Modelos de estadística clásica: muestreos aleatorios y distribuciones probabilísticas

Armando Ocampo

Librerías de trabajo

Para esta clase necesitamos cargar las siguientes librerias:

```
library(dplyr)
library(ggplot2)
```

Dudas de la clase previa

Recodificar NA's

Los NA's son valores faltantes o no disponibles, los cuales suelen representar un problema durante la transformación y procesamiento de los datos. Por lo cual, previo a realizar cualquier análisis o función sobre el dataset es necesario conocer el comportamiento de nuestros datos. Para esto utilizaremos la función summary() de la paquetería base (Esta paquetería se encuentra instalada por defecto en el lenguaje de programación R, por lo cual no es necesario instalarla).

Generaremos un data frame con valores NA.

```
##
          id
                   horas estudio horas recre
                                                     edad
           :1.00
   Min.
                   Min.
                          :1.0
                                 Min.
                                        :1.0
                                               Min.
                                                       :15.0
   1st Qu.:1.75
                   1st Qu.:2.0
##
                                 1st Qu.:2.0
                                                1st Qu.:16.0
   Median:2.50
                   Median :2.0
                                 Median:3.0
                                               Median:20.0
  Mean
           :2.50
                          :2.8
                                         :2.8
                                                       :18.6
                   Mean
                                 Mean
                                               Mean
   3rd Qu.:3.25
                   3rd Qu.:4.0
                                 3rd Qu.:4.0
                                                3rd Qu.:20.0
           :4.00
                          :5.0
                                                       :22.0
##
   Max.
                   Max.
                                 Max.
                                         :4.0
                                                Max.
## NA's
```

Además de algunas medidas de estadísit
ca descriptiva, esta función detalla si existen NA's en nuestro dataset.
 Otra manera de conocer si existen o no NA's es mediante la función is.na(). Esta generará como resultado TRUE, en el sitio donde encuentre un resultado faltante.

```
is.na(dummy_data)
```

```
## [5,] TRUE FALSE FALSE
# podemos acompañarlo con la función sum(), para saber el total de NA's
sum(is.na(dummy_data))
```

[1] 1

```
# También, es posible utilizar la función which() para determinar el sitio
# en la columna donde se encuentra el NA. En este caso, conocemos que el NA
# se encuentra en la columna id, ahora identificaremos su posición
which(is.na(dummy_data$id))
```

[1] 5

```
# Es así, como determinamos qué el valor faltante se encuentra en el quinto
# lugar de la columna id
```

Otra manera es utilizar la función sapply() acompañado de la función sum() para determinar el total de NA's por columna

```
sapply(dummy_data, function(y) sum(length(which(is.na(y)))))
```

```
## id horas_estudio horas_recre edad ## 1 0 0 0
```

Estas son algunas maneras de identificar los valores faltantes. A continuación, se mostrarán algunos métodos para su eliminación.

El primer método es la recodificación, en el cual se le agrega un valor concreto al NA. Esto, al colocar la posición en la que se encuentra y renombrarla. En este caso, al ver la numeración, suponemos que el id faltante es el numero 5.

```
dummy_data$id[is.na(dummy_data$id)] = 5
dummy_data
```

```
##
     id horas_estudio horas_recre edad
## 1 1
                    2
                                    20
## 2 2
                    5
                                2
                                     15
## 3 3
                    4
                                    16
## 4 4
                    2
                                    22
                                3
## 5 5
                    1
                                     20
```

Vamos a generar de nuevo el valor NA. Sin embargo, en el siguiente ejemplo utilizaremos la función na.omit() para quitar el valor faltante. Esta función se caracteriza por eliminar la fila donde se encuentra el valor NA.

```
##
     id horas_estudio horas_recre edad
## 1 1
                    2
                                     20
## 2 2
                    5
                                 2
                                     15
## 3 3
                    4
                                 4
                                     16
                    2
                                 3
                                     22
## 4 4
```

