Series de tiempo

Proyecto Final

Modelos con Heteroscedasticidad condicionada Vectoriales: ARCH y GARCH

CIMAT - Unidad Monterrey

Armando Salinas Lorenzana
Pedro Omar Gonzalez Rodriguez

28 de agosto de 2025

Índice

1. Introducción

En el análisis de datos financieros, comprender y modelar la volatilidad es fundamental para la gestión de riesgos, la construcción de portafolios y la valoración de activos. A lo largo de los años, los modelos autoregresivos condicionales heterocedásticos (ARCH) y su extensión generalizada GARCH se han consolidado como herramientas clave para abordar estas tareas. Sin embargo, la creciente complejidad de los mercados financieros ha llevado al desarrollo de modelos multivariados que permiten capturar interdependencias entre múltiples activos.

Este trabajo se centra en el estudio y aplicación de los modelos GARCH multivariados, incluyendo variantes como el modelo diagonal, VEC-GARCH, CCC-GARCH, DCC-GARCH y BEKK-GARCH. Estos modelos permiten analizar la dinámica conjunta de múltiples series temporales al modelar la matriz de covarianza condicional en función de valores pasados de la serie.

El objetivo principal es explorar las propiedades teóricas de estos modelos y demostrar su aplicación en problemas financieros. A través de ejemplos computacionales, se ilustra cómo estos modelos permiten capturar la evolución de la volatilidad conjunta y la correlación dinámica entre activos financieros. De esta manera, el trabajo busca proporcionar una comprensión integral de los modelos GARCH multivariados y su relevancia en la econometría financiera.

2. Repaso histórico

Los modelos autoregresivos condicionales hetedocedásticos (ARCH) y sus generalizaciones, los modelos GARCH surgieron como una herramienta fundamenta para modelar y predecir la volatilidad de las series temporales financieras. Este enfoque de modelos marcó un antes y un después en la econometría, especialmente cuando se trataba de análisis de datos financieros, al capturar dinámicas de volatilidad que no podían ser modelados eficientemente con los modelos estándar de la época.
Fue hasta el año de 1982 cuando el modelo ARCH fue introducido por Robert F. Engle en su artículo pionero *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation* [1]. Eagle indentificó que los datos financieros presentaban heterocedasticidad condicional, es decir, varianzas que cambian a lo largo del tiempo en función de la información pasada. Este modelo fue una solución novedosa para abordar los períodos de alta y baja volatilidad que son comunes en las series financieras.

El modelo ARCH se basó en un número finito de retardos q de los errores al cuadrado, lo que llevó a la formulación $ARCH(q)$, sin embargo una limitación práctica de los modelos $ARCH(q)$ es que requerían de un número elevado de retardos para capturar adecuadamente la dinámica de largo plazo de la volatilidad, lo que podía resultar en problemas de sobre parametrización, de aquí, con el tiempo surgió el modelo $ARCH(\infty)$ que fue concebido como una solución teórica para superar las limitaciones de $ARCH(q)$. Este modelo considera un número infinito de retardos, permitiendo una representación más completa y flexible de la varianza condicional. Por tanto, mientras que Engle sentó las bases para el concepto al introducir ARCH, la formalización y el entendimiento del modelo $ARCH(\infty)$ emergieron como parte del desarrollo teórico en los años posteriores, principalmente en la década de 1980 [2].
A la par Bollerslev presentó el modelo CCC-GARCH en 1990 [3], que asume que las correlaciones entre las series son constantes a lo largo del tiempo, lo que lo hace más sencillo y más eficiente computacionalmente en comparación con el DCC-GARCH. Sin embargo, la desventaja de este modelo es que no captura las correlaciones dinámicas, lo que limita su aplicabilidad en ciertos contextos.
En 1986 Tim Bollerslev amplió el modelo ARCH al introducir el modelo GARCH (Generalized ARCH), Tim Bollerslev demostró que este podía interpretarse como una aproximación parsimoniosa de un modelo $ARCH(\infty)$ con coeficientes que decaen exponencialmente [4]. La propuesta de Bollerslev permitió que la varianza condicional dependiera no solo de los errores pasados, sino también de los valores pasados de la varianza condicional. Esto permitió reducir la cantidad de parámetros necesarios en el modelo, lo que hizo que fuera más eficiente y práctico para analizar datos reales.
Después de esta propuesta, la familia GARCH se convirtió rápidamente en la base para el modelado de la volatilidad en mercados financieros, ya que podía capturar de manera eficiente los principales hechos estilizados de las series financieras. En 1989, Engle y Kroner fueron los primeros en aplicar el enfoque GARCH al análisis multivariado [5]. Propusieron el modelo VEC (Vector) GARCH, que extendía el concepto de GARCH a sistemas de ecuaciones multivariadas, permitiendo modelar la volatilidad condicional de varias variables y sus covarianzas. En 1991, Bollerslev y Wooldridge introdujeron una extensión importante con el modelo BEKK (Baba, Engle, Kraft, and Kroner). El modelo BEKK permite modelar las varianzas y covarianzas de las variables en un sistema multivariado, siendo una de las primeras aproximaciones prácticas para el análisis de series temporales multivariadas.
También a partir de los modelos GARCH clásicos, se desarrollaron numerosas variantes para abordar características específicas de las series financieras, algunas de ellas fue el modelo EGARCH (Exponencial GARCH) introducido por Nelson en 1991 [6], Nelson observó que en los mercados financieros los chocks negativos tienden a aumentar la volatilidad más que los shocks positivos de igual magnitud. Este fenómeno es conocido como apalancamiento y no podía ser capturado adecuadamente por los modelos GARCH tradicionales, por tanto Nelson propuso este modelo como una solución para capturar asimetrías en la respuesta de la volatilidad a los shocks. Posteriormente en 1993 el modelo GJR-GARCH fue desarrollado por Glosten, Jagannathan y Runkle [7], como una extensión del modelo GARCH que introduce un componente asimétrico para modelar cómo los shocks afectan la volatilidad condicional dependiendo de si estos son positivos o negativos. Los autores querían abordar el mismo efecto apalancamiento descrito por Nelson en el modelo EGARCH, pero utilizando una fomulación más simple y directa.

Más tarde, en 1994, el modelo Threshold ARCH (TARCH) fue propuesto por Zakoian como otra forma de capturar la asimetría en la volatilidad condicional [8]. Zakoioan observó que los shocks extremos o muy grandes pueden tener un impacto desproporcionado en la volatilidad futura, un efecto que los modelos ARCH/GARCH estándar no pueden reflejar de manera adecuada. Al introducir umbrales, el modelo TARCH permite una mayor flexibilidad para capturar estos efectos.

Posteriormente con el tiempo los modelos multivariados MGARCH surgieron como una extensión natural de los modelos univariados ARCH y GARCH en respuesta a la necesidad de modelar volatilidad conjunta de múltiples series temporales. Su desarrollo fue impulsado por aplicaciones prácticas en finanzas, como la evaluación de riesgos y la construcción de portafolios, donde es fundamental capturar la interdependencia y la dinámica conjunta entre activos financieros. Los primeros trabajos MGARCH se atribuyen a autores como Engle y Kroner (1995) [5], quienes desarrollaron una familia de modelos para bordar problemas de dimensionalidad y restricciones de parsimonia.

Por otra parte los modelos GARCH no lineales surgieron como una respuesta a las limitaciones de los modelos clásicos GARCH en la captura de comportamientos más complejos observados en los mercados financieros [2]. Estas variantes introducen no linealidades en la relación entre shocks pasados y la volatilidad, permitiendo modelar fenómenos como asimetrías más pronunciadas o respuestas no proporcionales a shocks.

También surgieron los modelos GARCH con saltos que son una combinación de procesos GARCH tradicionales con componentes de “saltos”, utilizados para capturar movimientos abruptos en las series temporales financieras. Estos modelos se desarrollaron en el contexto de eventos extremos, como crisis económicas o anuncios inesperados, que generan fluctuaciones significativas en los precios de los activos. Estos modelos fueron inspirados en los trabajos de Merton (1976) sobre modelos de precios con saltos, investigadores comenzaron a incorporar componentes de saltos en el marco GARCH. En 1996, Andersen, Benzoni y Lund ampliaron este enfoque al proponer un modelo que combinaba GARCH con procesos de Poisson para modelar los saltos [9].

Para la década de los 2000, el rumbo de los modelos se oriento hacia la dinámica multivariada y los modelos no lineas. Una de las principales contribuciones fue el modelo DCC-GARCH propuesto por Engle en 2002 [10]. El modelo DCC-GARCH descompone la covarianza en dos componentes: una varianza condicional dinámica y una correlación condicional dinámica. Este modelo permite capturar la heterocedasticidad condicional y la correlación dinámica entre las series. Es ampliamente utilizado debido a su eficiencia y capacidad para manejar sistemas multivariados grandes de manera más sencilla que el modelo BEKK.

El desarrollo de modelos GARCH multivariados ha sido clave para la modelización de series temporales financieras. Desde los primeros modelos como el BEKK y el VEC-GARCH, pasando por el modelo DCC-GARCH que representa una de las principales innovaciones en el campo, hasta la incorporación de saltos y otros efectos no lineales, la familia GARCH multivariada ha crecido y se ha sofisticado con el tiempo. Hoy en día, estos modelos son fundamentales para el análisis y la predicción de la volatilidad y las correlaciones en los mercados financieros.

3. Heterocedasticidad y hechos estilizados

Al igual que en una regresión lineal, muchas series temporales presentan estructuras de heterocedasticidad, es decir, tienen varianza no constante, tipicamente la hetetocedásticidad lo podemos definir como:

$$Var(\epsilon_t|\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, ...) \neq \text{constante}.$$

Dicho de otra forma, la varianza del error en el tiempo t dado los errores pasados, no permenece constante. Por ejemplo, en un modelo de regresión lineal, si la variable de respuesta Y tiene una estructura de varianza no constante como:

$$Y = X\beta + \epsilon, \text{ donde } var(\epsilon) = \sigma$$

entonces en lugar de usar el procedimiento de minimos cuadrados ordinarios utilizamos un método de mínimos cuadrados generalizados para tener en cuenta la heterogeneidad de ϵ. Muchas de las series temporales, especialmente las series de tiempo financieras, presentan heterocedasticidad, lo cual no es suficiente modelarlas con los modelos clásicos como los modelos ARIMA, dado que estos modelos dan por hecho una varianza constante. En las series temporales, a menudo se observa que las variaciones son bastante pequeñas durante varios períodos consecutivos, luego aumentan considerablemente durante un tiempo y después vuelven a ser pequeñas, aparentemente sin una razón clara. Sería deseable que estos cambios en las variaciones (volatilidad) pudieran incorporarse al modelo. Un caso típico es el de una serie de precios de activos. Podemos decir que en general modelar las series de tiempo financieras es un problema complejo. Esta complejidad no solo se debe a la variedad de las series utilizadas, a la importancia de la frecuencia de observación o a la disponibilidad de conjuntos de datos muy grandes. Se debe principalmente a la existencia de regularidades estadísticas llamadas *hechos estilizados* que son comunes a un gran número de series financieras y que son díficiles de reproducir artificialmente usando modelos estocásticos. La mayoría de estos hechos estilizados fueron presentados en un artículo de Mandelbrot (1972) [11]. Desde entonces, han sido documentados y completados por muchos estudios empíricos. Las características típicas de estos comportamientos, comúnmente conocidas como hechos estilizados, son:

- *No estacionaridad:* Trayectorias de las series de tiempo que suelen ser similares a un paseo aleatorio sin intercepto.

- *Ausencia de autocorrelación en las variaciones:* Las series suelen mostrar autocorrelaciones pequeñas, lo que las hace cercanas a un ruido blanco.

