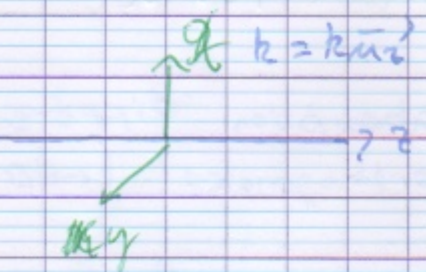
TD OP 4

TD 4 – Polarisation – milieux anisotropes – Biréfringence

Exercice 1 Polarisation.

1) Onde plane de pulsation ω de vecteur d'onde $\vec{k}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$



$$\vec{E_0} = E_{0x} e^{i\varphi_x}\vec{e_x} + E_{0y} e^{i\varphi_y}\vec{e_y}$$

$E_{0x}, E_{0y} \in \mathbb{R}$

polarisation

$$\left(\begin{array}{l} A_x = A_x' e^{-i\omega t} \\ A_y = A_y' e^{-i\omega t} \end{array}\right)$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{E_0}}{E} = A_x e^{i\varphi_x}\vec{u_x} + A_y e^{i\varphi_y}\vec{u_y}$$

$$\boxed{\vec{u}' = A_x \vec{u_x} + A_y e^{i\Delta\varphi} u_y \qquad \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x \qquad \|u\| = 1}$$

toute l'info sur la polarisation est contenue dans ce vecteur u.

A priori, $\Delta\varphi$ c'est une fonction du temps.

$\Delta\varphi$ évolue sur un temps caractéristique τ

- $\tau \gg T_{détecteur}$: polarisation bien définie mais qui change dans le temps.

- $\tau \ll T_{détecteur}$: polarisation arbitraire
  ↳ onde non ou partiellement polarisé

Production de lumière polarisé

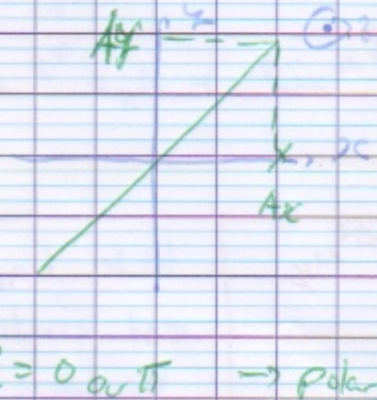
par dichroïsme - absorption différente pour 2 polarisations orthogonales (molécules étirées)

- réflexion à l'angle de Brewster (cubes polariseurs)

- diffusion de Rayleigh

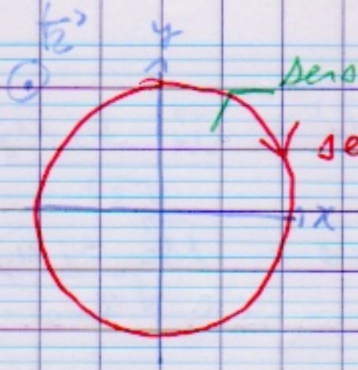
représentation de $\vec{u}$:

$\odot z$ ← convention (Imp!).



- $\Delta\varphi = 0$ ou π → polarisation rectiligne.

TD OD4   2



} à réfléchir à chaque fois.

- $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $A_x = A_y$

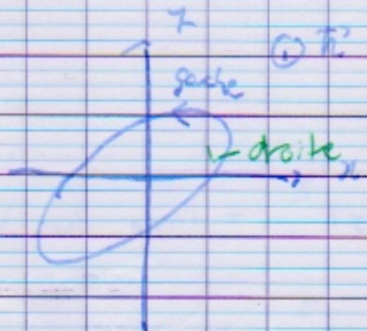
rq: $\underline{\vec{E}}(t) = \underline{E_0}\left(A_x e^{-i\omega t}\vec{u_x} + A_y e^{-i\omega t} e^{i\Delta\varphi}\vec{u_y}\right) e^{ikz}$

