

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STAVEBNÍ, OBOR GEODÉZIE A KARTOGRAFIE

KATEDRA GEOMATIKY

název předmětu

GEOINFORMATIKA

*číslo
úlohy*
1

název úlohy

JPEG komprese rastru

školní rok

2025/26

zpracovali

Králič Adam, Matějková Barbora

datum

14. 10. 2025

klasifikace

Technická zpráva

Adam Králič
Barbora Matějková

1 Zadání úlohy

Úkolem bylo implementovat JPEG kompresi rastru ve zvoleném programovacím jazyku (Matlab), která by zahrnovala tyto fáze:

- transformaci do $YC_B C_R$ modelu,
- diskrétní kosinovou transformaci,
- kvantizaci koeficientů,

a to bez vystavěných funkcí použitého programu.

Výstupem je i testování kompresního algoritmu na jednotlivých typech rastrových souborů s různými hodnotami faktoru komprese $q = 10, 50, 70$, včetně vypočtení střední kvadratické odchylky m jednotlivých RGB složek.

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{m \cdot n} (z - z')^2}{m \cdot n}}$$

Možností bylo implementovat další kroky či jiné kompresní algoritmy (viz tab. 1), které byly všechny v této úloze implementovány.

Krok	Hodnocení
JPG komprese/dekomprese rastru.	20b
Resamplování rastru.	+5b
Konverze prvků do ZIG-ZAG sekvencí.	+10b
Huffmanovo kódování.	+15b
Náhrada DCT s využitím DFT.	+15b
Náhrada DCT s využitím DWT.	+15b
Max celkem:	80b

Tabulka 1: Kroky a jejich hodnocení

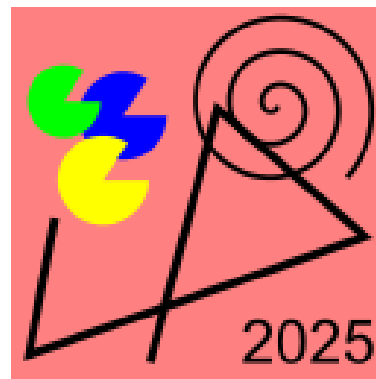
Pro testování kompresí jednotlivými transformacemi byly vybrány tři obrázky – grafika typu pixel art s barevnými přechody o rozměrech 128×128 px, jež byla vytvořena v programu Aseprite, fotografie 256×256 px a vektorová grafika 128×128 px s liniovými prvky z programu Inkscape.



(a) barevný obrázek



(b) fotografie



(c) vektorová grafika

Obrázek 1: Použité obrázky k testování kompresí

2 Postup výpočtu

2.1 Komprese

1. **Nahrání souboru:** soubor je nahrán pomocí funkce `imread(nazSouboru.bmp)`, následně je rozdělen na 3 barevné složky RGB, kde každá má stejný rozměr $m \times n$.
2. **Převod RGB na YUV model:** YUV model také obsahuje 3 složky – jasovou Y a dvě barevné (chromatické) složky C_B a C_R .

```
% RGB to YCbCr
Y = 0.2990*R + 0.5870*G + 0.1140*B;
Cb = -0.1687*R - 0.3313*G + 0.5000*B + 128;
Cr = 0.5000*R - 0.4187*G - 0.0813*B + 128;
```

3. **Přepočet intervalu:** interval byl převeden z hodnot $\{0, 255\}$ na $\{-255, 255\}$.

```
Y = 2*Y - 255;
Cb = 2*Cb - 255;
Cr = 2*Cr - 255;
```

4. **Převzorkování rastru:** Rastr je převzorkován pomocí kernelu o libovolné kladné celočíselné hodnotě (např. 2×2). Výsledkem je rastr o stejné velikosti, avšak obsahující zprůměrované hodnoty pro dané vyhledávací okno.
5. **Rozdělení do submatic 8×8 :** Pro JPEG kompresi je zásadní rozdělení rastru do 8×8 submatic, u kterých probíhá komprese samostatně (což je pro rastr po dekompresi pozorovatelné jako nespojitost mezi sousedními bloky).
6. **Transformace:** Stále bezztrátový krok komprese. Jedná se o převedení opakujících se hodnot pomocí funkčního vztahu do menšího počtu hodnot. Ke každé transformaci existuje i inverzní zápis, kterým lze zpět dostat originální data.

