$T = ?$ $\qquad x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$ *۱

$RHS = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ $\qquad RHS = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

دوره تناوب ← $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right] = \pi$ ک.م.م

$T = nT_1 = mT_2$

$\hookrightarrow n\frac{\pi}{5} = m\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \frac{n}{5} = \frac{m}{2} \rightarrow 2n = 5m$

کوچکترین مقداری که این رو بسازه ← ۵

$T = nT_1 \rightarrow \frac{\pi}{5} \times 5 = \pi$ ← ک.م.م $\quad n=5 \quad m=2$

$x[n] = \underbrace{1}_{RHS=1} + \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{7}n}}_{n=2} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}$ *۲

$RHS = 1 \rightarrow$

$\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5 \rightarrow$ ک.م.م $\{5, 7, 1\} = 35$ $\qquad \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7$

$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$, $\quad x[n] = u[Mn - n_0]$ *۳

$x[n] = u[-n+3] \quad M = -1 \quad , n_0 = -3$

$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$ *۴

$\rightarrow E_\infty ? \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+2) - \delta(\tau-2)\,dt$

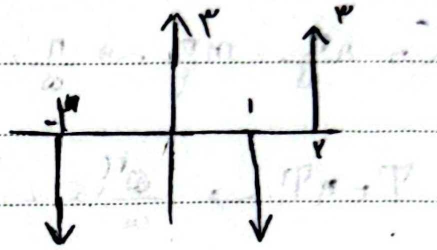
$= \begin{cases} 0 & t<-2 \\ 1 & -2 \leq t \\ 0 & t>2 \end{cases} \longrightarrow E_\infty = \int_{-2}^{2} dt = 4$

۵) سیگنال متناوب $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2 & 1 < t < 2 \end{cases}$

مشتق سیگنال $\longrightarrow g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k)$

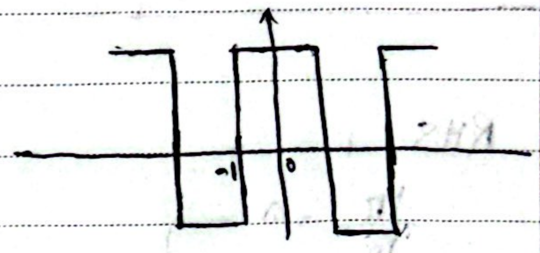
$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t-t_1) + A_2 g(t-t_2)$$

$$g(t) = 3\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) - 3\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2k-1)$$



$A_1 = 3 , t_1 = 0$

$A_2 = -3 \quad t_2 = 1$



۶)

$S_1 : y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$

$S_2 : y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2} x_2[n-3]$

$$y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2} x_2[n-3] = y_1[n-2] + \frac{1}{2} y_1[n-3] =$$

$$2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + \frac{1}{2}(2x_1[n-3] + 4x_1[n-4])$$

$$= 2x_1[n-2] + 5x_1[n-3] + 2x_1[n-4]$$

$y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$: رابطه خروجی - ورودی برای S

$$y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1] = 2y_2[n] + 4y_2[n-1] =$$

$$2\left(x_2[n-2] + \frac{1}{2} x_2[n-3]\right) + 4\left(x_2[n-3] + \frac{1}{2} x_2[n-4]\right)$$

$$= 2x_2[n-2] + 5x_2[n-3] + 2x_2[n-4]$$

$$\longrightarrow y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

۷* سیستم پیوسته دارم با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$

الف) $y(t) = x(\sin(t))$ $\quad y(-\pi) = x(0)$

سیستم کازال نیست زیرا خروجی $y(t)$ در برخی لحظات ممکن است به مقادیر لحظات آینده ای $x(t)$ بستگی داشته باشد

مثلاً $y(-\pi) = x(0)$

ب) $\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) = x_1(\sin(t)) \\ x_2(t) \to y_2(t) = x_2(\sin(t)) \end{cases}$ $\quad x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y_3(t) = x_3(\sin t)$

$= a x_1(\sin t) + b x_2(\sin(t)) = a_1 y_1(t) + b y_2(t)$

بنابراین سیستم خطی است.

۸* (۱.۲۰)

$x(t) = e^{j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{j3t}$

$x(t) = e^{j-2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{-j3t}$

الف) $\begin{cases} x(t) = e^{2jt} \to y(t) = e^{j3t} \\ x(t) = e^{-j2t} \to y(t) = e^{-j3t} \end{cases}$

$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{j2t} + e^{-j2t}) \to y_1(t) = \frac{1}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t})$

$x_1(t) = \cos(2t) \to y_1(t) = \cos(3t)$

ب) $x_2(t) = \cos(2(t - \frac{1}{2})) = e^{-j} e^{j2t} + e^{j} e^{j2t}$

$\to x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-j} e^{j2t} + e^{j} e^{-2jt})$

$\to y_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-j} e^{3jt} + e^{j} e^{-3tj}) = \cos(3t - 1)$

$x_1(t) = \cos(2(t - \frac{1}{2})) =$

$\to y(t) = \cos(3t - 1)$

۹) تعیین اینکه آیا سیگنال‌های گسسته در زمان زیر متناوب اند یا نه

الف) $x[n] = \sin\left[\frac{6\pi}{7}n+1\right] \rightarrow$ پریودیک با پریود ۷

ب) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right) \rightarrow$ غیر پریودیک

ج) $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \rightarrow$ پریودیک با پریود ۸

د) $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] \rightarrow x[n] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(3\pi n/4\right) + \cos\left(\pi n/4\right)\right]$

ه) $x[n] = 2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] +$ متناوب با دوره تناوب ۸

$\sin\left[\frac{\pi}{8}n\right] - 2\cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right] \rightarrow$ متناوب با دوره تناوب ۱۶

