- Schlussergebnisse in Normalform angeben
- Immer im Bogenmass rechnen!

Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten): Sehr gute Aufgabe! → Repe SEP

Normalform

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = \underbrace{4[\cos(-40^\circ) + i \cdot \sin(-40^\circ)]}_{z_1} + \underbrace{2e^{i\,30^\circ}}_{z_2} \underbrace{- 3 + 1.5i}_{z_3}$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

Exponentialform Trigoform

$$z_1 = \underbrace{\frac{2+i}{1-2i}}_{i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

den folgenden Ausdruck

$$z = \frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2} = \dots = \underline{4}$$

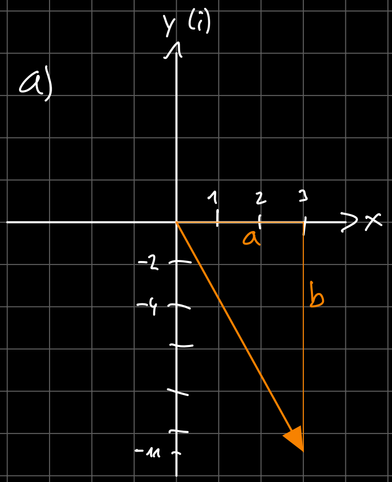
Wahlweise in Normal- oder Exponentialform

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}i)^3$$
$$= (1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$$

unter Verwendung der Exponentialform.

a)



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{3^2 + 11^2}$

$= \sqrt{9 + 121}$

$= \sqrt{130}$

$= \underline{\underline{11.4018}}$

$\tan(\alpha) = \frac{Gk}{Ak}$

$\tan(\alpha) = \frac{11}{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11}{3}\right)$

$\underline{\underline{\alpha = 74.7449^\circ}}$

?

Wie in Bogenmass rechnen?

$\text{Bogenmass} = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$

$\varphi = 360^\circ - \alpha = 285.255^\circ \mathrel{\hat=} \underline{\underline{4.97864}}$

$z = 3 - 11i = 11.4018 \cdot e^{i\,4.97864}$

$= \underline{\underline{11.4018 \cdot (\cos(4.97864) + i \sin(4.97864))}}$

Hauptwert muss positiv sein!

$z^* = (3 - 11i)^* = 3 + 11i = 11.4018 \cdot e^{i(-4.97864)} = 11.4018 \cdot e^{i(-4.97864 + 2\pi)}$

$= 11.4018 \cdot e^{i\,1.30454} = \underline{\underline{11.4018 \cdot (\cos(1.30454) + i \sin(1.30454))}}$

b) $z = 4[\cos(-40°) + i \cdot \sin(-40°)] + 2e^{i\,30°} - 3 + 1.5i$

$$z^* = 4\cos(-40°) + 4i \cdot \sin(-40°) + 2e^{i30°} - 3 + 1.5i$$

$$= \underline{3.06418} - \underline{i\,2.57115} + \underline{\sqrt{3}} + \underline{i} - \underline{3} + \underline{1.5i}$$

$$= \underline{\underline{1.79623 - 0.07115i}}$$

$\boxed{i^2 = -1}$

c) $$z_1 = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+i-2}{1^2-4i^2} = \frac{5i}{5} = \underline{\underline{i}}$$

$$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{30 \cdot \pi}{180}$

$$z_3 = 4(\cos(30°) \cdot i\sin(30)) = 4 \cdot e^{i30} = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5\,z_2} = \frac{\left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^* \left(4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{0.5 \cdot \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{-3}}\right)} = \frac{e^{i\frac{-\pi}{2}} \cdot 4^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{-3}}}$$

$$4 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 4 \cdot e^{i\left(\frac{-3\pi + \pi + 2\pi}{6}\right)} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{0}{6}} = 4$$

d) $z = 1 - \sqrt{2} \cdot i$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Warum $+2\pi$?

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{1}\right) + 2\pi = -0.955317 + 2\pi = 5.32787$$

$$z \Rightarrow \sqrt{3} \cdot e^{i\,5.32787}$$

$$z^3 = \left(\sqrt{3} \cdot e^{i\,5.32787}\right)^3 = \sqrt{27} \cdot e^{i\,15.9836} = \sqrt{27} \cdot e^{i(15.9836 - 4\pi)}$$

$$= \sqrt{27}\, e^{i\,3.41724} = \underline{\underline{5.19615 \cdot e^{i\,3.41724}}}$$

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten):

Lösen Sie die algebraische Gleichung

$z = x + y \cdot i$

$w = u + v \cdot i$

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

Spezielle Gleichung 4. Grads, sog. Biquadratische Gleichung (Keine Terme in z^3 und z)

mit Hilfe einer geeigneten Substitution und zeichnen Sie die Lösungen in der Gaussschen Zahlenebene ein.

$\to w = z^2$ $\quad w^2 + 4w + 16 = 0 \to$ Quadratische Gleichung für w (Lösen wie in Vorlesung)

$w_{1/2} = -2 \pm \sqrt{12} \cdot i$

$\downarrow$ Rücksubstituieren

$z_{1/2} = \sqrt{w_1}$

$z_{3/4} = \sqrt{w_2}$

$$w = z^2$$

$$w^2 + 4w + 16 = 0$$

$$w_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

$$= \frac{-\cancel{4}^{2} \pm \cancel{4}^{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{i^2}}{\cancel{2}}$$

$$= -2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}\, i$$

Todo

Aufgabe 3 (ca. 45 Minuten): Optional (check Gerüst!)

"Normale" geometrische Objekte wie ein Kreis oder eine Kugel haben ganzzahlige Dimensionen (z.B. hat der Kreis die Dimension 2, die Kugel die Dimension 3). Fraktale Objekte hingegen haben keine ganzzahlige Dimension sondern eben gebrochene (fraktale) Dimensionen und weisen einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit auf. Wie kann man nun solche selbstähnlichen Objekte wie z.B. eine Wolke, die Verästelungen eines Farnes oder eine Küstenlinie mathematisch beschreiben? Hier kommen die komplexen Zahlen ins Spiel und ihre Darstellung in der komplexen Zahlenebene.

Betrachten wir z.B. die einfache Iteration

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Dabei sind z und c komplexe Zahlen. Der komplexen Zahl $c = x + iy$ wird in der komplexen Zahlenebene der Pixel mit den Koordinaten (x, y) zugeordnet. Erreicht nun für den Startwert $z_0 = 0$ die Iteration z_n nach einer gewissen Anzahl Iterationen n eine vorgegebene Abbruchbedingung (z.B. $\mid z_n \mid > 2$), wird dem Pixel (x, y) der Farbwert n zugeordnet, andernfalls erhält er die Farbe 0 (Schwarz). Macht man das nun für alle Punkte (Pixel) der komplexen Zahlenbene, erhält man die sogn. Mandelbrotmenge. Erzeugen Sie diese Menge, indem Sie das auf Moodle verfügbare Gerüst vervollständigen für $x \in [-2, 0.7]$ und $y \in [-1.4, 1.4]$ und plotten Sie diese Menge als Bild. Erzeugen Sie 2-3 zusätzliche Bilder, indem Sie in Details der Mandelbrotmenge an geeigneten Stellen weiter hinein zoomen (d.h. indem sie ein Subintervall für x und y betrachten). Lesen Sie die zusätzlichen Informationen auf https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge nach und betrachten Sie den Film https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Fractal-zoom-1-15-rupture.ogv.