V této práci byly použity direktivní kosinová DCT, direktivní Fourierova DFT a direktivní vlnková DWT transformace.

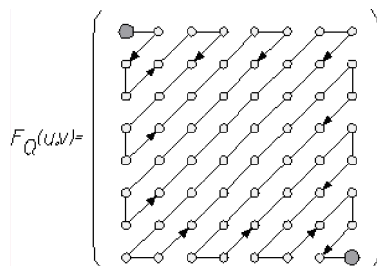
7. **Kvantizace koeficientů:** Jedná se o nejvíce ztrátovou část JPEG komprese. Cílem je vypuštění koeficientů s malou hodnotou.

Základní postup: kvantizace provádí dělení matice $F(u, v)$ po prvcích kvantizační maticí $Q(u, v)$. Kvantizační matice mohou být různé pro jasovou i chromatickou složku. Ta se následně vydělí faktorem komprese q , který ve vysoké míře určuje ztrátu komprese a provede se celočíselné zaokrouhlení.

Ukázka jasové kvantizační matice:

```
Qy = [16 11 10 16 24 40 51 61;
      12 12 14 19 26 58 60 55;
      14 13 16 24 40 87 69 56;
      14 17 22 29 51 87 80 62;
      18 22 37 26 68 109 103 77;
      24 35 55 64 81 104 113 92;
      49 64 78 87 103 121 120 101;
      72 92 95 98 112 100 103 99];
```

8. **„Poskládání“ do nové matice:** Jednotlivé submatice 8×8 jsou poskládány do nové matice o rozměrech původních matice na své příslušné pozice.
9. **Zig-Zag sekvence:** Matice je dále přestrukturována do vektoru o velikosti $m \cdot n \times 1$. Je přeskládán po diagonální Zig-Zag sekvenci podle obr. 2.



Obrázek 2: Zig-Zag sekvence

10. **Huffmanova kódování:** Posledním krokem komprese je převedení hodnot do bitové podoby podle četnosti unikátních hodnot. Tuto podobu je možné získat právě Huffmanovo kódováním.

2.2 Dekomprese

Dekomprese se od komprese liší pouze v převrácení výpočetních kroků a použití inverzních transformací a jiných potřebných výpočtů.

Jednotlivé kroky: dekomprese Huffmanova kódu \rightarrow inverzní Zig-Zag sekvence \rightarrow rozdělení do submatic $8 \times 8 \rightarrow$ dekvantizace \rightarrow inverzní transformace \rightarrow poskládání do nové matice \rightarrow inverzní přepočet hodnot zpět na interval $\{0, 255\} \rightarrow$ převod YUV do RGB modelu \rightarrow vytvoření nového souboru.

2.3 Vyhodnocení

Pro **každou barevnou složku**, použitý faktor komprese q , použitý rastr a zvolené velikosti převzorkování byly vypočteny střední kvadratické odchylky m .

Ukázka kódu:

```
dR = R - R_new;
dG = G - G_new;
dB = B - B_new;

sigmaR = sqrt(sum(sum(dR.^2))/(m*n));
sigmaG = sqrt(sum(sum(dG.^2))/(m*n));
sigmaB = sqrt(sum(sum(dB.^2))/(m*n));
```

3 Vytvořené funkce

3.1 Direktivní kosinová transformace

Povinná funkce, která byla vytvořena částečně na cvičení. V rámci úlohy byla dále doplněna její inverzní varianta. Výpočet probíhal pro submatice 8×8 , které byly následně skládány do původního rastru.

Rovnice DCT:

$$F(u, v) = \frac{1}{4} C(u) \cdot C(v) \left(\sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right)$$
$$C(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & u = 0, \\ 1, & u \neq 0, \end{cases} \quad C(v) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & v = 0, \\ 1, & v \neq 0. \end{cases}$$

Rovnice IDCT:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \left(\sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 C(u) \cdot C(v) F(u, v) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right)$$
$$C(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & u = 0, \\ 1, & u \neq 0, \end{cases} \quad C(v) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & v = 0, \\ 1, & v \neq 0. \end{cases}$$

DCT převádí obrazový signál na posloupnost signálů, které se odlišují amplitudou a frekvencí, tvořící frekvenční spektrum.