Nota: na.omit() puede ser funcional si la recodificación no es posible. No obstante, hay que

tener cuidado en no eliminar la mayor parte de la información. Esto lo veremos a continuación

Si tenemos varios NA a lo largo del dataset, na.omit() puede ser contraproducente. El siguiente ejemplo lo detalla.

```
## id horas_estudio horas_recre edad
## 1 3 3 3
```

Al aplicar la función na.omit() perdemos la mayor parte de la información

```
na.omit(dummy_data_2)
```

```
##
       id horas_estudio horas_recre edad
                                          22
## 4
                       2
## 6
       6
                       3
                                     8
                                          17
                       4
                                     8
## 9
       9
                                          18
                       5
                                     4
                                          18
## 11 11
```

Para este caso, podemos hacer dos maneras de recodificación. Colocar un 0 en todos los NA's, o definir un valor específico por columna.

```
##
       id horas_estudio horas_recre edad
                                          20
## 1
       1
                        0
## 2
       2
                        5
                                      0
                                          15
## 3
       3
                        4
                                      8
                                           0
## 4
       4
                        2
                                      3
                                          22
## 5
       0
                        1
                                      0
                                           0
## 6
                        3
                                      8
                                          17
       6
                                      5
## 7
       7
                        0
                                          18
## 8
       8
                        2
                                      6
                                           0
## 9
       9
                        4
                                      8
                                          18
                                      0
                                          20
## 10 10
                        3
## 11 11
                        5
                                      4
                                          18
                        0
                                      7
## 12 12
                                          15
```

Para el segundo caso, colocaremos el valor de la media aritmética por columna para el proceso de recodificación.

```
mean(dummy_data_2$horas_estudio, na.rm = TRUE)
## [1] 3.222222
dummy_data_2$horas_estudio[is.na(dummy_data_2$horas_estudio)]=2.4
mean(dummy data 2$horas recre, na.rm = TRUE)
## [1] 6.444444
dummy_data_2$horas_recre[is.na(dummy_data_2$horas_recre)] = 4.8
mean(dummy_data_2$edad, na.rm = TRUE)
## [1] 18.11111
dummy_data_2$edad[is.na(dummy_data_2$edad)] = 13
dummy data 2
##
      id horas_estudio horas_recre edad
## 1
       1
                    2.4
                                9.0
## 2
       2
                    5.0
                                4.8
                                       15
## 3
       3
                    4.0
                                8.0
                                       13
## 4
       4
                    2.0
                                3.0
                                       22
## 5
      NA
                    1.0
                                4.8
                                       13
                                8.0
## 6
       6
                    3.0
                                       17
## 7
       7
                    2.4
                                5.0
                                       18
## 8
       8
                    2.0
                                6.0
                                       13
## 9
       9
                    4.0
                                8.0
                                       18
## 10 10
                    3.0
                                4.8
                                       20
## 11 11
                    5.0
                                4.0
                                       18
## 12 12
                    2.4
                                7.0
```

Nota: es posible combinar métodos de recodificación. Todo depende del objetivo de la limpieza del conjunto de datos

Identificando cuartiles

Los cuartiles dividen al conjunto de datos en 4 grupos, a partir de 3 puntos de corte. Primer cuartil (Q1, 25%), segundo cuartil (Q2, 50%), tercer cuartil (Q3, 75%). Derivado de esta información, podemos definir en que sitio se puede encontrar un dato nuevo. Los siguientes son solo ejemplo de cómo realizarlo, ya que pueden existir varias maneras de hacerlo.

Primero identificaremos los cuartiles de la longitud del sépalo del dataset iris

```
quantile(iris$Sepal.Length)
```

```
## 0% 25% 50% 75% 100%
## 4.3 5.1 5.8 6.4 7.9
```

La siguiente función genera un mensaje dependiendo del sitio en el cual se encuentra el nuevo valor

```
identificando_cuartiles <- function(x){
  if(x <= 5.1) print('debajo Q1')
  if(x > 5.1 & x <= 5.8) print('entre Q1 y Q2')
  if(x > 5.8 & x <= 6.4) print('entre Q2 y Q3')
  if(x > 6.4) print('superior a Q3')
```

```
}
identificando_cuartiles(6.5)
## [1] "superior a Q3"
La función case when() de la paquetería dplyr permite generar condiciones similares a las utilizadas en la
función if(). Cuando se utiliza en conjunto a la función mutate(), los resultados se guardan en una columna
nueva.
iris_df <- iris</pre>
quantile(iris_df$Sepal.Length)
     0% 25% 50% 75% 100%
    4.3 5.1 5.8 6.4 7.9
##
iris df cuartil <- iris df %>%
  mutate(cuartil = case_when(Sepal.Length <= 5.1 ~ '< Q1',</pre>
                                Sepal.Length > 5.1 & Sepal.Length <= 5.8 ~ 'Q1 & Q2',
                                Sepal.Length > 5.8 \& Sepal.Length <= 6.4 ~ 'Q1 \& Q3',
                                Sepal.Length > 6.4 \sim '> Q3')
head(iris_df_cuartil)
##
     Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species cuartil
## 1
               5.1
                            3.5
                                           1.4
                                                        0.2 setosa
                                                                         < Q1
## 2
               4.9
                            3.0
                                           1.4
                                                        0.2 setosa
## 3
               4.7
                            3.2
                                           1.3
                                                        0.2 setosa
                                                                         < Q1
## 4
                                                        0.2 setosa
                                                                         < Q1
               4.6
                            3.1
                                           1.5
## 5
               5.0
                            3.6
                                           1.4
                                                        0.2 setosa
                                                                         < Q1
## 6
               5.4
                            3.9
                                           1.7
                                                        0.4 setosa Q1 & Q2
De esta manera, se puede colocar una variable nueva, pegarla al dataset y conocer en que cuartil se encuentra.
iris_df <- iris</pre>
iris_nueva <- c(5.222,NA,NA,NA,NA)</pre>
new_iris <- rbind(iris_nueva, iris_df)</pre>
```

```
## Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species cuartil ## 1 5.222 NA NA NA NA \sim NA \sim Q1 \& Q2
```

Muestreo

Cuando el conjunto de datos es grande y representa un elevado costo económico y de tiempo máquina se recomienda utilizar muestras. Estas deben de ser aleatorias y representativas. Los estadísticos obtenidos pueden generalizar e inferir el comportamiento de la población. En R, existen dos funciones que dan parte a este proceso, sample() y $slice_sample()$. La función sample() forma parte de la paquetería base, y se utiliza para encontrar muestras de vectores. Por su parte, la función $slice_sample()$ pertenece a la paquetería dplyr y funciona para obtener muestras de data frames.

Nota: debido a que las muestras se realizan "al azar", es necesario definir un parámetro que permita replicar los resultados cuando se trabaja en grupos o para verificar la información. Para esto, se utiliza la función set.seed() antes de comenzar a trabajar

En el siguiente ejemplo, se generará un vector con numeros del 1 al 100000. Posteriormente, se tomará una muestra de 20000 numeros. Dentro de la función sample(), se coloca como primer argumento el vector del cual se va a extraer la información y el segundo argumento indica el tamaño de la muestra.

```
set.seed(123)
vectorcito <- seq(1, 100000, by = 1)

vectorcito_muestra <- sample(vectorcito, size = 20000)

length(vectorcito_muestra)</pre>
```

