# Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники



# Домашнее задание по теории графов №4

Вариант 92

Выполнил:

Степанов Арсений Алексеевич

Группа:

P3109

Преподаватель:

Поляков Владимир Иванович

# Матрица смежности графа

V/V	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$
$e_1$				5				4	1	4		1
$e_2$					4		4		1			
$e_3$				5		4	3	4		3	3	
$e_4$	5		5				1					1
$e_5$		4				4	4					5
$e_6$			4		4		5		3			2
$e_7$		4	3	1	4	5		2			5	
$e_8$	4		4				2				1	
$e_9$	1	1				3				4	4	
$e_{10}$	4		3						4		5	5
$e_{11}$			3				5	1	4	5		2
$e_{12}$	1			1	5	2				5	2	

# Найти гамильтонов цикл

```
Включаем в S вершину x_1.S = \{x_1\}
```

Возможная вершина: 
$$x_4.S = \{x_1, x_4\}$$

Возможная вершина: 
$$x_3.S = \{x_1, x_4, x_3\}$$

Возможная вершина: 
$$x_6.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6\}$$

Возможная вершина: 
$$x_5.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5\}$$

Возможная вершина: 
$$x_2.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2\}$$

Возможная вершина: 
$$x_7.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7\}$$

Возможная вершина: 
$$x_8.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8\}$$

Возможная вершина: 
$$x_{11}.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}\}$$

Возможная вершина: 
$$x_9.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_9\}$$

Возможная вершина: 
$$x_{10}.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_9, x_{10}\}$$

Возможная вершина: 
$$x_{12}.S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_9, x_{10}, x_{12}\}$$

Гамильтонов цикл найден. 
$$S = \{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_9, x_{10}, x_{12}\}$$

## Матрица смежности с перенумерованными вершинами

V/V	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$
$e_x$		1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$e_x$	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$e_x$		1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
$e_x$		0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$e_x$		0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
$e_x$		0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$e_x$		1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
$e_x$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$e_x$		0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
$e_x$	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
$e_x$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
$e_x$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0

До перенумерации:  $\{x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_9, x_{10}, x_{12}\}$  После перенумерации:  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ 

# Построение графа пересечений G'

Определим  $p_{212}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{212}$ 

Ребро  $(x_2x_{12})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_1x_{10}), (x_1x_{11})$ 

Определим  $p_{311}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{311}$ 

Ребро  $(x_3x_{11})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_1x_{10}), (x_2x_7)$ 

Определим  $p_{39}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{39}$ 

Ребро  $(x_3x_9)$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_2x_7)$ 

Определим  $p_{38}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{38}$ 

Ребро  $(x_3x_8)$  пересекается с  $(x_2x_7)$ 

Определим  $p_{412}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{412}$ 

Ребро  $(x_4x_{12})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_1x_{10}), (x_1x_{11}), (x_2x_7), (x_3x_7), (x_3x_8), (x_3x_9), (x_3x_{11})$ 

Определим  $p_{410}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{410}$ 

Ребро  $(x_4x_{10})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_2x_7), (x_3x_7), (x_3x_8), (x_3x_9)$ 

Определим  $p_{512}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{512}$ 

Ребро  $(x_5x_{12})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_1x_{10}), (x_1x_{11}), (x_2x_7),$ 

 $(x_3x_7), (x_3x_8), (x_3x_9), (x_3x_{11}), (x_4x_7), (x_4x_{10})$ 

Определим  $p_{610}$ , для чего в матрице R выделим подматрицу  $R_{610}$ 

Ребро  $(x_6x_{10})$  пересекается с  $(x_1x_8), (x_2x_7), (x_3x_7), (x_3x_8), (x_3x_9), (x_4x_7), (x_5x_7)$ 

	$p_{1 8}$	$p_{2 12}$	$p_{1 10}$	$p_{1 11}$	$p_{3 11}$	$p_{2 7}$	$p_{3 9}$	$p_{3 8}$	$p_{4 12}$	$p_{3 7}$	$p_{4 10}$	$p_{5 12}$	$p_{4 7}$	$p_{6 10}$	$p_{5 7}$
$p_{1 8}$	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
$p_{2 12}$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_{1 10}$	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$p_{1 11}$	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$p_{3 11}$	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$p_{2 7}$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
$p_{3 9}$	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
$p_{3 8}$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
$p_{4 12}$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$p_{3 7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
$p_{4 10}$	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
$p_{5 12}$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
$p_{4 7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$p_{6 10}$	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
$p_{5 7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Итого 15 пересечений

## Построение семейства $\psi_G$

В 1 строке ищем первый нулевой элемент  $|r_{1|3}|$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3}=r_1 \lor r_3=110010101010101010001001001000=11101010101010101$ 

В строке  $M_{1|3}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{4, 6, 8, 10, 13, 15\}$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|4}=M_{1|3}\lor r_4=11101010101010100\lor 010100001001000=1111101010101010$ 