3.2 Direktivní Fourierova transformace

Výpočet i princip metody DFT je dosti podobný DCT. Slouží k převedení signálu do frekvenční složky.

Výsledkem DFT je matice o velikosti původního rastru, jejíž hodnoty obsahují i imaginární složku; s ní však nebylo dále pracováno. Výpočet probíhal obdobně pro submatice 8×8 .

Rovnice DFT:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Rovnice IDFT:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

3.3 Direktivní vlnková (Wavelet) transformace

DWT rozděluje původní data do 4 frekvenčních pásem: LL (2× použitý nízkofrekvenční filtr), LH, HL (kombinace nízkofrekvenčního a vysokofrekvenčního filtru) a HH (2× použitý vysokofrekvenční filtr).

Na rozdíl od metod DCT a DFT byla tato metoda použita pro celý rastr o velikosti 128×128 pixelů. Tato metoda je i oddělena ve svém vlastním skriptu `komprese_dwt.m`, jelikož postup výpočetních kroků je jiný.

Pro rastrová data, která mají spíše spojitý průběh, má největší význam LL, jenž se následně může opět rozdělit do 4 pásem, a výpočet lze provádět iteračně dále, dokud lze rastr ještě rozdělit.

V této úloze byla použita Haarova vlnka, což je nejstarší a nejjednodušší vlnka. Výpočet probíhal nejdřív podle sloupců, kde se vždy braly hodnoty ze dvou sousedních sloupců, nízkofrekvenční filtr (L) tyto hodnoty sčítal a vysokofrekvenční filtr (H) odčítal a výsledné hodnoty byly uloženy do jedné buňky → 2× méně sloupců. Obdobně probíhal výpočet podle řádek pro oba filtry L a H → 2× méně řádek. Výsledkem jsou 4 pásma (LL, LH, HL, HH), ze kterých bylo pro následnou dekompozici použito pouze pásmo LL.

Inverzní DWT byla vypočtena z dekomprimovaného LL a původních složek LH, HL, HH, ze kterých byl vytvořen rastr o původní velikosti.

Ukázka výpočtu pro DWT

```
function [LL, LH, HL, HH] = dwt2d(img)
    % processes columns (n columns -> n/2)
    [m, n] = size(img);
    L = zeros(m, n/2);
    H = zeros(m, n/2);

    % creates low pass and high pass filter
    for i = 1:m
        k = 1;
        for j = 1:2:n
            L(i, k) = (img(i, j) + img(i, j+1)) / sqrt(2); % lowpass
            H(i, k) = (img(i, j) - img(i, j+1)) / sqrt(2); % highpass
            k = k + 1;
        end
    end

    % processes rows creates LL, LH, HL and HH filters
    LL = zeros(m/2, n/2);
    LH = zeros(m/2, n/2);
    HL = zeros(m/2, n/2);
    HH = zeros(m/2, n/2);

    for j = 1:n/2
        k = 1;
```

```

for i = 1:2:m
    % lowpass rows
    LL(k,j) = (L(i,j) + L(i+1,j)) / sqrt(2);
    LH(k,j) = (L(i,j) - L(i+1,j)) / sqrt(2);

    % highpass rows
    HL(k,j) = (H(i,j) + H(i+1,j)) / sqrt(2);
    HH(k,j) = (H(i,j) - H(i+1,j)) / sqrt(2);

    k = k + 1;
end
end
end

```

3.4 Huffmanovo kódování

Huffmanovo kódování se často používá jako poslední část před uložením komprimovaného souboru. Jde o převedení hodnot do bitové podoby, kde nejčastější hodnoty mají nejkratší bitový zápis a nejdelší bitový zápis má dvojce nejméně se vyskytujícími hodnotami.

Pro tyto hodnoty je potřeba mít uložený „slovník“ neboli soubor s převody mezi hodnotou a jejím bitovým zápisem.

