

Höhere Analysis und Numerik

Das Skript zum Modul "Höhere Analysis und Numerik" ist ein interaktives Skript. Die Codes sind direkt ausführbar.

Note

Das Skript zum Modul ist am entstehen.

Der erste Teil des Skripts folgt dem Buch [\[BWHM10\]](#). Für Details und Ergänzungen wird das Buch empfohlen. Es steht als pdf-Download in der Bibliothek der ZHAW zur Verfügung.

Python

Für numerische Berechnungen benutzen wir im Kurs Python. Eine gute Einführung in Python ist im interaktiven Jupyter-Book [Python Programming And Numerical Methods: A Guide For Engineers And Scientists](#) zu finden.

Im wesentlichen werden wir fundamentale Funktionalität von Python benutzen. Für numerische Berechnungen werden wir auf NumPy und SciPy zurückgreifen. Die Visualisierung kann sehr matlab nahe mit Hilfe von Matplotlib umgesetzt werden.

- [Python](#)
- [NumPy](#)
- [SciPy](#)
- [Matplotlib](#)

Falls Sie Python mit den entsprechenden Module noch nie benutzt haben, ist es sehr sinnvoll sich vorab mit dem wesentlichen auseinander zu setzen.

NGSolve

Im Rahmen der numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen werden wir die Methode der finiten Elemente kennen lernen. Wir werden für die Umsetzung auf eine C++ Bibliothek [NGSolve](#) zurückgreifen, welche eine umfangreiche Python-Schnittstelle zur Verfügung stellt.

Netgen/NGSolve ist eine hochleistungsfähige Multiphysik-Finite-Elemente-Software. Sie wird häufig zur Analyse von Modellen aus den Bereichen Festkörpermechanik, Strömungsmechanik und Elektromagnetik eingesetzt. Dank der flexiblen Python-Schnittstelle können neue physikalische Gleichungen und Lösungsalgorithmen leicht implementiert werden.

Das Ziel des Moduls besteht in der Vermittlung der mathematischen Grundlagen und insbesondere auch numerischen Anwendung derer auf konkrete Beispiele aus der Ingenieur Praxis.

Note

Installieren Sie NGSolve auf ihrem Rechner. Die dazu notwendigen Anleitungen finden Sie auf <https://ngsolve.org> unter dem Abschnitt INSTALLATION:

- [Downloads NGSolve](#)
- [Using Jupyter notebook](#)

Funktionalanalysis

In diesem Kapitel wird das notwendige Rüstzeug für die Behandlung partieller Differentialgleichungen und numerischen Methoden bereit gestellt.

Grundlegende Räume

Vektorräume

In den Modulen linearen Algebra, Analysis und Numerik wurden Vektorräume und Normen mit dem \mathbb{R}^n eingeführt und benutzt. Wir definieren hier der Vollständigkeit halber die Begriffe nochmals und erweitern die Anwendung auf allgemeinere Räume, insbesondere müssen diese nicht endlich dimensional sein.

Beginnen wir mit dem Begriff der Vektorräume. Um diesen definieren zu können, benötigen wir einen Zahlkörper. In aller Regel benutzen wir die reellen Zahlen \mathbb{R} . Wir legen mit dem folgenden Axiom fest, was die reellen Zahlen sind:

Definition: reelle Zahlen

Es existiere eine Menge \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:

- Es existieren Operationen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Addition}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Multiplikation}$$

mit den Eigenschaften:

- Assoziativgesetze

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Kommutativgesetze

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- Neutrale Elemente

$$\exists 0 : a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\exists 1 : a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- Inverse Elemente

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists a' \in \mathbb{R} : a + a' = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \tilde{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \tilde{a} = 1$$

Schreibweise: $-a := a'$, $a - a := a + (-a)$, $\frac{1}{a} := \tilde{a}$, $\frac{a}{a} := a \cdot \frac{1}{a}$

- Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- \mathbb{R} ist geordnet, d.h. es existiert eine Relation \leq so, dass gilt

- \mathbb{R} ist totalgeordnet, d.h.

1. \mathbb{R} ist teilgeordnet, d.h.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq x$.

- Ist $x \leq y$ und $y \leq z$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$, so ist $x \leq z$.

- Ist $x \leq y$ und $y \leq x$ für $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $x = y$.

(Mit $x < y$ bezeichnen wir den Fall $x \leq y$ und $x \neq y$.)

2. Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x.$$

- Die Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, d.h. für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$a \leq b, 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

- \mathbb{R} ist vollständig. Das heisst, dass jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen eine kleinste obere Schranke besitzt.

Im Allgemeinen ist ein (Zahlen)-Körper über eine Gruppe wie folgt definiert:

i Definition: Gruppe

Ein Tupel (G, \cdot) bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\cdot : G \rightarrow G$ heisst *Gruppe*, falls die Verknüpfung assoziativ ist, ein neutrales Element $e \in G$ existiert und für alle $a \in G$ ein $b \in G$ existiert so dass $a \cdot b = b \cdot a = e$ gilt. Ist die Verknüpfung kommutativ, nennt man die Gruppe kommutativ.

Ein Körper lässt sich somit wie folgt allgemein definieren:

i Definition: Körper

Ein *Körper* ist eine Tripel $(K, +, \cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0_K .
- (K, \cdot) ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1_K .
- (Distributivgesetz) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\(a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c)\end{aligned}$$

Beispiele für Körper sind folgende Tupel

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bildet **keine** Gruppe.

Mit Hilfe eines Körpers können wir nun einen \mathbb{K} -Vektorraum wie folgt definieren:

i Definition: \mathbb{K} – Vektorraum

Ein \mathbb{K} -Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ mit den Eigenschaften

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe
2. Die Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ genügt den Eigenschaften
 - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
 - $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$
 - $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$
 - $1_K \cdot x = x$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$.

i Bemerkung

Wenn man in einem allgemeinen Kontext von Vektoren spricht, so meint man damit die Elemente eines Vektorraumes. Spricht man von Skalaren, so sind die Elemente des zugrundeliegenden Körpers gemeint.

Beispiele:

- Vektorraum \mathbb{R}^n

Anwendung in python:

```
import numpy as np
x = np.array([1,2,3,4])
y = np.array([-4,-3,-2,-1])

print('x+y=', x+y)
print('5*(x+y)=', 5*(x+y), '= 5*x+5*y = ', 5*x+5*y)
```

```
x+y= [-3 -1  1  3]
5*(x+y)= [-15  -5   5  15] = 5*x+5*y =  [-15  -5   5  15]
```

- Vektorraum der stetigen Funktionen.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u, v : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeige, dass die Summe zweier stetiger Funktionen $(u + v)$ wieder stetig ist und dass das Vielfache einer stetigen Funktion (αu) ebenso stetig ist.

Aufgabe

Beweise die Aussage.

Metrische Räume

Metrik

In der Analysis will man oft eine Distanz zwischen zwei Elemente eines Vektorraumes angeben. Insbesondere bei Konvergenzbetrachtungen ist der Abstand zweier Elemente existentiell wichtig. Der Konvergenzbegriff in \mathbb{R} unter Hinzunahme der folgenden Distanzfunktion

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d = d(x, y) := |x - y| \end{aligned}$$

lautet wie folgt: Die Folge $\{x_n\}$ aus \mathbb{R} heisst konvergent gegen $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$d(x_n, x_0) = |x_n - x_0| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

Definition: Metrik

Eine nichtleere Menge X mit Elemente x, y, z, \dots heisst ein *metrischer Raum*, wenn jedem Paar $x, y \in X$ eine reelle Zahl $d(x, y)$, genannt *Abstand* oder *Metrik*, zugeordnet ist, mit den Eigenschaften: Für alle $x, y, z \in X$ gilt

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *Symmetrieeigenschaft*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *Dreiecksungleichung*.

Für metrische Räume verwenden wir wieder die Schreibweisen: (X, d) oder kurz X , falls der Kontext klar ist.

