

## **Partie IV**

# **Sources du champ électromagnétique**



# Introduction

Nous allons nous intéresser, dans cette partie, au champ électromagnétique produit par un certain nombre de sources. Si la solution des équations de Maxwell en termes de potentiels retardés et de fonctions de Green est parfaitement générale et explicite, elle ne fournit pas en général une solution physiquement transparente. Nous allons donc, dans cette partie, considérer des mouvements de charges ou des répartitions de courant bien particulières mais choisies pour leur grande importance physique, et écrire explicitement le champ produit. Très souvent, nous nous contenterons d'examiner les champs rayonnés à grande distance. Nous verrons en effet que le champ peut se mettre sous la forme d'un développement en puissances de l'inverse de la distance à la source  $r$ . A très grande distance, ce développement est dominé par le premier terme, en  $1/r$ . Des champs en  $1/r$  conduisent à un flux d'énergie électromagnétique en  $1/r^2$  et donc à un flux d'énergie fini à travers une sphère de rayon  $r$ . Seule cette partie du développement du champ conduit à une propagation à grande distance de l'énergie électromagnétique.

Nous examinerons essentiellement trois types de sources dans les trois chapitres de cette partie. Nous commencerons par étudier le champ rayonné par une particule unique, éventuellement relativiste, dont le mouvement est imposé mais arbitraire. Nous montrerons ainsi qu'une particule relativiste rayonne de façon particulièrement intense quand elle est accélérée et nous décrirons les effets et les applications de ce rayonnement qui joue un rôle de premier plan dans les accélérateurs de particules. Nous examinerons ensuite le cas beaucoup plus simple d'une particule ayant un mouvement sinusoïdal de petite amplitude autour de l'origine. Nous retrouverons ainsi le champ d'un dipôle électromagnétique oscillant. En raison de la très grande importance de ce problème dans des domaines variés, nous examinerons en détail le champ émis sans nous cantonner au champ rayonné.

Dans le deuxième chapitre, nous nous pencherons sur le champ rayonné par une répartition localisée de courants oscillants. Nous montrerons que le champ rayonné à une distance grande devant la taille caractéristique de la source peut s'exprimer comme un développement en puissances de l'extension caractéristique de la source divisée par la longueur d'onde émise. Le premier terme de ce "développement multipolaire" nous redonnera le rayonnement du dipôle que nous placerons ainsi dans un cadre plus général. Notons que les résultats obtenus ici seront au centre de notre approche de l'électromagnétisme dans la matière dans la prochaine partie. Nous terminerons ce chapitre en discutant de plusieurs répartitions de courants exemplaires. Nous aborderons en particulier très brièvement le problème des antennes, d'une importance cruciale pour les télécommunications.

Dans le troisième chapitre, nous appliquerons les résultats sur les rayonnements multipolaires au cas des sources microscopiques. Nous nous poserons en fait essentiellement le problème de la diffusion du rayonnement par un atome unique. Nous commencerons par donner un modèle classique, extrêmement naïf de prime abord, de la dynamique de l'atome. Nous pourrions alors explicitement calculer la réponse atomique à un champ incident. Nous essaierons ensuite de donner les éléments essentiels d'un modèle quantique de la réponse atomique à un champ classique (nous ne pourrions bien sûr donner le seul modèle rigoureux qui impose de quantifier le champ). Nous montrerons que les résultats du modèle classique sont étonnamment exacts pour la diffusion d'un champ faible non résonnant avec une fréquence de Bohr de l'atome. Nous conclurons ce chapitre en examinant très brièvement, dans le modèle quantique, la réponse d'un atome à un champ résonnant.



# Chapitre 1

## Rayonnement d'une particule en mouvement

Nous nous pencherons dans ce chapitre sur le problème du rayonnement d'une charge ponctuelle unique en mouvement arbitraire, éventuellement relativiste. Le problème général du mouvement d'une charge est extrêmement complexe. Il résulte en effet à la fois des forces imposées à la charge et du champ produit par la charge elle-même. Comme nous le verrons, une charge en mouvement rayonne. Ce rayonnement conduit à une perte d'énergie mécanique que l'on peut interpréter comme résultant d'une force produite sur la charge par son propre champ, la force de réaction de rayonnement. D'une part, la modélisation de cette force n'est pas sans poser des difficultés mathématiques (dans le cas d'une charge ponctuelle, on peut s'attendre à des problèmes de divergence — nous aborderons ce problème à la fin de ce chapitre). D'autre part, la résolution des équations est très difficile dans le cas général.

Nous nous cantonnerons donc à étudier le rayonnement d'une particule dont le mouvement est imposé. Nous négligerons l'action des forces de réaction de rayonnement par rapport aux forces qui fixent la trajectoire de la particule. Nous verrons, en discutant de situations physiques concrètes, que cette approximation est souvent excellente. Comme nous envisagerons le cas de particules relativistes, il serait tout naturel de nous placer dans le formalisme de l'électrodynamique relativiste et de n'écrire que des quantités explicitement covariantes, indépendantes du référentiel. Si cette approche est la plus élégante et, du point de vue des calculs, la plus compacte (on consultera à ce sujet le Jackson), elle ne révèle pas les interprétations physiques les plus transparentes des résultats obtenus. Nous verrons en particulier que le renforcement considérable du rayonnement dans la direction de la vitesse a une interprétation cinématique très simple. Nous nous placerons donc dans un référentiel  $\mathcal{R}$  particulier et manipulerons l'espace et le temps dans ce référentiel uniquement. Bien sûr, les résultats finaux seront rigoureux. On pourra trouver les champs dans un référentiel quelconque par une simple transformation de Lorentz. Nous donnerons également pour mémoire les solutions explicitement covariantes.

### 1.1 Potentiels de Liénard–Wiechert

Nous considérons donc une particule de charge  $q$  dont le mouvement, imposé, est décrit par la trajectoire  $\mathbf{r}_0(t')$  (voir figure 1.1). Nous cherchons le champ observé au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . Pour cela, nous déterminerons d'abord les potentiels scalaires et vecteurs que nous dériverons ensuite pour obtenir les champs. Avant cette dérivation, dans tout le calcul des potentiels, la position “d'observation”  $\mathbf{r}$  et l'instant  $t$  sont donc fixés. Nous noterons  $\mathbf{n}(t')$  le vecteur unitaire de la particule, prise à l'instant  $t'$ , vers le point d'observation. Nous noterons enfin  $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$  la distance entre la particule et le point d'observation.

La densité de charge et de courant représentant la charge ponctuelle peuvent s'écrire:

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) \quad (1.1)$$

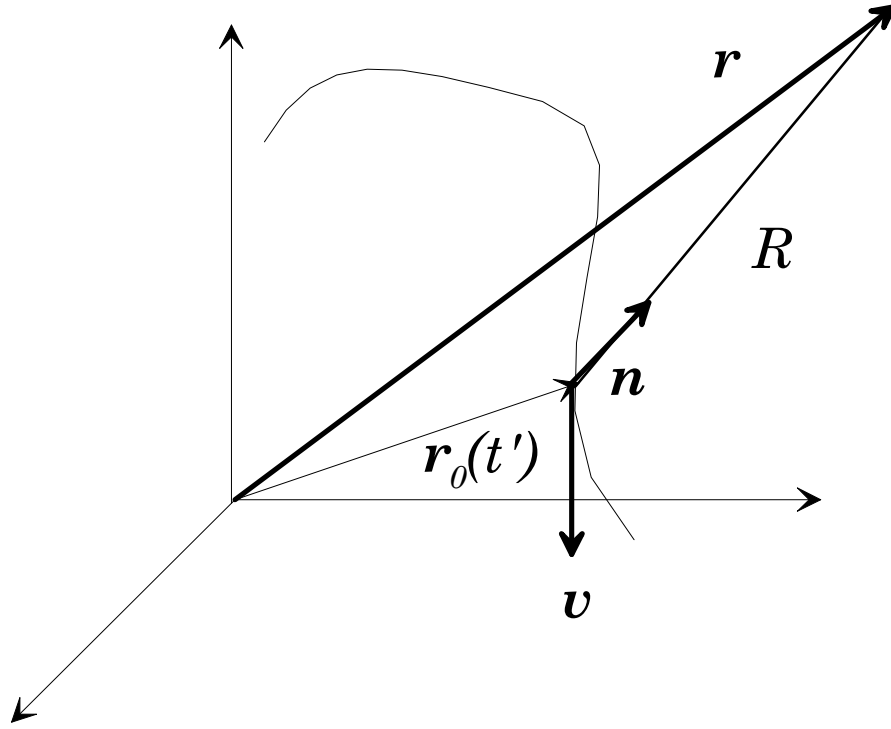


Figure 1.1: Rayonnement d'un charge en mouvement: notations.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) , \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt'$  est la vitesse de la particule à l'instant  $t'$ . En nous plaçant en jauge de Lorentz, nous pouvons écrire les potentiels en fonction de ces densités de charge et de courant au moyen de la solution en potentiels retardés. Comme les calculs sont identiques pour le potentiel scalaire et chaque composante du potentiel vecteur, nous ne traiterons explicitement que le premier. Le potentiel peut donc s'écrire:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} , \quad (1.3)$$

Où l'on notera que nous avons changé le signe de l'argument de la fonction  $\delta$  spatio-temporelle par rapport aux conventions utilisées dans la partie précédente. Ce changement de signe, effectué pour des raisons de commodité, n'a bien sûr aucune conséquence sur le résultat final. On a donc encore:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' dt' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} . \quad (1.4)$$

Sous cette forme, l'intégrale sur  $\mathbf{r}'$  est triviale: seul contribue le point  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0(t')$ . En posant alors:

$$g(t') = t' - t + \frac{R(t')}{c} , \quad (1.5)$$

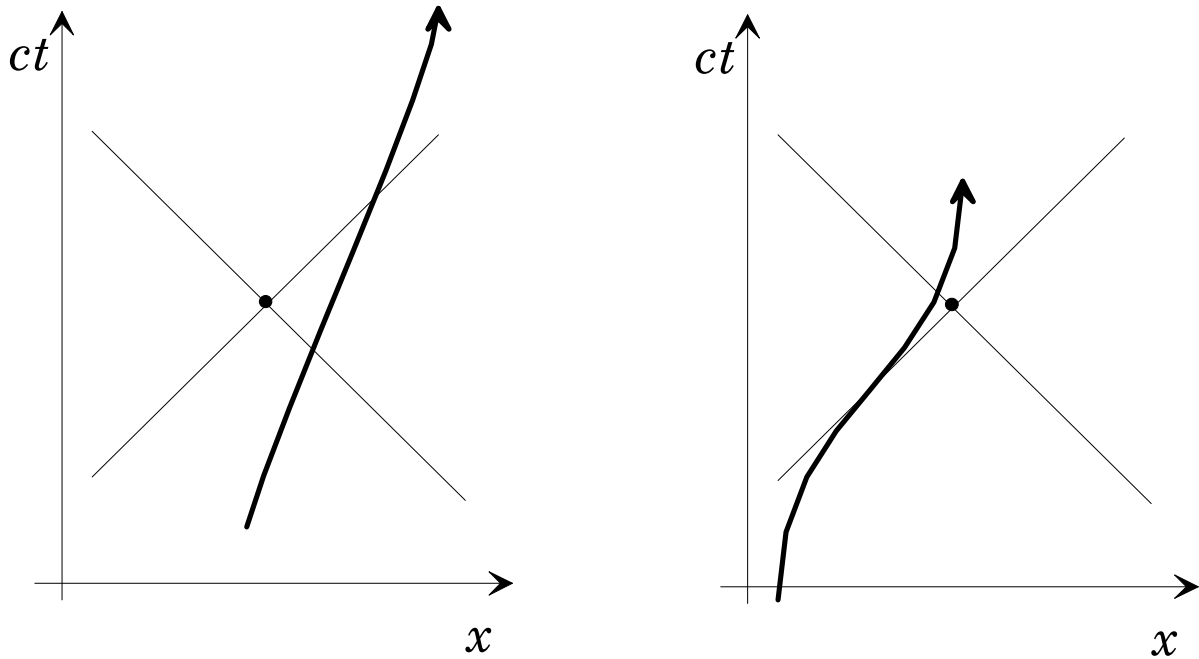
on met  $V$  sous la forme:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(g(t'))}{R(t')} dt' . \quad (1.6)$$

Seul contribuera à l'intégrale sur le temps l'instant  $t_0$  tel que  $g(t_0)$  s'annule (en supposant, ce que nous allons montrer, que cet instant existe et est unique).

On peut facilement comprendre la signification physique de l'instant  $t_0$ . Il est tel que:

$$t_0 = t - \frac{R(t_0)}{c} \quad (1.7)$$



**Figure 1.2:** Intersection du cône de lumière de l’observateur et de la ligne d’univers de la particule. A gauche: particule s’éloignant de l’observateur. A droite: particule relativiste venant vers l’observateur. Seule compte pour le calcul des champs l’intersection située dans le passé. Le champ reçu est d’autant plus grand que la particule reste plus longtemps au voisinage du cône de lumière.

c’est à dire tel qu’un signal lumineux émis par la particule à l’instant  $t_0$  arrive, après s’être propagé à la vitesse  $c$ , au point d’observation précisément à l’instant  $t$ . Bien sûr, la forme même de l’équation impose à  $t_0$  d’être plus petit que  $t$ . En fait,  $t_0$  est la coordonnée temporelle de l’intersection de la ligne d’univers de la particule avec le cône de lumière de l’événement d’observation (voir figure 1.2). Comme la pente de la ligne d’univers dans un diagramme d’espace–temps est toujours plus petite que celle du cône (la vitesse de toute particule chargée, donc massive, est toujours plus petite que  $c$ ), il y a deux intersections et deux seulement entre la ligne d’univers et le cône de lumière. L’une est située dans le passé et sa coordonnée temporelle correspond à l’instant  $t_0$  que nous cherchons. L’autre est située dans le futur de l’observateur et ne peut correspondre à une solution de l’équation donnant  $t_0$ . En fait, ce point dans le futur serait le seul à contribuer au potentiel si nous avions, en dépit de la causalité, choisi la solution en termes de potentiels avancés. Nous avons donc bien montré que l’instant  $t_0$ , qui va jouer un rôle central dans toute la suite de la discussion, existe et est unique.

L’équation (1.6) fait intervenir la distribution  $\delta(g(t'))$ . Pour l’identifier, faisons-la agir sur une fonction régulière arbitraire  $f(t')$ . En posant  $u = g(t')$  (ce changement de variable est régulier puisque seuls les points voisins de  $t_0$  contribuent à l’intégrale), nous pouvons écrire:

$$\int \delta(g(t'))f(t')dt' = \int \frac{\delta(u)f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|}du = \frac{f(t_0)}{|g'(t_0)|}, \quad (1.8)$$

en désignant par  $g'$  la dérivée de  $g$  par rapport à son argument. La valeur absolue de la dérivée au dénominateur est obtenue en ordonnant les bornes de l’intégration quand la fonction  $g$  est décroissante au voisinage de  $t_0$ . En termes de distributions, on a donc:

$$\delta(g(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{|g'(t_0)|}. \quad (1.9)$$

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions  $g$  qui sont croissantes au voisinage de leur zéro. Nous pourrions donc omettre à partir de maintenant les valeurs absolues au dénominateur. L'intégrale sur  $t'$  dans l'expression du potentiel  $V$  est donc triviale et on trouve:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{R(t_0)} . \quad (1.10)$$

Pour obtenir une forme plus explicite du potentiel, il nous reste à exprimer  $g'(t_0)$  en fonction des paramètres cinématiques de la particule. À partir de (1.5), nous trouvons par simple dérivation:

$$g'(t') = 1 + \frac{\partial R(t')}{\partial t'} = 1 + \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c} , \quad (1.11)$$

où nous avons posé  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , dont la dérivée par rapport au temps  $t'$  est l'opposé de la vitesse de la particule en  $t'$ . On a donc  $g'(t_0) = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$ . Nous conviendrons dans toute la suite de prendre les fonctions de  $t'$  à l'instant  $t_0$  quand leur argument est omis. On a donc finalement:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \frac{1}{R(t_0)} \quad (1.12)$$

et, par un raisonnement analogue,

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \frac{\mathbf{v}}{R(t_0)} . \quad (1.13)$$

Ces expressions constituent les potentiels de Liénard–Wiechert. Ils ne diffèrent des potentiels de l'électrostatique ou de la magnétostatique que par le terme cinématique  $1/g'$ . Pour une particule immobile, on retrouve bien les expressions statiques. Pour une particule en mouvement, en revanche, les potentiels de Liénard peuvent être très différents des potentiels statiques. Pour une particule relativiste en particulier ( $v \simeq c$ ), le facteur  $g'$  s'annule pratiquement quand  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{v}$  sont de même direction. Le potentiel est donc beaucoup plus grand dans la direction du mouvement de la particule que dans la direction opposée (le facteur  $g'$  étant alors voisin de 2). Le champ d'une particule relativiste est donc concentré vers l'avant. Nous verrons dans le prochain paragraphe les importantes conséquences de cette concentration.

On peut comprendre le renforcement des potentiels vers l'avant en termes purement cinématiques. Considérons les deux lignes d'univers illustrées sur la figure 1.2. À gauche, la particule relativiste traverse le cône de lumière de l'événement d'observation pratiquement perpendiculairement. À droite, la particule se dirige vers l'observateur et sa ligne d'univers est pratiquement tangente au cône de lumière. Dans le second cas, la particule reste beaucoup plus longtemps “en vue” de l'observateur que dans le premier. En d'autres termes, un intervalle de temps  $dt$  pour l'observateur correspond à un intervalle de temps retardé  $dt'$  pour la particule d'autant plus long qu'elle se dirige vers lui avec une plus grande vitesse. En quelque sorte, c'est un effet de sillage. Quand un bateau se déplace à une vitesse proche de celle des ondes capillaires à la surface de l'eau, les ondes émises à des instants différents s'accumulent et se renforcent à l'avant. En revanche, les ondes s'espacent vers l'arrière d'avantage que si le bateau restait immobile. Le même genre de phénomène, purement cinématique, est à l'origine du phénomène qui nous intéresse ici.

L'analogie en termes de sillage nous permet d'ailleurs de discuter qualitativement d'un autre phénomène intéressant. Si le bateau se déplace à une vitesse inférieure à celle des ondes capillaires, il n'y a pas de sillage à proprement parler. Le sillage “en V” correspond au cas où la vitesse du bateau est supérieure à celle de ces ondes. Les ondes rayonnées par le bateau à des instants différents s'additionnent alors le long d'un cône (deux lignes dans cet espace à deux dimensions) dont l'ouverture dépend du rapport de la vitesse des ondes et du bateau. Ces lignes constituent en fait une onde de choc et sont très analogues aux caustiques de l'optique. À trois dimensions, le même phénomène



s'observe pour un avion en vol supersonique. Le passage de l'onde de choc sur un observateur est responsable du célèbre “bang” (double en raison de la structure complexe de l'avion dont différentes parties génèrent des ondes de choc différentes). En l'absence de toute non linéarité, pour un “bateau” ponctuel, l'amplitude des ondes capillaires devrait diverger sur cette ligne. Nous ne pouvons bien sûr obtenir le même phénomène ici puisque la particule se déplace nécessairement moins vite que la lumière. Ce ne serait pas le cas si nous considérons une particule relativiste en mouvement dans un milieu matériel présentant un indice de réfraction élevé. Rien n'empêche alors la particule de se déplacer plus vite que la lumière dans le milieu. Il se forme alors un véritable “sillage”, un cône le long duquel le champ électromagnétique est considérablement renforcé. Ce phénomène est responsable de la célèbre “radiation Cherenkov”. Une lumière bleue relativement intense est émise par des particules en mouvement relativiste dans un milieu matériel. Ce rayonnement se manifeste par exemple autour des réacteurs immergés dans des piscines d'eau lourde. Il est également utilisé pour réaliser des détecteurs de particules, l'énergie de ce rayonnement donnant une indication de l'énergie de la particule. Même si ce phénomène n'existe pas dans le vide, nous allons montrer que le renforcement du champ “vers l'avant” a des conséquences importantes.

Notons pour finir que nous avons établi ici les potentiels de Liénard par un raisonnement non explicitement covariant, dans un référentiel donné. On peut établir une version purement relativiste de ces potentiels en écrivant une version complètement covariante des potentiels retardés. Le lecteur intéressé trouvera la dérivation explicite dans le Jackson. Nous ne donnerons ici que la forme finale du 4-potential:

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{U^\mu(\tau_0)}{U^\nu(R_\nu - R_{0\nu}(\tau_0))} , \quad (1.14)$$

où les  $R_\nu$  sont les coordonnées covariantes de l'événement d'observation, les  $R_{0\nu}$  celles de la particule et  $\tau_0$  le temps propre de la particule à l'événement où elle croise le cône de lumière de l'événement d'observation. Notons que ce que nous gagnons en généralité et en covariance est largement perdu en clarté de l'interprétation physique. L'aspect purement cinématique du renforcement vers l'avant est loin d'être apparent sur ce genre d'expression.

## 1.2 Champs rayonnés

Nous calculerons dans ce paragraphe les champs rayonnés par la particule. Il nous suffit pour cela, au moins formellement, de dériver les expressions des potentiels de Liénard–Wiechert. En fait, nous aurons à faire face à deux difficultés. La première est que, sans préciser d'avantage le mouvement de la particule, nous ne connaissons le temps “retardé”  $t_0$  que comme solution d'une équation implicite. Il nous faudra donc procéder avec soin pour obtenir quand même des expressions explicites pour les champs. L'autre point est qu'en procédant aux dérivations des potentiels en  $1/R$ , nous allons obtenir les champs comme une somme de termes faisant intervenir  $1/R$  et ses dérivées successives  $1/R^2$  et  $1/R^3$ . Si les calculs ne présentent aucune difficulté de principe, ils sont assez lourds. De plus il n'est généralement pas indispensable de garder ces termes.

On s'intéresse en effet surtout en pratique au champ produit par la particule à une grande distance. On peut donc ne garder, dans ce développement, que le terme en  $1/R$ , qui domine tous les autres. Une autre manière de le voir est de considérer le vecteur de Poynting. Les termes en  $1/R$  dans  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  donnent un flux d'énergie en  $1/R^2$ . La quantité d'énergie traversant une sphère de rayon  $R$  est donc finie. Ces termes correspondent bien à un transport d'énergie vers l'infini, à un rayonnement. En revanche, la combinaison de termes d'ordre supérieur dans  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  donne des contributions au vecteur de Poynting décroissant plus vite que  $1/R^2$ . La quantité d'énergie traversant la sphère de rayon  $R$  décroît donc avec  $R$ , au moins comme  $1/R$ . Ces termes ne correspondent qu'à des “champs proches” (comprenant, au moins, les champs statiques en  $1/R^2$ ), en général sans importance. Nous ne garderons donc, au cours de nos dérivations, que les termes dominants dans les développements en

puissances de  $1/R$ . Nous verrons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, ce que sont les résultats quand on conserve tous les termes dans le cas particulièrement simple du dipôle oscillant.

Notons également qu'on peut s'attendre à ce que le champ rayonné présente une structure d'onde plane. Si la source est harmonique, les potentiels doivent avoir une structure d'onde sphérique. Suffisamment loin de l'origine et dans un volume suffisamment local, le vecteur d'onde (radial) est pratiquement uniforme et l'onde sphérique a pratiquement une structure d'onde plane.  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  doivent donc être orthogonaux entre eux et à  $\mathbf{n}$  et leurs modules doivent être dans un rapport  $c$ . Pour une source quelconque, la linéarité de l'électromagnétisme et les propriétés de la transformée de Fourier assurent que cette géométrie se conserve. Nous pourrions nous contenter de ne calculer que le champ électrique et en déduire le champ magnétique par ce genre d'arguments. Nous ferons cependant les deux calculs pour conforter notre confiance dans ces arguments qualitatifs.

Avant d'entreprendre le calcul des champs rayonnés, nous allons établir un certain nombre de formules utiles.

### 1.2.1 Dérivées utiles

Nous aurons besoin de dériver la fonction implicite  $t_0$  par rapport aux coordonnées et à l'instant d'observation. En effet  $t_0$  dépend de  $t$  mais aussi de  $\mathbf{r}$  par l'intermédiaire de (1.7). A partir de cette équation, on trouve en effet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_0}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R(t_0)}{\partial t} \\ &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} .\end{aligned}\quad (1.15)$$

Nous avons déjà calculé la dérivée de  $R$  par rapport à  $t_0$  pour trouver l'expression de  $g'$ . Elle vaut  $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . On a donc:

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \frac{\partial t_0}{\partial t} , \quad (1.16)$$

ce qui nous donne immédiatement:

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{g'(t_0)} . \quad (1.17)$$

Nous trouvons ainsi une justification à nos raisonnements qualitatifs sur le renforcement cinématique des potentiels vers l'avant. Plus  $g'$  est petit, plus à un intervalle de temps donné pour l'observateur correspond un grand intervalle de temps retardé pour la particule. A la limite d'un mouvement ultra-relativiste, l'observateur "accumule" dans un intervalle de temps extrêmement court tous les champs produits par la particule.

On peut utiliser la même démarche pour exprimer  $\nabla t_0$  (la dérivée s'entendant par rapport à  $\mathbf{r}$ ). On a

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{c} \nabla R . \quad (1.18)$$

Dans le gradient de  $R$ , nous devons distinguer deux termes. Le premier provient de la dépendance explicite de  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  en  $\mathbf{r}$ . Le gradient associé est évidemment radial. Le deuxième provient de la dépendance implicite de  $R$  par l'intermédiaire de  $\mathbf{r}_0$ , qui est lui même une fonction de  $t_0$  et donc de  $\mathbf{r}$ . De manière évidente, ces deux termes s'ajoutent et on a:

$$\nabla t_0 = -\mathbf{n} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c \partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_0} \nabla t_0 . \quad (1.19)$$

La première dérivée partielle s'entend à  $\mathbf{r}_0$  constant. Elle est évidemment égale à 1. La deuxième vient d'être appelée. On trouve donc:

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \nabla t_0 \quad (1.20)$$

et finalement:

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{g'(t_0)} \frac{\mathbf{n}}{c} . \quad (1.21)$$

Nous avons pu mettre les dérivées utiles sous une forme particulièrement simple, toujours en termes du facteur cinématique  $1/g'$ .

### 1.2.2 Champ électrique

Le champ électrique s'écrit bien sûr

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V . \quad (1.22)$$

La dérivée partielle de  $\mathbf{A}$  par rapport au temps s'écrit:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} = -\frac{1}{g'(t_0)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[ \frac{\mathbf{v}}{g'(t_0)R(t_0)} \right] . \quad (1.23)$$

Dans la dérivée du crochet par rapport au temps retardé  $t_0$ , il apparaît des termes en  $1/R$  correspondant à la dérivée de  $\mathbf{v}/g'$ . La dérivée de  $1/R$ , pour sa part, donne des termes en  $1/R^2$  que nous devons négliger. A cet ordre d'approximation, nous avons donc:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{\mathbf{v}}{g'(t_0)} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{g'^3(t_0)} \frac{1}{R} [\mathbf{a}g' - \mathbf{v}g''] , \end{aligned} \quad (1.24)$$

l'accélération  $\mathbf{a}$  étant elle aussi évaluée au temps retardé  $t_0$ .

Le gradient du potentiel scalaire fait intervenir la dérivée partielle par rapport au temps retardé multipliée par le gradient du temps retardé par rapport au point d'observation. En toute rigueur, il fait aussi intervenir le gradient de la dépendance explicite du potentiel retardé par rapport au point d'observation. Ce gradient est toutefois en  $1/R^2$ , tant pour la dérivée de la partie électrostatique en  $1/R$  que pour la dérivée du facteur cinématique. Celle ci fait en effet intervenir le gradient de  $\mathbf{n}$ , qui est en  $1/R$ , facteur qui est à multiplier par la dépendance électrostatique en  $1/R$ . A l'ordre d'approximation où nous nous sommes placés, ces termes sont négligeables et nous ne conserverons que le premier terme. On a donc:

$$-\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial t_0} \nabla t_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{cg'} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[ \frac{1}{g'} \frac{1}{R} \right] . \quad (1.25)$$

Comme précédemment, nous ne garderons pas les termes faisant intervenir la dérivée de  $1/R$  et nous avons:

$$-\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}g''}{cg'^3} \frac{1}{R} . \quad (1.26)$$

En regroupant avec les termes provenant du potentiel vecteur, nous trouvons finalement l'expression complète du champ électrique:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{g'^3} [(\mathbf{c}\mathbf{n} - \mathbf{v})g'' + \mathbf{a}g'] . \quad (1.27)$$

Il ne nous reste plus à exprimer que  $g''$ . Partant de  $g' = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$ , nous obtenons

$$g'' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t_0} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} . \quad (1.28)$$

La dérivée de  $\mathbf{n}$  par rapport à  $t_0$  est évidemment d'ordre  $1/R$ . Ce terme donnerait une contribution au champ en  $1/R^2$  et doit être écarté. A l'ordre où nous nous plaçons,  $g'' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}/c$ . Notons

finalemt qu'on peut regrouper les termes entre crochets dans l'expression du champ en un double produit vectoriel et écrire enfin:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{a}] . \quad (1.29)$$

Nous discuterons du contenu physique de cette équation après avoir calculé le champ magnétique.

### 1.2.3 Champ magnétique

Nous calculerons bien sûr le champ magnétique par  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . On a donc:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{g'R} . \quad (1.30)$$

Dans cette expression, les trois termes dans le rotationnel dépendent de la position, soit directement, soit par l'intermédiaire du temps retardé. Notons d'abord que dériver le terme en  $1/R$  ferait apparaître des termes en  $1/R^2$  que nous devons écarter. Nous pouvons donc écrire:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{g'} . \quad (1.31)$$

Dans cette expression, en posant  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/g'$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= e_{ijk} \partial_j u_k = e_{ijk} \partial_j t_0 \frac{\partial u_k}{\partial t_0} \\ &= \nabla t_0 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0} = \nabla t_0 \times \left( \frac{\mathbf{a}}{g'} - \frac{\mathbf{v} g''}{g'^2} \right) \\ &= \frac{1}{g'^2} \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{a} + \frac{g''}{g'^3} \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous avons utilisé les conventions d'Einstein<sup>1</sup> et le tenseur complètement antisymétrique de rang 3,  $e_{ijk}$ .

Le champ magnétique s'écrit donc finalement:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{g'^3} \frac{1}{c} \mathbf{n} \times [\mathbf{v} g'' - \mathbf{a} g'] . \quad (1.33)$$

En comparant cette expression à (1.27), nous remarquons immédiatement que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} . \quad (1.34)$$

### 1.2.4 Discussion physique

L'équation précédente indique, comme nous y attendions, que l'onde émise présente localement la structure d'une onde plane. Le champ se propage selon la direction radiale  $\mathbf{n}$ , les champs électrique et magnétique étant perpendiculaires et dans un rapport  $c$ . Ces champs ne sont non nuls que si la particule est accélérée. Une particule animée d'un mouvement de translation uniforme ne rayonne pas. C'est une simple conséquence de l'invariance relativiste. Si la particule rayonne, elle doit emprunter l'énergie émise à son énergie cinétique. Une particule qui rayonne doit voir sa vitesse se modifier. En se plaçant dans le référentiel initial de la particule, cela indiquerait qu'une charge au repos pourrait acquérir

<sup>1</sup>Encore une fois, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a pas lieu alors d'établir de différence entre les coordonnées covariantes et contravariantes. Nous écrirons en conséquence tous les indices en position basse. Nous adopterons systématiquement cette convention dans la suite de ce chapitre.

spontanément une vitesse, ce qui est absurde. Notons enfin que le renforcement cinématique dans la direction du mouvement est considérablement accru pour les champs. Le facteur  $1/g'$  apparaissant dans les potentiels est en effet remplacé par un facteur  $1/g'^3$ . Ce renforcement est simplement du au fait que les potentiels, tout en étant plus grands dans la direction du mouvement, ont aussi une dépendance spatiale plus rapide. Notons toutefois que les champs sont considérablement réduits dans la direction même du mouvement pour une particule ultra relativiste (dépendance en  $\mathbf{n} - \mathbf{v}/c$  de l'équation (1.29)). Pour une particule animée d'une vitesse faible devant  $c$ , le champ est réparti dans tout l'espace et peut même être maximum dans une direction orthogonale à la vitesse (on le verra dans le cas du dipôle).

Il est facile de calculer, à partir des champs, le vecteur de Poynting décrivant l'énergie rayonnée. Notons d'abord qu'il est colinéaire à  $\mathbf{n}$ , dirigé vers l'extérieur. Son module s'écrit :

$$\Pi = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{a}]|^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^6} . \quad (1.35)$$

Le facteur cinématique est ici élevé à la puissance 6. Le rayonnement d'une particule ultra-relativiste s'effectue essentiellement vers l'avant en termes énergétiques. Cette expression doit être utilisée avec prudence si on désire déterminer la perte d'énergie de la particule à partir de l'énergie du champ rayonné. Nous avons calculé ici le flux d'énergie par unité de temps au point d'observation. Par intégration spatiale sur une sphère de rayon  $R$  centrée sur la particule, on en déduira l'énergie rayonnée par unité de temps dans le référentiel du laboratoire. Pour estimer l'effet du rayonnement sur le mouvement de la particule, il nous faudra estimer la quantité d'énergie émise par unité du temps retardé  $t_0$ . On prendra garde au facteur cinématique  $1/g'$  entre ces deux unités de temps.