Princip algoritmu: Data se přetvoří na seznam bodů, ze kterých se následně vyberou 2 nejméně četné hodnoty a vytvoří z nich uzly (levý uzel přijímá hodnotu 0, pravý 1). Z těchto hodnot vznikne další uzel o stupeň výše, jehož četnost je součet četností všech jeho synů a zařadí se do původního seznamu bodů, první dva body se ze seznamu vyřadí. Dále se opět vyberou dva body s nejmenší četností (v tomto případě to může být nově vzniklý uzel + nepoužitý uzel nebo 2 nepoužité uzly) a proces se opakuje, dokud seznam bodů neobsahuje ani jeden bod. Poslední uzel (kořen) by měl obsahovat četnost 100%.

Algoritmus v této úloze vrací novou matici s již zakódovanými bitovými hodnotami a slovník mezi původními hodnotami a jejich bitovým zápisem.

Inverzní funkce přijímá vzniklý slovník a zakódovanou matici a vrací původní nezakódovanou matici.

3.5 ZIG-ZAG sekvence

Tento algoritmus slouží k vytvoření posloupnosti, kterou lze efektivně komprimovat → prvky se stejnými hodnotami budou za sebou.

Implementována je následovně: postupně se naplňuje nově vznikající vektor. Ukazatel se pohybuje po původní matici buďto nahoru doprava nebo dolů doleva. Vždy se provede test, zda by se ukazatel v příští iteraci dostal *out of bounds*. Pokud ano, změnil by se směr pohybu a ukazatel by se posunul na adekvátní pozici. Algoritmus se provádí tak dlouho, dokud se vektor celý „nenaplní“.

Inverzní funkce funguje na stejném principu.

3.6 Převzorkování (Resampling)

Jedná se změnu velikosti rastru na požadovanou velikost. Časté využití je například v mapové algebře či při komprimacích rastrových souborů.

V této úloze byly implementovány 2 funkce pro převzorkování a inverzní převzorkování. Vstupem je rastr a krok („level“) převzorkování.

Byla zde zvolena metoda vyhledávacího okna (*kernel*), které pro zvolený celočíselný krok (pro krok 2: $\text{kernel} = (2,2)$) byla uložena průměrná hodnota buněk v kernelu do nového rastru. Pokud byl tedy zvolen krok 2, výsledná velikost souboru je $2\times$ menší.

Pro následující výpočty byla každopádně vytvořena i inverzní funkce, která s tím samým krokem vytvoří nový rastr, kde naopak vezme hodnotu z předchozího rastru a vloží ji do buněk o velikosti původního vyhledávacího okna.

4 Výsledky

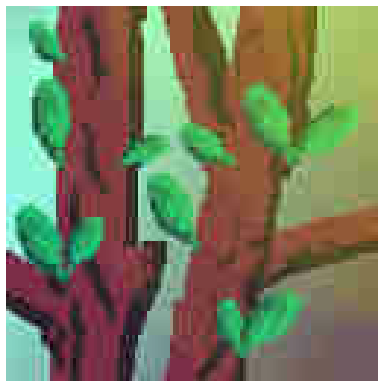
V rámci úlohy byly vyhotoveny všechny bonusové části, výpočetní skripty k nim jsou dostupné na githubu skupiny. Jedná se o dva hlavní skripty – jeden obsahující kompresi funkcemi DCT a DFT a druhý s DWT – a pomocné funkce vyhotovené povětšinou ve vlastních skriptech.

4.1 Barevný obrázek

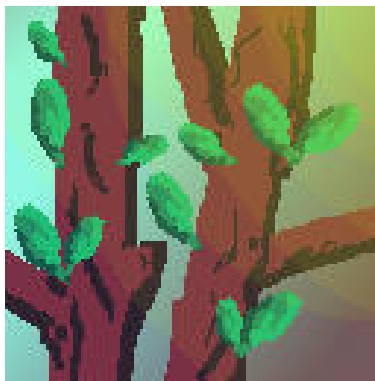
Pro první obrázek (barevný pixel art) byly kromě jednotlivých transformací testovány i dva typy převzorkování, s hodnotou 1 a 2.

