Préparation à l'agrégation de physique

Remarques suite au TD d'hydrodynamique du 27/11/2019

Tom BIENAIMÉ (*tom.bienaime@ens.fr*)

Avant que vous ne partiez réviser les écrits, voici la version corrigée de ma note suite au TD du 27/11/2019. Cette note résume les hypothèses nécessaires pour établir les équations de Navier–Stokes et d'Euler. Elle évoque également les différentes versions du théorème de Bernoulli.

1 Équations de Navier–Stokes

Les équations de Navier–Stokes décrivent le mouvement des écoulements visqueux.

Équation de bilan de la quantité de mouvement De façon générale, sans hypothèse particulière sur le fluide, nous pouvons écrire l'équation de Navier–Stokes pour le bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\rho \mathbf{v} \times \mathbf{v}^T\right) = -\mathbf{grad}\, p + \mathbf{div}\, \mathbf{\Sigma} + \rho \mathbf{g} \tag{1}$$

p désigne la pression thermodynamique, $\mathbf{\Sigma}$ désigne le tenseur des contraintes visqueuses. Le produit "didactique" $\mathbf{v} \times \mathbf{v}^T$ est une matrice de dimension 3×3 et a pour composante $\left[\mathbf{v} \times \mathbf{v}^T\right]_{i,j} = v_i v_j$. La quantité $\mathbf{div}\, \mathbf{\Sigma}$ est à interpréter comme un vecteur de i-ème composante $[\mathbf{div}\, \mathbf{\Sigma}]_i = \sum_j \frac{\partial \Sigma_{i,j}}{\partial x_j}$. On peut exprimer différemment l'équation de quantité de mouvement en remarquant que :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\rho \mathbf{v} \times \mathbf{v}^T\right) = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}\right]$$

Fluide newtonien En première approximation, pour de nombreux fluides usuels comme l'eau et l'air, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_{i,j} &= \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{i,j} \mathrm{div}\, \mathbf{v}\right] + \lambda \delta_{i,j} \mathrm{div}\, \mathbf{v} \\
&= \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] + \beta \delta_{i,j} \mathrm{div}\, \mathbf{v}
\end{aligned}$$

où μ désigne la viscosité dynamique liée au cisaillement, λ la viscosité volumique relative à une dilatation et $\beta = \lambda - \frac{2}{3}\mu$ la seconde viscosité. En substituant dans l'équation de Navier–Stokes ci-dessus on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}\right] = -\mathbf{grad}\, p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \beta)\, \mathbf{grad}(\mathrm{div}\, \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}$$

Hypothèse de Stokes On utilise généralement l'hypothèse de Stokes, qui revient à négliger la viscosité liée à la dilatation $\lambda = 0$, ce qui permet de relier la viscosité dynamique à la seconde viscosité :

$$\beta + \frac{2}{3}\mu = 0.$$

L'hypothèse de Stokes est vraie pour les gaz monoatomiques. Elle constitue une bonne approximation pour des fluides simples comme l'eau et l'air. On peut, sous ces hypothèses, écrire l'équation de bilan de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\right]=-\mathbf{grad}\,p+\mu\Delta\mathbf{v}+\frac{\mu}{3}\,\mathbf{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v})+\rho\mathbf{g}$$

Fluide incompressible Pour un écoulement incompressible $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Ainsi, l'équation de bilan de la quantité de mouvement devient :

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\right]=-\mathbf{grad}\,p+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}$$

2 Équations d'Euler

Les équations d'Euler décrivent un écoulement parfait. Ces écoulements sont adiabatiques, sans échange de quantité de mouvement par viscosité ni d'énergie par conduction thermique.

Les équations d'Euler s'établissent sans hypothèse d'incompressibilité, bien que, historiquement, Leonhard Euler les a établies pour des écoulements incompressibles (1757).

