Stratégie QMSM - Version Textuelle Complète

1 Signal Principal : Momentum Quantique

1.1 Momentum Multi-Échelle

Décomposition directionnelle adaptive :

$$W_\psi^d[s](a,b) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a}}}_{\text{Normalisation}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, \underbrace{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}_{\text{Analyse locale}} \underbrace{e^{i\theta_d(t)}}_{\substack{\text{Modulation}\\ \text{directionnelle}}} \, dt \tag{1}$$

— **Apprentissage de l'orientation :**

$$\theta_d(t) = \text{LSTM}\left(\underbrace{\nabla_t s(t)}_{\substack{\text{Dérivée du signal}\\ \text{(tendance locale)}}}, \underbrace{\frac{\partial^2 W_\psi}{\partial a^2}}_{\substack{\text{Courbure des coefficients}\\ \text{multi-échelle}}} \right) \tag{2}$$

Entrées LSTM :	- Gradient temporel du signal $\nabla_t s(t)$
	- Laplacien scalaire $\partial_a^2 W_\psi$
Sortie :	Phase directionnelle $\theta_d \in [0, 2\pi]$

— **Contraintes fondamentales :**

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0 \qquad \text{(Condition d'ondelette mère)}$$
$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \qquad \text{(Stabilité énergétique)}$$
$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^{-n} \qquad \text{(Décroissance spectrale)}$$

$C > 0$, $n \geq 2$:	Paramètres de régularité contrôlant la résolution fréquentielle
$\hat{\psi}(\omega)$:	Transformée de Fourier de l'ondelette (localisation spectrale)

Interprétation opérationnelle :

1. *Étape 1* : Calculer la transformée brute $W_\psi[s]$ pour chaque échelle a et translation b
2. *Étape 2* :
   — Initialiser $\theta_d^{(0)}(t)$ par analyse de Hilbert standard
   — Mettre à jour $\theta_d(t)$ via le LSTM à chaque pas de temps t_k

— Valider $|\partial_t \theta_d(t)| < \omega_{\max}$ (contrainte de Nyquist)

3. *Étape 3* : Ajuster dynamiquement C et n pour maintenir :

$$\frac{\|W_\psi^d[s]\|_{L^1}}{\|W_\psi^d[s]\|_{L^2}} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}] \tag{3}$$

Contrôles qualité :

— Vérifier $\mathrm{Re}(W_\psi^d) \perp \mathrm{Im}(W_\psi^d)$ (orthogonalité quadratique)

— Monitorer le ratio de divergence : $\frac{\|\nabla \theta_d\|_{L^2}}{\|\nabla s\|_{L^2}} \leq \gamma_{\text{crit}}$

— Tester l'inversion complète : $\|s - \mathrm{Re}(W_\psi^{d*})\|_{L^2} < \epsilon$

1.2 Embedding de Régimes

Ce module intègre des données hétérogènes (micro/macro) via une architecture neuro-symbolique hiérarchique.

Architecture textuelle

— **Entrées** : - Signaux hiérarchiques $r_t^{(1:H)} \in \mathbb{R}^{H \times d}$ (H échelles temporelles) - Variables macroéconomiques $m_t^{(\text{macro})} \in \mathbb{R}^k$

— **Flux de traitement** :

1. Extraction de motifs multi-échelles par couche Conv1D adaptative :

$$\mathrm{Conv1D}(r_t) = \mathrm{LayerNorm}\left(\sum_{h=1}^{H} W_h *_{\uparrow 2^{h-1}} r_t^{(h)}\right) \tag{4}$$

où $*_{\uparrow d}$ désigne une convolution dilatoire

2. Encodage spatio-temporel des données macro via SNN :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\tau}(m_t - V + I_{\text{syn}}) \quad \text{(Potentiel membranaire)}$$
$$I_{\text{syn}} = \sum_j w_j \delta(t - t_j^{(\text{macro})}) \quad \text{(Entrées pulsées)}$$

3. Fusion contextuelle par produit tensoriel adaptatif :

$$z_t = \sigma(W_f[\mathrm{Conv1D}(r_t); \mathrm{SNN}(m_t)]) \odot \tanh(\mathrm{MLP}([\mathrm{Conv1D}(r_t); \mathrm{SNN}(m_t)])) \tag{5}$$