<i>DCT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	15.781	13.291	11.343
1×1	50	10.281	7.235	6.056
1×1	70	8.769	5.962	5.177
2×2	10	16.006	16.610	13.929
2×2	50	14.205	16.779	13.506
2×2	70	13.985	16.865	13.473
<i>DFT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	19.371	23.781	18.693
1×1	50	18.222	23.392	18.345
1×1	70	18.168	23.377	18.309
2×2	10	21.164	26.635	20.999
2×2	50	20.674	26.497	20.840
2×2	70	20.674	26.503	20.838
<i>DWT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	84.818	67.455	84.122
1×1	50	21.608	13.793	22.576
1×1	70	14.188	10.071	18.878
2×2	10	88.957	75.198	88.186
2×2	50	34.440	35.984	34.783
2×2	70	30.340	34.728	32.504

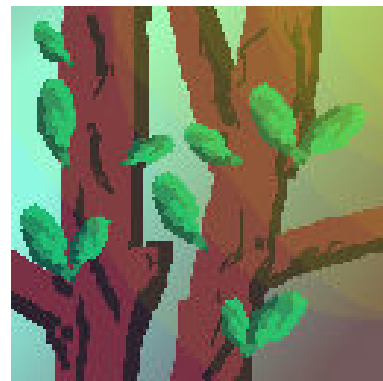
Tabulka 2: Odchylky transformací pro barevný obrázek