En notations réelles : en $z=0$:

$$\vec{E}(t) = E_0 \left(A_x \cos(\omega t)\vec{u_x} + A_y \cos(\omega t - \Delta\varphi)\vec{u_y}\right)$$

On trace dans nos graphiques les lieu des points de coordonnées : $(A_x \cos\omega t, A_y\cos(\omega t - \Delta\varphi))$

-

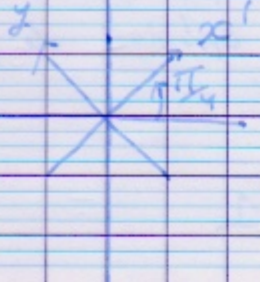


- $\Delta\varphi$ qq. → polarisation elliptique (droite ou gauche)

b) Polarisation rectiligne   selon x $\vec{u} = \vec{u_x}$

selon y $\vec{u} = \vec{u_y}$

=>



selon x' : $\vec{u} = \frac{\vec{u_x} + \vec{u_y}}{\sqrt{2}}$

y' $\vec{u} = \frac{-u_x + u_y}{\sqrt{2}}$

On aurait écrit $u_x - u_y$ car ça oscille !

circulaire gauche : $\vec{u_g} = \dfrac{\vec{u_x} + i\vec{u_y}}{\sqrt{2}}$

" droite : $\vec{u_d} = \dfrac{\vec{u_x} - i\vec{u_y}}{\sqrt{2}}$

en effet : $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t}(u_x + i u_y)$
$= E_0 (\cos\omega t \vec{u_x} + \sin\omega t \vec{u_y})$

$\vec{u}$ decomposable sur ces vecteurs :

$A_x = \vec{u} \cdot \vec{u_x}^*$ ⚠ aux * on est sur des complexes.
$A_y = \vec{u} \cdot \vec{u_y}^*$
$A_{x'} = \vec{u} \cdot \vec{u_{x'}}^*$
$A_{y'} = \vec{u} \cdot \vec{u_{y'}}^*$
$A_d = \vec{u} \cdot \vec{u_d}^*$
$A_g = \vec{u} \cdot \vec{u_g}^*$

Vecteur de stokes

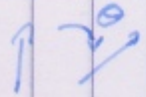
$S_1 = |A_x|^2 - |A_y|^2$ → info sur verticalité / horizontalité.

$S_2 = |A_{x'}|^2 - |A_{y'}|^2$ → info sur diagonalité

$S_3 = |A_d|^2 - |A_g|^2$ info sur : circulaire droite ou gauche

avec $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ ← peut être représenté sur la sphère de poincaré.

① de polarisé : $\|\vec{S}\| = 1$

loi de malus  $I = I_0 \cos^2\theta$

3

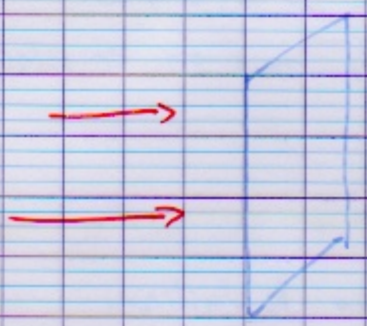
TD OP4

Onde non polarisée : $\|\vec{S}\| = 0$

Onde partiellement polarisé : $\|\vec{S}\|$ $0 \leq p \leq 1$

Degré de polarisation

Milieu anisotrope exercice 2



Milieux diélectriques, linéaires, homogènes.

On a polarisation volumique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{[\chi_e]}_{\text{tenseur de susceptibilité diélectrique (tenseur symétrique)}} \vec{E}$$

Induction électrique :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
$$= \varepsilon_0 \underbrace{[\varepsilon_r]}_{\text{permittivité diélectrique.}} \vec{E} \quad \text{où } [\varepsilon_r] = I_d + [\chi_e]$$

Matrice symétrique $\Rightarrow$ $\exists$ au moins 1 base dans laquelle on peut diagonaliser donc ∃ une base (x, y, z) où :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rx} & & 0 \\ & \varepsilon_{ry} & \\ 0 & & \varepsilon_{rz} \end{pmatrix}$$

- $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} = \varepsilon_{rz}$ → $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

  ⇒ Milieu isotrope, mais on ne place pas dans ce cas.

