# Stratégie de Trading Quantitatif Inspirée de la Physique

## 1 Modélisation Physique du Prix

### 1.1 Hypothèse Fondamentale

Dans cette stratégie de trading quantitatif, le prix $x(t)$ d'un actif financier est modélisé de manière analogique à un objet physique soumis à des forces. Cette approche permet d'appliquer des concepts bien établis de la physique newtonienne pour interpréter et prévoir les mouvements de prix sur les marchés financiers.

#### 1.1.1 Modélisation du Prix comme Objet Physique

Le prix $x(t)$ est envisagé comme la position d'un objet de masse $m$ en fonction du temps $t$. Cette analogie permet de décrire les dynamiques du prix à l'aide des équations du mouvement de Newton :

$$m \cdot a(t) = \sum F_{\text{ext}} \tag{1}$$

où :

- $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ représente l'accélération du prix, interprétée comme le taux de changement de la tendance.
- $v(t) = \frac{dx}{dt}$ est la vitesse du prix, assimilée au momentum.
- $m$ est un paramètre d'inertie du marché, quantifiant la résistance du marché aux changements brusques de prix.

#### 1.1.2 Justification de l'Analogique Physique

L'utilisation d'une analogie physique repose sur plusieurs observations empiriques des marchés financiers :

- **Inertie du Marché ($m$) :** Les marchés financiers montrent une certaine inertie, où des changements significatifs de prix nécessitent des forces substantielles. Le paramètre $m$ capture cette résistance inhérente aux fluctuations de prix.
- **Accélération et Tendance :** L'accélération du prix $a(t)$ reflète les changements dans la tendance du marché. Une accélération positive indique une tendance haussière, tandis qu'une accélération négative signale une tendance baissière.
- **Momentum ($v(t)$) :** Le momentum du prix, ou la vitesse $v(t)$, est crucial pour comprendre la persistance des mouvements de prix. Un momentum élevé suggère une forte tendance, tandis qu'un momentum faible peut indiquer une consolidation.

#### 1.1.3 Paramètre d'Inertie du Marché ($m$)

Le paramètre $m$ joue un rôle crucial dans la modélisation, déterminant la réactivité du prix aux forces appliquées. Une valeur élevée de $m$ indique que le marché résiste davantage aux changements brusques, tandis qu'une valeur faible suggère une plus grande sensibilité aux forces externes.

**Estimation de $m$** L'inertie du marché $m$ peut être estimée en calibrant le modèle sur des données historiques à l'aide de méthodes d'optimisation. Deux approches principales sont considérées : l'estimation des moindres carrés et l'optimisation bayésienne.

**Méthode des Moindres Carrés** La méthode des moindres carrés vise à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées $x_{\text{obs}}(t_i)$ et les valeurs prédites $x_{\text{pred}}(t_i; m)$ par le modèle. Le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\hat{m} = \arg\min_{m} \sum_{i=1}^{N} \left(x_{\text{obs}}(t_i) - x_{\text{pred}}(t_i; m)\right)^2 \tag{2}$$

où :

- $N$ est le nombre total d'observations historiques.
- $x_{\text{obs}}(t_i)$ est le prix observé à l'instant $t_i$.
- $x_{\text{pred}}(t_i; m)$ est le prix prédit par le modèle à l'instant $t_i$ en fonction du paramètre $m$.

**Procédure :**

1. **Collecte des Données :** Rassembler les séries temporelles des prix $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$ sur une période donnée.
2. **Discrétisation :** Appliquer la discrétisation temporelle décrite dans la section **??** pour simuler $x_{\text{pred}}(t_i; m)$ en fonction de $m$.
3. **Optimisation :** Utiliser des algorithmes d'optimisation numérique (par exemple, l'algorithme de Levenberg-Marquardt) pour trouver la valeur de $m$ qui minimise la fonction de coût définie ci-dessus.

**Optimisation Bayésienne** L'optimisation bayésienne est une méthode probabiliste qui est particulièrement efficace pour optimiser des fonctions coûteuses à évaluer et qui sont bruitées. Elle est adaptée lorsque l'évaluation du modèle est intensive en calculs.

$$\hat{m} = \arg\max_{m} \ \mathbb{E}[f(m)] \quad \text{où } f(m) = -\sum_{i=1}^{N} \left(x_{\text{obs}}(t_i) - x_{\text{pred}}(t_i; m)\right)^2 \tag{3}$$

**Procédure :**

1. **Définition de l'Espace de Recherche :** Définir un domaine de recherche pour $m$, par exemple $m \in [0.1, 2.0]$.
2. **Construction d'un Modèle Surrogate :** Utiliser un modèle gaussien (processus gaussien) pour approximer la fonction de coût $f(m)$.
3. **Acquisition de Fonction :** Utiliser une fonction d'acquisition (comme l'Expected Improvement) pour déterminer les points suivants à évaluer.
4. **Itération :** Répéter les étapes de construction du modèle surrogate et d'acquisition jusqu'à convergence ou jusqu'à atteindre un nombre maximal d'itérations.

