CHAPITRE 12

Oscillations amorties. Oscillations forcées

Nous étudions ici deux problèmes où l'oscillateur harmonique introduit dans le chapitre précédent intervient.

OSCILLATIONS AMORTIES PAR FROTTEMENT FLUIDE

Position du problème, mise en équation

Envisageons comme dans le chapitre précédent le mouvement d'un point M mobile au voisinage d'une position d'équilibre stable que nous prendrons comme origine ; nous essayons cette fois de prendre en compte le frottement afin de pouvoir étudier l'amortissement des oscillations.

Les forces de frottement traduisent des phénomènes complexes et il n'y a pas de « loi fondamentale du frottement » comme il existe des lois fondamentales régissant l'interaction gravitationnelle ou l'interaction électromagnétique.

Toute description du frottement est empirique, phénoménologique. Nous envisageons ici une loi de frottement se traduisant par une force proportionnelle à la vitesse du point (dans le référentiel du laboratoire) et opposée au mouvement, force du type :

$$\mathbf{F} = - f\mathbf{v}$$

où f est un coefficient constant.

Une telle loi correspond au « frottement fluide » ou « frottement visqueux » puisque c'est une loi de ce type qui régit la résistance qui exerce un fluide sur un corps se déplaçant en son sein à faible vitesse.

Nous nous limitons au mouvement d'un point de masse m sur un axe horizontal Ox. Les forces qui interviennent en projection sur Ox sont la force de « rappel » $- kx$ venant du développement du potentiel au voisinage de la position d'équilibre stable $x = 0$, et la force de frottement visqueux $- f\, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ introduite ci-dessus.

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique donne, en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -\,kx - f\,\frac{\mathrm{d}x}{dt}$$

soit encore

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{dt} + \omega_0^2\,x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

où ω_0 est la pulsation du mouvement en l'absence de frottement. Cette équation différentielle est linéaire, sans second membre et à coefficients constants ; son équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{f}{m}\,r + \omega_0^2 = 0\,.$$

Il y a différents cas à envisager suivant le signe du discriminant $f^2/m^2 - 4\,\omega_0^2$. Ces différents cas correspondent à différents *régimes d'amortissement*.

1-2. Le régime pseudo-périodique : $f^2/m^2 - 4\,\omega_0^2 < 0$

Ce régime correspond à un amortissement inférieur à une certaine limite ; il doit comprendre dans le cas idéal $f = 0$ les oscillations harmoniques que nous avons étudiées en premier lieu.

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$r = -\,\frac{f}{2\,m} \pm \mathrm{i}\,\sqrt{\omega_0^2 - \frac{f^2}{4\,m^2}}$$

soit

$$r = -\,\alpha \pm \mathrm{i}\omega \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{f}{2\,m} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\,\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}$$

et la solution peut se mettre sous la forme

$$\boxed{x = A\,\mathrm{e}^{-\,\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

où A et φ sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Admettons par exemple que pour $t = 0$, $x = a$ et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$. A et φ sont données par $A = a\omega_0/\omega$ et $\mathrm{tg}\,\varphi = -\,\alpha/\omega$ comme on peut le vérifier facilement.

L'amplitude diminue de façon exponentielle de sorte que l'énergie mécanique décroît : il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur par suite du frottement (cf. § 4).

La *pseudo-période* est par définition l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs dans le même sens par la position d'équilibre ; elle a pour expression :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{soit} \quad T = T_0\left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2} > T_0$$

où T_0 désigne la période en l'absence de frottement.

Si l'amortissement est faible

$$\alpha^2/\omega_0^2 \ll 1 \quad \text{et} \quad T \simeq T_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\,\omega_0^2}\right).$$

L'écart étant en α^2/ω_0^2 si l'amortissement est faible la pseudo-période est pratiquement égale à la période du système sans amortissement que l'on appelle aussi période propre.

Pour caractériser l'amortissement de ce régime pseudo-périodique on introduit aussi le *décrément logarithmique*.

Par définition

$$\delta = \ln\left(A_n/A_{n+1}\right)$$

où A_n et A_{n+1} sont les amplitudes de deux oscillations successives ; plus généralement $\delta = \ln\left[x(t)/x(t+T)\right]$.