- $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} \neq \varepsilon_{rz}$

  1 axe particulier dans le milieu.

  ⇒ milieu uniaxe.

  On a un indice ordinaire : $n_o = \sqrt{\varepsilon_{rx}} = \sqrt{\varepsilon_{ry}}$

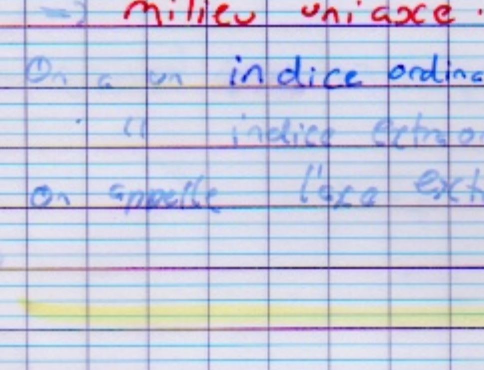
  " " indice extraordinaire : $n_e = \sqrt{\varepsilon_{rz}}$

  On appelle l'axe extraordinaire, l'axe optique du milieu.

- $\varepsilon_{rx} \neq \varepsilon_{ry} \neq \varepsilon_{rz}$ et $\varepsilon_{rz} \neq \varepsilon_{rx}$

  ⇒ milieu biaxe

étudions plus les milieux uniaxe :



lame à face perpendiculaire

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \varepsilon_{ro} & \\ & \varepsilon_{ro} \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{re} \end{pmatrix}$$

on regarde que ceci

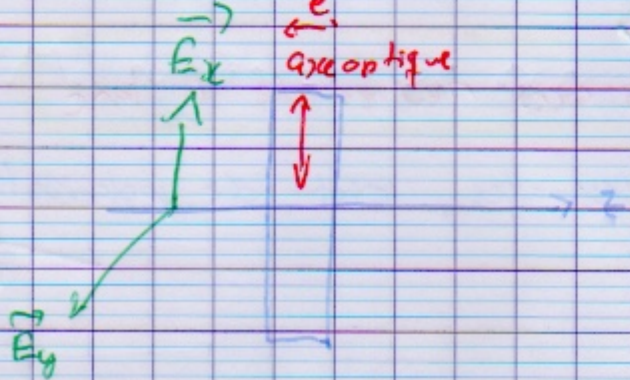
car $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$

4

TD OP4

L'onde ne "voie" qu'un seul indice optique n_o

$\Rightarrow$ La lame se comporte comme une lame isotrope d'indice n_o.



Si $\vec{E} \parallel \vec{e_x}$, l'onde "voit" un indice n_e

↳ déphasage de $\frac{2\pi n_e e}{\lambda}$

Si $\vec{E} \parallel \vec{e_y}$, $\vec{E} \perp$ axe optique l'onde "voit" un indice n_o

↳ déphasage de $\frac{2\pi n_o e}{\lambda}$

$\Rightarrow$ On observe la biréfringence de la lame !

biréfringence $\Delta n = n_e - n_o$

On a donc, à travers la lame un déphasage relatif :

$$\underline{\Delta\varphi} = \frac{2\pi \Delta n \cdot e}{\lambda}$$

- si $\Delta\varphi = \pi\,[2\pi]$, $\Delta n e = \frac{\lambda}{2}\,[\lambda]$

↳ lame $\frac{\lambda}{2}$

- si $\Delta\varphi = \pi/2\,[2\pi]$, $\Delta n e = \frac{\lambda}{4}\,[\lambda]$

↳ Lame $\frac{\lambda}{4}$

• Si $\vec{E} \parallel \vec{e_x}$ ou si $\vec{E} \parallel \vec{e_y}$
l'état de polarisation n'est pas modifié
(car $\vec{E}$ ne voit qu'un seul indice)
(dans cette configuration).