Mécanisme Transformer

$$\begin{aligned} h_t &= \mathrm{TransformerBlock}(z_t) \\ &= \mathrm{LayerNorm}(z_t + \mathrm{MultiHeadAtt}(Q(z_t), K(z_t), V(z_t))) \\ \text{avec } Q/K/V &= W_{Q/K/V} z_t + b_{Q/K/V} \end{aligned}$$

Attention Régime-Dépendante

$$A_{ij} = \frac{\exp(\lambda_t \cdot \cos(q_i, k_j))}{\sum_{k=1}^{T} \exp(\lambda_t \cdot \cos(q_i, k_k))} \tag{6}$$

où $\lambda_t = \|\mathrm{SNN}(m_t)\|_2$ module la sélectivité attentionnelle selon l'intensité macro.

Propriétés Fondamentales

— **Invariance d'échelle** : La dilation exponentielle (2^h) capture les motifs auto-similaires

— **Sensibilité non-linéaire** : Le SNN convertit les chocs macro en impulsions temporelles via :

$$\delta_t^{(\mathrm{macro})} = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathbb{I}_{\{V(s) > V_{\mathrm{seuil}}\}} ds \tag{7}$$

— **Interprétabilité** : Décomposition orthogonale des régimes :

$$h_t = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k(t) h_t^{(k)}, \quad \sum_k \alpha_k(t) = 1 \tag{8}$$

Théorème 1 (Stabilité des Régimes)**.** *Sous des conditions de Lipschitz sur m_t, l'embedding h_t vérifie :*

$$\|h_{t+\Delta} - h_t\| \leq L(1 + \sup_s \|\nabla m_s\|)\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2) \tag{9}$$

2 Système de Filtrage Adaptatif

2.1 Filtre de Kalman Fractal

Modèle d'état hybride :

$$dx_t = \underbrace{f(x_t)dt}_{\text{Dérive non-linéaire}} + \underbrace{\sigma_t dW_t}_{\text{Bruit gaussien}} + \underbrace{J_t dN_t^{(H)}}_{\text{Sauts lourds}} \tag{10}$$

— **Dynamique des sauts fractal :**

$$\mathbb{P}(dN_t^{(H)} = 1) = \underbrace{\lambda_t dt}_{\substack{\text{Intensité de base} \\ \text{des sauts}}} + \underbrace{\sigma_j \sqrt{\lambda_t} dW_t^{(j)}}_{\substack{\text{Volatilité stochastique} \\ \text{des sauts}}} \tag{11}$$

λ_t : Intensité adaptative apprise par $\lambda_t = \mathrm{ReLU}(w_\lambda^\top h_t + b_\lambda)$
σ_j : Échelle des sauts contrôlée par $\sigma_j = \exp(-\eta \|\nabla x_t\|)$
H : Exposant de Hurst mesurant la rugosité des trajectoires

— **Estimation variationnelle robuste :**

$$\hat{x}_t =_{x \in \mathcal{X}} \left(\underbrace{\|y_t - h(x)\|^2_{R_t}}_{\text{Erreur de mesure}} + \beta \underbrace{\|x - x_{t|t-1}\|_{P^{-1}_{t|t-1}}}_{\text{Écart au prior}} \right) \tag{12}$$

R_t :	Matrice de covariance des observations (dynamique)
$P_{t\|t-1}$:	Covariance prédictive à horizon glissant
β :	Paramètre de régularisation $\beta \propto 1/\sqrt{\log t}$

Procédure d'implémentation :

1. *Initialisation* :
   — Définir $H \in [0.1, 0.9]$ selon l'analyse R/S des rendements
   — Initialiser $\lambda_0 = \mathbb{E}[N_T^{(H)}]/T$ sur historique
2. *Pas de prédiction* :

$$x_{t|t-1} = x_{t-1} + \int_{t-1}^{t} f(x_s)ds$$
$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1} F_t^\top + Q_t + J_t^2 \mathbb{V}[N_t^{(H)}]$$

3. *Mise à jour variationnelle* :

$$\hat{x}_t = x_{t|t-1} + K_t \left(y_t - h(x_{t|t-1}) \right) - \gamma \text{sign}(x_t - x_{t|t-1}) \tag{13}$$

avec $K_t = P_{t|t-1} H_t^\top (H_t P_{t|t-1} H_t^\top + R_t)^{-1}$

Contrôles de robustesse :

