

高等电动力学课程总结笔记

Astral Projection

2026 年 1 月 7 日

目录

0.1 重要常数	6
0.2 矢量分析：参见 Jackson 书扉页	6
0.2.1 矢量运算律	6
0.3 nabla 算符	7
0.3.1 各种坐标系下的 nabla 算符展开	7
0.4 nabla 算符与矢量积的运算律	7
0.5 偏微分方程	7
0.6 特殊函数	7
0.6.1 delta 函数	7
0.6.2 Bessel 函数	7
0.6.3 Legendre 多项式	8
0.7 张量代数的基本规则	8
0.8 材料性质参数计算	8
1 第一章：基础知识回顾	8
1.1 麦克斯韦方程组	8
1.2 边界条件	8
2 静电场	8
2.1 静电场的基本性质	9
2.1.1 叠加原理	9
2.1.2 泊松方程和拉普拉斯方程	9
2.2 高斯定理	9
2.2.1 静电场的边界条件	9
2.2.2 静电场的能量	9
2.2.3 导体表面和介质界面的静电场	10
2.3 静电场的求解方法	10

2.3.1 分离变量法	10
2.3.2 镜像法	10
2.3.3 格林函数法（需要进一步加深理解）	11
2.3.4 多极展开	11
2.4 电偶极子、电四极子	11
3 静磁场	12
3.1 静磁场的基本性质	12
3.1.1 比奥-萨伐尔定律	12
3.1.2 安培环路定理	12
3.1.3 磁矢势	12
3.2 磁介质中的静磁场	12
3.2.1 磁化强度和磁极化强度	12
3.2.2 磁场强度	12
3.2.3 磁介质中的边界条件	12
3.3 静磁场的能量	13
4 电磁场的基本性质	13
4.1 能量与能流	13
4.2 动量	13
4.3 角动量	13
5 电磁波	13
5.1 波动方程	13
5.2 平面电磁波	14
5.2.1 电磁场关系	14
5.2.2 波阻抗	14
5.2.3 能量密度与能流密度	15
5.2.4 复数形式表达	15
5.3 电磁波的能量和动量	15
5.4 平面电磁波的传播	16
5.4.1 理想介质	16
5.4.2 导电媒质	16
6 电磁波的反射和折射	19
6.1 边界条件	19
6.2 理想介质单一交界面的解	20
6.2.1 垂直极化：电场方向垂直于法平面，磁场方向由右手螺旋定则确定	20
6.2.2 水平极化：磁场方向垂直于法平面，电场方向由右手螺旋定则确定	20

6.3 全透射与全反射	21
6.3.1 全透射: 反射系数为 0, 仅出现在平行极化分量中	21
6.3.2 全反射: 透射系数为 0, 各种极化模式都可能发生	21
7 波导基本理论	22
7.1 纵向均匀系统求解思路	22
7.2 从麦克斯韦方程组导出的波动方程	22
7.2.1 直角坐标系的波动方程及其基本解	23
7.2.2 柱坐标系的波动方程及其基本解	23
7.3 纵向均匀系统的纵横关系	23
7.4 纵向均匀系统的模式	23
7.5 模式的传输特性	23
7.6 波导的阻抗与功率传输	25
8 几种常见波导	25
8.1 矩形波导	25
8.1.1 基础性质	26
8.1.2 场分布表达式:	27
8.1.3 场分布图	28
8.2 圆波导	30
8.2.1 基础性质	30
8.2.2 场分布表达式:	32
8.2.3 场分布图	33
8.3 同轴线	33
8.4 介质加载波导	34
8.4.1 窄边单侧填充方波导	34
8.4.2 双侧对称填充方波导	36
8.4.3 角向均匀填充圆波导	36
8.4.4 对称平板介质波导	37
9 谐振腔基础理论	37
9.1 谐振系统的纵横关系	37
9.2 储能、表面损耗与品质因数	37
9.3 其他作为加速器谐振腔的重要参数	38
10 常见谐振腔	38
10.1 矩形谐振腔	38
10.1.1 基础性质	38
10.1.2 场分布表达式	39

10.1.3 腔内储能	39
10.1.4 腔壁损耗	40
10.1.5 品质因数	40
10.2 圆柱谐振腔	40
10.2.1 基础性质	40
10.2.2 场表达式	41
10.2.3 腔内储能	41
10.2.4 腔壁损耗	42
10.2.5 品质因数	42
11 第十一章：谐振腔链和空间谐波	42
11.1 椭合谐振腔	42
11.1.1 双腔系统	42
11.1.2 N 腔耦合模式的解	42
11.2 无穷长均匀腔链	42
11.2.1 空间谐波	43
11.2.2 周期结构色散特性	43
11.3 盘荷波导的解析求解	43
11.3.1 无穷长均匀腔链	43
11.3.2 短周期近似均匀系统	43
11.3.3 短周期近似均匀系统（外周孔）	43
11.4 褶皱结构	43
11.4.1 开放平板褶皱结构	43
11.4.2 封闭平板褶皱结构	43
12 矢势和运动电荷的场	43
12.1 电磁势	43
12.2 达朗贝尔方程	44
12.3 推迟势	44
12.4 重要结论	44
12.4.1 远场近似的偶极辐射	44
13 相对论运动电荷的场和同步辐射	44
13.1 相对论下运动电荷的辐射	44
13.1.1 Lienard-Wiechert 势	44
13.1.2 推迟关系及变换关系导出的导数	45
13.1.3 运动点电荷的场	45
13.2 两种特殊情况下的辐射	45
13.2.1 速度平行于加速度	45

13.2.2 速度垂直于加速度	46
13.3 同步辐射	46
14 切轮科夫辐射	46
15 重要公式汇总	46
15.1 基本常数	46
15.2 常用矢量恒等式	46
16 学习建议和复习要点	46
16.1 重点掌握	46
16.2 学习方法	47

课程概述

课程目标

高等电动力学是物理和电子工程专业的重要基础课程，本课程旨在：

- 深入理解电磁场的基本理论和数学描述
- 掌握电磁波的传播、反射和折射规律
- 学习各种导波系统的特性分析
- 了解运动电荷的场和辐射现象

课程结构

本课程共包含 13 个主要章节，从基础理论到实际应用，系统涵盖了高等电动力学的核心内容。

数学基础知识

0.1 重要常数

物理常数

- 真空介电常数: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- 真空磁导率: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
- 光速: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- 电子电荷: $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- 普朗克常数: $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

材料参数

- 铜的电导率 $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$

0.2 矢量分析：参见 Jackson 书扉页

0.2.1 矢量运算律

混合积：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1)$$

(2)

三矢量的矢积：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \quad (3)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4)$$

对称点积-叉积混合：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (5)$$

$$(6)$$

0.3 nabla 算符

0.3.1 各种坐标系下的 nabla 算符展开

0.4 nabla 算符与矢量积的运算律

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (7)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (8)$$

0.5 偏微分方程

0.6 特殊函数

0.6.1 delta 函数

$$\int f(x)\delta'(x-a) = -f'(a) \quad (9)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (10)$$

0.6.2 Bessel 函数

- 重要积分规律：若 a 为 $J_n(k_c r)$ 或 $J'_n(k_c r)$ 的零点，则有

$$\int_0^a J_n^2(k_c r) r dr = \int_0^a J_n'^2(k_c r) r dr = \frac{a^2}{2} [J_n'^2(k_c a) + J_n^2(k_c a)] \quad (11)$$

0.6.3 Legendre 多项式

0.7 张量代数的基本规则

0.8 材料性质参数计算

- 趋肤深度

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (12)$$

- 表面电阻

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \frac{\delta \omega \mu}{2} \quad (13)$$

1 第一章：基础知识回顾

1.1 麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (17)$$

1.2 边界条件

- 电场的切向分量连续: $\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$
- 磁场的法向分量连续: $\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$
- 位移的法向分量: $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma_f$
- 磁场强度的切向分量: $\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f$

2 静电场

电场与电势:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (18)$$

2.1 静电场的基本性质

2.1.1 叠加原理

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (19)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (20)$$

2.1.2 泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (21)$$

2.2 高斯定理

积分形式:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (22)$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (23)$$

2.2.1 静电场的边界条件

1、面电荷两侧: 电场和电位移矢量的切向分量连续, 法向分量有跳变:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma_f \quad (25)$$

2、偶电层两侧: 电势有跳变

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{D}{\epsilon_0} \quad (26)$$

2.2.2 静电场的能量

点电荷场:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (27)$$

体电荷场:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV' \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV \quad (29)$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \nabla^2 \phi dV \quad (30)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\nabla \phi|^2 dV \quad (31)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dV \quad (32)$$

能量密度

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0|\mathbf{E}|^2 \quad (33)$$

2.2.3 导体表面和介质界面的静电场

对于导体表面的静电荷场:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (34)$$

式中, Φ 为真空中区的电势。

导体表面受到的静电压强:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\sigma E_n \mathbf{n} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_n^2 \mathbf{n} \quad (35)$$

2.3 静电场的求解方法

各种不同方法的基础: 唯一性定理

定理 2.1 (唯一性定理).