Pour des particules ultra-relativistes, l'énergie rayonnée peut être très importante. Ce rayonnement peut avoir des conséquences utiles ou néfastes. Il est d'abord utile comme source intense de rayonnement électromagnétique de haute fréquence. Le cône de rayonnement est en effet si étroit qu'il ne passe sur l'observateur, au cours du mouvement de la particule, que pendant un très bref instant. Les fréquences caractéristiques associées à une impulsion brève étant élevées, le rayonnement d'une particule relativiste peut atteindre le domaine des rayons X ou  $\gamma$ . Les tubes standard à rayons X, utilisés en radiographie, utilisent une forme "désordonnée" de ce rayonnement. Des électrons d'énergie modérée (50 keV) frappent une anode (appelée "anticathode" dans ce cas) constituée d'un métal lourd. Passant au voisinage de noyaux fortement chargés, les électrons sont fortement accélérés. Ils rayonnent alors leur énergie sous forme de lumière. En fait, ils perdent une fraction notable de leur énergie à chaque déflexion, sous forme de photons X dont l'énergie est voisine de l'énergie initiale de l'électron (notons que nos approximations ne sont guère valables dans ce cas). C'est en raison de ce mécanisme de perte d'énergie dans la matière que le rayonnement des particules accélérées est souvent appelé Bremsstrahlung, ou rayonnement de freinage. On comprend ainsi aussi pourquoi les électrons pénètrent beaucoup moins dans la matière que des particules plus lourdes (protons, par exemple). Etant beaucoup plus légers, ils sont plus fortement accélérés par les champs nucléaires et perdent leur énergie plus rapidement. En pratique, des électrons d'énergie modérée ne pénètrent que de quelques microns au plus dans de la matière dense, alors que des protons d'énergie comparable sont capables de l'irradier beaucoup plus profondément.

Le rayonnement de freinage dans les anticathodes des tubes à rayons X n'est pas du tout contrôlé. Le rayonnement émis est essentiellement isotrope et présente un très large spectre. Comme il est très difficile de réaliser des composants optiques dans le domaine des rayons X, il n'est guère possible de récupérer et de refocaliser ce rayonnement pour des applications fines. On doit souvent se contenter des "ombres chinoises" de la radiographie classique. On peut contrôler beaucoup mieux le rayonnement en organisant l'accélération. C'est par exemple ce qu'on réalise dans les sources de "rayonnement synchrotron" (nous verrons plus loin l'origine de ce nom) à "onduleur". On fait passer un faisceau d'électrons énergétiques dans un champ magnétique intense spatialement modulé (produit, par exemple, par une chaîne d'aimants permanents montés en quinconce). La trajectoire de l'électron est alors

ondulée, avec une forte accélération au voisinage des extrema de l'élongation transversale. Un rayonnement intense est alors émis dans la direction de propagation, avec un spectre relativement étroit. On peut ainsi réaliser des sources intenses et directives de rayonnement X. Leur seul inconvénient est de nécessiter un anneau de stockage pour les électrons! Pour des intensités de faisceau suffisantes et dans le domaine micro-onde ou optique, le milieu électronique peut présenter un gain suffisant par émission stimulée pour le fonctionnement d'un laser. La fréquence peut en principe être accordée dans une très large gamme en modifiant l'énergie des électrons. Très utilisés dans le domaine infrarouge proche ou lointain, ces lasers n'ont été utilisés dans le domaine visible qu'à l'état de démonstrations de principe. Les lasers à colorant ou à sources solides, beaucoup plus simples et moins coûteux, ont en effet des performances supérieures.

Le rayonnement de freinage peut avoir des conséquences aussi pour des énergies beaucoup plus faibles. Dans le premier modèle quantique de Bohr Sommerfeld, les électrons orbitent autour du noyau sur des orbites elliptiques classiques. Certains paramètres de l'orbite sont quantifiés, c'est à dire déterminés par un nombre entier: l'énergie par le nombre quantique principal, le moment cinétique et l'orientation de l'orbite par les nombres quantiques orbitaux et magnétiques. Pour les orbites les plus elliptiques, l'électron est très fortement accéléré quand il passe près du noyau. Il doit donc rayonner une quantité d'énergie importante et on peut s'attendre à ce que la durée de vie de ces niveaux soit assez brève. Les orbites de moment angulaire maximum, au contraire, correspondent à une trajectoire électronique circulaire. L'accélération est minimale et on peut s'attendre à ce que la durée de vie de ces niveaux soit beaucoup plus importante. Ce raisonnement semi-classique ne peut pas rendre correctement compte des propriétés des niveaux profonds. En revanche, en vertu du principe de correspondance, il doit décrire convenablement les niveaux de grands nombres quantiques principaux, les "états de Rydberg". On constate en effet que les états de Rydberg "circulaires", de moment orbital maximum, ont une durée de vie plus de 100 fois plus longue que des états de même énergie, mais de faible moment angulaire. Nous donnerons les bases du calcul de ces durées de vie dans les paragraphes suivants.

Si le rayonnement de freinage a des effets bénéfiques, il est aussi une limitation importante aux performances des accélérateurs de particules. Dans les accélérateurs les plus répandus, descendants du "synchrotron", on courbe avec un champ magnétique la trajectoire des particules en forme de cercle. On peut ainsi accélérer les particules à chaque tour en les faisant passer dans une cavité contenant un champ radiofréquence. La fréquence est ajustée de telle manière que les particules rencontrent toujours dans la cavité un champ de même direction. Entre les zones de champ électrique, l'accélération des particules sur leur trajectoire circulaire fait qu'elles perdent de l'énergie par rayonnement. C'est là une limite sérieuse à l'efficacité de ces accélérateurs. Là encore, l'effet est beaucoup plus marqué pour des électrons que pour des particules lourdes. On peut le réduire en augmentant le rayon du cercle. C'est ainsi qu'on ne peut atteindre, au CERN, des énergies électroniques de 50 ou 100 GeV qu'au prix d'un anneau de 27 km de périmètre. La perte d'énergie par rayonnement, qui doit être compensée par les cavités accélératrices, est de quelques dizaines de MW, correspondant à quelques kW par mètre linéaire de faisceau. Ce rayonnement étant essentiellement émis dans le domaine des X durs, on comprend qu'il soit nécessaire d'enterrer profondément l'anneau. Le champ magnétique nécessaire pour obtenir un tel rayon est relativement modéré, de l'ordre de 1000 gauss (0.1T). Ce n'est pas du tout un facteur limitatif. Pour des accélérateurs à protons, en revanche, la limitation à l'énergie vient plus du champ magnétique nécessaire à la courbure des trajectoires que du rayonnement de freinage. Notons enfin que le rayonnement de freinage est beaucoup moins important dans les accélérateurs linéaires (parce que vitesse et accélération sont colinéaires). L'énergie est alors limitée par le champ électrique maximum (10MV/m) et la longueur du dispositif (1 km environ).

### 1.3 Réaction de rayonnement

Nous avons fait l'approximation, dans tout ce chapitre, que le rayonnement ne modifiait pas le mouvement de la charge. Il est bien évident que la puissance rayonnée doit être prise sur l'énergie mécanique de la particule et qu'on ne peut négliger cette réaction du rayonnement sur la trajectoire qu'en première approximation. Nous allons tenter dans ce paragraphe de décrire la perturbation au mouvement due au rayonnement. Pour simplifier la discussion, nous choisirons de ne travailler qu'avec un électron. Nous verrons en effet que la réaction de rayonnement a des conséquences sur le mouvement d'autant plus importantes que la masse de la particule est petite. L'adaptation de ces discussions à d'autres particules ne présenterait aucune difficulté. Nous ne nous placerons que dans un cadre non relativiste. Nous allons commencer, dans une discussion qualitative, par donner quelques ordres de grandeur. Nous pourrions ainsi dégager une échelle naturelle de temps pour ces phénomènes. Nous montrerons que la perturbation est en effet petite tant que les constantes caractéristiques du mouvement sont longues à cette échelle. Nous montrerons ensuite que l'action du rayonnement sur l'énergie de la particule peut se décrire comme le travail d'une force, la “force de réaction de rayonnement”. Le premier appendice de ce chapitre montrera comment on peut obtenir l'expression de cette force en se donnant un modèle naïf de particule chargée et en estimant l'action sur le mouvement de la particule du champ produit par la particule elle-même. Nous donnerons alors quelques applications de la force de réaction de rayonnement. Nous montrerons en particulier comment elle donne une durée de vie finie (et très brève) aux atomes dans un modèle planétaire classique.

#### 1.3.1 Approche qualitative

Pour un mouvement non relativiste, on peut, dans l'expression (1.35) du vecteur de Poynting des champs de Liénart Wiechert, négliger les termes en  $\mathbf{v}/c$ . On a alors :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})|^2}{R^2} . \quad (1.36)$$

En prenant l'axe  $Oz$  dans la direction de  $\mathbf{a}$ , on voit que  $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = a \sin \theta \mathbf{u}_\theta$  (avec les notations standard des coordonnées sphériques). L'intégration du vecteur de Poynting sur une sphère de rayon  $R$  ne pose alors aucune difficulté (tous les points de cette sphère “voient” manifestement la particule au même instant retardé et donc avec la même accélération). On met alors la puissance totale rayonnée par la charge sous la forme (formule de Larmor) :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} . \quad (1.37)$$

Estimons maintenant l'effet de cette puissance sur le mouvement. Considérons pour cela d'abord une particule initialement au repos accélérée uniformément pendant une période  $T$ . L'énergie totale rayonnée pendant l'accélération s'écrit alors  $\mathcal{P}T$ . L'énergie mécanique finale de la charge est, pour sa part, égale à  $ma^2 T^2/2$ . Le rayonnement aura une influence faible sur le mouvement si  $\mathcal{P}T \ll ma^2 T^2/2$ . On peut aussi écrire cette condition sous la forme :

$$T \gg \tau , \quad (1.38)$$

avec

$$\tau = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mc^3} , \quad (1.39)$$

la puissance rayonnée étant alors simplement  $\mathcal{P} = m\tau a^2$ . Le temps caractéristique  $\tau$ , qui va jouer un rôle essentiel dans la suite de cette discussion, est maximal pour l'électron, la plus légère des particules chargées. Sa valeur numérique est de  $6.32 \cdot 10^{-24}$  s. Notons que  $c\tau$  est de l'ordre du “rayon classique”

$r_e$  de l'électron. Ce rayon est donné par un modèle électrostatique très naïf de l'électron, sous la forme d'une sphère uniformément chargée en surface, de rayon  $r_e$  et portant la charge élémentaire. En identifiant l'énergie électrique de cette distribution avec l'énergie de masse de l'électron, on fixe la valeur du rayon. La valeur obtenue est, à un coefficient près ( $2/3$  en l'occurrence), la quantité  $c\tau$ . La très faible valeur de  $\tau$  indique que l'effet du rayonnement est tout à fait négligeable, sauf si on s'intéresse à des périodes d'accélération infiniment courtes.

On peut préciser encore cette approche qualitative en considérant une particule chargée animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence  $\omega_0$ . L'accélération est alors de l'ordre de  $\omega_0^2 d$  où  $d$  est l'extension du mouvement. L'énergie mécanique est pour sa part de l'ordre de  $m\omega_0^2 d^2$ . La puissance rayonnée pendant une période,  $\mathcal{P}/\omega_0$ , sera petite par rapport à l'énergie mécanique et donc le rayonnement sera une petite perturbation au mouvement, si:

$$\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3 \omega_0} (\omega_0^2 d)^2 \ll m\omega_0^2 d^2, \quad (1.40)$$

c'est à dire si:

$$\eta = \omega_0 \tau \ll 1. \quad (1.41)$$

Là encore, cette condition est très bien vérifiée pour tout mouvement à une fréquence raisonnable. L'effet du rayonnement sur le mouvement est donc une faible perturbation et il est bien justifié de considérer, au moins sur un intervalle de temps assez bref, que le mouvement de la particule est imposé.

Si le rayonnement ne modifie pas dramatiquement le mouvement, il n'en reste pas moins que, sur des temps longs, l'effet cumulatif de la puissance rayonnée finira par amortir le mouvement dont l'énergie mécanique sera lentement décroissante. Pour tenir compte plus commodément de cet effet, nous allons montrer que la puissance rayonnée peut être modélisée par le travail d'une force.

### 1.3.2 Force de réaction de rayonnement

Considérons donc une particule en mouvement imposé entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . En exprimant la puissance rayonnée en fonction de la vitesse de la particule, on peut écrire la variation de l'énergie de la particule due au rayonnement pendant cette période,  $\Delta\mathcal{E}$ , sous la forme:

$$\Delta\mathcal{E} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt. \quad (1.42)$$

L'intégrale peut aisément être transformée par une intégration par parties. On a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt = -\int \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt + [\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}]_{t_1}^{t_2}. \quad (1.43)$$

Si la période considérée est suffisamment longue et si les vitesses et accélérations sont bornées, l'intégrale dans le second membre domine le terme tout intégré (à condition bien sûr qu'elle soit non nulle - nous excluons donc de fait le cas du mouvement uniformément accéléré). On peut donc écrire l'énergie  $\Delta\mathcal{E}$  sous la forme du travail d'une force:

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt, \quad (1.44)$$

où la "force de réaction de rayonnement"  $\mathbf{F}_r$  est définie par:

$$\mathbf{F}_r = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} = m\tau \dot{\mathbf{a}}. \quad (1.45)$$

Cette force, proportionnelle à la dérivée temporelle de l'accélération, est tout à fait particulière et doit être utilisée avec beaucoup de précautions. Elle conduit tout d'abord, évidemment, à des équations du



mouvement qui sont du troisième ordre par rapport au temps. Il faut donc, pour spécifier complètement le mouvement, donner non seulement la position et la vitesse, mais aussi l'accélération initiale de la particule. Un tel comportement est étranger à tous les principes de la mécanique Newtonienne.

Un autre problème grave relatif à cette force est la présence, parmi les solutions aux équations du mouvement, de solutions divergentes, même pour une particule libre. Considérons en effet une particule initialement au repos. L'équation du mouvement s'écrit:

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\tau\ddot{\mathbf{v}} , \quad (1.46)$$

dont la solution générique s'écrit:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_0 e^{t/\tau} . \quad (1.47)$$

Si on ne spécifie pas que l'accélération de la particule est initialement nulle, l'accélération et la vitesse, croissent exponentiellement avec une constante de temps,  $\tau$ , extrêmement brève. Ces solutions sont complètement non physiques.

Mentionnons enfin une dernière difficulté avec la force de réaction de rayonnement. Elle prédit une force nulle pour un mouvement uniformément accéléré, donc a priori une énergie rayonnée nulle. Mais, pour ce type de mouvement, la puissance prédite par la formule de Larmor, est non nulle. On peut, bien sûr, constater que nos hypothèses pour l'intégration par parties conduisant à l'expression de  $\mathbf{F}_r$  ne sont pas valables dans ce cas. Il faut retenir de cette discussion que la force de réaction de rayonnement est un intermédiaire commode pour estimer l'influence du rayonnement sur le mouvement, mais qu'elle doit être utilisée avec précaution, le plus souvent dans une approche perturbative.

Dans l'appendice à ce chapitre, nous présenterons un calcul, dû à Abraham et Lorentz, qui justifie dans une certaine mesure la forme de la force de réaction de rayonnement. On y considère la charge comme une répartition étendue de densité de charge et on estime la force qu'elle exerce sur elle-même. Après un calcul fastidieux, on trouve une contribution proportionnelle à l'accélération, qu'on peut interpréter comme la masse de la particule, et la contribution de la force de réaction de rayonnement. Comme on le verra dans l'appendice, ce modèle présente des inconsistances graves et doit aussi être pris avec précautions.

### 1.3.3 Application

Nous allons utiliser, avec précautions, la force de réaction de rayonnement pour estimer la durée de vie des atomes dans le modèle de Rutherford (nous discuterons à nouveau ce problème en détail dans le chapitre sur le rayonnement des sources atomiques). La réaction de rayonnement, en réduisant graduellement l'énergie de l'électron en orbite autour du noyau, doit le conduire à tomber sur le noyau. Pour simplifier les calculs, nous considérerons un atome d'hydrogène et nous supposerons que les orbites sont circulaires, comparables à celles du modèle de Bohr. Nous nous servirons d'ailleurs des prédictions de ce modèle pour fixer les ordres de grandeur relatifs à nos orbites (en particulier celui de leur rayon).

Nous supposerons que l'énergie mécanique  $\mathcal{E}$  évolue lentement par rapport au mouvement orbital (nous faisons ici une approximation séculaire comparable à celles qui sont utilisées en astronomie). Nous noterons  $U(\mathbf{r}) = U(r) = \alpha/r$  le potentiel Coulombien à symétrie sphérique, avec

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} . \quad (1.48)$$

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est donnée par le travail de la force de réaction de rayonnement, ou, plus simplement encore, par la formule de Lorentz (on peut remarquer que, pour un mouvement périodique, le terme tout intégré dans le raisonnement conduisant à  $\mathbf{F}_r$  est identiquement nul à condition d'intégrer sur une période; la formule de Larmor est donc strictement équivalente au travail de  $\mathbf{F}_r$ ). On a alors:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -m\tau\overline{\mathbf{a}^2} , \quad (1.49)$$

où la barre désigne une moyenne temporelle sur une période. En remarquant que l'accélération est largement dominée par la force coulombienne et peut donc s'écrire:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{m} \frac{dU}{dr} \mathbf{u}_r, \quad (1.50)$$

on obtient finalement:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\tau}{m} \overline{\left(\frac{dU}{dr}\right)^2}. \quad (1.51)$$

On notera qu'on pourrait écrire une équation similaire pour le moment cinétique. On peut montrer rigoureusement, grâce à ces deux équations, que l'orbite de l'électron reste circulaire pendant sa chute sur le noyau. Cette propriété est relativement évidente, puisque la force de réaction de rayonnement est opposée à la vitesse et de module constant.

Pour le mouvement Coulombien, on a, en utilisant le théorème du viriel:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \overline{U} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.52)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt}, \quad (1.53)$$

pour une orbite circulaire. On a aussi, toujours pour une orbite circulaire:

$$\overline{\left(\frac{dU}{dr}\right)^2} = \frac{q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}. \quad (1.54)$$

On en déduit immédiatement que le rayon  $r$  de l'orbite doit décroître lentement en étant régi par l'équation:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\tau}{m} \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.55)$$

La résolution de cette équation est immédiate:

$$r^3(t) - r_0^3 = -9(c\tau)^3 \frac{t}{\tau}. \quad (1.56)$$

Le cube du rayon de l'orbite décroît donc linéairement avec le temps. De manière évidente, le rayon s'annule en un temps fini: la chute de l'électron sur le noyau prend un temps fini. Au cours de cette chute, la fréquence orbitale et donc la fréquence du rayonnement émis croissent indéfiniment. Il est évident que nos approximations (faible rayonnement, mouvement non relativiste, approximation séculaire) tomberont avant la fin du mouvement. On peut cependant estimer l'ordre de grandeur de la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental en prenant pour rayon initial le rayon de Bohr  $a_0$ . On trouve alors une durée de vie:

$$T = \frac{1}{9} \tau \left(\frac{a_0}{c\tau}\right)^3, \quad (1.57)$$

qui est de l'ordre de  $\tau$  multiplié par le cube du rapport du rayon de Bohr au rayon classique de l'électron. Numériquement,  $T$  vaut environ 14 ps. Un ordre de grandeur aussi faible montre bien les limites d'une approche classique à la structure atomique: au bout de quelques picosecondes tous les atomes auraient du disparaître dans un flash de rayonnement ultraviolet...

Notons que l'on peut, de manière plus utile, estimer à partir de ce calcul la durée de vie de l'orbite de Bohr de nombre quantique principal  $n$ . L'émission fait passer l'atome du niveau  $n$  au niveau  $n-1$ . Le rayon de l'orbite  $n$  étant  $n^2 a_0$ , la variation du cube du rayon dans cette transition est  $6a_0^3 n^5$  (on

suppose que  $n$  est grand et on remplace la différence finie par une dérivée). La durée de vie de l'état  $n$  doit alors être de l'ordre de:

$$\tau \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{c\tau} \right)^3 n^5 \simeq 6n^5 T. \quad (1.58)$$

Elle croît très rapidement avec  $n$ . Pour  $n = 50$ , par exemple, on trouve 26 ms. Ce résultat est extrêmement proche de la durée de vie du niveau de Rydberg circulaire  $n = 50$ . Ce niveau, de nombres quantiques orbital et magnétique maximums, correspond en effet de la manière la plus proche possible à l'orbite circulaire de Bohr. Comme tous les nombres quantiques mis en jeu sont élevés, le principe de correspondance nous indique en effet que le calcul classique et le calcul quantique doivent être en très bon accord.

## 1.4 Rayonnement du dipôle

Nous allons consacrer cette section à l'étude, au moyen des potentiels de Liénard–Wiechert, d'un cas particulier important: le rayonnement d'une charge oscillant de manière harmonique au voisinage de l'origine. Au prix d'une approximation simple, valable quand l'extension du mouvement est très petite par rapport à la longueur d'onde rayonnée, nous verrons qu'il est possible de calculer explicitement les champs. Ce rayonnement dipolaire se retrouve dans de nombreux domaines. Comme nous le verrons à la fin de cette partie, le rayonnement des sources atomiques entre en général dans le cadre de cette approximation. Tous les problèmes d'émission ou de diffusion de rayonnement par des atomes ou des assemblées d'atomes se ramènent donc à un problème de rayonnement dipolaire. De plus, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, ce rayonnement est le premier terme d'un développement (dit "multipolaire") valable pour une répartition quelconque de courants. Nous consacrerons la première partie de ce paragraphe à adapter simplement les résultats des paragraphes précédents à ce cas simple: calculs des potentiels, des champs rayonnés, du diagramme de rayonnement et de la puissance totale rayonnée. Dans la deuxième partie, nous exploiterons la très grande simplicité de cette source pour calculer les champs exacts. Nous conserverons donc tous les termes en  $1/R^n$  et montrerons comment on passe des champs statiques aux champs rayonnés quand on s'éloigne de la source.

### 1.4.1 Champs rayonnés

Nous considérons donc une charge ponctuelle animée d'un mouvement harmonique *non relativiste* autour de l'origine  $O$ . Nous choisirons un mouvement linéaire le long de l'axe  $Oz$ . Un mouvement harmonique plus complexe peut en effet toujours être décrit comme la superposition de trois mouvements harmoniques selon les trois directions de l'espace. Dans le cadre des approximations que nous ferons, le champ correspondant est simplement la somme des champs créés indépendamment par ces trois mouvements.

La position de la particule à l'instant  $t'$  est donc:

$$\mathbf{r}_0(t') = z_0 \mathbf{u}_z e^{-i\omega t'} \quad (1.59)$$

et sa vitesse

$$\mathbf{v}(t') = -iz_0\omega \mathbf{u}_z e^{-i\omega t'}. \quad (1.60)$$

Nous supposons la vitesse très petite devant  $c$  et ne garderons que les termes dominants dans un développement en puissances de  $\mathbf{v}/c$ . En particulier, le facteur cinématique  $1/g'$  qui est si important pour les particules relativistes sera simplement pris égal à 1. On peut s'interroger sur l'appellation dipôle pour une charge oscillante unique. Un vrai dipôle oscillant serait constitué de cette charge oscillante et d'une charge opposée fixe à l'origine. La charge fixe ne crée qu'un champ électrostatique. Comme nous ne nous intéressons qu'au champ rayonné à grande distance à la fréquence  $\omega$ , cette contribution électrostatique ne joue aucun rôle. Seule la charge mobile importe pour le rayonnement.

Notons également que nous devrons, en toute rigueur, appeler cette source un dipôle électrique. Nous verrons en effet dans le prochain chapitre qu'il existe un autre type de source dipolaire, le dipôle magnétique, essentiellement équivalent à une petite boucle de courant oscillant.

L'approximation essentielle que nous ferons (approximation dipolaire) consiste à négliger l'extension spatiale du mouvement de la particule,  $z_0$ , par rapport à toutes les grandeurs caractéristiques du problème. Elle est tout d'abord négligeable par rapport à la distance d'observation et on écrira simplement  $1/R = 1/r$  ( $r$  est le module de  $\mathbf{r}$ , distance de l'origine au point d'observation). Nous supposons aussi que le temps retardé varie peu devant la période d'oscillation d'une extrémité de la trajectoire à l'autre. En d'autres termes, nous supposons

$$\frac{z_0}{c} \ll \frac{1}{\omega} \quad (1.61)$$

ou encore

$$z_0 \ll \lambda, \quad (1.62)$$

où  $\lambda = 2\pi c/\omega$  est la longueur d'onde, dans le vide, d'une onde plane de fréquence  $\omega$ . Notons que cette condition s'écrit aussi  $v_0 \ll c$ . Nous pourrions alors écrire simplement:

$$t_0 = t - \frac{r}{c}. \quad (1.63)$$

$t_0$  est alors simplement retardé d'une quantité constante par rapport à l'instant d'observation. Nous écrivons ainsi le premier terme d'un développement de  $t_0$  en puissances de  $r_0/\lambda$ . Notons que cette approximation dipolaire est, par exemple, tout à fait légitime pour le rayonnement atomique. Les longueurs d'onde caractéristiques sont en effet de l'ordre du micron alors que l'extension des mouvements électroniques, comparable au rayon de Bohr, est plutôt de l'ordre de l'Ångström.

## Potentiers

Avec ces approximations, l'écriture des potentiels de Liénard ne pose aucune difficulté. Pour le potentiel vecteur, on a:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \mathbf{u}_z, \quad (1.64)$$

où l'on a utilisé l'amplitude  $j$  du courant créé par la particule:

$$j e^{-i\omega t} = q v e^{-i\omega t} = -i q z_0 \omega e^{-i\omega t}, \quad (1.65)$$

Pour le potentiel scalaire:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}. \quad (1.66)$$

Nous allons effectuer un développement de ces potentiels au premier ordre non trivial et non nul en  $v/c$ , en utilisant pour toutes les quantités retardées le seul instant  $t_0$ . On peut donc écrire:

$$\frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \simeq 1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c. \quad (1.67)$$

Le premier ordre non nul pour le potentiel scalaire correspond au potentiel électrostatique  $q/4\pi\epsilon_0 r$ . Comme nous n'avons considéré qu'une charge ponctuelle, il est normal qu'on trouve effectivement à l'ordre le plus bas un potentiel électrostatique. Toutefois, il ne contribue pas à la propagation et au rayonnement et nous pouvons l'oublier (on pourrait aussi ajouter une charge  $-q$  immobile à l'origine, ce qui constituerait une description plus réaliste d'un dipôle).

En remarquant que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c = -i \frac{z_0 \omega}{c} e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r, \quad (1.68)$$

et que  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r = \cos \theta$  en coordonnées sphériques, on peut écrire les potentiels au premier ordre significatif:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_z \quad (1.69)$$

$$V = -i \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega}{c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \cos \theta . \quad (1.70)$$

Dans l'expression de  $V$ , nous avons fait intervenir l'amplitude du dipôle associé à la charge:

$$d = ij/\omega = qz_0 . \quad (1.71)$$

On peut vérifier par un calcul élémentaire que  $V$  et  $\mathbf{A}$  vérifient bien la jauge de Lorentz (les potentiels de Liénard Wiechert complets y obéissent. Ce doit donc être vrai à tous les ordres dans le développement en  $v/c$ ).

Notons que nous aurions pu pousser le développement un terme plus loin en puissances de  $v/c$ . En fait, sauf pour vérifier la consistance de la jauge, il n'est pas nécessaire de calculer le potentiel scalaire au second ordre. Comme nous le verrons dans un moment, le champ magnétique se calcule directement à partir du potentiel vecteur et le champ électrique s'en déduit en utilisant les équations de Maxwell ou, plus simplement, la structure locale d'onde plane à très grande distance. Le terme d'ordre 2 dans le potentiel vecteur s'écrit, après quelques transformations:

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qz_0^2}{2} \frac{4\omega^2}{2c} \frac{e^{2i(kr-\omega t)}}{r} \cos \theta \mathbf{u}_z . \quad (1.72)$$

Il s'agit d'un terme oscillant à la fréquence  $2\omega$  (c'est un terme en  $v^2$ ), possédant une structure géométrique plus complexe que le potentiel vecteur du dipôle. Nous examinerons plus tard, par la technique systématique des développements multipolaires, le champ créé par une charge oscillante à cet ordre. Nous verrons qu'il existe effectivement un champ quadripolaire électrique à cette fréquence et nous retrouverons, par une autre méthode, l'expression ci-dessus.

### Champs rayonnés

Les champs rayonnés s'expriment également sans difficultés. On pourrait calculer le champ électrique à partir de  $\mathbf{A}$  et de  $V$ . Le calcul ne présente aucune difficulté. Toutefois, si ne nous intéressons qu'aux champs rayonnés à grande distance, il est beaucoup plus économique de revenir directement aux champ de Liénard. A l'ordre d'approximation où nous travaillons:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) , \quad (1.73)$$

où l'accélération  $\mathbf{a}$  s'écrit simplement:

$$\mathbf{a} = -z_0 \omega^2 e^{-i\omega t} \mathbf{u}_z . \quad (1.74)$$

Le champ électrique s'exprime plus naturellement en termes du dipôle électrique. On a

$$\mathbf{E} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z) \quad (1.75)$$

En utilisant les vecteurs unitaires du trièdre local en coordonnées sphériques, on trouve rapidement que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z = -\sin \theta \mathbf{u}_\phi \quad (1.76)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z) = \sin \theta \mathbf{u}_\theta , \quad (1.77)$$

et finalement

$$\mathbf{E} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \sin\theta \mathbf{u}_\theta . \quad (1.78)$$

L'onde rayonnée ayant toujours localement la structure d'une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , on en déduit

$$\mathbf{B} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^3} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \sin\theta \mathbf{u}_\phi . \quad (1.79)$$

La géométrie des champs est relativement intuitive. La répartition de courant produite par la charge est en effet à symétrie cylindrique autour de l'axe  $Oz$ . Le champ magnétique respecte cette symétrie (les lignes de champ sont des cercles d'axe  $Oz$ ). Quand au champ électrique, il est dans le plan défini par le dipôle et le point d'observation. Notons enfin que les champs sont nuls dans la direction du dipôle,  $Oz$ . Nous discuterons dans un moment quelques conséquences physiques de cet effet non-relativiste (le rayonnement n'est pas du tout concentré dans la direction de la vitesse de la particule).

### Vecteur de Poynting

A partir des champs, nous pouvons facilement calculer le vecteur de Poynting:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} . \quad (1.80)$$

Il faut prendre garde aux notations complexes quand on manipule des quantités énergétiques, quadratiques dans les champs. Une substitution directe et maladroite des expressions précédentes pourrait faire croire que  $\mathbf{\Pi}$  est une fonction purement oscillante à  $2\omega$ . Il faut, en fait, soit revenir aux parties réelles des champs pour exprimer la valeur instantanée de  $\mathbf{\Pi}$ , soit ne s'intéresser qu'à la moyenne temporelle  $\overline{\mathbf{\Pi}}$  de  $\mathbf{\Pi}$  sur une période optique (ou sur un intervalle de temps long par rapport à cette période). En effet, cette moyenne temporelle s'écrit simplement en termes des amplitudes complexes des champs. En posant:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (1.81)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} , \quad (1.82)$$

les champs réels s'écrivent

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}) \quad (1.83)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}) . \quad (1.84)$$

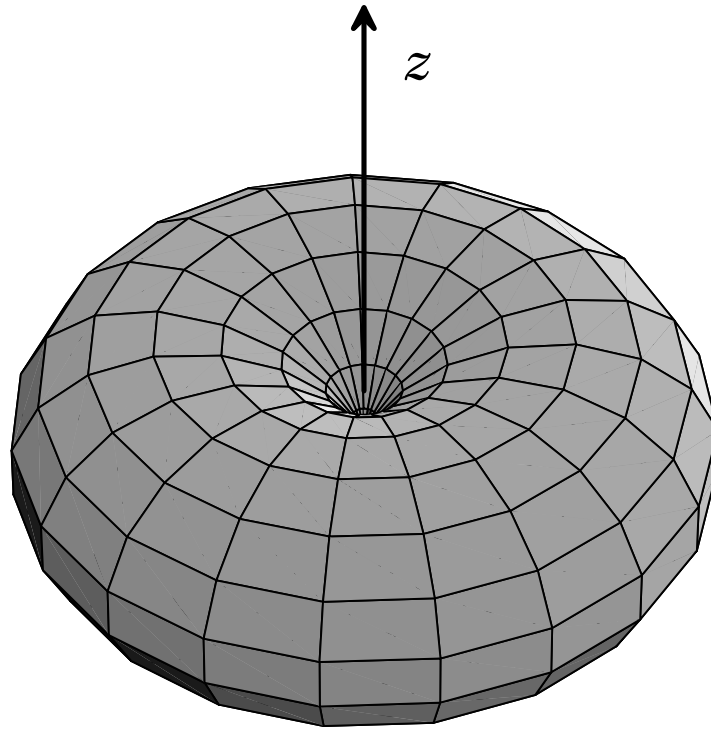
( $\mathbf{E}_0^*$  désignant le complexe conjugué de  $\mathbf{E}_0$ ). Le vecteur de Poynting contient alors des termes oscillants à  $2\omega$  dont la moyenne temporelle est évidemment nulle et des termes constants, qui contribuent seuls à cette moyenne. On a finalement:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{4\mu_0} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*) . \quad (1.85)$$

On notera que ce type d'expression peut être utilisé pour toute quantité quadratique (densités d'énergie...).

En appliquant cette formule nous trouvons donc:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{d^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \mathbf{u}_r . \quad (1.86)$$



**Figure 1.3:** Diagramme de rayonnement d'un dipôle électrique aligné avec l'axe  $Oz$ . On note que le rayonnement est nul sur l'axe du dipôle.