- *Autocorrelaciones al cuadrado:* El cuadrado de los errores de las series de tiempo ϵ^2 suelen estar fuertemente autocorrelacionados. Esta propiedad no es incompatible con la suposición de ruido blanco para los errores, pero muestra que el ruido blanco no es fuerte.

- *Agrupamiento de volatilidad:* Los errores absolutos grandes $|\epsilon_t|$ tienden a aparecer en grupos. Los subperíodos turbulentos (alta volatilidad) suelen estar seguidos de subperíodos tranquilos (baja volatilidad). Estos subperíodos son recurrentes, pero no aparecen de manera periódica. En otras palabras, el agrupamiento de volatilidad no es incompatible con una distribución marginal homocedástica (es decir, con varianza constante) para los errores.

- *Distribuciones con colas pesadas:* Cuando se representa la distribución empírica de los errores, generalmente no se asemeja a una distribución gaussiana. Las pruebas clásicas regularmente rechazan la suposición de normalidad a cualquier nivel razonable. Más precisamente, las densidades tienen colas pesadas que decrecen hacia cero lentamente y reprentan un pico pronunciado en torno a cero, este caso se denomina leptocúrticas.

- *Efectos de apalancamiento:* Este efecto implica una asimetría en el impacto de los valores pasados positivos y negativos sobre la volatilidad actual. Los retornos negativos tienen a aumentar la volatilidad en mayor medida que los retornos positivos de la misma magnitud.

- *Estacionalidad:* ambién es importante mencionar los efectos de calendario. El día de la semana, la proximidad de días festivos, entre otras estacionalidades, pueden tener efectos significativos sobre los errores.

La heterocedasticidad y los hechos estilizados son tanto un desafío como una oportunidad en el análisis financiero. Mientras que los primeros modelos financieros, como el paseo aleatorio y la hipótesis de mercados eficientes, subestimaban la complejidad de los datos reales, los avances en estadística y econometría han permitido desarrollar herramientas más sofisticadas para capturar estas características como los modelos que de los que se hablarán en este trabajo.

4. Modelo ARCH

Gran parte del contenido de esta sección fue basada en el libro Wiley series in probability and statistics [12].

4.1. Modelo ARCH(q)

Consideremos una serie de tiempo X_t con $E[X_t] = \mu$ y $Var[X_t] = \sigma^2$, que no depende del tiempo. Definimos la media condicional de X_t como:

$$\mu_t = E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$$

y la varianza condicionanl σ^2 como

$$\sigma_t^2 = Var[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E[(X_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}]$$

donde $\mathcal{F}_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, ...\}$ es el campo sigma generado por la información pasada hasta el tiempo $t-1$.

El modelo ARCH fue uno de los primeros modelos de series de temporales para la heterocedasticidad. En su forma más simple, un modelo ARCH expresa la serie de retornos ϵ_t como:

$$X_t \equiv \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \tag{1}$$

donde usualmente se asume que $\eta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) con $E[\eta_t] = 0$, $E[\eta_t^2] = 1$ y σ_t satisface

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2. \tag{2}$$

Entonces

$$E(\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t^2\eta_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 E(\eta_t^2|\mathcal{F}_{t-1})$$

Esta identidad implica que la varianza condicional de X_t evoluciona en función de los valores pasados de ϵ_t^2, de manera similar a un modelo $AR(q)$, de aquí el nombre de "heterocedasticidad condicional autorregresiva de orden q" (ARCH(q)). Para que este modelo sea válido, es necesario imponer condiciones a los coeficientes para garantizar que el proceso este bien definido en la ecuación (2). Para asegurar que $\sigma_t^2 > 0$ y que ϵ_t esté bien definido, una condición suficiente es

$$\sigma_i \geq 0 \quad \text{para } i = 0, \ldots, q,$$

y

$$\sum_{i=1}^{p} \sigma_i < 1.$$

4.2. Propiedades del modelo ARCH(q)

Algunas de las propiedades del modelo **ARCH(q)** son las siguientes:

1. Media de los retornos
$$E[\epsilon_t] = E[\sigma_t \eta_t] = E[\sigma_t]E[\eta_t] = 0.$$

2. Varianza del retorno
$$Var(\epsilon_t) = E[\epsilon_t^2] = E(E(\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1})) = E\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(\epsilon_{t-i}^2) = \alpha_0 + E(\epsilon_t^2) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i$$
de la ecuación anterior se observa que puede despejarse $E(\epsilon_t^2)$, por lo tanto despejando se obtiene
$$Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_j}.$$

3. Media condicional de los retornos
$$E[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

4. Varianza condicional de los retornos
$$E[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\sigma_t^2 \eta_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]E[\eta_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

5. Autocovarianza de los retornos
$$Cov(\epsilon_t \epsilon_{t-k}) = E[\epsilon_t \epsilon_{t-k}] - E[\epsilon_t]E[\epsilon_{t-k}] = E[\epsilon_t \epsilon_{t-k}] = E[\sigma_t \eta_t \epsilon_{t-k}] = E[\eta_t]E[\sigma_t \epsilon_{t-k}] = 0$$
para cualquier $k > 0$.

6. El coeficiente de curtosis de ϵ_t, si existe, está relacionado con el de η_t, denotado como κ_η de la siguiente manera:
$$\frac{E(\epsilon_t^4)}{[E(\epsilon_t^2)]} = \kappa_\eta \left[1 + \frac{Var(\sigma_t^2)}{[E(\sigma_t^2)]^2}\right]$$
Esta fórmula muestra que la leptocurtosis de las series temporales financieras puede ser considerada de dos maneras diferentes: ya sea utilizando una distribución leptocúrtica para la secuencia iid η_t, o especificando un proceso σ_t^2 con una gran variabilidad.

7. Alternativamente podemos expresar un modelo $ARCH(q)$ como un modelo $AR(q)$.

4.3. Modelo ARCH(1)

Tomemos como ejemplo un modelo ARCH(1). Sea $\epsilon_t = \sigma_t\eta_t$ con $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2$. Sustituyendo de forma recursiva tenemos

$$\begin{aligned}
\epsilon_t^2 &= \sigma_t^2\eta_t^2 \\
&= \eta^2(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2) \\
&= \alpha_0\eta_t^2 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2\eta_t^2 \\
&= \alpha_0\eta_t^2 + \alpha_1\eta_t^2(\sigma_{t-1}^2\eta_{t-1}^2) \\
&\ \ \vdots \\
&= \alpha_0\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j\eta_t^2\cdots\eta_{t-j}^2 + \alpha_1^{n+1}\eta_t^2\eta_{t-1}^2\cdots\eta_{t-n}^2\epsilon_{t-n-1}^2.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 < 1$, el último término de la expresión anterior tiene a cero a medida que t tiende a infinito, y en este caso:

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j\eta_t^2\cdots\eta_{t-j}^2 \tag{3}$$

4.4. Propiedades del modelo ARCH(1)

1. Se deduce de la ecuación 3 que ϵ_t es causal, aunque no lineal, es decir, es una función no linea de $\eta_t, \eta_{t-1}, \ldots$.

2. Media del retorno
$$E(\epsilon_t) = E(E(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})) = E(E(\sigma_t\eta_t|\mathcal{F}_{t-1})) = 0.$$

3. Varianza del retorno
$$Var(\epsilon_t) = E[\epsilon_t^2] = E[E[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]] = E[\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\epsilon_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\epsilon_t^2]$$
de la ecuación anterior se despeja $E[t]$ y se obtiene
$$Var(\epsilon) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

4. Media condicional de los retornos
$$E[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\eta_t\sigma_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t E[\eta_t] = 0.$$

5. Varianza condicional de los retornos
$$E[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\eta_t^2\sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2 E[\eta_t^2] = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2.$$

6. Covarianza para los retornos, para $h > 0$,
$$\begin{aligned}
Cov(\epsilon_t\epsilon_{t+h}) &= E(\epsilon_{t+h}\epsilon_t) \\
&= E(E(\epsilon_{t+h}\epsilon_t|\mathcal{F}_{t+h-1})) \\
&= E(\epsilon_t E(\sigma_{t+h}\epsilon_{t+h}|F_{t+h-1})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

7. Alternativamente, podemos expresar el modelo $ARCH(1)$ con un $AR(1)$

$$\begin{aligned}\epsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + \epsilon_t^2 - \sigma_t^2\\ &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1)\\ &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + v_t.\end{aligned}$$

Formalmente podemos pensar en un modelo en un modelo $ARCH(1)$ como un $AR(1)$ para el proceso $\{\epsilon_t^2\}$ impulsado por un nuevo ruido $\{v_t\}$.

4.5. Ventajas y desventajas del modelo ARCH

Ventajas

1. **Captura de la heterocedasticidad condicional:** El modelo ARCH es capaz de modelar la volatilidad variable en el tiempo. Esto es especialmente útil en contextos financieros, donde la volatilidad cambia a lo largo del tiempo y puede estar correlacionada con eventos previos.

2. **Simplicidad:** El modelo es relativamente sencillo de entender y estimar. Los parámetros pueden ser estimados con métodos estándar como el método de máxima verosimilitud.

3. **Identificación de volatilidad de largo plazo:** A través de sus parámetros, puede identificar patrones en la volatilidad a lo largo del tiempo, lo que es crucial para realizar pronósticos en mercados financieros.

4. **Tiene colas pesadas:** El modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) tiene la ventaja de capturar colas pesadas (heavy tails) en la distribución de los rendimientos o errores, lo que es una característica común en los datos financieros. Esta capacidad se debe a su estructura de volatilidad condicional y su forma de modelar los errores de las series temporales.

Desventajas

1. **Limitación en la cantidad de rezagos:** Un modelo ARCH básico puede ser poco eficiente si la volatilidad depende de muchos rezagos.

2. **Dificultad en la selección de la longitud del rezago:** La selección de la longitud adecuada de rezagos (q) puede ser compleja y requiere una evaluación cuidadosa, ya que un número elevado de rezagos puede resultar en un modelo sobreajustado, mientras que un número demasiado bajo puede no capturar completamente las dinámicas de la volatilidad.

3. **Suposición de independencia:** El modelo ARCH asume que los errores son i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas), lo que puede no ser realista en muchas aplicaciones financieras, donde las dependencias no son solo lineales.

4. **Falta de interpretabilidad en las series:** El modelo no provee una manera de entender el comportamiento de la serie. Sólo provee una manera mecánica de escribir la varianza condicional.

5. **Efectos simétricos en los shocks:** El modelo trata los rendimientos positivos y negativos de igual manera. En la práctica, se sabe que para las series de tiempo financieras los precios reaccionan de manera diferente a rendimientos positivos que a negativos.

4.6. Ejemplo computacional

En este ejemplo se buscará modelar la volatilidad de los retornos de inversión en la criptomoneda Bitcoin (ver figura 1), este es un tema de gran interés en el área de las finanzas de las inversiones puesto que los retornos nos permiten evaluar el rendimiento de una inversión, analizar riesgos y compensaciones y desarrollar estrategias de inversión. El tipo de retorno utilizado en este trabajo y el más sencillo es la ganancia o pérdida neta obtenida, expresada como una proporción del valor inicial de la inversión. Se calcula con la fórmula:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

donde R_t: retorno en el periodo t, P_t: precio final de la inversión en el periodo t, P_{t-1}: precio inicial de la inversión en el periodo $t-1$. Si el retorno indica un valor positivo, significa que hay ganancias, si el retorno es negativo indica una perdida, cuanto mayor sea el retorno (positivo o negativo), mayor será el impacto sobre la inversión.

Figura 1: Serie de tiempo acerca de los precios del Bitcoin hasta la fecha actual (12/2024).

De la serie de tiempo de los precios del bitcoin podemos obtener fácilmente los retornos con la fórmula de retornos de ganancia o pérdida neta, realizando esta fórmula para cada t obtenemos la siguiente serie de tiempo.