5. **Sélection du Meilleur $m$ :** Choisir la valeur de $m$ qui maximise la fonction d'acquisition.

**Avantages de l'Optimisation Bayésienne :**

- **Efficacité :** Réduit le nombre d'évaluations nécessaires du modèle, ce qui est bénéfique lorsque les simulations sont coûteuses en temps de calcul.
- **Gestion de l'Incertitude :** Intègre l'incertitude dans la modélisation, permettant une exploration plus équilibrée entre exploitation et exploration.

**Sélection de la Méthode Appropriée** Le choix de la méthode dépend de plusieurs facteurs :

- **Complexité du Modèle :** Pour des modèles simples et linéaires, la méthode des moindres carrés peut suffire. Pour des modèles complexes ou non linéaires, l'optimisation bayésienne peut offrir de meilleurs résultats.
- **Ressources de Calcul :** Si les simulations sont coûteuses en temps de calcul, l'optimisation bayésienne est préférée pour minimiser le nombre d'évaluations nécessaires.
- **Qualité des Données :** En présence de bruit élevé dans les données, l'optimisation bayésienne peut mieux gérer l'incertitude.

# 2 Forces en Présence

## 2.1 Force de Rappel Élastique (Mean Reversion)

$$F_{\text{rappel}} = -k \cdot (x(t) - x_{\text{eq}}(t)) \tag{4}$$

- **Paramètre clé** : - $k > 0$ : Constante de rigidité (en $[\text{USD}]^{-1}[t]^{-2}) - \text{x}_{\text{eq}}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(t - it)$ (Moyenne Mobile sur $N$ périodes)
- **Interprétation physique** : Force proportionnelle à l'écart du prix par rapport à sa valeur d'équilibre récente
- **Équivalent trading** : Phénomène de retour à la moyenne après un écart statistique. Pour $x(t) > x_{\text{eq}}$ :
$$F_{\text{rappel}} < 0 \Rightarrow \text{Force baissière} \tag{5}$$
- **Calibration** :
$$k = \frac{2\pi}{\tau_{\text{half-life}}^2}, \quad \tau_{\text{half-life}} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \tag{6}$$
où $\lambda$ est la vitesse de retour estimée par régression OLS.

## 2.2 Force d'Amortissement (Friction)

$$F_{\text{amortissement}} = -c \cdot \text{sgn}(v(t)) \cdot v(t)^2 \tag{7}$$

- **Formulation non-linéaire** : La dépendance quadratique en $v(t)$ capture les effets de friction turbulente plus réalistes que le modèle linéaire
- **Coefficient** :
$$c = \frac{\mathbb{E}[|x|]}{\mathbb{E}[v^2]} \quad \text{(Ratio écart-type prix/momentum)} \tag{8}$$

- **Rôle trading** : Limite les mouvements extrapolatifs excessifs. Pour $v(t) > 0$ (tendance haussière) :

$$F_{\text{amortissement}} < 0 \Rightarrow \text{Effet de prise de profit} \tag{9}$$

- **Adimensionnement** :

$$\tilde{c} = c \cdot \frac{T_{\text{obs}}}{\sigma_x} \quad \text{(Temps caractéristique en jours)} \tag{10}$$

## 2.3 Force Stochastique (Bruit du Marché)

$$F_{\text{stochastique}} = \sigma(t) \cdot \eta(t), \quad \eta(t) \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=0}^{M-1}(x(t-it) - \bar{x})^2} \tag{11}$$

- **Dynamique de volatilité** : Modèle à fenêtre glissante avec $M = 21$ jours (1 mois trading)
- **Processus corrélé** : Pour capturer le clustering de volatilité :

$$\sigma(t+t) = \sigma(t) + \theta(\sigma_{\text{long}} - \sigma(t))t + \xi\sqrt{t}\eta_\sigma(t) \tag{12}$$

  où $\theta$ est la vitesse de retour, $\xi$ la vol de la vol

- **Impact microstructural** :

$$\mathbb{E}[F_{\text{stochastique}}|V] = \beta \cdot V \quad (\beta = \text{illiquidité}) \tag{13}$$

  où $V$ est le déséquilibre de volume

## 2.4 Force Externe (Événements Exogènes)

$$F_{\text{externe}} = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \cdot e^{-\gamma_i(t-t_i)} \cdot I_{[t_i, t_i+_i]}(t) \tag{14}$$

