

**Titre :** Filtrage en optique

**Présentée par :** Bernard Chelli

**Rapport écrit par :** Bernard Chelli

**Correcteur :** Agnès Maître

**Date :** 4/06/2020

**Bibliographie de la leçon :**

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
TD Optique Diffraction 1 et 2 du centre de préparation de l'agrégation Montrouge (expérience d'abbe, fraunhofer et hyugens fresnel)	Clément Sayrin		2018-2019
Sextant (pour les calculs)			-
Dictionnaire de physique			

**Plan détaillé**

Niveau choisi pour la leçon : Licence (L2 ou L3)

Prérequis :

Transformée de Fourier

Diffraction de Fraunhofer (évidemment le pp de Huygens Fresnel est implicite)

Critère de Rayleigh ;

Plan :

- I) Rappels de la diffraction de Fraunhofer
- II) Filtrage spatial
  - a. Diffraction par une fente triangulaire
  - b. Retour sur les fentes d'Young
- III) Limitations dues à la diffraction/applications
  - a. Résolution angulaire limite
  - b. Filtrage spatial, expérience d'Abbe

### Introduction

- Préciser que la diffraction vient d'être étudiée.
- Or à priori le lien avec la formation des images n'a pas encore été étudié, c'est l'occasion de faire le lien entre les deux

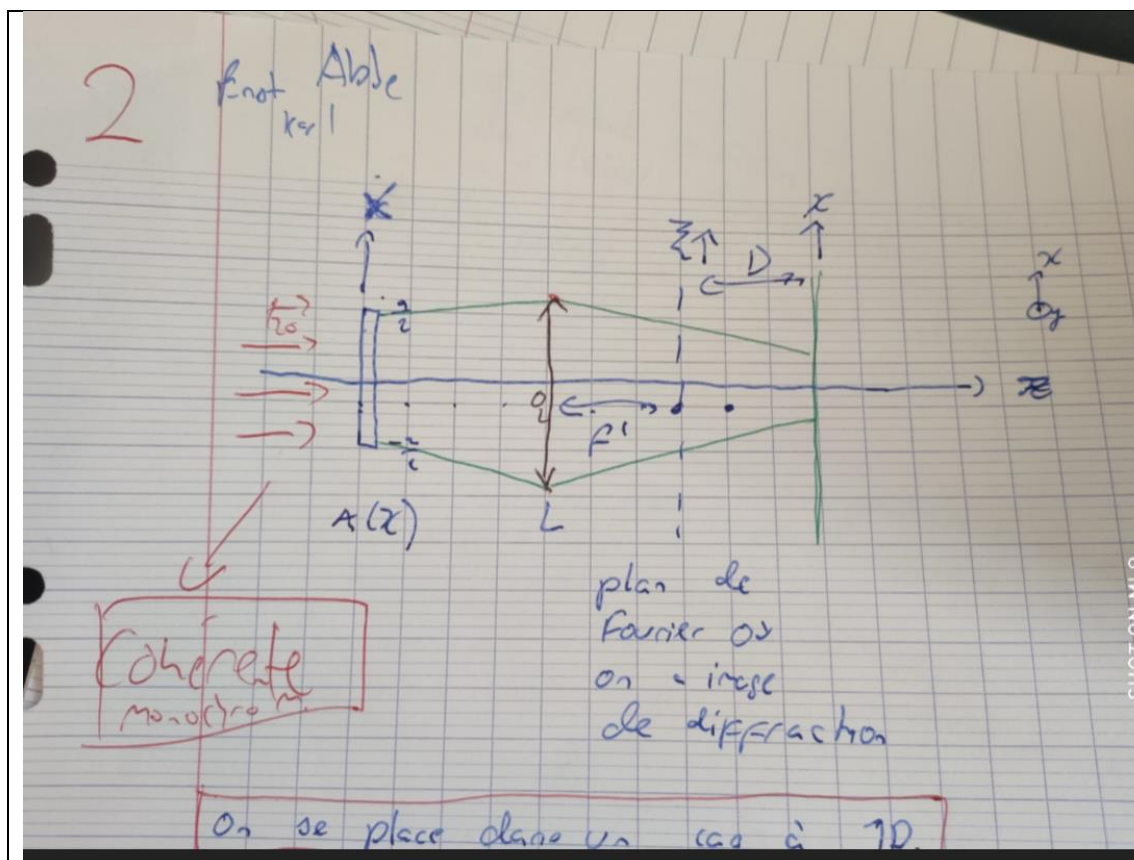
### I) Rappels de la diffraction de Fraunhofer