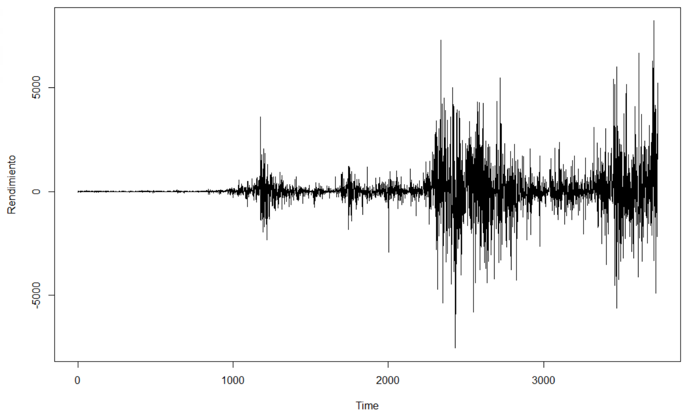

Figura 2: Serie de tiempo acerca de los retornos de inversión (12/2024).

Cómo es de interés, se busca modelar los retornos de inversión para cualquier tipo de moneda, sin embargo para nuestro ejemplo al observar 2 podemos darnos indicios que la volatilidad de los retornos no es constante, sino más bien cambia por periodos de tiempo, visualmente podemos darnos cuenta que al tratar de modelar esta serie de tiempo, no convendría utilizar los modelos clásicos de series de tiempo que modelan la heterocedasticidad. Por lo que al menos podemos pensar que se podría modelar con un modelo $ARCH$, sin embargo antes de realizar un modelado de este estilo, primero debemos asegurarnos que en realidad la serie de tiempo tiene heterocedasticidad. Para verificar que una serie de tiempo sigue un proceso ARCH, relizaremos una prueba de hipótesis. Los pasos para realizar la prueba de hipótesis son las siguientes:

1. **Ajustar un modelo inicial:** Ajusta un modelo de regresión Y_t o un modelo ARMA sobre los datos y obtén los residuos e_t.

2. **Elevar los residuos al cuadrado:** Calcula e_t^2, que son los residuos al cuadrado.

3. **Regresión auxiliar:** Realiza una regresión de e_t^2 sobre sus propios retardos hasta un orden q:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q e_{t-q}^2 + \nu_t$$

4. **Estadístico de prueba:** Calcula el estadístico de prueba basado en la R^2 de la regresión auxiliar:

$$LM = n \cdot R^2$$

   Donde:

   - n es el número de observaciones.
   - R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar.

5. **Distribución del estadístico:** Bajo la hipótesis nula (H_0), el estadístico LM sigue una distribución chi-cuadrada con q grados de libertad.

6. **Regla de decisión:**

   - Si $LM > \chi^2_{q,\alpha}$ (valor crítico), se rechaza H_0, indicando evidencia de un efecto ARCH.
   - Si $LM \leq \chi^2_{q,\alpha}$, no se rechaza H_0, lo que sugiere que no hay efecto ARCH.

Esta prueba ya viene implementada, por lo que únicamente se calcula considerando un único rezago, por tanto se obtiene el siguiente resultado:

```
    ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  logret
Chi-squared = 62.419, df = 1, p-value = 2.776e-15
```

Si el p-valor es menor que el nivel de significancia (e.g., 0.05), se rechaza la hipótesis nula. Esto sugiere que hay evidencia de un efecto ARCH en los datos, por tanto con un valor de $p = 2.776e-15$ obtenido se muestra estadísticamente que hay un efecto ARCH en la serie. Por ende, podemos proceder a modelar la volatilidad de la serie de tiempo con un modelo ARCH(1). Pero antes de modelar la varianza heterocedastica, primero debemos asegurarnos de ver qué modelo base tomaremos para el valor de la media, para esto se probó distintas combinaciones de parámetros (p, q) de un modelo ARMA ajustado a la serie de tiempo de retorno con $p_{max} = 4$ y $q_{max} = 4$, con estas pruebas se obtiene que el mejor modelo es un $ARMA(2,0)$, por tanto el modelo resultate sería:

$$\begin{aligned} X &= \mu + \epsilon_t \\ \epsilon_t &= \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

sustituyendo los coeficientes obtenemos:

$$\begin{aligned} X_t &= 0.0016 - 0.0527 X_{t-1} - 0.0001 x_{t-2} \\ \sigma_t^2 &= 0.0020 - 0.0001 \epsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Los valores ajustados de acuerdo al modelo se pueden observar en la siguiente gráfica:

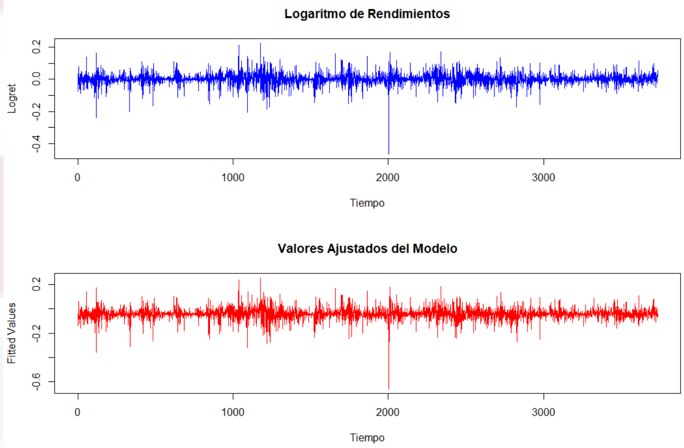

Figura 3: Logaritmo de los retornos y el ajuste mediante el modelo.

Podemos ver visualmente que el modelo logra capturar de buena manera la dinámica de los retornos, por lo que podemos pensar que el modelo hacer un buen trabajo.

5. Modelo GARCH.

Gran parte de esta sección y la siguiente sección fueron basados en el libro *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications* [13].

Los modelos GARCH son una generalización de los modelos ARCH, estos modelos fueron introducidos por Tim Bollerslev en 1986. Este modelo contempla la *varianza condicional*, es decir, la varianza condicionada al pasado. Dicha varianza condicional se expresa como una función lineal de los valores pasados al cuadrado de la serie. Actualmente los modelos GARCH son muy usados; debido a que se requieren menos variables en el modelo para lograr capturar el comportamiento de cierta serie de tiempo financiera.

A continuación se presentan definiciones y representaciones de los modelos GARCH.

Definición 1 (modelo GARCH(p,q))[14].
Un proceso ϵ_t sigue un modelo **GARCH**(p,q) si y sólo si:

1) $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$, tal que $\eta_t \sim NID(0,1)$.

2) $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, dado que

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2.$$

Donde $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam}\{\epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots\}$ y $\sum_{i=1}^{p} \beta_i + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j < 1 \quad \text{con} \quad \beta_i, \alpha_j > 0 \quad \forall i,j.$

Cabe destacar que es posible escribir la condición de heteroscedasticidad en términos del **Operador de Lag** L. En consecuencia se tiene lo siguiente [14]:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 = \alpha_0 + B(L)\sigma_t^2 + A(L)\epsilon_t^2.$$

Es claro que $B(L)$ y $A(L)$ son de la siguiente forma:

$$B(L) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i L^i \quad \text{y} \quad A(L) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j L^j.$$

De donde podemos encontrar una representación alternativa al modelo GARCH(p,q) si el operador $1 - B(L)$ tiene un polinomio característico con todas sus raíces fuera del círculo unitario, con lo cual se verifica en consecuencia el siguiente modelo **ARCH**(∞) [13]:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + B(L)\sigma_t^2 + A(L)\epsilon_t^2 \implies \sigma_t^2 = (1 - B(L))^{-1}\big(\alpha_0 + A(L)\epsilon_t^2\big).$$

5.1. Propiedades del modelo GARCH(p,q)

A continuación se presentan propiedades del modelo **GARCH(p,q)** [14, 13].

1. La serie de tiempo ϵ_t cumple que $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ y $\text{Var}(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-B(1)-A(1)}$. Es decir, la serie temporal ϵ_t es estacionaria.

2. La serie de tiempo ϵ_t cumple que $\mathbb{E}(\epsilon_t|\mathcal{P}_{t-1}) = 0$, $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$ y $\mathbb{E}(\epsilon_t^2|\mathcal{P}_{t-1}) = \sigma_t^2$. Es decir, la serie temporal ϵ_t es no correlacionada.

3. La serie de tiempo ϵ_t^2 satisface un modelo $ARMA(r,p)$ con $r = \text{máx}\{p,q\}$.

5.2. Estacionariedad del modelo GARCH(p,q)

Ya hemos hablado de las propiedades de los modelos GARCH(p,q), así que ahora queremos hacer énfasis en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Estacionariedad estricta del modelo GARCH(p,q))
Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución estrictamente estacionaria para el modelo GARCH(p,q) es que $\gamma < 0$, donde γ es el mayor exponente de Lyapunov de la secuencia $\{A_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$. Cuando existe la solución estrictamente estacionaria, esta es única, no anticipativa y ergódica.

Este teorema es fundamental debido a que asegura la existencia de una solución **estrictamente estacionaria**, es decir, una solución en la que las propiedades estadísticas de la serie, como la distribución conjunta de las observaciones, permanecen invariantes a lo largo del tiempo. La condición principal del teorema es que el mayor exponente de Lyapunov (γ) asociado al sistema debe ser menor que cero ($\gamma < 0$). En términos prácticos, esto implica que los efectos de los choques pasados en la varianza condicional σ_t^2 tienden a desaparecer con el tiempo, permitiendo que la volatilidad condicional del modelo sea estable y no explote.

Sin embargo, hay otro teorema (estacionariedad de segundo orden), que de manera breve comenta que si existe un proceso **GARCH**(p,q) con $\alpha_0 > 0$ y $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$. Entonces es estacionaria y ademas es la única solución. Dado que las condiciones del **teorema 1** son necesarias y suficientes, necesariamente tenemos que $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1 \implies \gamma < 0$, ya que la solución estacionaria de segundo orden de la definición del modelo GARCH(p,q) también es estrictamente estacionaria. [13, 15]. En la práctica, esta condición de estacionariedad estricta es crucial para aplicar un modelo GARCH(p,q) a series de tiempo económicas o financieras, como retornos de activos o precios de acciones, donde la volatilidad varía con el tiempo. La estacionariedad garantiza que el modelo sea estable, interpretable y útil para predicciones.

Por otra parte, se debe mencionar que para realizar la estimación de los coeficientes del modelo GARCH(p,q); en la literatura se sugiere usar el método *Quasi maximum likelihood*. Sin embargo, también es posible realizar la estimación de los coeficientes por mínimos cuadrados para los modelos ARCH. Además es importante mencionar que el hecho de poder ver un modelo GARCH como un modelo ARMA es benéfico en el sentido de que podemos emplear pruebas de hipótesis, estimación de parámetros, etc.

Si hablamos de las ventajas de estos modelos, podemos mencionar que estos modelos son simples (conservando el principio de parsimonia), a su vez esto es bueno modelar la volatilidad. Sin embargo, también cuenta con ciertas desventajas; la mas destacable es que el modelo es restrictivo en los parámetros para poder satisfacer que ϵ_t sea estacionaria. El modelo no provee una manera de entender el comportamiento de la serie, sólo provee una manera mecánica de escribir la varianza condicional [14].

Finalmente, podemos mencionar que otra desventaja del modelo ARCH es que la estimación de sus parámetros nos puede dar valores negativos, el modelo trata los rendimientos positivos y negativos de igual manera. En la práctica, se sabe que para las series de tiempo financieras los precios reaccionan de manera diferente a rendimientos positivos que a negativos.

