Отчет по практическому заданию 1
Численные методы линейной алгебры
Гивенс Хаусхолдер

Хлопинская Арина
301 группа

6 ноября 2024 г.

1 Постановка задачи

Целью данного задания является сравнение двух методов QR-разложения матрицы: метода Гивенса и метода Хаусхолдера. Требуется выполнить QR-разложение заданной матрицы обоими методами, сравнить полученные разложения, вычислив матричную норму разности $||A - QR||$, и, воспользовавшись наиболее точным разложением, решить систему линейных уравнений $Ax = f$. Дополнительно требуется оценить точность решения системы путем вычисления нормы невязки и нормы погрешности решения.

2 Описание методов факторизации

2.1 Метод вращений Гивенса

Метод Гивенса (в отечественной математической литературе называется также методом вращений) используется для разложения матриц в виде A=QR (Q - унитарная, R — правая треугольная матрица). При этом матрица Q хранится и используется не в явном виде, а в виде произведения матриц вращения. Каждая из матриц вращения (Гивенса) номера столбцов:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & -s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

может быть определена парой индексов и одним параметром. Это позволяет в стандартной реализации метода Гивенса хранить результаты разложения на месте матрицы A без использования дополнительных массивов. QR-разложение матрицы A может быть использовано в разных целях: как для решения СЛАУ вида Ax=b, так и в качестве одного из шагов так называемого QR-алгоритма нахождения собственных чисел матрицы.

На каждом шаге алгоритма две строки преобразуемой матрицы подвергаются преобразованию вращения. При этом параметр такого преобразования подбирается так, чтобы один из поддиагональных элементов преобразуемой матрицы стал нулевым. Сначала в нуль последовательно обращаются элементы 1-го столбца, затем 2-го, и т.д. до n-1-го, после чего получившаяся матрица - это и есть матрица R. Сам шаг алгоритма распадается на две части: подбор параметра вращения и выполнение вращения над двумя строками матрицы. Поскольку слева от "рабочего"столбца элементы вращаемых строк равны 0, то там выполнять вращение не нужно. Вращение элементов строк в текущем столбце выполняется одновременно с подбором параметра вращения. Таким образом, вторая часть шага заключается в выполнении вращения двумерных векторов, составленных из элементов вращаемых строк в столбцах справа от "рабочего". Каждое такое вращение эквивалентно перемножению двух комплексных чисел (или в сумме 4 умножениям, 1 сложению и 1 вычитанию действительных), одно из которых имеет модуль 1. Подбор параметра вращения по двум элементам "рабочего"столбца является более сложной операцией, что связано в том числе и с необходимостью минимизации влияния ошибок округления. Обычно для хранения матрицы вращения используется тангенс половинного угла t, с которым простыми формулами (т.н. "боевыми формулами тригонометрии") связаны косинус c и синус s самого угла:

$c = (1-t^2)/(1+t^2),\ s = 2t/(1+t^2)$

Именно t обычно и хранится в соответствующем элементе массива.

2.2 Метод отражений Хаусхолдера

Метод Хаусхолдера (в советской математической литературе чаще называется **методом отражений**) используется для разложения матриц в виде $A{=}QR$ (Q - унитарная, R — правая треугольная матрица). При этом матрица Q хранится и используется не в своём явном виде, а в виде произведения матриц отражения. Каждая из матриц отражения может быть определена одним вектором. Это позволяет в классическом исполнении метода отражений хранить результаты разложения на месте матрицы A с использованием минимального одномерного дополнительного массива.

В методе Хаусхолдера для выполнения QR-разложения матрицы используются умножения слева ее текущих модификаций на матрицы Хаусхолдера (отражений).

Матрица отражений (Хаусхолдера) – матрица вида $U = E - 2ww^*$, где w – вектор, удовлетворяющий равенству $w^*w = 1$. Является одновременно унитарной ($U^*U = E$) и эрмитовой ($U^* = U$), поэтому обратна самой себе ($U^{-1} = U$).

На i-м шаге метода с помощью преобразования отражения “убираются” ненулевые поддиагональные элементы в i-м столбце. Таким образом, после $n-1$ шагов преобразований получается матрица R из QR-разложения.

На каждом из шагов метода матрицу отражений обычно представляют не в стандартном виде, а в виде $U = E - \frac{1}{\gamma}vv^*$, где v находится через координаты текущего i-го столбца так: s - вектор размерности $n+1-i$, составленный из элементов i-го столбца, начиная с i-го.

Если $(s,s) = 0$, то $v = e_i$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

В остальных случаях по алгоритму вычисляется $u = \frac{1}{\sqrt{(s,s)}}s$, и далее $v_j = 0$ при $j < i$, $v_j = u_{j-i+1}$ при $j > i$, а $v_i = 1$, если $u_1 = 0$ и $v_i = \frac{u_1}{|u_1|}(1+|u_1|)$ для остальных значений. При этом $\gamma = 1 + |u_1| = |v_i|$.

После вычисления вектора v подстолбцы справа от ведущего модифицируются по формулам $x' = x - \frac{(x,v)}{\gamma}v$.

3 Результаты вычислений

Входная матрица A была считана из файла `SLAU_var_9.csv`.

- Время выполнения QR-разложения Гивенса: 20 мс
- Время выполнения QR-разложения Хаусхолдера: 2079 мс
- Норма разности $||A - QR||$ для Гивенса: 6.18672×10^{-13}
- Норма разности $||A - QR||$ для Хаусхолдера: 9.41164×10^{-13}

В данном случае, метод Гивенса показал меньшую норму разности $||A - QR||$, что говорит о его большей точности для данной матрицы. Несмотря на то, что метод Хаусхолдера обычно считается более эффективным, в данном конкретном случае метод Гивенса оказался предпочтительнее, так как обеспечил большую точность при приемлемом времени выполнения.

Для решения системы уравнений $Ax = f$ был использован метод Гивенса. Вектор f был сгенерирован путем умножения матрицы A на случайно сгенерированный вектор x_{true} с компонентами из интервала [-1, 1].

- Время решения системы: 0 мс
- Норма невязки $||r|| = ||f - Ax||$: 9.9476×10^{-14}
- Норма погрешности $||\delta|| = ||x - x_{true}||$: 1.55431×10^{-15}

4 Выводы

В данном задании были реализованы и сравнены два метода QR-разложения: метод Гивенса и метод Хаусхолдера. Для данной конкретной матрицы метод Гивенса показал лучшую точность. Решение системы уравнений с использованием QR-разложения методом Гивенса продемонстрировало высокую точность, о чем свидетельствуют малые значения нормы невязки и нормы погрешности.

5 Скрипт для компиляции и запуска

Ниже приведен скрипт для компиляции и запуска программы:

```
$ g++ -o ex_1 ex_1.cpp -std=c++11
$ $./ex_1 SLAU_var_9.csv
```