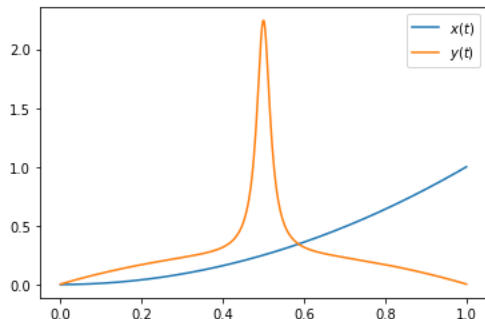
Aufgabe

Zeige, dass für $X = C[0, 1]$, den stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ die Abbildung

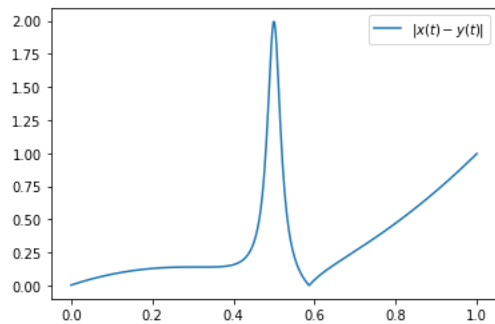
$$\begin{aligned} d_{\max} : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d_{\max}(x, y) := \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)| \end{aligned} \tag{1}$$

eine Metrik definiert (*Maximummetrik*).

Beispiel:



Die Maximummetrik berechnet die maximale Differenz der beiden Funktionen:



Aufgabe

Berechne analytisch den exakten Wert der Maximumsmetrik für die beiden Funktionen x, y aus obigem Beispiel.

Eine weitere wichtige Metrik ist die **Integralmetrik**. Es sei X die Menge aller reellwertigen Funktionen, die auf einem (nicht notwendig beschränkten) Intervall (a, b) stetig sind und für die das Integral

$$\int_a^b |x(t)|^p dt, \quad 1 \leq p < \infty$$

im Riemannschen Sinne existiert. Setzen wir für $x(t), y(t) \in X$

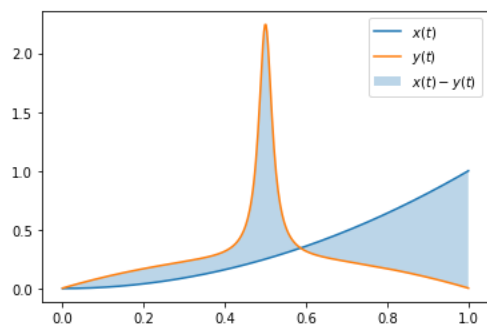
Definition: Integralmetrik

$$d_p(x, y) := \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

so wird X mit dieser *Integralmetrik* zu einem metrischen Raum. Der Beweis nutzt die Minkowski-Ungleichung für Integrale

$$\left(\int_a^b |u(t) - v(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Beispiel:



Aufgabe

Berechne die Integralmetrik für $p = 2$ und $p = 1/2$ für das Beispiel oben.

Aufgabe

In der Codierungstheorie ist ein n -stelliges Binärwort ein n -Tupel (ξ_1, \dots, ξ_n) , wobei $\xi_k \in \{0, 1\}$ für $k = 1, \dots, n$. Bezeichne X die Menge aller dieser Binärwörter. Für $x = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, $y = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ ist die *Hamming-Distanz* zwischen x und y durch

$$d_H(x, y) := \text{Anzahl der Stellen an denen sich } x \text{ und } y \text{ unterscheiden}$$

definiert. Zeige:

1. $d_H(x, y)$ lässt sich durch

$$d_H(x, y) := \sum_{k=1}^n [(\xi_k + \eta_k) \bmod 2]$$

darstellen.

2. (X, d_H) ist ein metrischer Raum.

Die topologischen Begriffe wie *offene Kugel*, *innerer Punkt*, *Häufungspunkt*, *abgeschlossen*, *beschränkt* lassen sich mit Hilfe der Metrix d für einen metrischen Raum (X, d) direkt aus dem aus der Analysis bekannten \mathbb{R}^n übertragen.

Definition: Konvergenz

Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ von Elementen aus X heisst *konvergent*, wenn es ein $x_0 \in X$ gibt mit

$$d(x_n, x_0) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

dh. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Schreibweise: $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, x_0 heisst *Grenzwert* der Folge $\{x_n\}$

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Dies lässt sich per Widerspruch wie folgt leicht zeigen. Seien x_0 und y_0 zwei verschiedene Grenzwerte. Daher gilt

$$\begin{aligned} 0 < d(x_0, y_0) &\leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \\ &= \underbrace{d(x_n, x_0)}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{d(x_n, y_0)}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es folgt damit $d(x_0, y_0) = 0$ und damit $x_0 = y_0$.