5.3. Ventajas y desventajas del modelo GARCH(p,q)

Ventajas

1. **Captura de la heterocedasticidad condicional:** Modela la variabilidad de la volatilidad a lo largo del tiempo, lo cual es crucial para series financieras donde los choques tienden a agruparse (fenómeno de volatilidad agrupada).

2. **Extensión de ARCH:** Evita los problemas de sobreparametrización que aparecen en modelos ARCH puros con altos valores de q, ya que combina términos autorregresivos (p) y promedios móviles (q).

3. **Uso generalizado:** Es una herramienta estándar en econometría financiera y se utiliza ampliamente para modelar retornos de activos, tasas de cambio, tasas de interés, etc.

4. **Capacidad de predicción:** Proporciona una buena base para predecir la volatilidad futura, esencial en la gestión de riesgos y la valoración de derivados.

Desventajas

1. **Suposición de normalidad:** Frecuentemente, se asume que los errores siguen una distribución normal, lo que no es realista para muchas series financieras, que exhiben colas gruesas.

2. **Incapacidad de capturar asimetrías:** El modelo estándar GARCH(p, q) no considera que los choques negativos y positivos pueden tener impactos diferentes en la volatilidad (*leverage effect*). Modelos como EGARCH o TGARCH abordan esta limitación.

3. **Estabilidad y estacionariedad:** Requiere cumplir ciertas condiciones (e.g., que la suma de los coeficientes sea menor a 1) para garantizar la estacionariedad de la varianza condicional. Si estas no se cumplen, el modelo puede volverse inestable.

5.4. Extensiones del modelo GARCH(p, q)

El modelo GARCH(p, q) ha dado lugar a múltiples variantes diseñadas para capturar distintas características de las series temporales financieras. A continuación se describen las variantes más conocidas:

1. EGARCH (Exponential GARCH)

Propuesto por Nelson (1991), permite modelar asimetrías en los datos financieros. Usa el logaritmo de la varianza condicional para garantizar positividad y captura los efectos de choques positivos y negativos de manera diferente.

$$\log(h_t) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log(h_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}} + \gamma_j \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$$

2. GJR-GARCH

Propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), introduce un término adicional para capturar el efecto asimétrico de choques negativos (leverage effect).

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2 \mathbb{I}(\varepsilon_{t-j} < 0) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}$$

Donde $\mathbb{I}(\varepsilon_{t-j} < 0)$ es una variable indicadora que vale 1 si el choque es negativo.

3. TARCH (Threshold GARCH)

Propuesto por Zakoian (1994), es una variante similar al GJR-GARCH pero usa la desviación estándar condicional (h_t) en lugar de la varianza.

4. QGARCH (Quadratic GARCH)

Permite capturar efectos no lineales en la varianza condicional. Introduce términos cuadráticos adicionales.

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \delta_j \varepsilon_{t-j}$$

5. APARCH (Asymmetric Power ARCH)

Propuesto por Ding, Granger y Engle (1993). Es altamente flexible porque permite ajustar tanto asimetrías como cambios en la elasticidad de la volatilidad.

$$h_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j(|\varepsilon_{t-j}| - \gamma_j \varepsilon_{t-j})^\delta + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}^\delta$$

Donde δ es un parámetro de elasticidad.

5.5. Ejemplo computacional

Retomaremos la serie de tiempo de los precios de Bitcoin, en donde obtuvimos los retornos, en la sección anteior se ajustó un modelo $ARCH(1)$, sin embargo surge una pregunta, ¿es este el mejor modelo ajustado? ¿Se puede mejorar el ajuste con un modelo generalizado GARCH? Para esto se tuvo que probar distintos parámetros de GARCH para verificar cuál se ajustaba mejor con $p_{max} = 4$ y $q_{max} = 4$, de acuerdo al valor de AIC se obtuvieron el siguiente resultado.

q	p	AIC	Optimo
1	1	-10.9240341934502	0
1	2	-10.9241692942197	0
1	3	-10.9234033522223	0
1	4	-10.9252756980344	0
2	1	-10.9232974781734	0
2	2	-10.9230271954351	0
2	3	-10.9259437570074	0
2	4	-10.9224107741806	0
3	1	-10.9228068462809	0
3	2	-10.9229745131747	0
3	3	-10.9245246022677	0
3	4	-10.9219471379702	0
4	1	-10.9258220290179	0
4	2	-10.9268587955203	0
4	3	-10.9269723602767	1
4	4	-10.9263708678566	0

Cuadro 1: Tabla de AIC para diferentes combinaciones de p y q.

Aunque quizás baste con un modelo $ARCH(1)$, dado que los valores de AIC no difieren mucho de un modelo a otro, ajusteremos el modelo $GARCH(4, 3)$ para ejemplificar el uso de este, cabe aclara que el ajuste de la media se realizó de igual forma con un $ARMA(2, 0)$. Por tanto, el modelo obtenido es el siguiente:

$$\begin{aligned}
X &= \mu + \epsilon_t \\
\epsilon_t &= \sigma_t \eta_t \\
\sigma_t^2 &= \omega_0 + \sum_{i=11}^{4} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{3} \beta_j \sigma_{t-j}^2
\end{aligned}$$

sustituyendo los coeficientes obtenemos:

$$
\begin{aligned}
X_t &= 0.00133 - 0.0051X_{t-1} - 0.000721x_{t-2} \\
\sigma_t^2 &= 0.000034 + 0.169\epsilon_{t-1}^2 + 0.0535\epsilon_{t-2}^2 + 0.00000017\epsilon_{t-3}^2 + 0.0084\epsilon_{t-4}^2 \\
&\quad + 0.000006444\sigma_{t-1}^2 + 0.296\sigma_{t-2}^2 + 0.4719\sigma_{t-3}^2
\end{aligned}
$$

Los valores ajustados de acuerdo al modelo se pueden observar en la siguiente gráfica:

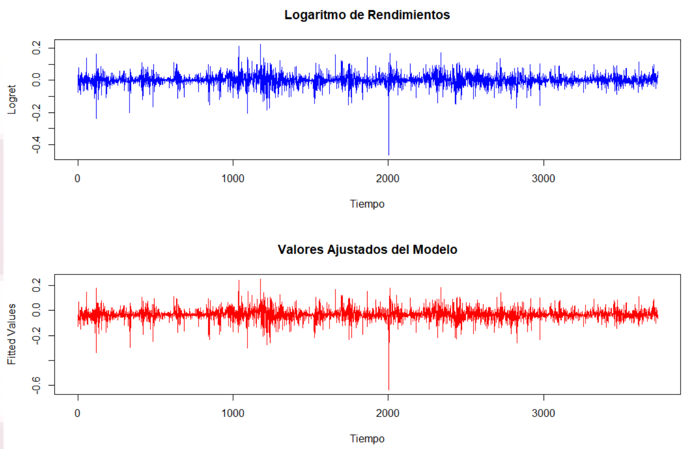

Figura 4: Logaritmo de los retornos y el ajuste mediante el modelo GARCH(4,3).

Al observar los retornos que se obtuvieron al aplicar el modelo, pudimos ver que se ajusta muy bien a la serie original, lo cual resulta un buen modelo.

6. Procesos GARCH multivariado.

Los modelos GARCH multivariados (MGARCH) representan una extensión de los modelos GARCH univariados, diseñados para capturar las dinámicas de dependencia y la evolución de la volatilidad conjunta entre múltiples series de tiempo. Sin embargo, la especificación del modelo GARCH no sugiere una extensión natural al marco multivariado. De hecho, la esperanza condicional de un vector de tamaño m es un vector de tamaño m, pero la varianza condicional es una matriz de $m \times m$. Una extensión general de los procesos GARCH univariados implicaría especificar cada una de las $m(m+1)/2$ entradas de esta matriz como una función de sus valores pasados y los valores pasados de las otras entradas. Dado el excesivo número de parámetros que esto implicaría, no es factible desde un punto de vista estadístico. Un enfoque alternativo es introducir ciertas restricciones de especificación que, al tiempo que preservan una cierta generalidad, hacen que estos modelos sean operativos.

Estos modelos son fundamentales en finanzas y econometría, donde es común analizar portafolios de activos, mercados interconectados o variables macroeconómicas que presentan relaciones dinámicas. Por ejemplo, la valoración de activos y la gestión de riesgos dependen crucialmente de la estructura de covarianza condicional de los activos de una cartera.

A continuación se presentan los diferentes modelos GARCH multivariados.

6.1. Modelos GARCH multivariados (elementos para construir los modelos multivariados).

La noción de un proceso GARCH multivariado se basa en una ecuación de la forma:

$$\epsilon_t = H_t^{1/2}\eta_t,$$

donde (η_t) es una sucesión de variables en $\mathbb{R}^m$, independientes e idénticamente distribuidas (iid), con media cero y matriz de covarianzas identidad. El término $H_t^{1/2}$ debe interpretarse en el sentido de la factorización de Cholesky, es decir, $H_t^{1/2}(H_t^{1/2})' = H_t$. La matriz $H_t^{1/2}$ puede elegirse simétrica y definida positiva, pero también puede elegirse triangular con elementos diagonales positivos (esta puede ser más conveniente por su simplicidad). A manera de ejemplo, si $H_t^{1/2}$ se elige triangular inferior, el primer componente de ϵ_t depende solo del primer componente de η_t. Para $m = 2$, podemos establecer:

$$\epsilon_{1t} = h_{11t}^{1/2}\eta_{1t},$$
$$\epsilon_{2t} = \frac{h_{12t}}{h_{11t}}\eta_{1t} + \left(h_{22t} - \frac{h_{12t}^2}{h_{11t}}\right)^{1/2}\eta_{2t},$$

donde η_{it} y h_{ijt} denotan los elementos genéricos de η_t y H_t.
Elegir una especificación para H_t es obviamente más delicado que en el marco univariado porque:

- H_t debe ser (casi siempre) simétrica y definida positiva para todo t;
- la especificación debe ser lo suficientemente simple para que sea factible desde el punto de vista probabilístico (existencia de soluciones, estacionariedad, etc.) sin dejar de ser suficientemente general;
- la especificación debe ser parsimoniosa para permitir una estimación viable. Sin embargo, el modelo no debe ser demasiado simple para capturar las estructuras de covarianza posiblemente sofisticadas.

Además, puede ser útil tener en cuenta la llamada propiedad de estabilidad por agregación. Si ϵ_t es un proceso GARCH, el proceso $\tilde{\epsilon}_t$ definido por $\tilde{\epsilon}_t = P\epsilon_t$, donde P es una matriz cuadrada invertible, tal que:

$$\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_t|\epsilon_u, u < t] = 0, \quad \text{Var}(\tilde{\epsilon}_t|\epsilon_u, u < t) = \tilde{H}_t = PH_tP'.$$

6.2. Extensión de modelos multivariados GARCH

6.2.1. Modelo diagonal.

El *Modelo Diagonal* es una especificación para MGARCH en la cual cada elemento $h_{k\ell,t}$ de la matriz de covarianza H_t depende únicamente del producto de los retornos previos k y ℓ. Se define como:

$$h_{k\ell,t} = \omega_{k\ell} + \sum_{i=1}^{q} a_{k\ell}^{(i)}\epsilon_{k,t-i}\epsilon_{\ell,t-i} + \sum_{j=1}^{p} b_{k\ell}^{(j)}h_{k\ell,t-j}.$$

Con parámetros específicos, el modelo puede coincidir con la formulación univariada para $m = 1$, pero para $m > 1$, puede tener un número elevado de parámetros y no siempre garantiza matrices definidas positivas.

El modelo también puede expresarse como:

$$H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q} \text{diag}(\epsilon_{t-i})A^{(i)}\text{diag}(\epsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} \circ H_{t-j},$$

donde $\circ$ representa el producto de Hadamard. En el caso ARCH ($p = 0$), las condiciones de positividad incluyen que Ω sea definida positiva y $A^{(i)}$ sean semidefinidas positivas.

