Ax

Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten): Wichtig

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie manuell die QR–Zerlegung der Matrix A unter Angabe der wichtigsten Zwischenschritte (dabei auftretende Matrix-Multiplikationen etc. führen Sie aber natürlich mit Python durch)

b) Benutzen Sie die Matrizen Q und R, um die Lösung x zu berechnen.

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b,\ x = ? \\ \text{Via } A = QR \end{array}\right\}$$

$$v_1 = a_1 + \operatorname{sign}(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2+(-5)^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.47225 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0.769 \\ -0.5936 \\ 0.2374 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I_1 - 2u_1 u_1^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.769 \\ -0.5936 \\ 0.2374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.769 & -0.5936 & 0.2374 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1826 & 0.9129 & -0.3651 \\ 0.9129 & 0.2953 & 0.2819 \\ -0.3651 & 0.2819 & 0.8873 \end{pmatrix}$$

$$= Q_1$$

$$A_2 = Q_1 A = \begin{pmatrix} -0.9263 & 3.8795 \\ 0.9705 & 1.8482 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} -0.9263 \\ 0.9705 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \tilde{a}_1 + \operatorname{sign}(\tilde{a}_{11}) \cdot |\tilde{a}_1| \cdot \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -2.2680 \\ 0.9705 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{|v_2|} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -0.9194 \\ 0.3934 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I_n - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -0.6904 & 0.7233 \\ 0.7233 & 0.6904 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6904 & 0.7233 \\ 0 & 0.7233 & 0.6904 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1^T Q_2^T = \begin{pmatrix} -0.1826 & -0.8944 & 0.4082 \\ 0.9129 & 0 & 0.4082 \\ -0.3651 & 0.4472 & 0.8165 \end{pmatrix}$$

$$R = Q_1 \cdot Q_2 \cdot A = \begin{pmatrix} -0.1826 & 4.3818 & -0.7303 \\ 0 & 1.3416 & -1.3146 \\ 0 & 0 & 4.0824 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.1826 & 0.9129 & -0.3651 \\ -0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0.4082 & 0.4082 & 0.8165 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.2075 \\ 1.3416 \\ 8.165 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (ca. 45 Minuten):

$H = I - 2uu^T$

Implementieren Sie die $\boldsymbol{QR}$–Zerlegung in Python gemäss dem $\boldsymbol{QR}$–Algorithmus im Skript (siehe Kap. 4.5.2) und machen Sie einen Laufzeitvergleich Ihrer Implementierung mit der in Python verfügbaren Funktion *numpy.linalg.qr()*. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Vervollständigen Sie die Funktion *Serie8_Aufg2_Gerüst.py* (auf Moodle im gleichen Verzeichnis wie die Serie verfügbar) und speichern Sie sie unter *Name_S8_Aufg2.py*. Ersetzen Sie dafür alle Teile gekennzeichnet mit '???' im Gerüst durch Ihren eigenen Code.

→ np.linalg.solve(R, $Q^T \cdot b$)

b) Erweitern Sie die Funktion durch Befehle, die Ihnen zur Kontrolle die Lösung aus der Aufgabe 1 berechnet.

c) Vergleichen Sie die Laufzeit Ihrer Funktion mit *numpy.linalg.qr()*, indem Sie die Laufzeit der $\boldsymbol{QR}$–Zerlegung der Matrix $\boldsymbol{A}$ aus Aufgabe 1 für Ihrer Funktion und für *numpy.linalg.qr()* messen, z.B. mit

- import timeit

  t1=timeit.repeat("Name_S8_Aufg2(A)", "from __main__ import Name_S8_Aufg2, A", number=100)

  t2=timeit.repeat("np.linalg.qr(A)", "from __main__ import np, A", number=100)

  avg_t1 = np.average(t1)/100

  avg_t2 = np.average(t2)/100

d) Vergleichen Sie die Laufzeit nochmals, nun aber für eine künstlich erzeugte 100 x 100 Matrix (deren Einträge gemäss einer Gauss-Verteilung zufällig zwischen [0,1] liegen), welche mit dem folgenden Befehl erzeugt werden kann:

- Test = np.random.rand(100,100)

Was stellen Sie fest? Schreiben Sie Ihren Kommentar in Ihre Funktion.