Funktionenfolgen

Wir starten mit einem intuitiven Begriff der Konvergenz für Funktionenfolgen:

Definition: Punktweise Konvergenz

Man nennt eine Funktionenfolge $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ *punktweise konvergent*, wenn für jedes $t \in [a, b]$ die Zahlenfolge $x_1(t), x_2(t), \dots$ konvergiert. Die *Grenzfunktion* x ist dabei durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{für jedes } t \in [a, b]$$

gegeben.

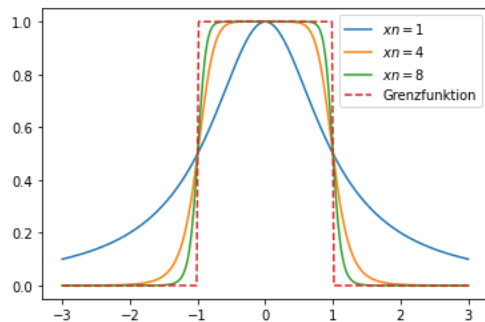
Die punktweise Konvergenz erweist sich für die Analysis als zu schwach. Als Beispiel dazu betrachten wir die Folge der Funktionen $x_n \subset C(\mathbb{R})$

$$x_n(t) = \frac{1}{1 + t^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wie im Python Code unten leicht zu sehen ist, konvergiert die Folge punktweise gegen

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < 1, \\ 1/2, & \text{für } |t| = 1, \\ 0, & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

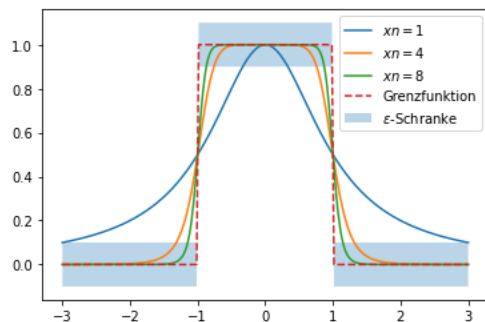
Obwohl alle Funktionen x_n stetig sind, ist die Grenzfunktion x unstetig und damit nicht in unserem Funktionenraum (oder Vektorraum) $x \notin C(\mathbb{R})$! Das ist für uns unbrauchbar.



Das Problem der punktweisen Konvergenz besteht darin, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine eigene Schranke $\varepsilon = \varepsilon(t)$ gewählt werden kann. Dies ist zu schwach, um garantieren zu können, dass eine konvergente Funktionenfolge wieder stetig ist. Wir benutzen nun die Maximumsmetrik [.1](#). Daraus folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

geben muss. Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist hier im Sinne von "beliebig klein" zu verstehen. Der grosse Unterschied zur punktweisen Konvergenz ist, dass hier das ε **für alle** $t \in \mathbb{R}$ das selbe ist. In diesem Sinne ist jedoch die Funktionenfolge x_n nicht mehr konvergent:



Für ein $\varepsilon < 1$ (Sprunghöhe) finden wir kein n_0 so, dass der Abstand zur Grenzfunktion der Bedingung genügt. Die Funktionenfolge ist daher nicht konvergent bezüglich der Maximumsmetrik.

Definition: Gleichmässige Konvergenz

Die Konvergenz in $(C[a, b], d_{\max})$ nennt man **gleichmässige** Konvergenz auf dem Intervall $[a, b]$.

Note

Ist eine stetige Funktionenfolge gleichmässig konvergent, so ist die Grenzfunktion wiederum stetig.

Cauchy-Folge

Der Begriff der Cauchy-Folge folge kann direkt auf metrische Räume übertragen werden:

i Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $\{x_n\}$ aus dem metrischen Raum X heisst *Cauchy-Folge*, wenn

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

ist, dh. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

i Satz

Jede konvergente Folge im metrischen Raum X ist auch eine Cauchy-Folge.

