrow \\ \stackrel{z=0}{=} \\ \text{car} \\ \text{stationnaire}$$

$$\hookrightarrow (V_0 \hat{z}) V_0 \hat{z}$$

$V$  dépend de  $p$  et de  $t$

or comme incompressible  
 $\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

$$\text{d'où } V \stackrel{\rightarrow}{\text{grad}}(\vec{v}) = 0 \\ \text{donc } \vec{a} = \vec{0}.$$

TD n° 1

b) On projette Navier Stokes sur  $\vec{u}_r$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dr} = 0 \text{ donc } p(r, z) = p(z) !$$

c) On projette Navier Stokes sur  $\vec{u}_z$ :

$$\vec{a}_z \cdot \vec{u}' = -\frac{dp}{dz} + \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dz} = \underbrace{\frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right)}_{\text{depend de } z}$$

depend  
que de  $v_z$

depend de  $dr$

Comme ceci est vrai:  $v_z$  et  $dr$  on deduit que:

$$\frac{dp}{dz} = \text{cte} = C = \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

$$\text{donc } P(z) - P(0) = Cz \quad \text{avec } C = \frac{P(L) - P(0)}{L}$$

$$\text{alors } \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{Cr}{z}$$

$$\Rightarrow r \frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr^2}{z} + D.$$

$$\text{donc } \frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr}{z^2} + \frac{D}{r}$$

or en  $r=0$   $\frac{dV_2}{dr}$  ne doit pas diverger! donc  $D=0$

hyp.  $\frac{dV_2}{dr} \rightarrow$  bornée (voir Q.).

alors  $V_2(r) = \frac{Cr^2}{4\eta} + E$

or conditions limites:  $V_2(r=R) = 0$  car paroi immobile  
(par continuité).

donc  $E = -\frac{CR^2}{4\eta}$

finalement  $V_2(r) = \frac{P(0) - P(L)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$

Donc pour  $r < R$ ,  $V_2(r) \geq 0$  si  $P(L) \leq P(0)$ .

- La viscosité a pour effet de réduire la diff. de pression.
- On a un profil parabolique dans une section de tube.

3a) Le débit volumique:  $D_V = \iint \vec{v} \cdot \vec{ds}$

$$= 2\pi \int_0^R r dr \frac{P(0) - P(L)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

10

TD hydro - 2

$$\Delta v = \frac{\pi}{2gL} \left( \frac{R^4 - R'^4}{2} \right)$$

$$\Delta v = \frac{\pi R^4}{8gL} [P(0) - P(L)]$$

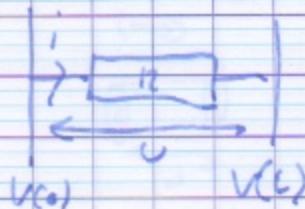
Ici  $P(0) - P(L) > 0$  car  $n > 0$ .

$$\Delta P = P(0) - P(L) < 0$$

perte de charge  $\hookrightarrow$  négative !

plus  $\gamma$  est important, plus  $\Delta P \nearrow$  donc la perte de charge augmente à débit constant avec  $\gamma$

b) Anélosie avec loi d'ohm:



$$U = V(0) - V(L) = RI$$

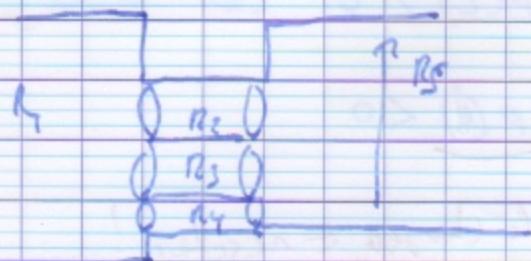
$$U = V(0) - V(L) (=) \Delta P = P(0) - P(L)$$

$$I \Leftrightarrow \Delta v$$

Écartement de Poiseuille :  $\Delta P = P(0) - P(L) = R \cdot \Delta r$

alors  $R_{\text{hydraulique}} = \frac{8 \eta L}{\pi R^4}$

ex :



alors ( $\Rightarrow$ )



c) En électromagnétisme  $R = \frac{\rho L}{S}$  donc  $\kappa = \frac{\rho L}{R^2}$



densité de courant.

Car  $j = \rho v$  uniforme dans la section du fil  
( $v$  conditions limites  $\Rightarrow j \cdot n = 0$ )

C'est par cela qu'on a une résistance en  $\perp$  en  
électromagnétisme).

$\rightarrow R = \rho \frac{L}{A}$

11

TD hydro 2

### 3.2 Force subie par une plaque en mouvement

Eulerien // non stationnaire.

plaque :  $z = 0$

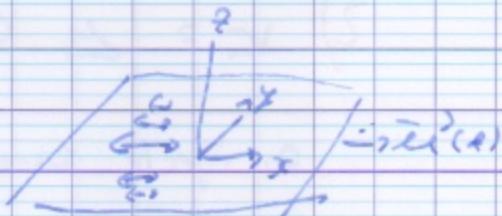
$$u(t) = U \cos(\omega t) \hat{u}_x$$

fluide :  $\rho$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

incompressible

$$v(\vec{r}, t) = v(z, t) \hat{u}_y$$



1) On suppose  $\rho = \rho(z, t)$

$$\text{On a : } \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = - \vec{g} \cdot \vec{P} + \gamma \Delta \vec{v} + \vec{F}$$

car incompressible.  $\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right) v(z, t) \hat{u}_y = 0$

$\rightarrow$  selon  $u_x$ :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\rho \text{ et } \gamma \text{ selon } \vec{u}_x \text{ et pas } \vec{u}_y !)$$

développer  $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$\delta$ : épaisseur de la couche limite

On regarde les ordres de grandeurs :

petit par  
↓  
l'écu

$$\frac{V}{T} = \frac{V}{\frac{V}{\delta^2}} \Rightarrow \delta^2 \approx \sqrt{VT} : \delta = 0,1 \text{ ms}$$

avec  $T_C$  temps caractéristique  
de l'accélération.  
(100 ms).

2)  $v_r = A e^{i(\omega t - kz)}$

On injecte dans notre équation :

$$i\omega = -V k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega}{V} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{V}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm (1-j) \sqrt{\frac{\omega}{2V}} = \pm L-j$$

$$\Leftrightarrow \delta = \sqrt{\frac{2V}{\omega}}$$

Pour  $V(z>0) \rightarrow U \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

Par  $V(z<0) \rightarrow U \exp\left(+\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)$

3)

17

TD Hydro 1

$d\vec{F} = \gamma \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right) ds \hat{n}_z$  force exercée sur un élément de surface  $ds$  de cote  $z$  par le fluide sur une cote supérieure à  $z$ .



$$\text{Par la plaque } \frac{d\vec{F}}{ds} = \gamma \left( \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{z=0^+} - \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{z=0^-} \right)$$

en effet on exerce une force de per et d'astrale la plaque, mais dans un cas une particule exercera une force sur la plaque perpendiculaire ( $+\frac{\partial r}{\partial z}$ ) et l'autre perpendiculaire ( $-\frac{\partial r}{\partial z}$ )

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = 2\gamma \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{z=0^+}$$

$$\text{d'où on trouve } \frac{d\vec{F}}{ds} = 2\gamma \mu \left[ \left( -\frac{1}{\delta} \right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{ds} &= \frac{2\gamma \mu}{\delta} (-\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \\ &= \frac{2\gamma \mu}{\delta} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Il y a un déphasage de  $\frac{\pi}{4}$  entre l'excitation de la plaque

et la force turbie.

1) Donc la force peut-être négative !

(v<sub>plate</sub> · f)

$$\left\langle \frac{dP}{ds} \right\rangle = \left\langle U_{\text{tan}}(\omega t) \cdot \frac{df(x)}{ds} \right\rangle$$

$$= \frac{23 \text{ m}^2}{f} (- \langle \cos^2(\omega t) \rangle + \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle)$$

$$= \frac{23 \text{ m}^2}{f} \left( -\frac{1}{2} + 0 \right)$$

DUP:

$$\left\langle \frac{dP}{ds} \right\rangle = -\frac{3 \text{ m}^2}{f} < 0 ! \quad \text{La force est resistive en moyenne!}$$

Donc la puissance que l'opérateur fournit à la vitesse est dissipée par la viscosité

Le fluide entraîne nécessairement la vitesse, mais cette puissance est dissipée (ex. sous forme de chaleur)