Les équations d'Euler pour un fluide compressible (forme la plus générale) s'écrivent :

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\rho=-\rho\operatorname{div}\mathbf{v} & \text{Équation de conservation de la masse}\\ \rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\right]=-\mathbf{grad}\,p+\rho\mathbf{g} & \text{Équation de conservation de la quantité de mouvement}\\ \rho\left[\frac{\partial e}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,e\right]=-p\operatorname{div}\mathbf{v} & \text{Équation de conservation de l'énergie interne}\\ \frac{\partial s}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,s=0 & \text{Équation de conservation de l'entropie}\end{cases}$$

où e est l'énergie interne massique et s est l'entropie massique du fluide. Le système doit être fermé par une relation thermodynamique, par exemple celle reliant l'énergie interne aux autres valeurs $f(e,\rho,p)=0$. Pour un gaz parfait : $e=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$ avec $\gamma=C_P/C_V$.

- L'équation de conservation de la masse est vraie sans hypothèse sur la nature de l'écoulement (en l'absence de réaction nucléaire !).
- L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut-être vue comme découlant de l'équation de Navier–Stokes générale (1) en négligeant les effets de viscosité (le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\Sigma}$ est nul).

Fluide parfait incompressible Dans ce cas les équations précédentes se simplifie en imposant $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Le système n'a plus besoin d'être fermé par une relation thermodynamique.

3 Retour sur les hypothèses du théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une intégrale première spatiale de l'équation d'Euler traduisant la conservation de la quantité de mouvement.

3.1 Exercice sur le phénomène Venturi

L'énoncé suppose l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. Les hypothèses "incompressible et homogène" sont redondantes. On peut se contenter des hypothèses minimales suivantes :

- **écoulement parfait, stationnaire, incompressible : ce sont les hypothèses "standard" du théorème de Bernoulli. Pour un fluide stationnaire $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ et incompressible $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, l'équation de continuité impose $\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\rho=0$. Ceci traduit le fait que ρ est constant le long d'une ligne de courant**. Avec ces hypothèses l'équation d'Euler valable dans tout le fluide s'écrit :

$$\mathbf{grad}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)+\frac{\mathbf{grad}\,p}{\rho}+\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

En intégrant entre deux points A et B d'une ligne de courant

$$\int_A^B \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \left[\mathbf{grad}\left(\frac{v^2}{2} + gz\right) + \frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho} + \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}\right] = \int_A^B \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \left[\mathbf{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right)\right] = 0.$$

où nous avons pu rentrer $1/\rho$ dans le gradient car ρ est constant le long d'une ligne de courant. Ainsi, le théorème de Bernoulli implique que la quantité $p/\rho + gz + v^2/2$ est conservée le long d'une ligne de courant.

— écoulement parfait, stationnaire, homogène : pour un fluide stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et homogène $\mathbf{grad}\, \rho = \mathbf{0}$, l'équation de continuité impose $\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$. Un écoulement homogène stationnaire est donc forcément incompressible.

3.2 Exercice sur les ondes de gravité

L'énoncé suppose l'écoulement parfait, instationnaire, irrotionnel et homogène. Toutes ces hypothèses sont nécessaires pour obtenir l'intégrale première spatiale de l'équation d'Euler qui généralise le théorème de Bernoulli valable en tout point du fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad}\, \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

Nous pouvons toujours ajouter une fonction $g(t)$ à ϕ sans changer le sens physique de $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \phi$. Si l'on ajoute $g(t)$ à ϕ de telle sorte que $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t = f(t)$, ceci permet d'éliminer $f(t)$.

3.3 Exercice sur la température du nez d'un avion

L'énoncé suppose l'écoulement parfait et stationnaire. Ces deux hypothèses sont nécessaires pour montrer qu'entre deux point A et B d'une ligne de courant on a

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B - \frac{v_A^2}{2} - gz_A = 0.$$

Dans le cas d'un gaz parfait cette relation impose que la quantité $\frac{v^2}{2} + gz + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$ est conservée le long d'une ligne de courant.