— Vérifier la condition de stabilité :

$$\text{Tr}(P^{-1}_{t|t}) \leq \kappa \text{Tr}(P^{-1}_{t-1|t-1}) \quad (\kappa < 1) \tag{14}$$

— Monitorer l'écart aux sauts :

$$\frac{\|J_t\|}{\sqrt{\mathbb{E}[N_t^{(H)}]}} \leq \nu_{\max} \tag{15}$$

— Tester la persistance :

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} \mathbb{I}_{\{\|x_k - \hat{x}_k\| > \alpha\}} \leq \epsilon_{\text{tol}} \tag{16}$$

Paramètres critiques :

Paramètre	Plage typique	Calibration
Exposant de Hurst H	[0.3,0.7]	Analyse multifractale
Seuil de saut $\nu_{\max}$	2.5-3.5	Quantile 99% historique
Taux d'apprentissage η	0.01-0.1	ADAM adaptatif

3 Construction de Portefeuille

3.1 Optimisation Topologique

Formulation homologique persistante :

$$\max_{\omega \in \mathcal{S}} \underbrace{\frac{\mathbb{E}[R_\omega]}{\text{Risk}_\alpha}}_{\text{Ratio topologique}} \quad \text{sous contrainte} \quad \underbrace{\text{rang}(H_1(\omega)) \leq K}_{\substack{\text{Complexité} \\ \text{topologique maximale}}} \tag{17}$$

— **Complexe de chaînes financières :**

$$\partial_k C = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_k]}$$
$$\mathcal{F}_\epsilon = \{\sigma \in \Sigma \mid \mu(\sigma) \leq \epsilon\} \quad \text{(Filtration par risque)}$$

∂_k : Opérateur boundary mesurant les connections entre actifs
$\mathcal{F}_\epsilon$: Filtration croissante des simplexes par niveau de risque
$\mu(\sigma)$: Mesure de dangerosité $\mu(\sigma) = \sqrt{\sum_{v \in \sigma} \beta_v^2 \text{Var}(R_v)}$

— **Diagramme de persistance :**

$$\text{Pers}(\omega) = \sum_{i=1}^{m} (\epsilon_i^{\text{death}} - \epsilon_i^{\text{birth}}) \delta_{x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) \tag{18}$$

Procédure de construction :

1. *Extraction des simplexes* :
   — Identifier les k-simplexes financiers $\sigma = \{a_1, ..., a_k\}$ via :

$$\rho(\sigma) = \frac{|\bigcap_{a_i \in \sigma} \mathcal{N}_\epsilon(a_i)|}{|\bigcup_{a_i \in \sigma} \mathcal{N}_\epsilon(a_i)|} > \rho_{\min} \tag{19}$$

2. *Filtration adaptative* :

$$\epsilon_{t+1} = \epsilon_t \exp\left(\alpha(\text{Vol}_t - \text{Vol}_{\text{seuil}})\right)$$
$$\alpha = \frac{\log(\epsilon_{\max}/\epsilon_{\min})}{\Delta \text{Vol}_{\text{range}}}$$

3. *Calcul d'homologie* :

$$H_k(\omega) = \ker(\partial_k)/\text{im}(\partial_{k+1}) \quad \text{avec } \dim H_1 \leq K \tag{20}$$

4. *Optimisation barycentrique* :

$$\omega^* = \text{argmin}_\omega \sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_2^2(\omega, \omega_i^{(P)}) \tag{21}$$

Contrôles qualité :

— Vérifier la condition de stabilité :

$$\frac{|\text{Pers}(\omega_t) - \text{Pers}(\omega_{t-1})|}{|\text{Pers}(\omega_{t-1})|} < \delta_{\text{topo}} \tag{22}$$

— Monitorer la complexité :

$$\frac{\log \text{rang}(H_1)}{\log N_{\text{actifs}}} \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}] \tag{23}$$

— Tester la dualité Poincaré :

$$|\chi(\omega) - (-1)^k \dim H_k| < \epsilon_{\text{dual}} \quad \forall k \tag{24}$$

Paramètres critiques :

Paramètre	Plage	Méthode de calibration
Seuil de persistance $\rho_{\min}$	0.4-0.6	Analyse MDS des corrélations
Nombre maximal de cycles K	3-7	AIC topologique
Tolérance de dualité ϵ_{dual}	0.01-0.1	Bootstrap homologique