В строке  $M_{1|3|4}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{6, 8, 10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|6|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{13,15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|6|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|6|10|13|15}$  все 1 Построено  $\psi_1=\{u_{1|8},u_{1|10},u_{1|11},u_{2|7},u_{3|7},u_{4|7},u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|6|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{1|3|4|6|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{1|3|4|6|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|4|8}=M_{1|3|4}\lor r_8=111110101011010\lor 000001011011010=111111111011010$ 

В строке  $M_{1|3|4|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|8|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|8|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|8|10|13|15}1\psi_2=\{u_{1|8},u_{1|10},u_{1|11},u_{3|8},u_{3|7},u_{4|7},u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{1|3|4|8|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{1|3|4|8|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{1|3|4|8|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|4|10}=M_{1|3|4}\lor r_{10}=111110101011010\lor 000000001111010=1111101011111010$ 

В строке  $M_{1|3|4|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 6, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|4|13}=M_{1|3|4}\lor r_{13}=111110101011010\lor 000000000001110=111110101011110$ 

В строке  $M_{1|3|4|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 6, 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|4|15}=M_{1|3|4}\lor r_{15}=111110101011010\lor 000000000000011=111110101011011$ 

В строке  $M_{1|3|4|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|6}=M_{1|3}\lor r_6=1110101010101010\lor 000011111011010=111011111011010$ 

В строке  $M_{1|3|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют ноль на 4 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|8}=M_{1|3} \lor r_8=111010101011010 \lor 000001011011010=111011111011010$ 

В строке  $M_{1|3|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют ноль на 4 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|10}=M_{1|3}\lor r_{10}=111010101011010\lor 000000001111010=1110101011111010$ 

В строке  $M_{1|3|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 4, 6, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|13}=M_{1|3} \lor r_{13}=111010101011010 \lor 0000000000001110=1110101010111110$ 

В строке  $M_{1|3|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 4, 6, 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|3|15}=M_{1|3}\lor r_{15}=111010101011010\lor 000000000000011=11101010101011011$ 

В строке  $M_{1|3|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|4}=r_1\lor r_4=11001010101010101000010010000=1101101010101010$ 

В строке  $M_{1|4}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{6, 8, 10, 13, 15\}$ 

Строки 6, 8, 10, 13, 15 не закроют ноль на 3 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|6}=r_1 \lor r_6=110010101010101010\lor 000011111011010=110011111011010$ 

В строке  $M_{1|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 3, 4

В строке  $M_{1|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{10,13,15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 3, 4

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|10}=r_1\lor r_{10}=110010101010101010\lor 000000001111010=11001010101111010$ 

В строке  $M_{1|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 3, 4, 6, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|13}=r_1\lor r_{13}=110010101010101010\lor 000000000001110=11001010101011110$ 

В строке  $M_{1|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 3, 4, 6, 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{1|15}=r_1\lor r_{15}=110010101010101010\lor 000000000000011=11001010101011011$ 

В строке  $M_{1|15}$  остались незакрытые 0

Во 2 строке ищем первый нулевой элемент |  $r_{2|5}$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5}=r_2 \lor r_5=111100000000000\lor 101011001001000=111111001001000$ 

В строке  $M_{2|5}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{2|5|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{2|5|7|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{2|5|7|8|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{13,15\}$ 

В строке  $M_{2|5|7|8|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{2|5|7|8|10|13|15}1\psi_3 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

000000000000011 = 1111111111111111111

В строке  $M_{2|5|7|8|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|5|7|8|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{2|5|7|8|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|5|7|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют ноль на 8 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|7|13}=M_{2|5|7}\lor r_{13}=111111101011010\lor 000000000001110=111111101011110$ 

В строке  $M_{2|5|7|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|7|15}=M_{2|5|7}\lor r_{15}=111111101011010\lor 000000000000011=111111101011011$ 

В строке  $M_{2|5|7|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|8}=M_{2|5} \lor r_8=111111001001000 \lor 000001011011010=111111011011010$ 

В строке  $M_{2|5|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют ноль на 7 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|10}=M_{2|5} \lor r_{10}=111111001001000 \lor 000000001111010=111111001111010$ 

В строке  $M_{2|5|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 7, 8

В строке  $M_{2|5|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{2|5|11|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

0000000000000011 = 1111111111111111

B строке  $M_{2|5|11|13|15}1\psi_4 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

B строке  $M_{2|5|11|14}1\psi_5 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\}$ 

В строке  $M_{2|5|11|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|13}=M_{2|5} \lor r_{13}=111111001001000 \lor 000000000001110=111111001001110$ 

В строке  $M_{2|5|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 7, 8, 10, 11

В строке  $M_{2|5|14}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|5|15}=M_{2|5} \lor r_{15}=111111001001000 \lor 000000000000011=111111001001011$ 

В строке  $M_{2|5|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{2|6|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

В строке  $M_{2|6|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{2|6|10|13|15}1\psi_6 = \{u_{2|12}, u_{2|7}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{2|6|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|6|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{2|6|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

Строки 8, 10, 13, 15 не закроют ноль на 5 позиции

В строке  $M_{2|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 5, 7

В строке  $M_{2|9}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{2|9|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{2|9|11|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{2|9|11|13|15}1\psi_7 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{2|9|11|14}1\psi_8 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{4|10}, u_{6|10}\}$ 