Rappeler les conditions où on a le droit d'appliquer la formule de Fraunhofer pour le calcul de diffraction :

- diffraction d'une onde plane à l'infini
- diffraction d'une onde plane à grande distance ( $D \gg r^2/2\lambda$ ) (**voir [1]**)
- diffraction au voisinage **de l'image géométrique de la source** (relire [1] pour comprendre pourquoi)

*Rq : C'est ce dernier cas qui sera important pour justifier la suite, ceci permet aussi aux étudiants d'avoir un exemple où l'on se place dans cette dernière condition qui est plutôt inhabituelle en TP.*

Faire le schéma de la diffraction de Fraunhofer suivant : il est à compléter petit à petit.

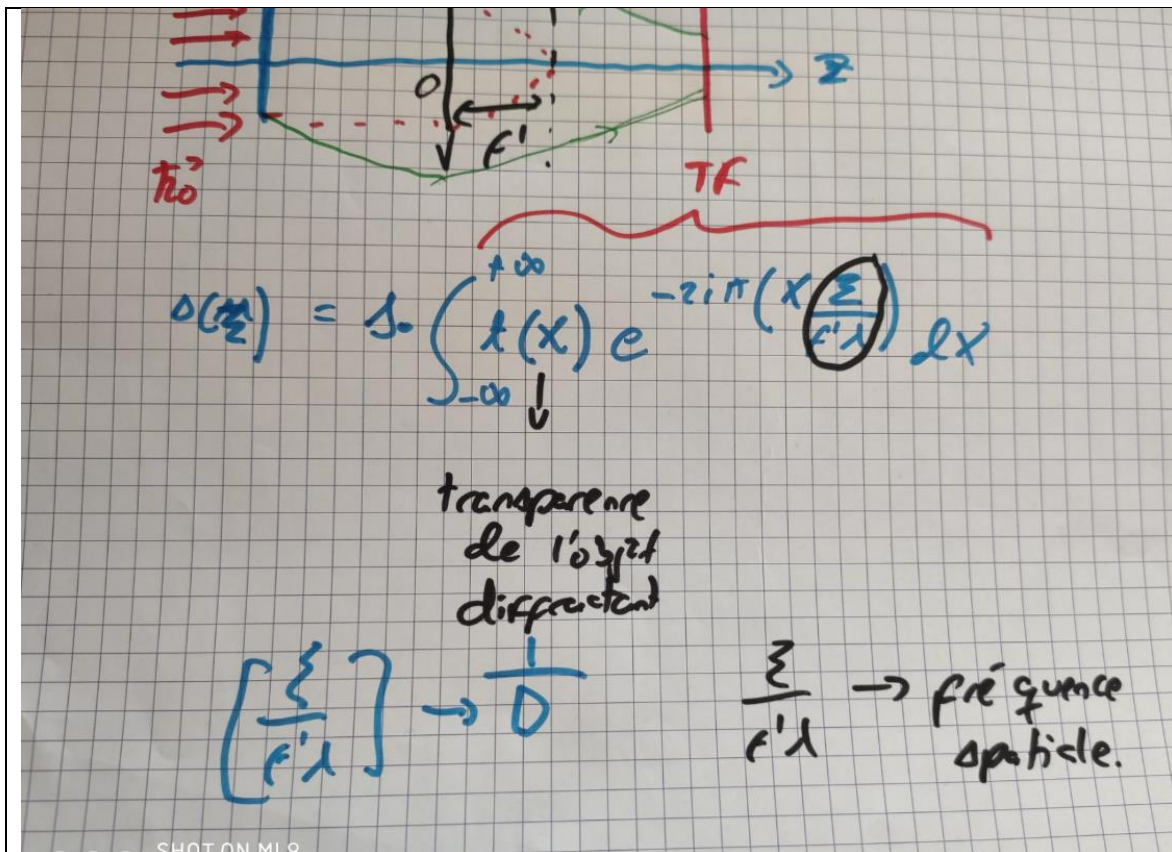


- Préciser que la lumière incidente est cohérente et monochromatique.

*Rq. Le filtrage marche aussi quand la lumière est non-monochromatique, par contre les calculs sont beaucoup plus lourds et complexes (aucun exemple en ligne ou dans le sextant)*

- Ne pas oublier de noter les différents axes de coordonnées que l'on va utiliser (plan objet – fourier) et d'orienter l'axe optique. On peut rappeler les conditions de Gauss qui sont implicites aussi.
- Pour le moment, ne pas mettre l'écran dans le schéma, on fait de la diffraction
- Préciser que l'on se place dans un cas à 1D.