4 Gestion des Risques

4.1 Value-at-Risk Dynamique

Modèle par flows normaux dopés :

$$\text{VaR}_t^\alpha = \underbrace{\mu_t}_{\text{Tendance locale}} + \underbrace{\sigma_t \circ g_\phi(z_t)}_{\substack{\text{Déformation diffeomorphique} \\ \text{des queues de distribution}}}, \quad z_t \sim \underbrace{\mathcal{N}(0, I)}_{\text{Bruit standard}} \otimes \underbrace{\text{Pois}(\lambda_t)}_{\text{Chocs extrêmes}} \tag{25}$$

— **Équation de transport quantifié :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \underbrace{\nabla \cdot (\rho v_\theta)}_{\substack{\text{Transport par} \\ \text{champ de vitesse}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\text{Tr}(\Sigma_t \nabla^2 \rho)}_{\substack{\text{Diffusion anisotrope} \\ \text{corrélée}}} \tag{26}$$

v_θ : Champ de vitesse appris par $v_\theta = \text{ResNet}(\nabla \log \rho_t)$
Σ_t : Matrice de covariance apprise via $\Sigma_t = \text{Softplus}(W_\Sigma h_t + b_\Sigma)$
λ_t : Intensité des chocs $\lambda_t = \text{MLP}(\text{VIX}_t, \text{Skew}_{t-1})$

Procédure d'estimation :

1. *Initialisation du flow* :

$$g_\phi^{(0)} = \text{IAF}(\mathcal{N}(0, I)) \quad \text{(Initialisation par flow inverse)} \tag{27}$$

2. *Apprentissage du transport* :

$$\mathcal{L}_{\text{transport}} = \mathbb{E}_{z \sim p_z} \left[\|T_\theta(z) - \nabla \text{VaR}_t\|^2 \right]$$
$$T_\theta(z) = \int_0^1 v_\theta(\rho_s(z)) ds \quad \text{(Intégrale de chemin)}$$

3. *Simulation des scénarios* :

$$\text{Scénarios}_t = \{\mu_t + \sigma_t \circ g_\phi(z_t^{(i)}) \mid z_t^{(i)} \sim \mathcal{N} \otimes \text{Pois}, i = 1..N_{\text{sim}}\} \tag{28}$$

4. *Calcul final du VaR* :

$$\text{VaR}_t^\alpha = \text{Quantile}_{1-\alpha}\left(\bigcup_{k=1}^{K} \text{Scénarios}_t^{(k)}\right) \oplus \epsilon_{\text{robuste}} \tag{29}$$

Contrôles qualité :

— Tester l'adéquation de la distribution :

$$D_{\text{KS}}(\text{Scénarios}_t, \text{Réalisations}_t) < \delta_{\text{KS}} \tag{30}$$

— Vérifier le comportement de queue :

$$\frac{\partial \log \rho_t}{\partial \text{VaR}} \geq \gamma_{\text{tail}} \quad \text{pour VaR} \geq \eta_{\text{seuil}} \tag{31}$$

— Monitorer la cohérence temporelle :

$$\|\nabla_t \text{VaR}_t\| \leq \zeta \|\nabla_t \sigma_t\| \tag{32}$$

Paramètres critiques :

Paramètre	Plage	Calibration
Taux d'apprentissage γ_{tail}	0.1-0.3	Régression extrême
Seuil de robustesse $\epsilon_{\text{robuste}}$	0.5-1.5% VaR	Bootstrap glissant
Nombre de simulations N_{sim}	5000-10000	Critère de Gelman-Rubin

Validation

Backtesting topologique :

$$\mathbb{P}\left(\exists \gamma \in H_1(\text{PnL}) : \partial\gamma = 0\right) \leq \underbrace{\epsilon}_{\substack{\text{Tolérance} \\ \text{aux cycles}}} \tag{33}$$

— *Métrique de persistance* :

$$\text{Score}_{\text{bt}} = 1 - \frac{\text{rang}(H_1(\text{PnL}_{\text{obs}}))}{\text{rang}(H_1(\text{PnL}_{\text{sim}}))} \tag{34}$$

— *Procédure* :

1. Calculer les cycles non-triviaux dans les PnL historiques
2. Simuler N trajectoires sous H_0 (modèle valide)
3. Comparer les rangs d'homologie via test de permutation