Beweis: Aus der Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in X$ mit

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(x_m, x_0) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) = d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < 2\varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. \square

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Beispiel: Betrachte $X = (0, 1)$ mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$ und der Folge $\{x_n\}$ mit $x_n = \frac{1}{1+n}$. Die Folge ist eine Cauchy-Folge im metrischen Raum (X, d) , besitzt jedoch keinen Grenzwert in diesem ($0 \notin X$).

Dies führt uns zu einem neuen Begriff, der **Vollständigkeit**. Wir interessieren uns insbesondere für diejenigen metrischen Räume, in denen Cauchy-Folgen konvergieren.

i Definition: Vollständig

Ein metrischer Raum X heisst *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element von X konvergiert.

Betrachten wir ein paar Beispiele:

1. \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$$

versehen, ist ein vollständiger metrischer Raum. Dies folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Punktfolgen.

2. $C[a, b]$ mit der Maximummetrik

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

versehen ist vollständig.

Dagegen ist $C[a, b]$ bezüglich der Integralmetrik

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2)$$

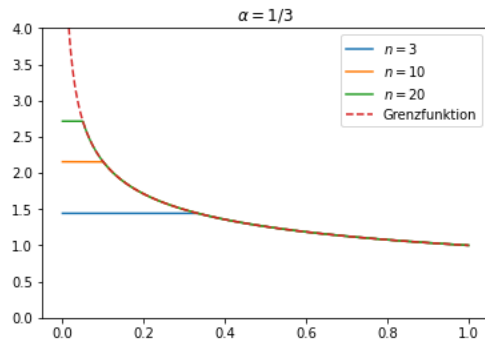
nicht vollständig. Wir betrachten dazu für $p = 2$ auf $C[0, 1]$ folgendes Gegenbeispiel:

Sei $t \in [0, 1]$

(3)

$$x_n(t) := \begin{cases} n^\alpha & \text{für } t \leq 1/n \\ \frac{1}{t^\alpha} & \text{für } t > 1/n \end{cases}$$

und $x(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1/2$.



Es gilt $x_n \in C[0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$d(x_n, x)^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt = \int_0^{1/n} (n^\alpha - t^{-\alpha})^2 dt.$$

Mit Hilfe der Ungleichung $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ folgt

$$d(x_n, x)^2 \leq 2 \int_0^{1/n} (n^{2\alpha} + t^{-2\alpha})^2 dt = \frac{2}{n^{1-2\alpha}} + \frac{2}{1-2\alpha} \frac{1}{n^{1-2\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

da $1 - 2\alpha > 0$ gilt. Mit dem konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen x in der Integralmetrik ($p = 2$). Wir zeigen, dass $\{x_n(t)\}$ keine auf $[0, 1]$ stetige Grenzfunktion besitzt. Dazu nehmen wir an, dass $y(t) \in C[0, 1]$ sei Grenzfunktion der Folge $\{x_n(t)\}$. Wir setzen

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|.$$

(Muss für eine wohl definierte Obersumme endlich sein!) Für $t \leq (2M)^{-1/\alpha}$ und $n > (2M)^{1/\alpha}$ gilt

$$x_n(t) - y(t) \geq M \quad \text{für } t \leq (2M)^{-1/\alpha}$$

und somit

$$d^2(x_n, y) = \int_0^1 |x_n(t) - y(t)|^2 dt \geq \int_0^{(2M)^{-1/\alpha}} |x_n(t) - y(t)|^2 dt \geq (2M)^{-1/\alpha} \cdot M^2 > 0, \quad \text{für } n > (2M)^{1/\alpha}$$

im Widerspruch zur Annahme, dass $\{x_n(t)\}$ gegen $y(t)$ konvergiert. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Die Tatsache, daß $C[a, b]$, versehen mit einer Integralmetrik, kein vollständiger metrischer Raum ist, bedeutet einen schwerwiegenden Mangel dieses Raumes. Jedoch gibt es mehrere Wege der Vervollständigung:

1. Man erweitert die Klasse $C[a, b]$ zur Klasse der auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen und interpretiert das in (2) auftretende Integral im Lebesgueschen Sinn. Dadurch gelangt man zum vollständigen metrischen Raum $L_p[a, b]$ (vgl. [Heu08], S. 109).
2. Ein anderer Weg besteht darin, dass der vollständige Erweiterungsraum als Menge von linearen Funktionalen auf einem geeigneten Grundraum nach dem Vorbild der Distributionentheorie aufgefasst wird.
3. Ein weiterer Weg besteht in der abstrakten Konstruktion eines vollständigen Erweiterungsraums mit Hilfe von Cauchy-Folgen. Auf diese Weise lässt sich **jeder** nichtvollständige metrische Raum vervollständigen (vgl. [Heu06], S. 251)

Wir definieren kompakt für metrische Räume wie folgt

Definition: Kompakt

Sei X ein metrischer Raum. $A \subset X$ heisst *kompakt*, wenn jede Folge $\{x_n\}$ aus A eine Teilfolge enthält, die gegen ein Grenzelement $x \in A$ konvergiert.

Satz

Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raumes X ist beschränkt und abgeschlossen.

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Bestapproximation in metrischen Räumen

In der Approximationstheorie stellt sich das Grundproblem: In einem metrischen Raum X sei eine Teilmenge A und ein fester Punkt $y \in X$ vorgegeben. Zu bestimmen ist ein Punkt $x_0 \in A$, der von y minimalen Abstand hat. Das Problem beginnt schon damit, dass es nicht klar ist, dass es einen solchen Punkt überhaupt gibt:

Betrachte den Raum (\mathbb{R}, d) mit $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Die Teilmenge A sei gegeben durch $A = (0, 1)$ und $y = 2$. In A gibt es keinen Punkt x_0 , für den $d(x_0, 2)$ minimal ist ($1 \notin A$).

Zur Erinnerung:

Definition: Supremum, Infimum

Sei $A \subset \mathbb{R}$, dann bezeichnet man mit dem *Supremum* von A die kleinste reelle Zahl λ mit $x \leq \lambda$ für alle $x \in A$. Analog bezeichnet man mit dem *Infimum* die grösste reelle Zahl μ mit $x \geq \mu$ für alle $x \in A$.

Satz

Es sei X ein metrischer Raum und A eine **kompakte** Teilmenge von X . Dann gibt es zu jedem festen Punkt $y \in X$ einen Punkt $x_0 \in A$, der von y kleinsten Abstand hat.

Betrachten wir das obige Beispiel angepasst auf die Voraussetzung im Satz: Sei $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, dann ist der Punkt $x_0 = 1$ bestapproximierendes Element.

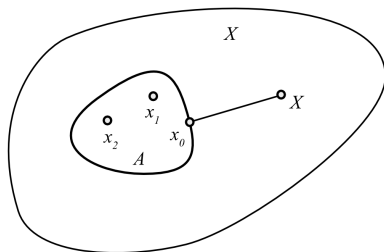


Fig. 1 Bestapproximation

Normierte Räume. Banachräume

Bis jetzt haben wir sehr wenig Eigenschaften eines Raumes benötigt. Was uns noch fehlt, sind abgesehen vom Abstand der Elemente noch *algebraische* Eigenschaften (addieren, multiplizieren, etc.). Dazu definieren wir den *linearen Raum* (oder *Vektorraum*) wie folgt.

Definition: linearer Raum

Ein *linearer Raum* (oder *Vektorraum*) über einem Körper \mathbb{K} besteht aus einer nichtleeren Menge X , sowie

- einer Vorschrift, die jedem Paar (x, y) mit $x, y \in X$ genau ein Element $x + y \in X$ zuordnet (*Addition*)
- einer Vorschrift, die jedem Paar (λ, x) mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in X$ genau ein Element $\lambda x \in X$ zuordnet (*Multiplikation mit Skalaren*), wobei für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ folgende Regeln gelten:

$x + (y + z)$	$=$	$(x + y) + z$	Assoziativgesetz
$x + y$	$=$	$y + x$	Kommutativgesetz
$x + 0$	$=$	x	Nullelement
$x + x'$	$=$	0	Negatives zu x
$(\lambda + \mu)x$	$=$	$\lambda x + \mu x$	1. Distributivgesetz
$\lambda(x + y)$	$=$	$\lambda x + \lambda y$	2. Distributivgesetz
$(\lambda\mu)x$	$=$	$\lambda(\mu x)$	Assoziativgesetz
$1x$	$=$	x	mit $1 \in \mathbb{K}$

