Lösung Serie 12, Aufgabe 1[1]**:**

a) Die Matrix ist eine Dreiecksmatrix, wir können die Eigenwerte also direkt von der Diagonalen ablesen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, also ist das Spektrum $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 2, 3\}$ Die Determinante ist $\det A = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$, die Spur $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = 1 + 2 + 3 = 6$.

b)

Berechnung der *Eigenwerte* aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{matrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \\ 0 & 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = (a-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 4(a-\lambda) - (a-\lambda) = (a-\lambda)^3 - 5(a-\lambda)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad\Rightarrow\quad (a-\lambda)^3 - 5(a-\lambda) = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 5\right] = 0 \;\begin{cases} a-\lambda = 0 \\ (a-\lambda)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Aus der oberen Gleichung folgt $\lambda_1 = a$, die untere Gleichung liefert zwei weitere Lösungen:

$$(a-\lambda)^2 - 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad (a-\lambda)^2 = 5 \quad\Rightarrow\quad a-\lambda = \pm\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{5}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = a + \sqrt{5}, \quad \lambda_3 = a - \sqrt{5}$

Determinante und Spur der Matrix A

$$\det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a\underbrace{(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}_{\text{3. Binom}} = a(a^2 - 5)$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + (a+\sqrt{5}) + (a-\sqrt{5}) = a + a + \sqrt{5} + a - \sqrt{5} = 3a$$

Kontrollrechnung:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}}_{\det\mathbf{A}} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 0 & 2 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \det\mathbf{A} = a^3 + 0 + 0 - 0 - 4a - a = a^3 - 5a = a(a^2 - 5)$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a + a + a = 3a$$

[1] entnommen aus "Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Klausur- und Übungsaufgaben", L. Papula, Springer Vieweg, 2020

Lösung Serie 12, Aufgabe 2[1]**:**

- a) Lösung:
  - Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5\cdot(-1) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

  - Eigenvektor zu $\lambda_1 = +i$:
    Wir müssen das folgende homogene Gleichungssystem lösen

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respektive

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2 \mid \boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ -1 & -2-i & 0 \end{array}\right).$$

Mit dem Gaussschen Eliminationsalgorithmus erhalten wir

$$i = 2,\ j = 1 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \frac{(-1)}{(2-i)} z_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2-i-\frac{-5}{(2-i)}}_{=0} & 0 \end{array}\right).$$

Wir sehen aus der Zeilenstufenform, dass die zweite Zeile durchgängig zu 0 wird, weil

$$-2-i-\frac{-5}{(2-i)} = -2-i-\frac{-5}{(2-i)}\cdot\frac{(2+i)}{(2+i)} = -2-i-\frac{-10-5i}{4+1} = -2-i-(-2-i) = 0.$$

Damit ist $\text{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2) = 1$ wie erwartet kleiner als $n = 2$ und wir erwarten einen linear unabhängigen Eigenvektor, da $n - \text{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2) = 1$. Das wussten wir eigentlich schon, da wir gemäss obigen Satz bei zwei verschiedenen Eigenwerten auch zwei verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren erwarten. Aus

$$0 \cdot x_2 = 0$$

folgt, dass das Gleichungssystem für beliebige Werte x_2 lösbar ist. Um x_1 bestimmen zu können, müssen wir uns auf einen Wert festlegen, z.B. $x_2 = 1$. Aus der ersten Zeile

$$(2-i)x_1 + 5x_2 = 0$$

folgt

$$x_1 = \frac{-5}{2-i}x_2 = \frac{-5}{2-i}\cdot 1 = \frac{-5}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{-10i-5i}{5} = -2-i$$

und wir erhalten den Eigenvektor

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Berechnung der Eigenvektoren mit Programmen wie Matlab oder Python werden die Eigenvektoren i.d.R. noch auf die Länge 1 normiert, hier wäre das

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{(-2-i)(-2+i)+1^2}} \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8165 - 0.4082i \\ 0.4082 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum erhalten wir also

$$\text{E}_{\lambda_1} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

[1] entnommen aus "Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Klausur- und Übungsaufgaben", L. Papula, Springer Vieweg, 2020

– Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i$:
Die analoge Rechnung ergibt:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_2 \mid \boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 5 & 0 \\ -1 & -2+i & 0 \end{array}\right)$$

$$i=2,\ j=1 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \frac{(-1)}{(2+i)} z_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 5 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2+i-\frac{-5}{(2+i)}}_{=0} & 0 \end{array}\right)$$

weil in der zweiten Zeile

$$-2+i-\frac{-5}{(2+i)} = -2+i-\frac{-5}{(2+i)}\cdot\frac{(2-i)}{(2-i)} = -2+i-\frac{-10+5i}{4+1} = -2+i-(-2+i) = 0.$$

Wähle x_2 =1, dann folgt aus der ersten Zeile

$$(2+i)x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{2+i}x_2 = \frac{-5}{2+i}\cdot 1 = \frac{-5}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{-10i+5i}{5} = -2+i$$

und wir erhalten den Eigenvektor

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

resp. normiert

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{pmatrix} -0.8165+0.4082i \\ 0.4082 \end{pmatrix}.$$

und für den Eigenraum

$$\mathrm{E}_{\lambda_2} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Wie gemäss obigem Satz erwartet, sind die Eigenvektoren zueinander komplex konjugiert, also $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^*$, da auch die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2^*$ zueinander komplex konjugiert sind.

- b) Lösung:

Die *Eigenwerte* der 3-reihigen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Sie lauten: $\lambda_{1/2} = -1$ und $\lambda_3 = 2$.
Wir bestimmen jetzt die zugehörigen *Eigenvektoren*.

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{1/2} = -1$

Die gesuchten *Eigenvektoren* genügen dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Das Gleichungssystem *reduziert* sich somit auf die *eine* Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

in der *zwei* der drei Unbekannten *frei wählbar* sind. Wir entscheiden uns für die Unbekannten x_2 und x_3, setzen daher $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ und erhalten damit die folgende Lösung:

$$x_1 = -\alpha - \beta, \qquad x_2 = \alpha, \qquad x_3 = \beta$$

α und β sind dabei zwei *beliebige* reelle Konstanten. Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ erhalten wir die beiden *linear unabhängigen* Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daraus durch *Normierung* die gesuchten (linear unabhängigen) Eigenvektoren

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$

Der zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$ gehörende *Eigenvektor* wird aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ermittelt.

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

besitzt die vom *Parameter* γ abhängige Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \gamma$. Der bis auf einen *konstanten* Faktor $\gamma \neq 0$ bestimmte Eigenvektor lautet damit:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma \neq 0)$$

Durch *Normierung* wird daraus schließlich

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung Serie 12, Aufgabe 3:

Lösung:

a) Es gilt:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte sind die Diagonalelemente von D, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Die Eigenvektoren sind die Spalten von $\boldsymbol{T}$.

c) $\boldsymbol{D}$ ist eindeutig (da die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ eindeutig sind). $\boldsymbol{T}$ hingegen ist nicht eindeutig, denn die Spalten von $\boldsymbol{T}$ bleiben auch dann Eigenvektoren zu ihrem Eigenwert, wenn sie mit unterschiedlichen Faktoren multipliziert werden. Wird z.B. die erste Spalte mit 2, die zweite mit 3 und die dritte mit 4 multipliziert, erhalten wir

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{\boldsymbol{T}}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & \text{-}6 & 6 \\ -20 & 24 & -28 \\ 9 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

mit

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{D}.$$