[1] 20000

Por su parte, *slice_sample()*, obtiene una muestra de un data frame. El siguiente ejemplo extraerá 100 elementos al azar del conjunto de datos iris.

```
set.seed(123)
iris_muestra <- slice_sample(iris, n = 100)
summary(iris_muestra)</pre>
```

```
##
     Sepal.Length
                      Sepal.Width
                                      Petal.Length
                                                        Petal.Width
##
           :4.300
                            :2.200
                                             :1.000
    Min.
                     Min.
                                      Min.
                                                       Min.
                                                              :0.100
    1st Qu.:5.100
                     1st Qu.:2.800
                                      1st Qu.:1.600
                                                       1st Qu.:0.300
##
   Median :5.800
                    Median :3.000
                                      Median :4.500
                                                       Median :1.400
    Mean
           :5.847
                            :3.045
                                             :3.796
                                                              :1.214
##
                     Mean
                                      Mean
                                                       Mean
##
   3rd Qu.:6.400
                     3rd Qu.:3.400
                                      3rd Qu.:5.100
                                                       3rd Qu.:1.800
           :7.900
                            :4.400
                                             :6.900
##
    Max.
                     Max.
                                      Max.
                                                       Max.
                                                              :2.500
##
          Species
##
    setosa
               :34
    versicolor:29
##
##
    virginica:37
##
```

summary(iris)

##

```
##
     Sepal.Length
                      Sepal.Width
                                       Petal.Length
                                                        Petal.Width
##
    Min.
           :4.300
                     Min.
                            :2.000
                                      Min.
                                              :1.000
                                                       Min.
                                                               :0.100
##
    1st Qu.:5.100
                     1st Qu.:2.800
                                      1st Qu.:1.600
                                                       1st Qu.:0.300
    Median :5.800
                     Median :3.000
                                      Median :4.350
                                                       Median :1.300
                                              :3.758
                                                              :1.199
##
    Mean
           :5.843
                     Mean
                            :3.057
                                      Mean
                                                       Mean
##
    3rd Qu.:6.400
                     3rd Qu.:3.300
                                      3rd Qu.:5.100
                                                       3rd Qu.:1.800
##
    Max.
           :7.900
                     Max.
                            :4.400
                                      Max.
                                              :6.900
                                                       Max.
                                                              :2.500
##
          Species
##
    setosa
               :50
##
    versicolor:50
##
    virginica:50
##
##
##
```

Muestreo con reemplazo

Una variante del muestreo aleatorio es el muestreo con reemplazo o bootstrapping. En este, cada elemento puede ser seleccionado más de una vez. Se suele utilizar cuando nuestra proporción de datos es pequeña, por lo cual se busca enriquecer la información. Sin embargo, tiende a presentar un sesgo, ya que solo depende de nuestros datos de inicio. Para el muestreo con reemplazo se utilizan las funciones sample() y $slice_sample()$, agregando el argumento replace = TRUE. En el primer ejemplo generaremos un vector con numeros del 1 al 100 y se realizará un muestreo con reemplazo de 300 números

```
set.seed(123)
vector_2 <- seq(1,100, by = 1)
vector_boot <- sample(vector_2, size = 300, replace = TRUE)
length(vector_boot)</pre>
```

```
## [1] 300
```

Para el ejemplo de muestreo con reemplazo utilizando slice_sample(), se tomará de nuevo el dataset iris, generando una muestra de 300 elementos.

```
set.seed(123)
iris_boot <- slice_sample(iris, n = 300, replace = TRUE)
summary(iris_boot)</pre>
```

```
Sepal.Length
##
                      Sepal.Width
                                       Petal.Length
                                                        Petal.Width
           :4.300
                                                              :0.100
##
   Min.
                     Min.
                            :2.000
                                      Min.
                                             :1.000
                                                       Min.
##
    1st Qu.:5.075
                     1st Qu.:2.800
                                      1st Qu.:1.600
                                                       1st Qu.:0.300
   Median :5.800
                     Median :3.000
                                      Median :4.400
                                                       Median :1.300
##
##
    Mean
           :5.836
                     Mean
                            :3.045
                                      Mean
                                             :3.786
                                                       Mean
                                                              :1.208
##
    3rd Qu.:6.500
                     3rd Qu.:3.300
                                      3rd Qu.:5.100
                                                       3rd Qu.:1.800
##
    Max.
           :7.700
                     Max.
                            :4.400
                                      Max.
                                             :6.900
                                                       Max.
                                                              :2.500
##
          Species
##
    setosa
              : 98
##
    versicolor:102
##
    virginica:100
##
##
##
```

Nota: en el muestreo sin reemplazo se genera una muestra a partir de la población. Por su parte, en el muestreo con reemplazo se desarrolla una población teórica derivado de la información de una muestra

Distribución probabilística

Define la probabilidad de que un vento ocurra. La suma de las posibilidades de un evento debe ser igual a 1. Se habla de distribución discreta cuando los eventos son números enteros (1,2,3,4). A su vez, la distribución contínua hace referencia a valore infinitos (1.1, 1.2, 1.3). Asimismo, en este proyecto hablaremos sobre dos tipos de distribuciones; uniforme y normal.