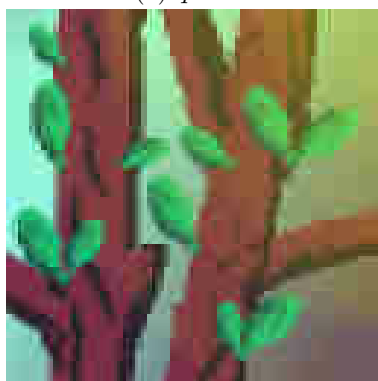
(a) $q = 10$



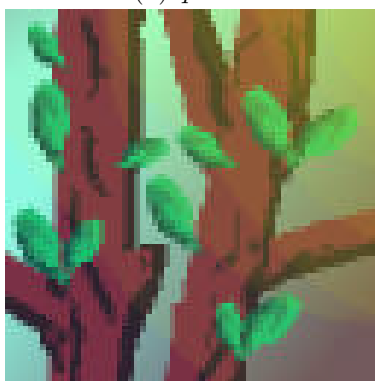
(b) $q = 50$



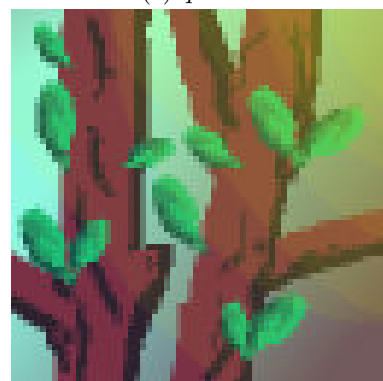
(c) $q = 70$



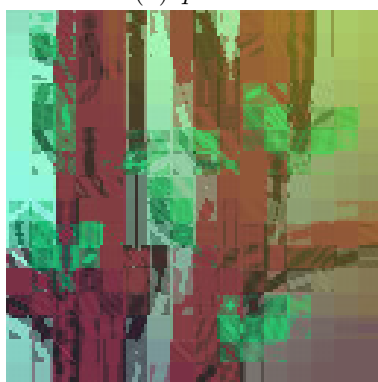
(d) $q = 10$



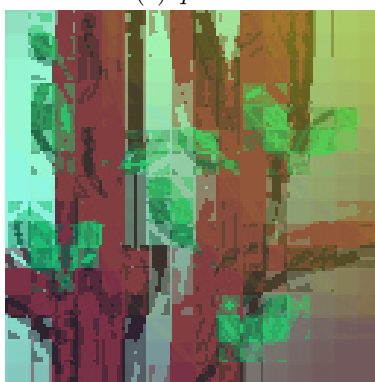
(e) $q = 50$



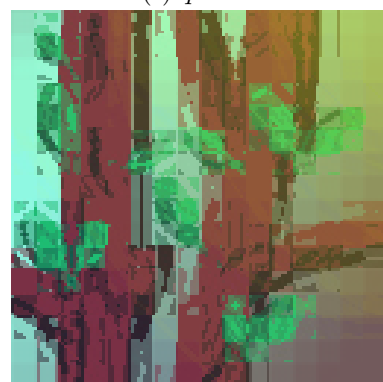
(f) $q = 70$



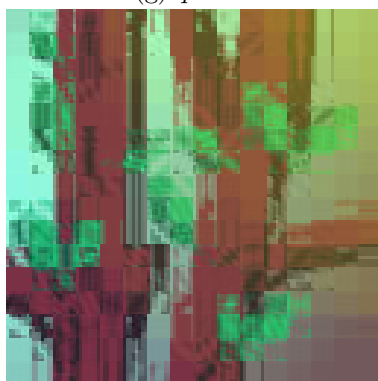
(g) $q = 10$



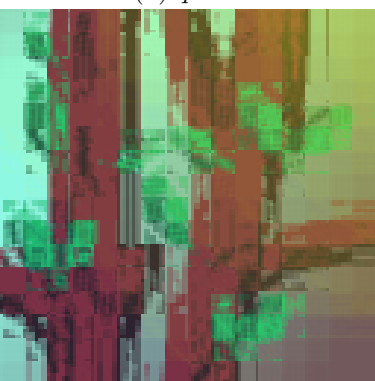
(h) $q = 50$



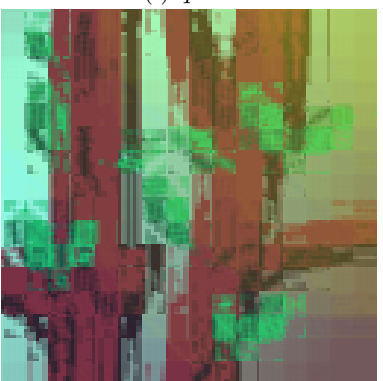
(i) $q = 70$



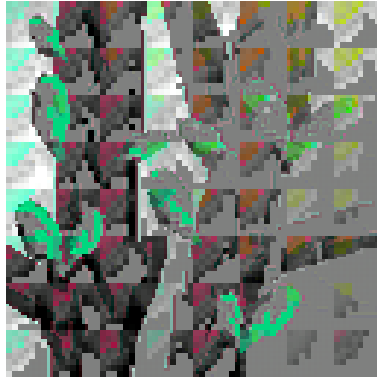
(j) $q = 10$



(k) $q = 50$



(l) $q = 70$



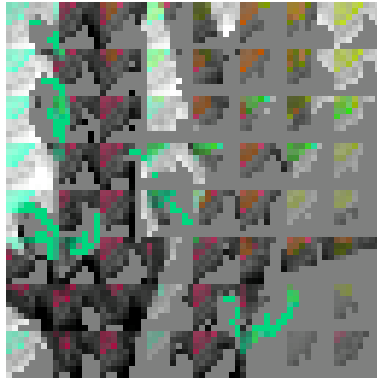
(m) $q = 10$



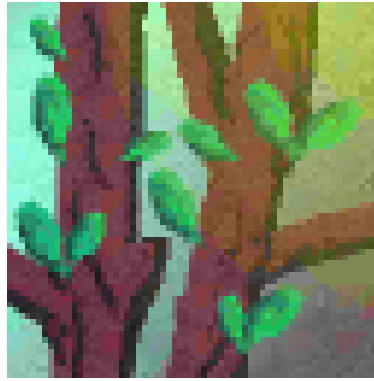
(n) $q = 50$



(o) $q = 70$



(p) $q = 10$



(q) $q = 50$



(r) $q = 70$

Obrázek 3: Barevný pixel art obrázek, (a) – (f) DCT, (g) – (l) DFT, (m) – (r) DWT, liché řádky resampling 1×1 , sudé 2×2

<i>DCT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	20.083	19.898	20.904
1×1	50	9.405	9.065	9.790
1×1	70	7.212	6.846	7.600
<i>DFT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	21.852	22.572	23.876
1×1	50	21.316	22.138	23.310
1×1	70	21.292	22.125	23.280
<i>DWT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	76.721	42.814	76.896
1×1	50	18.761	12.200	21.962
1×1	70	13.951	9.590	19.132

