Titre : Oscillateurs couples

Présentée par : Bernard Chelli **Rapport écrit par** : Bernard Chelli

Correcteur : Jules Fillette, Julien Froustey **Date** : 08/04/2020

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Perez de mécanique (chapitre 25)			
Dunod PCSI 2014 j'intègre tout en un			
https://www.youtube.com/watch?v=f1U4SAgy60c (video sur batiments)			
http://ressources.unisciel.fr/sillages/physique/ondes_mecaniques/res/osc-couples.pdf (cours avec exemples simples)			

Plan détaillé

Niveau : L2/CPGE (au choix)

Prérequis : Induction, Oscillateur Harmonique (étude des résonances), Circuit RLC

Intro : Nous avons étudié jusqu'ici différents systèmes qui sont modélisées par l'oscillateur harmonique. Notamment nous avons mis en évidence l'importance des fréquences propres du système dans les résonances. Nous allons aujourd'hui étudier comment on peut modifier les fréquences de résonance d'un système sans modifier la valeur de ses composants initiaux via le couplage d'oscillateurs.

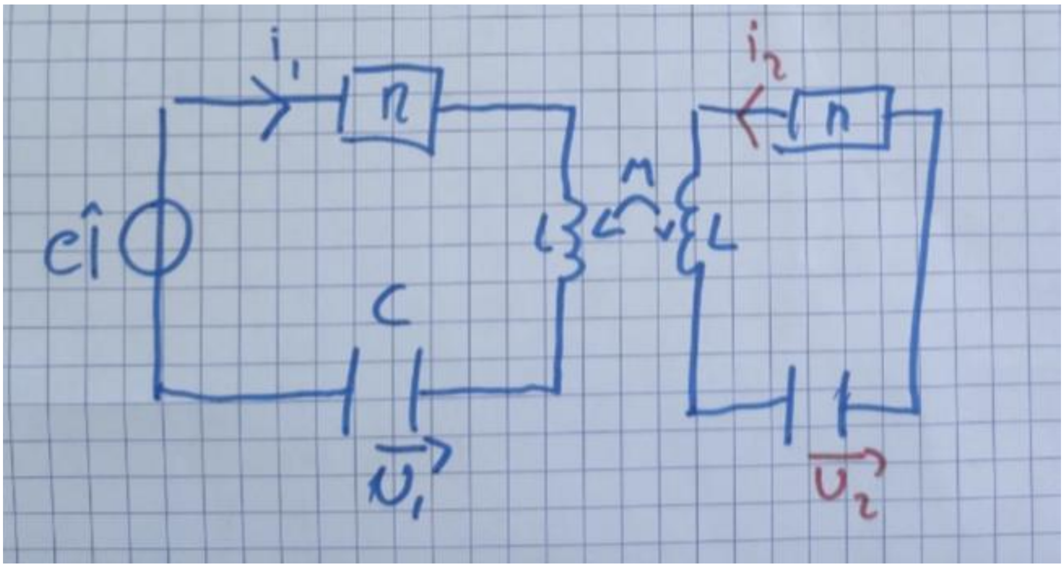
Rq : après réflexion traiter entièrement le II puis introduire le I semble plus logique. Le III peut être mis en ouverture surtout qu'on n'aura pas le temps de le traiter en 30 min.

I] Un premier exemple de couplage, le couplage inductif

On commence par définir ce qui est un couplage : Lien entre 2 systèmes permettant agir l'un sur l'autre.

A) Étude du système

Faire un schéma de 2 oscillateurs couplés avec inductance mutuelle, faire attention aux conventions prises, notamment la convention générateur pour la tension du condensateur du deuxième circuit.



Ce schéma est celle du transformateur, cette fois on ne s'intéresse pas à ses propriétés qui permettent de modifier la valeur de la tension reçue mais plutôt à son caractère d'oscillateur.

Re-inroduire le coefficient d'inductance mutuelle ([1] p. 1079). La bobine du premier circuit est parcourue par un courant et émet un champ magnétique sur la bobine du deuxième circuit. Un courant est alors induit à l'intérieur de cette dernière bobine ce qui crée un autre champ magnétique ressenti par la bobine du premier circuit.

