TP9 PS3

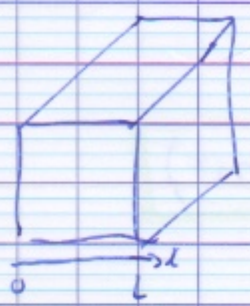
1 TD mécanique statistique III

(I prepa, II cours)

Exercice 10 - cours.

Exercice 11

1) Cet exercice a pour intérêt principal de démontrer que les définitions que nous avons posé correspondent bien à ce qui est décrit.



boite cubique L.

Condition limites:

- périodique => quantification du vecteur d'onde

$$|\vec{k}| \propto \frac{2\pi}{L}$$

$$k = \frac{2 n_i \pi}{L_i} \quad \text{avec } n_i \in \mathbb{Z}^*$$

- Conditions limites strictes/stationnaires
alors $\psi(0) = \psi(L) = 0$

$$\Rightarrow k_i = \frac{\pi}{L_i} n_i \quad \text{où } i = x, y, z \quad n_i \in \mathbb{N}^*$$

$\hat{n}$ nombre de modes car $\dim(\mathbb{N}) = \frac{1}{2} \dim(\mathbb{Z})$

2) On choisit la condition aux limites strictes.

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$$

$$E_n = \underbrace{\boxed{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}}}_{= \varepsilon_0} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\boxed{E_n = \varepsilon_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}$$

$$\varepsilon_0 \sim 10^{-40}\ J$$

$$E_c \text{ à } T_{amb} \sim \frac{3}{2} k_B T \sim 10^{-21}\ J$$

L'énergie du mode fondamental est très petite devant E_c (gaz parfait).

Cette énergie ε_0 correspond $\sim$ aux écarts entre les modes.

$\Rightarrow$ L'écart entre les modes sont $<<$ E_c d'une particule.

Donc on pourra faire un passage au continu.

2

TD PS3

Par définition $\boxed{Z = \underbrace{\sum_{l}}_{} e^{-\frac{E_l}{k_B T}}}$

somme de tous les états possibles en canonique !

T, V, n

3) Pour calculer Z on peut :

a) soit sommer sur tous les états n_x, n_y, n_z qui sont ≥ 0 !

$$\left(\sum_{n_x \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 n_x^2}\right) \cdot \left(\sum_{n_y \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 n_y^2}\right) \cdot \left(\sum_{n_z \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 n_z^2}\right) = \sum_{\substack{n_x \\ n_y \\ n_z}} e^{-\beta \varepsilon_0 n^2}$$

Or la boite est carrée $\Rightarrow$ isotrope

donc $$\sum_{n_{xyz} \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 n^2} = \left(\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 x^2}\right)^3 = \left(\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_0 x^2}\right)^3$$

On passe en continu $\qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$

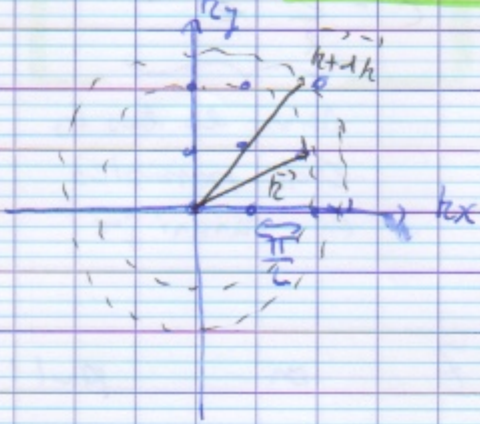
$$Z^{\frac{1}{3}} = \int_0^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_0 n^2} dn$$

$$Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta \varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{2}$$

donc $$\boxed{Z = \left(\frac{\pi}{4 \beta \varepsilon_0}\right)^{3/2}} = \left(\frac{\pi}{4\beta} \frac{2mL^2}{\pi^2 \hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$= \left(\frac{L}{\lambda_{th}}\right)^3 \text{ avec } \lambda_{th} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 \beta}{m}}$$

b) On pose par $\boxed{g(E) \text{ la densité d'état en énergie}}$



On fait le rapport entre l'évolume en espace de k et le volume d'un état : $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$

$$dk\, g(k) = \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$$

Or on a pris k_x, k_y et $k_z \geq 0$!
$\Rightarrow$ on prend en compte seulement $\frac{1}{8}$ de l'espace !

$$\Rightarrow g(k)\, dk = \frac{1}{2} \frac{\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$$

On a unicité de la solution par transformée de Fourier.