假设区域 V 内给定电荷分布, 区域 V 的边界 S 上给定电势或者 $\partial\phi/\partial n$, 则区域 V 内的电势 ϕ 唯一确定。

假设区域 V 内有一些导体, 导体之外的电荷分布已知, 导体上的总电荷已知, 区域的边界上电势 Φ 或者 $\partial\phi/\partial n$ 已知, 则区域 V 内的电势 ϕ 唯一确定。

2.3.1 分离变量法

在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系中的应用。

2.3.2 镜像法

- 导体平面的镜像法
- 导体球面的镜像法
- 柱状导体的镜像法

2.3.3 格林函数法（需要进一步加深理解）

定理 2.2 (格林恒等式).

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (36)$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (37)$$

对任意确定的边值问题，我们想找到的格林函数总是满足下方程：

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (38)$$

边界条件：

- 第一类边界条件 (Dirichlet 边界条件): $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, 当 \mathbf{r}' 在边界 S 上时
- 第二类边界条件 (Neumann 边界条件): $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$, 当 \mathbf{r}' 在边界 S 上时

则对于任意给定的格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 静电势的解为:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dS' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \quad (\text{Dirichlet 边界条件}) \\ &= \langle \phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} dS' \quad (\text{Neumann 边界条件}) \end{aligned}$$

2.3.4 多极展开

电势的多极展开表达式:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Q_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (39)$$

2.4 电偶极子、电四极子

高阶多极矩的计算和物理意义。

3 静磁场

3.1 静磁场的基本性质

3.1.1 比奥-萨伐尔定律

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (40)$$

3.1.2 安培环路定理

积分形式:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (41)$$

微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (42)$$

3.1.3 磁矢势

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (43)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (44)$$

3.2 磁介质中的静磁场

3.2.1 磁化强度和磁极化强度

$$\mathbf{M} = \frac{\text{磁矩}}{\text{体积}} \quad (45)$$

3.2.2 磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (46)$$

3.2.3 磁介质中的边界条件

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} \quad (47)$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \quad (48)$$

3.3 静磁场的能量

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (49)$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 dV \quad (50)$$

4 电磁场的基本性质

4.1 能量与能流

- 电磁场的能量密度: $u = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$
- 坡印廷矢量: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
- 能量守恒方程: $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$

4.2 动量

- 电磁场的动量密度: $\mathbf{g} = \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B}$
- 电磁力密度: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
- 动量守恒方程: $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{f}$

4.3 角动量

- 电磁场的角动量密度: $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$
- 角动量守恒方程: $\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{r} \times \mathbf{f}$
- 角动量密度张量: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{T}$

5 电磁波

5.1 波动方程

从麦克斯韦方程组导出的波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (51)$$

对于单色波, 导出 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (53)$$

式中, $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 为波数。

5.2 平面电磁波

最简单情况：均匀平面波电场矢量沿 x 方向，波沿 z 方向传播
方程组：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_x = 0 \quad (54)$$

$$E_x = E_+ e^{ikz} + E_- e^{-ikz} \quad (55)$$

磁场

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} E e^{ikz} \hat{y} \quad (56)$$

式中， $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为波阻抗。

重要概念：

- 波阵面：空间中相位相同的点构成的曲面，即等相位面
- 平面波：等相位面为无限大平面的电磁波
- 相速度：电磁波的等相位面在空间中的移动速度， $v_p = \omega/k$
- 群速度：电磁波中能量和信息传递的速度， $v_g = d\omega/dk$

5.2.1 电磁场关系

均匀平面波的电磁场关系：

$$\mathbf{E} = \eta \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (57)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \quad (58)$$

即： $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\mathbf{n}}$ 三者互相垂直，构成右手系。

5.2.2 波阻抗

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (59)$$

真空波阻抗

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega \quad (60)$$

5.2.3 能量密度与能流密度

能量密度：理想媒质中均匀平面波的电场能量等于磁场能量

- 电场能量密度： $u_E = \frac{1}{2}\epsilon E^2$
- 磁场能量密度： $u_H = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2$
- 总能量密度： $u = u_E + u_H = \epsilon E^2$

能流密度：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} \quad (61)$$

电磁波的能量传播速度：

$$v = \frac{|\mathbf{S}|}{u} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (62)$$

5.2.4 复数形式表达

复数表示的场：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (63)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (64)$$

复坡印廷矢量：

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \quad (65)$$

复数表示和实际物理量关系：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (66)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (67)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{-i2\omega t}\} \quad (68)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\dot{\mathbf{S}}\} \quad (69)$$

即：复坡印廷矢量的实部为平均功率流密度，虚部为磁场和电场之间能量转换的无功功率流密度。

5.3 电磁波的能量和动量

- 能量密度： $u = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$
- 坡印廷矢量： $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
- 动量密度： $\mathbf{g} = \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B}$

5.4 平面电磁波的传播

5.4.1 理想介质

- 电场、磁场、传播方向之间相互垂直，是横电磁波
- 无衰减，电场与磁场振幅不变
- 波阻抗为实数，电场与磁场同相位
- 电磁波的相速度与频率无关，即无色散
- 电场能量密度等于磁场能量密度
- 能量的传输速度等于相速度

5.4.2 导电媒质

特征：电导率 $\sigma \neq 0$ ，会引发传导电流 $J = \sigma E$

复介电常数方法

定义一个复介电常数

$$\epsilon_c = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \quad (70)$$

对应地得到复的波数：

$$k_c = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c} \quad (71)$$

并引入衰减常数 $\alpha [Np/m]$ 、相位常数 $\beta [rad/m]$ 和电磁波的传播常数 $\gamma [1/m]$ ：

$$k_c = i\gamma = \beta + i\alpha \quad (72)$$

导电媒质中的波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0 \quad (73)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_c^2 \mathbf{H} = 0 \quad (74)$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c = \omega^2 \mu \epsilon + i\omega \mu \sigma \quad (75)$$

平面波解：

$$\dot{\mathbf{E}}(z, t) = E_{xm} e^{-\alpha z} e^{i\beta z} \hat{\mathbf{x}} \quad (76)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(z, t) = \frac{1}{|\eta_c|} e^{i\phi} E_{xm} e^{-\alpha z} e^{i\beta z} \hat{\mathbf{y}} \quad (77)$$

注意，此时电磁场不再同相位：导电媒质本征阻抗此时为复数，电场超前磁场相位 ϕ ：

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = |\eta_c| e^{-i\phi} \quad (78)$$

平面波的传播特性

- 三个传播参数:

由 $k_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + i \omega \mu \sigma$, 可解出 α 和 β :

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1} \quad (79)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1} \quad (80)$$

此时 α , β 和 γ 均与频率有关, 表现出色散特性

- 相速度: 与频率有关, 是色散波。一般来讲, 导电系数越大, 色散越强。

$$v_p = \frac{\omega}{\beta(\omega)} \quad (81)$$

- 电磁场关系

(1) 仍通过波阻抗联系:

$$\mathbf{E} = \eta_c \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = |\eta_c| e^{-i\phi} \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (82)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_c} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \frac{1}{|\eta_c|} e^{i\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \quad (83)$$

(2) E、H、n 三者仍互相垂直, 构成右手系

(3) 电场超前相位 $\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$

$$\eta_c = |\eta_c| e^{-i \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} \quad (84)$$