Si hablamos de las desventajas de este modelo; se puede comentar que el modelo no es estable por agregación y que no hay interacción entre los diferentes componentes de la covarianza condicional, lo cual parece poco realista para aplicaciones en series financieras.

A continuación se presenta el modelo VEC-GARCH.

6.2.2. Modelo vectorial GARCH.

El modelo **VEC-GARCH** es una generalización directa de los modelos GARCH univariados, en la que cada covarianza condicional es una función de las varianzas condicionales rezagadas y de los productos cruzados de todos los componentes. Este enfoque extiende el modelo GARCH(p, q) al caso multivariado, pero genera una formulación general que no es parsimoniosa debido al gran número de parámetros involucrados.

Definición 2 (Proceso VEC-GARCH(p,q))[13].
Sea η_t una sucesión de variables con distribución η. El proceso ϵ_i se dice que admite una representación VEC-GARCH(p,q) (relativo a la sucesión (η_t)) si satisface lo siguiente:

$$\epsilon_t = H_t^{1/2}\eta_t, \quad \text{donde } H_t \text{ es definida positiva, y}$$

$$\text{vech}(H_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)}\text{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)}\text{vech}(H_{t-j}),$$

donde ω es un vector de tamaño $m(m+1)/2 \times 1$, y $A^{(i)}$ y $B^{(j)}$ son matrices de dimensión $m(m+1)/2 \times m(m+1)/2$. La notación $\text{vech}(\cdot)$ se refiere al operador que apila las columnas del triángulo inferior de una matriz simétrica en un vector.

Una observación importante es que el modelo diagonal es un caso especial del modelo VEC-GARCH. En el modelo diagonal, las matrices $A^{(i)}$ y $B^{(j)}$ están restringidas a ser diagonales, reduciendo significativamente el número de parámetros. A pesar de esta restricción, el modelo VEC-GARCH completo admite representaciones en términos de agregación. Es decir, si (ϵ_t) es un proceso VEC-GARCH(p, q), entonces para cualquier matriz invertible P, el proceso transformado $\tilde{\epsilon}_t = P\epsilon_t$ también sigue una estructura VEC-GARCH(p, q).

Para garantizar que H_t sea definida positiva, se requiere que Ω, $A^{(i)}$ y $B^{(j)}$ sean matrices semidefinidas positivas. La formulación general del modelo permite escribir:

$$h_{k\ell,t} = \omega_{k\ell} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k',\ell'} a_{k\ell,k'\ell'}^{(i)}\epsilon_{k',t-i}\epsilon_{\ell',t-i} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k',\ell'} b_{k\ell,k'\ell'}^{(j)} h_{k'\ell',t-j}.$$

Esta expresión muestra cómo cada componente de H_t depende de las covarianzas pasadas y los productos cruzados de los retornos.

Usando la descomposición espectral, H_t también puede expresarse como:

$$H_t = \sum_{r=1}^{m} \lambda_t^{(r)} v_t^{(r)} (v_t^{(r)})',$$

donde $\lambda_t^{(r)}$ son los valores propios positivos de H_t, y $v_t^{(r)}$ son los vectores propios correspondientes. Esto asegura que H_t sea positiva semidefinida si los valores propios lo son.

Finalmente, la representación en bloques de H_t permite escribir:

$$H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q} (I_m \otimes \epsilon_{t-i}) A^{(i)} (I_m \otimes \epsilon_{t-i})' + \sum_{j=1}^{p} (I_m \otimes H_{t-j}) B^{(j)} (I_m \otimes H_{t-j})',$$

lo que garantiza que H_t sea positiva semidefinida si Ω, $A^{(i)}$, y $B^{(j)}$ cumplen esta propiedad, asegurando la aplicabilidad del modelo en escenarios financieros y econométricos.

A continuación se presenta el modelo *CCC-GARCH*.

6.2.3. Modelo de Correlaciones Condicionales Constantes (CCC-GARCH)

El modelo de correlaciones condicionales constantes (CCC-GARCH) es una simplificación particular dentro de la clase de modelos MGARCH. Supongamos que, para un proceso MGARCH de la forma $H_t = D_t R D_t$, toda la información pasada sobre ϵ_t, involucrando todas las variables $\epsilon_{k,t-i}$, se resume en la variable $h_{kk,t}$, con $\mathbb{E}(h_{kk,t}^2) = \mathbb{E}(\epsilon_{k,t}^2)$. Entonces, al definir $\tilde{\eta}_t = D_t^{-1}\epsilon_t$, donde $D_t = \mathrm{diag}(h_{1,t}^{1/2}, \dots, h_{m,t}^{1/2})$, obtenemos una secuencia de variables iid con media cero y varianza unitaria. Las variables η_t están correlacionadas en general, de modo que $R = \mathrm{Var}(\eta_t)$, donde $R = (\rho_{k\ell})$ y $\rho_{k\ell} = \mathbb{E}(\eta_{k,t}\eta_{\ell,t})$. En este caso, la varianza condicional de ϵ_t puede representarse como $H_t = D_t R D_t$.

Esta estructura implica que las correlaciones condicionales entre los componentes de ϵ_t son invariantes en el tiempo, y se expresan como:

$$\frac{h_{k\ell,t}}{(h_{k,t}h_{\ell,t})^{1/2}} = \rho_{k\ell},$$

donde las correlaciones condicionales $\rho_{k\ell}$ permanecen constantes a lo largo del tiempo. Para completar la especificación, las dinámicas de las varianzas condicionales $h_{k,t}$ deben definirse. El modelo CCC más simple se basa en especificaciones univariadas GARCH, de la forma:

$$h_{k,t} = \omega_k + \sum_{i=1}^{q} a_{k,i}\epsilon_{k,t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_{k,j} h_{k,t-j}, \quad k = 1, \dots, m. \tag{10.17}$$

Aquí, los parámetros $\omega_k > 0$, $a_{k,i} \geq 0$, $b_{k,j} \geq 0$, y $-1 \leq \rho_{k\ell} \leq 1$, con R simétrica y semidefinida positiva. Las varianzas condicionales se especifican en términos de modelos GARCH univariados, mientras que las covarianzas condicionales dependen de productos cruzados y cuadrados de los retornos.

Definición 3 (Proceso CCC-GARCH(p,q))[13].
Sea η_t una sucesión de variables iid con distribución η. El proceso ϵ_i es llamado CCC-GARCH(p,q) si satisface lo siguiente:

$$\epsilon_t = H_t^{1/2}\eta_t,$$
$$H_t = D_t R D_t,$$
$$h_t = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^{q} A_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} B_j h_{t-j}.$$

En esta formulación, R es una matriz de correlación, $\underline{\omega}$ es un vector $m \times 1$ con coeficientes positivos, y A_i y B_j son matrices $m \times m$ con coeficientes no negativos.

El modelo CCC-GARCH tiene algunas características específicas. Por un lado, las covarianzas condicionales no son funciones lineales de los componentes $\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}'$, sino que dependen de los valores pasados de los componentes de H_t. Por lo tanto, el modelo en que se presenta en la **Definición 3** no es un modelo VEC-GARCH, excepto cuando R es la matriz identidad.

Una ventaja importante de esta especificación es que una condición simple asegura la semidefinida positividad de H_t. Esto se logra a través de los coeficientes positivos de las matrices A_i y B_j, así como la elección de una matriz R semidefinida positiva. Estudios como el de Conrad y Karanasos (2010) demuestran que estas restricciones menos estrictas permiten acotar positivamente las matrices H_t. Además, existe una representación de este modelo donde las matrices B_j son diagonales. Otra ventaja del modelo CCC es que el estudio de la estacionariedad es notablemente simple.

Sin embargo, este modelo presenta limitaciones. Primero, su inestabilidad por agregación (es decir, cuando R no es diagonal) dificulta algunas propiedades. Segundo, es limitada su capacidad para modelar correlaciones condicionales no constantes. Esto implica que el modelo es más adecuado para situaciones en las que la estructura de correlaciones condicionales es relativamente estática.

6.2.4. Modelos de Correlaciones Condicionales Dinámicas (DCC-GARCH)

Los modelos de correlaciones condicionales dinámicas (DCC-GARCH) extienden los modelos CCC-GARCH al introducir dinámicas en las correlaciones condicionales. En estos modelos, la matriz constante R se reemplaza por una matriz R_t, que es medible con respecto a las variables pasadas $\{\epsilon_u, u < t\}$. Esto permite que las correlaciones condicionales cambien en el tiempo.

Una formulación común de R_t es:

$$R_t = \theta_1 R + \theta_2 \Psi_{t-1} + \theta_3 R_{t-1},$$

donde θ_i son pesos positivos que suman 1, R es una matriz de correlación constante, y Ψ_{t-1} es la matriz de correlación empírica de $\epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-M}$. Esta ecuación es similar al modelo GARCH(1,1), con θ_1 desempeñando el papel de ω, θ_2 el de α, y θ_3 el de β.

Otra especificación de R_t se define mediante:

$$R_t = (\text{diag } Q_t)^{-1/2} Q_t (\text{diag } Q_t)^{-1/2},$$

donde diag Q_t es la matriz diagonal construida con los elementos diagonales de Q_t, y Q_t es una secuencia de matrices de covarianza que son medibles con respecto a $\sigma(\epsilon_u, u < t)$. En el modelo DCC original de Engle (2002), la dinámica de Q_t se define como:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) S + \alpha n^*_{t-1} (n^*_{t-1})' + \beta Q_{t-1},$$

donde $n^*_t = (\epsilon_{1t}/\sqrt{h_{1t}}, \dots, \epsilon_{mt}/\sqrt{h_{mt}})'$ es el vector de rendimientos estandarizados, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, y $\alpha + \beta < 1$. Aquí, S es una matriz semidefinida positiva.

Aielli (2013) propuso una corrección al modelo DCC (cDCC), reformulando la dinámica de Q_t como:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) S + \alpha (\text{diag } Q_{t-1})^{1/2} n^*_{t-1} (n^*_{t-1})' (\text{diag } Q_{t-1})^{1/2} + \beta Q_{t-1}.$$

En este modelo, bajo condiciones de estacionariedad, $S = \mathbb{E}(Q_t)$. Esta reformulación asegura que S sea una matriz de correlación, facilitando su interpretación.

6.2.5. Modelo BEKK-GARCH.

El modelo BEKK-GARCH es una parametrización específica de los modelos MGARCH desarrollada por Baba, Engle, Kraft y Kroner. La definición se da a continuación:

Definición 4 (Proceso BEKK-GARCH(p,q))[13].
Sea η_t una sucesión de variables iid con distribuciones comunes η. El proceso ϵ_i es llamado un proceso fuerte BEKK-GARCH(p,q) si satisface lo siguiente:

$$\epsilon_t = H_t^{1/2}\eta_t,$$

$$H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}' A_{ik}' + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{jk}H_{t-j}B_{jk}',$$

donde Ω es una matriz positiva definida, y A_{ik} y B_{jk} son matrices cuadradas de dimensión $m \times m$. Aquí, K es un entero que representa el número de términos. Esta especificación garantiza que, si las matrices H_{t-j} son semidefinidas positivas casi seguramente, entonces H_t también lo es.