Comme prévu,  $\vec{\Pi}$  est colinéaire à  $\vec{u}_r$  et de même sens. Il décrit bien un flux d'énergie du dipôle vers l'infini. On peut visualiser la répartition spatiale du flux énergétique en traçant le diagramme de rayonnement. Dans la direction définie par les angles  $\theta$  et  $\phi$  des coordonnées sphériques, on porte une longueur proportionnelle à  $\vec{\Pi}$ . Le diagramme ainsi obtenu est de révolution autour de  $Oz$ . Il est représenté sur la figure 1.3. La section de cette surface par un plan passant par  $Oz$  est constituée de deux lobes symétriques d'équation polaire  $\rho = K \sin^2 \theta$ . La propriété essentielle de ce diagramme est que la puissance rayonnée est nulle dans la direction du mouvement, maximale dans une direction perpendiculaire.

De nombreux phénomènes physiques sont associés à ce diagramme de rayonnement. Une antenne dipolaire électrique (un fil rectiligne parcouru par un courant oscillant — nous montrerons dans le prochain chapitre l'équivalence avec le système traité ici) ne rayonne que dans un plan perpendiculaire à son axe. Elle doit donc être orientée verticalement pour une communication terrestre. De manière réciproque, une antenne linéaire ne capte correctement le rayonnement que si elle est perpendiculaire à la direction de propagation et parallèle à la polarisation (une expérience quotidienne avec les antennes de télévision, réseau d'antennes linéaires). Nous verrons qu'une petite particule ou un atome éclairé par une onde plane possède un dipôle induit parallèle à la direction de polarisation. Il diffuse donc préférentiellement le rayonnement dans une direction perpendiculaire à sa polarisation. Ce phénomène est à l'origine de la polarisation de la lumière diffusée par l'atmosphère. Les ondes incidentes de polarisation perpendiculaire au plan défini par la direction d'observation et la direction du soleil contribuent principalement à la lumière diffusée. La lumière observée dans une direction est donc partiellement polarisée. Quand la lumière subit des diffusion multiples (par temps de brouillard par exemple), cet effet de polarisation est brouillé et la lumière diffusée a une polarisation naturelle. On peut observer facilement la direction préférentielle de diffusion, dans une expérience de cours, en observant la diffusion d'une lumière polarisée par une solution saturée de glucose. Comme elle possède un important pouvoir rotatoire, la polarisation linéaire de l'onde incidente tourne, avec une période

spatiale de quelques centimètres. On observe alors, à angle droit avec la direction incidente, que la diffusion est pratiquement nulle quand la polarisation pointe vers l'observateur, maximale dans le cas contraire.

### Puissance totale rayonnée

On obtient la moyenne temporelle de la puissance rayonnée par le dipôle,  $\mathcal{P}$ , en intégrant le vecteur de Poynting moyen sur une sphère de rayon  $r$ .  $\overline{\Pi}$  étant en  $1/r^2$ , la dépendance en  $r$  disparaît et la puissance rayonnée est indépendante du rayon de cette sphère. L'intégrale sur l'angle  $\phi$  est triviale et on obtient immédiatement:

$$\mathcal{P} = \frac{d^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (1.87)$$

On vérifiera que

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}. \quad (1.88)$$

On a donc enfin:

$$\mathcal{P} = \frac{d^2}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3}. \quad (1.89)$$

Cette formule nous sera très utile dans la suite de ce cours. De manière naturelle, la puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'amplitude du dipôle. Elle est également proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence. A dipôle égal, les hautes fréquences sont rayonnées de façon beaucoup plus efficace que les basses. On connaît bien ce phénomène en acoustique: les hauts-parleurs sont d'autant plus petits, pour une puissance restituée égale, que leur fréquence optimale d'utilisation est élevée. Dans le domaine optique, ce comportement est responsable de la couleur bleue de la lumière diffusée si la lumière incidente est blanche. C'est par exemple ce qui explique le bleu du ciel. Les molécules d'air ont des fréquences de résonance très hautes par rapport aux fréquences visibles. Elles répondent donc de la même manière à toutes les fréquences visibles, par des dipôles comparables. En revanche, les fréquences les plus élevées dominent largement dans le spectre de la lumière diffusée. Par un simple effet de complémentarité, le rouge domine dans le spectre de la lumière transmise. Voici pourquoi le ciel est bleu <sup>2</sup> et les couchers de soleil rouges.

La puissance rayonnée doit provenir d'une source d'énergie. On pourrait envisager que la particule soit mise en mouvement par des sources externes, éventuellement non électromagnétiques. L'énergie rayonnée peut aussi provenir de l'énergie mécanique de la particule (élastiquement liée à un centre de force). Dans ce cas, cette énergie mécanique décroît au cours du temps sous l'action de la force de réaction de rayonnement. Cette force, proportionnelle à la dérivée troisième de la position est, pour un mouvement pratiquement sinusoïdal, proportionnelle au cube de la fréquence. La puissance de cette force varie donc comme la quatrième puissance de la fréquence, ce qui est bien ce que nous venons de déterminer par un autre moyen.

#### 1.4.2 Champs à une distance arbitraire

Le problème que nous nous sommes posé ici est suffisamment simple pour que nous puissions entreprendre de calculer exactement le champ produit à une distance arbitraire. Nous pourrions ainsi calculer le champ proche du dipôle et montrer comment on passe d'une solution essentiellement électrostatique à courte distance aux champs rayonnés du paragraphe précédent. Nous partirons du potentiel vecteur décrit par l'équation (1.69). La seule approximation effectuée à ce niveau est en effet l'approximation dipolaire négligeant l'extension du mouvement par rapport à la longueur d'onde rayonnée. En revanche

<sup>2</sup>L'explication complète du bleu du ciel est un peu plus complexe. Si l'atmosphère était parfaitement homogène, elle se comporterait comme un milieu d'indice constant et il n'y aurait pas de diffusion. Le ciel serait noir (et triste). Les fluctuations thermodynamiques de densité sont responsables d'inhomogénéités d'indice à l'échelle de la longueur d'onde incidente et de l'existence d'une diffusion.



les champs de l'équation (1.78,1.79) ne sont que les premiers termes d'un développement en puissances de  $1/r$  des vrais champs. Nous allons rétablir intégralement ce développement. Nous commencerons par établir l'expression du champ magnétique, rotationnel du potentiel vecteur. Nous en déduirons ensuite le champ électrique, directement à partir de l'équation de Maxwell–Ampère. Nous éviterons ainsi d'avoir à expliciter le potentiel scalaire, qui est important dans la zone des champs proches.

### Champ Magnétique

Nous partons de

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} e^{-i\omega t} \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z . \quad (1.90)$$

Une formule standard d'analyse vectorielle donne:

$$\nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{u}_z , \quad (1.91)$$

le rotationnel de  $\mathbf{u}_z$  étant manifestement nul. Le gradient étant celui d'une fonction à symétrie sphérique, il s'exprime simplement:

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \mathbf{u}_r e^{ikr} \left[ \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] . \quad (1.92)$$

En remarquant que  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z = -\sin\theta \mathbf{u}_\phi$ , on a finalement le champ magnétique sous la forme:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 j}{4\pi} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left[ \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] \sin\theta \mathbf{u}_\phi . \quad (1.93)$$

Notons que la partie en  $1/r$  de ce champ, dominante à grande distance, coïncide, à des réécritures près, avec (1.79). Notons également que le terme de champ proche, en  $1/r^2$  ici, n'affecte pas les propriétés de symétrie du champ dont les lignes restent des cercles d'axe  $Oz$ .

### Champ Electrique

Plutôt que d'écrire l'expression du potentiel scalaire, par exemple par la jauge de Lorentz, pour la dériver ensuite, nous allons utiliser l'équation de Maxwell–Ampère qui s'écrit, pour des champs harmoniques:

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} . \quad (1.94)$$

Il est plus naturel d'exprimer le champ électrique en termes de l'amplitude du dipôle  $d = qz_0$ . Après une simple réécriture, on a:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \left( \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) . \quad (1.95)$$

Le double rotationnel se développe en:

$$\nabla \times \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \nabla \left( \nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) - \Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z . \quad (1.96)$$

Le laplacien du second membre est particulièrement simple.  $\mathbf{u}_z$  étant constant, il se ramène à:

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \Delta \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \mathbf{u}_z = -\frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_z . \quad (1.97)$$

En utilisant enfin la décomposition de  $\mathbf{u}_z$  sur le trièdre local ( $\mathbf{u}_z = -\sin\theta\mathbf{u}_\theta + \cos\theta\mathbf{u}_r$ ), on a:

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = +\sin\theta \frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_\theta - \cos\theta \frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_r \quad (1.98)$$

Revenons maintenant au premier terme du membre de gauche de (1.96).  $\mathbf{u}_z$  étant constant, il sort de la divergence et nous pouvons écrire:

$$\nabla \left( \nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = \nabla \left( \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \mathbf{u}_z \right) . \quad (1.99)$$

Le gradient d'un produit scalaire peut aussi se développer par une formule d'analyse vectorielle standard. En utilisant encore une fois le fait que  $\mathbf{u}_z$  est une constante, et que ses dérivées sont nulles, ainsi que le fait que le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, on a:

$$\nabla \left( \nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = (\mathbf{u}_z \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (1.100)$$

avec  $(\mathbf{u}_z \cdot \nabla) = \cos\theta \partial/\partial r - (\sin\theta/r) \partial/\partial\theta$ , et en exprimant le gradient on obtient enfin:

$$\nabla \left( \nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = \cos\theta \mathbf{u}_r e^{ikr} \left[ -\frac{k^2}{r} - 2\frac{ik}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right] - \sin\theta \mathbf{u}_\theta e^{ikr} \left[ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] . \quad (1.101)$$

En regroupant finalement ce terme avec celui provenant du laplacien on a le champ à toute distance sous la forme:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left\{ -2\mathbf{u}_r \cos\theta \left[ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] - \mathbf{u}_\theta \sin\theta \left[ \frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] \right\} . \quad (1.102)$$

Nous avons donc bien exprimé le champ électrique comme un développement en puissances successives de  $kr$  ou de  $r/\lambda$ . Le terme en  $1/r$  dominant à grande distance coïncide, là encore, avec le champ rayonné donné par (1.78). La symétrie du champ électrique n'est pas modifiée par les termes de champ proche et  $\mathbf{E}$  reste dans le plan défini par la direction du dipôle et la direction d'observation. Notons enfin que la partie du champ en  $1/r^2$ , importante dans la région intermédiaire, est en quadrature avec les champs en  $1/r$  et  $1/r^3$ . Cette propriété a une certaine importance dans les raisonnements énergétiques.

L'expression de  $\mathbf{E}$  en termes des vecteurs de base du trièdre local est sans doute la plus commode. Notons pour mémoire qu'on peut donner une expression complètement vectorielle de  $\mathbf{E}$  sous la forme:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left\{ \frac{k^2}{r} (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_r - \left( \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) (3\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) + 2\mathbf{u}_z) \right\} . \quad (1.103)$$

Cette forme a le mérite essentiel de bien faire ressortir la contribution rayonnée, mise ici sous la forme entièrement vectorielle résultant directement des champs de Liénard.

## Discussion

Trois régions importantes de l'espace apparaissent dans l'équation (1.102). La région des champ rayonnés correspond à  $kr \gg 1$  et nous l'avons déjà étudiée en détails. La région  $kr \ll 1$  est dite région du champ proche. Le champ électrique y est dominé par des termes en  $1/r^3$ . Il peut s'écrire:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \left[ \frac{2\cos\theta}{r^3} \mathbf{u}_r + \frac{\sin\theta}{r^3} \mathbf{u}_\theta \right] . \quad (1.104)$$

On reconnaît, à un facteur oscillant  $e^{-i\omega t}$  près, l'expression du champ électrique du dipôle électrostatique. Nous sommes effectivement à une distance courte devant la longueur d'onde rayonnée: la propagation ne joue pas de rôle et le champ électrique suit immédiatement sa source.

Ce champ “électrostatique” proche joue un rôle important dans de nombreux domaines. Il est par exemple responsable des forces de “van der Waals” entre molécules d’un gaz, responsables en partie des écarts à la loi des gaz parfaits. Les molécules sont en effet de petits dipôles électrostatiques fluctuant à des fréquences optiques. Les distances moyennes entre particules dans un gaz de densité normale étant très inférieures aux longueurs d’onde optiques, l’interaction entre ces petits dipôles peut se calculer en utilisant ces formules de champ proche. Il serait hors de propos de donner ici une interprétation plus détaillée des forces de van der Waals, qui ne peuvent se comprendre correctement que dans un cadre quantique (on notera par exemple que l’image d’un dipôle fluctuant ne peut tenir pour une molécule dans son état fondamental: ce dipôle devrait rayonner, ce qui rendrait l’état fondamental instable).

La troisième région de l’espace est celle des champs “intermédiaires”,  $kr \simeq 1$ . Tous les termes du champ électrique sont alors d’importance comparable. La complexité du champ est telle que nous ne décrirons pas plus en détail ses propriétés.



## Chapitre 2

# Développement multipolaire du champ rayonné

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à un type de sources qui généralise le dipôle introduit au chapitre précédent. Nous considérerons une répartition de courants quelconques, oscillant de façon harmonique, localisés au voisinage de l'origine. Les courants seront imposés, comme le mouvement des charges dans le chapitre précédent. Le problème ainsi posé est bien sûr trop général. Nous chercherons donc seulement à déterminer les champs rayonnés à une distance très grande par rapport à la longueur d'onde et à l'extension spatiale de la répartition de courants. Nous ne nous restreindrons pas en revanche à des répartitions de courant localisées sur une étendue faible par rapport à la longueur d'onde. Nous procéderons à un développement en puissances de l'extension de la source par rapport à  $\lambda$  (longueur d'onde rayonnée). Nous identifierons physiquement les différents termes de ce développement et constaterons que le terme dominant n'est autre que le champ du dipôle électrique. Nous préciserons à chaque fois les caractéristiques du rayonnement et, en particulier, le diagramme d'émission. Nous conclurons ce chapitre en présentant quelques applications de ces développements multipolaires. Nous reviendrons en particulier sur le rayonnement d'une charge animée d'un mouvement sinusoïdal non relativiste. Nous pourrions calculer les corrections au rayonnement dipolaire dues à l'extension finie de la trajectoire. Nous nous pencherons ensuite sur le problème, plus important en pratique, des antennes. Nous discuterons deux types d'antennes couramment répandues. Nous dégagerons en particulier la notion importante d'impédance de rayonnement.

## 2.1 Développement multipolaire du potentiel vecteur

### 2.1.1 Notations

La position du problème et les notations sont résumées sur la figure 2.1. Nous cherchons le champ rayonné en un point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  par une répartition de courant située au voisinage de l'origine, dans une région d'extension caractéristique  $r_0$  (on prendra garde à quelques changements de notation par rapport au paragraphe précédent). Le courant au point source  $\mathbf{r}'$  à l'instant  $t'$  est  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t')$ .  $\mathbf{j}_0$  désigne donc l'amplitude complexe de la densité de courant. Notons encore une fois que, si nous nous limitons ici à des courants harmoniques, le cas général peut être traité en utilisant transformation de Fourier et principe de superposition.

La répartition de courants est nécessairement, par la conservation de la charge, accompagnée d'une densité de charges, elle aussi oscillante à la fréquence  $\omega$ :  $\rho(\mathbf{r}', t') = \rho_0(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t')$ . En écrivant l'équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0 \quad (2.1)$$

où les dérivations spatiales s'entendent par rapport à  $\mathbf{r}'$  et en y portant la dépendance harmonique en

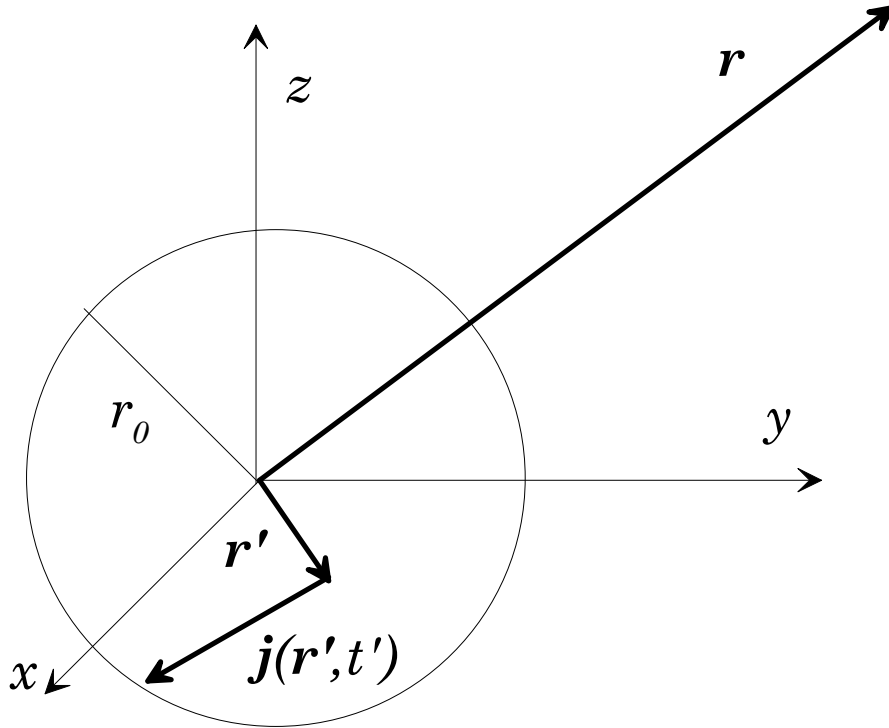


Figure 2.1: Rayonnement multipolaire: notations

temps, on trouve:

$$i\omega\rho_0 = \nabla \cdot \mathbf{j}_0 . \quad (2.2)$$

Nous utiliserons donc indifféremment la densité de courant et la densité de charge pour caractériser la source.

Il y a dans ce problème trois échelles naturelles de longueur:

- La distance  $r$  entre la répartition de courant et le point d'observation.
- La longueur d'onde  $\lambda = 2\pi c/\omega$  du rayonnement
- L'extension spatiale  $r_0$  de la répartition de courant.

Nous nous placerons uniquement dans le cas où la distance d'observation est très grande, à la fois par rapport à la longueur d'onde et par rapport à l'extension de la source:

$$r \gg \lambda, r_0 . \quad (2.3)$$

En fait, nous calculerons le potentiel comme un développement limité en puissances de  $r/\lambda$  et nous ne garderons que les termes dominants, en  $1/r$ . Nous suivons en cela la démarche du chapitre précédent. Nous ne supposerons pas en revanche, comme pour le dipôle, que  $r_0 \ll \lambda$ . Nous effectuerons plutôt un développement limité en puissances de  $r_0/\lambda$ , dont nous garderons tous les ordres <sup>1</sup> (le développement multipolaire proprement dit). Nous identifierons ensuite les contenus physiques de ces différents ordres. Pour des raisons évidentes, nous nous cantonnerons aux termes des premier et second ordres pour cette analyse détaillée.

<sup>1</sup>Le problème du rayon de convergence d'un tel développement en série se pose bien sûr. En fait, ce développement est toujours convergent puisqu'il s'agit, comme nous le verrons, du simple développement d'une exponentielle

### 2.1.2 Potentiel vecteur

L'expression du potentiel vecteur s'obtient tout naturellement à partir de la solution en termes de potentiels retardés:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{-i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',\end{aligned}\quad (2.4)$$

en posant encore  $k = \omega/c$ . Cette expression est, jusqu'ici, exacte pour une répartition de courant harmonique (rappelons que cette expression était, pour une dépendance temporelle quelconque, notre point de départ pour l'établissement des potentiels de Liénard).

Suivant notre programme, nous commençons par un développement limité en puissances de  $1/r$  dont nous ne garderons que les termes dominants. La dépendance en  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  intervient dans le facteur d'amplitude (en  $1/r$ ) et dans la phase due au temps retardé. Clairement, la dépendance en phase est beaucoup plus critique: il suffit que  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  varie de  $\lambda$  pour que le terme de phase change beaucoup. Si nous nous contentons de garder l'ordre 1 en  $r'/r$  dans la phase, il est cohérent de ne garder que l'ordre 0 pour l'amplitude et d'écrire  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r$  (Nous laisserons le soin au lecteur, à titre d'exercice, de vérifier la cohérence de ce développement). Le terme de phase peut s'écrire au premier ordre:

$$ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = ikr \sqrt{1 - \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} = ikr - ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}', \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{u}_r$  est le vecteur unitaire de la direction d'observation. En reportant ces deux développements dans l'expression du potentiel vecteur, on trouve:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.6)$$

Comme nous pouvions nous y attendre, la dépendance en  $\mathbf{r}$  du potentiel vecteur est essentiellement celle d'une onde sphérique. La complexité de la source est complètement contenue dans l'intégrale. Si cette intégrale ne porte que sur le point source  $\mathbf{r}'$ , le point d'observation y intervient par le vecteur  $\mathbf{u}_r$ .

Nous allons maintenant développer cette intégrale en puissances de l'extension de la source  $r_0$  comparée à la longueur d'onde rayonnée  $\lambda$ . En raison de la densité de courant, l'intégrale ne porte que sur une région de l'espace d'extension  $r_0$ . Dans cette région finie, on peut développer l'exponentielle en:

$$e^{-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} = 1 - ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' + \frac{(-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')^2}{2!} + \dots \quad (2.7)$$

Notons que ce développement en série a un rayon de convergence infini. L'écrire ne présuppose en rien que l'extension de la source soit petite devant  $\lambda$ . En revanche, la convergence ne sera suffisamment rapide pour que le développement soit utile que si cette extension n'est pas trop grande. Nous écrirons donc enfin:

$$\mathbf{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{A}_p, \quad (2.8)$$

avec

$$\mathbf{A}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \frac{(-ik)^p}{p!} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')^p d^3\mathbf{r}'. \quad (2.9)$$

Nous appellerons développement multipolaire du potentiel vecteur cette expression. Nous allons en effet voir dans les paragraphes suivants, en examinant les termes successifs, qu'ils correspondent à des géométries de sources dipolaires, quadripolaires etc..

## 2.2 Termes multipolaires

Nous allons maintenant examiner les termes d'ordres successifs dans le développement (2.9). Si l'extension de la source n'est pas très grande devant  $\lambda$ , les premiers termes doivent dominer le potentiel. Pour des raisons évidentes de taille des calculs, nous nous limiterons en fait aux termes d'ordre zéro et un. On peut traiter de manière systématique les termes d'ordre arbitraire en les reliant aux propriétés des harmoniques sphériques. Cette méthode très puissante, bien adaptée à l'utilisation des propriétés de symétrie de la source, est exposée en détails dans le Jackson. L'exposer ici nous conduirait à une digression mathématique trop longue. De plus, l'essentiel des idées physiques est contenu dans la méthode que nous présentons. Pour chaque terme, nous calculerons séparément les champs électrique et magnétique rayonnés. Les théorèmes de superposition nous permettront de trouver les champs rayonnés par des sources quelconques. En revanche, les considérations énergétiques que nous pourrions faire pour des termes séparés, y compris l'établissement du diagramme de rayonnement, ne tiendront que si ces termes sont dominants (il n'y a pas de principe de superposition pour ces quantités quadratiques). Comme nous nous sommes placés dès l'abord dans le domaine des champs rayonnés, nous pourrions obtenir les champs à partir des potentiels en utilisant la structure locale d'onde plane de l'onde rayonnée. En fait, nous raisonnerons aussi souvent par analogie en montrant qu'il existe des liens très forts entre la géométrie des champs correspondant à différents termes.

### 2.2.1 Ordre 0: Dipôle électrique

Le terme d'ordre zéro du développement s'écrit simplement:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (2.10)$$

A cet ordre d'approximation, tout se passe comme si on avait un courant oscillant complètement localisé à l'origine, ayant comme valeur l'intégrale de volume du courant de la répartition initiale. Nous allons montrer, par quelques transformations algébriques simples de l'intégrale, qu'on retrouve en fait le potentiel vecteur produit par un dipôle électrique oscillant, modélisé, comme au chapitre précédent, par une charge oscillante.

Considérons donc la composante selon  $\mathbf{u}_x$  de l'intégrale. Elle peut s'écrire:

$$I_x = \int \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \nabla x' \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.11)$$

où le gradient s'entend par rapport à  $\mathbf{r}'$ . Une intégration par parties donne alors:

$$I_x = - \int x' (\nabla \cdot \mathbf{j}_0) d^3\mathbf{r}' = - \int x' (i\omega \rho_0) d^3\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

où nous avons cette fois utilisé l'équation de conservation de la charge pour faire intervenir la densité de charge.  $I_x$  apparaît donc comme la composante selon  $\mathbf{u}_x$  d'un vecteur  $-i\omega \mathbf{d}_0$  avec:

$$\mathbf{d}_0 = \int \mathbf{r}' \rho_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (2.13)$$

Pour une densité de charges statique, nous reconnâtrions ici l'expression du moment dipolaire électrique. Pour notre répartition oscillant de façon harmonique,  $\mathbf{d}_0$  est évidemment l'amplitude complexe du moment dipolaire électrique.

On a donc:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-i\omega) \mathbf{d}_0 \quad (2.14)$$

On reconnaît ici l'expression du potentiel de la charge oscillante 1.69 (on prendra garde de remplacer dans l'expression présente le dipôle  $\mathbf{d}_0$  par celui de la charge oscillante  $qa\mathbf{u}_z$  pour comparer ces deux expressions).



Le terme d'ordre zéro du développement multipolaire correspond donc au dipôle électrique, pour lequel nous avons déjà calculé en détails les champs<sup>2</sup> et la puissance rayonnés. Nous ne discuterons pas à nouveau de ces termes. En général, une source possède un dipôle électrique non nul. Si l'extension est petite devant  $\lambda$ , ou même de l'ordre de  $\lambda$  comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, ce terme domine. La grande majorité des sources se comportent comme des dipôles, ce qui justifie largement la place que nous avons accordée au traitement de ce problème. Ce n'est que pour des sources de grande extension ou pour celles qui, souvent pour des raisons de symétrie, ont un dipôle électrique strictement nul que les termes suivants, que nous allons discuter maintenant, jouent un rôle.

### 2.2.2 Ordre 1: Dipôle magnétique, Quadripôle électrique

Quand le dipôle électrique d'une distribution est nul, le terme d'ordre 1 domine. Le potentiel vecteur correspondant s'écrit:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (2.15)$$

La transformation de cette intégrale en quelque chose de manipulable n'est pas aisée sous cette forme. Dans le produit d'un vecteur par un produit scalaire, on reconnaît un des termes du développement d'un double produit vectoriel. Nous pouvons effectivement transformer l'intégrande pour faire apparaître ce produit vectoriel, au prix de termes soustractifs supplémentaires. Nous écrirons pour cela:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0) \mathbf{r}'] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0) \mathbf{r}'] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

La première ligne de ce développement, a priori très artificiel, est alors un double produit vectoriel. Nous allons voir, en discutant chacun des termes associés à chacune des lignes de (2.16), que cette séparation correspond à deux types de sources de propriétés physiques différentes, intervenant au même ordre dans le développement multipolaire: le dipôle magnétique et le quadripôle électrique. Nous écrirons donc le potentiel vecteur à l'ordre 1 comme:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{dm} + \mathbf{A}_1^{qe} , \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{A}_1^{dm}$  correspond à la première ligne de (2.16) alors que  $\mathbf{A}_1^{qe}$  correspond à la deuxième

#### Dipôle magnétique

On a donc:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int \frac{1}{2} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (2.18)$$

Nous poserons donc (en remarquant que  $\mathbf{u}_r$  sort de l'intégrale sur  $\mathbf{r}'$ ):

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (2.19)$$

Pour une répartition de courants statiques,  $\mathcal{M}_0$  représenterait le dipôle magnétique de la répartition<sup>3</sup>. L'expression ci-dessus généralise simplement cette définition à l'amplitude complexe d'un dipôle

<sup>2</sup>On prendra garde que l'expression des champs à courte distance, que nous avons établie dans le chapitre précédent, n'est pas nécessairement valable dans le cas présent, l'extension de la source pouvant ne pas être négligeable devant  $\lambda$ .

<sup>3</sup>Cette définition généralise, en magnétostatique élémentaire, la définition du moment magnétique pour un circuit filiforme  $\mathcal{M} = I\mathbf{S}$ . On remarquera en effet que l'intégrale de contour de  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/2$  n'est autre que le vecteur surface défini par ce contour.

magnétique oscillant. Si une charge oscillant le long de l'axe  $Oz$  modélise un dipôle électrique, une répartition dipolaire magnétique correspondrait plutôt à une petite boucle de courant oscillant (perpendiculaire à l'axe portant  $\mathcal{M}_0$ ). Cette identification donne un sens physique à notre séparation a priori artificielle du potentiel vecteur à l'ordre 1.

On peut écrire avec ces définitions:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik\mathbf{u}_r \times \mathcal{M}_0 . \quad (2.20)$$

Pour simplifier les écritures, et sans restreindre la généralité du raisonnement, nous pouvons supposer  $\mathcal{M}_0$  aligné avec  $Oz$ . Nous aurons alors simplement:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik\mathcal{M}_0(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) . \quad (2.21)$$

Nous pouvons établir directement les champs rayonnés à partir de cette expression et de la structure locale d'onde plane. Le champ magnétique s'écrit en effet:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{dm} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= ik\mathbf{u}_r \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 (-\sin\theta \mathbf{u}_\theta) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

La structure locale d'onde plane nous donne alors aussi l'expression du champ électrique du dipôle magnétique:

$$\mathbf{E}^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ck^2 (\sin\theta \mathbf{u}_\phi) \quad (2.23)$$

Cette fois, ce sont les lignes de champ électrique qui sont des cercles d'axe  $Oz$ .

On peut aussi procéder par analogie avec le dipôle électrique, ce qui soulignera les similitudes entre les rayonnements de ces deux distributions de charges. Le champ magnétique du dipôle électrique (que nous supposons également aligné selon  $Oz$ ) s'écrit en effet:

$$\mathbf{B}^{de} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\omega d_0}{i} \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) . \quad (2.24)$$

Il est donc, à quelques substitutions de symboles près, identique au potentiel vecteur du dipôle magnétique.

Le champ électrique du dipôle électrique s'obtient en écrivant:

$$\mathbf{E}^{de} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}^{de} \quad (2.25)$$

et le champ magnétique du dipôle magnétique par:

$$\mathbf{B}^{dm} = \nabla \times \mathbf{A}_1^{dm} . \quad (2.26)$$

En comparant ces deux expressions, nous voyons que  $\mathbf{B}^{dm}$  s'obtient simplement en substituant  $d_0 c^2$  par  $\mathcal{M}_0$  dans  $\mathbf{E}^{de}$ . La structure du champ magnétique du dipôle magnétique est donc identique (à ce changement de notation près) à la structure du champ électrique du dipôle électrique. Si ces deux types de sources n'apparaissent pas au même ordre du développement, elles sont tout à fait similaires. En utilisant l'expression (1.78) du champ électrique du dipôle, nous obtenons immédiatement:

$$\mathbf{B}^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 (-\sin\theta \mathbf{u}_\theta) . \quad (2.27)$$

Si le terme dipolaire magnétique est le seul à contribuer au rayonnement, nous pouvons estimer le flux d'énergie. Rappelons que si plusieurs termes contribuent, ce calcul ne sera pas complet. Il faudrait aussi tenir compte des termes croisés entre champs à différents ordres du développement multipolaire. Nous ne considérerons donc ici que le cas d'une source dont le dipôle électrique est nul. Nous supposons aussi que la contribution des termes quadripolaires électriques (la seconde ligne de (2.16)) est négligeable. Le vecteur de Poynting décrivant le flux d'énergie, en valeur moyenne temporelle, s'écrit alors, après quelques transformations élémentaires pour faire apparaître  $\epsilon_0$ :

$$\overline{\Pi} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^5} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta \mathbf{u}_r . \quad (2.28)$$

Le diagramme de rayonnement du dipôle magnétique est donc identique à celui du dipôle électrique (on se reportera à la figure correspondante). En particulier, le rayonnement est nul dans la direction du moment dipolaire magnétique, maximal dans le plan perpendiculaire (le plan du circuit si on imagine le dipôle sous la forme d'une petite boucle de courant).