---

۱۰) $x_1(t)$ یک نمایی مختلط متناوب است $\quad x_1(t) = j e^{j10t} \rightarrow$

الف) $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

ب) $x_2(t)$ یک نمایی مختلط ضرب شده به یک تابع نمایی است از این رو $x_2(t)$ نامتناوب است $\quad x_2(t) = e^{(-1+j)t} \rightarrow$

ج) $x_3[n]$ یک سیگنال نمایی مختلط با دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{\pi}=2$ می باشد $\quad x_3[n] = e^{j7\pi n}$

---

۱۱) متناوب بودن یا نبودن سیگنال های زیر:

الف) $x(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$

$x_1(t)$ متناوب نیست زیرا برای $t<0$ صفر شده

ب) $x_2[n] = u[n] - u[-n]$

به ازای همه مقادیر n ، $x[n] = 1$ است و تابع ثابت با دوره تناوب ۱ می باشد

۱۲) P_∞ ، E_∞ سیگنال‌های زیر؟

الف) $x_1(t) = e^{-2t}u(t) \rightsquigarrow E_\infty < \infty$

$$E_\infty = \int_0^\infty e^{-4t}\,dt = \frac{1}{4} \to P_\infty = 0$$

ب) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$; $|x_2(t)| = 1$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x_2(t)|\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt = 1$$

ج) $x_3(t) = \cos t$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(t)\,dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^2 t\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}$$

د) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \to |x_1[n]^2| = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$E_\infty < \infty$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{0}^{+\infty} (1/4)^n = 4 \;,\; P_\infty = 0$$

---

۱۳) قطبی:

$5 = 5e^{j0}$, $-2 = 2e^{j0}$, $-4 = 4e^{-j}$

$$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$1 + j \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \end{cases} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$(1-j)^2 = (1^2 - 2j + j) = 0 - 2j = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$j(1-j) = -1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

۱۳ ادامه $\rightarrow$

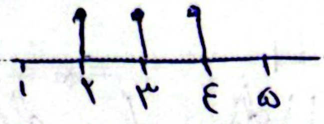
$$\frac{1+j}{1-j} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

و

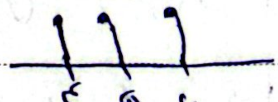
$$\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}} = e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-j\frac{\pi}{12}}$$

---

۱۴) الف) $x[n-2]$

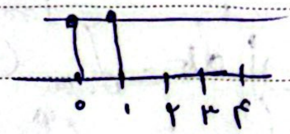


ب) $x[4-n]$



ج) $x[2n]$

د) $x[n^2]$



---

۱۵)

a) ~~[illegible]~~ $x[n+4]=0 \quad n<-6,\ n>0$

b) $x[-n]=0 \quad n>2,\ n<-4$

c) $x[-(n+2)] \longrightarrow x[n+2]=0 \quad x<-4,\ n>2$

$x[-(n+2)]=0 \quad x>4,\ x<-2$

d) $x(3t)=0 \quad t<1$

e) $x(\frac{1}{3}t)=0 \quad t<9$

---

۱۶)

$\frac{1}{2}e^{j\pi}: \ x = r\cos\omega = \frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2}$

$y = r\sin\omega = \frac{1}{2}\sin\pi = 0$

$\frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{-1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{-1}{2}+0j$

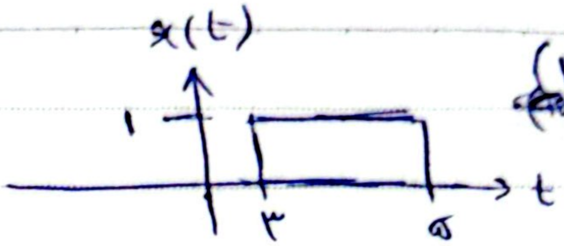
$e^{j\frac{\pi}{2}}: \ x = r\cos\omega = 0 \quad y = r\sin\omega = 1 \longrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

$e^{-j\frac{\pi}{2}}: \ x=0 \quad y = \sin(\frac{-\pi}{2}) = -1 \longrightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

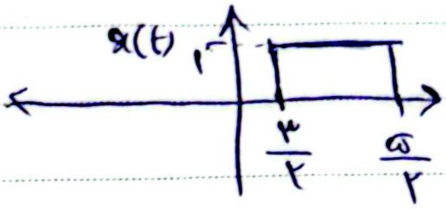
$e^{j\frac{5\pi}{2}}: \ x=0 \quad y = \sin\frac{5\pi}{2} = 1 \rightarrow e^{-j\frac{5\pi}{2}} = j$

۱۷)

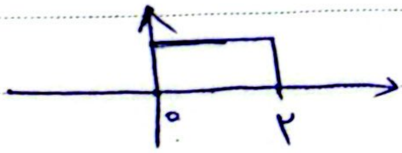
الف) $x(2t-4)$ از $x(t-4) \rightarrow$



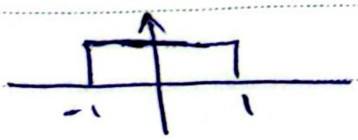
$x(2t-4)$



ب) $x(1-t)$



ج) $x^2(t) =$



۱۸)

$$x(t) = e^{t}\cos(t)\{u(t) - u(t-2)\}$$

$$x_{even}(t) = \frac{e^{t}\cos t\{u(t)-u(t-2)\} + e^{-t}\cos t\{u(-t) - u(-t+2)\}}{2}$$

$$x_{odd}(t) = \frac{e^{t}\cos t\{u(t)-u(t-2)\} - e^{-t}\cos t\{u(-t)-u(-t+2)\}}{2}$$

۱۸) مگر آنکه سیگنال دنباله ما تماماً زوج یا فرد باشد.