SW13: Aufg. 1 & 2

SW14: Aufg. 3-5

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Spektrum und daraus die Determinante und Spur der folgenden Matrizen

die EW

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

a ist Parameter

Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3 Matrix $\boldsymbol{B}$ berechnet sich z.B. als

EW sind Terme mit a

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ &= b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) \end{aligned}$$

a) $\det(A) - \lambda I = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \quad \lambda_2 = \quad \lambda_3 =$

Entwicklung nach 1. Zeile

"Ablesen"

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 =$

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =$

a) Untere 3-ecks-Matrix $\Rightarrow$ Werte direkt ablesen:

$\lambda_1 = 1 \qquad \sigma(A) = \{1, 3, 2\}$

$\lambda_2 = 3 \qquad \det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$

$\lambda_3 = 2 \qquad tr(A) = 1 + 3 + 2 = 6$

$$\text{b)}\quad \det(A-\lambda I) = (a-\lambda)\cdot(\ldots) - 1\,\underbrace{(\ldots)}_{a-\lambda}$$

Entwicklung nach 1. Zeile

Ausklammern

$$= (a-\lambda)\cdot\underbrace{(\ldots\ldots)}_{\text{Polynom 2. Grades}} = 0$$

$$\lambda_1 = a, \qquad \lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{5}$$

$$\text{b)}\quad \det(A-\lambda E) = \left|\begin{matrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{matrix}\right| = 0$$

$$\begin{array}{ccc|cc} a-\lambda & 1 & 0 & a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda & 2 & 1 & a-\lambda \\ 0 & 2 & a-\lambda & 0 & 2 \end{array}$$

$$(a-\lambda)^3 + \underbrace{1\cdot 2\cdot 0}_{0} + \underbrace{0\cdot 1\cdot 2}_{0} - \underbrace{(a-\lambda)\cdot 0\cdot 0}_{0} - 2\cdot 2\,(a-\lambda) - (a-\lambda)\cdot 1\cdot 1$$

$$(a-\lambda)^3 - 4(a-\lambda) - (a-\lambda) = (a-\lambda)^3 - 5(a-\lambda) = 0$$

$$(a-\lambda)\left((a-\lambda)^2 - 5\right) = 0$$

① $a - \lambda = 0$

$a = \lambda_1$

② $(a-\lambda)^2 - 5 = 0 \quad | +5, \sqrt{\ }$

$a - \lambda = \sqrt{5} \quad || -a, \cdot(-1)$

$\lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{5}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{EW} \\ a = \lambda_1 \\ \lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{5} \end{array}}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = a\underbrace{(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}_{\text{3. Binom}} = a(a^2-5)$$

$$t(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a + a \cancel{+\sqrt{5}} + a \cancel{-\sqrt{5}} = 3a$$

Aufgabe 2 (vgl. Bsp. 4.22 & Aufg. 4.12): $(A-\lambda I)\cdot z=0$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, die Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix

$\det(A-\lambda I)=0$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

↳ vgl. Vorlesung SW13

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

① $\lambda_1 = +i \;,\; \lambda_2 = -i$

② $z_1 = \begin{bmatrix} (-2-i)t \\ t \end{bmatrix},\; z_2 = \begin{bmatrix} (-2+i)t \\ t \end{bmatrix}$

③ $\{ z \mid z = \ldots \}$

Bemerkung: Aufgabe 1a), 1b), 2a) haben die EW algebr Vielfachheit 1 und geometr. Vielfachheit 1

a) $\det(A-\lambda E)\; \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5\cdot(-1)$

$$= -\underbrace{(2-\lambda)(2+\lambda)}_{3.\text{ Binom}} + 5 = -(4+\lambda^2)+5 = 1+\lambda^2 = 0$$

$\lambda^2 = -1 \quad ||\sqrt{}$

$\lambda = \sqrt{-1}$

$\lambda_{1/2} = \pm i \implies EW$

Aufgabe 3[1]:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 9 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix diagonalisierbar ist mit

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -7 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

[1] aus [12]

Nachrechnen, dass $T^{-1}AT \stackrel{!}{=}$ Diagonalmatrix ergibt

Satz 4.10 im Skript

b) Verwenden Sie die Diagonalisierbarkeit, um die $\underset{D}{\text{Eigenwerte}}$ und $\underset{T}{\text{Eigenvektoren}}$ von $\boldsymbol{A}$ anzugeben.

c) Sind zu einer diagonalisierbaren Matrix $\boldsymbol{A}$ die zugehörigen Matrizen $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

eindeutig bestimmbar? Begründen Sie.

Tipp: Multiplizieren Sie die Spalten von $\boldsymbol{T}$ mit unerschiedlichen Faktoren und berechnen Sie $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{T}}$ erneut.

a) Versuchen mit $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \tilde{T}^{-1}$ mit Python

a) $D = T^{-1}AT \overset{\text{Python}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) EW von $D \;\hat{=}\;$ Diagonalelemente

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

c) Ja, denn sie sind verschieden zueinand

Aufgabe 4: Python

a) Implementieren Sie das $\boldsymbol{QR}$-Verfahren in Python in die Funktion `[Ak,Pk] = Name_S12_Aufg4(A,k)`. Dabei ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{A}_k$ und $\boldsymbol{P}_k$ die Matrizen aus dem $\boldsymbol{QR}$-Verfahren nach der k-ten Iteration gemäss Skript. Verwenden sie für die benötigte $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung die Python Funktion `np.linalg.qr()`. Überprüfen Sie, dass Ihre Funktion das gleiche Resultat ergibt wie in Bsp. 4.24 im Skript für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

allg. Matrix, EW aus nur A_k
P_k keine Bedeutung

b) Wenden Sie Ihre Funktion jetzt auf die symmetrische Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

zusätzlich

an. Überprüfen Sie, dass $\boldsymbol{P}_k$ orthogonal ist. Welches sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$? Schreiben Sie das als Kommentar in Ihr Skript.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat aus b) mit der Python-Funktion `np.linalg.eig()`. Lesen Sie die Eigenschaften dieser Funktion im Numpy-Manual nach. Was ist der Vorteil der Funktion `np.linalg.eig()` im Vergleich zu Ihrer eigenen Funktion? Schreiben Sie Ihren Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 5 (vgl. Bsp. 4.25): Python

Bestimmen Sie mit einem Python-Skript `Name_S12_Aufg5.py` den betragsmässig grössten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Vektoriteration (von-Mises Iteration) und dem Startvektor $\boldsymbol{x} = (1,0,0)^T$. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\|_2 < 1\mathrm{e}-4$. Wie viele Male müssen Sie iterieren? Überprüfen Sie auch hier Ihr Resultat mit `np.linalg.eig()`. Stimmen die Resultate überein?