Beispiele für lineare Räume:

- Die Mengen \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n sind wohl bekannt.
- Menge $C[a, b]$ aller reellwertigen *stetigen* Funktionen:

$$\begin{aligned}(x + y)(t) &= x(t) + y(t) \\ (\lambda x)(t) &= \lambda x(t) \\ 0(t) &= 0 \\ (-x)(t) &= -x(t)\end{aligned}$$

mit $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $C^k[a, b]$ Menge aller reellwertigen k -mal stetig differenzierbare Funktionen.
- $C^\infty[a, b]$ Menge aller beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen.
- Menge aller Polynome
- Menge l_p aller Zahlenfolgen $x = \{x_k\}$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ konvergiert:

$$\begin{aligned}x + y &= \{x_k\} + \{y_k\} = \{x_k + y_k\} \\ \lambda x &= \lambda \{x_k\} = \{\lambda x_k\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wie in der linearen Algebra sind folgende Begriffe analog definiert

i Definition: Unterraum, lineare Mannigfaltigkeit, lineare Hülle / Span, linear unabhängig, Dimension, Basis

- Eine nicht leere Teilmenge S von X heisst *Unterraum* von X , wenn für bel. $x, y \in S$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ stets

$$x + y \in S \quad \text{und} \quad \lambda x \in S$$

folgt. Insbesondere ist S selbst ein linearer Raum über \mathbb{K} .

- Ist S ein Unterraum von X und $x_0 \in X$ beliebig, so nennt man

$$M = x_0 + S := \{x_0 + y \mid y \in S\}$$

eine *lineare Mannigfaltigkeit* von X .

- Ist A eine beliebige nichtleere Teilmenge von X , so bilden alle Linearkombinationen $\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k$ mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $x_k \in A$ einen Unterraum $S \subset X$. Er wird *lineare Hülle* von A oder $\text{span } A := S$ genannt.

Man sagt: A spannt S auf oder A ist ein *Erzeugendensystem* von S . Im Falle $S = X$ spannt A den ganzen Raum X auf.

- Sind S und T Unterräume von X , dann ist die *Summe* $S + T$ definiert durch

$$S + T := \text{span } S \cup T.$$

- Die (endlich vielen) Elemente $x_1, \dots, x_n \in X$ heissen *linear unabhängig*, wenn aus

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad \text{stets} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

folgt.

- Sei S ein Unterraum von X . Wir sagen, S besitzt die *Dimension* n , $\dim S = n$, wenn es n linear unabhängige Elemente von S gibt, aber $n + 1$ Elemente von S stets linear abhängig sind.

S heisst *Basis* von X , wenn die Elemente von S linear unabhängig sind und $\text{span } S = X$ gilt.

Besitzt X keine endlich dimensionale Basis, nennt man X *unendlich-dimensional* ($\dim X = \infty$).

Bemerkungen: Die oben erwähnten Funktionenräume $C[a, b]$, $C^k[a, b]$, Polynome sind unendlich-dimensional. Ebenso ist der Folgenraum l_p unendlich-dimensional:

Man betrachte

$$x^{(k)} = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \in l_p$$

mit 1 an der Stelle k .

Im folgenden sind wir an Räumen interessiert, für welche eine lineare Struktur und eine Metrik gegeben ist.

i Definition: normierter Raum

Sei X ein metrischer und linearer Raum. Zu dem sei die Metrik d von X *translationsinvariant*

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

und *homogen*

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X.$$

Dann nennt man X einen *normierten Raum*. Der durch

$$\|x\| := d(x, 0) \quad \forall x \in X$$

erklärte Ausdruck heisst *Norm* von x .

Bemerkungen:

- Neben der kurzen Schreibweise X , verwendet man häufig auch die Bezeichnung $(X, \|\cdot\|)$. Der Punkt in $\|\cdot\|$ ist als Platzhalter zu verstehen.
- Führt man den normierten Raum X mit Hilfe einer Norm ein, so ist durch

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in X$$

eine Metrik in X gegeben.