Tabulka 3: Odchylky transformací pro fotografii



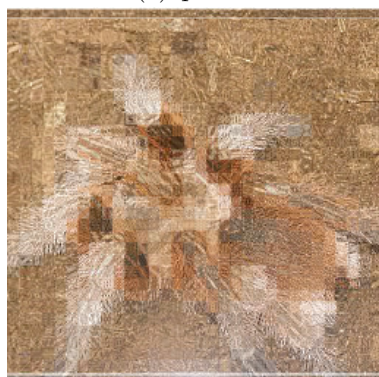
(a) $q = 10$



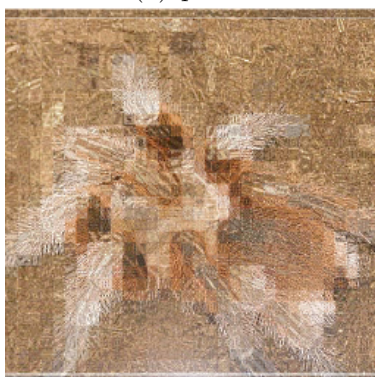
(b) $q = 50$



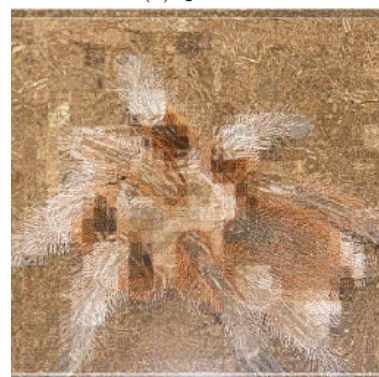
(c) $q = 70$



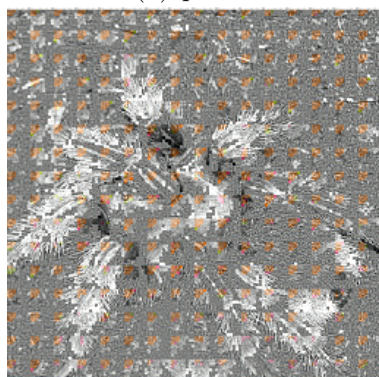
(d) $q = 10$



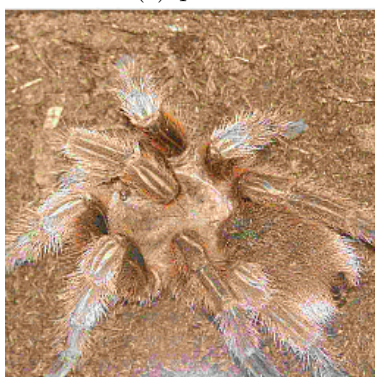
(e) $q = 50$



(f) $q = 70$



(g) $q = 10$



(h) $q = 50$



(i) $q = 70$

Obrázek 4: Fotografie, a, b, c DCT, d, e, f DFT, g, h, i DWT

<i>DCT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	21.134	12.723	16.068
1×1	50	10.020	6.360	8.387
1×1	70	7.919	5.158	6.951

<i>DFT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	51.542	28.769	29.043
1×1	50	51.082	28.439	28.505
1×1	70	51.068	28.426	28.471

<i>DWT</i>				
resampling	q	σ_R	σ_G	σ_B
1×1	10	120.884	111.411	69.860
1×1	50	25.533	15.938	20.363
1×1	70	15.771	12.449	12.740