donc $g(k)\, dk = g(E)\, dE$

or $k = \sqrt{\frac{2Em}{\hbar^2}}$ $\quad dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{dE}{\sqrt{E}}$

3

TD PS3

alors $\frac{mL^3 \cancel{\pi} \cdot \cancel{2}\, \mathcal{E}}{\cancel{4}\pi^{2} \cancel{2} \hbar^2} \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} = g(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$

$$\Rightarrow \frac{L^3 m^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\mathcal{E}}\, d\mathcal{E}$$

$$= \left(\frac{L^2 m}{\hbar^2 \pi^2}\right)^{3/2} \frac{\pi}{4} \sqrt{\mathcal{E}}\, d\mathcal{E} = g(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(E) = \frac{\pi}{4\, \mathcal{E}_0^{3/2}} \sqrt{\mathcal{E}}}$$

Si non on remarque que :

$\frac{E}{\mathcal{E}_0} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ → équation d'une sphère de rayon $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$!

nb. d'états qui ont une énergie < E !

$$N(E) = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\downarrow} \underbrace{\frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{E}{\mathcal{E}_0}}^{\,3}}_{\text{volume sphère}}$$

on prend que $n_x, n_y, n_z > 0$ ⇒ $\frac{1}{8}$ du volume

$$\boxed{dN(E)\, dE = g(E)\, dE}$$

⚠

↳ souvent ⊕ simple à calculer !

alors $Z = \underbrace{\sum_{\mathcal{E}} \mathcal{N}(\mathcal{E}) e^{-\beta \mathcal{E}}}_{\text{on somme aux énergies avec}} = \underbrace{\sum_{\ell} e^{-\beta \mathcal{E}_\ell}}_{\text{on somme aux états}}$

nb. d'états ayant une énergie rigoureusement égale à $\mathcal{E}$ | → $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ qui prend en compte la dégénérescence !

$$Z = \int_0^{+\infty} A \sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\beta \mathcal{E}}\, d\mathcal{E}$$ passage au continu.

avec $\boxed{A = \frac{\pi}{4 \mathcal{E}_0^{3/2}}}$

$$Z = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{4 \mathcal{E}_0^{3/2}} \sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\beta \mathcal{E}}\, d\mathcal{E}$$

on pose $x = -\beta \mathcal{E}$

on trouve $\boxed{Z = \frac{A}{\beta^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

4 Pour N particules :

$$Z = \sum_{\underbrace{\ell_1 \ell_2 \ell_N}_{\substack{\mu\text{-états} \\ \text{pour } N \text{ particules}}}} e^{-\beta \mathcal{E}_1(\ell_1) - \beta \mathcal{E}_2(\ell_2) \cdots - \beta \mathcal{E}_N(\ell_N)}$$

4

TD PS3

N particules indépendantes

alors $$Z = \prod_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\sum_{e_i} e^{-\beta \varepsilon_{e_i}}}_{z} \Big)$$

nb états accessibles pour 1 particule

On l'a calculée pour 1 particule ! (Cf. Q 3)

car $\hat{=}$ f^ct de partition $\forall$ les particules

Or les particules d'un gaz parfait sont indiscernables. Leur permutation résulte dans le $\hat{=}$ état. Donc ici nous avons sommé sur tout les permutations !
Donc il faut diviser par le nb. de permutations => $N!$

$$\boxed{\text{Donc } Z_{GP} = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^{N} z = \frac{z^N}{N!}}$$

5) $F = -k_B T \ln(Z)$ ← énergie libre

$$= -k_B T \ln\left(\frac{z^N}{N!}\right) = -k_B T \left[N \ln z - \ln(N!) \right]$$

formule de Stirling

$$= -k_B T \left[N \ln z - N \ln N + N \right]$$

$$= -k_B T N \left[\ln\left(\frac{z}{N}\right) + 1 \right]$$

$$= -\frac{N}{\beta} \left[\ln\left(\frac{\pi}{4 \beta \varepsilon_0^{3/2}}\right) \frac{3}{2} - \ln(N) + 1 \right]$$

$$F = -k_B T N \left[\ln(L^3) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{k_B T \cdot m}{2\pi \hbar^2}\right) - \ln(N) + 1 \right]$$

$$= -k_B T N \left[\underbrace{\ln\left(\frac{V}{N}\right)}_{\text{extensif}} + \frac{3}{2} \underbrace{\ln\left(\frac{k_B T \cdot m}{\pi \hbar^2}\right)}_{\text{extensif}} + 1 \right]$$

$\Rightarrow$ F extensif !