- 能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon |E|^2 = \frac{\varepsilon}{2} E_{xm}^2 e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z) \quad (85)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu |H|^2 = \frac{\mu}{2} \frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|^2} e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z + \phi) \quad (86)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} E_{xm}^2 e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z) \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (87)$$

$$= w_e \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (88)$$

结论: 导电媒质中均匀平面波的磁场能量大于电场能量

- 能流密度: 衰减快于场的衰减

$$\mathbf{S}_{ave} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{1}{2} \frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \phi \hat{\mathbf{n}} \quad (89)$$

$$(90)$$

良导体近似

在良导体中, $\sigma \gg \omega\epsilon$, 则有近似关系:

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (91)$$

(92)

于是传播性质简化为:

- 相速度: $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{4\pi f}{\mu\sigma}}$
- 波长: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$
- 波阻抗: $|\eta_c| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$
- 电磁场相位差: $\phi = \frac{\pi}{4}$
- 能量密度: $w_m \approx w_e \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg w_e$
- 能流密度: $\mathbf{S}_{ave} = \frac{1}{2} \frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{n}}$

重要概念: 趋肤深度

定义: 电磁波穿入良导体时, 当波的幅度下降为表面处振幅的 $1/e$ 时, 波在良导体中传播的距离

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad (93)$$

对良导体, 有 $\delta = 1/\alpha = 1/\beta = \lambda/2\pi$

弱导体近似

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (94)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (95)$$

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + i \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) \quad (96)$$

- 衰减较小
- 相位常数和非导电媒质中基本相等
- 电场和磁场之间相位差很小

6 电磁波的反射和折射

计算框架：

- 分区写出入射波、反射波、透射波各分量的场表达式
- 应用边界条件（不同区域的 k 的关系、幅度、相位关系），列出方程
- 解方程，得到反射系数和透射系数

6.1 边界条件

(1) 场强条件：

(a) 电场的切向分量、磁场的法向分量在边界上连续；

(b) 对于理想介质界面，电场的法向分量、磁场的切向分量在边界上均连续，因为这一交界面上不存在面电流。

(c) 需注意：区分极化方向；总的电磁场是所有波的叠加

理想介质交界面条件：

$$E_{ix} + E_{rx} = E_{tx+} + E_{tx-} \quad (97)$$

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{ty+} + E_{ty-} \quad (98)$$

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx+} + H_{tx-} \quad (99)$$

$$H_{iy} + H_{ry} = H_{ty+} + H_{ty-} \quad (100)$$

(2) 相位匹配条件：所有波的波矢在边界面的切向分量相等

需注意：是针对单个波而言，不用叠加；

导出结论：Snell 定律

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (101)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (102)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \end{cases} \quad (103)$$

非磁性介质中，入射角/透射角满足

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \quad (104)$$

6.2 理想介质单一交界面的解

6.2.1 垂直极化：电场方向垂直于法平面，磁场方向由右手螺旋定则确定

$$E_{1y} = E_i + E_r = (1 + \Gamma)E_0 \quad (105)$$

$$E_{2y} = E_t = \tau E_0 \quad (106)$$

$$H_{1x} = H_{ix} + H_{rx} = \frac{1}{\eta_1} E_0 (\cos \theta_i - \Gamma \cos \theta_r) = \frac{1}{\eta_1} E_0 (1 - \Gamma) \cos \theta_i \quad (107)$$

$$H_{2x} = H_{tx} = \frac{1}{\eta_2} \tau E_0 \cos \theta_t \quad (108)$$

透射、反射系数：

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (109)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (110)$$

非磁性介质中，

$$\Gamma_{\perp} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (111)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (112)$$

反射-透射关系：

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (113)$$

$$1 - \Gamma_{\perp}^2 = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \tau_{\perp}^2 \quad (114)$$

6.2.2 水平极化：磁场方向垂直于法平面，电场方向由右手螺旋定则确定

$$E_{1x} = E_i + E_r = E_0 (1 - \Gamma) \cos \theta_i \quad (115)$$

$$E_{2x} = E_{tx} = \tau E_0 \cos \theta_t \quad (116)$$

$$H_{1y} = H_i + H_r = \frac{1}{\eta_1} E_0 (1 + \Gamma) \quad (117)$$

$$H_{2y} = H_{ty} = \frac{1}{\eta_2} \tau E_0 \quad (118)$$

透射、反射系数:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \quad (119)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \quad (120)$$

非磁性介质:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (121)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \theta_i}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (122)$$

反射-透射关系:

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{\parallel} \quad (123)$$

$$1 - \Gamma_{\parallel}^2 = \tau_{\parallel}^2 \quad (124)$$

6.3 全透射与全反射

6.3.1 全透射: 反射系数为 0, 仅出现在平行极化分量中

条件:

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (125)$$

$$\cos \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (126)$$

临界角度: Brewster 角

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (127)$$

性质:

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (128)$$

6.3.2 全反射: 透射系数为 0, 各种极化模式都可能发生

条件:

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (129)$$

$$\theta_i = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \theta_c \quad (130)$$

即如下两条:

- 入射波媒质 1 向媒质 2 斜入射，且 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
- 入射角 θ_i 大于临界角 θ_c ，即 $\theta_c \leq \theta_i \leq 90^\circ$

此时透射波可写为衰减形式：

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{-\alpha z} e^{i\beta x} \quad (131)$$

其中

$$\alpha = k_2 \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1} \quad (132)$$

$$\beta = k_2 \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \quad (133)$$

衰减长度 $\delta = k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}$

Note: 衰减的透射波会引发 Goos-Hänchen 位移现象。

7 波导基本理论

7.1 纵向均匀系统求解思路

- 第一步：求 $E_z(x, y)$ 和 $B_z(x, y)$ 的分布，满足横向 Laplace 方程或 Helmholtz 方程及边界条件

$$(\nabla_t^2 + \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) E_z = 0 \quad (134)$$

$$(\nabla_t^2 + \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) B_z = 0 \quad (135)$$

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_c^2 = k_0^2 - k_c^2 \quad (136)$$

$$(137)$$

- 代入波导壁的边界条件，求解纵向场
- 代入纵横关系得到所有的场分量

7.2 从麦克斯韦方程组导出的波动方程

Helmholtz 方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (138)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (139)$$

式中， $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ 为波数。

7.2.1 直角坐标系的波动方程及其基本解

7.2.2 柱坐标系的波动方程及其基本解

7.3 纵向均匀系统的纵横关系

考虑沿 z 方向均匀的波导，电磁场可表示为：

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_t(x, y)e^{jk_z z} + \hat{\mathbf{z}}E_z(x, y)e^{jk_z z} \quad (140)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_t(x, y)e^{jk_z z} + \hat{\mathbf{z}}H_z(x, y)e^{jk_z z} \quad (141)$$

从 Helmholtz 方程出发，得到横向场与纵向场的关系：

$$\mathbf{E}_t = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t E_z - \omega\mu\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t H_z) \quad (142)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t H_z + \omega\varepsilon\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \quad (143)$$

或者磁场用 B 表示：

$$\mathbf{E}_t = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t E_z - \omega\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z) \quad (144)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t B_z + \omega\mu\varepsilon\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \quad (145)$$

反之，有

$$\nabla_t \mathbf{E}_t = -ik_z E_z \quad (146)$$

$$\nabla_t \mathbf{H}_t = -ik_z H_z \quad (147)$$

7.4 纵向均匀系统的模式

- TEM 模： $E_z = 0, H_z = 0$, 横向电磁波，不能在单导体波导中存在
- TE 模： $E_z = 0, H_z \neq 0$, 横电波
- TM 模： $H_z = 0, E_z \neq 0$, 横磁波

7.5 模式的传输特性

1、传输条件：对于一个给定的几何结构，该结构会决定一组截止参数， f_c, λ_c, k_c ，只有当工作频率 $f > f_c$ 时，该模式才能传输。

即：

$$\lambda < \lambda_c, f > f_c, \Rightarrow \beta^2 = k^2 - k_c^2 > 0 \quad (148)$$