Les flux magnétiques envoyés réciproquement par le premier circuit et le deuxième circuit l'un à travers l'autre sont données par les formules :

$$\varphi_{1-2} = Mi_1 \qquad \varphi_{2-1} = Mi_2$$

M est **le coefficient d'inductance mutuelle** (en Henry) entre les deux circuits. (rq, Lmax = racine(L1*L2))

Avant de commencer à écrire les équations sur les lois des mailles préciser que le lien entre le courant dans le deuxième circuit et le deuxième condensateur a un signe – du aux conventions du schéma. Les composants des circuits, L, C et R sont identiques.

Écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} e = Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + U_1 + M\dfrac{di_2}{dt} & i_1 = C\dfrac{dU_1}{dt} \\ 0 = Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} - U_2 + M\dfrac{di_1}{dt} & \text{or } i_2 = -C\dfrac{dU_2}{dt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = U_1 + RC\dfrac{dU_1}{dt} + C(L-M)\dfrac{d^2U_2}{dt^2} \\ 0 = +U_2 + RC\dfrac{dU_2}{dt} + C(L-M)\dfrac{d^2U_1}{dt^2} \end{cases}$$

Ces équations sont **couplées**. On voie que U2 agit dans l'équation du premier circuit et vice-versa. On veut se ramener à des équations qu'on sait résoudre, pour cela il faut découples les équations. Pour ce faire on introduit deux nouvelles variables S et D.

S = U1+U2

D = U1-U2

Nous allons ensuite combiner nos 2 équations couplés pour faire apparaitre ces nouvelles variables. On somme et on fait la différence de nos équations. On trouve alors :

$$\begin{cases} e = S + RC\dfrac{dS}{dt} + C(L-M)\dfrac{d^2S}{dt^2} \\ e = D + RC\dfrac{dA}{dt} + C(L+M)\dfrac{d^2A}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e}{C(L-M)} = S\,\overbrace{\left(\dfrac{1}{C(L-M)}\right)}^{\omega_{0_1}^2} + \dfrac{R}{L-M}\dfrac{dS}{dt} + \dfrac{d^2S}{dt^2} \\ \dfrac{e}{C(L+M)} = D\,\underbrace{\left(\dfrac{1}{C(L+M)}\right)}_{\omega_{0_2}^2} + \dfrac{R}{L+M}\dfrac{dD}{dt} + \dfrac{d^2D}{dt^2} \end{cases}$$

On reconnait 2 équations du premier ordre qu'on sait résoudre et on voit apparaitre 2 pulsations propres. Ces pulsations propres sont les pulsations du système, C.A.D le circuit dans son ensemble.

On peut constater plusieurs choses :

- le système possède 2 pulsation propres différentes toutes les deux des pulsations propres de chaque circuit isolé (1/racine(LC)). Cette différence est du au couplage. En effet sans couplage M = 0 et on retrouve les pulsations propres du circuit non couplé.

- La forme des solutions de U1 et U2 est une combinaison linéaire des expressions de S et D. En effet U1 = S+D/2. Nous étudierons les solutions dans le cas d'un autre exemple de couplage plus tard dans la leçon.

(rq. On pourrait faire ici des expériences et rentrer dans le détail des solutions si on avait accès à des manips)

Transition : Le couplage entre les circuits fait qu'ils vont communiquer entre eux, qu'en est-il de l'énergie dans le système ?

B) Etude énergétique

On multiplie nos équations initiales par i1 et i2 respectivement. On aboutit alors à :

$$\begin{cases} i_1 e = R i_1^2 + L\left(i_1 \dfrac{di_1}{dt}\right) + M i_1 \dfrac{di_2}{dt} + C\left(\dfrac{dU_1}{dt} \cdot U_1\right) \\ 0 = R i_2^2 + C\left(\dfrac{dU_2}{dt} \cdot U_2\right) + L\left(i_2 \dfrac{di_2}{dt}\right) + M\left(i_2 \dfrac{di_1}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\text{Somme} \Rightarrow 0 = \underbrace{R i_2^2 + R i_1^2}_{\text{diss. pation par effet Joule}} + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} L i_2^2 + \tfrac{1}{2} L i_1^2 + \tfrac{1}{2} C U_2^2 + \tfrac{1}{2} C U_1^2}_{\text{énergie emmagasinée par condensateurs et bobines}} + \underbrace{M i_1 i_2}_{\text{énergie due au couplage !}}\Big)$$

Plusieurs choses à dire :

- Une nouvelle énergie du au couplage apparait.

