Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, der Rechner $1+x$ nicht mehr korrekt berechnen kann (bekanntlich wird er $1+x=1$ ausgeben), wohingegen er keine Probleme hat, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie ① eps, nehmen Sie für x eine konkrete Zahl ② $< eps$ an, berechnen Sie die ③ obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

Mantisse = 10

① $eps = \frac{B}{2} \cdot B^{-n} = \frac{10}{2} \cdot 10^{-10} = 5 \cdot 10^{-10} = 0.5 \cdot 10^{-9}$

Falls $x = 0.4 \cdot 10^{-9}$ (ist kleiner eps), dann gilt:

$$1 + x = 1 + 0.0000000004$$

$$= 0.\underbrace{1000000000}_{10}4 \cdot 10^{1}$$

Da nur 10 Stellen zur Verfügung → wird von Mantisse vorgegeben stehen, wird die letzte Stelle gerundet und es entsteht ein Rundungsfehler

Hingegen bei $x = 0.4 \cdot 10^{-9}$ und folgenden Funktionen gilt:

$\sqrt{x} = \sqrt{0.4 \cdot 10^{-9}} = 0.200..00 \cdot 10^{-4}$ Hier ist keine Rundung nötig

$\frac{x}{10^9} = \frac{0.4 \cdot 10^{-9}}{10^9} = 0.400...00 \cdot 10^{-18}$ Hier ist keine Rundung nötig

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.): Besonderes: Hängt nicht von x ab $= \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}, , n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

$$K = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$$

gross? → Schlecht Konditioniert
klein? → Gut Konditioniert

$$f_1(x) = x^n \qquad f_2(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

$$f_1'(x) = n x^{n-1} \qquad f_2'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$K_1 = \frac{n \cancel{x^{n-1}} \cdot x}{\cancel{x^n}} = n \cancel{x^{-1}} \cancel{\cdot x} = n$$

Für grosse Zahlen ist es schlecht konditioniert, da $K \hat{=} n$

$$K_2 = \frac{\frac{1}{n} x^{\cancel{\frac{1}{n}}-1} \cdot x}{\cancel{x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{\cancel{x}}{n\cancel{x}} = \frac{1}{n}$$

Für grosse Zahlen ist es gut konditioniert

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = \ldots$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$

b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

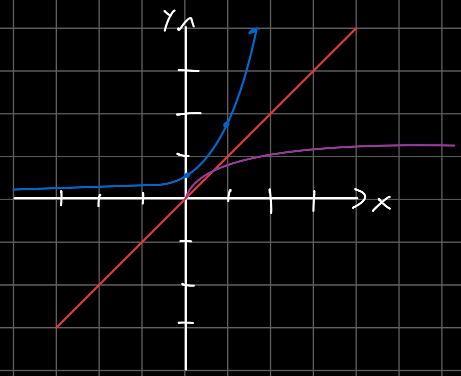
Vorbereitung

$y_1 = 2x - 1$ //Linear

$y_2 = 0.5 \cdot 3^x$ //Exponentialfunktion

$y_3 = 0.5\,x^{0.5}$ //Potenzfunktion

Normaler Plot $\hat{=}$ x-y-Plot

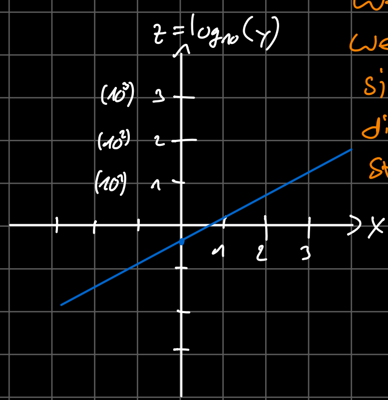


Halblogarithmischer Plot $\hat{=}$ x-$\log_{10}(y)$-Plot

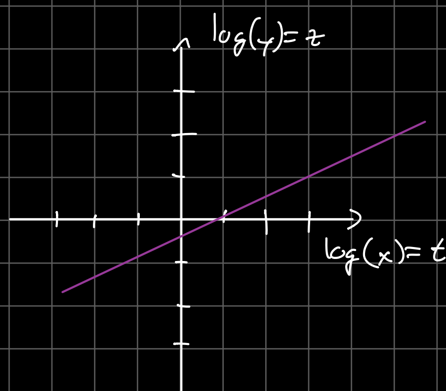
$y_{22} = 0.5\, 3^x \quad \| \log_{10}$

$\log_{10}(y_{22}) = \log_{10}(0.5) + x \cdot \log_{10}(3)$

$z = -0.30103 + 0.477121 \cdot x$



Wenn y-Werte weit auseinander sind, z.B. in der die Distanz von Sternen (Astronomie) oder PH-Werte in der Chemie



Doppellogarithmischer Plot

$y = 0.5\,x^{0.5} \quad \| \log_{10}$

$\log_{10}(y) = \log_{10}(0.5) + 0.5\, \underbrace{\log_{10}(x)}_{t}$

$= -0.30103 + 0.5t$

a) (i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = 5 \cdot (2x^4)^{-\frac{1}{3}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2\mathrm{e})^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$