2、随激励频率变化的图像：

(1) 当激励频率刚刚超过截止频率时，在波导中激励起基模的波；

(2) 随着激励频率增加, 横向波数不变, 纵向波数增大, 导波波长减小, 相速度减小。即, 一个“方块”横向不变, 纵向长度减小。

(3) 激励频率大于某个高阶模式的截止频率时, 该高阶模式也会被激励起来, 但低阶模式依旧存在。

3、传输条件相关的物理参量:

- 相移常数/纵向波数 k_z 或 β :

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (149)$$

- 相速度 v_p

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (150)$$

- 导波波长 λ_g

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (151)$$

- 群速度 v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (152)$$

- 色散关系: 双曲线, 渐近线为 $v = \pm c$

- 波阻抗: 相互垂直的横向电场与横向磁场之比

$$\eta = \frac{(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t)_i}{(\mathbf{H}_t)_i}, \quad i = x, y \quad (153)$$

4、截止状态下的衰减

当 $k < k_c$ 时, 纵向波数 k_z 为虚数, 记为 $ik_z = \alpha$, 则波在 z 方向上呈指数衰减:

$$\alpha = \sqrt{k_c^2 - k^2} = k \sqrt{\left(\frac{k_c}{k}\right)^2 - 1} = k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1} \quad (154)$$

$$E(z), H(z) \propto e^{-\alpha z} \quad (155)$$

$$P(z) \propto e^{-2\alpha z} \quad (156)$$

截止状态与衰减行波的区别: 截止状态是无相位变化的原地衰减, 而衰减行波是有相位变化的传播衰减。

传播参数变化: $\lambda \rightarrow \lambda_c, v_p \rightarrow \infty, \lambda_g \rightarrow \infty, v_g \rightarrow 0$

7.6 波导的阻抗与功率传输

传输功率

$$P = \begin{cases} \frac{\omega\mu k_z}{2k_c^2} \int_S |H_z|^2 dS & \text{TE 模} \\ \frac{\omega\varepsilon k_z}{2k_c^2} \int_S |E_z|^2 dS & \text{TM 模} \end{cases} \quad (157)$$

式中, $k_c^2 = k^2 - k_z^2$ 为截止波数。

功率衰减

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta} |\mathbf{H}_t|^2 dl \quad (158)$$

Note: $R_s = 1/\sigma\delta$ 为表面电阻, $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ 为趋肤深度。

衰减常数

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (159)$$

8 几种常见波导

8.1 矩形波导

结构: 长边 a , 短边 b 的矩形波导。

传播参数:

- 纵向波数: k_z 或 β , β 又称为相移常数。
- 截止波数: $k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
- 横向波数: $k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}$
- 关系: $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

边界条件:

$$(常用) \text{ 壁上电场切向分量为 } 0: \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|_s = 0 \quad (160)$$

$$\text{磁场法向分量为 } 0: \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_s = 0 \quad (161)$$

具体的纵向场边界条件:

$$\text{TE 模: } \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_s = 0 \quad (162)$$

$$\text{TM 模: } \left. E_z \right|_s = 0 \quad (163)$$

8.1.1 基础性质

- 截止频率 $f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

- 导波波长 $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$

- 相速度 $v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

- 群速度 $v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

- 波阻抗

$$\eta_{TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (164)$$

$$\eta_{TM} = \eta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (165)$$

- 传输功率

$$P_{TE} = \frac{\omega \mu k_z ab}{4\epsilon_{mn} k_c^2} |H_{mn}|^2 \quad (166)$$

$$P_{TM} = \frac{\omega \varepsilon k_z ab}{8k_c^2} |E_{mn}|^2 \quad (167)$$

式中, $\epsilon_{mn} = \begin{cases} 1, & mn = 0 \\ 2, & mn \neq 0 \end{cases}$

- 损耗常数

$$\text{常用: } \alpha_{TE10} = \frac{2R_s}{b\eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right] \quad (168)$$

$$\text{任意 } mn \text{ 模式: } \alpha_{TE/Mmn} = \frac{2R_s}{b\eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \frac{m^2 b^3 + n^2 a^3}{m^2 a b^2 + n^2 a^3} \quad (169)$$

8.1.2 场分布表达式：

TE 模：最低模式 TE10

$$E_z = 0 \quad (170)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (171)$$

$$E_x = -\frac{i\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (172)$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (173)$$

$$H_x = -\frac{ik_z m\pi}{k_c^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (174)$$

$$H_y = -\frac{ik_z n\pi}{k_c^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (175)$$

TM 模：最低模式 TM11

$$H_z = 0 \quad (176)$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (177)$$

$$E_x = \frac{ik_z m\pi}{k_c^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (178)$$

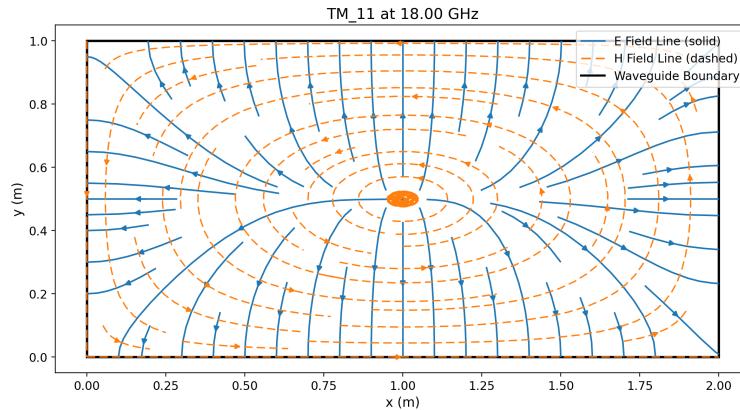
$$E_y = \frac{ik_z n\pi}{k_c^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (179)$$

$$H_x = -\frac{i\omega\varepsilon n\pi}{k_c^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (180)$$

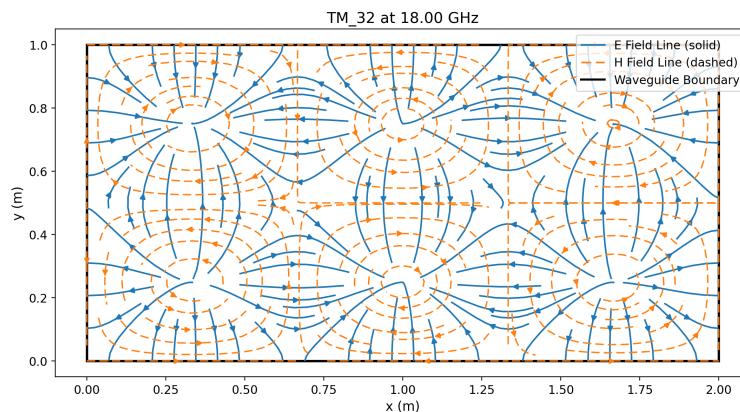
$$H_y = \frac{i\omega\varepsilon m\pi}{k_c^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z} \quad (181)$$