Aufgabe 3 (ca. 45 Minuten):

Betrachten Sie nochmals die Aufgabenstellung aus Serie 7, Aufgabe 1, und beantworten Sie anhand einer manuellen Rechnung die folgenden Fragen:

a) Bei der Neuschätzung unter 1c) der Serie 7 beträgt der absolute Fehler für jede Bevölkerungsgruppe maximal 0.1 Mio. Was ist also der maximale absolute und relative Fehler der Lösung von 1c) der Serie 7? Was schliessen Sie daraus bzgl. der Konditionierung des Problems? Bemerkung: die benötigte Inverse A^{-1} können Sie (ausnahmsweise) mit Python berechnen.

b) Bei einer Qualitätskontrolle der gelieferten Produktionseinheiten realisiert man, dass auch die Angaben der Hersteller bzgl. der Anzahl der Impfdosen pro Altersgruppe um maximal 100 Stück abweichen kann (also kann eine Produktionseinheit vom Hersteller A z.B. die folgende Anzahl Impfdosen enthalten: 20'100 E, 10'010 T, 1916 K). Berechnen Sie damit den relativen Fehler der Lösung 1c) der Serie 7 erneut.

c) Nehmen wir den Fall an, dass alles schief läuft, d.h. die tatsächlichen Bevölkerungszahlen sind für jede Altersgruppe tatsächlich 0.1 Mio grösser, als in 1c) von Serie 7 ursprünglich angenommen, und die Hersteller liefern konsequent 100 Impfdosen pro Altersgruppe weniger, als ursprünglich angegeben. Stellen Sie dieses neue, 'gestörte' Gleichungsystem auf und lösen Sie es mit Python. Vergleichen Sie anschliessend die Lösung des gestörten Gleichungssystems mit der exakten Lösung des Gleichungssystems von 1c) der Serie 7 und berechnen Sie den tatsächlichen relativen Fehler. Was stellen Sie im Vergleich zu Ihrer Abschätzung aus der obigen Aufgabe b) fest?

a) $20'000\, x_1 + 30'000 \cdot x_2 + 10'000\, x_3 = 5.2 \cdot 10^6 \pm 0.1 \cdot 10^6$

$\vdots$

b) Auch Störung der linken Seite

Verwende bei a) und b) ∞-Norm

a) Aus S7, 1c)

$$Ax=b, \quad A=\begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 60 \qquad \|A-\tilde{A}\|_\infty = \frac{3\cdot \cancel{100}}{10\cancel{00}} = 0.3$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1.4$$

$$\|b-\tilde{b}\|_\infty \leq 100 \qquad \frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 0.005$$

Abs. Fehler $= \|x-\tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b-\tilde{b}\|_\infty$

$$\leq 1.4 \quad 100$$

$$\leq 140$$

Rel. Fehler $= \dfrac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \underbrace{\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty}_{\mathrm{Cond}(A)_\infty = 84} \cdot \dfrac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\underbrace{\|b\|_\infty}_{5720}}$

$$\leq 84 \cdot \frac{100}{5720} = 1.4685$$

$$\leq 146.85\,\%$$

$\Leftrightarrow$ schlecht konditioniert

b) $$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\mathrm{Cond}(A)}{1-\mathrm{Cond}(A)\,\dfrac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \left(\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$$

$$\leq \frac{84}{1-0.42} \cdot (0.005 + 0.0175) = 3.2586$$

$$\leq 325.86\,\%$$

c) $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 19.9 & 29.9 & 9.9 \\ 9.9 & 16.9 & 5.9 \\ 1.9 & 2.9 & 1.9 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.3830 \\ 58.766 \\ 395.5532 \end{pmatrix}$$

St. A1c: $x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix}$, $\|x\|_\infty = 264$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = 131.5532$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.4983 = 49.83\%$$

für werde

$Ax = b$, ...

de