

Второе практическое задание по курсу лекций "Численные методы линейной алгебры"

Требуется явным методом Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров [1] приближенно решить систему линейных алгебраических уравнений

$$x + Ax = F \quad (1)$$

с симметричной положительно определенной матрицей $A \in R^{n \times n}$. Матрица определяется вариантом задания и предоставляется в строковом виде в файле формата csv.

Для успешного выполнения задания необходимо:

1. Случайным образом сгенерировать вектор-столбец решений x с равномерно распределенными на отрезке $[-1, 1]$ компонентами x_i $i = 1, 2, \dots, n$.
2. По известному решению x вычислить правую часть F системы уравнений (1).
3. Решить систему уравнений прямым методом, указанным в задании 1, вычислить среднеквадратическую норму погрешности решения.
4. С помощью теоремы Гершгорина [2] оценить спектр матрицы системы уравнений (1).
5. На языке программирования C (или C++), написать программу, реализующую метод Чебышева решения системы линейных алгебраических уравнений. Решить систему (1) методом Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров, обеспечивающих устойчивость решения к ошибкам округления. Количество итераций взять равным степени двойки. Подобрать наименьший показатель степени, при котором погрешность решения на последней итерации в среднеквадратической норме не превосходит погрешность прямого метода. Начальное приближение итерационного метода выбрать равным нулю.
6. Построить график среднеквадратической нормы погрешности решения как функции номера итерации метода Чебышева.
7. Вычислить относительную погрешность решения, полученного методом Чебышева.
8. Предоставить отчет о проделанной работе (в виде pdf-файла), содержащий постановку задания, описание метода решения задачи, листинг программы, реализующей метод Чебышева. В отчет также следует включить следующие результаты:
 - оценки спектра матрицы системы уравнений с указанием способа их вычисления;
 - количество итераций метода Чебышева;
 - среднеквадратическую норму погрешности решения прямого метода и метода Чебышева, относительную погрешность решения метода Чебышева;
 - график среднеквадратической нормы погрешности решения.

Литература.

1. Самарский А.А, Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, 1978.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. Наука, 1966.