В строке  $M_{2|9|11|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|9|12}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{14, 15\}$ 

В строке  $M_{2|9|12|14}1\psi_9 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{5|12}, u_{6|10}\}$ 

B строке  $M_{2|9|12|15}1\psi_{10} = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{5|12}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{2|9|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 11 позиции

В строке  $M_{2|9|14}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|9|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|10}=r_2 \lor r_{10}=11110000000000000000000001111010=111100001111010$ 

В строке  $M_{2|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 5, 6, 7, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|11}=r_2 \lor r_{11}=1111000000000000\lor 100001110111000=11110111001$ 

В строке  $M_{2|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

Строки 13, 14, 15 не закроют нули на позициях 5, 9

В строке  $M_{2|12}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{14, 15\}$ 

Строки 14, 15 не закроют ноль на 9 позиции

В строке  $M_{2|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Записываем дизъюнкцию  $M_{2|14}=r_2 \lor r_{14}=1111000000000000\lor 100001110100111=111101110100111$ 

В строке  $M_{2|14}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{2|15}$  остались незакрытые 0

В 3 строке ищем первый нулевой элемент |  $r_{3|4}$ 

В строке  $M_{3|4}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{6,7,8,10,11,13,14,15\}$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|6}=M_{3|4}\lor r_6=011110001001000\lor 000011111011010=0111111111011010$ 

В строке  $M_{3|4|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют ноль на 1 позиции

В строке  $M_{3|4|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|7|8}=M_{3|4|7}\lor r_8=111111101011010\lor 000001011011010=11111111101010$ 

В строке  $M_{3|4|7|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{3|4|7|8|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

В строке  $M_{3|4|7|8|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{3|4|7|8|10|13|15}1\psi_{11} = \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{3|4|7|8|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{3|4|7|8|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{3|4|7|8|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{3|4|7|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют ноль на 8 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|7|13}=M_{3|4|7}\lor r_{13}=111111101011010\lor 0000000000001110=111111101011110$ 

В строке  $M_{3|4|7|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|7|15}=M_{3|4|7}\lor r_{15}=111111101011010\lor 0000000000000011=111111101011011$ 

В строке  $M_{3|4|7|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|8}=M_{3|4}\lor r_8=011110001001000\lor 000001011011010=011111011011010$ 

В строке  $M_{3|4|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 7

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|10}=M_{3|4} \lor r_{10}=011110001001000 \lor 000000001111010=011110001111010$ 

В строке  $M_{3|4|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 6, 7, 8

В строке  $M_{3|4|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{3|4|11|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{3|4|11|13|15}1\psi_{12} = \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{3|4|11|14}1\psi_{13}=\{u_{1|10},u_{1|11},u_{4|10},u_{6|10}\}$ 

В строке  $M_{3|4|11|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|13}=M_{3|4}\lor r_{13}=011110001001000\lor 000000000001110=011110001001100$ 

В строке  $M_{3|4|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 1, 6, 7, 8, 10, 11

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|14}=M_{3|4}\lor r_{14}=011110001001000\lor 100001110100111=$ 

В строке  $M_{3|4|14}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|4|15}=M_{3|4}\lor r_{15}=011110001001000\lor 000000000000011=0111100010010111$ 

В строке  $M_{3|4|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|6}=r_3\lor r_6=011010001001000\lor 000011111011010=011011111011010$ 

В строке  $M_{3|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 4

В строке  $M_{3|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

Строки 8, 10, 13, 15 не закроют ноль на 4 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|8}=r_3\lor r_8=011010001001000\lor 000001011011010=011011011011010$ 

В строке  $M_{3|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 4, 7

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|10}=r_3\lor r_{10}=011010001001000\lor 000000001111010=011010001111010$ 

В строке  $M_{3|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 4, 6, 7, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|11}=r_3\lor r_{11}=011010001001000\lor 100001110111000=111011111111000$ 

В строке  $M_{3|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

Строки 13, 14, 15 не закроют ноль на 4 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|13}=r_3\lor r_{13}=011010001001000\lor 000000000001110=011010001001110$ 

В строке  $M_{3|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 1, 4, 6, 7, 8, 10, 11

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|14}=r_3\lor r_{14}=011010001001000\lor 100001110100111=111011111101111$ 

В строке  $M_{3|14}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{3|15}=r_3\lor r_{15}=011010001001000\lor 000000000000011=0110100010010111$ 

В строке  $M_{3|15}$  остались незакрытые 0

В 4 строке ищем первый нулевой элемент  $|r_{4|5}|$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5}=r_4 \lor r_5=010100001001000 \lor 101011001001000=111111001001000$ 

В строке  $M_{4|5}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{4|5|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|7|8}=M_{4|5|7}\lor r_8=111111101011010\lor 000001011011010=111111111011010$ 

В строке  $M_{4|5|7|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

В строке  $M_{4|5|7|8|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{13,15\}$ 

В строке  $M_{4|5|7|8|10|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{4|5|7|8|10|13|15}1\psi_{14} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{4|5|7|8|10|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{4|5|7|8|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет ноль на 10 позиции