8.1.3 场分布图

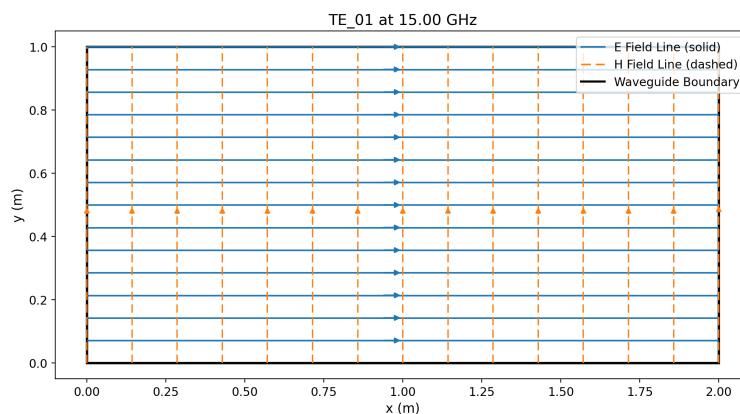
TM11

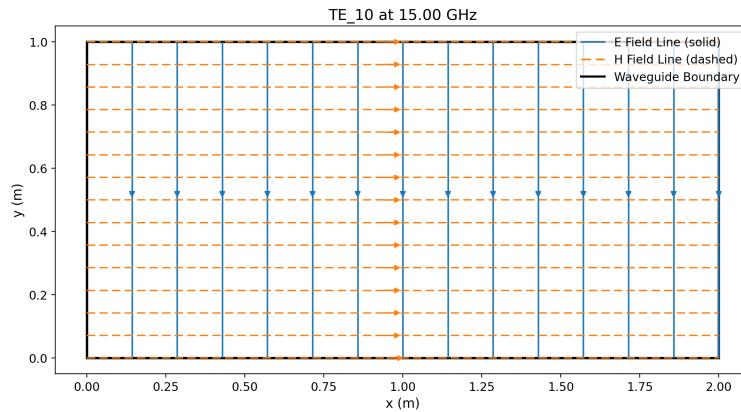
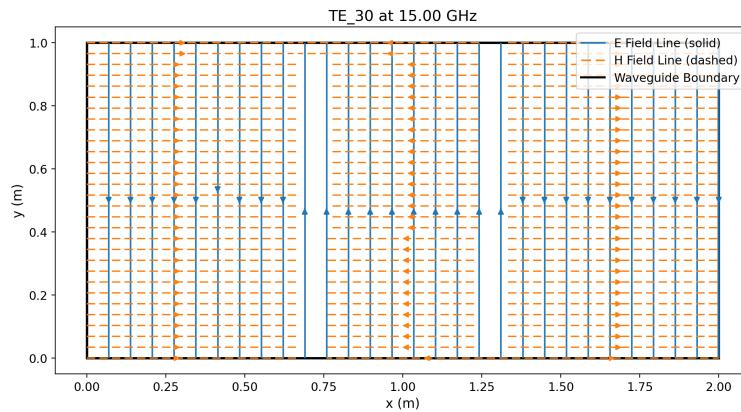
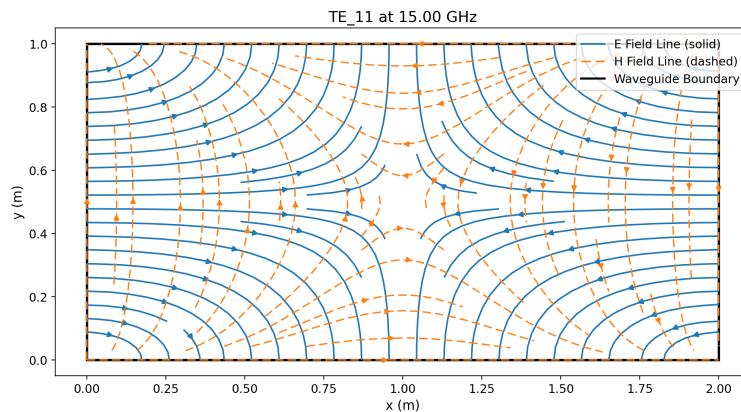


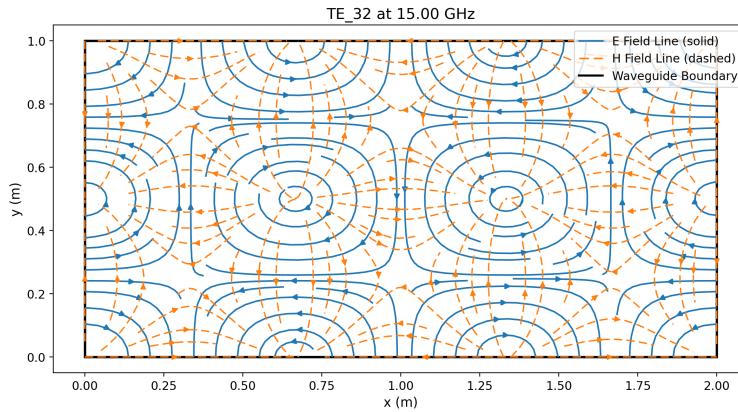
TM32



TE01



TE10**TE30****TE11**

TE32**8.2 圆波导**

结构: 半径为 a 的金属圆柱波导, 采用圆柱坐标 (r, ϕ, z) 描述场分布。

传播参数:

- 纵向波数: $k_z = \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$, 其中 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。
- 截止波数: $k_{c,\text{TE}_{mn}} = \frac{\chi'_{mn}}{a}$, $k_{c,\text{TM}_{mn}} = \frac{\chi_{mn}}{a}$, χ'_{mn} 为 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点, χ_{mn} 为 $J_m(x)$ 的第 n 个零点。
- 横向波数: $k_r = k_c$, 径向分布满足 Bessel 方程, 角向分布为 $\cos(m\phi)$ 或 $\sin(m\phi)$ 形式。
- 关系: $k_r^2 + k_z^2 = k^2$, 且 $k_c^2 = k_r^2 = \left(\frac{\chi}{a}\right)^2$ 。

边界条件:

$$\text{壁上电场切向分量为 } 0: \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|_{r=a} = 0 \quad (182)$$

$$\text{壁上磁场法向分量为 } 0: \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_{r=a} = 0 \quad (183)$$

具体的纵向场边界条件:

$$\text{TE 模: } \left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \Rightarrow J'_m(\chi'_{mn}) = 0 \quad (184)$$

$$\text{TM 模: } E_z|_{r=a} = 0 \Rightarrow J_m(\chi_{mn}) = 0 \quad (185)$$

8.2.1 基本性质

- 截止频率: $f_{c,\text{TE}_{mn}} = \frac{c}{2\pi} \frac{\chi'_{mn}}{a}$, $f_{c,\text{TM}_{mn}} = \frac{c}{2\pi} \frac{\chi_{mn}}{a}$ 。
- 导波波长: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$, $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$ 。

- 相速度: $v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

- 群速度: $v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

- 波阻抗:

$$\eta_{TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (186)$$

$$\eta_{TM} = \eta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (187)$$

- 传输功率 (以 $H_z = H_0 J_m \left(\frac{\chi'_{mn} r}{a} \right) \cos m\phi e^{ik_z z}$ 、 $E_z = E_0 J_m \left(\frac{\chi_{mn} r}{a} \right) \cos m\phi e^{ik_z z}$ 为例):

$$P_{TE} = \frac{\omega \mu \beta}{2k_c^2} |H_0|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_m \left(\frac{\chi'_{mn} r}{a} \right) \cos m\phi \right|^2 r dr d\phi \quad (188)$$

$$P_{TM} = \frac{\omega \varepsilon \beta}{2k_c^2} |E_0|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_m \left(\frac{\chi_{mn} r}{a} \right) \cos m\phi \right|^2 r dr d\phi \quad (189)$$

其中积分可借助 $\int_0^1 J_m^2(\alpha x) x dx$ 的标准结果化为闭式表达。

- 损耗常数 (金属壁面电导率 σ):

$$\alpha_{TE} = \frac{R_s}{2P_{TE}} \int_0^{2\pi} \left(|H_\phi(r=a, \phi)|^2 + |H_\phi(r=a, \phi)|^2 \right) a d\phi \quad (190)$$

$$\alpha_{TM} = \frac{R_s}{2P_{TM}} \int_0^{2\pi} |H_\phi(r=a, \phi)|^2 a d\phi, \quad (191)$$

$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$ 为表面电阻。

传输功率和损耗常数的具体表达式:

$$P_{TM} = \frac{\pi a^2 \omega \varepsilon \beta}{2\epsilon_n k_c^2} |E_0|^2 J_{n+1}^2(\chi_{ni}) \quad (192)$$

$$\alpha_{TM} = \frac{R_s}{a\eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (193)$$

$$P_{TE} = \frac{\pi a^2 \omega \mu \beta}{2\epsilon_n k_c^2} |H_0|^2 \left(1 - \frac{n^2}{\chi_{ni}'^2} \right) J_n^2(\chi_{ni}') \quad (194)$$

$$\alpha_{TE} = \frac{R_s}{a\eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{\chi_{ni}'^2 - n^2} \right] \quad (195)$$

式中,

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (196)$$

8.2.2 场分布表达式：

TE 模：最低模式 TE_{11} , $k_c = \chi'_{ni}/a$

偶模式：

$$H_z = H_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (197)$$

$$H_r = \frac{ik_z}{k_c} H_0 J'_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (198)$$

$$H_\phi = -\frac{ik_z n}{k_c^2 r} H_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (199)$$

$$E_r = -\frac{i\omega \mu n}{k_c^2 r} H_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (200)$$

$$E_\phi = -\frac{i\omega \mu}{k_c} H_0 J'_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (201)$$

奇模式：

$$H_z = H_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (202)$$

$$H_r = \frac{ik_z}{k_c} H_0 J'_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (203)$$

$$H_\phi = \frac{ik_z n}{k_c^2 r} H_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (204)$$

$$E_r = \frac{i\omega \mu n}{k_c^2 r} H_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (205)$$

$$E_\phi = -\frac{i\omega \mu}{k_c} H_0 J'_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (206)$$

TM 模：最低模式 TM_{01} , $k_c = \chi_{ni}/a$

偶模式：

$$H_z = 0 \quad (207)$$

$$E_z = E_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (208)$$

$$E_r = \frac{ik_z}{k_c} E_0 J'_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (209)$$

$$E_\phi = -\frac{ik_z n}{k_c^2 r} E_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (210)$$

$$H_r = \frac{i\omega \varepsilon n}{k_c^2 r} E_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{jk_z z} \quad (211)$$

$$H_\phi = \frac{i\omega \varepsilon}{k_c} E_0 J'_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{jk_z z} \quad (212)$$

奇模式:

$$H_z = 0 \quad (213)$$

$$E_z = E_0 J_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{ik_z z} \quad (214)$$

$$E_r = \frac{ik_z}{k_c} E_0 J'_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{ik_z z} \quad (215)$$

$$E_\phi = \frac{ik_z n}{k_c^2 r} E_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{ik_z z} \quad (216)$$

$$H_r = -\frac{i\omega \varepsilon n}{k_c^2 r} E_0 J_n(k_c r) \cos(n\phi) e^{ik_z z} \quad (217)$$

$$H_\phi = \frac{i\omega \varepsilon}{k_c} E_0 J'_n(k_c r) \sin(n\phi) e^{ik_z z} \quad (218)$$

8.2.3 场分布图

绘图规律:

TE_{ni} 模式:

- 若 n 为 0, 则电场线为同心圆, 磁场线为径向线。沿径向, 电场线的方向变化 $i-1$ 次。
- 若 n 不为 0, 整个圆周分为 $2n$ 个扇区;
- 每个扇区中, 电场线绕成 $i-1$ 个闭合环路, 在壁面上有半个环路; 任意两个相邻环路的旋转方向相反 (即不产生相邻但反向的电场线)
- 磁场线连接各相邻电场线环路的中心, 但不会跨过扇区分界线。

TM_{ni} 模式:

- 若 n 为 0, 则磁场线为同心圆, 电场线为径向线。沿径向, 磁场线的方向变换 $i-1$ 次。
- 若 n 不为 0, 整个圆周分为 $2n$ 个扇区;
- 每个扇区中, 磁场线绕成 i 个闭合环路, 任意两个相邻环路的旋转方向相反, 即不产生相邻但反向的磁场线。
- 电场线连接各相邻磁场线环路的中心, 但不会跨过扇区分界线。

8.3 同轴线

同轴线中多为 TEM 模式

- 截止频率 $f_c = 0$
- 波速 $v_p = v_g = c$
- 波阻抗 $\eta = \frac{\eta_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

- 传输功率 $P = \frac{E_m^2}{2\eta} \cdot 2\pi(b-a)$

- 损耗常数 $\alpha = \frac{R_s}{2\pi\eta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

8.4 介质加载波导

8.4.1 窄边单侧填充方波导

结构: 长 $x = 0 \sim a$, 宽 $y = 0 \sim b$ 的矩形波导, 其中长边 $x = 0 \sim h$ 区域填充介质, $h < a$ 。

传播参数:

- 两个区域各自有一个横向波数, 但纵向波数相同。即有条件

$$k_{x1}^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_1^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \quad (219)$$

$$k_{x2}^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_2^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (220)$$

- y 方向边界条件决定: $k_y = \frac{n\pi}{b}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- 在 $k_y \neq 0$ 时的横向波数表示为:

$$k_{xi} = \sqrt{\omega_c^2 \varepsilon_i \mu_i - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad i = 1, 2 \quad (221)$$

式中, ω_c 为截止角频率。

模式分析:

(1) TE 模式: $E_x = 0$, 即 $k_y = 0$, 仅允许 TE_{m0} 模式存在。

TE 模式截止波数: 需要求解以下方程决定:

$$\text{电场交界面: } \frac{\mu_1 k_{x1} A}{k_1^2 - k_z^2} \sin(k_{x1} h) = \frac{\mu_2 k_{x2} B}{k_2^2 - k_z^2} \sin[k_{x2}(h-a)] \quad (222)$$

$$\text{磁场交界面: } \frac{A}{k_1^2 - k_z^2} \cos(k_{x1} h) = \frac{B}{k_2^2 - k_z^2} \cos[k_{x2}(h-a)] \quad (223)$$

$$A \cos(k_{x1} h) = B \cos[k_{x2}(h-a)] \quad (224)$$

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (225)$$

仅允许 TE_{m0} 模式存在。

(2) TM 模式: $H_x = 0$, 即 $k_y = 0$, 由于 TM_{mn} 模式的 n 不能为 0, 介质加载矩形波导中不存在 TM 模式。

TM 模式截止波数: 需要求解以下方程决定:

原因：TM 模式截止波数：需要求解以下方程决定：

$$\text{磁场交界面: } \frac{\varepsilon_1 k_{x1} A}{k_1^2 - k_z^2} \cos(k_{x1} h) = \frac{\varepsilon_2 k_{x2} B}{k_2^2 - k_z^2} \cos[k_{x2}(h - a)] \quad (226)$$

$$\text{电场交界面: } \frac{A}{k_1^2 - k_z^2} \sin(k_{x1} h) = \frac{B}{k_2^2 - k_z^2} \sin[k_{x2}(h - a)] \quad (227)$$

$$A \sin(k_{x1} h) = B \sin[k_{x2}(h - a)] \quad (228)$$

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (229)$$

由于 TM_{mn} 模式的 n 不能为 0，介质加载矩形波导中不存在 TM 模式。

(3) x 纵向模式：分为 $E_y = 0$ 的 $TE^{(x)}$ 模式和 $H_y = 0$ 的 $TM^{(x)}$ 模式。

计算要点：

- x 纵向的纵横关系：

$$\mathbf{E}_{y,z} = \frac{1}{k^2 - k_x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{y,z} E_x - i \mu \omega \hat{\mathbf{x}} \times \nabla_{y,z} H_x \right] \mathbf{H}_{y,z} = \frac{1}{k^2 - k_x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{y,z} H_x + i \varepsilon \omega \hat{\mathbf{x}} \times \nabla_{y,z} E_x \right] \quad (230)$$

- $TE^{(x)}$ 模式，交界面给出的截止条件：

$$\frac{\mu_1 A}{k_1^2 - k_{x1}^2} \sin(k_{x1} h) = \frac{\mu_2 B}{k_2^2 - k_{x2}^2} \sin[k_{x2}(h - a)] \quad (231)$$

$$\frac{k_{x1} A}{k_1^2 - k_{x1}^2} \cos(k_{x1} h) = \frac{k_{x2} B}{k_2^2 - k_{x2}^2} \cos[k_{x2}(h - a)] \quad (232)$$

$$\frac{k_{x1}}{\mu_1} \cot(k_{x1} h) = \frac{k_{x2}}{\mu_2} \cot[k_{x2}(h - a)] \quad (233)$$

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (234)$$

- $TM^{(x)}$ 模式，交界面给出的截止条件：

$$\frac{k_{x1}}{\varepsilon_1} \tan(k_{x1} h) = \frac{k_{x2}}{\varepsilon_2} \tan[k_{x2}(h - a)] \quad (235)$$

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (236)$$

性质：

- 对每个 n ，都有无穷多解，从小到大排序，序数即为 m ；
- 当 $n = 0$ 时， $TE_{m0}^{(x)}$ 和 $TE_{m0}^{(z)}$ 模式的截止频率相同；
- 对 $TM^{(x)}$ 模式，仍然有 $n \neq 0$ 。