Si on place un écran dans le plan de Fourier, on observe alors la figure de diffraction de l'objet. Alors, la forme du signal est :



Préciser que  $s$  est la vibration de la lumière, on se place dans le modèle scalaire ou l'on oublie les champs électrique et magnétique.

$t$  est la fonction transparence de l'objet diffractant, l'intégrale se fait sur les coordonnées de l'objet diffractant.

Introduire la fréquence spatiale par analyse dimensionnelle dans l'exponentielle. Préciser que la figure de diffraction est la transformée de Fourier de la fonction transparence  $t$ , et que surtout la variable qu'on utilise alors est la fréquence spatiale.

**IMP. Surligner la fonction  $t$  pour préciser qu'à priori elle peut être complexe.**

- Placer l'écran pour former dessus l'image dans le schéma et dessiner les rayons extrémaux qui rentrent dans la lentille (rayons verts dans le schéma).

Avant qu'on introduise la diffraction, on a utilisé ce dispositif pour former des images en optique géométrique. Tous les rayons qui sont utilisés pour former l'image passent par les rayons extrémaux. Alors si on ajoute des obstacles qui font empêcher la lumière de passer entre la lentille et l'écran, nous allons modifier l'image résultante.

**Définir le filtrage spatial :** méthode permettant de sélectionner des composantes spatiales d'une image.

On utilise le filtrage spatial pour modifier une image, par exemple pour enlever certains défauts ou visualiser certaines caractéristiques de cette image.

- finir le schéma avec l'axe pour le plan image de coordonnées  $x$ . Préciser aussi la distance  $D$  et la focale  $f'$ .

## II) Filtrage Spatial

La question qui se pose naturellement est comment choisir les rayons à bloquer pour filtrer des éléments spécifiques de l'image finale.

### 1) lien entre la figure de diffraction et l'image obtenu

Rappeler à l'oral le pp de Hyugens Fresnel :

**Chaque point M d'une surface SIGMA atteinte par la lumière** peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnelle à celle de l'onde incidente en M et à l'élément de surface  $d\Sigma$  entourant le point M. Les vibrations issues des sources secondaires interfèrent entre elles.

Faire remarquer que le pp de Hyugens Fresnel ne parle pas de surface physique mais toute surface. D'habitude nous utilisons la surface de l'objet diffractant qui est une surface matériel, mais on peut aussi utiliser une surface virtuelle, par exemple, la surface définie sur le plan de Fourier.

De plus, on a le droit d'utiliser l'approximation de Fraunhofer parce que nous sommes localisées sur le plan image de la source !

- Faire alors le développement :

*Rq. L'image de la « diffraction est forcément sur le plan image ou ce forme l'image de l'objet. Si on n'est pas convaincu on peut utiliser le pp du retour inverse de la lumière et dire que la figure de diffraction est celle de l'image plutôt que celle de l'objet.*

**II Filtrage optique**

$$\Delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\xi) e^{-2i\pi \left(\frac{x}{\lambda D} \xi\right)} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{\xi}{\lambda f'}\right) e^{+2i\pi \left(\frac{-x}{\lambda D} \lambda f' \frac{\xi}{\lambda f'}\right)} \frac{d\xi}{\lambda f'} \lambda f'$$

$$\propto \Delta_{\text{TF}}^{-1} \left( \text{TF}(\Delta(x)) \right)$$

$$\propto \Delta_{\text{obj}} \left( -\frac{x}{\lambda D} \lambda f' \right)$$

SHOT ON MI 9  
AI TRIPLE CAMERA

- ATTENTION, la transformée de fourier est celle du signal  $s(x_i)$ , or nous on veut faire apparaître la variable de fréquence spatiale ! faire le changement de variable correspondant.

- faire rentrer le signe – dans l'exponentielle pour faire apparaître la TF inverse

On retrouve alors la fonction transparence de l'objet mais avec une homothétie qui l'inverse et la contracte/élargit suivant le rapport  $f'/D$ . Ce sont les résultats de l'optique géométrique.

Ce qui est très fort est que nous avons démontré que le signal lumineux sur le plan de fourier est à l'image obtenu par transformée de fourier.

### Montrer slide 1 avec photo du montag

## 2 ) Fréquences spatiales

Dans le plan de fourier on peut ajouter un objet ce qui correspondrait à ajouter une fonction de transparence  $t'(x_i)$  dans la transformée de fourier que nous venons de faire. Lors du filtrage, on choisit certaines fréquences spatiales que nous couper.