В строке  $M_{4|5|7|8|15}$  остались незакрытые 0

В строке  $M_{4|5|7|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют ноль на 8 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|7|13}=M_{4|5|7}\lor r_{13}=111111101011010\lor 000000000001110=111111101011110$ 

В строке  $M_{4|5|7|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список J'=

{15}

Строка 15 не закроет нули на позициях 8, 10

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|7|15}=M_{4|5|7}\lor r_{15}=111111101011010\lor 0000000000000011=111111101011011$ 

В строке  $M_{4|5|7|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|8}=M_{4|5} \lor r_8=111111001001000 \lor 000001011011010=111111011011010$ 

В строке  $M_{4|5|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют ноль на 7 позиции

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|10}=M_{4|5} \lor r_{10}=111111001001000 \lor 000000001111010=111111001111010$ 

В строке  $M_{4|5|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 7, 8

В строке  $M_{4|5|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

В строке  $M_{4|5|11|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

В строке  $M_{4|5|11|13|15}1\psi_{15} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

В строке  $M_{4|5|11|14}1\psi_{16} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\}$ 

В строке  $M_{4|5|11|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|13}=M_{4|5} \lor r_{13}=111111001001000 \lor 000000000001110=111111001001110$ 

В строке  $M_{4|5|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 7, 8, 10, 11

В строке  $M_{4|5|14}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|5|15}=M_{4|5} \lor r_{15}=111111001001000 \lor 000000000000011=111111001001011$ 

В строке  $M_{4|5|15}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|6}=r_4\lor r_6=010100001001000\lor 000011111011010=010111111011010$ 

В строке  $M_{4|6}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 3

В строке  $M_{4|7}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{8, 10, 13, 15\}$ 

Строки 8, 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 3, 5

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|8}=r_4 \lor r_8=010100001001000 \lor 000001011011010=010101011011010$ 

В строке  $M_{4|8}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{10, 13, 15\}$ 

Строки 10, 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 3, 5, 7

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|10}=r_4 \lor r_{10}=010100001001000 \lor 000000001111010=010100001111010$ 

В строке  $M_{4|10}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 15\}$ 

Строки 13, 15 не закроют нули на позициях 1, 3, 5, 6, 7, 8

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|11}=r_4\lor r_{11}=010100001001000\lor 100001110111000=110101111111000$ 

В строке  $M_{4|11}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J' = \{13, 14, 15\}$ 

Строки 13, 14, 15 не закроют нули на позициях 3, 5

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|13}=r_4 \lor r_{13}=010100001001000 \lor 000000000001110=010100001001110$ 

В строке  $M_{4|13}$  находим номера нулевых элементов, составляем список  $J'=\{15\}$ 

Строка 15 не закроет нули на позициях 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|14}=r_4\lor r_{14}=010100001001000\lor 100001110100111=110101111101111$ 

В строке  $M_{4|14}$  остались незакрытые 0

Записываем дизъюнкцию  $M_{4|15}=r_4\lor r_{15}=010100001001000\lor 00000000000011=010100001001011$ 

В строке  $M_{4|15}$  остались незакрытые 0

Из матрицы R(G') видно, что строки с номерами j>4 не смогут закрыть ноль в позиции 2

Семейство максимальных внутрение устойчивых множеств  $\psi_G$  построено. Это:

$$\psi_1 = \{u_{1|8}, u_{1|10}, u_{1|11}, u_{2|7}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$$

 $\psi_2 = \{u_{1|8}, u_{1|10}, u_{1|11}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$ 

```
\begin{split} &\psi_3 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_4 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_5 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\} \\ &\psi_6 = \{u_{2|12}, u_{2|7}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_7 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_8 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{4|10}, u_{6|10}\} \\ &\psi_9 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{5|12}, u_{6|10}\} \\ &\psi_{10} = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{5|12}, u_{5|7}\} \\ &\psi_{11} = \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_{12} = \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_{13} = \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\} \\ &\psi_{14} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_{15} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ &\psi_{16} = \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\} \end{split}
```

## Выделение из G' максимального двудольного подграфа H'

Для каждой пары множеств вычислим значение критерия  $\alpha_{\gamma\beta} = |\psi_{\gamma}| + |\psi_{\beta}| ||\psi_{\gamma} \cap \psi_{\beta}|$ :