Folgerung

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein linearer Raum, auf dem eine Norm $\|\cdot\|$ erklärt ist, die für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \text{genau dann, wenn } x = 0 \text{ ist,} \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

erfüllt.

Damit können wir einen wichtigen Begriff der Funktionalanalysis einführen, den Banachraum:

Definition: Banachraum

Vollständig normierte Räume X sind diejenigen, für die jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element in X konvergiert.

Ein vollständiger normierter Raum heisst *Banachraum*.

Beispiele: Folgende Räume sind Banachräume

- \mathbb{R}^n mit der Norm $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$.
- $C[a, b]$ mit der Norm $\|x\| := \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.
- $C^k[a, b]$ mit der Norm

$$\|x\| := \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| + \dots + \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|.$$

- l_p ($1 \leq p < \infty$) mit der Norm $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$

Definition: abzählbare Basis

Man sagt, dass X eine *abzählbare Basis* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_k \in X$ besitzt, falls jedes $x \in X$ eindeutig in der Form $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ darstellbar ist, wobei die Konvergenz bezüglich der Norm von X zu verstehen ist.

Lineare Räume können durchaus verschieden normiert werden. Als Beispiel betrachte dazu den Raum $X = \mathbb{R}^n$ mit den Normen

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (\text{Betragsnorm}) \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad (\text{Euklidische Norm, Quadratnorm}) \\ \|x\|_{\infty} &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad (\text{Maximumsnorm}) \end{aligned}$$

Aufgabe

Stelle den Einheitskreis $K_* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_* = 1\}$ bezüglich den drei verschiedenen Normen * graphisch dar.

Die drei verschiedenen Normen führen zur Frage, wie die Normen zusammenhängen.

Definition: äquivalente Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ heißen *äquivalent*, wenn jede bezüglich der Norm $\|\cdot\|_a$ konvergente Folge auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_b$ konvergent ist und umgekehrt.

Im endlich-dimensionalen gilt ein pauschaler Satz:

Satz

Alle Normen in einem **endlich**-dimensionalen Raum X sind äquivalent.

Dieses Resultat gilt für unendlich-dimensionale Räume **nicht**. Als Beispiel sei der lineare Raum $C[a, b]$ mit der Maximumsnorm und der Quadratnorm erwähnt. Die beiden Normen sind nicht äquivalent, vgl. das Gegenbeispiel [\(3\)](#).

Mit diesem Satz folgt

Satz

Jeder endlich-dimensionale normierte Raum X ist vollständig, also ein Banachraum.

Skalarprodukträume. Hilberträume

Das aus der linearen Algebra bekannte Skalarprodukt lässt sich auch auf unendlich-dimensionale Räume übertragen. Wir definieren ganz allgemein

Definition: Skalarprodukt, Skalarproduktraum

Unter einem *Skalarproduktraum* versteht man einen linearen Raum X über \mathbb{K} , in dem ein *Skalarprodukt* (x, y) mit folgenden Eigenschaften definiert ist: Für beliebige $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

Lineare Operationen

Beschränkte lineare Operatoren

Beispiele zu normierte Räume

Vektorraum \mathbb{R}^n

```
import numpy as np
```

```
x = np.array([1,2,3])  
y = np.array([k**2 for k in range(1,4)])
```

Die Addition, Subtraktion zweier Vektoren liefert wieder ein Vektor:

```
x+y
```

```
array([ 2,  6, 12])
```

x

```
array([1, 2, 3])
```

Einführung PDE

Einführung in partielle Differentialgleichungen.

Numerik für partielle Differentialgleichungen

Anwendungen

Anwendungen

Literaturverzeichnis

[BWHM10]

Klemens Burg, Friedrich Wille, Herbert Haf, and Andreas Meister. *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen*. Vieweg + Teubner Verlag, 2010. URL: <https://www.springer.com/de/book/9783834812940>.

[Heu06]

Harro Heuser. *Funktionalanalysis*. Vieweg + Teubner Verlag, 2006. URL: <https://www.springer.com/de/book/9783835100268>.

[Heu08]

Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Volume 2. Vieweg + Teubner Verlag, 2008. URL: <https://www.springer.com/de/book/9783322968128>.