- **Forme impulsionnelle** : Choc exponentiel décroissant avec :
  - $\alpha_i$ : Amplitude de l'événement $i$
  - $\gamma_i$ : Temps de relaxation (ex : 0.1 pour un FOMC, 0.3 pour un earnings surprise)
  - $_i$ : Durée d'impact
- **Calibration des $\alpha_i$** : Régressions événementielles sur données historiques :

$$\alpha_i = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \frac{x(t_i^k + t) - x(t_i^k - t)}{t_i^k} \tag{15}$$

  où $K$ est le nombre d'occurrences historiques similaires

- **Indicateur avancé** : Intégration de données alternatives (ex : indicateurs RSS) :

$$I_{\text{news}}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\kappa(s(t)-s_0)}} \quad \text{(Sigmoïde sur score de sentiment } s(t)\text{)} \tag{16}$$

## Synthèse des Interactions

Les forces se combinent selon le principe de superposition :

$$m\ddot{x}(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{Retour}} + \underbrace{-c\dot{x}(t)}_{\text{Friction}} + \underbrace{\sigma\eta(t)}_{\text{Bruit}} + \underbrace{\sum \alpha_i g_i(t)}_{\text{Chocs}} + \epsilon_{\text{res}} \tag{17}$$

où $\epsilon_{\text{res}}$ est le résidu non modélisé (à surveiller via tests de Ljung-Box).

# 3 Simulation Numérique

## 3.1 Discrétisation Temporelle

$$a^{(n)} = \frac{1}{m}\left( -k\left(x^{(n)} - x_{\text{eq}}^{(n)}\right) - c\,v^{(n)} + \sigma\,\eta^{(n)} + \alpha\,I_{\text{news}}^{(n)} \right) \tag{18}$$

$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + a^{(n)}\Delta t \tag{19}$$

$$x_{\text{pred}}^{(n+1)} = x^{(n)} + v^{(n+1)}\Delta t \tag{20}$$

**Annotations des Équations**

- **Équation 18** : Calcul de l'accélération instantanée
  - $x_{\text{eq}}^{(n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^{(n-k)}$ (Moyenne mobile sur $N$ périodes)
  - $\eta^{(n)} \sim \mathcal{N}(0,1)$ : Bruit gaussien standard
  - $I_{\text{news}}^{(n)} \in \{0,1\}$ : Indicatrice d'événement exogène
- **Équation 19** : Intégration de la vitesse par schéma d'Euler explicite

$$\text{Erreur locale} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

- **Équation 20** : Prédiction de la position future

$$\text{Stabilité conditionnelle si } \Delta t < \frac{2m}{c + \sqrt{c^2 + 4mk}} \quad \text{(Condition CFL)}$$

## 3.2 Workflow Algorithmique

1. **Initialisation** :

$$x^{(0)} = x_0, \quad v^{(0)} = \frac{x_0 - x_{-1}}{\Delta t}, \quad n = 0$$

2. **Boucle temporelle** :

Pour $n = 0$ à $N_{\text{steps}} - 1$ :
1. Calculer $x_{\text{eq}}^{(n)}$
2. Échantillonner $\eta^{(n)}$
3. Mettre à jour $a^{(n)}$ via (18)
4. Mettre à jour $v^{(n+1)}$ via (19)
5. Prédire $x_{\text{pred}}^{(n+1)}$ via (20)

3. **Post-traitement** :

$$\text{Erreur RMS} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{steps}}}\sum_{n=1}^{N_{\text{steps}}}\left(x_{\text{pred}}^{(n)} - x_{\text{real}}^{(n)}\right)^2}$$

### 3.3 Considérations Numériques

- **Choix de $\Delta t$** :

$$\Delta t_{\text{opt}} = \frac{T_{\text{caract}}}{10}, \quad T_{\text{caract}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(Période d'oscillation naturelle)} \tag{21}$$

- **Traitement du bruit** :

$$\sigma\,\eta^{(n)} \to \sigma\sqrt{\Delta t}\,\eta^{(n)} \quad \text{(Scaling d'Itō pour processus continu)}$$

- **Adaptivité** :

$$\Delta t_{\text{adaptatif}} = \begin{cases} \Delta t/2 & \text{si } |a^{(n)}| > a_{\max} \\ \Delta t & \text{sinon} \end{cases}$$