- L'énergie dans les composants varie au cours du temps. En effet le couplage fait que l'énergie dans un des circuits sera transféré à l'autre circuit et vice-versa. Le couplage permet l'échange d'énergie entre les deux systèmes. Comme on a vu avec le transformateur il y a un échange de puissance entre les circuits, sauf que si on les fait osciller l'énergie oscillera aussi entre les circuits.

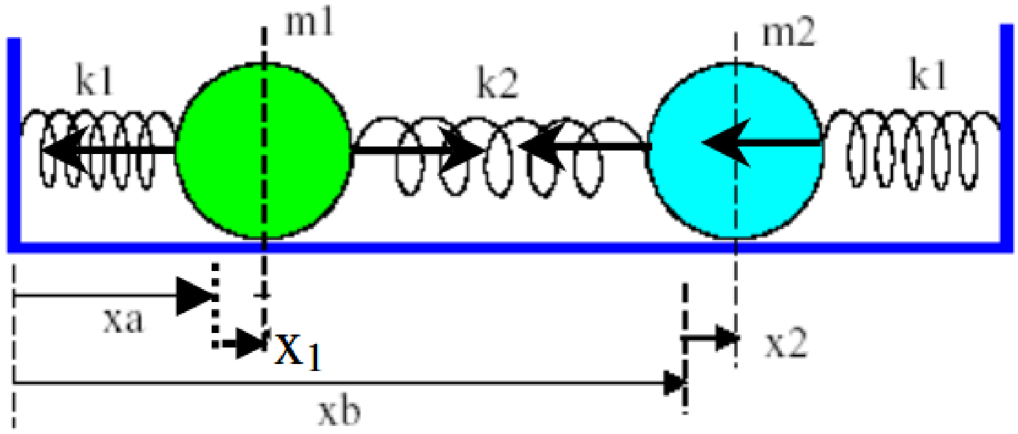
Le couplage que nous venons d'étudier est un couplage par induction. On pourrait aussi coupler des circuits en utilisant une capacité. On parle alors de couplage capacitif.

Transition : Nous pouvons aussi coupler des systèmes mécaniques. Il faut alors permettre que l'un puisse agir sur l'autre. Un exemple classique de ceci est de relier deux masses par un ressort.

II] Couplage élastique

A) Couplage entre deux masses par un ressort

Nous allons étudier le problème dans un ref. galiléen. On considère le système suivant :



Cette foi-ci le couplage est assuré par un ressort. On appelle ce type de couplage un couplage élastique.

Pour simplifier le problème on considère que m1 = m2. Les masses se déplacent sans frottement le long de l'axe ox positif de la gauche vers la droite. Les positions d'équilibre respectives sont xa et xb. Nous étudions les déplacement des deux masses autour des positions d'équilibre. On a donc les équations du mouvement :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(-x_1 + x_2) \qquad et \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(-x_1 + x_2)$$

Nous pouvons les découpler avec la même astuce que pour les deux circuits couplés par inductance en introduisant S et D.

Alors on arrive aux équations :

$$\ddot{S} + \frac{k_1}{m} S = 0 \qquad \ddot{D} + \frac{k_1 + 2k_2}{m} D = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

$$S = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$D = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = \frac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2} A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \end{cases}$$

On parle de mode propre du système l'état dans lequel les composantes du système oscillent aux mêmes pulsations propres. Dans cet exemple les masses oscilleraient à w1 ou w2.

Monter simulation : http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/couplage.html

(x1 est toujours = 2, les ressorts aux bouts sont k1 et k3. Pour voir des battements il faut mettre k2 = 0.1 et x2 = 0. Mode symétrique x2 = 2, antisymétrique x2 = -1). Ne pas montrer les courbes tout de suite pour les battements.

Discussion :

- Une des fréquences propres du système est celle d'un des oscillateurs isolé. C'est normal car si on oscille en phase le ressort du milieu n'est ni comprimé ni étiré. C'est comme si les oscillateurs étaient isolés ! Ce cas correspond à des conditions initiales ou A2 = 0 et phi1 = 0 (on décale les oscillateurs de la même longueur en pratique). *Rq. Avec 3 masses couplées ceci n'est plus vrai !*

- L'autre mode propre correspond à A1 = 0 et phi2 = 0. On constate alors que x1 et x2 sont en opposition de phase ce que l'on retrouve bien dans la simulation.

