Aufgabe 1 (45 Minuten):

Das Polynom vierten Grades

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, die erste $\bar{x}_1$ im Intervall $[-1, 0]$ und die zweite $\bar{x}_2$ im Intervall $[0, 1]$.

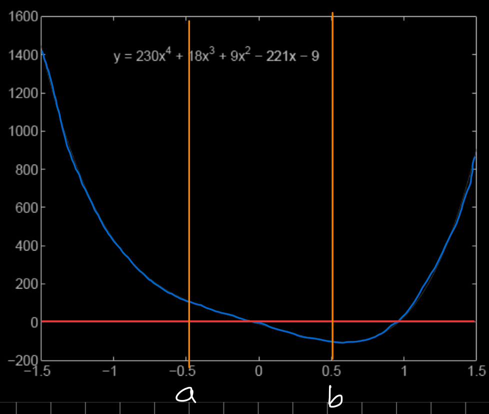
a) Versuchen Sie, diese Nullstellen mit einer Fixpunktiteration $x_{n+1} \equiv F(x_n)$ bis auf 10^{-6} genau zu bestimmen. Stellen Sie dafür die entsprechende Fixpunktgleichung $F(x) = x$ auf und wählen Sie geeignete Startwerte gemäss der Abbildung. Was stellen Sie bzgl. der Nullstelle in $[0, 1]$ fest? Weshalb? $\Rightarrow$ $F(x)$ für $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = 1$

Steigung < 1

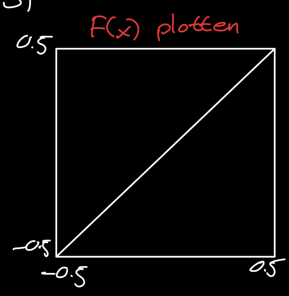
b) $F(x)$ erreicht auf dem Intervall $[\overset{a}{-0.5}, \overset{b}{0.5}]$ sein Minimum für $x = 0$ und sein Maximum für $x = 0.5$. $|F'(x)|$ wird maximal für $x = 0.5$. Zeigen Sie, dass für den ersten Fixpunkt $\bar{x}_1$ auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie α. $\alpha = \max F'(x)$ für $-0.5 \leq x \leq 0.5$

$\hookrightarrow$ Steigung > 1

c) Wie häufig müssten Sie gemäss der a-priori Fehlerabschätzung iterieren, damit der absolute Fehler für $\bar{x}_1$ kleiner als 10^{-9} wird? Entspricht das der Realität?



b)



a) $F(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9 = 0 \quad || + 221x$

$$230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9 = 221x \quad || : 221$$

$$\underbrace{\frac{230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9}{221}}_{F(x)} = x$$

$\hookrightarrow \bar{x}_1$: berechenbar

$\hookrightarrow \bar{x}_2$: nicht berechenbar

$F(0)$ konvergiert gegen -0.040659288 $\Rightarrow$ Anziehende NS

$F(1)$ divergiert $\Rightarrow$ Abstossende NS

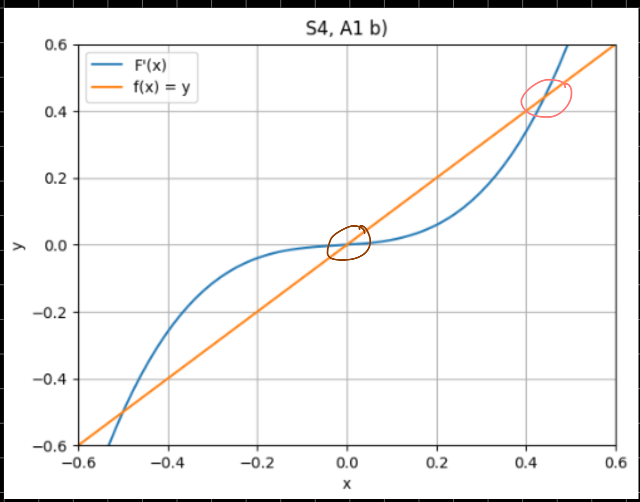
$$(F(x))' = \frac{920x^3 + 54x^2 + 18x}{221}$$

