

Aufgabe 1 (ca. 30 Min.):

Eine Flugzeug-Chartergesellschaft besitzt drei Flugzeugtypen mit der folgenden Anzahl von First-Class (FC), Business-Class (BC) und Economy-Class (EC) Sitzen:

- Flugzeugtyp A: 20 FC, 50 BC, 200 EC
- Flugzeugtyp B: 10 FC, 30 BC, 150 EC
- Flugzeugtyp C: 0 FC, 20 BC, 100 EC

a) An ein Ferienziel müssen nun über einen gewissen Zeitraum 2770 Passagiere befördert werden, davon 2150 in der EC, 470 in der BC und 150 in der FC. Wieviele Flüge mit den verschiedenen Typen werden benötigt, wenn jedes Flugzeug voll ausgelastet fliegen soll? Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie manuell die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.

b) Ein Jahr später sollen 2070 Passagiere mit den gleichen Flugzeugtypen befördert werden, davon 1600 in der EC, 350 in der BC und 120 in der FC. Berechnen Sie für die neuen Passagierzahlen nochmals die Anzahl benötigter Flugzeuge für jeden Typ.

x_1 = Anzahl Flüge Typ A

x_2 = Anzahl Flüge Typ B

x_3 = Anzahl Flüge Typ C

	Flotte	Passagierzahlen
Sitze für EC-Passagiere	$x_1 \cdot 200 + x_2 \cdot 150 + x_3 \cdot 100$	$= 2150$
Sitze für BC-Passagiere	$x_1 \cdot 50 + x_2 \cdot 30 + x_3 \cdot 20$	$= 470$
Sitze für FC-Passagiere	$x_1 \cdot 20 + x_2 \cdot 10 + x_3 \cdot 0$	$= 150$

Lösen von Hand mit Gauss gem. Script S. 45 (ohne Spaltenpivotisierung)

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 2150 \\ 50 & 30 & 20 & 470 \\ 20 & 10 & 0 & 150 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_2 - \frac{1}{4} z_1 \\ z_3 - \frac{1}{10} z_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 2150 \\ 0 & -7.5 & -5 & -67.5 \\ 0 & -5 & -10 & -65 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_3 - \frac{2}{3} z_2 \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 2150 \\ 0 & -7.5 & -5 & -67.5 \\ 0 & 0 & -6.6 & -20 \end{array} \right)$$

$\hat{= R}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$200x_1 + 150x_2 + 100x_3 = 2150$$

$$-7.5x_2 - 5x_3 = -67.5$$

$$-6.6x_3 = -20$$

$$x_1 = \frac{2150 - 1050 - 300}{200} = 4$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-67.5 + 15}{-7.5} = 7$$

$$\boxed{x_3 = 3}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Gleiche linke Seite, neue rechte Seite

Nur noch mit Permutationen und Koeffizient arbeiten!

$$b = \begin{pmatrix} 1600 \\ 350 \\ 120 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} z_2 - \frac{1}{4} z_1 \\ z_3 - \frac{1}{10} z_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1600 \\ -50 \\ -40 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 - \frac{2}{3} z_2} \begin{pmatrix} 1600 \\ -50 \\ -6.\bar{6} \end{pmatrix}$$

$$200x_1 + 150x_2 + 100x_3 = 1600$$

$$-7.5x_2 - 5x_3 = -50$$

$$-6.\bar{6}x_3 = -6.\bar{6}$$

$$x_1 = \frac{1600 - 100 - 500}{200} = 3$$

$$x_2 = \frac{-50 + 5}{-7.5} = 6$$

$$x_3 = 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (ca. 90 Min.):

Skript S45

Implementieren Sie für das lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

den Gaußalgorithmus gemäss Vorlesungsskript inklusive der Berechnung der Lösung \vec{x} (durch Rückwärtseinsetzen, p. 46). Zusätzlich soll die Determinante von A sowie die obere Dreiecksmatrix von A ausgegeben werden:

- `[A_triangle, det, x] = Name_S6_Aufg2(A, b)`

$A = \text{np.copy}(A);$
 $B = \text{np.copy}(B);$ } In Funktion nicht mit originalen A/B arbeiten!

$n = \text{np.shape}(A)[0]$ // Zeilen und Kolumnen sind gleich
Eingabe ist regulär! Falls $a_{ii} = 0$ kann man vergessen

- for i in range(0, n)

- Hilfsfunktion für Zeilenaustausch `swap(A, b, i, j)`

- Elimination `subtract(A, b, j, i, c) → $z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \cdot z_i$`

- $Ax = b$ mit transformiertem A und B durch

Rückwärtseinsetzen lösen für x

↳ `reverse_insert(A, b)`

return A, x

In python

`x = np.linalg.solve(A, b)`

np-Matrix A $A[i, j] \rightarrow (i, j)$ -tes Element
 $\parallel A[i] \rightarrow i$ -te Zeile \parallel

Aufgabe 3 (ca. 10 Min.): ✓

Schreiben Sie ein Skript `Name_S6_Aufg3.py`, welches Ihnen unter Verwendung Ihrer Funktion aus Aufgabe 2 die Lösungen für die linearen Gleichungssysteme in Aufgabe 4.3 im Vorlesungsskript löst und überprüfen Sie ihre Resultate für x mit der Python-Funktion `numpy.linalg.solve()`. Gibt es Unterschiede? Schreiben Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript.