

Aufgabe 1 (45 Minuten):

↳ Dringend empfohlen:

Die Gleichung

$$f(x) = e^{x^2} + x^{-3} - 10 = 0$$

$np.exp(x**2) \rightarrow e^{x^2} + x^{-3} = 10$

$e^{x^2} \neq (e^x)^2 \quad (|x| \neq 2)$
 $e^9 \neq e^6$

besitzt auf dem Intervall $x \in [-3, 3]$ insgesamt 3 Lösungen. Skizzieren Sie die relevante Funktion und bestimmen Sie die Intervalle, die die Nullstellen enthalten. Verwenden Sie anschliessend das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 2$, das vereinfachte Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0.5$ sowie das Sekantenverfahren mit den Startwerten $x_0 = -1.0$ und $x_1 = -1.2$, um die Nullstellen im jeweiligen Intervall zu bestimmen. Geben Sie jeweils 4 Iterationen (d.h. x_1, \dots, x_4) an, gerundet auf 4 Nachkommastellen.

Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e^{x^2} + x^{-3} - 10}{2x e^{x^2} - 3x^{-4}}$$

$$f'(x) = 2x e^{x^2} - 3x^{-4}$$

```
"C:\Users\armandoshala\OneDrive - ZHAW\Share
0 2
1 1.7950407666709511
2 1.625081692781091
3 1.53077012583649
4 1.5086293201623415

Process finished with exit code 0
```

Simp Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} = \frac{e^{x^2} + x^{-3} - 10}{2x e^{x^2} - 3x^{-4}}$$

```
shalaar3_S5_Aufg1 x
"C:\Users\armandoshala\OneDrive - ZHAW\Share
-46.71597458383303

Process finished with exit code 0
```

Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

```
shalaar3_S5_Aufg1 x
"C:\Users\armandoshala\OneDrive - ZHAW\Share
0 -1.8610151161359973
1 -1.34941760464263
2 -1.4326421012234578
3 -1.5593897218430148
4 -1.5208743995983327
5 -1.5262038445789967

Process finished with exit code 0
```

```
S5_A3 x
"C:\Users\armandoshala\OneDrive - ZHAW\Share
-1.5265381657891763

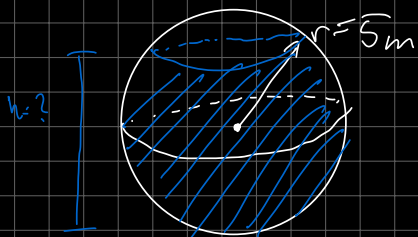
Process finished with exit code 0
```

Aufgabe 2 (45 Minuten):

↳ Eher zur Sicherheit

Auf einem Stahlgerüst steht ein kugelförmiger Wassertank mit einem Innendurchmesser von $d = 10$ m. Aus statischen Gründen dürfen höchstens 471 m^3 Wasser eingefüllt werden. Berechnen Sie, bis zu welcher Höhe h über dem Tankgrund das Wasser also höchstens stehen darf. Allfällige Nullstellen bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-3} genau und dem Startwert $h_0 = 9$ m.

Tipp: Sie benötigen aus dem Formelbuch eine Formel für den Anteil des Kugelvolumens, welches mit Wasser gefüllt ist.



$$\text{Kugelvolumen} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = 523.6 \text{ m}^3$$

$$\text{Wasservolumen} = \frac{\pi \cdot d^2}{6} (3d - 2h)$$

471 10

$$V_w = \frac{\pi h^2}{6} (3d - 2h)$$

$$f(h) := \frac{\pi h^2}{6} (3d - 2h) - V_w$$

$$= \frac{12\pi d h^2}{2 \cdot 6} - \frac{12\pi h^3}{3 \cdot 6} - V_w$$

$$= \frac{\pi d h^2}{2} - \frac{\pi h^3}{3} - V_w \quad // d=10$$

$$= \frac{-\pi h^3}{3} + 5\pi h^2 - V_w$$

$$f'(h) = -\pi h^2 + 10\pi h$$

Gleichung für h

↳ Auf NS Form bringen

↳ Newton

$$\text{Abbruchkriterium } f(x_n - \epsilon_0) \cdot f(x_n + \epsilon_0) < 0$$

↳ ca. 10 Zeilen

Aufgabe 3 (45 Min.):

Implementieren Sie das Sekanten-Verfahren als `Name_S5_Aufg3(f, x0, x1, tol)` in Python. Übergeben werden die Funktion `f`, die Startwerte `x0` und `x1` sowie die gewünschte Genauigkeit `tol` Ihres Resultats. Ausgabe ist die Nullstelle `y`. Wo würden Sie beim Versuch, das Newton-Verfahren zu implementieren, momentan noch auf Schwierigkeiten stossen? Fügen Sie Ihre Antwort als Kommentar ein. Verifizieren Sie für sich, ob Ihnen Ihre Funktion die selben Nullstellen liefert, die Sie für die Aufgaben 1 und 2 berechnet haben.

```
def sekantenVerfahren(currValue, prevValue, times):
    loopVar = 0
    # Sekantenverfahren mit den Startwerten x0 = -1.0 und x1 = -1.2

    while loopVar <= times:
        nextValue = currValue - ((currValue - prevValue) / (f1(currValue) - f1(prevValue))) * f1(currValue)
        print(loopVar, nextValue)
        prevValue = currValue
        currValue = nextValue
        loopVar = loopVar + 1
```