# 4 Règles de Trading

## 4.1 Conditions de Signal

- **Achat (Long)** si :

$$x_{\text{pred}}^{(n+1)} > x^{(n)} + \tau^{(n)}, \quad \tau^{(n)} = 0.5 \times \text{ATR}^{(n)}(20) \tag{22}$$

- **Vente (Short)** si :

$$x_{\text{pred}}^{(n+1)} < x^{(n)} - \tau^{(n)} \tag{23}$$

## 4.2 Annotations des Conditions

- **Seuil adaptatif $\tau^{(n)}$** :

$$\text{ATR}^{(n)}(20) = \frac{1}{20}\sum_{k=0}^{19}\left(\max\left(High^{(n-k)}, Close^{(n-k-1)}\right) - \min\left(Low^{(n-k)}, Close^{(n-k-1)}\right)\right)$$

  Mesure de la volatilité récente, ajustée dynamiquement.

- **Facteur 0.5** : Coefficient empirique trouvé par backtest sur données historiques. À optimiser selon :

$$\alpha_{\text{opt}} = \arg\max_{\alpha\in[0.3,0.7]} (\text{Sharpe Ratio}(\alpha))$$

- **Logique prédictive** : Basée sur le modèle physique discrétisé de la section **??**.

## 4.3 Workflow d'Exécution

1. **Calcul des signaux** :

$$\text{Signal}^{(n)} = \begin{cases} +1 & \text{si (22) vérifiée} \\ -1 & \text{si (23) vérifiée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. **Gestion des positions** :

$$\text{Position}^{(n+1)} = \text{Signal}^{(n)} \times \text{Size}^{(n)}$$
$$\text{Size}^{(n)} = \frac{\text{Capital} \times 0.01}{\text{ATR}^{(n)}(20) \times P^{(n)}}$$

   Avec 0.01 = risque de 1% par trade.

3. **Règles de priorité** :
    - Neutralisation si conflit signal/prédiction Interdiction de reversal immédiat (cool-down de 3 périodes)

## 4.4 Optimisations Avancées

- **Filtrage des faux signaux** :

$$\text{Confiance}^{(n)} = \frac{|x_{\text{pred}}^{(n+1)} - x^{(n)}|}{\sigma_x^{(20)}} > 1.5$$

  Seuil de confiance statistique pour éviter le over-trading.

- **Adaptation dynamique** :

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} 0.3 \times \text{ATR}(20) & \text{si } \sigma_x^{(20)} > 2\sigma_x^{(100)} \\ 0.7 \times \text{ATR}(20) & \text{si } \sigma_x^{(20)} < 0.5\sigma_x^{(100)} \\ 0.5 \times \text{ATR}(20) & \text{sinon} \end{cases}$$

  Ajustement du seuil selon le régime de volatilité.

- **Backtesting** :

$$\text{Performance} = \sum_{n=1}^{N} \text{Signal}^{(n-1)} \times \left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right) - \text{Commission}$$

  Métrique principale pour l'optimisation.

## 4.5 Contrôles de Risque

- **Stop-Loss Dynamique** :

$$\text{SL}^{(n)} = x^{(n)} \pm 2 \times \text{ATR}^{(n)}(20)$$

  Declenché si $\text{PnL}^{(n)} < -2\%$ du capital

- **Position Sizing** :

$$\text{Leverage}^{(n)} = \min\left(\frac{0.1 \times \text{Capital}}{\text{VaR}_{95\%}}, 5\right)$$

  Avec Value-at-Risk calculée sur 20 jours

- **Circuit Breaker** : Suspension automatique après 3 pertes consécutives $> 1\%$

# 5 Gestion des Risques

## 5.1 Taille de Position

$$\text{Size}^{(n)} = \frac{\mathcal{R} \cdot \rho}{\text{ATR}^{(n)}(20) \cdot P^{(n)}} \tag{24}$$

- **Termes** :
    - $\mathcal{R}$ : Capital risqué (par trade)
    - $\rho \in [0.01, 0.05]$ : Pourcentage de risque (1% à 5%)

  - $\text{ATR}^{(n)}(20)$ : Average True Range sur 20 périodes (proxy de volatilité)
  - $P^{(n)}$ : Prix de l'actif à $t = n$

- **Exemple** : Pour $\mathcal{R} = 100k\$$, $\rho = 0.02$, $\text{ATR} = 3.2\$$, $P = 50\$$ :

$$\text{Size} = \frac{100\,000 \times 0.02}{3.2 \times 50} = 12.5 \text{ contrats}$$

- **Interprétation** : Limite l'exposition en fonction de la volatilité récente. Un ATR élevé réduit la taille de position.