- Une étude énergétique monterait que on a aussi un therme énérgetique supplementaire du au couplage (CF perez)

B) Couplage faible et battements

(cette partie n'a pas été présentée mais compte tenu de la correction, elle est essentielle).

On peut s'interesser à ce qui ce passe dans un couplage faible (à definir). Le montrer avec la simulation (x2 = 0 et k2 = 0.1, montrer les graphiques).

On observe une modulation en amplitude du signal. Pourquoi ? k2 faible par rapport à k1. Donc couplage faible

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} = \omega_1\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/2} \approx \omega_1\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$x_1 = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \qquad et \qquad x_2 = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$

Avec :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad et \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Il vient :

$$x_1 = a\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})\,t\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})\,t \qquad et \qquad x_2 = a\sin(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})\,t\sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})\,t$$

Soit, avec $\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{k_2}{k_1}\omega_1$ et $\omega_2 \approx \omega_1$:

$$x_1 = a\cos(\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\omega_1)\,t\cos\omega_1\,t \qquad et \qquad x_2 = a\sin(\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\omega_1)\,t\sin\omega_1\,t$$

La modulation en amplitude resulte de la superposition de deux « signaux » de fréquence proches. On appelle ceci battements.

Dans ce cas c'est pas deux signaux mais les deux modes propres du système qui ont des fréquences proches.

On constate que quand l'amplitude d'une des masses est maximale, l'amplitude de l'autre es minimale (montrer sur courbes). On a un transfert d'énergie d'une masse à l'autre de manière périodique.

C) Types de couplage

Outre le couplage élastique on peut aussi coupler des systèmes mécaniques par un couplage dit inertiel. Montrer exemple pendules :

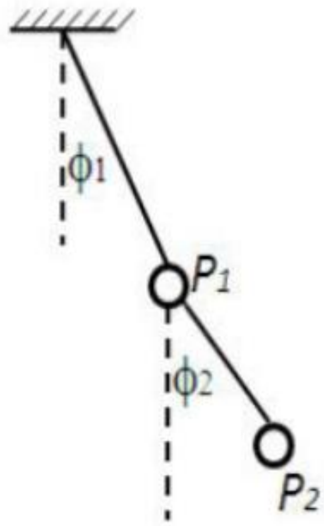


Figure 2-b

Ce type de couplage est décrit par les mêmes équations différentielles que le couplage inductif de circuits électriques étudié précédemment.

- De même le couplage capacitif mentionné précédemment est décrit par une équation de la même forme que pour le couplage élastique en mécanique.

- Il existe une troisième forme de couplage qui utilise des phénomènes dissipatifs pour coupler deux systèmes. Ce serait le cas par exemple en utilisant une résistance pour coupler deux circuits ou un amortisseur (frottements fluides/solides) pour deux systèmes mécaniques.

Le grand intérêt du couplage est que ça permet de modifier les fréquences propres du système. Ceci est utilisé dans la construction pour éviter que des bâtiments rentrent en résonance à des fréquences qu'on retrouve dans la vie courante (lors d'un tremblement de terre, vent, personnes qui bougent les jambes dans un stade). On couple souvent un bâtiment avec un énorme pendule pour modifier les fréquences de résonance (rq, plus le couplage est fort (grande constante de couplage) plus les fréquences sont modifiées).

III] Modélisation d'un solide, N oscillateurs couplées

Si on couple un grand nombre de masses par des ressorts on peut modéliser les atomes d'un solide. Si on couple N atomes on aura N modes propres dans le système (montrer simulation du couplage de N atomes http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chaine.html ceci montre aussi que on n'a pas toujours la pulsation propre du système isolé).

Montrer sur slide la position du problème.

Montrer comment établir l'équation pour un oscillateur (Perez p. 476.). On veut des modes propres donc on utilise des exponentielles complexes avec astuce : introduction de n*d pour la partie « spatiale » de la fonction d'onde complexe.

On peut parler de la resolution rapidement ou du passage au continnu pour trouver la célérité de l'onde que l'on peut associer à la distance entre atomes et à la raideur du ressort.

Cette partie peut servir aussi de conclusion élargie.

Questions posées par l'enseignant

1) Pré requis : équation d'onde?

Equation de d'Alembert.