Distribución uniforme

En este tipo de probabilidad, todos los eventos tienen las mismas posibilidades de ocurrir, pongamos como ejemplo el lanzar un dado. Cada número tiene 1/6 (~ 0.16) de probabilidad de ocurrir. Para conocer la probabilidad de cada evento dentro de la distribución uniforme se utiliza la función punif() de la paquetería

stats. Esta paquetería se incluye dentro de los datos por defecto del lenguaje de programación, por lo que no se debe descargar nada.

En el siguiente ejemplo, se calculará cual es la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número menor a 5. Los argumentos son lo siguientes. El primero describe el valor del evento que queremos conocer, min se utiliza para definir el evento mínimo que puede ocurrir, en este caso, no lanzar el dado. Max, por su parte, es el valor máximo que puede presentarse, siendo 6.

```
punif(5, min = 0, max = 6)
```

[1] 0.8333333

Si queremos conocer la probabilidad de que un evento ocurra cercano a la unidad se agrega el argumento lower.tail = FALSE. En el siguiente ejemplo calcularemos la probabilidad de obtener un numero mayor a 5 al lanzar un dado.

```
punif(5, min = 0, max = 6, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1666667
```

Para rangos, se resta la probabilidad menor a la probabilidad mayor. En el siguiente ejemplo obtendremos la probabilidad de sacar un número entre 3 y 5 al lanzar un dado.

```
punif(5, min = 0, max = 6) - punif(3, min = 0, max = 6)
```

[1] 0.3333333

Distribución normal

Por su parte, la distribución normal, no sigue un patrón uniforme. Existen diferentes eventos con posibilidades distintas. Al igual que la distribución uniforme el total de todos los eventos es igual a 1. Esta distribución se caracteriza por tener una forma de campana, la cual es simétrica. A su vez, se basa en la media aritmética y en la desviación estándar. Para calcular la distribución normal de un evento probabilístico se utiliza la función pnorm() de la paquetería stats. En el siguiente ejemplo se calculará la probabilidad de encontrar a una persona que mida menos de 154 cm dada una población con una media aritmética de 161 cm y una desviación estándar de 7 cm.

```
pnorm(154, mean = 161, sd = 7)
```

```
## [1] 0.1586553
```

De la misma manera, para conocer el otro extremo de la probabilidad se utiliza el argumento lower.tail = FALSE. En el siguiente ejemplo conoceremos la probabilidad de encontrar a una persona con una altura mayor a 154 cm.

```
pnorm(154, mean = 161, sd = 7, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8413447
```

Para intervalos se resta la probabilidad menor a la probabilidad mayor. Por ejemplo, encontrar la probabilidad de que una persona tenga una altura entre $154~\mathrm{y}~157~\mathrm{cm}$.

```
pnorm(157, mean = 161, sd = 7) - pnorm(154, mean = 161, sd = 7)
```

```
## [1] 0.1251993
```

Asimismo, con la distribución normal es posible conocer el valor de cierta probabilidad. Por ejemplo, supongamos que nos piden conocer la estatura a la cual podría llegar el 90% de la población. Para esto, se utiliza la función qnorm(). Los argumentos son similares, solo que el primer argumento corresponderá a la probabilidad que se desea encontrar.

```
qnorm(0.9, mean = 161, sd = 7)
```

```
## [1] 169.9709
```

Si queremos conocer el valor contrario. Cual es la altura del 90% superior de la población se utiliza el argumento lower.tail = FALSE

```
qnorm(0.9, mean = 161, sd = 7, lower.tail =FALSE)
```

```
## [1] 152.0291
```

Nota: este proceso es similar a econtrar el restante a la unidad, o el 10%

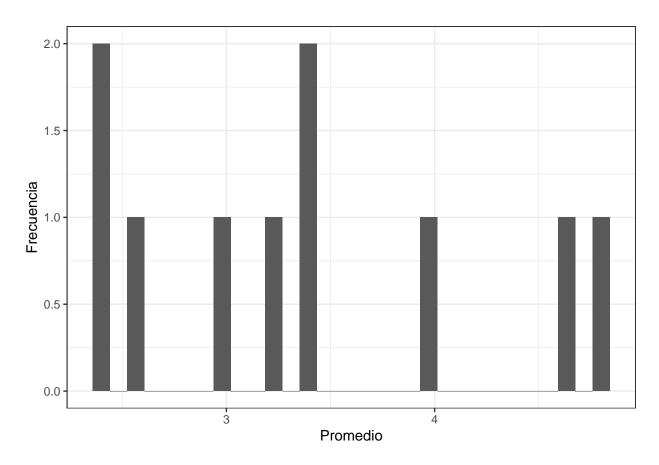
```
qnorm(0.1, mean = 161, sd = 7)
```

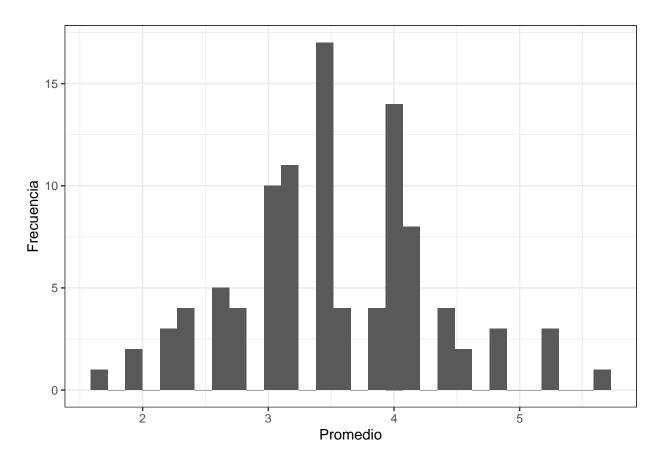
```
## [1] 152.0291
```

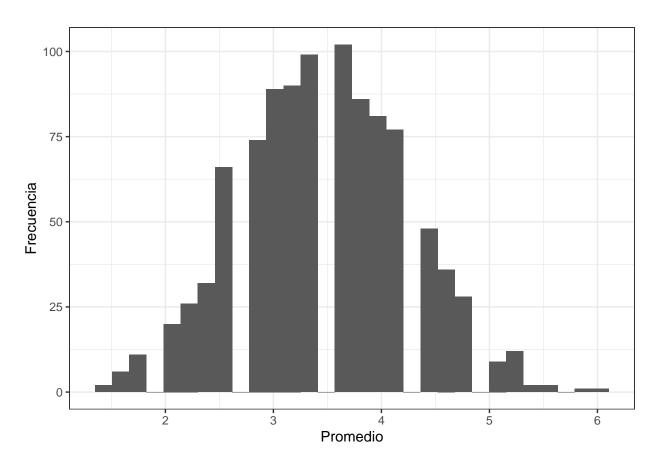
Teorema del límite central

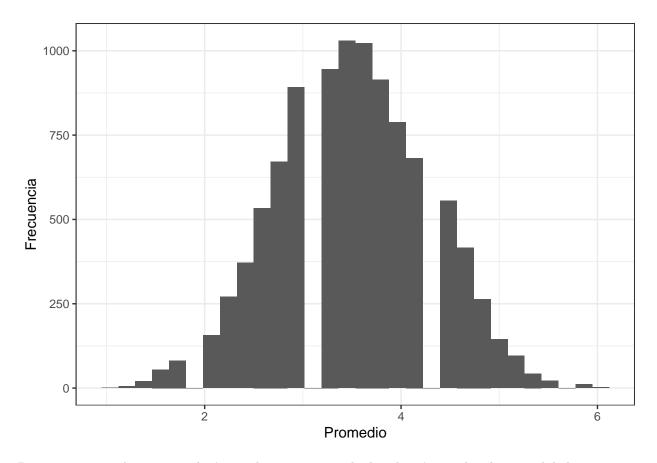
Este teorema describe que la distribución probabilísitca de una muestra se acerca a una distribución normal en cuanto aumenta el número de experimentos. Como ejemplo, se generará un dado virtual, con valores del 1 al 6. Posteriormente, se simularán 5 lanzamientos con reemplazo y se obtendrá el valor promedio de estos 5 lanzamientos. Por último, se simulará este proceso 10, 100, 1000 y 10000 veces.

```
dado <- seq(1,6,1)
```









De esta manera, al aumentar el número de experimentos la distribución tiende a la normalidad.

Distribución binominal

La distribución binominal describe un evento con dos posibles resultados. Por ejemplo, la probabilidad de éxito o fracaso. O la probabilidad de obtener sol o águila al lanzar una moneda. En R se utiliza la función rbinom() de la paquetería stats para calcular esta distribución. Esta función toma como argumentos el numero de observasiones, numero de ensayos y probabilidad de éxito, en ese orden. Por ejemplo, se realizará un experimento, lanzando una moneda, la cual tiene 50% de probabilidad de caer águila (éxito) o sol (fracaso).