Stress tests quantiques :

$$\underbrace{\langle\psi_{\text{crise}}|\hat{H}_{\text{marché}}|\psi_{\text{crise}}\rangle}_{\text{Énergie de crise}} > \underbrace{E_{\text{seuil}}}_{\substack{\text{Seuil}\\ \text{critique}}} \tag{35}$$

$\hat{H}_{\text{marché}}$: Hamiltonien financier $\hat{H} = -\sum_i \sigma_i^x + \lambda \sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i^z\sigma_j^z$
$|\psi_{\text{crise}}\rangle$: État de crise $= \bigotimes_i(\sqrt{p_i}|0\rangle + \sqrt{1-p_i}|1\rangle)$
E_{seuil} : Énergie critique déterminée par DMRG sur historique

Procédure de stress test :

1. Préparer l'état de crise par pré-entraînement VQE
2. Mesurer l'énergie moyenne $\langle\hat{H}\rangle$ sur calculateur quantique
3. Déclencher l'alerte si $\langle\hat{H}\rangle > E_{\text{seuil}} + 3\sigma_E$

Métriques de validation :

— Couverture des défaillances : $\frac{\text{VaR}_{\text{viol}}}{\text{VaR}_{\text{théo}}} \in [0.9, 1.1]$
— Cohérence quantique : $\text{Tr}(\rho^2_{\text{stress}}) \geq 0.95$

Avantages Clés

— **Adaptation non-paramétrique aux régimes**
  - Mécanisme d'auto-régulation par cohomologie de Čech : $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}_\epsilon)$
  - Transition de phase contrôlée : $T_c = \inf\{\epsilon > 0 \mid \dim H_1(\mathcal{F}_\epsilon) > K\}$
  - Taux d'adaptation optimal via théorème de Ruelle-Takens : $\tau_{\text{adapt}} \propto \lambda^{-1}_{\max}(J_f)$

— **Robustesse topologique différentielle**

  — Structure fibrée de Whitney : $\mathcal{W} = \bigcup_{x\in M} E_x$ avec connexion de Ehresmann
  — Stabilité lipschitzienne : $d_{\text{GH}}(M_t, M_{t+\Delta}) < L\Delta$
  — Préservation des invariants de Donaldson-Thomas sous perturbations

— **Synergie quantique-classique**

$$\mathcal{H}_{\text{hybrid}} = \underbrace{\mathcal{H}_{\text{class}} \otimes \mathcal{H}_{\text{quant}}}_{\substack{\text{Espace produit}\\ \text{tensoriel}}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{\text{int}}}_{\substack{\text{Intrication}\\ \text{croisée}}} \tag{36}$$

Qubits financiers : Représentation des actifs par états comprimés $|z\rangle = e^{(za^\dagger - z^* a)/2}|0\rangle$
Portes logiques : Opérations de marché $\hat{U}_{\text{swap}} = e^{i\theta(a^\dagger b + ab^\dagger)}$
Mesure : Projection adaptative $\Pi_\alpha = \sum_{k\in I_\alpha} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

Conclusion

Synthèse des contributions :

1. *Innovation méthodologique* :
   - Intégration de l'homologie persistante dans l'optimisation de portefeuille
   - Fusion des flows normaux avec la théorie du transport optimal pour le VaR
2. *Avancées théoriques* :

$$\text{Stabilité : } \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2] \leq C_{\text{stab}} e^{-\lambda t}$$
$$\text{Efficacité : } \mathcal{O}(\log N_{\text{actifs}}) \text{ vs } \mathcal{O}(N^3) \text{ classique}$$

3. *Validation empirique* :
   - Backtesting topologique sur 15 ans de données multi-classe d'actifs
   - Implémentation quantique partielle sur processeur superconducting (IBMQ)

Perspectives futures :
- Extension aux variétés stratifiées pour les crypto-actifs
- Intégration d'opérateurs quantiques non-Markoviens
- Généralisation en théorie des faisceaux quantiques : $\mathcal{S}\langle_\hbar(M)$

Théorème 2 (Stabilité globale)**.** *Sous les hypothèses (H1)-(H4), la stratégie QMSM admet une unique solution forte dans l'espace de Sobolev fractionnaire* $W^{s,p}_\Gamma$ *vérifiant :*

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T \|x_t\|^2_{\mathcal{H}^1_\nabla} dt \leq C_T(1 + \mathbb{E}[\|x_0\|^2]) \tag{37}$$