Setzt man $x > 1$ ein, divergiert die Funktion. Für $x < 1$ werden die Werte gegen 0 gezwungen

```
current_step x
0 0
1 -0.04072398190045249
2 -0.0406590819335246
3 -0.04065928897359839
4 -0.040659288313662
5 -0.04065928831576555
=====
current_step x
0 1
1 1.1221719457013575
2 1.775993137266157
3 10.897798918469885
4 14789.015074413734
5 4.978458223118192e+16
=====
```

b) $F(x)$ ist in $[-0.5 / 0.5]$ minimal für $x = 0$ und maximal für $x = 0.5$

```
F(0) -0.04072398190045249
F(0.5) 0.04468325791855204
F'(0.5) 0.6221719457013575
```



Somit gilt:

$\alpha = F'(0.5) = 0.62217...$

c) A-priori:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0| = \frac{0.62217^n}{0.3778} |-0.0407| \leq 10^{-9}$$

$$0.62217^n \leq \frac{0.3778 \cdot 10^{-9}}{0.0407} = 9.2826 \cdot 10^{-9} \quad \| \log$$

$$n \geq \frac{\ln(9.2826 \cdot 10^{-9})}{\ln(0.62217)} = 38.9$$

Wir müssten 39 Iterationen machen, aber dies ist zu viel!

Aufgabe 2 (45 Minuten): Vorerst lassen, bei Zeiten machen

Grippeausbreitung im Kindergarten[1]:

Wir bezeichnen mit t_i eine diskrete Folge von Zeitpunkten, mit k_i die relative Anzahl von zum Zeitpunkt t_i erkrankten Kindern, und mit $\alpha > 1$ die Infektionsrate. Es werden nun umso mehr neue Kinder erkranken, je mehr gesunde und je mehr kranke Kinder es gibt, denn eine Virusübertragung kann nur bei einer Begegnung zwischen

[1] Aus 'Numerik für Informatiker', T. Huckle, S. Schneider, Springer Verlag, 2002

einem gesunden und einem kranken Kind stattfinden. Weiter gehen wir vereinfachend davon aus, dass nach einem Zeitschritt die kranken Kinder wieder gesund sind, aber sich im Folgenden wieder neu anstecken können. Daher ist die Anzahl k_{i+1} der zum Zeitpunkt t_{i+1} Erkrankten direkt proportional der Anzahl Gesunder und der Anzahl Kranker zum Zeitpunkt t_i. Damit erhalten wir folgende Modellbeziehung für die Ausbreitung der Krankheit:

$$k_{i+1} = \alpha k_i(1 - k_i)$$

Offensichtlich handelt es sich hier um eine Fixpunktiteration. Schreiben Sie ein Python-Skript *Name_S4_Aufg2*.py, welches Ihnen die folgenden Fragen beantwortet und formulieren Sie Ihre Antworten als Kommentare im Skript:

a) Nehmen wir an, wir haben einen Startwert $k_0 = 0.1$ (d.h. 10% der Kinder sind zu diesem Zeitpunkt erkrankt). Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Fixpunktiteration für verschiedene Infektionsraten α, d.h. untersuchen Sie durch Ausprobieren, für welche Werte von $\alpha \in [0, 4]$ ein anziehender Fixpunkt vorliegt und für welche nicht.

b) Was hat ein Fixpunkt hier für eine konkrete Bedeutung?

c) Versuchen Sie, eine Beziehung zwischen α und dem Fixpunkt herzustellen, d.h. können Sie allein aus Kenntnis von α den Fixpunkt angeben (ohne eine Iteration durchführen zu müssen)? Tipp: lösen Sie die Fixpunktgleichung nach α auf.