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Ce sont les axes neutres de la lame}}$

(axes pour lesquelles l'état de polarisation n'est pas modifié)

On définit

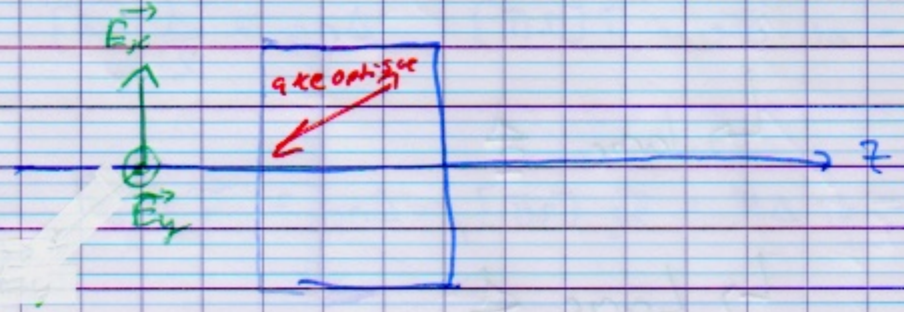
axe lent – axe d'indice le plus élevé
axe rapide – axe d'indice le plus petit.

les axes de la lame $\underbrace{\vec{e}_{x\,lame}}_{\varepsilon_{rx}}$, $\underbrace{\vec{e}_{y\,lame}}_{\varepsilon_{ry}}$, $\underbrace{\vec{e}_{z\,lame}}_{\varepsilon_{rz}}$
sont les axes propres de la lame.

axes propres de la lame.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rx} & & 0 \\ & \varepsilon_{ry} & \\ 0 & & \varepsilon_{rz} \end{pmatrix}$$

• On se place dans un cas où l'axe optique est qq.



5

TD opt 4

- si $\vec{E} \parallel \vec{E_y}$; $\vec{E}$ $\perp$ axe optique
  $\Rightarrow \vec{E}$ voit un indice n_0

- $\vec{E} \parallel \vec{E_x}$: $\vec{E}$ ni $\perp$ ni $\parallel$ axe optique

$\vec{E}$ n'est pas selon un des axes propres de la lame.

$\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$

$\vec{D}$ n'est pas parallèle à $\vec{E}$!

par ailleurs : $\underbrace{\vec{rot}(\vec{B})}_{i\vec{k} \wedge \vec{B}} = \mu_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{-i\omega\vec{D}}$ $\Rightarrow (\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$ trièdre direct.

⚠ pas $\vec{E}$ mais $\vec{D}$!

Poynting : $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

donc $(\vec{\Pi}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct, mais $\vec{k}$?

On regarde alors les relations de passage :

Discontinuité de la composante normale à $\vec{D}$:

$\vec{D_{2\perp}} - \vec{D_{1\perp}} = \sigma_{libre} \vec{n_{1\to 2}}$

or $\sigma_{libre} = 0$ donc $\vec{D_{2\perp}} = \vec{D_{1\perp}}$

continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$

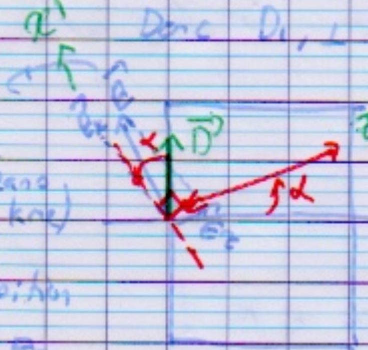
$$\vec{E}_{1,t} = \vec{E}_{2,t}$$

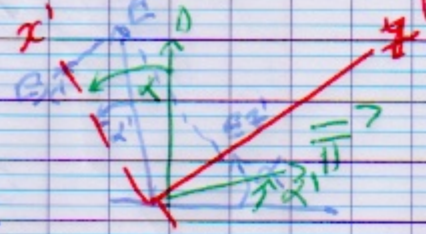
Donc $\vec{D}$ // à la face d'entrée de la lame.