Ce qui est très fort est que nous avons physiquement accès aux différentes valeurs des fréquences spatiales. En effet, l'expression de la fréquence spatiale est  $(x_i/\lambda D f')$ ,  $\lambda D$  et  $f'$  sont des constantes et  $x_i$  est la coordonnée d'espace dans le plan de fourier.

Ainsi, les **hautes fréquences spatiales** correspondent à un  $x_i$  éloigné du point du plan de fourier à travers lequel passe l'axe optique, donc un  $X_i$  grand en valeur absolue.

Au contraire, les **basses fréquences spatiales** correspondent aux positions sur le plan de fourier qui sont proches du centre du point du plan de fourier à travers lequel passe l'axe optique.

Ce sont les rayons lumineux qui portent les fréquences spatiales, et suivant par où ces rayons lumineux traversent le plan de fourier, l'information qui contiennent correspond aux basses fréquences spatiales ou les hautes fréquences spatiales.

La dernière question à se poser est quels aspects de l'image sont contenus dans les hautes et basses fréquences spatiales

On peut comprendre par analogie avec les hautes fréquences temporelles. Une haute fréquence temporelle signifie que dans un intervalle de temps faible, le signal varie beaucoup (ou beaucoup de fois). Une fréquence spatiale haute correspond à une forte variation du signal lumineux dans l'image entre deux points voisins. En d'autres termes les hautes fréquences spatiales contiennent l'information sur les traits contrastés de l'image. Par exemple la bordure des objets ou les petits détails.

Reciproquement les basses fréquences spatiales correspondent à des aspects de l'image qui ne varient pas beaucoup entre deux points voisins.

**Montrer slide pour illustrer ces propos.**

### III) Traitement d'images et résolution

Comment est ce qu'on peut éliminer des fréquences spatiales ? il suffit de les couper avec un cache mis dans le plan de fourier (ou un diaphragme).

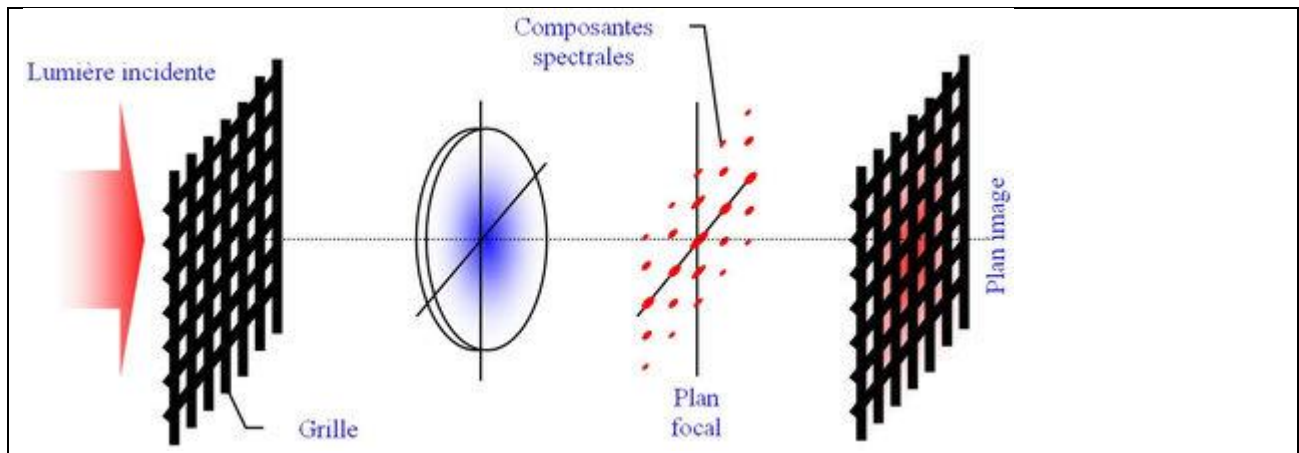
Nottament, il est possible de lisser les images pour éliminer les petits défauts ou points brillants dans une image en jouant sur les hautes fréquences spatiales.

On peut ainsi faire du traitement d'images . Par ailleurs on peut être selectifs si on connaît la transformée de Fourier de l'objet que l'on veut supprimer.