Aufgabe 3 (45 Min.): Empfehlenswert, aber anspruchsvoll

Ein liegender zylindrischer Behälter mit Radius r, Länge l und einem Volumen von $V_Z = 2000$ Liter ist zu drei Viertel mit Heizöl gefüllt. Berechnen Sie die Füllhöhe h des Behälters. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Bestimmen Sie dafür zuerst den Winkel φ unter Benutzung der Fläche des Kreissegments $\frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)$ und beweisen Sie, dass $\sin\varphi - \varphi = -0.5\pi$ gilt.

Tipp: Setzen Sie dafür den Teil der Kreisfläche, der nicht 'gefüllt' ist, mit dem entsprechenden Kreissegment gleich.

b) Finden Sie durch grafische Überlegungen einen geeigneten Startwert für die Iteration von $\sin\varphi - \varphi = -0.5\pi$ (machen Sie eine Skizze!) und bestimmen Sie φ mit einer Fixpunktiteration auf 10^{-3} genau.

c) Drücken Sie die Füllhöhe h in Abhängigkeit von φ aus.

Hinweis: Da Radius r und Länge l des Zylinders (zahlenmässig) nicht bekannt sind, wird die gesuchte Füllhöhe h noch von r abhängen.

Bild B-37 zeigt den liegenden Zylinderkessel mitsamt der kreisförmigen Querschnittsfläche.

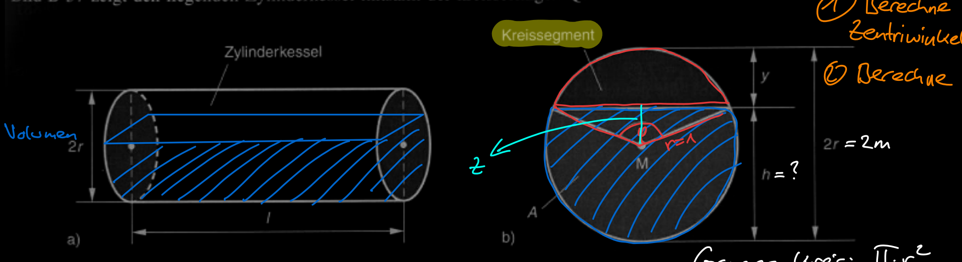


Bild B-37 a) Zylinderkessel
b) Querschnitt des Kessels

① Berechne Zentriwinkel φ
② Berechne h

Ganzer Kreis: $\pi \cdot r^2$
Kreissegment: $\frac{1}{4}\pi r^2$

a) $A_C = \pi r^2$ $\qquad r = 1$

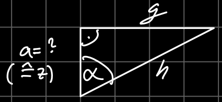
$$A_{CS} = \frac{1}{2}\cancel{r^2}(\varphi - \sin(\varphi)) = \frac{1}{4}\pi\cancel{r^2} \quad || \cdot 2$$

$$\varphi - \sin(\varphi) = \frac{1}{2}\pi \quad || + \sin(\varphi)$$

$$\boxed{F(x) \hat{=} \varphi = \frac{1}{2}\pi + \sin(\varphi)}$$

$$\varphi \hat{=} 120°$$

Todo: Frag FPG von $F(\frac{2\pi}{3})$



$\alpha = \frac{\varphi}{2}$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$

$a = \cos(\alpha)\, h$

$z = 0.999187$

$h = r + z = 1.999$

$z(r) = \cos(\alpha) r$

$h(r) = r + \cos(\alpha) r$

$= r(1 + \cos(\alpha))$

① $\frac{1}{2} \cdot r^2(\varphi - SIN(\varphi)) = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 \quad || \cdot 2$

$$\varphi - SIN(\varphi) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + SIN(\varphi)$$ // Fixpunktform

$$\varphi_0 = 120° \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$$ // Wir benötigen Bogenmass

② $h = r(1 + \cos(\frac{\varphi}{2}))$