$$\begin{split} &\alpha_{12} = |\psi_1| + |\psi_2|||\psi_1 \cap \psi_2| = 7 + 7|6 = 8 \\ &\alpha_{13} = |\psi_1| + |\psi_3|||\psi_1 \cap \psi_3| = 7 + 7|3 = 11 \\ &\alpha_{14} = |\psi_1| + |\psi_4|||\psi_1 \cap \psi_4| = 7 + 5|2 = 10 \\ &\alpha_{15} = |\psi_1| + |\psi_5|||\psi_1 \cap \psi_5| = 7 + 4| = 11 \\ &\alpha_{16} = |\psi_1| + |\psi_6|||\psi_1 \cap \psi_6| = 7 + 5|4 = 8 \\ &\alpha_{17} = |\psi_1| + |\psi_7|||\psi_1 \cap \psi_7| = 7 + 5|2 = 10 \\ &\alpha_{18} = |\psi_1| + |\psi_8|||\psi_1 \cap \psi_8| = 7 + 4| = 11 \\ &\alpha_{19} = |\psi_1| + |\psi_9|||\psi_1 \cap \psi_9| = 7 + 4| = 11 \\ &\alpha_{110} = |\psi_1| + |\psi_{10}|||\psi_1 \cap \psi_{10}| = 7 + 4|1 = 10 \\ &\alpha_{111} = |\psi_1| + |\psi_{11}|||\psi_1 \cap \psi_{11}| = 7 + 7|5 = 9 \\ &\alpha_{112} = |\psi_1| + |\psi_{12}|||\psi_1 \cap \psi_{12}| = 7 + 5|4 = 8 \\ &\alpha_{113} = |\psi_1| + |\psi_{13}|||\psi_1 \cap \psi_{13}| = 7 + 4|2 = 9 \\ &\alpha_{114} = |\psi_1| + |\psi_{14}|||\psi_1 \cap \psi_{14}| = 7 + 7|4 = 10 \\ &\alpha_{115} = |\psi_1| + |\psi_{15}|||\psi_1 \cap \psi_{15}| = 7 + 5|3 = 9 \\ &\alpha_{116} = |\psi_1| + |\psi_{16}|||\psi_1 \cap \psi_{16}| = 7 + 4|1 = 10 \\ &\alpha_{23} = |\psi_2| + |\psi_3|||\psi_2 \cap \psi_3| = 7 + 7|4 = 10 \\ &\alpha_{24} = |\psi_2| + |\psi_4|||\psi_2 \cap \psi_4| = 7 + 5|2 = 10 \\ &\alpha_{25} = |\psi_2| + |\psi_5|||\psi_2 \cap \psi_5| = 7 + 4| = 11 \\ &\alpha_{26} = |\psi_2| + |\psi_6|||\psi_2 \cap \psi_6| = 7 + 5|3 = 9 \\ &\alpha_{27} = |\psi_2| + |\psi_7|||\psi_2 \cap \psi_7| = 7 + 5|2 = 10 \\ &\alpha_{28} = |\psi_2| + |\psi_8|||\psi_2 \cap \psi_8| = 7 + 4| = 11 \end{split}$$