Comme on le vérifie sans peine, l'intervalle de temps qui sépare deux élongations maximales de même signe successives est égal à la pseudo-période ; par conséquent :

$$\delta = \alpha T\,.$$

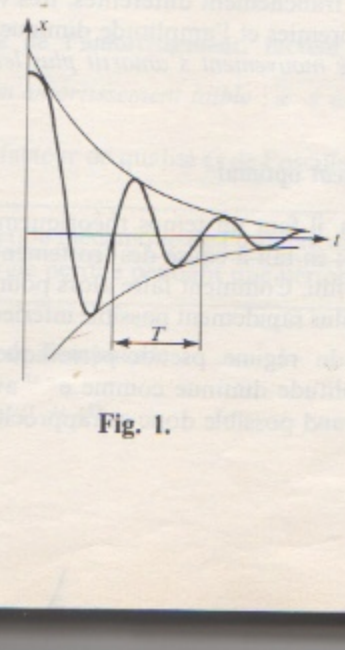

Fig. 1.

1-3. Le régime critique : $f^2/m^2 - 4\,\omega_0^2 = 0$

Si le discriminant est nul, les deux racines de l'équation caractéristique ont pour valeur commune :

$$r = -\frac{f}{2\,m} = -\,\omega_0\,.$$

On sait que la solution s'écrit alors :

$$\boxed{x = (At + B)\,e^{-\omega_0 t}}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

En fait le régime critique est très théorique : physiquement on doit le considérer comme le cas limite séparant le régime pseudo-périodique du régime apériodique que nous allons maintenant étudier.

1-4. Le régime apériodique : $f^2/m^2 - 4\,\omega_0^2 > 0$

Ce régime correspond à un *amortissement important* (supérieur à l'amortissement critique). Les racines de l'équation caractéristique ont même signe ($c/a > 0$) et sont négatives ($-\,b/a < 0$). De plus leur produit vaut ω_0^2 donc l'une est plus grande en valeur absolue que ω_0 et l'autre est plus petite.

Appelons ces racines $-\,\beta$ et $-\,\gamma$ avec $\gamma > \beta$. La solution de l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{x = B\,e^{-\beta t} + C\,e^{-\gamma t}}\,.$$

Si les racines sont franchement différentes, très vite le second terme devient très petit devant le premier et l'amplitude diminue pratiquement comme $e^{-\beta t}$ avec $\beta < \omega_0$ donc *le mouvement s'amortit plus lentement que dans le cas du régime critique*.

1-5. Amortissement optimal

Dans les trois cas, il faut un temps théoriquement infini pour revenir à la position d'équilibre ; en fait à cause des frottements solides le point s'arrête au bout d'un temps fini. Comment faire alors pour que l'amplitude a du mouvement devienne le plus rapidement possible inférieure à $10^{-3}\,a_0$ (par exemple) ?

— Dans le cas du régime pseudo-périodique $f^2/m^2 - 4\,\omega_0^2 < 0$, nous avons vu que l'amplitude diminue comme $e^{-\alpha t}$ avec $\alpha = f/2\,m$. Il faut donc que f soit le plus grand possible donc se rapprocher du régime critique.

— Dans le cas du régime apériodique, nous venons de montrer que l'amortissement est plus lent que dans le cas du régime critique.

Le régime critique est donc celui pour lequel l'amortissement est le plus rapide.

Pour ce régime critique l'amplitude décroît approximativement comme $e^{-\omega_0 t}$ (on néglige la puissance devant l'exponentielle); le temps t_0 pendant lequel l'amplitude est réduite au millième de sa valeur initiale est donnée par

$$e^{-\omega_0 t_0} = 10^{-3} \quad \text{soit} \quad t_0 = \frac{3 \ln 10}{\omega_0} = \frac{6{,}9}{2\,\pi}\,T_0 .$$

Le temps mis pour regagner le voisinage de la position d'équilibre est alors de l'ordre de la période propre.

Ces résultats sont très importants dans la pratique (par exemple pour les amortisseurs de voiture ou pour l'amortissement des appareils de mesure, en particulier des balances).

12-6. Analogie électromécanique

L'équation de l'oscillateur mécanique amorti :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

peut être comparée à l'équation électrique traduisant la décharge d'un condensateur de charge q et de capacité C dans un circuit de self L et de résistance R :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0 .$$

En plus des analogies signalées plus haut et que l'on retrouve ici, on remarque que l'introduction du frottement est l'équivalent mécanique de la résistance électrique ce qui est très satisfaisant quand l'on songe que ce sont ces termes qui sont responsables de la dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

12-7. Aspect énergétique de l'amortissement, facteur de qualité

Limitons-nous au cas d'un amortissement faible : $\alpha \ll \omega_0$, nous confondrons alors ω et ω_0.

Nous définirons alors le facteur de qualité Q de l'oscillateur par la relation :

$$\boxed{Q = 2\,\pi\,\frac{\text{énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant une période}}}$$

De l'expression générale de l'amplitude :

$$x = A\,e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$