Para comparar el modelo BEKK con la representación VEC-GARCH, se utiliza la forma vectorizada de H_t. Aplicando las relaciones:

$$\operatorname{vech}(H_t) = \operatorname{vech}(\Omega) + \sum_{i=1}^{q} D_m^{+}\sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})D_m \operatorname{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^{p} D_m^{+}\sum_{k=1}^{K}(B_{jk}\otimes B_{jk})D_m \operatorname{vech}(H_{t-j}),$$

donde D_m es la matriz duplicadora, se obtiene la representación equivalente en términos de VEC-GARCH. En esta forma, las matrices $A^{(i)}$ y $B^{(j)}$ en el modelo VEC-GARCH se definen como:

$$A^{(i)} = D_m^{+}\sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})D_m, \quad B^{(j)} = D_m^{+}\sum_{k=1}^{K}(B_{jk}\otimes B_{jk})D_m.$$

El modelo BEKK garantiza soluciones positivas definidas para H_t de forma automática debido a su construcción. Sin embargo, impone restricciones que pueden dificultar la interpretación de los coeficientes A_{ik} y B_{jk}. Estas restricciones afectan tanto las volatilidades individuales como las covolatilidades de los componentes. Aunque el modelo BEKK contiene el mismo número de parámetros que la representación VEC-GARCH correspondiente, tiene la ventaja de garantizar automáticamente que H_t sea positivo definido.

La estabilidad del modelo BEKK puede analizarse en términos de agregación. Según el Teorema 10.4 (*estabilidad del modelo BEKK por agregación*) del libro [13], si (ϵ_t) es un proceso BEKK-GARCH(p,q), entonces para cualquier matriz invertible P, el proceso $\tilde{\epsilon}_t = P\epsilon_t$ también es un proceso BEKK-GARCH(p,q).

Al igual que en el caso univariado, el çuadrado"del proceso (ϵ_t) resuelve un modelo ARMA. En términos vectoriales, la innovación del proceso $\operatorname{vec}(\epsilon_t\epsilon_t')$ está dada por:

$$\nu_t = \operatorname{vec}(\epsilon_t\epsilon_t') - \operatorname{vec}(H_t),$$

y la representación se convierte en:

$$\operatorname{vec}(\epsilon_t\epsilon_t') = \operatorname{vec}(\Omega) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})\operatorname{vec}(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}') + \nu_t,$$

donde $r = \text{máx}(p,q)$. Esto permite derivar los momentos de segundo orden del proceso (ϵ_t) cuando existen:

$$\mathbb{E}[\operatorname{vec}(\epsilon_t\epsilon_t')] = \left(I - \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})\right)^{-1}\operatorname{vec}(\Omega),$$

siempre que la matriz en paréntesis sea no singular.

A continuación se presenta el modelo *PC-GARCH.*

6.2.6. Modelos Factoriales GARCH y modelos GARCH de componentes principales.

El *modelo factorial GARCH* parte de la idea de que una combinación lineal no singular f_t de los componentes de ϵ_t, o una variable exógena que resume los co-movimientos de los componentes, tiene una estructura GARCH. En este contexto, los modelos de factor con ruido idiosincrático son populares. En ellos, los retornos individuales ϵ_{it} están vinculados al retorno del mercado f_t mediante el modelo de regresión:

$$\epsilon_{it} = \beta_i f_t + \eta_{it}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

donde β_i representa la sensibilidad al factor f_t, mientras que η_{it} captura el riesgo idiosincrático, que se supone no correlacionado con f_t. La matriz de covarianza condicional está dada por:

$$H_t = \Omega + \lambda_t \beta \beta',$$

donde λ_t es la varianza condicional de f_t, Ω es la matriz de covarianza del término idiosincrático, y β es el vector de sensibilidades.

Generalizando, si asumimos la existencia de r factores condicionalmente no correlacionados, obtenemos la descomposición:

$$H_t = \Omega + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{jt} \beta^{(j)} \beta^{(j)'},$$

donde cada λ_{jt} puede especificarse como un modelo GARCH univariado. Si Ω es definida positiva y las series univariadas λ_{jt} son independientes y estrictamente estacionarias de segundo orden, esta formulación define una sucesión de matrices H_t que son estrictamente estacionarias y definidas positivas.

Modelo por componentes principales GARCH.

El *modelo por componentes principales GARCH (PC-GARCH)* utiliza el análisis de componentes principales (PCA) para descomponer la matriz de covarianza V de m variables cuantitativas como $V = P\Lambda P'$, donde Λ es una matriz diagonal con los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de V, y P es la matriz ortonormal de los vectores propios correspondientes. La primera componente principal es una combinación lineal de las m variables, con pesos dados por la primera columna de P, que resume mejor el conjunto de variables.

El modelo PC-GARCH asume que la matriz de covarianza condicional sigue:

$$H_t = P\Lambda_t P',$$

donde Λ_t es una matriz diagonal cuyos elementos son las volatilidades $\lambda_{1t}, \ldots, \lambda_{mt}$, que pueden ser obtenidas a partir de modelos GARCH univariados. Dicha formulación equivale a asumir que:

$$\epsilon_t = P f_t,$$

donde $f_t = P'\epsilon_t$ es el vector de componentes principales, cuyos componentes son factores ortogonales. Si los factores f_{it} siguen un modelo GARCH(1, 1); entonces los modelos son usados por los factores $f_{it} = \sum_{j=1}^{m} P(j,i)\epsilon_{jt}$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\lambda_{it} = \omega_i + \alpha_i f_{i,t-1}^2 + \beta_i \lambda_{i,t-1}.$$

El modelo PC-GARCH puede interpretarse también como un modelo GARCH de factores completos (FF-GARCH) sin términos idiosincráticos. En este caso, se obtiene la expresión espectral para la varianza condicional:

$$H_t = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{jt} P(:,j) P'(:,j),$$

que corresponde a la forma de H_t en los modelos de factor con $\Omega = 0$.

Además, es posible mencionar detalles adicionales sobre PCA y el modelo PC-GARCH, el PCA de H_t permite considerar solo las primeras r componentes principales relevantes, aproximando H_t como $\hat{H}_t = \hat{P}\,\mathrm{diag}(\hat{\lambda}_{1t}, \ldots, \hat{\lambda}_{rt}, 0, \ldots, 0)\hat{P}'$, donde $\hat{P}$ se obtiene a partir del PCA de la matriz empírica de covarianza $\hat{H}$, y $\hat{\lambda}_{it}$ se estiman mediante modelos GARCH univariados.

Finalmente, la ventaja de este enfoque radica en su simplicidad y en que retiene solo las partes más relevantes de la volatilidad condicional, mientras que reduce el número de parámetros requeridos para estimar H_t.

6.2.7. Cholesky GARCH.

El modelo *Cholesky GARCH* se basa en la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza condicional H_t. Dado que H_t es positiva definida, los componentes de ε_t no son multicolineales. La descomposición se expresa como:

$$H_t = L_t G_t L_t',$$

donde L_t es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y G_t es una matriz diagonal con elementos positivos g_{it} en su diagonal. Estos elementos representan las varianzas condicionales de los componentes ε_t. El modelo considera la regresión condicional de los errores ε_t, expresando cada ε_{it} como una combinación lineal de los errores pasados y un término de ruido v_{it}:

$$\varepsilon_{it} = \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij,t}\varepsilon_{jt} + v_{it}, \quad i = 2, \ldots, m,$$

donde v_{it} es ortogonal a ε_t condicionalmente a la información pasada $\mathcal{F}_{t-1}$.

La matriz L_t tiene la forma triangular inferior con elementos $\ell_{ij,t}$, y B_t, definida como $B_t\varepsilon_t = v_t$, es simplemente la inversa de L_t. Los elementos de L_t y G_t se parametrizan para modelar dinámicas condicionales. Un ejemplo es:

$$g_{it} = \omega_i + \alpha_i v_{it-1}^2 + \beta_i g_{it-1}.$$

Para garantizar estacionariedad, se requiere que:

$$E\log(\alpha_i v_{it-1}^2 + \beta_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Además, las dinámicas de $\ell_{ij,t}$ pueden modelarse como:

$$\ell_{ij,t} = f_{ij}(v_{t-1}; \theta) + c_{ij}\ell_{ij,t-1},$$

donde f_{ij} es una función real y c_{ij} es un coeficiente que cumple $|c_{ij}| < 1$.

La descomposición de Cholesky permite un enfoque flexible y explícito para modelar las covarianzas condicionales de los errores ε_t, siendo adecuada para aplicaciones financieras que requieren predecir los betas condicionales.

Además, se exploran relaciones con modelos factoriales, donde los primeros k componentes de L_t se interpretan como factores ortogonales. Para un caso específico, se obtiene un modelo de precios de activos como el **CAPM**:

$$r_t = \beta v_{1t} + e_t,$$

donde v_{1t} es el exceso de retorno del mercado y β es la sensibilidad de los activos al mercado.

6.3. Estacionariedad de los modelos GARCH multivariados

Finalmente hablaremos de la **estacionariedad** de los modelos.

En la literatura se encuentra información acerca de la estacionariedad de los modelos multivariados GARCH. Por ejemplo, para el modelo VEC el desafío radica en establecer condiciones explícitas de estacionariedad. Esto se ilustra utilizando una extensión del modelo ARCH univariado, donde la solución estacionaria involucra términos como $\sigma_t^2 = \omega(1 + a\eta_{t-1}^2 + a^2\eta_{t-2}^2 + \dots)$. Sin embargo, en el caso bivariado, el modelo toma la forma $H_t = I_2 + \alpha\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}'$, con una representación explícita del término $H_t^{1/2}$ utilizando matrices triangulares inferiores.

En el Teorema 10.5 del libro [13] se establecen condiciones de estricta estacionariedad y ergodicidad para el modelo VEC. La condición principal involucra el radio espectral de las matrices en el modelo sean menor a uno ($\rho\left(\sum_{i=1}^{r} C^{(i)}\right) < 1$), donde $C^{(i)} = A^{(i)} + B^{(i)}$ $\rho(A)$. Esta condición asegura que la solución estacionaria es única, β-mezclada, estacionaria de segundo orden y ergodica.

Cabe señalar que en el modelo BEKK-GARCH, se aplican condiciones similares, pero estas se simplifican para incluir únicamente términos específicos del formato BEKK. Además la condición del radio espectral se cambia por la siguiente:

$$\rho\left(D_m^+ \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{r} A_{ik} \otimes A_{ik} + B_{ik} \otimes B_{ik}\right) < 1.$$

Ahora, para el modelo CCC-GARCH donde $\tilde{\eta}_t = R^{1/2}\eta_t$, la estricta estacionariedad se deriva imponiendo restricciones sobre el determinante de matrices como A_i, B_i, garantizando que $\rho(B) < 1$, con B definido como un polinomio matricial. Siendo más especificos, nos referimos al siguiente polinomio característico.

$$B(z) = I_m - zB_1 - \cdots - z^p B_p, \quad z \in \mathbb{C}.$$

que se obtiene a partir de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \\ I_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m \end{bmatrix}.$$

Si las raíces de $\det B(z)$ están fuera del disco unitario y $\rho(B) < 1$, donde $\rho(B)$ denota el radio espectral de la matriz B, entonces el modelo CCC-GARCH es estacionario.

6.4. Estimación de parámetros

Por ultimo, el método de *estimación de máxima cuasi verosimilitud* (QMLE) es particularmente útil en modelos MGARCH como BEKK, CCC y DCC, donde la complejidad de la estructura de la varianza condicional hace que la estimación explícita de máxima verosimilitud sea intratable. Sin embargo, los supuestos adicionales sobre las propiedades de $H_t(\theta)$ deben verificarse cuidadosamente en aplicaciones prácticas. Las propiedades de $H_t(\theta)$ que se deben cumplir para garantizar la consistencia y normalidad asintótica del estimador de cuasi-máxima verosimilitud (QMLE) son las siguientes:

1. $H_t(\theta)$ debe ser positivo definido y medir valores con respecto al pasado $\{\eta_{t-1}, u < t\}$. Esta condición asegura que $H_t(\theta)$ sea una función medible de las observaciones previas.