Tabulka 4: Odchyly transformací pro vektorovou grafiku



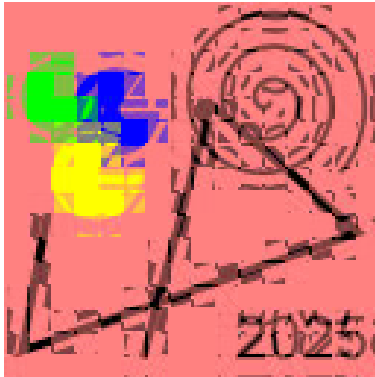
(a) $q = 10$



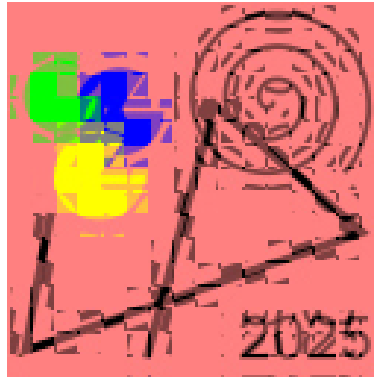
(b) $q = 50$



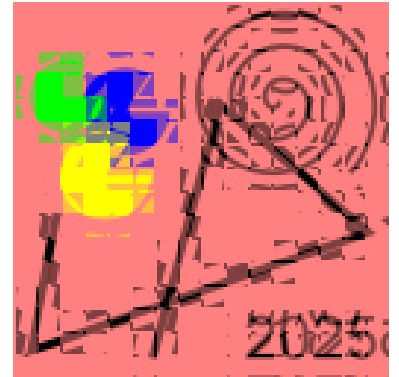
(c) $q = 70$



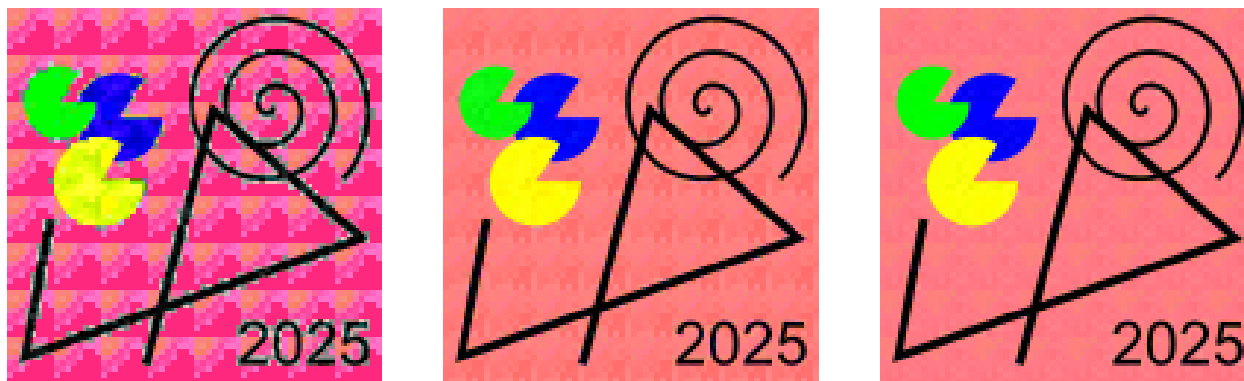
(d) $q = 10$



(e) $q = 50$



(f) $q = 70$



(g) $q = 10$

(h) $q = 50$

(i) $q = 70$

Obrázek 5: Vektorová grafika, a, b, c DCT, d, e, f DFT, g, h, i DWT

Závěr

Směrodatné odchylky jednotlivých barev samozřejmě závisí na hodnotě q , kdy nižší hodnoty obrazová data silněji poznamenaly, avšak lze vypořádat jisté trendy i u jednotlivých transformací.

Po kompresi a následné dekompresi nejpodobněji originálu dopadly všechny obrázky při použití metody DCT. Odchylky jsou v tomto případě menší i při použití $q = 10$, než u ostatních metod při použití mírnějšího faktoru komprese $q = 70$.

Při DFT došlo k nápadnému rozložení obrazu na pixely obsahující velké množství reliktů. Lze zde pozorovat jednotlivé „vlny“, které jsou odlišné pro každý 8×8 blok. Nejmarkantnější je tento jev v případě liniových prvků u třetího obrázku, kde už tvoří překážku pro vnímání objektů. Odchylky se se zvyšujícím se q moc nesnižují, zapříčiňuje to nejspíš samotná vlastnost DFT, která nalezne pár vyskytujících se frekvencí v hledaném 8×8 bloku, není tedy nejvhodnější metodou pro použití rástrová data, jelikož se nejedná o data s harmonickou vlastností.

DWT barvy rozkládala úplně, nejvíce nepřekvapivě v případě použité fotografie. Může za to nejspíše jiná metoda výpočtu, která spočívá v transformaci celého rastru, odkud se následně chyby ze ztráty komprese projeví ve všech 8×8 blocích obdobně.

Přílohy

- Příloha 1 - výpočetní skripty z programu Matlab

Reference

- [1] Výklad ze cvičení – doc. Ing. Tomáš Bayer, Ph.D.
- [2] 155YGEI Geoinformatika. Online. 2025. Dostupné z: https://geo.fsv.cvut.cz/gwiki/155YGEI_Geoinformatika. [cit. 2025-10-13].

Podepsáno dne 14. 10. 2025 v Praze

Králič Adam, Matějková Barbora