La puissance totale s'obtient en intégrant le flux d'énergie sur une sphère de rayon  $r$  arbitraire. Le calcul est exactement analogue à celui du dipôle électrique et nous ne le détaillerons pas. La puissance moyenne rayonnée est alors:

$$\mathcal{P}^{dm} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^5} \omega^4 . \quad (2.29)$$

On remarque encore la très rapide dépendance en fréquence de cette puissance. Il est instructif à ce point de tenter de comparer, en ordres de grandeur, la puissance rayonnée par un dipôle électrique et un dipôle magnétique. On peut se poser bien sûr la question du sens de ce problème. Nous avons supposé, pour établir cette expression de la puissance, que le dipôle électrique était strictement nul. On peut cependant imaginer deux répartitions de courant, ayant la même extension spatiale et les mêmes courants caractéristiques, mais des propriétés de symétrie telles que l'une ait un dipôle électrique et l'autre seulement un dipôle magnétique. Si cette démarche peut paraître un peu artificielle pour des répartitions de courant macroscopiques, elle est bien justifiée pour le rayonnement d'atomes. Certaines transitions partagent en effet des fréquences et des "courants" équivalents mais correspondent à des symétries des orbitales mises en jeu telles que l'une se comporte comme un dipôle électrique et l'autre comme un dipôle magnétique. La puissance moyenne dipolaire électrique s'écrit:

$$\mathcal{P}^{de} = \frac{d_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 . \quad (2.30)$$

On en déduit alors

$$\frac{\mathcal{P}^{de}}{\mathcal{P}^{dm}} = \frac{c^2 d_0^2}{\mathcal{M}_0^2} . \quad (2.31)$$

Pour aller plus loin, il nous faut "comparer" l'amplitude des dipôles électriques et magnétiques, ce qui n'a de sens qu'en termes d'ordre de grandeur. Nous ne ferons donc qu'un raisonnement très qualitatif. On peut écrire symboliquement:

$$\mathbf{d}_0 = \int \mathbf{r}' \rho_0 d^3 \mathbf{r}' \quad (2.32)$$

$$\mathcal{M}_0 = \int \mathbf{r}' \mathbf{j}_0 d^3 \mathbf{r}' . \quad (2.33)$$

Mais  $\mathbf{j}_0$  est de l'ordre de  $\rho_0 \mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de déplacement des charges au point  $\mathbf{r}'$ . On voit bien tout le caractère qualitatif de ce raisonnement, qui ne tiendrait que si les deux dipôles étaient décrits précisément par la même distribution de courant, ce qui ne peut être le cas. En ordre de grandeur, néanmoins, on en déduit:

$$\mathcal{M}_0 \approx d_0 v \quad (2.34)$$

où  $v$  est un ordre de grandeur de la vitesse maximale des charges. On en déduit donc finalement:

$$\frac{\mathcal{P}^{de}}{\mathcal{P}^{dm}} \approx \left(\frac{c}{v}\right)^2. \quad (2.35)$$

Notons que ce résultat découle simplement de notre développement en puissances de  $r_0/\lambda$ . Cette quantité est en effet égale à  $r_0\omega/c$ , de l'ordre de  $v/c$ . Le terme dipolaire magnétique est donc, pour ce qui est des champs,  $v/c$  fois plus petit que le terme dipolaire électrique, d'où l'ordre de grandeur ci-dessus pour les puissances rayonnées.

Si les charges sont en mouvement à une vitesse faible par rapport à celle de la lumière, le rayonnement dipolaire magnétique est donc beaucoup moins efficace que le rayonnement dipolaire électrique. Si nous considérons par exemple les deux transitions atomiques évoquées plus haut, le rapport des puissances émises est de l'ordre de  $(1/\alpha)^2$  où  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$  est la constante de structure fine. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'énergie rayonnée doit être empruntée à l'énergie initiale de l'atome et la puissance rayonnée détermine la durée de vie d'un niveau radiatif. Nous voyons donc ainsi que la durée de vie d'un niveau ne pouvant rayonner que comme un dipôle magnétique est environ  $1/\alpha^2$  fois plus grande que la durée de vie d'un niveau "dipolaire électrique". Celle-ci étant de quelques nanosecondes (voir chapitre suivant), la durée de vie d'un niveau "dipolaire magnétique", toutes choses égales par ailleurs, est plutôt de la dizaine de microsecondes. Nous verrons à nouveau une illustration de cette différence entre dipôles électriques et magnétiques quand nous considérerons des rayonnements d'antennes. Notons pour finir que ce raisonnement prouve, s'il en était besoin, que le terme dipolaire électrique domine le terme dipolaire magnétique s'ils sont simultanément présents pour une même distribution de courants.

### Quadripôle électrique.

Nous allons maintenant traiter le terme  $\mathbf{A}_1^{qe}$  correspondant à la seconde ligne de l'équation (2.16). Il s'écrit donc

$$\mathbf{A}_1^{qe} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0 + \mathbf{r}'(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0)] d^3\mathbf{r}' \quad (2.36)$$

Nous allons essayer de transformer l'intégrande pour le mettre sous une forme plus agréable. En particulier, nous allons tenter de faire apparaître la densité de charge (nous verrons que le moment quadripolaire électrique est au moment dipolaire ce que le tenseur d'inertie est au centre de gravité). Pour effectuer ce calcul sans trop de peine, nous abandonnerons un temps les notations de l'analyse vectorielle standard. Nous aurons en effet à manipuler des quantités dyadiques (tensorielles de rang deux, en d'autres termes). Nous expliciterons donc les dérivées, en utilisant les conventions d'Einstein pour alléger les calculs.

L'intégrande apparaissant dans le potentiel vecteur s'écrit avec ces conventions:

$$\frac{1}{2} [u_j r'_j j_i + r'_i u_j j_j]. \quad (2.37)$$

L'intégration se faisant uniquement sur  $\mathbf{r}'$ , on peut donc écrire:

$$\int \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0 + \mathbf{r}'(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0)] d^3\mathbf{r}' \Big|_i = \frac{1}{2} (-i\omega) \mathcal{Q}_{ij} u_j, \quad (2.38)$$

avec

$$-i\omega \mathcal{Q}_{ij} = \int [j_i r'_j + j_j r'_i] d^3\mathbf{r}'. \quad (2.39)$$

Le facteur  $-i\omega$  a été introduit ici pour simplifier les calculs suivants. Pour expliciter le tenseur  $\mathcal{Q}$ , remarquons que:

$$\partial'_k (r'_i r'_j j_k) = \delta_{ki} r'_j j_k + \delta_{kj} r'_i j_k + r'_i r'_j (i\omega \rho), \quad (2.40)$$

où toutes les dérivées spatiales s'entendent par rapport à  $\mathbf{r}'$ . Nous avons utilisé l'équation de conservation de la charge, qui s'écrit ici  $\partial'_k j_k = i\omega\rho_0$ . On en tire immédiatement:

$$\int (j_i r'_j + j_j r'_i) d^3\mathbf{r}' = -i\omega \int (r'_i r'_j \rho_0) d^3\mathbf{r}' \quad (2.41)$$

puisque l'intégrale de  $\partial'_k (r'_i r'_j j_k)$ , intégrale d'une divergence sur tout l'espace, est manifestement nulle. Finalement, on a:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int r'_i r'_j \rho_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' , \quad (2.42)$$

que nous appellerons tenseur quadripolaire électrique (ce tenseur est évidemment symétrique). Nous noterons en effet que cette définition coïncide avec celle du quadripôle dans le cadre de l'électrostatique et soulignerons l'analogie avec le tenseur d'inertie en mécanique du solide.

Avec cette définition, les composantes du potentiel vecteur s'écrivent:

$$A_{1i}^{qe} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi 2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathcal{Q}_{ij} u_{rj} . \quad (2.43)$$

Plutôt que de conserver des expression faisant intervenir les composantes, nous pouvons définir le vecteur  $\mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_r$  comme le vecteur de composantes  $u_{rj} \mathcal{Q}_{ji}$ . Le potentiel vecteur s'écrivant alors:

$$\mathbf{A}_1^{qe} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi 2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_r . \quad (2.44)$$

Avant de discuter les propriétés des champs rayonnés, quelques remarques s'imposent. D'abord, nous avons ici introduit le quadripôle électrique de la manière la plus simple mais pas de la manière la plus commode pour les développements mathématiques. Il est fructueux de définir le quadripôle comme un tenseur symétrique de trace nulle (on consultera à ce sujet le Jackson). La définition "standard" du tenseur est en fait:

$$\mathcal{Q}'_{ij} = 3\mathcal{Q}_{ij} - \delta_{ij} \int r'^2 \rho_0 d^3\mathbf{r}' \quad (2.45)$$

dont la trace est évidemment nulle. A part un facteur trois, qui n'introduit que des différences algébriques mineures dans les expressions, ces deux définitions diffèrent par un terme diagonal dont les trois éléments sont égaux. Le potentiel vecteur correspondant à ce terme diagonal est manifestement colinéaire à  $\mathbf{u}_r$ . Son rotationnel est nul et les deux définitions conduisent aux mêmes champs rayonnés. Nous n'adopterons pas la convention la plus générale. En effet, nous ne traiterons guère en détails le rayonnement du quadripôle : il ne sera donc pas très gênant de travailler avec un tenseur de trace non nulle. Nous aurons en revanche intérêt à travailler avec la forme la plus simple possible.

Essayons d'imaginer maintenant des distributions de charge qui ne possèdent pas de dipôles électriques mais un quadripôle électrique. La plus simple, comme en électrostatique, est constituée de deux dipôles électriques oscillant en opposition de phase (amplitudes opposées) et placés à petite distance l'un de l'autre. Les deux contributions dipolaires s'annulent et il ne reste qu'une contribution quadripolaire que l'on pourra calculer à titre d'exercice. Une autre distribution quadripolaire est constitué d'une répartition de charge uniforme dont la forme évolue entre un ellipsoïde allongé selon  $Oz$  et un ellipsoïde aplati dans la même direction, en passant par la forme sphérique à mi-période. Pour des raisons de symétrie évidentes (symétrie par rapport au plan  $xOy$ ), cette distribution ne possède de moment dipolaire ni électrique ni magnétique. En raisonnant par analogie avec le moment d'inertie, on voit bien que cette distribution possède en revanche une composante oscillante non nulle du quadripôle électrique. Notons enfin, comme nous le verrons dans un prochain paragraphe, qu'une charge ponctuelle oscillant le long de  $Oz$  possède, en plus de son moment dipolaire électrique, un moment quadripolaire si l'extension du mouvement n'est pas négligeable.

Nous pouvons maintenant calculer les champs rayonnés. Nous utiliserons pour cela la structure locale d'onde plane. On trouve ainsi immédiatement:

$$\mathbf{B}^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\omega^3}{2c^2} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_r) \quad (2.46)$$

Le champ électrique s'en déduisant sans difficultés.

Avec les mêmes restrictions que pour le dipôle magnétique, nous pouvons, dans le cas où le rayonnement est purement quadripolaire électrique, écrire enfin le vecteur de Poynting en valeur moyenne temporelle:

$$\overline{\Pi}^{qe} = \frac{1}{128\pi^2\epsilon_0 c^5} \omega^6 \frac{|\mathbf{u}_r \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_r)|^2}{r^2} \quad (2.47)$$

Nous noterons que la dépendance en  $\omega$  est encore plus rapide que pour les rayonnements dipolaires.

Il est bien difficile de préciser davantage la structure de ces champs sans faire quelques hypothèses sur la structure du quadripôle électrique. Nous supposons donc que le seul élément non nul est  $Q_{zz} = Q_0$ . C'est le cas de la composante quadripolaire pour la charge oscillante. Pour la répartition ellipsoïdale, la symétrie impose seulement que les termes non diagonaux soient nuls. Elle impose aussi  $Q_{xx} = Q_{yy}$ . On peut alors retirer au quadripôle un terme diagonal ayant trois valeurs propres égales à  $Q_{xx}$ . Nous savons que cela ne change pas les champs rayonnés. En revanche, nous pouvons ainsi annuler tous les termes de la diagonale sauf  $Q_{zz}$ . La situation que nous décrivons maintenant, sans être tout à fait générale, n'en est pas moins importante.

Dans ce cas, nous avons simplement  $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{Q} = Q_0 \cos \theta \mathbf{u}_z$ . Nous pouvons alors réécrire sans difficultés (en utilisant  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z = -\sin \theta \mathbf{u}_\phi$ ) potentiel vecteur, champ magnétique et vecteur de Poynting moyens comme:

$$\mathbf{A}_1^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} Q_0 \cos \theta \mathbf{u}_z \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B}_1^{qe} = i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^3}{2c^2} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} Q_0 \cos \theta \sin \theta \mathbf{u}_\phi \quad (2.49)$$

$$\overline{\Pi}^{qe} = \frac{1}{128\pi^2\epsilon_0 c^5} \omega^6 Q_0^2 \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (2.50)$$

Comme pour le dipôle électrique, le champ magnétique est selon  $\mathbf{u}_\phi$  et ses lignes sont des cercles d'axe  $Oz$ . Le champ électrique est dans le plan défini par l'axe du quadripôle et la direction d'observation. Le diagramme de rayonnement du quadripôle est substantiellement différent de celui du dipôle. La puissance rayonnée s'annule aussi bien dans la direction  $Oz$  que sur le plan  $xOy$ . Le diagramme de rayonnement, en coupe dans un plan passant par  $Oz$ , se présente donc comme quatre lobes symétriques autour de l'origine<sup>4</sup>. Ce diagramme de rayonnement est représenté sur la figure 2.2.

Finalement, on peut obtenir la puissance totale rayonnée en intégrant le vecteur de Poynting sur une sphère de rayon  $r$  arbitraire (la dépendance en  $r$  disparaissant évidemment). L'intégration sur  $\phi$  est triviale et donne un simple facteur  $2\pi$ . On trouve donc:

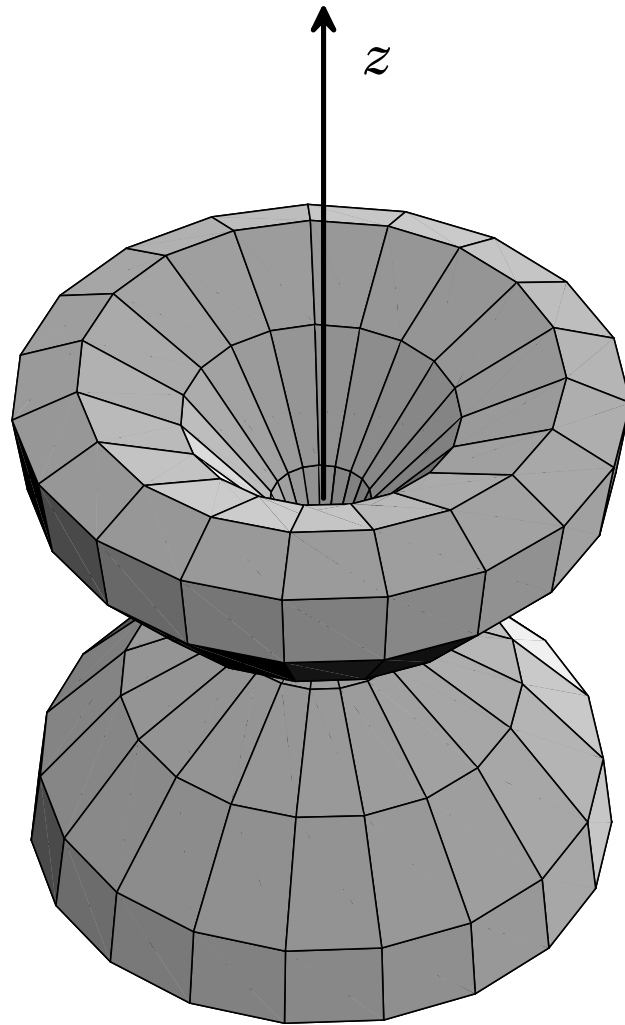
$$\mathcal{P}^{qe} = \frac{1}{64\pi\epsilon_0 c^5} \omega^6 Q_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.51)$$

L'intégrale sur  $\theta$  est facilement évaluée et vaut  $4/15$ . On a donc finalement:

$$\mathcal{P}^{qe} = \frac{\omega^6 Q_0^2}{240\pi\epsilon_0 c^5} \quad (2.52)$$

Nous noterons encore une fois la dépendance en  $\omega^6$  de la puissance émise. On peut comprendre qualitativement cette dépendance de plus en plus rapide. Plus nous progressons dans les ordres

<sup>4</sup>En termes d'harmoniques sphériques, le dipôle est associé à celle de moment cinétique total 1  $Y^1$ , qui présente deux lobes symétriques par rapport à l'origine, le quadripôle à l'harmonique sphérique de moment 2  $Y^2$



**Figure 2.2:** Diagramme du rayonnement d'un quadripôle n'ayant comme seul élément non nul que  $Q_{zz}$ . On note que le rayonnement est nul sur l'axe et dans un plan perpendiculaire à l'axe.

multipolaires, plus nous considérons des modulations subtiles de la répartition de charges. Toutes choses égales par ailleurs, plus la longueur d'onde rayonnée sera courte, plus les champs seront sensibles à ces très faibles dissymétries de la répartition de charges.

Comme nous l'avons fait pour le dipôle magnétique, et avec les mêmes restrictions sur la validité du calcul, nous pouvons maintenant comparer, toutes choses égales par ailleurs, les puissances dipolaires et quadripolaires électriques. On trouve immédiatement:

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{\omega^2 Q_0^2}{d_0^2} \frac{1}{20c^2} . \quad (2.53)$$

Dans un raisonnement en termes d'ordres de grandeur, on peut approcher  $d_0$  par le produit  $qr_0$  de la charge totale par l'extension spatiale des courants. Dans ce cas,  $Q_0$  est de l'ordre de  $qr_0^2$ . On a donc finalement:

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{k^2 r_0^2}{20} . \quad (2.54)$$

A part le facteur numérique  $1/20$ , cette expression était tout à fait prévisible. N'oublions pas que les termes dipolaires électriques et quadripolaires électriques apparaissent comme deux termes successifs dans un développement en puissances de l'extension de la source rapportée à  $\lambda$ . Les champs sont, à chaque ordre, multipliés par un facteur  $kr_0$  et les puissances par un facteur  $k^2 r_0^2$ . Le rayonnement quadripolaire est donc beaucoup moins efficace que le rayonnement dipolaire si l'extension de la source est très petite devant  $\lambda$ . Si nous considérons encore deux niveaux atomiques se désexcitant par des transitions en tous points comparables, l'une dipolaire et l'autre quadripolaire, le rapport des puissances émises et donc des durées de vie sera de l'ordre de  $(a_0/\lambda)^2$ , où  $a_0$  est le rayon de Bohr. Ce rapport est numériquement de l'ordre de  $10^{-8}$ . Les niveaux quadripolaires électriques ont une durée de vie  $10^7$  à  $10^9$  fois plus grande que ceux qui se désexcitent comme un dipôle électrique. Les durées de vie de ces niveaux "métastables" peuvent atteindre la fraction de seconde. La raie associée à ces transitions est alors très fine, fort intéressante pour la métrologie de fréquence dans le domaine optique.

Nous pourrions poursuivre encore plus loin le développement multipolaire. A l'ordre suivant, nous pourrions distinguer deux contributions: le quadripôle magnétique (modélisé par exemple par deux spires parcourues par des courants oscillants en opposition de phase) dont le rayonnement est très similaire à celui du quadripôle électrique et l'octupôle électrique (deux quadripôles voisins en opposition de phase). En fait, l'étude systématique des moments dipolaires d'ordre élevé doit être entreprise avec des techniques dérivées de la théorie des groupes.

## 2.3 Applications: quelques problèmes de rayonnement

Nous allons dans ce paragraphe appliquer les développements multipolaires à l'étude du rayonnement de quelques sources simples. Nous commencerons par étudier le rayonnement d'une charge oscillante en ne faisant plus l'hypothèse, comme au chapitre précédent, que l'amplitude du mouvement est négligeable. Nous pourrions ainsi préciser la validité des hypothèses utilisées pour le rayonnement du dipôle et voir quelles corrections il y a lieu d'apporter quand ces hypothèses ne sont plus valables. Nous aborderons très brièvement ensuite le très riche problème des antennes. Il est si vaste — des manuels entiers lui sont consacrés — que nous ne pourrions traiter très brièvement que deux exemples: l'antenne dipolaire électrique et l'antenne dipolaire magnétique.

### 2.3.1 Rayonnement d'une charge oscillante

Les notations et le problème sont ceux du dernier paragraphe du chapitre précédent. Une charge  $q$  est animée d'un mouvement harmonique d'amplitude  $a$  et de fréquence  $\omega$  le long de l'axe  $Oz$ . Nous ne nous préoccupons que du champ rayonné. Tous les résultats précédents étant acquis, le seul problème



est de déterminer les différents éléments de la source: dipôle électrique et magnétique, quadripôle électrique.

De façon rigoureuse, le courant associé à la particule peut s'écrire:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -qa\omega \sin \omega t \delta(x') \delta(y') \delta(z' - a \cos \omega t) \mathbf{u}_z . \quad (2.55)$$

C'est simplement le produit de la charge par la vitesse de la particule, localisé à la position de la particule. Notons que nous utilisons ici, pour un temps, des notations réelles pour les quantités oscillantes et que nous nous intéressons au courant complet, pas seulement à une amplitude d'oscillation. Dans le chapitre précédent, nous avons supposé le courant localisé à l'origine et remplacé donc la dernière fonction  $\delta$  par  $\delta(z')$ . Pour aller plus loin, nous pouvons réaliser un développement de Taylor de cette dernière fonction  $\delta$  dont les deux premiers termes nous donneront l'essentiel de la physique si l'étendue du mouvement n'est pas trop grande. Nous écrirons donc:

$$\delta(z' - a \cos \omega t) = \delta(z') - a \cos \omega t \delta'(z') + \dots . \quad (2.56)$$

Un tel développement de Taylor d'une "fonction" aussi singulière peut paraître hasardeux. On peut se rassurer un peu en montrant l'identité de l'action de la distribution initiale et du développement sur une fonction régulière  $f(z')$ . Avec les notations de la théorie des distributions, nous avons en effet:

$$\langle \delta(z' - a \cos \omega t) | f \rangle = f(a \cos \omega t) = f(0) + f'(0) a \cos \omega t + \dots , \quad (2.57)$$

puisque  $f$ , régulière en zéro, peut être développée en série de Taylor. Sachant que  $\langle \delta' | f \rangle = -f'(0)$ , on reconnaît sans difficulté dans le second membre l'action de la distribution "développée". En nous limitant aux deux premiers termes, nous écrirons donc

$$\mathbf{j} = -qa\omega \sin \omega t \delta(\mathbf{r}') + qa^2\omega \sin \omega t \cos \omega t \delta(x') \delta(y') \delta'(z') . \quad (2.58)$$

Dans le premier terme du second membre, nous reconnaissons bien sûr le courant localisé à l'origine que nous avons utilisé en première approximation. Le second terme, lui, est clairement un courant oscillant à la fréquence  $2\omega$ . Contrairement à ce qu'on aurait pu penser de prime abord, les termes correctifs ne sont pas à la fréquence fondamentale, mais à ses harmoniques.

Nous écrirons donc finalement:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 e^{-i\omega t} + \mathbf{j}_2 e^{-2i\omega t} , \quad (2.59)$$

avec

$$\mathbf{j}_1 = -iqa\omega \delta(\mathbf{r}') \mathbf{u}_z \quad (2.60)$$

$$\mathbf{j}_2 = i \frac{qa^2\omega}{2} \delta(x') \delta(y') \delta'(z') \mathbf{u}_z \quad (2.61)$$

et nous examinerons brièvement ces deux termes.

$\mathbf{j}_1$  est le courant du dipôle. Le moment dipolaire magnétique ferait intervenir des intégrales de  $x\delta(x)$  (ou de cette forme) qui sont identiquement nulles. Pour estimer le dipôle et le quadripôle électriques, il nous faut la densité de charges. A partir de l'équation de continuité, nous trouvons:

$$\rho_1(\mathbf{r}') = -qa\delta(x') \delta(y') \delta'(z') \quad (2.62)$$

Les composantes  $x$  et  $y$  du dipôle électrique font intervenir aussi des intégrales de type  $x\delta(x)$  qui sont nulles. Seule la composante selon  $z$  est non nulle et le dipôle s'écrit (en notant que  $\int z\delta'(z) = -1$ ):

$$\mathbf{d}_1 = qa\mathbf{u}_z , \quad (2.63)$$

un résultat que nous aurions certainement pu prédire directement. Toutes les composantes du tenseur quadripôle électrique qui font intervenir une composante  $x$  ou  $y$  sont nulles. Elles contiennent en

effet des intégrales de  $x\delta(x)$  ou  $x^2\delta(x)$  qui sont nulles. La composante  $Q_{zz}$  est proportionnelle à  $\int z'^2\delta'(z')dz'$ . Elle est également nulle. Ce courant est donc un pur dipôle électrique (le même genre d'arguments peut être utilisé pour montrer que tous les autres termes du développement multipolaire sont nuls).

$\mathbf{j}_2$  ne peut, lui non plus, correspondre à un dipôle magnétique. Les moments dipolaire et quadripolaire s'obtiennent à partir de la densité de charges qui s'écrit :

$$\rho_2 = -\frac{i}{2\omega}\nabla \cdot \mathbf{j}_2 = \frac{qa^2}{4}\delta(x')\delta(y')\delta''(z') . \quad (2.64)$$

Comme pour  $\rho_1$ , les composantes  $x$  et  $y$  du dipôle sont manifestement nulles. La composante  $z$  fait intervenir l'intégrale  $\int z'\delta''(z')$  qui est nulle, comme on pourra s'en convaincre par une intégration par parties. Pour le quadripôle, toutes les composantes faisant intervenir  $x$  ou  $y$  sont identiquement nulles. Seule la composante  $Q_{zz}$  peut être non nulle. On a effectivement :

$$Q_{zz} = \frac{qa^2}{4} \int z'^2\delta''(z') dz' . \quad (2.65)$$

Une double intégration par parties prouve que  $\int z'^2\delta''(z') dz' = 2$ . On a donc finalement :

$$Q_{zz} = \frac{qa^2}{2} . \quad (2.66)$$

Le courant  $\mathbf{j}_2$  correspond donc à un pur quadripôle électrique (on pourrait montrer qualitativement que tous les termes d'ordre supérieur sont identiquement nuls).

Les champs dipolaires électriques et quadripolaires électriques étant à des fréquences différentes, il n'y a pas, dans le calcul de la puissance totale rayonnée en valeur moyenne temporelle, de termes croisés et on peut écrire  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{de} + \mathcal{P}^{qe}$ . On peut remarquer que, conformément aux ordres de grandeur qualitatifs des paragraphes précédents,

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{k^2 a^2}{80} \quad (2.67)$$

On vérifie ainsi que notre première approximation, consistant à négliger la composante quadripolaire électrique à  $2\omega$  est largement justifiée, même pour des extensions du mouvement voisines de  $\lambda$ .

### 2.3.2 Antennes

Le problème des antennes est d'une importance technologique majeure. Il s'agit en effet, pour optimiser les communications, de rayonner la plus grande puissance possible, avec le meilleur rendement vis à vis de la puissance fournie par les générateurs. On cherche souvent aussi à optimiser les propriétés de polarisation de la lumière émise. Pour une propagation au voisinage de la surface terrestre, conductrice, une polarisation verticale est indispensable. On peut enfin chercher à optimiser le diagramme de rayonnement, avec des réseaux d'antennes par exemple, pour que toute la puissance émise le soit dans la direction utile. Le problème est si vaste qu'il est hors de question de le traiter ici de manière complète. De plus, la caractérisation complète d'une antenne de géométrie donnée est un problème formidablement complexe. Déterminer le rayonnement, c'est d'abord déterminer les courants dans l'antenne. Ces courants dépendent des générateurs mais aussi des champs produits par l'antenne elle-même. Le courant doit donc a priori être déterminé de façon "self consistante" en tenant compte de cette réaction de rayonnement. On peut utiliser pour cela une résolution explicite des équations de Maxwell (éventuellement numérique) ou des méthodes de perturbations. Nous nous contenterons ici de la première étape de ces calculs en postulant une forme simple pour les courants dans l'antenne.

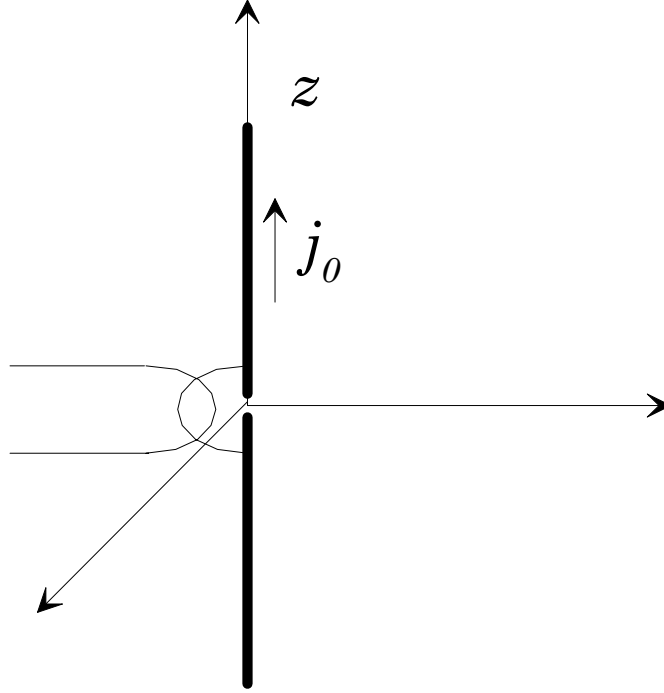


Figure 2.3: Antenne dipolaire électrique

### Antenne dipolaire électrique

La première antenne que nous considérerons est constituée d'un simple fil rectiligne, de longueur  $\ell$ , aligné avec l'axe  $Oz$ , symétrique par rapport à  $O$ . Ce genre d'antenne est effectivement très largement utilisé, tant en réception qu'en émission. Dans la pratique, ce genre d'antennes est attaqué par un secondaire de transformateur haute fréquence situé en série avec l'antenne au voisinage de  $O$ . Le courant circule donc alternativement dans les directions positives et négatives de l'axe. De manière évidente, le courant s'annule aux extrémités de l'antenne. Il est assez naturel et sans doute assez réaliste de postuler une répartition de courant sinusoïdale le long de l'antenne et d'écrire l'amplitude complexe du courant:

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = I_0 \cos \frac{\pi z'}{\ell} \delta(x') \delta(y') \mathbf{u}_z, \quad (2.68)$$

pour  $-\ell/2 \leq z' \leq \ell/2$ , le courant étant nul ailleurs. Les deux fonctions  $\delta$  servant à localiser le courant sur l'axe. Il est évident dès l'abord qu'une telle distribution de courant ne possède pas de moment dipolaire magnétique (ce que l'on pourra vérifier par un calcul explicite). Si le moment dipolaire est non nul, c'est lui qui dominera le rayonnement. Pour l'estimer, nous allons calculer la densité de charges:

$$\rho_0 = -\frac{i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = \frac{i I_0 \pi}{\omega \ell} \sin \frac{\pi z'}{\ell} \delta(x') \delta(y'). \quad (2.69)$$

Les composantes selon  $x$  et  $y$  du moment dipolaire sont nulles, puisqu'elles font intervenir des intégrales du type  $x' \delta(x')$ . Le dipôle est aligné selon  $Oz$ , comme l'indique la symétrie de l'antenne. Il vaut:

$$\mathbf{d}_0 = d_0 \mathbf{u}_z, \quad (2.70)$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{i I_0 \pi}{\omega \ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z' \sin \frac{\pi z'}{\ell} dz' \\ &= \frac{2i I_0 \ell}{\omega \pi} \end{aligned} \quad (2.71)$$

A moins que l'antenne ne soit très longue par rapport à  $\lambda$ , le rayonnement dipolaire domine et la puissance moyenne rayonnée vaut:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \left( \frac{2I_0 \ell}{\pi \omega} \right)^2 = \frac{I_0^2 \omega^2 \ell^2}{3\pi^3 \epsilon_0 c^3} . \quad (2.72)$$

Cette puissance est directement proportionnelle au carré de l'amplitude du courant qui passe dans l'antenne. Il est donc naturel de comparer cette puissance rayonnée à la puissance qui serait dissipée, en valeur moyenne, par le même courant circulant dans une résistance. La résistance équivalente à l'antenne, encore appelée résistance de rayonnement,  $R_{\text{rad}}$ , est finalement définie par:

$$\mathcal{P} = \frac{I_0^2}{2} R_{\text{rad}} . \quad (2.73)$$

Après quelques manipulations, on trouve:

$$R_{\text{rad}} = \frac{8}{3\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (2.74)$$

$$= 319 \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \Omega . \quad (2.75)$$

La résistance de rayonnement est une quantité très importante pour caractériser une antenne. Si on désire assurer la meilleure utilisation de la puissance fournie par les générateurs, il faut en effet réaliser une *adaptation d'impédance* entre le générateur et l'antenne: le rapport de la puissance dissipée dans l'antenne à la puissance dissipée dans la résistance interne du générateur est maximum quand la résistance équivalente de l'antenne est égale à la résistance interne, ou plutôt à l'impédance de sortie, du générateur. Pour une antenne dite "demi-onde", par exemple, telle que  $\ell = \lambda/2$ , la résistance de rayonnement vaut  $319/4 = 79 \Omega$ . On comprend ainsi pourquoi les impédances de sortie des amplificateurs et les impédances itératives des câbles coaxiaux utilisés pour le branchement des antennes sont de  $75 \Omega$ . Notons que l'antenne demi-onde est très favorable, la longueur du fil étant alors parfaitement adaptée à une structure d'onde stationnaire du courant sur l'antenne. En fait, l'antenne toute entière est une structure résonnante, au voisinage d'une fréquence correspondant à  $\ell = \lambda/2$ , avec des nœuds de courant aux deux extrémités et un ventre au centre. Une antenne quart d'onde, elle, serait résonnante à condition d'être attaquée par le transformateur à une extrémité (on aurait alors un ventre de courant à cette extrémité et un nœud à l'autre). On mesure là l'efficacité des antennes dipolaires électriques: un courant de  $0.15A$  suffit à rayonner une puissance de l'ordre du Watt. Le calcul que nous avons fait ici est bien sûr fondé sur un modèle particulier de la répartition de courant dans l'antenne qui pourrait s'avérer inexact. On pourra, à titre d'exercice, faire le calcul pour d'autres répartitions, par exemple pour un courant variant linéairement le long de l'antenne. On s'apercevra alors que seul change le facteur numérique devant la résistance de rayonnement, l'ordre de grandeur restant le même.

### Antenne dipolaire magnétique

La deuxième antenne que nous considérerons est représentée sur la figure 2.4. Il s'agit d'une simple spire de courant circulaire, de rayon  $r_0$ , située dans le plan  $xOy$ . Le courant, amené par deux fils parallèles (que l'on pourra supposer confondus et qui ne jouent donc aucun rôle dans le rayonnement), sera supposé constant sur toute la spire et égal à  $I_0 \exp(-i\omega t)$  (c'est une hypothèse vraisemblable si la longueur de la spire est petite devant la longueur d'onde). En coordonnées sphériques, la densité de courant pourra s'écrire:

$$\mathbf{j}_0 = (I_0/r_0) \delta(r' - r_0) \delta(\theta - \pi/2) \mathbf{u}_\phi . \quad (2.76)$$

Les fonctions  $\delta$  localisent bien le courant sur le cercle. Le facteur  $r_0$  est introduit pour donner à  $j_0$  la dimension d'un courant par unité de surface (rappelons que la fonction  $\delta(r' - r_0)$  à la dimension

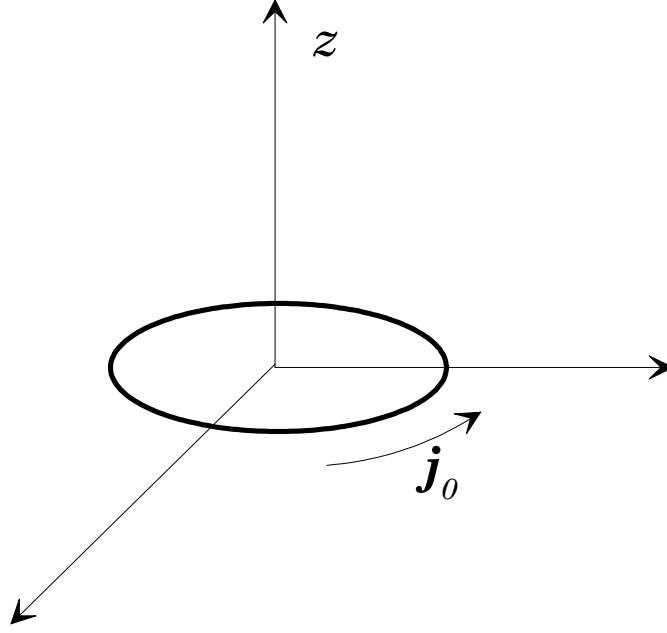


Figure 2.4: Antenne dipolaire magnétique

de l'inverse d'une longueur, alors que la fonction de dirac de l'angle est sans dimension). Finalement, comme on pourra s'en convaincre aisément, ce facteur  $r_0$  assure bien que l'intensité totale circulant dans le circuit ait une amplitude  $I_0$ .

Pour estimer les moments dipolaires et quadripolaires électriques, il nous faut la densité de charges. Il est évident que la divergence du courant est nulle: il est orienté selon  $\mathbf{u}_\phi$  et ne dépend pas de  $\phi$ . Il n'y a donc aucun moment multipolaire de nature électrique à aucun ordre. S'il n'est pas nul, le moment dipolaire magnétique dominera le rayonnement. On peut l'écrire facilement:

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0 d^3\mathbf{r}' . \quad (2.77)$$

En remarquant que  $\mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0$  est toujours orienté selon  $\mathbf{u}_z$ , on voit qu'il en est de même pour le moment magnétique. On peut donc écrire la composante  $z$  du moment sous la forme:

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int r^3 dr \sin \theta d\theta d\phi \frac{I_0}{r_0} \delta(r' - r_0) \delta(\theta - \pi/2) . \quad (2.78)$$

L'intégrale sur  $\phi$  donne un facteur  $2\pi$ , l'intégrale sur  $r_0$  revient simplement à faire  $r' = r_0$ . Finalement, l'intégrale sur  $\theta$  donne 1. On a donc, sans surprises:

$$\mathcal{M}_0 = \pi r_0^2 I_0 \mathbf{u}_z . \quad (2.79)$$

Il est facile à partir de là de calculer la puissance rayonnée et la résistance de rayonnement, définie comme au paragraphe précédent. On trouve:

$$\mathcal{P} = \frac{\pi r_0^4 I_0^2 \omega^4}{12 \epsilon_0 c^5} \quad (2.80)$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{8\pi^5}{2\epsilon_0 c} \left( \frac{r_0}{\lambda} \right)^4 \quad (2.81)$$

$$= 160 \left( \frac{r_0}{\lambda} \right)^4 \text{ k}\Omega . \quad (2.82)$$

La résistance de rayonnement croît beaucoup plus vite avec la taille que pour l'antenne dipolaire électrique. A taille égale, l'antenne magnétique est beaucoup plus résistive. Elle est donc plus difficile à exciter, ce qui explique son faible emploi sauf pour des communications à très basses fréquences. On peut comprendre qualitativement cette forte résistance. Si l'antenne dipolaire était équivalente à une très faible inductance (celle du fil) en série avec une très faible capacité (encore celle du fil), l'antenne magnétique présente une inductance élevée, la rendant très résistive à haute fréquence.

## Chapitre 3

# Sources atomiques de rayonnement

Nous allons dans ce chapitre appliquer les résultats précédents au rayonnement des sources fondamentales que sont les atomes. En fait, nous nous poserons essentiellement deux problèmes. Le premier est celui de l'émission spontanée. Un atome excité, par absorption d'un photon ou collision électronique dans une décharge, passe dans un niveau d'énergie excité. Un simple examen d'une lampe au sodium nous apprend qu'il réémet cette énergie sous forme lumineuse. Est-il possible de préciser les constantes de temps de ce phénomène, c'est à dire la durée de vie des niveaux atomiques excités? L'autre problème, d'une importance pratique aussi considérable, est celui de la diffusion de lumière par les atomes. Quand un atome est placé dans une onde incidente, il acquiert un dipôle à la même fréquence et rayonne. C'est ce phénomène de diffusion qui est, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, à l'origine du bleu du ciel. Peut on comprendre cette diffusion atomique?

Nous essaierons d'abord de comprendre émission spontanée et diffusion dans un modèle complètement classique de l'atome, le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. Chaque atome est alors assimilé à un oscillateur harmonique chargé ne possédant qu'une fréquence de résonance. C'est bien sûr un modèle très naïf comparé à ce que nous savons de la structure atomique. En revanche, sa simplicité nous permettra de calculer explicitement une durée de vie radiative et de traiter complètement le problème de la diffusion. Nous verrons en particulier comment l'efficacité de diffusion varie quand l'onde excitatrice passe à résonance avec la fréquence propre de l'oscillateur. De manière surprenante, nous verrons que les ordres de grandeur déduits de ce modèle paraissent tout à fait convenables.

Dans le deuxième paragraphe, nous tenterons de donner un modèle semi-classique. Nous traiterons l'atome de manière quantique (nous nous limiterons, pour des raisons évidentes de simplicité, à des structures hydrogénoïdes). Nous comprendrons rapidement que l'émission spontanée ne peut être décrite dans ce cadre. En l'absence de tout rayonnement incident, les niveaux stationnaires ont bien sûr une durée de vie infinie. En fait, l'émission spontanée ne peut être traitée rigoureusement que dans un modèle complètement quantique, où le champ, comme l'atome, est quantifié. Ce modèle inclut en particulier les fluctuations de point zéro du champ électromagnétique, souvent appelées "fluctuations du vide", et prédit l'instabilité des niveaux atomiques autres que le fondamental (qui, lui, fort heureusement, reste stable). Nous nous contenterons donc de traiter le problème de la diffusion de rayonnement. Nous verrons qu'il peut être explicitement traité dans deux cas. Le premier correspond à une onde incidente qui n'est résonnante avec aucune des fréquences propres (des fréquences de Bohr) de l'atome. Comme nous ne pourrions pas traiter l'émission spontanée, nous ne décrirons pas correctement l'amortissement du mouvement électronique et nous nous heurterons à des divergences si la fréquence d'excitation s'approche d'une résonance atomique. L'autre cas que nous pourrions explicitement traiter correspond au cas d'une onde incidente strictement résonante avec une transition atomique, à condition qu'on puisse alors négliger l'influence de toutes les autres fréquences propres. Nous montrerons alors qu'on peut éliminer les divergences et calculer explicitement l'évolution atomique.

En traitant la diffusion non résonnante par un atome quantique, nous nous apercevrons que les

résultats sont en fait essentiellement identiques à ceux du modèle naïf de l'électron élastiquement lié. Nous donnerons ainsi à ce modèle une validité beaucoup plus solide que celle que nous aurions pu lui attribuer de prime abord. En fait, dans toute la suite de ce cours, quand nous aurons par exemple à traiter de la propagation dans un milieu matériel, c'est ce modèle que nous utiliserons.

Nous appliquerons enfin, dans le troisième paragraphe, ces résultats au problème de la diffusion par un milieu comprenant un grand nombre d'atomes. Ces atomes étant décrits à ce stade par leur seule polarisabilité, les résultats de ce paragraphe s'appliqueront en fait à n'importe quel modèle de centres diffuseurs (atome classique, atome semi-classique, électrons libres...). Nous tenterons en particulier de comprendre pourquoi les solides transparents diffusent beaucoup moins que les gaz, alors qu'ils sont notablement plus denses. Nous montrerons que le champ diffusé est simplement relié à la transformée de Fourier des variations de densité du milieu. Nous pourrions ainsi examiner la diffusion par un milieu homogène dense, par un cristal avec une séparation entre atomes de l'ordre de la longueur d'onde, et enfin la diffusion par un milieu désordonné comme un gaz.

## 3.1 Modèle de Thomson

### 3.1.1 Modèle de l'électron élastiquement lié.

Nous considérerons donc un modèle extrêmement simpliste d'atome: un seul électron, lié par une force harmonique isotrope. Ce modèle a connu une certaine faveur au tournant du siècle (on consultera pour une approche historique plus détaillée l'appendice sur le modèle de Bohr dans la première partie de ce cours). Il était assez naturel d'essayer de comprendre les fréquences discrètes rayonnées ou absorbées par les atomes en termes de résonances d'oscillateurs harmoniques. Les expériences de Rutherford n'existaient pas encore. Il n'y avait donc aucune raison de postuler une structure planétaire pour l'atome (nous avons montré de plus qu'un modèle planétaire serait nécessairement instable). En revanche, des coïncidences (très imparfaites et accidentelles) entre les raies de l'hydrogène et les harmoniques élevés d'une fréquence fondamentale pouvaient suggérer que les raies observées étaient les harmoniques de la fréquence de résonance d'un oscillateur.

Le modèle de Thomson<sup>1</sup> (dit encore modèle du "plum-pudding") s'appuyait sur cette interprétation. On considère l'atome comme constitué d'une "gelée" positive, uniformément chargée, portant une charge totale unité. Dans cette "gelée", un électron unique se déplace librement. Le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée étant, à l'intérieur de la sphère, linéaire en fonction de la distance au centre, l'électron se trouve lié par une force harmonique (force centrale proportionnelle à la distance). Nous laisserons au lecteur le soin de calculer la constante de force et la fréquence d'oscillation en fonction du rayon de la sphère. En prenant un rayon de la sphère de l'ordre de l'Ångström, on trouve effectivement une fréquence de résonance dans le domaine optique. On peut montrer aussi que l'ordre de grandeur de l'énergie nécessaire pour arracher l'électron est de l'ordre des énergies d'ionisation typiques. Enfin, on peut utiliser ce modèle pour calculer, comme nous allons le faire à différents endroits de ce cours, les indices de réfraction ou susceptibilités diélectriques typiques. Nous verrons que, là encore, au moins en ordres de grandeur, ce modèle était raisonnable. Il a en fait tenu jusqu'à la révélation d'un noyau pratiquement ponctuel dans la structure atomique. Le modèle de la gelée positive devenait alors intenable. Le modèle planétaire était le seul possible. Sa stabilité ne pouvant être comprise dans le cadre de la mécanique classique, il a suscité alors une crise scientifique majeure qui ne fut totalement résolue qu'en 1926 avec la découverte de la mécanique ondulatoire par Schrödinger et de la mécanique des matrices par Heisenberg.

Nous ne nous occuperons pas des détails du modèle de Thomson dans ce cours. Nous considérerons seulement un électron de masse  $m$  et de charge  $q = -e$  ( $e > 0$ ) harmoniquement lié à un centre fixe avec une fréquence propre d'oscillation  $\omega_0$ . Avec ces conditions, l'équation de mouvement de l'électron

<sup>1</sup>Thomson est connu comme découvreur de l'électron, en 1897. En fait, Wiechert (celui des potentiels de Liénard), a joué un rôle au moins aussi important dans la découverte de la nature corpusculaire des rayons cathodiques.



s'écrit alors:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 , \quad (3.1)$$

$\mathbf{r}$  étant la position de l'électron par rapport au centre de forces. A cette équation, il conviendra d'ajouter la contribution de la force de réaction de rayonnement. En première approximation, la solution de cette équation est bien sûr une évolution harmonique de  $\mathbf{r}$  selon les trois axes. La trajectoire de l'électron est dans le cas le plus général une ellipse centrée à l'origine. "L'état fondamental" de ce système correspond bien sûr à un électron immobile à l'origine.

### 3.1.2 Emission spontanée

Nous tenterons dans ce paragraphe de modéliser l'émission spontanée. Nous supposons que, à l'instant origine, l'électron initialement au repos est mis en mouvement. Dans une lampe à décharge, ce mouvement serait dû à une collision avec un des électrons libres de la décharge. Nous supposons, pour simplifier les calculs sans beaucoup restreindre la généralité, que le mouvement de l'électron est ensuite linéaire, orienté de long de l'axe  $Oz^2$ . Cet électron oscillant se comporte comme un dipôle. Les ordres de grandeur du modèle montrent en effet que l'extension du mouvement (au plus de l'ordre du diamètre de la sphère chargée, c'est à dire de l'ordre de l'Ångström) est très petite devant la longueur d'onde rayonnée (de l'ordre du micron). Il est alors aisé de calculer, en utilisant les résultats du premier chapitre, la puissance rayonnée par l'électron:

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 z_0^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} , \quad (3.2)$$

où  $z_0$  est l'amplitude du mouvement. Dans notre modèle, l'énergie rayonnée ne peut provenir que de l'énergie mécanique de l'électron. Cette énergie est donc une fonction décroissante du temps: le mouvement de l'électron doit s'amortir.

L'amortissement du mouvement de l'électron, lent devant la période, peut être décrit au moyen de la force de réaction de rayonnement  $f = m\tau\dot{a}$ . En incluant cette force, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \tau \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 , \quad (3.3)$$

où  $\tau$  est le temps caractéristique de la réaction de rayonnement défini plus haut. On peut aisément trouver les fréquences propres de cette équation, sous forme d'un développement en termes de  $\eta = \omega_0\tau$ . Ce paramètre est effectivement, pour une transition optique ordinaire, de l'ordre de  $10^{-10}$  (on rappelle que l'ordre de grandeur de  $\tau$  est  $10^{-24}$  s). En portant dans l'équation du mouvement une solution en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$  et en posant:

$$\omega = \omega_0(1 + x) , \quad (3.4)$$

on met l'équation caractéristique sous la forme:

$$-(1+x)^2 - i\eta(1+x)^3 + 1 = 0 . \quad (3.5)$$

Au premier ordre non nul, on trouve donc

$$x = -i\frac{\eta}{2} . \quad (3.6)$$

On peut alors écrire

$$\omega = \omega_0(1 - i\frac{\eta}{2} + y) , \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>On pourra, à titre d'exercice, considérer le cas général en superposant des mouvements d'amplitudes et de phases arbitraires le long des trois axes.

où  $y$  est du second ordre en  $\eta$ . En reportant cette forme dans l'équation caractéristique et en identifiant les termes d'ordre 2, on trouve:

$$y = -\frac{5\eta^2}{8} . \quad (3.8)$$

La seule solution physiquement acceptable à l'ordre 2 en  $\eta$  peut donc s'écrire:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega - i\gamma/2 . \quad (3.9)$$

Le terme

$$\Delta = -\frac{5}{8}\eta^2\omega_0 \quad (3.10)$$

correspond à un déplacement de fréquence. Il est, comme nous le verrons, tout à fait négligeable. Le terme imaginaire correspond, comme nous l'attendions, à un amortissement du mouvement. L'énergie mécanique, proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement, est amortie exponentiellement avec un taux  $\gamma$  (et une constante de temps  $T = 1/\gamma$ ) égal à:

$$\gamma = \omega_0\eta = \omega_0^2\tau = \frac{q^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0\hbar mc^2} . \quad (3.11)$$

Une manifestation expérimentale de cette décroissance exponentielle est que le spectre de fluorescence d'un ensemble d'atomes ait une forme lorentzienne. Le spectre étant relié à la transformée de Fourier de la réponse temporelle<sup>3</sup>, celle-ci, transformée de Fourier d'une Lorentzienne, est une exponentielle. On peut bien sûr maintenant accéder aussi, directement, à la réponse temporelle avec une électronique modérément rapide. Un des grands mérites de ce modèle très simplifié est donc de prédire correctement l'émission de lumière par des atomes excités ou émission spontanée.

Estimons l'ordre de grandeur de la durée de vie radiative  $T$  et du taux d'émission spontanée  $\gamma$  (notons que nous avons déjà effectué un calcul semblable dans les paragraphes sur la réaction de rayonnement avec un modèle différent d'orbites circulaire. Sans surprises, les ordres de grandeur relatifs aux deux modèles sont similaires). Pour cela, nous calculerons le rapport  $\gamma/\omega_0$ , l'inverse du "facteur de qualité" de l'oscillateur harmonique. Ce rapport est proportionnel à la fréquence du rayonnement  $\omega_0$ . Pour un ordre de grandeur, nous allons utiliser les fréquences prédites par le modèle de Bohr, décrit en détails dans l'appendice de la première partie de ce cours. Assez bizarrement, nous mêlons ainsi des arguments du modèle planétaire de la "première théorie quantique" de 1913 avec le modèle, incompatible, de l'électron élastiquement lié. Rien, a priori, ne fixant la fréquence de résonance dans le modèle de Thomson, il nous faut bien utiliser les valeurs expérimentales, qui sont correctement prédites par le modèle de Bohr. La fréquence est donc de l'ordre de la constante de Rydberg divisée par la constante de Planck,  $R/\hbar$ . La constante de Rydberg, elle même, est de l'ordre de:

$$R = \frac{1}{2}mc^2\alpha^2 , \quad (3.12)$$

produit, à un facteur deux près (dont l'origine peut être reliée au théorème du viriel), de l'énergie de masse de l'électron par le carré de la "constante de structure fine"  $\alpha$  définie par:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\hbar c} . \quad (3.13)$$

En portant cette expression de l'ordre de grandeur de la fréquence atomique dans le facteur de qualité, nous trouvons:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \omega_0\tau = \frac{R\tau}{\hbar} = \frac{q^2mc^2\alpha^2}{12\pi\epsilon_0\hbar mc^2} = \frac{\alpha^3}{3} . \quad (3.14)$$

---

<sup>3</sup>En fait le spectre est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ émis, qui se rapporte à la réponse temporelle pour une excitation impulsionnelle.

Nous trouvons ainsi un résultat très simple (mais certainement pas inattendu): le facteur de qualité typique d'un oscillateur atomique est de l'ordre de l'inverse du cube de la constante de structure fine. Numériquement, il est donc de l'ordre de  $10^7$ . La fréquence d'une transition atomique étant, dans le domaine visible, de l'ordre de  $10^{15}$  Hz, le taux d'émission spontanée est de l'ordre de  $10^8 \text{ s}^{-1}$ . La durée de vie radiative d'un atome excité est donc de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. La valeur expérimentale pour la fameuse raie jaune du sodium (en fait un doublet de structure fine à 589 et 589.6 nm) est de 16 ns, correspondant à une largeur de la raie de l'ordre de 10 MHz. Notre modèle, de façon un peu surprenante, est plus que raisonnable<sup>4</sup>.

Estimons maintenant le déplacement de fréquence  $\Delta\omega$ . Il est facile de voir que:

$$\Delta\omega = -\frac{5}{8}\eta\gamma. \quad (3.15)$$

Il ne vaut qu'une fraction de Hertz et il est donc complètement négligeable. Notons que, dans un modèle quantique, il existe des déplacements des niveaux beaucoup plus importants (de l'ordre du GigaHertz) dûs au couplage de l'atome aux modes vides du champ électromagnétique quantifié (déplacements de Lamb).

Avant de poursuivre, nous pouvons simplifier un peu l'équation du mouvement de l'électron pour nous affranchir du terme du troisième ordre,  $-\tau d^3\mathbf{r}/dt^3$ . Comme le facteur de qualité de la transition atomique est très grand, le mouvement est très proche d'un mouvement harmonique. Avec une très bonne approximation, ce terme peut donc s'écrire  $\tau\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$ . La force de réaction de rayonnement peut donc être considérée comme proportionnelle à la vitesse. On écrira donc l'équation du mouvement tenant compte de la réaction de rayonnement sous la forme:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0. \quad (3.16)$$

Nous pouvons maintenant, en utilisant cette équation, traiter le problème de la diffusion d'un champ, éventuellement résonnant.

### 3.1.3 Diffusion du rayonnement.

Nous étudierons dans ce paragraphe le rayonnement d'un atome classique, excité de façon permanente par une onde plane monochromatique. Sous l'influence de cette onde, l'atome acquiert un dipôle induit qui rayonne. A la différence du paragraphe précédent, il s'agit alors d'un rayonnement en régime stationnaire. De plus, l'onde incidente n'est pas nécessairement résonnante à la fréquence propre de l'atome.

#### Dipôle induit. Polarizabilité.

Nous supposons l'onde incidente polarisée linéairement selon  $Oz$  (la généralisation ne présente aucune difficulté). Nous ne considérerons pas le cas d'une onde de très haute fréquence, pour lequel la taille de l'atome pourrait être comparable à la longueur d'onde. Nous pourrions donc supposer l'atome ponctuel et ignorer la structure spatiale de l'onde. Nous écrirons donc simplement le champ électrique incident sous la forme  $E_0\mathbf{u}_z \exp(-i\omega t)$ . La fréquence  $\omega$  est arbitraire, la phase de l'onde choisie de telle manière que  $E_0$  soit réel (ce qui ne restreint en rien la généralité). L'équation du mouvement de l'électron en présence de cette onde s'écrit, avec le terme de réaction de rayonnement:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{qE_0}{m}\mathbf{u}_z e^{-i\omega t}. \quad (3.17)$$

---

<sup>4</sup>Il ne permet cependant pas de comprendre pourquoi il existe des raies atomiques beaucoup plus fines, correspondant à des durées de vie infiniment plus longues que ce que nous venons de calculer. La raie de 1S vers 2S de l'hydrogène, par exemple, aurait dans notre modèle une durée de vie de l'ordre de la nanoseconde (c'est une raie dans l'ultraviolet lointain). Sa durée de vie est, en fait, de 1/7 de seconde!

La solution contient un terme transitoire, dépendant de la condition initiale pour l'atome, qui s'amortit en un temps de l'ordre de  $\tau$ . On peut en général ignorer ce transitoire et ne considérer que la solution en régime permanent. Elle s'écrit évidemment sous la forme  $\mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$  avec:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{qE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{u}_z . \quad (3.18)$$

L'amplitude complexe du dipôle électrique acquis par l'atome à la fréquence  $\omega$  s'écrit donc:

$$\mathbf{d}_0 = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 . \quad (3.19)$$

Elle est proportionnelle à l'amplitude du champ incident. On peut donc définir la polarisabilité **classique** de l'atome à la fréquence  $\omega$ ,  $\alpha_c(\omega)$ , par:

$$\mathbf{d}_0 = \epsilon_0 \alpha_c(\omega) \mathbf{E}_0 . \quad (3.20)$$

Cette polarisabilité est simplement donnée par:

$$\alpha_c(\omega) = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (3.21)$$

On notera qu'avec cette définition, la polarisabilité est homogène à un volume (nous verrons dans la partie sur l'électromagnétisme dans les milieux matériels l'intérêt de ce choix). A fréquence nulle, on a simplement  $\alpha_c(0) = q^2/m\epsilon_0\omega_0^2$ . On vérifiera par un calcul évident d'électrostatique que la polarisabilité à fréquence nulle coïncide avec le volume de la sphère contenant la "gelée" positive. On remarquera aussi que, en faisant  $\omega_0 = 0$ , on trouve bien la polarisabilité d'un électron libre. Ce modèle nous permet aussi de traiter la diffusion de rayonnement par un plasma dont les charges peuvent, en première approximation, être considérées comme libres. Notons finalement que l'expression de la polarisabilité peut se simplifier, au voisinage de la résonance, quand l'amortissement  $\gamma$  est très petit par rapport à la fréquence propre. On a alors:

$$\alpha_c(\omega) \simeq \frac{q^2}{m\epsilon_0\omega_0} \frac{1}{2(\omega_0 - \omega) - i\gamma} . \quad (3.22)$$

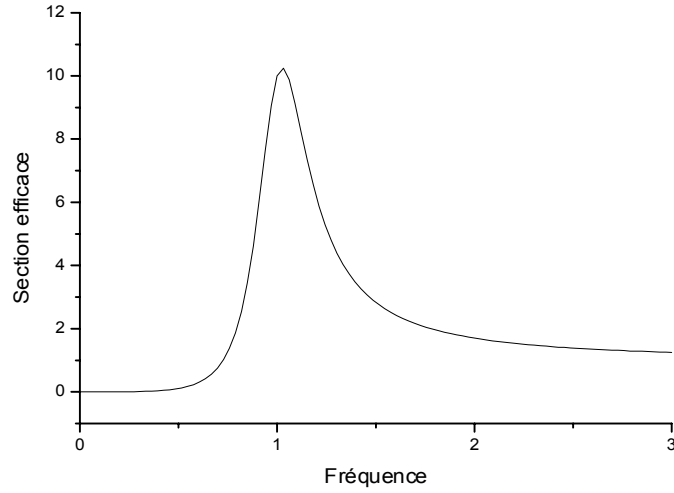
Le module au carré de la polarisabilité est alors une simple lorentzienne, de centre  $\omega_0$  et de largeur  $\gamma$ . Le facteur de qualité des résonances atomiques étant toujours excellent, cette approximation est très légitime et toujours utilisée.

A partir de l'expression du dipôle induit, nous pouvons aisément estimer la puissance rayonnée. Elle fera intervenir le carré du module de la polarisabilité, sous la forme:

$$\mathcal{P} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^3} |\alpha_c|^2 \omega^4 E_0^2 . \quad (3.23)$$

Cette puissance est évidemment proportionnelle au carré de l'amplitude du champ incident. Pour obtenir un résultat indépendant de l'intensité de l'onde incidente, nous allons rapporter la puissance diffusée à la puissance incidente par unité de surface,  $\epsilon_0 c E_0^2 / 2$ . Le rapport d'une puissance à une puissance par unité de surface est une surface. Nous caractérisons ainsi l'efficacité de diffusion de l'atome par une section efficace  $\sigma$ . La puissance diffusée est simplement la puissance incidente sur une surface  $\sigma$  (normale à la direction de propagation). En un mot, tous les photons qui "tombent" dans une surface  $\sigma$  centrée sur l'atome sont diffusés. On a:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha_c|^2 . \quad (3.24)$$



**Figure 3.1:** Section efficace de diffusion en fonction de la fréquence, exprimée en unités de  $\omega_0$ . Le facteur de qualité à été limité à 3.3 pour rendre la figure lisible.

On peut encore écrire, en explicitant la polarisabilité:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi c^4} \frac{q^4}{m^2 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (3.25)$$

Pour simplifier quelque peu le préfacteur, nous allons faire intervenir une dimension caractéristique de l'électron, le “rayon classique de l'électron”  $r_e$  que nous avons déjà rencontré à propos de la réaction de rayonnement. Un simple argument d'analyse dimensionnelle montre que la seule longueur qu'on peut former à partir des caractéristiques de l'électron est:

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{3}{2} c\tau , \quad (3.26)$$

qui est de l'ordre de 3 fm. On peut donc écrire enfin:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (3.27)$$

La figure 3.1 présente la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence.

Pour des fréquences proches de résonance, nous pouvons écrire, comme pour la polarisabilité:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} . \quad (3.28)$$

La section efficace est le produit de la “surface de l'électron” par un facteur présentant une résonance Lorentzienne en  $\omega_0$ . La section efficace sera donc qualitativement très différente selon que la fréquence incidente est très grande, très petite ou voisine de la fréquence propre. Nous allons examiner séparément ces différents cas.

### Diffusion Rayleigh

Nous considérerons d'abord le cas de la diffusion très basse fréquence:  $\omega \ll \omega_0$ . C'est par exemple pratiquement toujours le cas pour la diffusion radiofréquence ou infrarouge lointain. C'est aussi le

cas de la diffusion de la lumière visible par l'air. Les premières fréquences de résonance optique de l'oxygène ou de l'azote sont en effet situées dans le domaine ultraviolet. En tenant compte de cette condition, la section efficace s'écrit simplement:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (3.29)$$

Cette expression appelle plusieurs commentaires. D'abord, la valeur de la section efficace est extrêmement faible. Même si  $\omega$  est de l'ordre de  $\omega_0$ , la section efficace n'est que de l'ordre de la "surface classique" de l'électron,  $10^{-30} \text{ m}^2$ . Pour mieux comprendre la faiblesse de cette valeur, calculons la longueur de propagation nécessaire pour que la lumière incidente soit notablement atténuée par la diffusion,  $L$ . Avec un faisceau de section  $S$ , l'atténuation sera complète si  $S = \mathcal{N}\sigma$  où  $\mathcal{N} = NSL$  est le nombre total de molécules dans le faisceau sur une longueur  $L$  ( $N$  est la densité numérique). On trouve donc simplement:

$$L = \frac{1}{\sigma N}. \quad (3.30)$$

Pour un gaz à la pression atmosphérique, la densité typique est de  $3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . En prenant une valeur très surévaluée de  $10^{-30} \text{ m}^2$  pour  $\sigma$ , on trouve une longueur d'atténuation  $L$  de 30 km. On comprend donc pourquoi, dans la journée, la lumière solaire, qui ne traverse que quelques kilomètres d'atmosphère dense, n'est pas très atténuée par diffusion (la lumière directe est très intense par rapport au "bleu" du ciel). En revanche, au lever ou au coucher du soleil, la lumière, sous incidence rasante, traverse une épaisseur de gaz beaucoup plus considérable, pouvant dépasser la centaine de kilomètres. Dans ce cas la lumière est fortement atténuée.

Remarquons aussi la très rapide dépendance de la section efficace en fonction de la fréquence incidente. Les courtes longueurs d'onde, plus proches de la résonance, sont diffusées beaucoup plus efficacement que les plus longues. Voici une explication simple de la couleur bleue de la lumière diffusée par les gaz ou les fumées. La lumière transmise, elle, apparaît plus rouge, les fréquences les plus élevées étant aussi les plus atténuées.

Notons que ces raisonnements nous donnent quelques indications sur l'efficacité de la diffusion ou la nature du spectre diffusé par un gaz. Ils ne nous prouvent pas, en revanche, qu'un échantillon macroscopique de gaz diffuse. La manière dont s'additionnent les rayonnements produits par les différentes molécules du gaz n'est pas du tout prise en compte dans ce raisonnement simpliste qui ne considère qu'une molécule unique. On pourrait se demander en particulier pourquoi un gaz diffuse alors qu'un verre, pourtant beaucoup plus dense, ne diffuse pratiquement pas s'il est pur. Ainsi, la longueur d'atténuation dans les fibres optiques est de l'ordre de la dizaine de kilomètre aussi, alors que la densité numérique est trois ordres de grandeur plus élevée que celle de l'air. Pour bien comprendre cet effet, il faut analyser en détails le processus de diffusion macroscopique. On montre alors que les fluctuations thermodynamiques de densité jouent un rôle essentiel dans la diffusion. Pour un milieu statique, comme un verre, les amplitudes diffusées interfèrent destructivement et il ne reste que la lumière transmise vers l'avant. Pour un gaz, le nombre de particules dans un volume de l'ordre de  $\lambda^3$  est fluctuant. Ces fluctuations sont responsables de la présence de lumière diffusée. Il faut donc prendre avec précautions les ordres de grandeur que nous venons de donner.

### Diffusion Thomson

Nous considérerons maintenant le domaine des hautes fréquences  $\omega \gg \omega_0$ . C'est, par exemple, celui de la diffusion des rayonnements X dans les matériaux non absorbants. On trouve alors simplement:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (3.31)$$

La section efficace est constante, indépendante de la fréquence incidente, simplement égale à la surface classique de l'électron. En fait, pour de hautes fréquences incidentes, le fait que l'électron soit lié par

une force harmonique n'a pratiquement aucune influence sur la diffusion. On trouve ici simplement la section efficace de diffusion par un électron libre. Les ordres de grandeur de la section efficace et des longueurs d'atténuation sont essentiellement les mêmes que dans le paragraphe précédent.

### Diffusion résonnante

Le régime le plus intéressant est celui où la fréquence incidente est proche de la résonance atomique  $\omega \simeq \omega_0$ . La section efficace présente alors un comportement quasi Lorentzien autour de  $\omega_0$  décrit par l'équation (3.28).