2. $H_t(\theta)$ debe estar correctamente estimado por la estadística $\hat{H}_t(\theta)$ basada en las observaciones previas. Esto implica que las propiedades ergódicas y estacionarias del modelo permitan aproximar $H_t(\theta)$ con la suficiente precisión.

3. El modelo requiere que los elementos de $H_t(\theta)$ sean continuos con respecto a θ, además de admitir derivadas parciales continuas de segundo orden en un entorno de θ_0, lo cual es crucial para garantizar una convergencia adecuada en los métodos de optimización.

4. Es necesario que las matrices de información, J y I, asociadas al modelo, sean definidas positivas e invertibles. Esto es clave para calcular la varianza asintótica del estimador y para garantizar que la matriz J sea no singular.

5. Las propiedades de estacionariedad y ergodicidad deben cumplirse, lo que implica que $H_t(\theta)$ y las distribuciones asociadas a η_t deben ser positivas y estar definidas sobre un entorno apropiado. Además, la solución del modelo debe ser estrictamente estacionaria y no anticipativa.

Estas propiedades son fundamentales para establecer la validez de las aplicaciones prácticas de los modelos MGARCH y para asegurar que el estimador QMLE conserve sus propiedades deseables bajo las condiciones especificadas. Sin embargo, el texto también subraya que, en aplicaciones prácticas, es crucial verificar cuidadosamente estos supuestos para evitar inconsistencias y problemas derivados de su incumplimiento.

6.5. Ventajas y desventajas del modelo GARCH Multivariado

Ventajas

1. **Captura de interdependencias dinámicas:** Los modelos multivariados permiten estudiar la evolución conjunta de la volatilidad y las correlaciones entre múltiples series de tiempo. Son ideales para portafolios financieros, donde las relaciones entre activos son fundamentales para medir riesgos.

2. **Modelado de correlaciones dinámicas:** Modelos como el *DCC-GARCH* (Dynamic Conditional Correlation) permiten que las correlaciones entre activos cambien con el tiempo, capturando comportamientos realistas en los mercados financieros.

3. **Eficiencia en estimaciones de covarianzas:** Proporcionan estimaciones precisas de las matrices de covarianza condicionales necesarias para cálculos de optimización de portafolios y gestión de riesgos.

4. **Flexibilidad en estructuras:** Existen múltiples extensiones (BEKK, VEC, DCC, CCC) que se adaptan a diferentes necesidades, como correlaciones constantes o dinámicas, restricciones en parámetros, y estructuras más parsimoniosas.

Desventajas

1. **Complejidad computacional:** La estimación de parámetros se vuelve más costosa a medida que aumenta el número de series. Modelos como el *VEC-GARCH* requieren estimar un número de parámetros cuadrático respecto al número de activos, lo que puede ser inviable en aplicaciones prácticas con muchos activos.

2. **Problemas de parsimonia:** Modelos como el *BEKK-GARCH* introducen estructuras para reducir parámetros, pero aún así pueden resultar complejos para grandes dimensiones.

3. **Suposiciones restrictivas:** Algunos modelos suponen correlaciones constantes (*CCC-GARCH*) o funciones específicas para las dinámicas, lo que puede limitar la capacidad de capturar fenómenos reales.

4. **Dificultad en la interpretación:** En modelos con muchas series, los parámetros pueden ser difíciles de interpretar, especialmente cuando las dependencias entre series no son claras.

6.6. Relevancia, impacto y alcances de los modelos GARCH Multivariados.

Los modelos GARCH multivariados representan una de las herramientas más avanzadas y versátiles dentro de la econometría financiera, diseñadas específicamente para capturar y modelar dinámicas complejas de volatilidad y correlación entre múltiples series de tiempo. Su relevancia radica en su capacidad para manejar los principales desafíos asociados a las series de tiempo económicas y financieras, como la heterocedasticidad condicional, las correlaciones dinámicas y la interacción de riesgos entre diferentes activos o variables económicas.

En términos de **relevancia**, los modelos GARCH multivariados trascienden las limitaciones de los modelos univariados al incorporar una estructura que permite analizar no solo la volatilidad individual de una serie de tiempo, sino también cómo esta se relaciona dinámicamente con otras series. Esto es esencial en el análisis de portafolios, donde las decisiones de inversión no dependen únicamente de la volatilidad de activos individuales, sino de cómo estas volatilidades co-varían en diferentes condiciones de mercado.

Por ejemplo, el modelo BEKK-GARCH introduce una parametrización que asegura la positividad definida de la matriz de covarianzas condicionales, Σ_t, mediante la especificación:

$$\Sigma_t = C'C + \sum_{i=1}^{q} A_i'\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}'A_i + \sum_{j=1}^{p} B_j'\Sigma_{t-j}B_j,$$

donde C es una matriz de parámetros que asegura la positividad, A_i y B_j capturan la respuesta de la covarianza condicional a los choques pasados y a la volatilidad pasada, respectivamente.

El impacto de los modelos GARCH multivariados se extiende a diversas áreas clave en la economía y las finanzas. Una de las aplicaciones más destacadas es la gestión de riesgos, donde estos modelos son esenciales para calcular métricas como el *Value at Risk (VaR)* y el *Expected Shortfall (ES)* en portafolios que contienen múltiples activos. Dado que el cálculo de estas métricas depende críticamente de las distribuciones conjuntas de los retornos, los modelos multivariados permiten capturar cómo las dinámicas de volatilidad y correlación condicionan el riesgo total del portafolio.

En el análisis financiero, estos modelos son utilizados para investigar cómo los choques en un mercado o activo se transmiten a otros. Durante periodos de estrés financiero, como crisis económicas, los modelos DCC permiten observar cómo las correlaciones entre activos se intensifican, proporcionando una medida cuantitativa del contagio financiero.

En la optimización de portafolios, modelos como el CCC-GARCH, que asume correlaciones constantes entre las series, o el DCC-GARCH, que permite que estas correlaciones evolucionen en el tiempo, facilitan la construcción de portafolios robustos frente a cambios en la estructura del mercado. En el modelo DCC, la matriz de correlaciones condicionales R_t se deriva de la matriz de covarianzas condicionales normalizadas Q_t, cuya evolución se especifica como:

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}' + bQ_{t-1},$$

donde $\bar{Q}$ es la matriz de covarianzas promedio, y a y b son parámetros que gobiernan la persistencia de los choques y la memoria del sistema.

En economía macro, los modelos GARCH multivariados permiten estudiar la relación dinámica entre variables como tasas de cambio, tasas de interés, precios de commodities y flujos de capital. Estas relaciones, a menudo no lineales y dependientes del tiempo, pueden modelarse con precisión gracias a estas especificaciones. Por ejemplo, en el análisis de tasas de cambio, los modelos multivariados permiten observar cómo las fluctuaciones en la volatilidad de una moneda afectan las correlaciones con otras, proporcionando información valiosa para políticas monetarias y estrategias de cobertura.

Los **alcances** de estos modelos también incluyen su integración en sistemas de simulación para evaluar escenarios hipotéticos, siendo particularmente útiles en contextos regulatorios. Además, estos modelos han sido adaptados para analizar activos alternativos como criptomonedas y bienes raíces, ampliando su aplicabilidad más allá de los mercados tradicionales.

A pesar de su utilidad, la implementación práctica enfrenta desafíos técnicos, especialmente en términos de estimación de parámetros y manejo de grandes dimensiones. Métodos como la estimación por Cuasi Máxima Verosimilitud (QMLE) son comunes, aunque en casos de alta dimensionalidad se utilizan enfoques como la estimación basada en targeting de varianza o aproximaciones simplificadas como los modelos de factores.

Los modelos GARCH multivariados son fundamentales en el análisis de series de tiempo económicas y financieras porque permiten capturar las interdependencias dinámicas entre múltiples variables en escenarios de alta volatilidad y riesgo. Estas propiedades los hacen ideales para comprender y modelar sistemas económicos complejos donde la volatilidad y las correlaciones varían a lo largo del tiempo. Su relevancia se extiende desde los mercados financieros hasta la economía macro y la gestión del riesgo, abordando tanto problemas empíricos como teóricos.

En el **anexo** se incluye una tabla que resume los modelos GARCH multivariados donde se muestran sus estructuras, ventajas, desventajas, entre otras características.

6.7. Ejemplo Computacional

Como ejemplo se muestra el ajuste de un modelo DCC - GARCH a series de tiempo de retornos de divisas del dolar estadounidense y canadiense respecto al peso mexicano, es decir unicamente consideramos dos series de tiempo para el modelo, claro que este número puede incrementar pero unicamente por cuestiones de sencilles e interpretabilidad se escogieron estos dos (ver figura 5, 6). Los retornos podemos observarlos en la siguiente gráfica

Figura 5: Precio del dolar frente al peso mexicano.

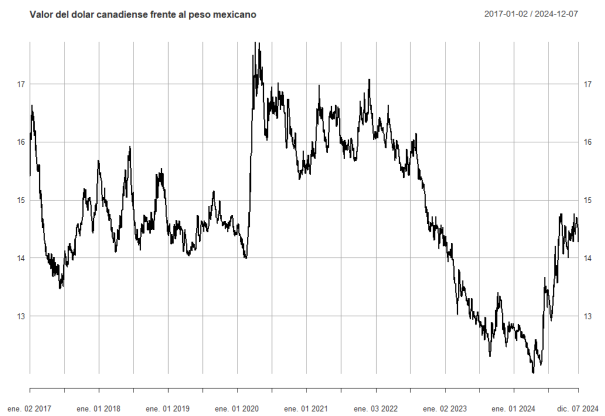

Figura 6: Precio del dolar canadiense frente al peso mexicano.

Los retornos se obtuvieron como en el caso del modelo ARCH es decir un retorno de ganancia o perdida neta, se pueden observar en la figura 7.

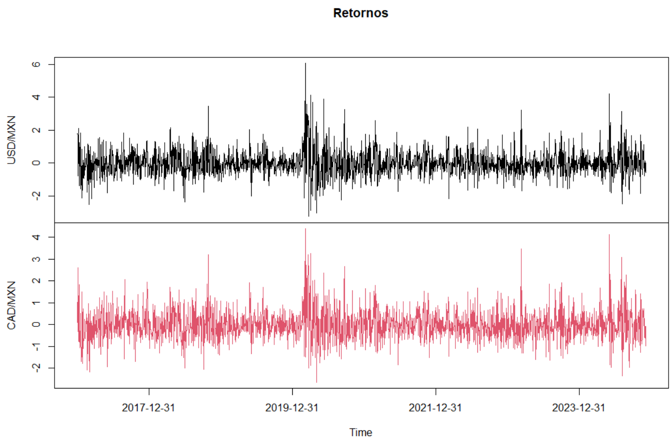

Figura 7: Retornos para el dolar estodounidense y canadiense frente al peso mexicano.

De antemano podemos observar en los retornos que son parecidos, por lo que podemos observar que existe cierta correlación entre estas series de tiempo, más tarde con el modelo analizaremos esta parte con más detalle. Cuando el valor de una de las dos monedas incrementa también lo hace la otra, de igual forma forma cuando el valor cae.