```
set.seed(123)
rbinom(1, 1, 0.5)
```

[1] 0

El resultado es 0, o el equivalente al fracaso.

No obstante, podemos realizar varios experimentos a la vez, lanzando varias monedas por experimento. En el siguiente ejemplo se realizarán 7 observaciones, lanzando 5 monedas por observación.

```
set.seed(123)
rbinom(7, 5, 0.5)
```

```
## [1] 2 3 2 4 4 1 3
```

El resultado se traduce de la siguiente manera. En el primer experimento se generaron 3 eventos de exito. Para el segundo, se obtuvieron 2 éxitos. En el tercero, 4 éxitos y así con cada elemento del vector.

La probabilidad de éxito puede ser modificada, dando como resultado que un evento tenga mayor probabilidad de ocurrir. En el siguiente ejemplo, se realizaran 10 observaciones, con 1 ensayo cada una, teniendo una tasa

de éxito del 30%

```
set.seed(123)
rbinom(10, 1, 0.3)
```

```
## [1] 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0
```

De esta manera, se obtuvieron solo 4 eventos de éxito.

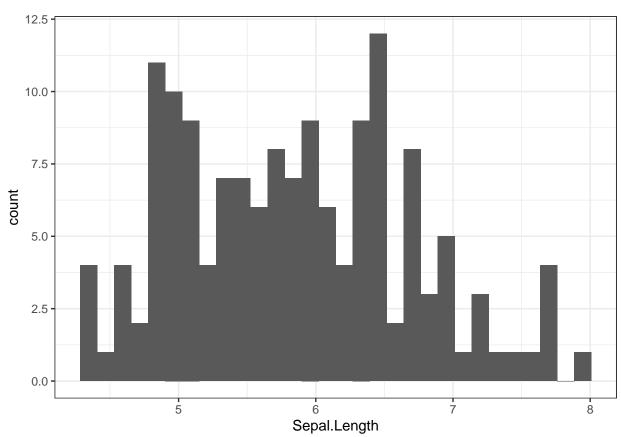
¿Cómo sé que distribución seguir?

Antes de aplicar cualquier modelo de distribución debemos realizarnos las siguentes preguntas. ¿Cuántos resultados posibles tenemos? ¿Todas las respuestas tienen la misma probabilidad de ocurrir? ¿Cómo se distribuyen los datos?