## 5.2 Stop-Loss Dynamique

$$\text{SL}_{\text{long}}^{(n)} = x^{(n)} - 2 \times \text{ATR}^{(n)}(20) \tag{25}$$

$$\text{SL}_{\text{short}}^{(n)} = x^{(n)} + 2 \times \text{ATR}^{(n)}(20) \tag{26}$$

- **Logique** : Le stop-loss s'adapte à la volatilité intraday. Un ATR élevé élargit la bande de protection.
- **Calibration** : Le multiplicateur 2 est issu d'une analyse historique :

$$\mathbb{P}(\text{Max Drawdown} > 2 \times \text{ATR}) < 5\% \quad \text{(sur portefeuille test)}$$

- **Mise à jour** : Recalculé chaque période avec un lissage exponentiel :

$$\text{ATR}_{\text{adapt}}^{(n)} = 0.8 \cdot \text{ATR}^{(n)} + 0.2 \cdot |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

# Paramètres à Optimiser

## 5.3 Optimisation Systématique

- **Inertie** $m$ :
  - Plage : $m \in [0.1, 2.0]$
  - Rôle : Contrôle la réactivité aux forces de marché.
  - Heuristique : $m \propto \frac{1}{\sigma_x^{(252)}}$ (inversement proportionnel à la volatilité annuelle)
- **Rigidité** $k$ :
  - Plage : $k \in [0.5, 3.0]$
  - Rôle : Force de rappel vers le prix d'équilibre.
  - Calibration :

$$k_{\text{opt}} = \frac{2}{\tau_{\text{half-life}}^2}, \quad \tau_{\text{half-life}} = \text{temps moyen de retour à la moyenne}$$

- **Amortissement** $c$ :
  - Plage : $c \in [0.1, 1.5]$
  - Rôle : Réduit l'effet momentum. Optimal proche de :

$$c_{\text{opt}} \approx \sqrt{4mk} \quad \text{(Amortissement critique)}$$

- **Seuil** $\tau$ :
  - Adaptatif : $\tau^{(n)} = \alpha \cdot \text{ATR}^{(n)}(20)$, $\alpha \in [0.3, 0.7]$
  - Méthode d'optimisation :

$$\alpha_{\text{opt}} = \arg\max_{\alpha} \left( \frac{\mu_{\text{ann}}}{\sigma_{\text{ann}}} \right) \quad \text{(Maximisation du ratio de Sharpe)}$$

### 5.4 Procédure d'Optimisation

1. **Backtesting** :
$$\text{Performance}(m, k, c, \alpha) = \sum_{t=1}^{T} \text{Signal}_t \cdot \Delta x_t - \lambda \cdot \text{MDD} \tag{27}$$
où $\lambda$ pénalise le drawdown maximum (MDD).

2. **Méthode** : Algorithme génétique avec contraintes :
   - Population : 100 combinaisons paramétriques
   - Critère : Sharpe Ratio ¿ 1.5
   - Mutations : ±10% des valeurs courantes

3. **Rééquilibrage** : Optimisation mensuelle via fenêtre glissante de 3 ans.

### Validation Croisée

- **Walk-Forward Analysis** : 80% in-sample / 20% out-of-sample sur 5 folds.
- **Test de Robustesse** : Perturbations paramétriques ±15% avec vérification de la stabilité PnL.

## Conclusion

### Synthèse des Apports

Ce modèle quantitatif innovant intègre avec succès des concepts de physique classique à l'analyse financière, offrant :

- Une **formalisation dynamique** des mouvements de prix via une équation différentielle stochastique
- Une **interprétation intuitive** des forces de marché (rappel, friction, chocs exogènes)
- Une **méthodologie systématique** pour la génération de signaux et la gestion des risques

### Limitations et Défis

- **Sensibilité paramétrique** : Nécessité d'une recalibration fréquente dans des régimes de marché volatils
- **Hypothèses simplificatrices** : Linéarité des forces de rappel/friction vs comportements de marché non-linéaires
- **Latence opérationnelle** : Délais d'exécution non-négligeables en intraday à haute fréquence

### Perspectives Futures

- **Extensions non-linéaires** : Introduction de termes quadratiques dans les forces (ex : $F_{\text{rappel}} \propto (x - x_{\text{eq}})^3$)
- **Apprentissage profond** : Hybridation avec des réseaux de neurones pour l'estimation temps-réel des paramètres

- **Gestion de portefeuille** : Application multi-actifs avec couplage inter-marchés via termes d'interaction

*"La simplicité est la sophistication ultime" — Léonard de Vinci*

Ce framework constitue une base solide pour des recherches ultérieures en ingénierie financière quantitative, combinant rigueur physique et pragmatisme trading.