Antes de ajustar los retornos a un modelo DCC - GARCH se busco el mejor modelo para la media de cada una de las series de los retornos, se probaron varios modelos ARMA, pero de acuerdo al criterio AIC los mejores para cada serie fueron los siguientes: para los retornos del dolar estadounidense el mejor modelo para la media fue un $ARMA(1,1)$ para la media de del dolar canadiense el mejor modelo fue un $ARMA(3,0)$, en ambos casos se ajustó un modelo $GARCH(1,1)$. Una vez ajustados los modelos individualmente se ajustó un modelo DCC - GARCH(1,1). No se exploraron más parámetros, por simplicidad se escogieron estos parámetros. Los resultados se muestran a continuación:

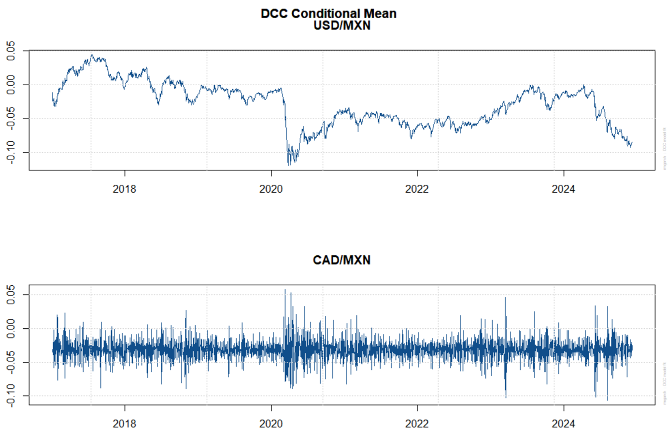

Figura 8: Media condicional de los retornos.

En la figura 8 podemos apreciar la media condicional de cada retorno. Estas series se parecen mucho a la gráfica de los retornos, por lo que los modelos hacen un buen trabajo capturando la dinámica de las series.

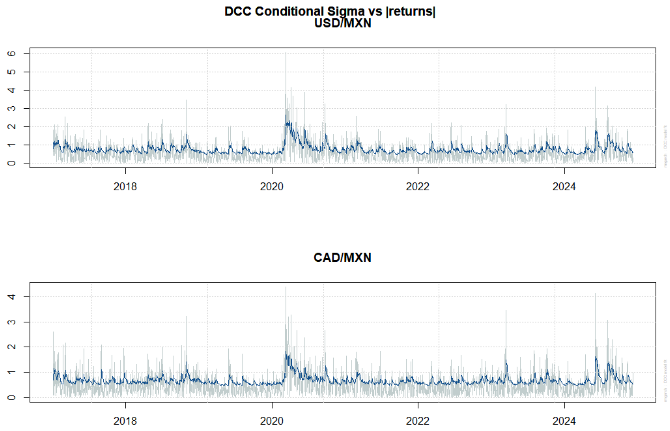

Figura 9: Volatilidad condicional frente a los retornos

En la figura 9 podemos apreciar cómo el modelo es capaz de capturar de manera eficiente la volatilidad para los retornos tatno para el dolar estadounidense como el canadiense, puesto que sigue en conjunto las series de tiempo de retorno cuadndo incrementan o disminuyen.

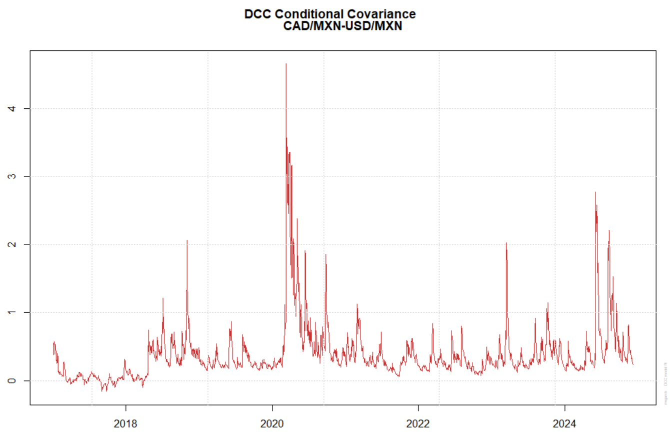

Figura 10: Covarianza condicional de ambos retornos.

En la figura **??** podemos apreciar la covarianza conjunta entre los retornos del dolar estadounidense y canadiense frente al peso mexicano. Podemos apreciar que la mayor parte de la linea temporal, existe una covarianza positiva, es decir que siempre que el dolar estadounidense incrementa o disminuye, también lo hace el otro, sin embargo esta covarianza no permanece constante y cambia con el tiempo. Podemos apreciar una alta covarianza para el 2020, justo cuando inició la pandemia.

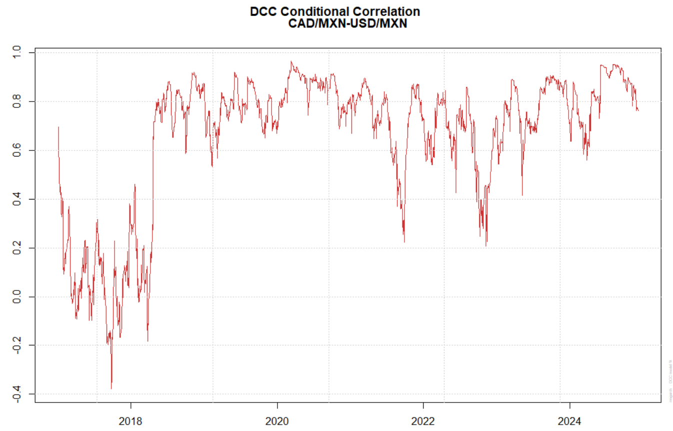

Figura 11: Correlación condicional de ambos retornos.

En la figura **??** podemos observar con más claridad la relación entre ambos retornos, la mayor parte de la linea temporal podemos notar que existe una correlación positiva y de hecho una correlación alta por encima del 0.5, por lo que podemos analizar que los retornos están muy relacionados, sin embargo podemos apreciar una correlación negativa para el año 2018 hacia el tiempo atrás. En este periodo los retornos de ambas divisas era inversa una con la otra.

7. Conclusiones

En este reporte se ha explorado la evolución, la teoría y las aplicaciones de los modelos ARCH(p), GARCH(p,q) y GARCH multivariado en el análisis de series temporales financieras, particularmente en la modelización de la volatilidad.

El modelo ARCH(p), introducido por Robert Engle en 1982, supuso una innovación importante al permitir que la varianza condicional de una serie temporal dependiera de sus propios rezagos, lo que le permitió capturar los efectos de heterocedasticidad en los datos financieros. No obstante, el modelo ARCH resultó ser poco práctico para series con una larga dependencia temporal, lo que llevó al desarrollo del modelo GARCH(p,q) por Tim Bollerslev en 1986. El modelo GARCH mejora la parsimonia al incorporar tanto los rezagos de la varianza condicional como los rezagos de los errores, proporcionando una herramienta más robusta y eficiente para modelar la volatilidad en las finanzas.

El desarrollo posterior de los modelos GARCH multivariados, como el DCC-GARCH, BEKK-GARCH y VEC-GARCH, ha sido fundamental para abordar la modelización de la volatilidad y la correlación entre múltiples activos financieros. Estos modelos permiten capturar las dinámicas no solo de la volatilidad, sino también de las interdependencias entre distintas series, lo que resulta crucial en la optimización de portafolios, la medición del riesgo y la gestión financiera.

Sin embargo, a pesar de su eficacia, estos modelos presentan desafíos significativos, como la alta complejidad computacional y las suposiciones restrictivas que pueden no siempre reflejar con precisión los comportamientos observados en los mercados. Además, la estimación de parámetros en modelos multivariados sigue siendo una tarea desafiante, especialmente cuando se trabaja con grandes dimensiones o grandes volúmenes de datos.

En resumen, los modelos ARCH y GARCH, tanto univariados como multivariados, son herramientas fundamentales para el análisis de volatilidad en las finanzas, pero requieren una cuidadosa selección y ajuste para adaptarse a las características específicas de los datos y los objetivos del análisis. A medida que la disponibilidad de datos y la capacidad computacional siguen creciendo, es probable que continúen surgiendo innovaciones en el campo, con modelos cada vez más sofisticados y ajustados a las necesidades de los analistas financieros.

8. Bibliografía

Referencias

[1] E. Robert, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation.," *Econometrica*, 1982.

[2] T. Bollerslev, "Arch models," *Handbook of Econometrics*, vol. 4, 1994.

[3] T. Bollerslev, "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model," *The review of economics and statistics*, pp. 498–505, 1990.

[4] T. Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of econometrics*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, 1986.

[5] R. F. Engle and K. F. Kroner, "Multivariate simultaneous generalized arch," *Econometric theory*, vol. 11, no. 1, pp. 122–150, 1995.

[6] D. B. Nelson, "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach," *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 347–370, 1991.

[7] L. R. Glosten, R. Jagannathan, and D. E. Runkle, "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks," *The journal of finance*, vol. 48, no. 5, pp. 1779–1801, 1993.

[8] J.-M. Zakoian, "Threshold heteroskedastic models," *Journal of Economic Dynamics and control*, vol. 18, no. 5, pp. 931–955, 1994.

[9] F. B. Hanson, *Applied stochastic processes and control for jump-diffusions: modeling, analysis and computation*. SIAM, 2007.

[10] R. Engle, "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models," *Journal of business & economic statistics*, vol. 20, no. 3, pp. 339–350, 2002.

[11] B. Mandelbrot, "Certain speculative prices (1963)," *The Journal of Business*, vol. 45, no. 4, pp. 542–543, 1972.

[12] W. A. Shewhart, S. S. Wilks, C. McCulloch, and S. Searle, *Wiley series in probability and statistics*. Wiley Online Library, 1986.

[13] C. Francq and J.-M. Zakoian, *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Ltd, second edition ed., 2019.

[14] F. J. R. Ramírez, *Manual de Modelos de Series de Tiempo*. CIMAT A.C., febrero 2016. Módulo: Finanzas.

[15] T. Teräsvirta, "An introduction to univariate garch models," in *Handbook of Financial Time Series* (T. G. Andersen, R. A. Davis, J.-P. Kreiss, and T. Mikosch, eds.), pp. 17–42, Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

9. Anexos.

Modelo	**Estructura**	**Garantía de H_t definida positiva**	**Correlaciones**	**Ventajas**	**Desventajas**
Diagonal GARCH	Cada elemento $h_{k\ell,t}$ depende solo de los términos diagonales anteriores.	No garantiza que H_t sea definida positiva.	No incluye correlaciones explícitas.	Simplicidad en la implementación y facilidad computacional.	No captura interacciones entre variables ni dinámicas complejas.
CCC-GARCH	$H_t = D_t R D_t$, donde R es una matriz de correlación constante.	Parcialmente (depende de R).	Constantes en el tiempo.	Simplicidad en la modelización y análisis de correlaciones constantes.	No captura dinámicas temporales ni cambios en las correlaciones.
DCC-GARCH	La matriz de correlaciones R_t evoluciona dinámicamente con Q_t.	Parcialmente (depende de parámetros y Q_t).	Variables en el tiempo (dinámicas).	Captura correlaciones dinámicas y variaciones temporales.	Complejidad computacional y dependencia de la positividad en los parámetros.
BEKK-GARCH	$H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{K} A_{ik}\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}' A_{ik}' + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{K} B_{jk} H_{t-j} B_{jk}'$.	Sí, garantizado por construcción.	Variables en el tiempo (implícitas).	Captura tanto la dinámica de choques pasados como la persistencia de covarianzas.	Más complejo y computacionalmente costoso.
VECH-GARCH	Modela directamente los elementos de H_t en forma vectorizada.	No siempre (pueden aparecer matrices inválidas).	Implícitas en los términos modelados.	Flexibilidad en la modelización de las dependencias entre variables.	Mayor riesgo de problemas numéricos y falta de positividad de H_t.
Factor GARCH (PC-GARCH)	Usa componentes principales para modelar $H_t = P\Lambda_t P'$.	No siempre (depende de Λ_t).	Dinámicas implícitas en los factores.	Reduce la dimensionalidad y facilita la interpretación de las correlaciones.	No siempre garantiza matrices válidas y puede perder información de interacciones.

Cuadro 2: Comparación de modelos GARCH multivariados: estructura, características y diferencias principales.