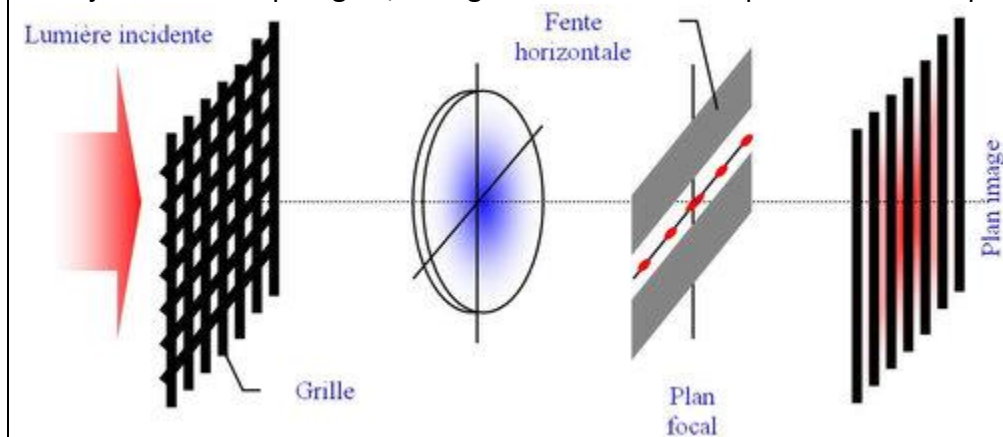
#### III.1) L'expérience d'Abbe

On reprend le montage avec cette fois-ci comme objet une grille. La transformée de Fourier de cette grille est alors une série de points lumineux, avec les points qui forment une croix centrée sur l'axe optique les plus brillants :





Si on fait le choix de ne laisser passer que la ligne horizontale centrale (i.e. la moitié de la croix) en rajoutant un diaphragme, l'image est alors modifiée pour ne montrer que des lignes verticales.



Reciproquement, si laisse passer que les points verticaux, on obtient des lignes horizontales.

Ainsi, on peut choisir en modifiant la fonction de transparence au niveau du plan de fourier, les parties de l'image que l'on va garder.

On peut même aller plus loin. Si on connaît la TF spatiale d'un objet que l'on veut enlever de l'image, on peut, en bloquant les qui passent par les points lumineux de la transformée de fourier de cet objet, le supprimer sélectivement de l'image.

Si on connaît la transformormée de Fourier spatiale d'un objet dans l'image, et on souhaite supprimer cet objet de l'image finale, on peut le faire en mettant un masque opaque correspondant à la transformée de fourier de cet objet.

Ceci se fait numériquement, en effet iol y a des problèmes d'alignement et pour pouvoir effacer un object correctement.

### III.2) lien avec la résolution spatiale

Nous avons établi dans des cours précédents le critère de résolution de Rayleigh, nottament pour une lentille nous avons considerée que le plus petit détail que la limite de résolution pour une lentille circulaire est de :



$1,22 \cdot \lambda \cdot f' / d$ , avec  $d$  le diamètre de la lentille.

On peut observer que si la lentille avait un diamètre infini, nous aurions une résolution infinie. On peut interpréter ce résultat avec ce que nous avons dit sur les fréquences spatiales.

Si on reprend notre schéma avec les rayons extrémales, on constate que l'extension dans le plan de Fourier des rayons émis par l'objet est bornée. En d'autres termes, nous avons coupé les hautes fréquences spatiales de l'image parfaite de l'objet à cause de l'extension limitée de la lentille.

Ainsi, une lentille peut être considérée comme un filtre passe bas en optique. La coupure des hautes fréquences spatiales résulte en une limitation de la variation du signal lumineux entre deux points voisins de l'image finale. En d'autres termes, une perte de résolution.

Conclure.

Questions posées par l'enseignant

Commentaires donnés par l'enseignant

**Partie réservée au correcteur**

### **Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)**

Leçon bien menée et bien structurée qui reprend les notions essentielles  
Il est important de faire certains calculs (essentiellement le calcul de la diffraction de Fraunhofer) qui ont été conduits ici.

### **Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates**

#### **Essentiel :**

Calcul de la diffraction de Fraunhofer

Dire explicitement que la figure associée à la diffraction de Fraunhofer se trouve sur le plan image de la source (présenté de manière simplifiée, mais suffisante ici).

Parler de la diffraction d'une ouverture circulaire (ne pas faire les calculs) et des conséquences sur la résolution des instruments d'optique.

#### **Possible**

Théorème de Babinet (diffraction par une ouverture et par son complémentaire)

Conséquence de la translation de l'objet diffractant sur la diffraction

Translation de la source

Optique de Fourier

filtrage

### **Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)**

Diffraction par une fente et discussion autour de la figure obtenue

Expérience d'Abbe, intéressante mais prend un peu de temps et nécessite d'être bien interprétée

### **Bibliographie conseillée**

Hecht, Houard, Perez, ...

Tous les bons livres d'optique