 $\alpha_{29} = |\psi_2| + |\psi_9| ||\psi_2 \cap \psi_9| = 7 + 4| = 11$  $\alpha_{210} = |\psi_2| + |\psi_{10}| ||\psi_2 \cap \psi_{10}| = 7 + 4|1 = 10$  $\alpha_{211} = |\psi_2| + |\psi_{11}| ||\psi_2 \cap \psi_{11}| = 7 + 7|6 = 8$  $\alpha_{212} = |\psi_2| + |\psi_{12}| ||\psi_2 \cap \psi_{12}| = 7 + 5|4 = 8$  $\alpha_{213} = |\psi_2| + |\psi_{13}| ||\psi_2 \cap \psi_{13}| = 7 + 4|2 = 9$  $\alpha_{214} = |\psi_2| + |\psi_{14}| ||\psi_2 \cap \psi_{14}| = 7 + 7|5 = 9$  $\alpha_{215} = |\psi_2| + |\psi_{15}| ||\psi_2 \cap \psi_{15}| = 7 + 5|3 = 9$  $\alpha_{216} = |\psi_2| + |\psi_{16}| ||\psi_2 \cap \psi_{16}| = 7 + 4|1 = 10$  $\alpha_{34} = |\psi_3| + |\psi_4| ||\psi_3 \cap \psi_4| = 7 + 5|4 = 8$  $\alpha_{35} = |\psi_3| + |\psi_5| ||\psi_3 \cap \psi_5| = 7 + 4|2 = 9$  $\alpha_{36} = |\psi_3| + |\psi_6| ||\psi_3 \cap \psi_6| = 7 + 5|4 = 8$  $\alpha_{37} = |\psi_3| + |\psi_7| ||\psi_3 \cap \psi_7| = 7 + 5|3 = 9$  $\alpha_{38} = |\psi_3| + |\psi_8| ||\psi_3 \cap \psi_8| = 7 + 4|1 = 10$  $\alpha_{39} = |\psi_3| + |\psi_9| ||\psi_3 \cap \psi_9| = 7 + 4|1 = 10$  $\alpha_{310} = |\psi_3| + |\psi_{10}| ||\psi_3 \cap \psi_{10}| = 7 + 4|2 = 9$  $\alpha_{311} = |\psi_3| + |\psi_{11}| ||\psi_3 \cap \psi_{11}| = 7 + 7|5 = 9$  $\alpha_{312} = |\psi_3| + |\psi_{12}| ||\psi_3 \cap \psi_{12}| = 7 + 5|2 = 10$  $\alpha_{313} = |\psi_3| + |\psi_{13}| ||\psi_3 \cap \psi_{13}| = 7 + 4| = 11$  $\alpha_{314} = |\psi_3| + |\psi_{14}| ||\psi_3 \cap \psi_{14}| = 7 + 7|6 = 8$  $\alpha_{315} = |\psi_3| + |\psi_{15}| ||\psi_3 \cap \psi_{15}| = 7 + 5|3 = 9$  $\alpha_{316} = |\psi_3| + |\psi_{16}| ||\psi_3 \cap \psi_{16}| = 7 + 4|1 = 10$  $\alpha_{45} = |\psi_4| + |\psi_5| ||\psi_4 \cap \psi_5| = 5 + 4|3 = 6$  $\alpha_{46} = |\psi_4| + |\psi_6| ||\psi_4 \cap \psi_6| = 5 + 5|3 = 7$  $\alpha_{47} = |\psi_4| + |\psi_7| ||\psi_4 \cap \psi_7| = 5 + 5|4 = 6$  $\alpha_{48} = |\psi_4| + |\psi_8| ||\psi_4 \cap \psi_8| = 5 + 4|2 = 7$  $\alpha_{49} = |\psi_4| + |\psi_9| ||\psi_4 \cap \psi_9| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{410} = |\psi_4| + |\psi_{10}| ||\psi_4 \cap \psi_{10}| = 5 + 4|2 = 7$  $\alpha_{411} = |\psi_4| + |\psi_{11}| ||\psi_4 \cap \psi_{11}| = 5 + 7|2 = 10$  $\alpha_{412} = |\psi_4| + |\psi_{12}| ||\psi_4 \cap \psi_{12}| = 5 + 5|3 = 7$  $\alpha_{413} = |\psi_4| + |\psi_{13}| ||\psi_4 \cap \psi_{13}| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{414} = |\psi_4| + |\psi_{14}| ||\psi_4 \cap \psi_{14}| = 5 + 7|3 = 9$  $\alpha_{415} = |\psi_4| + |\psi_{15}| ||\psi_4 \cap \psi_{15}| = 5 + 5|4 = 6$  $\alpha_{416} = |\psi_4| + |\psi_{16}| ||\psi_4 \cap \psi_{16}| = 5 + 4|2 = 7$  $\alpha_{56} = |\psi_5| + |\psi_6| ||\psi_5 \cap \psi_6| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{57} = |\psi_5| + |\psi_7| ||\psi_5 \cap \psi_7| = 4 + 5|2 = 7$  $\alpha_{58} = |\psi_5| + |\psi_8| ||\psi_5 \cap \psi_8| = 4 + 4|3 = 5$  $\alpha_{59} = |\psi_5| + |\psi_9| ||\psi_5 \cap \psi_9| = 4 + 4|2 = 6$  $\alpha_{510} = |\psi_5| + |\psi_{10}| ||\psi_5 \cap \psi_{10}| = 4 + 4|1 = 7$  $\alpha_{511} = |\psi_5| + |\psi_{11}| ||\psi_5 \cap \psi_{11}| = 4 + 7| = 11$  $\alpha_{512} = |\psi_5| + |\psi_{12}| ||\psi_5 \cap \psi_{12}| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{513} = |\psi_5| + |\psi_{13}| ||\psi_5 \cap \psi_{13}| = 4 + 4|2 = 6$  $\alpha_{514} = |\psi_5| + |\psi_{14}| ||\psi_5 \cap \psi_{14}| = 4 + 7|1 = 10$ 