Pour étudier les ordres de grandeur, nous nous focaliserons sur le cas où le rayonnement incident est strictement résonant:  $\omega = \omega_0$ . Dans ce cas,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 . \quad (3.32)$$

La section efficace est beaucoup plus grande que la surface classique de l'électron. Nous avons vu en effet que le facteur de qualité de la transition atomique est de l'ordre de  $10^7$ . La section efficace résonnante est donc 14 ordres de grandeur plus élevée que les sections Thomson ou Rayleigh. Plus précisément:

$$\frac{\omega_0}{\gamma} \simeq \frac{1}{\omega_0 \tau} = \frac{6\pi\epsilon_0 m c^3}{q^2 \omega_0} , \quad (3.33)$$

et donc

$$r_e \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{r_e}{\omega_0 \tau} = \frac{3}{2} \frac{c}{\omega_0} . \quad (3.34)$$

On en déduit finalement

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2 , \quad (3.35)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la lumière résonante. La section efficace de diffusion résonnante est donc de l'ordre du carré de la longueur d'onde, 1 micron carré environ. En considérant par exemple une vapeur de sodium sous une pression de  $10^{-5}$  torr (ce qu'on obtient dans une ampoule chauffée à une centaine de degrés) soit une densité numérique de  $10^{17} \text{ m}^{-3}$ , on trouverait une longueur d'absorption (le raisonnement des paragraphes précédents reste correct) de  $100 \mu\text{m}$ . Il s'agit bien sûr d'une valeur trop faible. On constate expérimentalement que le rayonnement est atténué sur une longueur courte, mais notablement plus longue que ce que nous venons de calculer, surtout quand le rayonnement incident est intense.

L'origine de ce désaccord vient du fait que nous travaillons avec un modèle linéaire qui ignore toute saturation du système atomique. Aussi intense et aussi résonante que soit l'onde incidente, l'atome répond toujours linéairement, avec une section efficace indépendante de l'intensité incidente. Si on quantifie correctement la dynamique atomique, on s'aperçoit que ce comportement n'est valable que pour des diffusions non résonantes (c'est ce que nous établirons dans le prochain paragraphe). Pour la diffusion résonante, l'atome ne peut diffuser plus d'un photon dans un intervalle de temps  $\gamma^{-1}$ . Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, il peut osciller rapidement entre les deux niveaux d'énergie bordant la transition résonnante mais ces cycles correspondent à des cycles absorption/émission induite qui ne changent pas le nombre de photons de l'onde incidente. Les seuls événements qui correspondent à une diffusion sont ceux se produisant par émission spontanée, tous les  $\gamma^{-1}$ . L'ordre de grandeur de la section efficace que nous donnons ici ne sera correct que si l'atome diffuse beaucoup moins d'un photon dans une durée de vie radiative. Il faut donc que la puissance incidente soit petite devant un photon (avec une énergie d'environ un eV) par 10 ns et par micron carré. L'ordre de grandeur de la "puissance de saturation" est donc de  $10 \text{ W/m}^2$  ou encore de  $1 \text{ mW/cm}^2$ . Une approche quantique rigoureuse donne exactement cet ordre de grandeur. Le modèle de Thomson fait encore la preuve de son efficacité.

Notons aussi que nous avons supposé dans tout ce raisonnement que la largeur de la résonance était entièrement déterminée par la durée de vie spontanée. L'analyse est un peu plus complexe si on tient compte d'une autre cause d'élargissement, comme l'effet Doppler. On trouve alors en général une réduction importante de la section efficace de diffusion et, en conséquence, une augmentation de la puissance de saturation.

Nous avons maintenant déduit tout ce qui était accessible avec le modèle de Thomson. Nous allons maintenant nous consacrer à un modèle semi-quantique (ou semi-classique) qui nous permettra de donner une assise plus solide aux résultats que nous venons d'établir.

## 3.2 Modèle semi-classique

Nous traiterons dans ce paragraphe le rayonnement d'une source atomique dans un modèle où nous quantifierons la structure atomique. En revanche, le champ électromagnétique sera encore considéré comme une quantité classique. Cette quantification partielle nous empêchera de décrire le phénomène d'émission spontanée. Celle-ci ne peut être comprise quantitativement que dans un modèle où le champ est convenablement quantifié (l'émission spontanée est, en partie, "induite" par les fluctuations de point zéro du champ électromagnétique, les célèbres "fluctuations du vide", authentiquement quantiques). Pour éviter ces difficultés, nous ne traiterons dans ce paragraphe que de la diffusion de rayonnement par un atome quantique. En nous plaçant dans des régimes limites convenables, nous pourrions éviter d'avoir à tenir compte de l'émission spontanée. Dans un premier paragraphe, nous nous poserons le problème de relier les observables atomiques au rayonnement diffusé. Quel dipôle devons nous insérer dans les formules classiques du rayonnement pour estimer la puissance diffusée par un atome? Ensuite, nous écrirons les équations d'évolution quantiques d'un atome placé dans un champ incident. Nous traiterons ensuite deux cas limites: la diffusion non résonnante et la diffusion strictement résonnante.

### 3.2.1 Rayonnement d'un atome quantique

Nous considérerons un modèle atomique très simple, celui d'un atome à un électron, l'hydrogène. Les niveaux atomiques résultent de la quantification de mouvement de l'électron dans le potentiel central du noyau<sup>5</sup>. On trouvera cette quantification détaillée dans les manuels de mécanique quantique (Cohen en particulier). Nous nous contenterons ici de savoir qu'il existe des niveaux stationnaires  $|i\rangle$  d'énergie  $E_i$ , états propres du Hamiltonien atomique  $H_0$  (énergie cinétique plus énergie potentielle de liaison). Le fondamental sera appelé  $|g\rangle$ . Son énergie est nulle par convention. Ces niveaux, que nous traiterons comme s'ils étaient non dégénérés, sont des états propres de l'opérateur parité, qui commute avec le Hamiltonien. Les fonctions d'onde leur correspondant sont donc paires ou impaires par rapport à l'origine (où est situé le noyau). Pour l'hydrogène, ainsi, le niveau fondamental est le  $1S$ , avec une fonction d'onde à symétrie sphérique, donc paire. Les premiers niveaux excités sont le  $2S$ , également pair et le  $2P$ , impair (la fonction d'onde est, en coordonnées sphériques, proportionnelle à  $\cos\theta$ —voir l'appendice de la première partie).

La position de l'électron dans l'atome est un opérateur  $\mathbf{R}$ . Le dipôle électrique est donc, lui aussi, un opérateur relatif à l'électron,  $\mathbf{D} = q\mathbf{R}$  ( $q$  étant la charge de l'électron). Pour estimer la puissance rayonnée par l'atome, nous avons besoin, dans ce modèle semi-classique, d'une amplitude de dipôle classique. Le plus naturel est d'employer la valeur moyenne de l'opérateur dipolaire dans l'état atomique. On décrira bien ainsi le rayonnement d'un grand nombre d'atomes soumis au même champ incident, ce qui est bien, en général, le problème de la diffusion. Nous emploierons donc les formules standard du rayonnement dipolaire avec  $\mathbf{d} = \langle \mathbf{D} \rangle$ . Il est évident que nous ne pourrions ainsi traiter que le rayonnement moyen d'une grande assemblée d'atomes (les valeurs moyennes de la mécanique quantique décrivent des moyennes sur un grand nombre de réalisations d'une expérience unique, les

<sup>5</sup>On négligera ici tous les effets dus au spin de l'électron ou du noyau.



moyennes d'ensemble). Parler, dans ce modèle, du rayonnement d'un atome unique n'aurait aucun sens. En fait, un atome unique émet un photon en effectuant un saut quantique d'un niveau à un autre. Un tel processus, impliquant un photon unique et tenant nécessairement en compte l'appareil détectant ce photon, n'a pas de sens dans une description classique du champ.

Nous pouvons tout de suite nous poser le problème de savoir quel type d'états atomiques rayonnent. Il faut que la valeur moyenne de l'opérateur dipolaire

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \langle \Psi | \mathbf{D} | \Psi \rangle = q \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (3.36)$$

( $|\Psi\rangle$  est la fonction d'onde atomique) soit non nulle. Si  $|\Psi\rangle$  a une parité bien définie, le carré de son module est toujours pair et l'intégrale identiquement nulle. Les états propres du Hamiltonien atomique étant de parité bien définie, le dipôle moyen dans tous ces états est nul<sup>6</sup>. Les niveaux stationnaires ne rayonnent pas et sont donc stables. On constate là l'insuffisance évidente d'un modèle traitant le champ classiquement. Nous savons bien que de tous les niveaux atomiques seul le fondamental,  $|g\rangle$ , est stable. Tous les autres perdent leur énergie par rayonnement, même si la durée de vie est très longue (des années pour les niveaux excités hyperfins). Il est tout simplement impossible de traiter l'émission spontanée dans un cadre classique. D'un point de vue plus positif, l'émission spontanée est la preuve la plus formelle de la nature quantique du champ électromagnétique.

Seules rayonnent donc des fonctions d'onde dont la parité n'est pas bien définie. Il s'agit de combinaisons linéaires de niveaux de parité opposée. Si, à un instant donné,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|i\rangle + |j\rangle), \quad (3.37)$$

alors

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \text{Re} \langle i | \mathbf{D} | j \rangle = \text{Re} q \int \Psi_i^* \Psi_j \mathbf{r} d\mathbf{r}, \quad (3.38)$$

qui peut être non nul si  $|i\rangle$  et  $|j\rangle$  sont de parité opposée. Ces niveaux n'ayant pas la même énergie, la superposition évolue temporellement comme:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|i\rangle e^{-iE_i t/\hbar} + |j\rangle e^{-iE_j t/\hbar}). \quad (3.39)$$

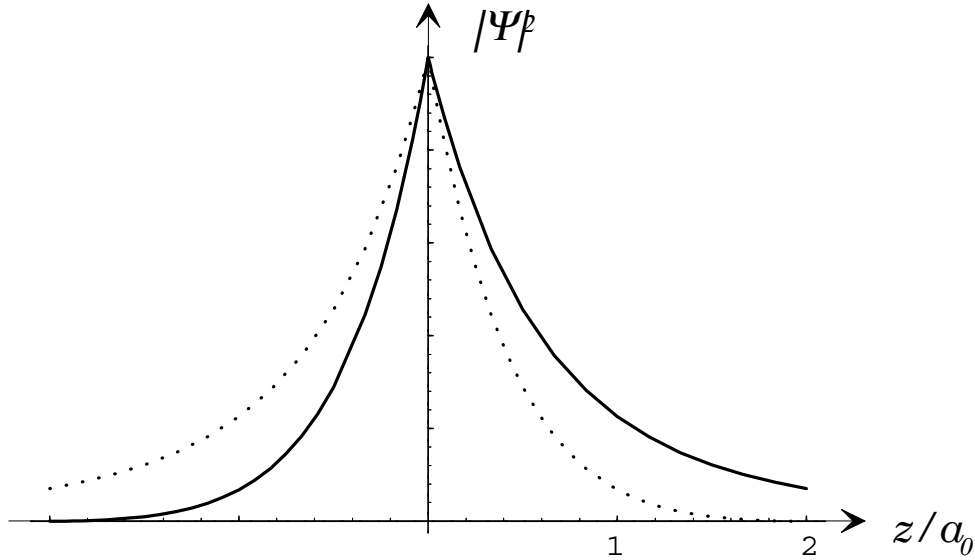
Le dipôle moyen évolue donc comme:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \text{Re} \langle i | \mathbf{D} | j \rangle e^{-i\omega_{ji} t}, \quad (3.40)$$

où  $\omega_{ji} = (E_j - E_i)/\hbar$  est la fréquence de Bohr entre ces deux niveaux. L'atome dans une superposition de ces deux niveaux rayonne donc à la fréquence de Bohr, c'est à dire à la fréquence de la transition atomique, ce qui n'est pas très surprenant. Notons qu'une superposition plus complexe, mettant en jeu plusieurs niveaux de parités variées, correspondra à un dipôle oscillant sur plusieurs composantes de fréquence. Celles-ci sont les fréquences de Bohr des transitions "autorisées" entre ces niveaux, celles pour lesquelles l'élément de matrice dipolaire  $\langle i | \mathbf{D} | j \rangle$  est non nul.

Pour illustrer visuellement le rayonnement d'une superposition d'états, la figure 3.2 présente le module de la fonction d'onde d'un atome d'hydrogène préparé dans une superposition quantique des états  $|1S\rangle$  et  $|2P\rangle$  ( $m = 0$  correspondant à une orbitale antisymétrique par rapport au plan  $xOy$ ) à deux instants séparés par une demi-période de Bohr. En n'oubliant pas que la densité de charge électronique est proportionnelle au carré du module de la fonction d'onde, on voit bien que la charge

<sup>6</sup>La nullité du dipôle moyen d'un état stationnaire est liée à l'invariance par renversement du sens du temps de la dynamique atomique. Si la symétrie est respectée, le dipôle doit être nul. De nombreuses expériences ont été consacrées à la recherche d'un moment électrique dipolaire pour un atome isolé (ou d'un neutron, les arguments étant à peu près les mêmes), dans le but de mettre en évidence une éventuelle violation de la symétrie temporelle. Elles ont permis de mettre des limites supérieures très basses aux dipôles, mais pas encore de mesurer un effet.



**Figure 3.2:** Carré du module de la fonction d'onde d'un atome d'hydrogène préparé dans une superposition quantique des états 1S et 2P,  $m = 0$ , à deux instants séparés par une demi-période de Bohr (en traits pleins et pointillés). On représente ce carré le long de l'axe de quantification  $Oz$ . On note que le barycentre de la distribution de charge oscille selon  $Oz$ .

moyenne oscille autour de l'origine à la fréquence de Bohr. Pour préparer une telle superposition d'états, nous ne pouvons guère, dans le cadre de ce modèle, que soumettre l'atome à une onde incidente, elle aussi traitée classiquement. Nous pourrions alors calculer le dipôle moyen en appliquant l'équation de Schrödinger et déterminer ensuite le champ rayonné. Essentiellement, nous nous cantonnerons au problème de la diffusion. La situation sera bien sûr très différente selon que l'onde incidente sera résonnante sur la fréquence de Bohr d'une transition autorisée ou non.

### 3.2.2 Diffusion du rayonnement

Nous soumettons donc notre atome quantique à une onde plane incidente, le champ électrique au voisinage de l'origine étant de la forme  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_z \exp(i(kx - \omega t))$  (nous choisissons une onde plane polarisée selon  $\mathbf{u}_z$  et se propageant dans la direction  $\mathbf{u}_x$ ). Nous négligerons bien sûr la réaction de rayonnement, c'est à dire le champ rayonné par l'atome lui même, par rapport au champ incident. Il ne serait d'ailleurs pas possible d'en tenir compte de façon satisfaisante dans ce modèle. Le potentiel vecteur de cette onde s'écrit  $\mathbf{A} = -(iE_0/\omega) \mathbf{u}_z \exp(i(kx - \omega t))$ . Son potentiel scalaire est bien sûr identiquement nul. Nous nous placerons ici en jauge de Coulomb.

#### Hamiltonien d'interaction

La première étape du calcul est de déterminer la forme du Hamiltonien atomique en présence de l'onde incidente. Pour cela, nous nous appuierons sur les résultats de la partie sur la mécanique analytique, où nous avons établi l'expression du Hamiltonien classique d'une particule chargée en présence d'un champ. Nous remplacerons, en suivant les préceptes de la quantification canonique, les variables conjuguées  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  par des opérateurs conjugués  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{R}$  (nous noterons  $r$  la position au lieu de  $q$ ).

Le Hamiltonien classique s'écrivant :

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} + qV(\mathbf{r}) , \quad (3.41)$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur et  $V$  le potentiel scalaire, le Hamiltonien total quantique est simplement:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{R}))^2}{2m} + qV(\mathbf{R}) , \quad (3.42)$$

obtenu en remplaçant position et impulsion par les opérateurs correspondants, y compris dans les expressions des potentiels. Dans le cas qui nous occupe, le potentiel vecteur est celui de l'onde plane incidente. Le potentiel scalaire est le potentiel électrostatique de noyau assurant la liaison de l'électron. Dans un calcul plus complet, pour un atome à plusieurs électrons, il conviendrait de tenir compte également de l'interaction entre électrons. Il faudrait aussi tenir compte d'autres termes dans le Hamiltonien, décrivant les structures fines ou hyperfines des niveaux.

En développant le carré et en n'oubliant pas que  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$ , devenu un opérateur comme fonction de  $\mathbf{R}$ , ne commutent pas, on obtient:

$$H = H_0 - \frac{q}{2m}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2 , \quad (3.43)$$

où  $H_0 = \mathbf{P}^2/2m + V$  est le Hamiltonien de l'atome libre.

En général, les effets de l'onde incidente sont petits par rapport à l'effet du potentiel de liaison. En d'autres termes, le champ électrique de l'onde incidente est petit devant le champ électrostatique de liaison (de l'ordre de  $10^{11}$  V/m). Les termes s'ajoutant à  $H_0$  dans l'équation précédente ont donc une influence petite et les états propres de  $H$  sont essentiellement ceux de  $H_0$ . Nous pourrions donc traiter ce problème en utilisant le formalisme des perturbations de la mécanique quantique, perturbations dépendant du temps par l'intermédiaire de l'onde incidente. Plutôt que d'utiliser ce formalisme général, nous allons établir très simplement la forme de l'évolution de l'état atomique. Nous ferons pour cela, avant d'aller plus loin, deux approximations supplémentaires.

Si  $\mathbf{A}$  est du premier ordre dans la perturbation que nous apportons à  $H_0$ , le dernier terme, proportionnel à  $\mathbf{A}^2$ , est du second ordre. Pour une intensité incidente suffisamment faible, il sera négligeable par rapport aux termes du premier ordre. En pratique, ce terme ne devient important que pour des intensités incidentes énormes, pour lesquelles le champ de l'onde est de l'ordre du champ de liaison. La seconde approximation est dite "approximation dipolaire". Tel que nous l'avons écrit,  $H$  est difficile à traiter en raison de la non-commutation de  $\mathbf{P}$  et de  $\mathbf{A}$ . Notre problème est surtout intéressant pour traiter la diffusion d'une onde de fréquence voisine des transitions atomiques intenses, c'est à dire pour une onde dans le domaine visible. La longueur d'onde incidente, de l'ordre du micron, est alors beaucoup plus grande que la taille de l'atome. En première approximation, on peut assimiler le potentiel vecteur à sa valeur à l'origine,  $\mathbf{A}(0)$ . Cette approximation revient à ne tenir compte que du premier terme, dipolaire, dans le développement multipolaire de l'interaction de l'atome avec le champ. Avec cette approximation, le potentiel vecteur devient un simple nombre, indépendant de l'opérateur position. Il commute donc avec l'impulsion. On peut, avec ces deux approximations, très largement vérifiées en pratique, réécrire le Hamiltonien total sous la forme:

$$H = H_0 - \frac{q}{m}\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}(0) . \quad (3.44)$$

En injectant finalement l'expression du potentiel vecteur de l'onde incidente, dont on prendra garde de ne garder que la partie réelle (il convient de n'utiliser que les champs physiques dans le Hamiltonien), on trouve:

$$H = H_0 + H_i , \quad (3.45)$$

avec

$$H_i = \frac{qE_0}{m\omega}P_z \sin(\omega t) . \quad (3.46)$$

### Equations d'évolution des populations

Munis du Hamiltonien, nous allons maintenant calculer l'évolution temporelle de l'état atomique. De manière évidente, cet état peut s'écrire comme une superposition des états propres  $|i\rangle$  du Hamiltonien non perturbé (ces états forment une base de l'espace de Hilbert). On écrira donc:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i a_i(t)|i\rangle, \quad (3.47)$$

où la somme est à étendre à tous les états propres de  $H_0$  (y compris les états du continuum) et où les  $a_i$  sont des amplitudes de probabilité complexes dépendant du temps. En portant directement ce développement dans l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle, \quad (3.48)$$

on trouve:

$$i\hbar \sum_i \frac{da_i}{dt}|i\rangle = \sum_i a_i E_i |i\rangle + \frac{qE_0}{m\omega} \sum_i P_z \sin(\omega t) a_i |i\rangle. \quad (3.49)$$

Pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires, nous multiplierons scalairement les deux membres de cette équation par le "bra"  $\langle j|$  où  $j$  est un niveau stationnaire arbitraire de l'atome non perturbé. En utilisant le fait que les états propres de  $H_0$  sont orthogonaux, c'est à dire que

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ji}, \quad (3.50)$$

on obtient, pour tout  $j$ ,

$$\frac{da_j}{dt} = -i\omega_j a_j + \frac{qE_0}{im\omega\hbar} \sum_i \langle j|P_z|i\rangle a_i \sin(\omega t), \quad (3.51)$$

où nous avons posé  $\omega_j = E_j/\hbar$ .

Nous pouvons simplifier un peu les écritures par un changement de variable. Le premier terme du second membre dans cette équation décrit l'évolution libre du coefficient  $a_j$  à la fréquence  $\omega_j$ . On peut s'en affranchir en posant:

$$b_j = a_j e^{i\omega_j t}. \quad (3.52)$$

Ce changement de variable est en fait simplement un passage en représentation d'interaction par rapport au Hamiltonien non perturbé  $H_0$ . On obtient simplement alors l'équation d'évolution des  $b_j$ :

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{qE_0}{im\omega\hbar} \sum_i \langle j|P_z|i\rangle \sin(\omega t) e^{i\omega_{ji}t} b_i(t), \quad (3.53)$$

où  $\omega_{ji} = \omega_j - \omega_i$  est la fréquence de Bohr de la transition de  $i$  vers  $j$ . Notons que cette quantité, algébrique, peut être négative.

Nous avons donc transformé l'équation de Schrödinger en un système différentiel ordinaire (les éléments de matrice  $\langle j|P_z|i\rangle$  sont a priori facilement calculables). Il n'en reste pas moins que ce système comporte une infinité d'équations et qu'il n'est pas abordable dans le cas général. Nous pourrions aborder le problème dans deux situations limites seulement.

### Diffusion non résonante

Nous considérerons ici la diffusion d'une onde non résonnante par un atome initialement dans son état fondamental  $g$ . Par non résonnante, nous désignons une onde dont la fréquence est très différente de toutes les fréquences de Bohr des transitions "autorisées" (telles que l'élément de matrice  $\langle g|P_z|i\rangle$  soit non nul) partant de l'état  $g$ . Il conviendra aussi que son amplitude ne soit pas trop grande. Il est relativement naturel de considérer que cette perturbation non résonnante n'a qu'une très faible

probabilité d'exciter l'atome, c'est-à-dire de le transférer vers un état autre que  $g$ . Cela signifie que pratiquement toutes les amplitudes  $b_j$  restent petites (au moins du premier ordre dans l'amplitude de la perturbation, mesurée par  $E_0$ ), sauf  $b_g$  qui est voisine de 1. Dans le second membre du système d'équations (3.51), le produit d'amplitudes du premier ordre par un terme lui aussi proportionnel à  $E_0$  donne un terme négligeable du second ordre. Seul contribue à cette somme le niveau  $g$ .

L'évolution de  $b_j$  pour  $j \neq g$  s'écrit alors:

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{qE_0}{im\omega\hbar} \langle j|P_z|g \rangle \sin(\omega t) e^{i\omega_{jg}t}, \quad (3.54)$$

équation différentielle ordinaire qui s'intègre trivialement avec la condition initiale  $b_j(0) = \delta_{jg}$ . On trouve:

$$b_j(t) = \frac{qE_0}{2m\omega\hbar} i \langle j|P_z|g \rangle e^{i\omega_{jg}t} \left[ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_{jg}t}}{\omega + \omega_{jg}} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_{jg}t}}{\omega_{jg} - \omega} \right]. \quad (3.55)$$

A partir de cette expression des  $b_j$ , nous pouvons facilement calculer le dipôle moyen  $\langle \mathbf{D} \rangle = \langle \Psi(t) | \mathbf{D} | \Psi(t) \rangle$  avec  $|\Psi\rangle = |g\rangle + \sum_j b_j(t) \exp(-i\omega_j t) |j\rangle$  (on remarquera que la norme de cet état n'est un qu'au premier ordre dans les  $b_j$  ce qui est conforme avec nos approximations). Après quelques manipulations algébriques sans intérêt, on trouve:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{u}_z \frac{q^2 E_0}{2m\omega\hbar} \left\{ i \sum_{j \neq g} \langle g|Z|j \rangle \langle j|P_z|g \rangle \left[ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_{jg}t}}{\omega + \omega_{jg}} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_{jg}t}}{\omega_{jg} - \omega} \right] + c.c. \right\}. \quad (3.56)$$

Dans cette expression, apparaissent comme fréquences d'évolution la fréquence de l'onde incidente et la fréquence de Bohr de  $g$  vers  $j$ . Physiquement, nous pouvions nous attendre à ce que l'atome ne réponde qu'à la fréquence à laquelle il est forcé. En fait, la partie oscillant avec la fréquence de Bohr provient de deux imperfections du modèle. D'abord, nous avons supposé que le branchement de l'onde plane excitatrice intervenait instantanément à l'instant origine. Le spectre de la perturbation contient donc toutes les fréquences, en plus de la fréquence propre  $\omega$ . Dans ce spectre, se trouvent en particulier les fréquences de Bohr, capables d'exciter de façon résonnante les transitions atomiques et de provoquer une réponse transitoire de l'atome. Comme nous avons également négligé tout amortissement, cette réponse transitoire s'étend indéfiniment dans le temps et contamine notre solution. On aurait tout à fait le même genre de comportement, comme on pourra s'en convaincre facilement, en branchant instantanément une perturbation non résonnante sur un oscillateur non amorti. Clairement, cette partie de la solution n'est pas physique. D'une part, la perturbation n'est jamais appliquée de façon soudaine (une prise en compte réaliste d'un branchement adiabatique de la perturbation réduirait considérablement le poids des fréquences de Bohr dans la solution). D'autre part, et surtout, nous n'avons introduit aucun amortissement dans notre problème. Il est clair que l'excitation des niveaux due au branchement soudain ne pourra pas durer plus longtemps que la durée de vie de ces niveaux si on prenait en compte l'émission spontanée. Nous ne pouvons tenir compte de façon convaincante de cet amortissement mais nous pouvons au moins supprimer dans l'expression du dipôle moyen les termes non physiques aux fréquences de Bohr. Nous aurons donc finalement:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{u}_z \frac{q^2 E_0}{2m\omega\hbar} \left\{ i \sum_{j \neq g} \langle g|Z|j \rangle \langle j|P_z|g \rangle \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_{jg}} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{jg} - \omega} \right] + c.c. \right\}. \quad (3.57)$$

Notons ici un autre effet de l'absence d'amortissement. Les dénominateurs apparaissant dans cette expression présentent un comportement résonnant quand la fréquence excitatrice coïncide, au signe près, avec une des fréquences de Bohr. Dans ce cas, le dipôle moyen diverge, ce qui n'est pas physique. Il nous faut bien garder en mémoire que cette expression n'est valable que tant que les  $b_j$  restent petits, c'est à dire pour de petits dipôles moyens, loin de résonance et avec des ondes incidentes d'amplitude modérée.

Le produit d'éléments de matrice  $\langle g|z|j\rangle\langle j|P_z|g\rangle$  est assez désagréable. Nous allons le transformer quelque peu. Nous pouvons en effet écrire, en utilisant les règles standard de commutation entre  $\mathbf{R}$  et une fonction de  $\mathbf{P}$ :

$$[Z, H_0] = \left[ Z, \frac{P_z^2}{2m} \right] = \frac{i\hbar}{m} P_z \quad (3.58)$$

(notons que  $V$  commute avec  $\mathbf{R}$  et que les composantes  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{P}$  commutent avec  $Z$ ). On en déduit immédiatement:

$$\langle j|P_z|g\rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle j|ZH_0 - H_0Z|g\rangle = \frac{m}{i} \omega_{gj} \langle j|Z|g\rangle \quad (3.59)$$

En reportant cette expression dans celle du dipôle moyen, on obtient:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = -\mathbf{u}_z \frac{q^2 E_0}{2\hbar} \sum_{j \neq g} \frac{\omega_{jg}}{\omega} |\langle j|Z|g\rangle|^2 \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_{jg}} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{jg} - \omega} \right] + c.c. \quad (3.60)$$

Nous pouvons alors, pour faire le lien avec le modèle classique du paragraphe précédent, introduire une polarisabilité atomique “quantique” à la fréquence  $\omega$ ,  $\alpha_q(\omega)$ , définie par:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \alpha_q E_0 \mathbf{u}_z. \quad (3.61)$$

En ne faisant apparaître que des parties réelles dans l'expression du dipôle, on a

$$\alpha_q(\omega) = \frac{2q^2}{\hbar \epsilon_0} \sum_j \frac{\omega_{jg}}{\omega_{jg}^2 - \omega^2} |\langle j|Z|g\rangle|^2 \quad (3.62)$$

(remarquons que la restriction  $j \neq g$  dans la sommation a pu être éliminée, la moyenne de  $Z$  étant nulle dans le niveau  $g$ ). Si nous rapprochons cette expression de la polarisabilité classique, déduite du modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié de fréquence propre  $\omega_0$ :

$$\alpha_c(\omega, \omega_0) = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3.63)$$

on voit que la polarisabilité quantique peut se mettre sous la forme d'une somme pondérée de polarisabilités classiques pour des oscillateurs chargés aux différentes fréquences de Bohr:

$$\alpha_q(\omega) = \sum_j f_{jg} \alpha_c(\omega, \omega_{jg}), \quad (3.64)$$

où nous définissons la “force d'oscillateur” de la transition de  $g$  vers  $j$ ,  $f_{jg}$  par:

$$f_{jg} = \frac{2m\omega_{jg}}{\hbar} |\langle j|Z|g\rangle|^2. \quad (3.65)$$

Les forces d'oscillateur sont évidemment des quantités réelles, positives et sans dimension. On peut facilement aussi établir que la somme de toutes les forces d'oscillateur depuis le niveau  $g$  est égale à 1 (règle de Reich–Thomas–Kuhn). Pour cela, on remarque que:

$$f_{jg} = \frac{2m\omega_{jg}}{\hbar} \langle g|Z|j\rangle \langle j|Z|g\rangle. \quad (3.66)$$

En utilisant alors l'équation (3.59) établie plus haut, nous pouvons mettre la force d'oscillateur sous la forme:

$$f_{jg} = \frac{2}{i\hbar} \langle g|Z|j\rangle \langle j|P_z|g\rangle. \quad (3.67)$$

La relation de fermeture  $\sum_j |j\rangle\langle j| = 1$  donne:

$$\sum_j f_{jg} = \frac{2}{i\hbar} \langle g | Z P_z | g \rangle = -\frac{2}{i\hbar} \langle g | P_z Z | g \rangle, \quad (3.68)$$

cette quantité, réelle, étant évidemment égale à son complexe conjugué. On a donc finalement:

$$\sum_j f_{jg} = \frac{1}{i\hbar} (\langle g | Z P_z - P_z Z | g \rangle) = 1. \quad (3.69)$$

L'interprétation physique de l'expression de la polarisabilité quantique est donc transparente. Tout se passe comme si l'atome quantique était remplacé par une collection d'oscillateurs harmoniques, sans amortissement, chacun résonnant à une des fréquences de Bohr correspondant à toutes les transitions partant du niveau  $g$ . Chacun de ces oscillateurs contribue proportionnellement à sa force d'oscillateur. Celle-ci est nulle si l'élément de matrice de  $Z$  est nul. Les transitions de force d'oscillateur nulle sont dites "interdites"<sup>7</sup>. Dans beaucoup de cas, une des transitions originaires du niveau  $g$  porte l'essentiel de la force d'oscillateur. C'est par exemple le cas de la raie de résonance des alcalins, telle que la célèbre raie jaune du sodium, (qui est en fait un doublet en raison de la structure fine) qui rassemble presque toute la force d'oscillateur. Dans un tel cas, l'atome, pour ce qui est de la diffusion non résonnante, se comporte essentiellement comme un oscillateur chargé unique. Le modèle de Thomson est donc beaucoup plus réaliste que ne le laisse supposer sa simplicité. Ce que nous venons d'aborder dans le cadre d'une théorie atomique très simplifiée peut être généralisé à des systèmes quantiques plus complexes, comme des molécules. On peut tout à fait donner encore un sens à la notion de force d'oscillateur. C'est même le cas pour des systèmes macroscopiques, comme les systèmes excitoniques dans les semi-conducteurs.

Toutes les discussions du chapitre précédent sur les différents régimes de diffusion sont donc inchangées, à condition de tenir compte de toutes les transitions autorisées. On peut donc s'interroger sur la validité des approximations "haute fréquence" et "basse fréquence" en présence d'une infinité de raies de résonance. Le régime basse fréquence, de Rayleigh, correspond pour un atome à des fréquences incidentes plus petites que celles de la transition optique de plus basse énergie. Il peut exister des transitions d'énergie encore plus basse, entre niveaux hyperfins du fondamental, par exemple, mais elles ne correspondent pas à des transitions dipolaires électriques. La dépendance en  $\omega_{jg}$  de la force d'oscillateur diminue également considérablement l'influence des transitions de très basse fréquence. Pour le régime haute fréquence, diffusion Thomson, le problème est a priori plus difficile. Il existe toujours une transition résonnante du fondamental vers le continuum, quelle que soit la fréquence incidente. On peut se rassurer en remarquant que les forces d'oscillateur associées à ces transitions sont extrêmement faibles. En effet, la fonction d'onde d'un électron libre d'énergie élevée est une onde quasi-plane de très courte longueur d'onde qui a un très mauvais recouvrement avec la fonction d'onde du fondamental, à symétrie sphérique et d'extension de l'ordre de  $a_0$ . On peut donc donner un sens au régime de diffusion de Thomson dès que la fréquence incidente est beaucoup plus grande que la fréquence nécessaire pour ioniser l'atome.

Entre les régimes de Thomson et de Rayleigh, on entre dans le domaine de la diffusion résonnante, que nous ne pouvons traiter avec ce modèle où on suppose constante la population du niveau  $g$ . La perturbation résonnante induira en effet des transitions entre les niveaux atomiques.