Esta última pregunta se suele responder al graficar la información, por lo general se suele utilizar un histograma o un gráfico de área. Los siguientes ejemplos muestran la distribución de los datos del dataset iris.

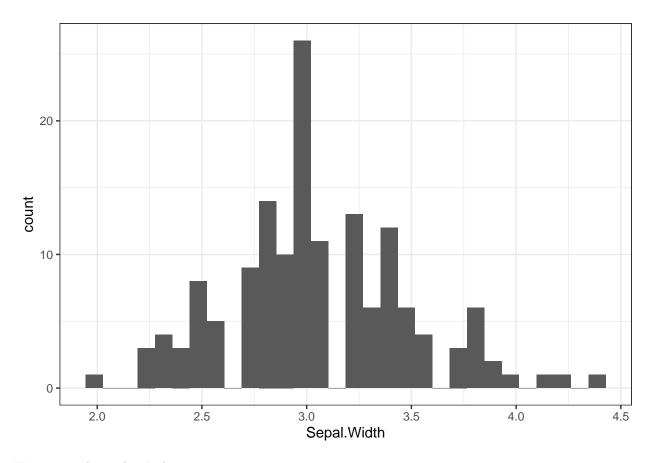
Histograma de longitud de sépalo

```
ggplot(iris, aes(Sepal.Length)) +
  geom_histogram() +
  theme_bw()
```



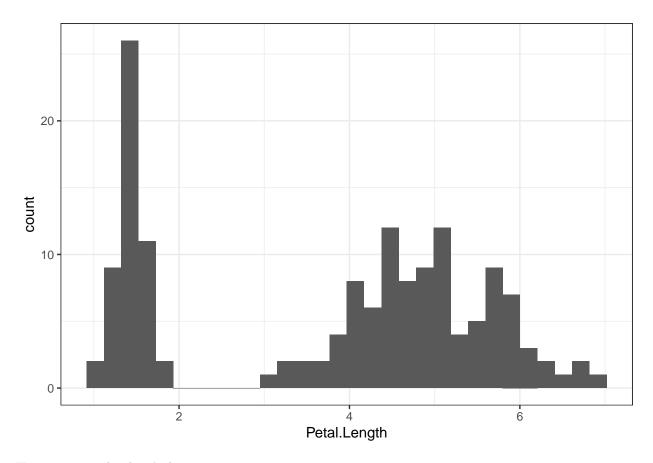
Histograma ancho de sépalo

```
ggplot(iris, aes(Sepal.Width)) +
  geom_histogram() +
  theme_bw()
```



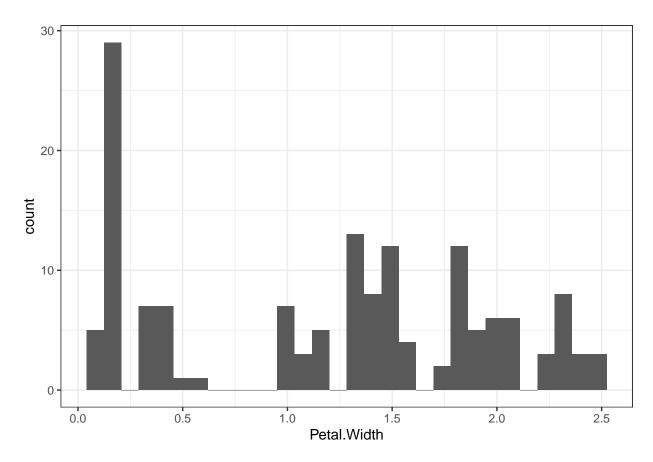
Histograma largo de pétalo

```
ggplot(iris, aes(Petal.Length)) +
  geom_histogram() +
  theme_bw()
```



Histograma ancho de pétalo

```
ggplot(iris, aes(Petal.Width)) +
  geom_histogram() +
  theme_bw()
```



Este primer acercamiento a los datos permite definir si hay datos extremos, agrupamientos, distribución de la información. Dando parte a la transformación de los datos y posteriormente elegir el modelo estadístico adecuado.