 $\alpha_{515} = |\psi_5| + |\psi_{15}| ||\psi_5 \cap \psi_{15}| = 4 + 5|2 = 7$  $\alpha_{516} = |\psi_5| + |\psi_{16}| ||\psi_5 \cap \psi_{16}| = 4 + 4|3 = 5$  $\alpha_{67} = |\psi_6| + |\psi_7| ||\psi_6 \cap \psi_7| = 5 + 5|3 = 7$  $\alpha_{68} = |\psi_6| + |\psi_8| ||\psi_6 \cap \psi_8| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{69} = |\psi_6| + |\psi_9| ||\psi_6 \cap \psi_9| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{610} = |\psi_6| + |\psi_{10}| ||\psi_6 \cap \psi_{10}| = 5 + 4|2 = 7$  $\alpha_{611} = |\psi_6| + |\psi_{11}| ||\psi_6 \cap \psi_{11}| = 5 + 7|3 = 9$  $\alpha_{612} = |\psi_6| + |\psi_{12}| ||\psi_6 \cap \psi_{12}| = 5 + 5|2 = 8$  $\alpha_{613} = |\psi_6| + |\psi_{13}| ||\psi_6 \cap \psi_{13}| = 5 + 4| = 9$  $\alpha_{614} = |\psi_6| + |\psi_{14}| ||\psi_6 \cap \psi_{14}| = 5 + 7|3 = 9$  $\alpha_{615} = |\psi_6| + |\psi_{15}| ||\psi_6 \cap \psi_{15}| = 5 + 5|2 = 8$  $\alpha_{616} = |\psi_6| + |\psi_{16}| ||\psi_6 \cap \psi_{16}| = 5 + 4| = 9$  $\alpha_{78} = |\psi_7| + |\psi_8| ||\psi_7 \cap \psi_8| = 5 + 4|3 = 6$  $\alpha_{79} = |\psi_7| + |\psi_9| ||\psi_7 \cap \psi_9| = 5 + 4|2 = 7$  $\alpha_{710} = |\psi_7| + |\psi_{10}| ||\psi_7 \cap \psi_{10}| = 5 + 4|3 = 6$  $\alpha_{711} = |\psi_7| + |\psi_{11}| ||\psi_7 \cap \psi_{11}| = 5 + 7|2 = 10$  $\alpha_{712} = |\psi_7| + |\psi_{12}| ||\psi_7 \cap \psi_{12}| = 5 + 5|3 = 7$  $\alpha_{713} = |\psi_7| + |\psi_{13}| ||\psi_7 \cap \psi_{13}| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{714} = |\psi_7| + |\psi_{14}| ||\psi_7 \cap \psi_{14}| = 5 + 7|2 = 10$  $\alpha_{715} = |\psi_7| + |\psi_{15}| ||\psi_7 \cap \psi_{15}| = 5 + 5|3 = 7$  $\alpha_{716} = |\psi_7| + |\psi_{16}| ||\psi_7 \cap \psi_{16}| = 5 + 4|1 = 8$  $\alpha_{89} = |\psi_8| + |\psi_9| ||\psi_8 \cap \psi_9| = 4 + 4|3 = 5$  $\alpha_{810} = |\psi_8| + |\psi_{10}| ||\psi_8 \cap \psi_{10}| = 4 + 4|2 = 6$  $\alpha_{811} = |\psi_8| + |\psi_{11}| ||\psi_8 \cap \psi_{11}| = 4 + 7 |= 11$  $\alpha_{812} = |\psi_8| + |\psi_{12}| ||\psi_8 \cap \psi_{12}| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{813} = |\psi_8| + |\psi_{13}| ||\psi_8 \cap \psi_{13}| = 4 + 4|2 = 6$  $\alpha_{814} = |\psi_8| + |\psi_{14}| ||\psi_8 \cap \psi_{14}| = 4 + 7| = 11$  $\alpha_{815} = |\psi_8| + |\psi_{15}| ||\psi_8 \cap \psi_{15}| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{816} = |\psi_8| + |\psi_{16}| ||\psi_8 \cap \psi_{16}| = 4 + 4|2 = 6$  $\alpha_{910} = |\psi_9| + |\psi_{10}| ||\psi_9 \cap \psi_{10}| = 4 + 4|3 = 5$  $\alpha_{911} = |\psi_9| + |\psi_{11}| ||\psi_9 \cap \psi_{11}| = 4 + 7 |= 11$  $\alpha_{912} = |\psi_9| + |\psi_{12}| ||\psi_9 \cap \psi_{12}| = 4 + 5| = 9$  $\alpha_{913} = |\psi_9| + |\psi_{13}| ||\psi_9 \cap \psi_{13}| = 4 + 4|1 = 7$  $\alpha_{914} = |\psi_9| + |\psi_{14}| ||\psi_9 \cap \psi_{14}| = 4 + 7| = 11$  $\alpha_{915} = |\psi_9| + |\psi_{15}| ||\psi_9 \cap \psi_{15}| = 4 + 5| = 9$  $\alpha_{916} = |\psi_9| + |\psi_{16}| ||\psi_9 \cap \psi_{16}| = 4 + 4|1 = 7$  $\alpha_{1011} = |\psi_{10}| + |\psi_{11}| ||\psi_{10} \cap \psi_{11}| = 4 + 7|1 = 10$  $\alpha_{1012} = |\psi_{10}| + |\psi_{12}| ||\psi_{10} \cap \psi_{12}| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{1013} = |\psi_{10}| + |\psi_{13}| ||\psi_{10} \cap \psi_{13}| = 4 + 4| = 8$  $\alpha_{1014} = |\psi_{10}| + |\psi_{14}| ||\psi_{10} \cap \psi_{14}| = 4 + 7|1 = 10$  $\alpha_{1015} = |\psi_{10}| + |\psi_{15}| ||\psi_{10} \cap \psi_{15}| = 4 + 5|1 = 8$  $\alpha_{1016} = |\psi_{10}| + |\psi_{16}| ||\psi_{10} \cap \psi_{16}| = 4 + 4| = 8$ 

$$\alpha_{1112} = |\psi_{11}| + |\psi_{12}|||\psi_{11} \cap \psi_{12}| = 7 + 5|4 = 8$$

$$\alpha_{1113} = |\psi_{11}| + |\psi_{13}|||\psi_{11} \cap \psi_{13}| = 7 + 4|2 = 9$$

$$\alpha_{1114} = |\psi_{11}| + |\psi_{14}|||\psi_{11} \cap \psi_{14}| = 7 + 7|6 = 8$$

$$\alpha_{1115} = |\psi_{11}| + |\psi_{15}|||\psi_{11} \cap \psi_{15}| = 7 + 5|3 = 9$$

$$\alpha_{1116} = |\psi_{11}| + |\psi_{16}|||\psi_{11} \cap \psi_{16}| = 7 + 4|1 = 10$$