Donc $D_{1,\perp} = 0 = D_{2,\perp}$

Comme $\vec{E}$ fixe à l'entrée de la lame (dans la lame)

↳ décomposition en E_t et E_x.





on décompose dans base $x'y'z'$ lié sur axe de la lame.

alors $\vec{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{rx'} & & \\ & \varepsilon_{ry'} & \\ 0 & & \varepsilon_{rz'} \end{pmatrix} \vec{E}$

$\varepsilon_{rx'} = \varepsilon_{ro}$, $\varepsilon_{rz'} = \varepsilon_{re}$

or $\vec{E} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ 0 \\ E_{z'} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_{ro} E_{x'} \\ 0 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{re} E_{z'} \end{pmatrix}$

on a $\dfrac{D_{x'}}{D_{z'}} = \dfrac{\varepsilon_{ro}}{\varepsilon_{re}} \dfrac{E_{x'}}{E_{z'}}$

$$= \frac{1}{\tan\alpha}$$

alors $\dfrac{E_{x'}}{E_{z'}} = \dfrac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ro}} \dfrac{1}{\tan\alpha} = \left(\dfrac{n_e}{n_o}\right)^2 \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha'}$

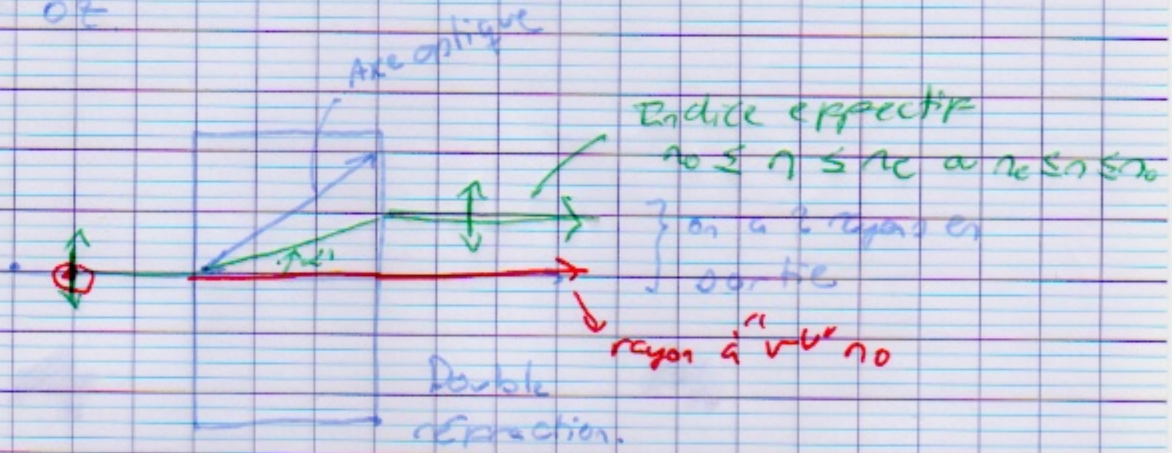
TD opt 4

6

alors : $$\tan \alpha' = \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \tan \alpha$$

avec α' = angle entre l'axe Oz et $\vec{\Pi}$

$\Rightarrow$ Rayon lumineux incliné d'un angle α' par rapport à Oz.



$\updownarrow$ et $\odot$

= axes neutres de la lame

Application → polariseurs

↳ très efficaces car on sépare les polarisations des axes neutres !