Pour U :

$$U = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

or $F = -k_B T \ln(Z)$

$$\Rightarrow N \left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{\overbrace{k_B T}^{\frac{1}{\beta}} \cdot m}{\pi \hbar^2}\right) + 1 \right] = \ln(Z)$$

$\hookrightarrow -\frac{3}{2} \ln(\beta) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{m}{\pi \hbar^2}\right)$

donc $\boxed{U = + \frac{3N}{2\beta}}$

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

Pour P :

$\boxed{P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{k_B T N}{V}}$ $\rightarrow$ formule des gaz parfait !

S

TDPS 3

L'entropie S :

$$F = U - TS \Rightarrow S = \frac{F}{T} - \frac{U}{T}$$

$$S = + k_B N \left[\ln (L^3) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{k_B T \cdot m}{2\pi \hbar^2} \right) - \ln (N) + 1 \right] + \frac{3}{2} N k_B$$

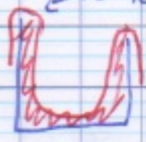
μ :

concentration

$$\mu = \left.\frac{\partial F}{\partial N}\right|_{T,V} \sim k_B T \ln (C)$$

exercice 12

1) helium superfluide qui coule dans un recipient.
monte par capilarité !



2) Dans un mode $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$

si $\mu > 0$, alors $\bar{N}(\varepsilon)$ peut être négatif !
(car $\varepsilon_{k=0} = 0$). → on prend la valeur donné pour $\bar{N}(\varepsilon)$

3) entre k et $k+dk$ on a un nombre d'états $= g(k)\,dk$

On suppose que le volume propre d'un état est $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$

alors $g(k)\,dk = \dfrac{4\pi k^2\,dk}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$

par ailleurs $\boxed{g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \dfrac{4\pi}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}\left(\dfrac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \dfrac{1}{8}}$

Condition limites strictes !

car $k = \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}\varepsilon} \Rightarrow dk = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}}\,\dfrac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}$

4) On pose $D(\varepsilon) \to$ nb d'états entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$

$\bar{N}(\varepsilon)$ est le nb. moyen de particules dans un état d'énergie ε.

donc le nb. de particules N est :

$$N = \int_0^{+\infty} d\varepsilon\,\bar{N}(\varepsilon)\,D(\varepsilon)$$

5) On admet que $\mu(T) \searrow$ si $T \nearrow$ ainsi que $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}\,du}{e^{u}-1}$

6

TDPS 3

$$N = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi^2} V \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}\right) \underbrace{\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}}_{\bar{N}(\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}}_{J}$$

On pose $u = \beta\varepsilon \Rightarrow d\varepsilon = \frac{1}{\beta} du$

$$J = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\, du}{e^{\beta(u-\mu)}-1} \underset{\mu<0!}{\leq} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\, du}{e^{\beta u}-1} = I \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{N}{V} \leq I \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \xrightarrow[T\to 0]{} 0}$$

← majoration importante !

alors $\frac{N}{V} \xrightarrow[T\to 0]{} 0$ Le calcul est faux !

fixé !

Ce qui devient faux c'est $\bar{N}$!

donc $\exists\, T_c$ tq pour $T > T_c$ $\bar{N}$ est juste et

$T < T_c$ $\bar{N}$ est faux !

On suppose $T = T_c$ quand il y a égalité entre

$\frac{N}{V}$ et $I \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2}$

On trouve $\boxed{T_c = \frac{\hbar^2}{2m k_B} \left(4\pi^2 \frac{n}{I} \right)^{2/3}}$

6) si $T < T_c$ on peut plus considérer que les états sont équitablement répartis. Donc notre passage au continu est faux !

$\xrightarrow{}$ imposé par la limite continue !

En effet $D(0) = 0$ c'est faux ! Une fraction macroscopique des particules se trouve dans l'état fondamental !
↳ condensation de Bose - Einstein.

alors $N' = N_0 + N = N_0 + \int D(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) \, d\varepsilon$

7a) pourquoi la phase superfluide n'a pas d'entropie ?

La phase superfluide est composé d'atomes dans un seul état (fondamental) $\Rightarrow S = 0$.
dans condensat de Bose dans le fondamental.

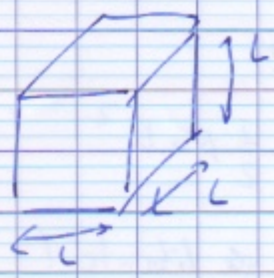
b) $T_c = 3{,}16$ K (petit) $\ll T_{amb}$

c) En fait c'est pas un gaz parfait, il y a des interactions entre particules.

7

TD PS3

exercice 13



1) Condition limite périodique :

$$\vec{k_n} = \frac{2\pi}{L} n \qquad n \in \mathbb{Z}^*$$

alors :

$$g(k)\,dk = \frac{4\pi\, k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}\, 2$$

un photon peut avoir 2 états de polarisations données ! (droite ou gauche)

La toute polar peut être décrite comme combinaison de ces 2 polarisations.

alors $\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\pi \nu}{c} \\ k^2 = \dfrac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow dk = \dfrac{2\pi}{c}\, d\nu$

$$g(k)\,dk = g(\nu)\,d\nu = \frac{L^3}{\pi^2}\,\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\cdot\frac{2\pi}{c}\,d\nu$$

$$= \frac{8\pi L^3 \nu^2\, d\nu}{c^3}$$

d'où $\boxed{g(\nu) = 8\pi \frac{L^3 \nu^2}{c^3}}$

2) en Em : $E_1 \overset{\text{pour un mode!}}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 B^2$

→ 2 degrés quadratiques de liberté !

donc $u_1 = \frac{2}{2} k_B T$ ← Th. équipartition

↳ pour 1 mode

donc :

densité volumique

$u_{classique} = \frac{g(\nu)}{L^3} \cdot u_1$

$$\boxed{u_{classique} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T}$$

Or ceci diverge pour $T \rightarrow +\infty$!

↳ catastrophe ultraviolette !

3) a) Le photon est un boson car son spin est entier !

autres exemples : Higgs , atomes avec nb neutrons pair

— ^7Li , ^4He

b) μ : énergie apportée au système quand on lui ajoute une particule

TD PS3

pour des photons $\mu = 0$

↳ notre enceinte peut absorber ou fournir des photons en indépendamment du nb. de photons dans l'enceinte

énergie d'une particule $\mathcal{E}$ — nb. modes moyen — densité d'états ⁄ nb. moyen de particules d'énergie $\mathcal{E}$

$$u_{quantique}(\mathcal{E}, T) = \frac{\mathcal{E}\,\overline{N}}{L^3}(\mathcal{E}, \mu = 0)\, g(\mathcal{E})$$

or $\mathcal{E} = h\nu$

$$\text{donc } u_{quantique}(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

$$\boxed{\text{si } k_B T \to 0 \text{ on retrouve } u_{classique} \,!}$$

4)
$$\frac{\partial u_{quant}}{\partial \nu} = \frac{8\pi h}{c^3}\left[3\nu^2 \cdot \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} - \frac{\nu^3 \beta h e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu} - 1)^2}\right]$$

on cherche max donc $= 0$

on pose $x = \beta h\nu$

$$\text{alors } \frac{3\nu^2}{e^x - 1} - \frac{\nu^2 x e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(e^x - 1) - \frac{x}{3} e^x = 0}$$

résolution graphique : on trouve :

$$\boxed{\frac{\beta h c}{\lambda_{max}} = 4,965 \quad \text{Loi de Wien}}$$

Pour le corps humain $\lambda_{max} = 10\,\mu m \to$ I.R

Pour soleil $\lambda_{max} = 500\,nm \to$ visible !

5) $E(T, V) = V \cdot u_{TOT}(T)$

$$= V \int_0^{+\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1} d\nu$$

$x = \beta h \nu$
$$= V \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{+\infty} (\beta h)^4 x^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$= V \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{1}{\beta h}\right)^4 \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$\boxed{E(T, V) = V \cdot \frac{8\pi^5}{15 (hc)^3} \cdot (k_B T)^4}$$

6) On donc $I(T, \theta) = u_{TOT}(T) \cdot \frac{c \cos\theta}{4\pi}$.

TD P53

on veut ce qui est rayonné par la surface

$$M(T) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} c \cdot u_{TOT}(T) \cdot \frac{\cos\theta}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{c \cdot u_{TOT}(T)}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= c \cdot \frac{u_{TOT}(T)}{4\pi} \int_0^1 u \, du = \frac{c}{4} \cdot u_{TOT}(T)$$

$$\boxed{M(T) = \frac{c\,u_{TOT}}{4}(T) \propto T^4 \qquad \text{Loi de Stéphane}}$$

$$\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \cdot T^4$$

7) pour une particule normale : $U = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} p v$

or pour un photon $U = pc$

facteur 2 que l'on retrouve pour les relations pression $\frac{U}{V}$