$$\alpha_{1213} = |\psi_{12}| + |\psi_{13}|||\psi_{12} \cap \psi_{13}| = 5 + 4|3 = 6$$

$$\alpha_{1214} = |\psi_{12}| + |\psi_{14}|||\psi_{12} \cap \psi_{14}| = 5 + 7|3 = 9$$

$$\alpha_{1215} = |\psi_{12}| + |\psi_{14}|||\psi_{12} \cap \psi_{15}| = 5 + 5|4 = 6$$

$$\alpha_{1216} = |\psi_{12}| + |\psi_{16}|||\psi_{12} \cap \psi_{16}| = 5 + 4|2 = 7$$

$$\alpha_{1314} = |\psi_{13}| + |\psi_{14}|||\psi_{13} \cap \psi_{14}| = 4 + 7|1 = 10$$

$$\alpha_{1315} = |\psi_{13}| + |\psi_{15}|||\psi_{13} \cap \psi_{15}| = 4 + 5|2 = 7$$

$$\alpha_{1316} = |\psi_{13}| + |\psi_{15}|||\psi_{13} \cap \psi_{16}| = 4 + 4|3 = 5$$

$$\alpha_{1415} = |\psi_{14}| + |\psi_{15}|||\psi_{14} \cap \psi_{15}| = 7 + 5|4 = 8$$

$$\alpha_{1416} = |\psi_{14}| + |\psi_{16}|||\psi_{14} \cap \psi_{16}| = 7 + 4|2 = 9$$

$$\alpha_{1516} = |\psi_{15}| + |\psi_{16}|||\psi_{15} \cap \psi_{16}| = 5 + 4|3 = 6$$

## На основе полученных данных построим таблицу:

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{12}$	$\psi_{13}$	$\psi_{14}$	$\psi_{15}$	$\psi_{16}$
$\psi_1$	0	8	11	10	11	8	10	11	11	10	9	8	9	10	9	10
$\psi_2$		0	10	10	11	9	10	11	11	10	8	8	9	9	9	10
$\psi_3$			0	8	9	8	9	10	10	9	9	10	11	8	9	10
$\psi_4$				0	6	7	6	7	8	7	10	7	8	9	6	7
$\psi_5$					0	8	7	5	6	7	11	8	6	10	7	5
$\psi_6$						0	7	8	8	7	9	8	9	9	8	9
$\psi_7$							0	6	7	6	10	7	8	10	7	8
$\psi_8$								0	5	6	11	8	6	11	8	6
$\psi_9$									0	5	11	9	7	11	9	7
$\psi_{10}$										0	10	8	8	10	8	8
$\psi_{11}$											0	8	9	8	9	10
$\psi_{12}$												0	6	9	6	7
$\psi_{13}$													0	10	7	5
$\psi_{14}$														0	8	9
$\psi_{15}$															0	6
$\psi_{16}$																0

 $\max \alpha_{i-j} = 11$ 

Этому соотвествуют:

$$\psi_3 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\}$$

$$\psi_5 = \{u_{2|12}, u_{3|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\}$$

$$\psi_8 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{4|10}, u_{6|10}\}$$

$$\psi_9 = \{u_{2|12}, u_{4|12}, u_{5|12}, u_{6|10}\}\$$

$$\begin{split} \psi_{11} &= \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \\ \psi_{13} &= \{u_{1|10}, u_{1|11}, u_{4|10}, u_{6|10}\} \\ \psi_{14} &= \{u_{1|11}, u_{3|11}, u_{3|9}, u_{3|8}, u_{3|7}, u_{4|7}, u_{5|7}\} \end{split}$$

Удаляем из  $\psi_G$  все рёбра вошедшие в эти множества

$$\psi_1 = \{u_{1|8}, u_{2|7}\}$$

$$\psi_2 = \{u_{1|8}\}$$

$$\psi_3 = \{\}$$

$$\psi_4 = \{\}$$

$$\psi_5 = \{\}$$

$$\psi_6 = \{u_{2|7}\}$$

$$\psi_7 = \{\}$$

$$\psi_8 = \{\}$$

$$\psi_9 = \{\}$$

$$\psi_{10} = \{\}$$

$$\psi_{11} = \{\}$$

$$\psi_{12} = \{\}$$

$$\psi_{13} = \{\}$$

$$\psi_{14} = \{\}$$

$$\psi_{15} = \{\}$$

$$\psi_{16} = \{\}$$

Удаляем пустые множества и строим новую таблицу:

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_6$
$\psi_1$	0	8	8
$\psi_2$		0	9
$\psi_6$			0

 $\max \alpha_{i-j} = 9$ 

Этому соотвествуют:

$$\psi_2 = \{u_{1|8}\}$$

$$\psi_6 = \{u_{2|7}\}$$

Удаляем из  $\psi_G$  все рёбра вошедшие в эти множества

$$\psi_1 = \{\}$$

$$\psi_2 = \{\}$$

$$\psi_6 = \{\}$$

Удаляем пустые множества

 $\psi_{G'}=\{\}$ , граф планаризирован, при текущих условиях (количество заменённых ребер ограничено) толщина графа m=2