### Interaction résonnante

Nous pourrions traiter, sans recourir à un modèle plus complet, le cas très particulier où l'onde incidente est strictement résonnante avec une transition atomique particulière, du niveau  $g$  vers le niveau  $j$ . On

<sup>7</sup>En fait, elles contribuent à la polarisabilité à un ordre plus élevé dans le développement multipolaire. Une transition interdite pour le rayonnement dipolaire électrique peut, par exemple, être autorisée pour le rayonnement quadripolaire. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le rayonnement dipolaire est de loin le plus intense. La diffusion par un atome est donc en général largement dominée par les transitions dipolaires.

peut en effet supposer, comme l'onde incidente est non résonnante sur toutes les autres transitions (nous négligerons ici les problèmes liés à une éventuelle dégénérescence de deux niveaux) que seuls les niveaux  $j$  et  $g$  sont notablement peuplés, les autres étant essentiellement vides. Le système infini (3.53) est donc remplacé par un système de deux équations à deux inconnues, facilement résolu. On a en effet

$$\begin{aligned}\frac{db_j}{dt} &= \frac{qE_0}{i\hbar m\omega} \langle j|P_z|g\rangle \sin \omega t e^{i\omega_{jg}t} b_g \\ \frac{db_g}{dt} &= \frac{qE_0}{i\hbar m\omega} \langle g|P_z|j\rangle \sin \omega t e^{-i\omega_{jg}t} b_j .\end{aligned}\quad (3.70)$$

En utilisant le lien entre éléments de matrice de  $P_z$  et de  $Z$  (équation (3.59)), on peut faire apparaître dans les équations précédentes l'élément de matrice dipolaire:

$$d = q \langle j|Z|g\rangle = \frac{q}{im\omega} \langle j|P_z|g\rangle . \quad (3.71)$$

On peut remarquer aussi qu'il intervient le produit de  $\sin \omega t$  par  $e^{i\omega_{jg}t}$ . Pour  $\omega_{jg} = \omega$  (c'est à dire à résonance), ce produit, en développant le sinus, fait intervenir la somme de deux termes, l'un constant et l'autre oscillant à  $2\omega$ . Si l'évolution des  $b$  est suffisamment lente, ce qui doit être le cas puisque nous sommes en représentation d'interaction par rapport aux énergies atomiques, on peut faire ce que les astronomes appellent une approximation séculaire. On néglige l'influence du terme rapide, en remarquant qu'il se moyenne à zéro en un temps court par rapport aux temps caractéristiques d'évolution des populations. En physique atomique, cette approximation porte le nom "d'approximation de l'onde tournante". En posant alors

$$\Omega = \frac{dE_0}{\hbar} , \quad (3.72)$$

on met le système différentiel sous la forme:

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{\Omega}{2} b_g , \quad \frac{db_g}{dt} = \frac{\Omega}{2} b_j , \quad (3.73)$$

dont la solution, assortie de la condition initiale  $b_g = 1; b_j = 0$  est évidemment:

$$b_g = \cos \frac{\Omega}{2} t \quad b_j = \sin \frac{\Omega}{2} t . \quad (3.74)$$

Les amplitudes de probabilité oscillent simplement en fonction du temps entre 0 et 1. Si nous calculons par exemple la probabilité de trouver l'atome dans l'état  $j$ , qui est proportionnelle à l'énergie atomique moyenne, nous trouverons:

$$P_j = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t) . \quad (3.75)$$

Cette oscillation régulière entre les deux niveaux porte le nom "d'oscillation de Rabi", en l'honneur de Rabi qui la mit en évidence pour la première fois dans des expériences de résonance micro-onde sur des spins atomiques. La fréquence  $\Omega$  est donc nommée "fréquence de Rabi".

A partir de cette expression des amplitudes de probabilité, il est aisé de calculer le dipôle électrique moyen. Il est évidemment égal à  $2d\text{Re}(\cos \frac{\Omega}{2} t \sin \frac{\Omega}{2} t \exp i\omega t)$ . A des coefficients numériques près, le dipôle est donc proportionnel à  $\sin \Omega t \cos \omega t$ . Le dipôle moyen évolue donc à deux fréquences:

$$\omega \pm \Omega . \quad (3.76)$$

Notons que, pour les amplitudes incidentes où ce modèle est réaliste, on a toujours  $\omega \gg \Omega$ . Le spectre de la lumière émise par l'atome consiste donc en deux raies, symétriquement disposées par rapport à la fréquence atomique "nue". On peut comprendre aisément ce spectre en termes de "bandes latérales".



Le dipôle atomique, oscillant naturellement à la fréquence  $\omega$ , est modulé en amplitude à la fréquence  $\Omega$ . Dans le modèle simple que nous traitons ici, cette modulation est complète. On sait bien que le spectre est alors composé de deux bandes latérales à  $\omega \pm \Omega$  (dans le cas d'une modulation partielle, il demeure une composante à la fréquence de la "porteuse"  $\omega$ ). En fait, nous savons que notre modèle est incomplet. Il ne tient pas compte de l'émission spontanée. Quand on l'inclut correctement, on constate que le spectre contient une troisième composante à la fréquence atomique  $\omega$  dont l'amplitude est double de celles des "bandes latérales" précédentes. Le spectre du rayonnement d'un atome unique doit donc être constitué de trois raies, le célèbre "triplet de Mollow". Ce triplet peut facilement être mis en évidence en irradiant un échantillon atomique par un laser. Il faut en effet que la fréquence de Rabi,  $\Omega$ , soit grande par rapport à la largeur des raies spectrales, déterminées par la durée de vie radiative du niveau excité ou des effets parasites comme l'effet Doppler dû à l'agitation thermique. Cela impose l'utilisation de lasers largement saturants, au sens où nous avons défini la saturation pour la diffusion résonnante dans le modèle classique. De nombreux effets intéressants d'optique quantique sont liés à ce régime d'oscillation de Rabi et "d'habillage" de l'atome par le champ d'un laser intense.

Notre modèle serait aussi insuffisant pour décrire l'oscillation de Rabi dans un très petit champ. Si celui-ci ne contient que quelques photons, la quantification de l'énergie et donc de l'amplitude doit entrer en ligne de compte. Au lieu d'une fréquence de Rabi unique, variant continûment avec l'amplitude classique du champ électromagnétique, on peut s'attendre à ce que l'oscillation s'effectue à des fréquences discrètes, correspondant aux différents nombres de photons présents dans le champ.

Dans la plupart des situations ordinaires de couplage d'un atome à un champ laser, cette quantification de la fréquence de Rabi passe complètement inaperçue. Pour que l'oscillation s'effectue plus rapidement que n'agissent les différentes causes de relaxation, il faut en effet que le champ contienne un nombre énorme de photons, très rapidement renouvelés. La différence entre deux nombres de photons consécutifs est si petite par rapport à ces nombres que l'oscillation de Rabi apparaît encore comme une sinusoïde, avec une fréquence proportionnelle à l'amplitude moyenne du champ électromagnétique, variant continûment. Pour observer la quantification, il faut se placer dans des conditions très particulières où un atome est fortement couplé au champ de quelques photons seulement (en d'autres termes, telles que l'intensité de saturation de la transition atomique soit de l'ordre du photon). Il faut de plus que le nombre de photons reste bien constant pendant toute la durée de l'oscillation.

On peut réaliser ce genre de situation dans le contexte de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler "l'électrodynamique quantique en cavité". Un atome, très fortement couplé au rayonnement, est placé dans une cavité résonnante de haute surtension. L'atome est par exemple un "état de Rydberg circulaire" (voir l'annexe de la partie I sur le modèle de Bohr). Il se comporte comme une antenne géante pour le rayonnement millimétrique. De plus, la durée de vie de ces niveaux circulaires, en dépit de leur caractère exotique, est très longue. Enfin, on peut détecter ces atomes de manière sélective et sensible. L'atome, préparé dans un jet atomique, traverse une cavité résonnante sur une transition vers le niveau circulaire immédiatement inférieur. La transition étant dans le domaine des longueurs d'onde millimétriques, on peut avoir une cavité d'excellente qualité en utilisant des miroirs supraconducteurs. La cavité joue alors le rôle d'une "boîte à photons" conservant le champ pendant un temps beaucoup plus long que le temps de transit de l'atome à travers la cavité. Dans ces conditions, on peut réaliser une situation de "couplage fort", où toute dissipation est négligeable par rapport au couplage de l'atome avec la cavité et où le champ d'un seul photon est suffisant pour saturer la transition atomique. Notons que l'expérience doit s'effectuer à très basse température (moins de 1K) pour que le rayonnement du corps noir, particulièrement important dans le domaine millimétrique, ne remplisse pas la cavité.

L'énergie d'un champ de  $n$  photons à la fréquence  $\omega$  étant  $n\hbar\omega$ , les amplitudes autorisées du champ dans la cavité et donc les fréquences de Rabi possibles, doivent être proportionnelles aux racines carrées successives des entiers. Un calcul complètement quantique du couplage d'un atome à deux niveaux avec un seul mode du champ électromagnétique confirme tout à fait cette approche intuitive. Ce qui est moins intuitif a priori, c'est que l'expression de la fréquence de Rabi dans le champ de  $n$

photons est  $\Omega\sqrt{n+1}$ . Elle est non nulle même si la cavité est vide. En fait, l'oscillation qu'on observe quand l'atome entre dans une cavité vide est ce qui reste, dans ces conditions très exceptionnelles, de l'émission spontanée. L'atome excité émet un photon dans la cavité. Si cette émission se produisait dans l'espace libre, le photon s'échapperait à la vitesse de la lumière et l'atome resterait dans le niveau inférieur de la transition. Dans la cavité, en revanche, le photon reste piégé au voisinage de l'atome, prêt à être réabsorbé, puis réémis... Dans une telle cavité, l'émission spontanée devient un phénomène réversible, oscillatoire!

Dans un champ quantique ordinaire, tel que celui produit par une source classique (mettant en jeu des courants oscillants macroscopiques) faiblement couplée à la cavité, le nombre de photons n'est pas parfaitement défini. Il obéit en fait à une statistique de Poisson, avec une variance de l'ordre de la valeur moyenne. On montre alors que l'oscillation de Rabi s'effectue simultanément à toutes les fréquences correspondant aux nombres de photons présents dans cette distribution statistique, chaque fréquence apparaissant dans la transformée de Fourier du signal avec un poids égal à la probabilité  $p(n)$  du nombre de photons.

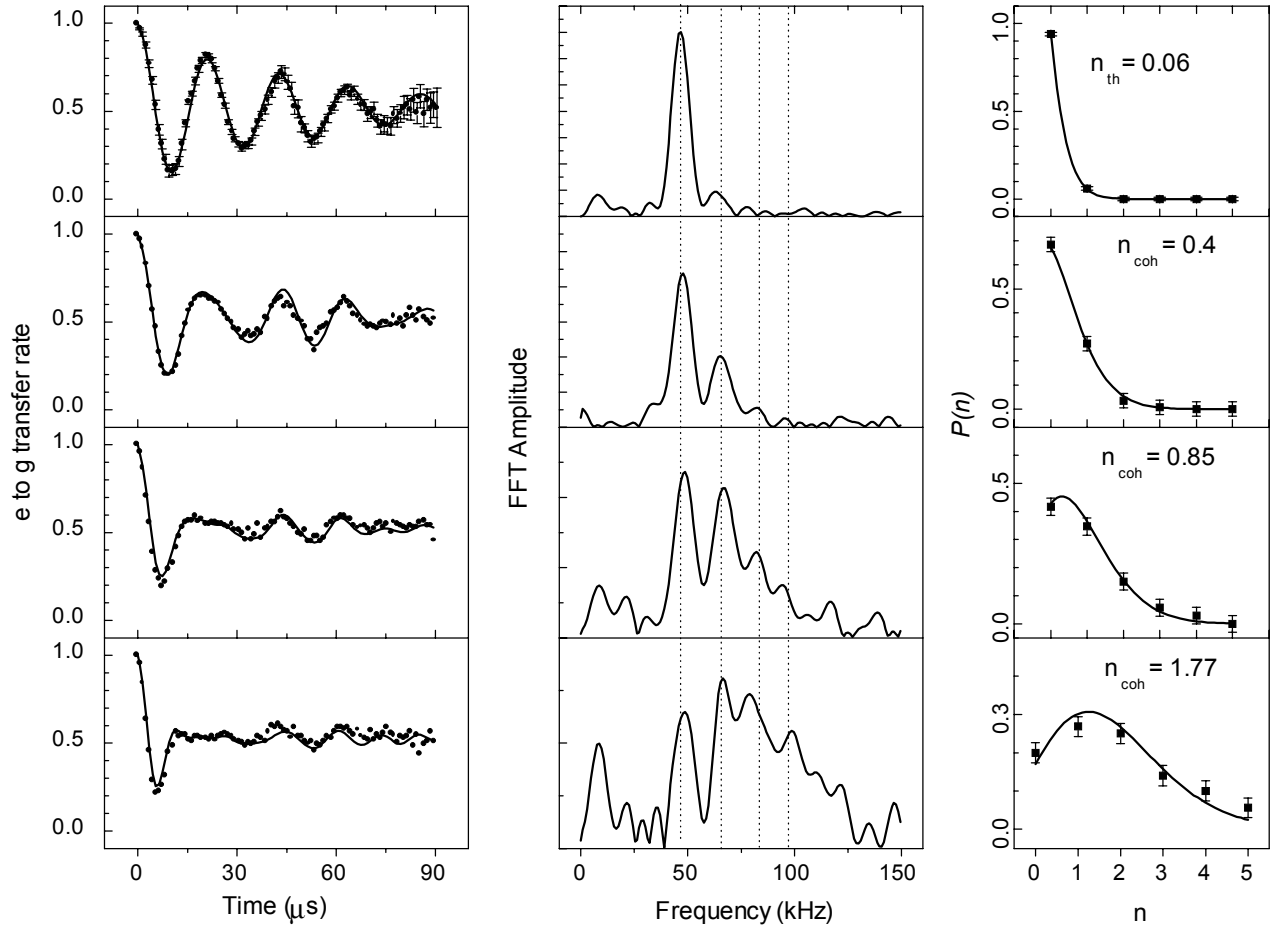
Les résultats d'une expérience récente<sup>8</sup> réalisée selon ce principe sont présentés sur la figure 3.3. La première colonne présente les signaux d'oscillations de Rabi observés en fonction du temps. La courbe du haut correspond à une cavité vide. On y observe l'émission spontanée oscillante. Les courbes suivantes correspondent à des champs d'amplitude moyenne croissante dans la cavité. On observe bien que le signal n'est plus du tout sinusoïdal. Il présente une structure complexe, avec des phases de latence et de renaissance des oscillations, qu'aucun modèle semi-classique ne permet de comprendre. La deuxième colonne présente les transformées de Fourier de ces signaux. Pour la cavité vide, on observe une fréquence pure,  $\Omega/2\pi = 47$  kHz, correspondant bien aux prédictions théoriques pour l'émission spontanée oscillante. Quand un champ est injecté dans la cavité, on observe des pics discrets dans cette transformée de Fourier dont les positions s'échelonnent bien comme les racines carrées des entiers successifs.

L'atome, dans cette expérience, est en quelque sorte une sonde qui mesure l'amplitude du champ électromagnétique. Les fréquences discrètes observées dans le spectre du signal de Rabi sont donc une preuve très directe de la quantification de l'amplitude et donc de l'énergie, du champ dans une cavité. Il y eut, depuis le début du siècle, de nombreuses preuves de la quantification du champ électromagnétique. L'émission spontanée, l'effet Compton, le déplacement de Lamb sont les plus anciennes. Tout le développement de l'optique quantique moderne, où l'on peut manipuler les fluctuations quantiques des champs, repose sur cette notion et la confirme avec éclat. Cependant, la manifestation la plus simple de la quantification du rayonnement, l'aspect discret de l'énergie dans une "boîte à photons" avait toujours échappé à l'expérience<sup>9</sup>. Il fallait en effet disposer d'un détecteur très particulier pour révéler ce comportement.

Notons enfin, dans la figure 3.3 la troisième colonne, qui présente les poids des différentes composantes de fréquences et donc les probabilités des nombres de photons correspondant. Elles s'accordent très bien avec la loi de Poisson attendue. Cela permet de déterminer avec précision le nombre moyen de photons dans la cavité.

<sup>8</sup>M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **76**,1800 (1996): "Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity". On pourra aussi consulter, sur les principes généraux de l'électrodynamique en cavité S. Haroche, J.M. Raimond, Scientific American, Avril 1993: "Cavity Quantum Electrodynamics"; Traduction française dans "Pour la Science", Juin 1993: "Electrodynamique Quantique en Cavité"; Réimprimé dans le numéro spécial "La physique Quantique", Pour la Science, Juin 1994. On pourra enfin consulter, pour des expériences plus récentes S. Haroche, J.M. Raimond et M. Brune, la Recherche, Sept. 1997.

<sup>9</sup>Les "clics" discrets d'un détecteur fondé sur l'effet photoélectrique ne sont pas une preuve absolue de la quantification du rayonnement. Dès 1926, à l'aube de la mécanique quantique moderne, Dirac et Wentzel ont montré que toutes les caractéristiques de l'effet photoélectrique pouvaient s'obtenir en couplant un champ classique à un détecteur quantifié (un atome par exemple). Einstein lui-même considérait l'effet photoélectrique comme une conséquence importante de la notion de photon mais il avait fondé sa preuve de la quantification de l'énergie du champ sur des notions beaucoup plus fondamentales.



**Figure 3.3:** La première colonne présente les signaux d'oscillation de Rabi quantique obtenus en couplant un atome de Rydberg circulaire à une cavité millimétrique supraconductrice contenant un champ de quelques photons (l'amplitude moyenne de ce champ est croissante de haut en bas, la cavité est vide pour la courbe du haut). La deuxième colonne présente les transformées de Fourier de ces signaux, faisant clairement apparaître la quantification de l'amplitude du champ. Enfin, la troisième colonne présente les poids des composantes de fréquence ou des nombres de photons, obéissant à une loi de Poisson. Les nombres moyens de photons (  $0.40 (\pm 0.02)$ ,  $0.85 (\pm 0.04)$  et  $1.77 (\pm 0.15)$  pour les trois lignes du bas) s'en déduisent. Pour la ligne supérieure, on observe un petit nombre de photons moyen (0.06) qui correspond au champ thermique résiduel dans la cavité à la température de l'expérience.

### 3.3 Diffusion par un milieu dense

Nous nous attacherons dans ce paragraphe au calcul du champ et de l'intensité diffusés par une assemblée d'atomes, ou plus généralement de centres diffuseurs. Chacun de ces centres sera, dans ce problème, entièrement défini par sa polarisabilité. Nos calculs pourront donc s'appliquer à une très grande variété de centres diffuseurs et, en particulier, aux atomes classiques ou semi-classiques traités dans les paragraphes précédents.

Nous essaierons en particulier de comprendre un apparent paradoxe. Nous avons vu en effet, dans le paragraphe sur la diffusion Rayleigh, que les atomes devaient efficacement diffuser un rayonnement incident, d'autant plus efficacement que la fréquence est élevée. Nous avons expliqué ainsi la diffusion du rayonnement bleu par le ciel. On peut cependant a priori s'étonner de ce que la diffusion par ce milieu, relativement peu dense, soit beaucoup plus efficace que la diffusion par un milieu transparent solide, contenant un nombre beaucoup plus grand de centres diffuseurs. Nous avons en effet montré que la longueur d'extinction typique (la longueur sur laquelle le rayonnement incident est notablement affaibli) est de quelques dizaines de kilomètres pour l'atmosphère. Pour des fibres optiques de haute qualité, la longueur d'atténuation est sensiblement plus grande, alors que la densité du milieu est au moins mille fois plus élevée. Il semble donc qu'un milieu dense à l'échelle de  $\lambda$  ne diffuse de manière particulièrement peu efficace. Nous essaierons aussi de comprendre pourquoi les cristaux, éclairés par une longueur d'onde de l'ordre de la maille cristalline, ne diffusent que dans des directions privilégiées et comment ces directions sont reliées aux paramètres du réseau cristallin.

Pour obtenir ces résultats nous ferons dans ce chapitre un certain nombre d'approximations. Elles seront détaillées dans le prochain paragraphe. Notons dès maintenant que nous ne traiterons que de la diffusion par un milieu statique. Un milieu où les centres diffuseurs se déplacent, même éclairé par une onde monochromatique, ne diffuse pas uniquement à la fréquence incidente en raison de l'effet Doppler. Pour traiter ce cas en détails, il nous faudrait des outils d'analyse d'un champ non monochromatique (fonctions de corrélation en particulier) qui ne seront pas introduites dans ce cours. Nous indiquerons brièvement à la fin du chapitre comment nos résultats seraient qualitativement modifiés dans ce cas. Nous donnerons une application importante à la diffusion par un milieu dépendant du temps avec la diffusion Brillouin (diffusion d'une onde électromagnétique par une onde sonore).

#### 3.3.1 Notations. Champ diffusé.

Nous considérons donc un milieu comprenant des centres diffuseurs, que nous appellerons "atomes", localisés au voisinage de l'origine (voir figure 3.4). Les diffuseurs, en nombre total  $\mathcal{N}$ , indicés par l'indice  $i$ , sont situés en  $\mathbf{r}_i$ . La polarisabilité de chaque diffuseur sera notée  $\alpha_i(\omega)$ . Elle peut en effet dépendre de la fréquence du rayonnement incident. Dans presque tous les calculs, par la suite, on n'explicitera pas sa dépendance en  $\omega$ . On observe le rayonnement dans la direction  $\mathbf{n}$ , définie par les angles d'Euler  $\theta$  et  $\phi$ . L'observateur est à une distance  $R$ , très grande par rapport à la taille du milieu et par rapport à toutes les autres dimensions caractéristiques du problème.

Le milieu est éclairé par une onde plane monochromatique, de fréquence  $\omega$ , se propageant selon  $Oz$ , polarisée selon  $Ox$  et d'amplitude  $E_0$ . On pourrait traiter le cas d'une polarisation incidente arbitraire en utilisant le principe de superposition. On pourrait traiter également le cas d'une onde de comportement temporel quelconque en la décomposant en composantes de Fourier. On posera  $\mathbf{k}_0 = k\mathbf{u}_z$ , avec  $k = \omega/c$  et  $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{u}_x$ . On supposera que tous les centres diffuseurs sont soumis à l'onde incidente non modifiée. On suppose donc que la diffusion n'atténue pas l'onde incidente, c'est à dire que le milieu diffuseur n'est pas trop dense (c'est bien sûr une densité de polarisabilité qui importe ici). Nous supposerons également que la diffusion multiple est négligeable. Nous ne tiendrons donc pas compte, dans le calcul des dipôles induits, des champs rayonnés par les autres dipôles. Là encore, il s'agit d'une approximation de faible densité.

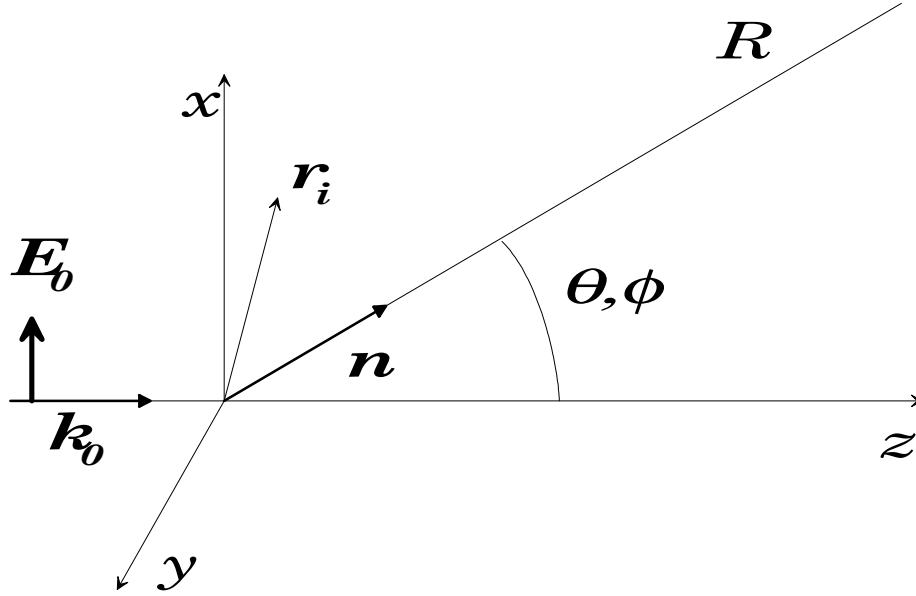


Figure 3.4: Notations pour la diffusion par un milieu matériel

L'onde incidente “vue” par l'atome  $i$  peut donc s'écrire:

$$\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} . \quad (3.77)$$

L'atome  $i$  prend donc un dipôle électrique égal à:

$$\mathbf{d}_i = \epsilon_0 \alpha_i \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} . \quad (3.78)$$

En utilisant les résultats sur le champ du dipôle, on peut écrire le champ rayonné par l'atome  $i$  au niveau de l'observateur (le vecteur joignant l'atome à l'observateur est évidemment  $R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i$ ) comme:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i|}}{|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i|} \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_i e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} . \quad (3.79)$$

Pour aller plus loin, nous allons utiliser le fait que la distance d'observation est très grande:  $R \gg |\mathbf{r}_i|$ . Nous allons donc, comme nous l'avons déjà fait souvent, traiter, dans le terme d'onde sphérique, le dénominateur d'amplitude à l'ordre zéro en  $R/|\mathbf{r}_i|$  et le terme de phase à l'ordre 1. On a:

$$|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i| \simeq R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i , \quad (3.80)$$

et donc:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_i e^{i((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i)} e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} , \quad (3.81)$$

où l'on a posé:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} . \quad (3.82)$$

On peut finalement mettre ce résultat sous la forme:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_d \alpha_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} , \quad (3.83)$$

avec

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 . \quad (3.84)$$

$\mathbf{q}$  apparaît donc comme la variation de vecteur d'onde entre l'onde incidente et l'onde diffusée. Il définit bien sûr complètement la direction d'observation. A un facteur  $\hbar$  près,  $\mathbf{q}$  est aussi la différence de quantité de mouvement entre les photons incidents et les photons diffusés. Notons que dans beaucoup d'autres cas (collisions de particules..), les amplitudes de diffusion s'expriment simplement à partir de ce transfert d'impulsion. On a aussi posé

$$\mathbf{e}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} . \quad (3.85)$$

Notons à ce point que  $\mathbf{e}_d$  est indépendant du diffuseur et de sa position. Il s'agit donc d'une donnée simple de la géométrie de la diffusion. Elle contient toute la dépendance angulaire du diagramme de rayonnement du dipôle. Elle s'annule en particulier pour une direction d'observation selon  $Ox$ . Tous les dipôles sont polarisés selon  $Ox$  et ne sauraient donc rayonner dans cette direction.  $\mathbf{e}_d$  peut s'exprimer simplement en fonction des angles d'Euler de la direction d'observation:

$$\mathbf{e}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} E_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) . \quad (3.86)$$

Pour comparer ce résultat avec celui que nous avons établi dans le paragraphe sur le rayonnement du dipôle, on prendra garde que le dipôle est ici aligné avec l'axe  $Ox$ , alors que les angles d'Euler sont relatifs à l'axe  $Oz$ , direction de propagation de l'onde incidente.

Le champ total rayonné par le milieu résulte de l'addition cohérente des champs diffusés par tous les centres

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i . \quad (3.87)$$

On peut passer facilement de cette somme discrète à une intégrale continue sur le volume  $V$  du milieu en introduisant une densité de polarisation. En fait, nous poserons:

$$\delta n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) . \quad (3.88)$$

Nous verrons en effet dans la prochaine partie que l'indice de réfraction d'un milieu suffisamment peu dense (au sens de la polarisation) est l'unité plus le demi produit de la polarisabilité atomique par la densité numérique du milieu (le résultat est évidemment sans dimension). Comme notre milieu est supposé faiblement diffusant,  $\delta n$  apparaît clairement relié à l'écart à un de l'indice de réfraction. Notons toutefois que l'indice habituel n'a de sens que si on moyenne les densités de polarisation atomique à une échelle grande par rapport à la distance moyenne entre atomes et petite devant  $\lambda$ . Nous n'avons pas réalisé ce moyennage ici, et  $\delta n$  est une quantité tenant compte de la position individuelle de tous les atomes.

Avec ces notations, nous obtenons le résultat central de ce chapitre: le champ total diffusé dans la direction définie par  $\mathbf{q}$ , se met sous la forme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = 2\mathbf{e}_d \int \delta n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} . \quad (3.89)$$

Nous n'indiquons pas les bornes de l'intégrale,  $\delta n$  étant nul en dehors du volume  $V$  du milieu. Les propriétés de la diffusion sont donc décrites par la transformée de Fourier de la distribution d'indice du milieu. Ce résultat n'est pas sans évoquer la diffraction de Fraunhofer. La différence essentielle est que nous traitons ici de sources réelles réparties en volume et non des sources fictives du principe de Huygens, réparties sur la surface d'une ouverture.

Dans la suite, nous utiliserons surtout cette expression du champ diffusé. On peut noter toutefois qu'il est possible d'exprimer simplement l'intensité totale diffusée dans la direction  $\mathbf{q}$ . La structure de l'onde à grande distance étant très voisine de celle d'une onde plane, on peut écrire en effet:

$$I = \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \delta n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \int \delta n^*(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' . \quad (3.90)$$

En posant  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ , le produit de transformées de Fourier peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution:

$$I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \delta n(\mathbf{r}) \delta n^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\mathbf{r} d\boldsymbol{\rho} . \quad (3.91)$$

On peut donc mettre finalement l'intensité diffusée sous la forme d'une transformée de Fourier inverse en  $\boldsymbol{\rho}$ :

$$I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \Gamma(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} , \quad (3.92)$$

où la fonction  $\Gamma(\boldsymbol{\rho})$ , définie par:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \int \delta n(\mathbf{r}) \delta n^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} \quad (3.93)$$

est la fonction d'autocorrélation spatiale de la répartition d'indice du milieu. L'intensité diffusée est donc la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'autocorrélation de l'indice. Ce résultat se généralise aux milieux diffuseurs dépendant du temps. C'est alors la densité spectrale d'énergie diffusée qui est égale à la transformée de Fourier spatio-temporelle de la fonction de corrélation spatio-temporelle de l'indice.

### 3.3.2 Cas d'un milieu homogène

Considérons d'abord la diffusion par un milieu dense homogène, comme par exemple un verre transparent. Les distances moyennes entre centres diffuseurs, de l'ordre de l'Ångström, sont alors beaucoup plus petites que la longueur d'onde. On peut donc remplacer, dans la transformée de Fourier donnant le champ diffusé, le terme  $\delta n(\mathbf{r})$  par une constante à l'intérieur du volume  $V$  – nous justifierons rigoureusement ce remplacement dans le prochain paragraphe. Nous poserons  $n = 1 + \delta n$ . Pour un milieu dense et homogène,  $n$  est effectivement l'indice de réfraction ordinaire <sup>10</sup>.

Le champ diffusé s'écrit alors:

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{e}_d (n - 1) \int_V e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (3.94)$$

Dans la limite d'un volume infini, l'intégrale serait, à un facteur près, une fonction de Dirac  $\delta(\mathbf{q})$ . L'intégrale, ne portant que sur un volume fini, reste finie. Elle n'est toutefois non négligeable que dans un domaine étroit autour de  $\mathbf{q} = 0$  (dont l'extension en termes de vecteurs d'onde est de l'ordre de l'inverse des dimensions transverses du milieu – un résultat élémentaire de théorie de la diffraction). Pour  $\mathbf{q} = 0$ , la valeur de l'intégrale est  $V$ . On peut donc écrire:

$$\int_V e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = V \delta_V(\mathbf{q}) , \quad (3.95)$$

où  $\delta_V$  est une fonction très piquée au voisinage de l'origine, de valeur maximale 1.

Le milieu homogène diffuse donc un champ proportionnel au volume, ou encore au nombre d'atomes  $\mathcal{N}$ , seulement dans la direction initiale de l'onde incidente. Il n'y a donc pas, dans les milieux denses et homogènes, de diffusion dans des directions latérales. On comprend ainsi la très faible atténuation par diffusion dans les fibres optiques. La diffusion vers l'avant, cohérente avec l'onde incidente, interfère avec celle-ci. C'est de cette interférence que résulte l'onde se propageant finalement dans le milieu. Le calcul complet des caractéristiques de cette onde à partir de l'expression du champ diffusé est complexe. Nous verrons dans la prochaine partie comment établir rigoureusement et simplement ce résultat en utilisant la théorie de la réponse linéaire. Nous montrerons que l'onde totale est une onde plane se propageant avec un vecteur d'onde  $n\mathbf{k}_0$  et une vitesse de phase  $c/n$ . L'indice de réfraction du milieu peut donc être compris comme résultant de la diffusion cohérente vers l'avant de tous les atomes du milieu.

---

<sup>10</sup>La valeur constante de  $\delta n$  étant bien sûr invariante dans les procédures de moyennage qui nous seront nécessaires pour définir l'indice de réfraction.