2) D'Alembert est-elle la seule équation d'onde?

Non,

3) Qu'est-ce que M?

Inductance mutuelle

4) Comment est-elle définie?

Le flux magnétique induit par l'un des circuits par le courant circulant dans le deuxième circuit divisé par ce courant.

5) Flux. Comment définir M en équation?

$$\varphi_{1-2} = Mi_1 \quad \varphi_{2-1} = Mi_2$$

6) Où apparaît L?

L relie le flux magnétique crée par un des circuits à l'intensité traversant ce circuit. Inductance propre.

7) Qu'est-ce que la loi de Faraday?

Fem = -dphi/dt opu phi est le flux magnétique parcourant un circuit.

8) De quoi dépend M?

De la géométrie des circuits et de leur distance. (Nottament du nombre de spires dans les bobines.)

9) Que quantifie M?

Le flux du champ magnétique traversant un circuit et produit par un autre circuit.

10) Comment s'appelle-t-il?

Coefficient d'inductance mutuelle.

11) Quantifier couplage forte entre deux circuit?

Faible => M petit devant L ou k12 petit devant k

12) M peut-il tendre vers l'infini?

Non il est majoré car le flux et le courant sont finis.

13) Toujours somme et différence dans systèmes couplés?

Méthode mathematique simple qui permet de decoupler deux équations dans le cadre du programme CPGE. Pas une méthode générale.

14) Aspect mathématique particulier des solutions de chaque mode?

Vecteurs propres, modes propres.

15) Comment défini-t-on un mode propre?

Valeur propre associées à un vecteur propre du système étudiée.

16) Quel est l'intérêt d'avoir écrit S et D?

Découpler les équations.

17) Comment remonter à i1 et i2 et qu'obtient-on?

Comvbinaison linéraire des modes propres.

18) Comment visualiser un des deux modes?

Battements.

19) Comment voir un seul mode?

Conditions initiales, correspond à un état décrit par un seul des modes propres.

20) Comment définir le couplage?

Echange d'énergie entre deux systèmes.

21) Qu'observe-t-on si régime sinusoidal forcé est off-résonant?

Par définition on force le système à osciller à la fréquence de forçage. L’amplitude des oscillations est faible pour des fréquences différentes des modes propres.

22) La grande distinction est-elle électronique/mécanique?

Non, plutôt inertiel et elastique.

23) Quelles différences et quls points communs entre couplage inertiels et élastiques?

Apparition de modes propres dans les deux cas. Les fréquences propres seront différentes selon le couplage (ex. mode propre du système isolée pour couplage élastique de deux oscillateurs contrairement au couplage inductif=inertiel).

24) Quelle conséquence sur modes propres si inertiel ou élastique?

Si élastique une fréquence propre est celle du système non couplés-> mode selon différence!!! (alongement...). Pas toujours vrai, ça depend du nombre d'oscillateurs couplées.

26) Autres types de couplages possibles?

Couplage par frottements (dissipatifs). Verrin.

27) Analogue électrique du couplage électrique.

Capacitif.

28) Comment le montrer simplement?

?

29) Battements. Hypothèse pour que le profil ressemble à ça? Interprétation en termes énergétique?

Battements=couplage faible, transmission d'énergie entre les deux systèmes.

30) Résultat en terme de capacité thermique pour n oscillateurs dans un solide?

Dulong petit et equipartition, C = 3kBT

31)Quel est le lien entre l'équation d'onde et la relation de dispersion?

L'équation d'onde nous permet de remonter à la relation de dispersion en utilisant la notation complexe.

32)Y a t il un rapport avec la corde de Melde?

Non, les modes propres de la corde de melde sont définis par les conditions aux limites. Dans le couplage N oscillateurs les modes propres dependent du nombre d'oscillateurs et de leur couplage.

33) Peut on voir ces modes propres en électrocinétique? Comment les voir?

On branche un oscillo sur les différentes resistances des circuits couplées pour avoir accés à leur tension. Il faut regarder plusieurs résistances au cas ou on tombre dans une situation où la tension de cette resistance est nulle (certains modes propres pour plus de 2 oscillateurs peuvent avoir cette caracteristique)

34) Autres exemples de couplae dans d'autres systèmes et d'autres domaines de la physique?

?

Commentaires donnés par l'enseignant

Partie réservée au correcteur