### 3.3.3 Diffusion par un cristal

Considérons maintenant plus complètement le problème de la diffusion par une assemblée dense d'atomes immobiles. Nous allons supposer que ces atomes sont aux nœuds d'un réseau cristallin. Pour simplifier les calculs, nous prendrons un réseau cubique simple, les directions principales du cristal correspondant aux axes. La généralisation à d'autres orientations cristallines ou à d'autres types de réseaux cristallins ou quasi-cristallins ne pose que des problèmes algébriques. La position des atomes, supposés tous identiques, est donc définie par trois entiers,  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$ , avec:

$$\mathbf{r}_i = a(n_x \mathbf{u}_x + n_y \mathbf{u}_y + n_z \mathbf{u}_z) , \quad (3.96)$$

où  $a$  est la maille cristalline. Nous noterons  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_z$  les nombres d'atomes dans les trois directions de l'espace (nous supposons donc que la forme globale du cristal est aussi un cube). On a évidemment  $\mathcal{N} = N_x N_y N_z$ . Pour ce problème, il est bien sûr avantageux d'utiliser l'expression du champ diffusé comme une somme discrète sur la position des atomes individuels:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_d \alpha \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-ia\mathbf{q} \cdot (n_x \mathbf{u}_x + n_y \mathbf{u}_y + n_z \mathbf{u}_z)} . \quad (3.97)$$

Ce champ peut encore s'écrire en termes des composantes  $q_x$ ,  $q_y$  et  $q_z$  du transfert de vecteur d'onde:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_d \alpha \left( \sum_{n_x=1}^{N_x} e^{iq_x n_x a} \right) \left( \sum_{n_y=1}^{N_y} e^{iq_y n_y a} \right) \left( \sum_{n_z=1}^{N_z} e^{iq_z n_z a} \right) . \quad (3.98)$$

Les sommes de séries géométriques s'évaluent sans difficulté. A un facteur de phase sans intérêt près,

$$\sum_{n_x=1}^{N_x} e^{iq_x n_x a} = \frac{\sin \frac{q_x N_x a}{2}}{\sin \frac{q_x a}{2}} . \quad (3.99)$$

Le champ diffusé est donc le produit de trois fonctions de diffraction simples portant sur les composantes de  $\mathbf{q}$ . Les directions où l'intensité diffusée est maximale sont telles que, simultanément:

$$q_x = \frac{2\pi}{a} p_x, \quad q_y = \frac{2\pi}{a} p_y, \quad q_z = \frac{2\pi}{a} p_z , \quad (3.100)$$

où  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  sont trois entiers. Le champ diffusé n'est donc maximal que dans des directions discrètes pour lesquelles le vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  est sur un point d'un réseau cubique de maille  $2\pi/a$ . Ce réseau, qui est essentiellement le réseau obtenu par transformée de Fourier spatiale du réseau initial, est appelé réseau réciproque. Pour tout réseau cristallin, il existe un réseau réciproque. Ce n'est toutefois que dans le cas du réseau cubique simple que le réseau réciproque est géométriquement identique au réseau initial. Notons à ce point que l'amplitude du champ diffusé dans un de ces maximums est proportionnelle à  $N_x N_y N_z = \mathcal{N}$ . Il s'agit donc bien, comme dans le cas du milieu homogène, d'une diffusion cohérente où le champ est proportionnel au nombre d'atomes et l'intensité au carré de ce nombre.

La géométrie de la diffusion est représentée sur la figure 3.5. Le vecteur  $\mathbf{q}$  appartient au réseau réciproque. Les vecteurs d'onde incident et émergent,  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$  sont donc tels que leur différence est un point du réseau réciproque. Une solution est  $\mathbf{q} = 0$  correspondant à la diffusion vers l'avant. Elle est bien sûr toujours possible (quelle que soit la nature du réseau cristallin, évidemment). Les normes des vecteurs  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$  étant identiques ( $\omega/c$ ), il n'existe pas nécessairement d'autre solution. Notons en effet  $\Theta$  l'angle entre  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$  (angle de diffusion). On a évidemment en module:

$$q = 2k \sin \frac{\Theta}{2} . \quad (3.101)$$



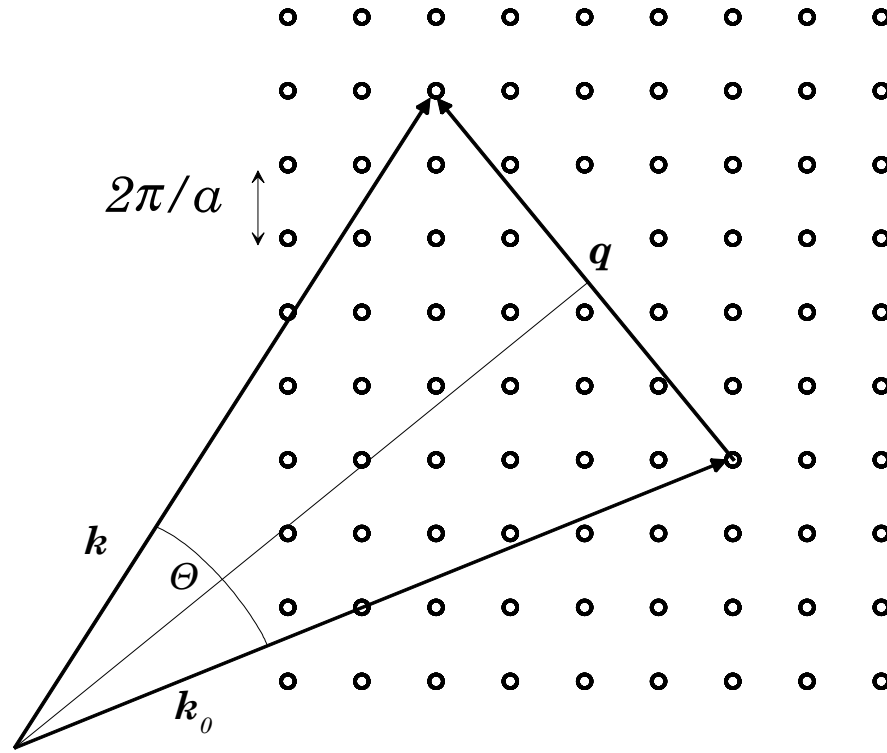


Figure 3.5: Géométrie de la diffusion par un cristal.

Il n'existe de solution en termes de  $\Theta$  que si:

$$q < 2k . \quad (3.102)$$

La plus petite distance non nulle possible sur le réseau réciproque est sa maille,  $2\pi/a$ . On n'aura donc de solution dans une direction différente de la direction incidente que si  $2\pi/a < 2k$ , ce qu'on peut encore écrire:

$$a > \lambda/2 . \quad (3.103)$$

Si la longueur d'onde incidente est plus grande que  $2a$ , il n'y a que la diffusion vers l'avant. Nous étendons donc la validité des résultats du paragraphe précédent, établis a priori pour une distance moyenne entre atomes très petite devant  $\lambda$ . Pour  $\lambda < 2a$ , il y a au moins une direction de diffusion efficace. Pour une longueur d'onde incidente suffisamment petite, on doit voir plusieurs directions correspondant à plusieurs points du réseau réciproque.

Cette diffusion cohérente dans des directions privilégiées est appelée diffusion de Bragg. Elle a en effet été largement utilisée par Bragg pour les premières déterminations de structures cristallines par diffusion de rayonnement X. C'est encore une méthode d'étude précieuse des matériaux. En enregistrant la lumière diffusée par un cristal, on enregistre les points du réseau réciproque. Il est alors facile de remonter, par transformation de Fourier, au réseau cristallin original. Nous avons considéré uniquement le cas d'atomes identiques. Dans un cristal plus complexe, on observe la superposition des figures de diffusion dues aux différentes espèces cristallines. Les différences d'amplitude de diffusion individuelles (dans le terme  $e_d\alpha$ ) permettent de remonter à l'arrangement tridimensionnel des atomes. L'ensemble de ces techniques peut être transposé à la diffusion d'autres types de rayonnement. Le fonctionnement ultime des microscopes électroniques correspond à une diffusion de Bragg des ondes électroniques sur le réseau cristallin. Les neutrons sont aussi largement utilisés. Ils interagissent en effet beaucoup mieux que les rayons X avec certains atomes légers.

### 3.3.4 Diffusion par un milieu désordonné

Considérons maintenant la diffusion par un milieu désordonné. Nous supposons que les positions des centres diffuseurs sont aléatoires et que la densité n'est pas trop grande. Le nombre de centres diffuseurs dans un élément de volume de l'ordre de  $\lambda^3$  est donc aléatoire. Nous pouvons comprendre à partir de cela les propriétés qualitatives du rayonnement diffusé.

$\mathbf{E}(\mathbf{q})$  est en effet la transformée de Fourier en  $\mathbf{q}$  de  $\delta n$ . Si  $q$  est très voisin de zéro (diffusion vers l'avant),  $\mathbf{E}$  est déterminé par une moyenne à grande échelle (extension spatiale de l'ordre de  $1/q$ ) de la fluctuation d'indice. Même si le nombre de particules varie à l'échelle de  $\lambda$ , l'indice moyenné sur une échelle beaucoup plus grande est constant. On retrouve donc, vers l'avant, une diffusion cohérente de tous les atomes, comme dans le cas du milieu dense. Là encore, la notion d'indice de réfraction ordinaire prend tout son sens.

En revanche, si on s'intéresse au rayonnement diffusé dans une direction quelconque, on échantillonne dans  $\delta n$  les variations spatiales à une échelle de l'ordre de  $\lambda$ , qui sont importantes par hypothèse. Il y aura donc de la lumière diffusée. De plus, si  $\delta n$  est réellement aléatoire, il se comporte comme un bruit blanc dont la transformée de Fourier est pratiquement indépendante de  $\mathbf{q}$ . On peut donc s'attendre à une transformée de Fourier isotrope et à un diagramme de diffusion dominé par le terme  $\mathbf{e}_d$  (il ne saurait y avoir de diffusion selon  $Ox$  quelle que soit la géométrie du milieu).

Précisons un peu ce raisonnement très qualitatif en nous intéressant à l'intensité diffusée dans une direction  $\mathbf{k}$  très différente de la direction initiale. Cette intensité est proportionnelle à la composante de Fourier de la fonction d'autocorrélation de l'indice à une fréquence spatiale de l'ordre de  $\lambda$ . Pour estimer cette fonction d'autocorrélation, divisons le milieu en petits éléments de volume  $\Delta V$  de taille de l'ordre de  $\lambda^3$ . Nous supposons que le nombre d'atomes  $p$  dans chaque élément de volume est une fonction aléatoire et que les nombres de particules dans des volumes adjacents sont des fonctions aléatoires indépendantes (nous prenons ici une image statique du gaz, un instantané de la position de toutes les molécules dans un gaz réel. Cette approximation est donc raisonnable).

La fonction d'autocorrélation d'indice peut s'écrire, à un facteur  $|\alpha|^2/4$  près, comme la fonction d'autocorrélation de la densité numérique  $N(\mathbf{r})$  des particules:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{|\alpha|^2}{4} \int N(\mathbf{r})N(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} . \quad (3.104)$$

La densité numérique comporte un terme moyen,  $N_0$ , auquel s'ajoutent les fluctuations  $N_f$ :  $N = N_0 + N_f$ . La valeur moyenne spatiale de ces fluctuations est évidemment nulle. Si on reporte dans l'expression ci-dessus cette décomposition de  $N$ , on voit donc apparaître seulement deux termes. L'un est l'intégrale de  $N_0^2$  et ne contribue qu'à la diffusion vers l'avant. C'est le seul terme qui intervient dans le cas du milieu homogène. On peut donc, pour la diffusion latérale, l'oublier. L'autre terme est l'autocorrélation de la fluctuation de densité. On peut donc écrire:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{|\alpha|^2}{4} \int_V N_f(\mathbf{r})N_f(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} . \quad (3.105)$$

Avec nos hypothèses, les fluctuations de densité de deux cellules adjacentes ne sont pas corrélées.  $\Gamma$  sera donc nulle dès que  $\boldsymbol{\rho}$  est plus grand que la taille caractéristique d'une cellule, c'est à dire  $\lambda$ . Essentiellement, à l'échelle du volume total du milieu,  $\Gamma$  n'est non nulle que dans un voisinage de l'origine d'extension  $\Delta V$ . Estimons maintenant l'ordre de grandeur de  $\Gamma$  dans ce voisinage, c'est à dire l'ordre de grandeur de  $\Gamma(0)$ . En supposant le milieu invariant par translation,

$$\Gamma(0) = \frac{|\alpha|^2}{4} V N_f^2 \quad (3.106)$$

Soit  $p$  le nombre de particules dans une cellule donnée. Il doit obéir à une loi de Poisson avec une valeur moyenne  $N\Delta V$ . L'écart quadratique moyen de  $p$ ,  $\Delta p^2$  doit donc être égal à cette valeur

moyenne. La densité numérique dans cette cellule est  $p/\Delta V$ .  $N_f^2$  est l'écart quadratique moyen de la densité numérique dans les cellules. On a donc

$$N_f^2 \simeq \frac{\Delta p^2}{\Delta V^2} \simeq \frac{p}{\Delta V^2} = \frac{N}{\Delta V} . \quad (3.107)$$

L'ordre de grandeur de la fonction d'autocorrélation est donc:

$$\Gamma(0) = \frac{|\alpha|^2}{4} N \frac{V}{\Delta V} \quad (3.108)$$

Un modèle simple de  $\Gamma$  est donc de prendre une valeur constante égale à  $\Gamma(0)$  dans le volume  $\Delta V$  autour de l'origine et zéro partout ailleurs. La transformation de Fourier, en ordres de grandeur, se ramène alors à une multiplication par  $\Delta V$  et l'intensité diffusée dans une direction loin de l'incidence est donc finalement proportionnelle à:

$$I \simeq |\mathbf{e}_d|^2 |\alpha|^2 N V \simeq |\mathbf{e}_d|^2 |\alpha|^2 \mathcal{N} . \quad (3.109)$$

L'intensité est ici seulement proportionnelle au nombre d'atomes, alors qu'elle était proportionnelle à son carré pour la diffusion par un milieu dense. C'est là un comportement caractéristique de l'émission incohérente, dont nous avons déjà rencontré un exemple avec la diffusion par un réseau aléatoire d'ouvertures. En fait, le rayonnement diffusé est simplement  $\mathcal{N}$  fois le rayonnement diffusé par un atome unique (le diagramme de rayonnement étant donc essentiellement celui d'un dipôle unique). Ce résultat légitime les calculs de longueur d'extinction que nous avons faits pour la diffusion par l'atmosphère.

### 3.3.5 Influence de la dynamique du milieu

Dans beaucoup de cas, on ne peut pas considérer les atomes ou les centres diffuseurs comme immobiles. Si nos approximations sont réalistes pour un milieu dense ou un cristal (jusqu'à un certain point), elles tombent sûrement pour un gaz. Le rayonnement diffusé n'est plus monochromatique. On peut le comprendre qualitativement simplement en introduisant l'effet Doppler sur l'onde diffusée par une particule mobile. Pour décrire un tel champ et son spectre, on définit une densité spectrale d'énergie rayonnée,  $J(\nu)$ , telle que l'intensité dans une bande de fréquence  $d\nu$  (on prendra garde que  $\nu$  est en fait ici une pulsation) autour de  $\nu$  soit  $J(\nu)d\nu$ . On peut alors définir la diffusion par la fonction  $J(\mathbf{q}, \nu)$  qui donne la densité spectrale du rayonnement diffusé dans la direction définie par  $\mathbf{q}$ . On montre, par des arguments très similaires à ceux que nous avons utilisés, que cette fonction est la transformée de Fourier spatio-temporelle de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle des fluctuations d'indice (définies à partir de la polarisabilité) et qui dépendent cette fois de la position et du temps:

$$J(\mathbf{q}, \nu) = \frac{2}{\pi} |\mathbf{e}_d|^2 \int d\tau d\boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} e^{-i(\nu-\omega)\tau} \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) , \quad (3.110)$$

avec

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \int d\mathbf{r} \overline{\delta n^*(\mathbf{r}, t_0) \delta n(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, t_0 - \tau)} . \quad (3.111)$$

Dans la dernière expression,  $\overline{\delta n}$  représente une moyenne temporelle sur  $t_0$  à une échelle de temps longue par rapport aux temps du problème.

Pour un milieu statique, toutes les fonctions de  $\nu$  se ramènent à un Dirac centré à la fréquence incidente  $\omega$  et toutes les discussions précédentes restent valables. Pour un milieu quelconque, la fréquence est modifiée. Il est facile de voir que, pour un gaz, par exemple, la diffusion reste isotrope, mais que le spectre du rayonnement diffusé est essentiellement le spectre Doppler du milieu. Plus généralement, l'étendue spectrale du rayonnement doit être l'inverse du temps caractéristique de la fonction de corrélation (qui est presque toujours maximale à temps nul et décroissante ensuite). Pour

l'effet Doppler, le temps caractéristique est le temps nécessaire pour que les molécules se déplacent de  $\lambda$ , soit  $\lambda/v = 2\pi c/\omega v$  où  $v$  est la vitesse caractéristique des molécules. On retrouve bien une largeur Doppler relative égale à  $v/c$ . Le calcul précis des fonctions de corrélation est souvent assez délicat et nous ne l'aborderons pas d'avantage ici.

Nous allons en revanche appliquer la formule précédente à un cas simple et intéressant technologiquement, la diffusion Brillouin, ou diffusion d'une onde lumineuse par une onde sonore. C'est, comme nous le verrons, un phénomène important pour comprendre les bruits dans les fibres optiques. C'est aussi le phénomène qui constitue les modulateurs acousto-optiques, très utilisés en physique des lasers.

Nous considérons donc un milieu parcouru par une onde acoustique sinusoïdale de fréquence  $\omega_s$ . Cette onde correspond à une modulation de la densité du milieu et donc à une modulation de l'indice de réfraction. On peut donc écrire l'indice au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$  sous la forme:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 + n_1 \cos(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t) . \quad (3.112)$$

Dans cette expression,  $n_0$  est l'indice moyen du milieu. Comme dans le paragraphe précédent, cet indice uniforme et statique ne contribue qu'à la propagation dans la direction initiale. Tous les phénomènes non triviaux sont contenus dans le second terme, dont les moyennes spatiales et temporelles sont nulles. Nous n'utiliserons donc, dans le calcul des fonctions de corrélation, que ce second terme.

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_s$  a pour module  $\omega_s/v_s$ , où  $v_s$  est la vitesse du son dans le milieu. Pour fixer les ordres de grandeur, nous considérerons un milieu cristallin, où la vitesse du son est de quelques kilomètres par seconde:  $v_s \simeq 10^3$  m/s. Nous considérerons une fréquence résolument ultrasonore,  $\omega_s \simeq 6.10^8$  (soit 100 MHz en unités de fréquence).  $k_s$  est alors de l'ordre de  $6.10^5$ /m, soit une longueur d'onde de l'ordre de  $2\pi/k_s = 10 \mu\text{m}$ . De manière évidente, il n'y aura d'effet sensible de l'onde sonore que si elle n'est pas trop grande par rapport à la longueur d'onde optique dans le matériau, c'est à dire si la fréquence acoustique est au moins de cet ordre. Pour des fréquences d'onde sonore très basses, on a simplement une propagation vers l'avant avec une petite modulation de phase.

Il est facile alors d'écrire la fonction de corrélation, en prenant, comme l'indique sa définition, l'onde acoustique sous forme complexe  $n_1 \exp(i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t))$ :

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = n_1^2 \int d\mathbf{r} \overline{e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t_0)} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \omega_s(t_0 - \tau))}} . \quad (3.113)$$

Le temps  $t_0$  s'élimine naturellement et il ne reste qu'une quantité invariante dans le processus de moyennage temporel. La dépendance en  $\mathbf{r}$  s'annulant aussi, l'intégrale de volume se ramène à une simple multiplication par  $V$  et on trouve finalement:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = n_1^2 V e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_s \tau)} . \quad (3.114)$$

La densité spectrale de rayonnement diffusé s'exprime alors simplement. La transformée de Fourier spatiale de l'exponentielle complexe dans  $\Gamma$  se ramène, pour un milieu de grande extension, à une fonction de Dirac. La transformée de Fourier temporelle donne exactement une fonction de Dirac. On trouve donc finalement, à des coefficients numériques près qui contiennent diagramme de rayonnement des dipôles et des termes en  $n_1^2$  proportionnels à l'intensité de l'onde sonore:

$$J(\mathbf{q}, \nu) \propto \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s) \delta(\nu - \omega_s - \omega) \mathcal{N}^2 . \quad (3.115)$$

Il ne sort donc du milieu, en plus de l'onde dans la direction initiale, qu'un seul faisceau diffusé, dans la direction définie par  $\mathbf{q} + \mathbf{k}_s$ . La fréquence de ce faisceau est décalée par rapport à la fréquence de l'onde incidente de  $\omega_s$ . On peut comprendre assez facilement ce résultat en faisant appel à la notion de phonon. La propagation d'ondes acoustiques dans un réseau cristallin peut en effet se comprendre comme la propagation de quasi-particules, très analogues au photon, que l'on nomme phonons. Ces particules, d'énergie  $\hbar\omega_s$ , ont une quantité de mouvement  $\hbar\mathbf{k}_s$ . Les photons incidents ont une impulsion

$\hbar\mathbf{k}$  et une énergie  $\hbar\omega_s$ . La collision entre un photon et un phonon, si elle respecte la conservation de l'impulsion et de l'énergie, doit donc produire un photon d'impulsion  $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_s)$  et d'énergie  $\hbar(\omega + \omega_s)$ . Si ces arguments très simples ne permettent pas de donner la probabilité que l'événement se produise (c'est à dire de calculer l'intensité de l'onde diffusée), ils permettent néanmoins de comprendre les caractéristiques essentielles de l'onde produite.

Cette diffusion cohérente d'une onde lumineuse sur une onde sonore joue un grand rôle en optique. Un rôle néfaste, d'abord, pour les transmissions par fibre optique. Les collisions des photons avec les ondes sonores thermiquement excitées dans la fibre sont une cause importante de bruit de phase et de perte de signal optique. Il est très difficile de s'en affranchir. Les vibrations couplées efficacement aux ondes lumineuses ont une énergie de quelques centaines de MHz et sont donc largement peuplées par le bruit thermique de phonons.

En revanche, la diffusion Brillouin peut être mise à profit pour dévier et transposer en fréquence un faisceau laser. C'est le principe du modulateur acousto-optique, très utilisé maintenant. L'intérêt en est essentiellement la transposition de fréquence. A partir d'un seul faisceau laser, on peut disposer d'autres faisceaux de fréquences différentes mais ayant une relation de phase parfaitement bien définie avec le faisceau initial. L'exploration de fréquence que l'on peut atteindre dépend essentiellement de la bande passante des transducteurs électromécaniques créant l'onde. On peut maintenant couvrir une gamme de quelques centaines de MégaHertz. En optimisant le fonctionnement, l'efficacité de conversion entre la puissance incidente et la puissance transposée peut avoisiner 90%. On peut donc envisager de cascader ces modulateurs pour étendre l'excursion en fréquence. Enfin, en modulant temporellement l'intensité de l'onde sonore, on peut moduler l'intensité de l'onde diffusée sans changer sa direction ni sa fréquence. On peut ainsi réaliser des obturateurs très rapides, avec des temps de réponse très inférieurs à la microseconde. La déflexion du faisceau, enfin, peut être utilisée pour réaliser des balayages rapides. Les premières imprimantes laser fonctionnaient sur ce principe. Les modulateurs acousto-optiques, très coûteux, ont depuis été remplacés par des miroirs holographiques rotatifs.



## Appendice 1

# Réaction de rayonnement: modèle d'Abraham–Lorentz

Nous avons introduit la force de réaction de rayonnement par un simple argument de bilan énergétique. Nous allons, dans cet appendice, donner un modèle très naïf de particule chargée qui prédit correctement l'expression de cette force et qui montre qu'elle est en fait la résultante des forces que la particule exerce sur elle-même, non nulle si l'accélération de la particule varie. Nous montrerons aussi que ce modèle a des limites sérieuses (non-invariance relativiste, prédiction d'une masse électromagnétique incorrecte) et qu'il ne faut donc le prendre que comme un guide qualitatif.

Nous considérerons donc la particule chargée comme une distribution volumique de charges à symétrie sphérique. Si la particule était immobile, la distribution de charges s'écrirait simplement  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ , l'origine étant bien sûr choisie au centre. Nous considérerons une particule en mouvement d'ensemble non relativiste. La distribution de charge se déplace donc en bloc avec une vitesse  $\mathbf{v}(t)$ . La densité de charges résultante s'écrit donc  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et la densité de courant associée  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho\mathbf{v}(t)$ . Nous choisirons l'origine au centre de la particule à un instant  $t$  donné. La particule est placée dans un champ électromagnétique extérieur  $\mathbf{E}_x, \mathbf{B}_x$ . Nous noterons  $\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{B}_s$  les champs électriques et magnétiques produits par la particule en mouvement elle-même. Les champs totaux sont donc la somme de ces champs et des champs extérieurs.

Nous supposerons que toutes les propriétés énergétiques ou inertielles de la particule sont liées à son seul champ électromagnétique. La “masse mécanique” de la particule est donc nulle. L'équation du mouvement impose donc que la somme des forces de Lorentz dues au champ extérieur  $\mathbf{F}_x$  et au champ propre  $\mathbf{F}_s$  s'annulent. Nous devons donc avoir:

$$\mathbf{F}_x = - \int \rho \mathbf{E}_s + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_s , \quad (1.1)$$

où l'intégrale s'étend à l'ensemble du volume de la particule. Nous allons exprimer cette intégrale en termes des dérivées successives de la vitesse de la particule. Nous aurons ainsi écrit une équation du mouvement décrivant l'évolution de la vitesse de la particule dans un champ extérieur. Nous verrons que le terme en dérivée seconde de la vitesse donne la force de réaction de rayonnement et que le terme en dérivée de la vitesse permet de définir une masse d'origine électromagnétique pour la particule.

Avant d'entrer dans les détails du calcul, il est important de préciser que ce modèle n'est pas très réaliste. Son principal défaut est d'imaginer une distribution de charges qui reste stable sous l'influence des seules forces électromagnétiques. Il est évident que notre répartition de charges devrait exploser littéralement sous l'influence des forces de Coulomb. En admettant même qu'on puisse décrire une particule de façon aussi naïve, il faudrait ajouter au modèle des forces de cohésion de nature non électromagnétique. A ces forces serait associée une énergie et donc une contribution à l'inertie. Le calcul est faisable et permet de corriger certains défauts du modèle mais la description en termes de distribution étendue des particules élémentaires reste bien naïve.

Nous devons donc calculer l'intégrale des forces de Lorentz produites par la particule elle-même. Il est tout à fait évident d'abord que, pour un mouvement non relativiste, les forces magnétiques jouent un rôle négligeable. Nous écrirons donc:

$$\mathbf{F}_x = - \int \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} . \quad (1.2)$$

Le champ  $\mathbf{E}_s$  dérive des potentiels retardés  $V_s$  et  $\mathbf{A}_s$ . On a:

$$V_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d^3 \mathbf{r}' \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d^3 \mathbf{r}' , \quad (1.4)$$

où  $R = |\mathbf{R}|$  avec  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . L'extension de la particule étant petite, les temps retardés sont pratiquement égaux à  $t$ . On peut donc effectuer un développement de Taylor à tous les ordres des potentiels en puissance du retard  $R/c$ .

Pour le potentiel vecteur, on a:

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3 \mathbf{r}' R^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) . \quad (1.5)$$

On peut alors facilement exprimer  $-\partial \mathbf{A}_s / \partial t$  et donner la contribution du champ électromoteur à l'intégrale de la force de Lorentz:

$$\mathbf{F}_{x, \mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) . \quad (1.6)$$

Notons que dans la suite du calcul, les sommes porteront implicitement sur  $n$ , entre zéro et l'infini.

Pour le potentiel scalaire le même développement donne:

$$V_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3 \mathbf{r}' R^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \rho(\mathbf{r}', t) , \quad (1.7)$$

dont on calcule facilement le gradient par rapport à  $\mathbf{r}$  (notons que cette dérivation commute avec l'intégrale sur  $\mathbf{r}'$ ). On trouve finalement une contribution à la force de Lorentz:

$$\mathbf{F}_{x, V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} R^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \rho(\mathbf{r}', t) . \quad (1.8)$$

Considérons les deux premiers termes dans le développement de  $\mathbf{F}_{x, V}$ . Le premier fait intervenir:

$$\int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) \nabla_{\mathbf{r}} R . \quad (1.9)$$

On y reconnaît facilement un terme proportionnel à l'intégrale sur la distribution de charges de la force de Coulomb exercée par les autres parties de la distribution. Le principe de l'action et de la réaction, vérifié par les forces électrostatiques, montre alors que cette intégrale est nulle. Le terme d'ordre un est nul lui aussi, puisqu'il fait intervenir l'intégrale du gradient d'une constante. Le premier terme non nul est donc au moins à l'ordre 2. On peut en fait regrouper, au prix d'une simple renumérotation, les termes d'ordre  $n$  issus du potentiel vecteur et les termes d'ordre  $n+2$  issus du potentiel scalaire et écrire finalement:

$$\mathbf{F}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \mathbf{C}_n(\mathbf{r}, t) , \quad (1.10)$$

avec:

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{r}, t) = \int d^3 \mathbf{r}' R^{n-1} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \frac{\nabla_{\mathbf{r}} R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}} \right] . \quad (1.11)$$



La contribution du deuxième terme du crochet dans  $\mathbf{C}_n$  peut être transformée en utilisant l'équation de conservation de la charge:  $\partial\rho/\partial t = -\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}$ . On remarquera aussi que:

$$\nabla_{\mathbf{r}} R^{n+1} = (n+1)\mathbf{R}R^{n-1} . \quad (1.12)$$

Le deuxième terme du crochet se réécrit donc:

$$-\frac{1}{n+2} \int d^3\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) R^{n-1} \mathbf{R} . \quad (1.13)$$

En utilisant alors une formule peu connue d'intégration par parties:

$$\int \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) = - \int (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} , \quad (1.14)$$

valable si les champs s'annulent à l'infini, ce qui est évident ici, on peut écrire ce deuxième terme sous la forme:

$$\frac{1}{n+2} \int d^3\mathbf{r}' (\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) R^{n-1} \mathbf{R} . \quad (1.15)$$

On a alors:

$$(\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) R^{n-1} \mathbf{R} = R^{n-1} (\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{R} + [(\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) R^{n-1}] \mathbf{R} , \quad (1.16)$$

et

$$(\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) R^{n-1} = -(n-1) R^{n-1} \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} , \quad (1.17)$$

ainsi que:

$$(\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{R} = -\mathbf{j} . \quad (1.18)$$

En regroupant tous ces termes, on met finalement l'intégrale  $\mathbf{C}_n$  sous la forme:

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' R^{n-1} \left[ \frac{n+1}{n+2} \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{v}(t) - \frac{n-1}{n+2} \rho(\mathbf{r}', t) \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} \right] , \quad (1.19)$$

où nous avons utilisé  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . Pour des raisons de symétrie évidente, cette intégrale doit avoir la direction de la vitesse  $\mathbf{v}$ . Dans l'intégrale, toutes les orientations de  $\mathbf{R}$  par rapport à  $\mathbf{v}$  apparaissent de façon symétrique. Il est donc possible, sans changer le résultat final, de remplacer le deuxième terme du crochet par la valeur moyenne de sa projection sur  $\mathbf{v}$  pour toutes les orientations possibles de  $\mathbf{R}$ . Cette valeur est proportionnelle à la moyenne du cosinus carré de l'angle entre  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{R}$ , soit  $1/3$ . On a donc:

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{3} \mathbf{v}(t) \int d^3\mathbf{r}' R^{n-1} \rho(\mathbf{r}', t) , \quad (1.20)$$

un résultat étonnamment simple.

Reportons maintenant cette expression dans celle de la force de Lorentz. Nous devons prendre la  $n+1^{\text{ème}}$  dérivée temporelle de  $\mathbf{C}_n$ . Il apparaît ainsi les termes en dérivées successives de la vitesse. Mais il apparaît aussi des termes faisant intervenir les dérivées temporelles de  $\rho$ .  $\mathbf{v}$  étant la vitesse d'ensemble,  $\partial\rho/\partial t \simeq (\nabla\rho) \cdot \mathbf{v}$ . Les termes en dérivées de  $\rho$  sont donc des termes quadratiques dans la vitesse et ses dérivées. Nous pourrions les négliger si la vitesse est suffisamment faible et écrire finalement:

$$\mathbf{F}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum \frac{(-1)^n}{n! c^n} \frac{\partial^{n+1} \mathbf{v}(t)}{\partial t^{n+1}} \frac{2}{3} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) R^{n-1} . \quad (1.21)$$

Explicitons le terme d'ordre 0:

$$\mathbf{F}_x^0 = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \dot{\mathbf{v}} , \quad (1.22)$$

où

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t)}{R} , \quad (1.23)$$

est simplement l'énergie électrostatique de la distribution de charges. A l'ordre 1, nous avons:

$$\mathbf{F}_x^1 = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} , \quad (1.24)$$

où

$$q = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) , \quad (1.25)$$

est simplement la charge totale de la distribution. On peut donc écrire finalement, en négligeant les termes d'ordre supérieur, l'équation du mouvement de la particule sous la forme:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_r , \quad (1.26)$$

où  $\mathbf{F}_x$  est la résultante des forces extérieures et  $\mathbf{F}_r$  la force de réaction de rayonnement que nous obtenons ici directement sous la forme démontrée par les arguments énergétiques dans le corps du chapitre.  $m$  est la “masse électromagnétique”

$$m = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} , \quad (1.27)$$

de la particule décrivant l'inertie de son propre champ.

Si ce calcul nous donne bien la force de réaction de rayonnement, il n'est guère satisfaisant pour la masse électromagnétique. Celle-ci est en effet égale à  $4U/3c^2$  où  $U$  est l'énergie. L'invariance relativiste imposerait une masse égale à  $U/c^2$ . La différence est due bien sûr au caractère irréaliste de ce modèle qui ne tient pas compte des forces de cohésion nécessaires à la stabilité de la répartition de charges. La conséquence en est que ce modèle n'est pas invariant de Lorentz ce qui limite beaucoup son intérêt.