(4) y 纵向模式：分为 $E_y = 0$ 的 $TE^{(y)}$ 模式和 $H_y = 0$ 的 $TM^{(y)}$ 模式。

计算要点：

- y 纵向的纵横关系:

$$\mathbf{E}_{z,x} = \frac{1}{k^2 - k_y^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla_{z,x} E_y - i\mu\omega \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_{z,x} H_y \right] \quad (237)$$

$$\mathbf{H}_{z,x} = \frac{1}{k^2 - k_y^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla_{z,x} H_y + i\varepsilon\omega \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_{z,x} E_y \right] \quad (238)$$

- $TE^{(y)}$ 模式, 交界面给出的截止条件: 待补充

- $TM^{(y)}$ 模式, 交界面给出的截止条件: 待补充

8.4.2 双侧对称填充方波导

不整理了, 考出来就死给他看

8.4.3 角向均匀填充圆波导

结构: 半径为 b 的圆波导, 在 $0 < r < a$ 的区域填充介质 1, 在 $a < r < b$ 的区域填充介质 2

最简单模式: TM_{0i} , 场表达式:

$$\mathbf{r} \leq \mathbf{a} : \quad (239)$$

$$E_{z1} = AJ_0(k_1\rho)e^{ik_z z} \quad (240)$$

$$E_{r1} = \frac{ik_z}{k_1^2} \frac{\partial E_{z1}}{\partial r} = \frac{ik_z}{k_1} AJ'_0(k_1\rho)e^{ik_z z} \quad (241)$$

$$H_{\phi1} = \frac{i\omega\varepsilon_1}{k_1^2} \frac{\partial E_{z1}}{\partial r} = \frac{i\omega\varepsilon_1}{k_1} AJ'_0(k_1\rho)e^{ik_z z} \quad (242)$$

$$\mathbf{a} < \mathbf{r} \leq \mathbf{b} : \quad (243)$$

$$E_{z2} = [B_1 J_0(k_2 r) + B_2 N_0(k_2 r)]e^{ik_z z} \quad (244)$$

$$E_{r2} = \frac{ik_z}{k_2^2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial r} = \frac{ik_z}{k_2} [B_1 J'_0(k_2 r) + B_2 N'_0(k_2 r)]e^{ik_z z} \quad (245)$$

$$H_{\phi2} = \frac{i\omega\varepsilon_2}{k_2^2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial r} = \frac{i\omega\varepsilon_2}{k_2} [B_1 J'_0(k_2 r) + B_2 N'_0(k_2 r)]e^{ik_z z} \quad (246)$$

边界条件:

$$E_{z2}(r = b) = 0 \Rightarrow B_1 J_0(k_2 b) + B_2 N_0(k_2 b) = 0 \quad (247)$$

$$(248)$$

交界面条件:

$$E_{z1}(r = a) = E_{z2}(r = a) \Rightarrow AJ_0(k_1 a) = B_1 J_0(k_2 a) + B_2 N_0(k_2 a) \quad (249)$$

$$H_{\phi1}(r = a) = H_{\phi2}(r = a) \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{k_1} AJ'_0(k_1 a) = \frac{\varepsilon_2}{k_2} [B_1 J'_0(k_2 a) + B_2 N'_0(k_2 a)] \quad (250)$$

代回可得方程

$$\frac{\varepsilon_1}{k_1} \frac{J'_0(k_1 a)}{J_0(k_1 a)} = \frac{\varepsilon_2}{k_2} \frac{N_0(k_2 b) J'_0(k_2 a) - J_0(k_2 b) N'_0(k_2 a)}{N_0(k_2 b) J_0(k_2 a) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 a)} \quad (251)$$

$$k_2^2 - k_1^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (252)$$

特殊模式: $r < a$ 区域为真空, 且相速度为真空光速, 即 $v_{p1} = c$, $k_z = k$, $k_1 = 0$, 则得到真空区场表达式:

$$E_{z1} = A e^{ik_z z} \quad (253)$$

$$E_{r1} = -\frac{ik_z}{2} A r e^{ik_z z} \quad (254)$$

8.4.4 对称平板介质波导

9 谐振腔基础理论

9.1 谐振系统的纵横关系

规范: 波总写成 $e^{j(k_z z - \omega t)}$ 形式, 即

$$E_z = E_z(x, y) e^{j(k_z z - \omega t)} \quad (255)$$

$$H_z = H_z(x, y) e^{j(k_z z - \omega t)} \quad (256)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \left[\nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - j\omega \mu (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t H_z) \right] \quad (257)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{k_c^2} \left[\nabla_t \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + j\omega \varepsilon (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \right] \quad (258)$$

9.2 储能、表面损耗与品质因数

储能

$$W_0 = W_{emax} = \frac{\varepsilon}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (259)$$

$$= W_{hmax} = \frac{\mu}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \quad (260)$$

表面损耗

$$P_s = \frac{R_s}{2} \int_S \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^* dS \quad (261)$$

品质因数: 定义为 $\omega U_0 / P_s$, 即 2π 倍的腔内储存的电磁场总能量与每周期损耗能量之比。

$$Q_0 = \frac{2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV}{\delta \int_S \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^* dS} \quad (262)$$

无外部能量补充时，谐振腔内能量随时间指数衰减：

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{Q_0}{\omega_0} \quad (263)$$

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad (264)$$

9.3 其他作为加速器谐振腔的重要参数

- 分流阻抗

$$Z_s = \frac{V^2}{P} = \frac{(\int_0^L E_z dz)^2}{P} \quad (265)$$

- 渡越时间因子

$$T = \frac{V_{acc}}{V} = \frac{\left| \int_0^L E_z(z) e^{-i\omega \frac{z}{v}} dz \right|}{\int_0^L |E_z(z)| dz} \quad (266)$$

- 有效分流阻抗

$$Z_{s,eff} = Z_s \cdot T^2 = \frac{V_{acc}^2}{P} = \frac{(| \int_0^L E_z e^{-i\omega \frac{z}{v}} dz |)^2}{P} \quad (267)$$

- R/Q

$$\frac{R}{Q} = \frac{V_{acc}^2}{\omega U} = \frac{(| \int_0^L E_z e^{-i\omega \frac{z}{v}} dz |)^2}{\omega U} \quad (268)$$

在行波加速结构中，通常有 $v_{particle} = v_{phase}$ ，故 $\omega/v = k$ 。

10 常见谐振腔

10.1 矩形谐振腔

横截面长 a 宽 b，纵向长 L

10.1.1 基础性质

- 波数：

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L} \quad (269)$$

- 谐振频率

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2} \quad (270)$$

- 谐振波长

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (271)$$

- 主模： $b < a \leq L$ 时，TE₁₀₁ 为主模； $b > L$ 时，TM₁₁₀ 为主模。

10.1.2 场分布表达式

TE 模式:

$$H_z = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (272)$$

$$H_x = \frac{k_x k_z}{k_c^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (273)$$

$$H_y = \frac{k_y k_z}{k_c^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (274)$$

$$E_x = \frac{i\omega \mu k_y}{k_c^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (275)$$

$$E_y = -\frac{i\omega \mu k_x}{k_c^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (276)$$

TM 模式:

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (277)$$

$$E_x = -\frac{k_x k_z}{k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (278)$$

$$E_y = -\frac{k_y k_z}{k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (279)$$

$$H_x = \frac{i\omega \epsilon k_y}{k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (280)$$

$$H_y = -\frac{i\omega \epsilon k_x}{k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (281)$$

10.1.3 腔内储能

TE 模式:

- m,n,p 均不为 0 时:

$$U = \frac{\mu V}{16} \frac{k^2}{k_c^2} |H_0|^2 \quad (282)$$

- m 或 n 为 0 时:

$$U = \frac{\mu V}{8} \frac{k^2}{k_c^2} |H_0|^2 \quad (283)$$

TM 模式:

- p 不为 0 时:

$$U = \frac{\epsilon V}{16} \frac{k^2}{k_c^2} |E_0|^2 \quad (284)$$

- p=0 时 (此时还有 k = k_c):

$$U = \frac{\epsilon V}{8} |E_0|^2 \quad (285)$$

10.1.4 腔壁损耗

TE 模式

- 通用表达式:

$$P_s = \frac{R_s |H_0|^2}{4} \left[\frac{2k_z^2}{k_c^4} \left(\frac{k_x^2}{\epsilon_m} + \frac{k_y^2}{\epsilon_n} \right) ab + \left(\frac{2}{\epsilon_m} + \frac{k_x^2 k_z^2}{k_c^4} \right) aL + \left(\frac{2}{\epsilon_n} + \frac{k_y^2 k_z^2}{k_c^4} \right) bL \right] \quad (286)$$

- 诺依曼因子:

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 2 & i \neq 0 \end{cases} \quad (287)$$

TM 模式:

$$P_s = \frac{R_s \omega^2 \varepsilon^2 |E_0|^2}{4k_c^2} \left[ab + \frac{2}{\epsilon_p} \frac{L}{k_c^2} (bk_x^2 + ak_y^2) \right] \quad (288)$$

$$\epsilon_p = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases} \quad (289)$$

10.1.5 品质因数

矩形腔主模 TE_{101} 的品质因数为:

$$Q_0 = \frac{abL}{\delta} \frac{a^2 + L^2}{2b(a^3 + L^3) + al(a^2 + L^2)} \quad (290)$$

10.2 圆柱谐振腔

横截面半径 a, 纵向长 L

10.2.1 基础性质

- 波数:

$$k_{c,TE} = \frac{\chi'_{ni}}{a}, \quad k_{c,TM} = \frac{\chi_{ni}}{a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L} \quad (291)$$

- 谐振频率

$$TE \text{ 模: } f_{TE} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi'_{ni}}{a\pi} \right)^2 + \left(\frac{p}{L} \right)^2} \quad (292)$$

$$TM \text{ 模: } f_{TM} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi_{ni}}{a\pi} \right)^2 + \left(\frac{p}{L} \right)^2} \quad (293)$$

- 谐振波长

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (294)$$

- 可以存在的模式: TE_{nip} 要求 $p \neq 0$; TM_{nip} 允许 $p = 0$ 。
- 主模: 当 $l < 2.016a$ 时, TM_{010} 为主模; $l > 2.016a$ 时, TE_{111} 为主模。

10.2.2 场表达式

TE_{nip} 模式:

$$H_z = H_0 J_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \sin(k_z z) \quad (295)$$

$$H_\rho = \frac{k_z}{k_c} H_0 J'_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \cos(k_z z) \quad (296)$$

$$H_\phi = -\frac{n k_z}{k_c^2 \rho} H_0 J_n(k_c \rho) \sin(n\phi) \cos(k_z z) \quad (297)$$

$$E_\rho = \frac{i \omega \mu n}{k_c^2 \rho} H_0 J_n(k_c \rho) \sin(n\phi) \sin(k_z z) \quad (298)$$

$$E_\phi = \frac{i \omega \mu}{k_c} H_0 J'_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \sin(k_z z) \quad (299)$$

TM_{nip} 模式:

$$E_z = E_0 J_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \cos(k_z z) \quad (300)$$

$$E_\rho = -\frac{k_z}{k_c} E_0 J'_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \sin(k_z z) \quad (301)$$

$$E_\phi = \frac{n k_z}{k_c^2 \rho} E_0 J_n(k_c \rho) \sin(n\phi) \sin(k_z z) \quad (302)$$

$$H_\rho = \frac{i \omega \varepsilon n}{k_c^2 \rho} E_0 J_n(k_c \rho) \sin(n\phi) \cos(k_z z) \quad (303)$$

$$H_\phi = -\frac{i \omega \varepsilon}{k_c} E_0 J'_n(k_c \rho) \cos(n\phi) \cos(k_z z) \quad (304)$$

10.2.3 腔内储能

(公式由 AI 给出, 未验算)

重要积分公式:

$$\int_0^a \left[J_n'^2(k_c \rho) + \frac{n^2}{(k_c \rho)^2} J_n^2(k_c \rho) \right] \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \left[\left(1 - \frac{n^2}{(k_c a)^2} \right) J_n^2(k_c a) + J_n'^2(k_c a) \right] \quad (305)$$

$$\int_0^a J_n^2(k_c \rho) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_n^2(k_c a) - J_{n-1}(k_c a) J_{n+1}(k_c a)] \quad (306)$$

$$\int_0^a J_n^2(k_c \rho) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \left[J_n'^2(k_c a) + \left(1 - \frac{n^2}{(k_c a)^2} \right) J_n^2(k_c a) \right] \quad (307)$$

$$W_{0,TE} = \frac{\mu V |H_0|^2 k^2}{4\epsilon_n} \frac{k_c^2}{k_c^2} \left(1 - \frac{n^2}{\chi_{ni}'^2}\right) J_n^2(\chi_{ni}') \quad (308)$$

$$W_{0,TM} = \frac{\varepsilon V |E_0|^2 k^2}{2\epsilon_n \epsilon_p} \frac{k_c^2}{k_c^2} J_n'^2(\chi_{ni}) \quad (309)$$

10.2.4 腔壁损耗

(公式皆由 AI 给出, 未验算)

重要积分公式:

$$\int_0^a [J_n'^2(k_c a) + \frac{n^2}{k_c^2 r^2} J_n^2(k_c a)] r dr = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\chi_{ni}'^2}\right) J_n^2(\chi_{ni}') \quad (310)$$

$$P_{s,TE} = \frac{R_s \pi a |H_0|^2 J_n^2(\chi_{ni}')}{\epsilon_n} \left[\frac{k_z^2 a}{2k_c^2} \left(1 - \frac{n^2}{\chi_{ni}'^2}\right) + \frac{L}{2} \left(1 + \frac{n^2 k_z^2}{k_c^4 a^2}\right) \right] \quad (311)$$

$$P_{s,TM} = \frac{R_s \pi a}{\epsilon_n} \left(\frac{\omega \varepsilon E_0}{k_c} \right)^2 J_n'^2(\chi_{ni}) \left(\frac{a}{2} + \frac{L}{\epsilon_p} \right) \quad (312)$$

10.2.5 品质因数

11 第十一章: 谐振腔链和空间谐波

11.1 耦合谐振腔

11.1.1 双腔系统

11.1.2 N 腔耦合模式的解

- 1、首尾整腔
- 2、首尾半腔

11.2 无穷长均匀腔链

参数:

- 纵向波数 β 或 k_z ;
- 单个腔长度 p ;
- 单个腔的空间谐波相角 $\theta = \beta p$;
- 耦合常数 κ ;
- 扰动后的谐振频率 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\kappa \cos \theta} \approx \omega_0 (1 - \kappa \cos \theta)$
- 相速度 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega p}{\theta}$;
- 群速度 $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{p}{d\theta} \frac{d\omega}{d\theta} = \kappa p \omega_0 \sin \theta$

11.2.1 空间谐波

n 次空间谐波的纵向波数:

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{p} \quad (313)$$

各次空间谐波的群速度相同，相速度不同。

11.2.2 周期结构色散特性

- 结构有无穷多个 TE_{nmp} 和 TM_{nmp} 模式，每个模式有一条色散曲线，落在不同的频带；
- 每一个 ω_θ 对应一个基波 $\theta_0 = \beta_0 p$ 的色散模式，并由无穷多个高次空间谐波组成；
- 色散曲线近似为余弦函数，以 2π 为周期重复；
- v_p 与 v_g 同向的波称为前向波，反向的称为返波。对于给定的色散曲线，按照基波区分是前向波结构还是返波结构。

11.3 盘荷波导的解析求解

你要真考这玩意，我这 10 分给你了呗

11.3.1 无穷长均匀腔链

11.3.2 短周期近似均匀系统

11.3.3 短周期近似均匀系统（外周孔）

11.4 褶皱结构

11.4.1 开放平板褶皱结构

11.4.2 封闭平板褶皱结构

12 矢势和运动电荷的场

12.1 电磁势

- 标势 ϕ 、矢势 \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (314)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (315)$$

- 洛伦兹规范条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (316)$$

12.2 达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (317)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (318)$$

12.3 推迟势

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r} dV' \quad (319)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{4\pi r} dV' \quad (320)$$

12.4 重要结论

12.4.1 远场近似的偶极辐射

场分布:

$$\mathbf{B} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi r} e^{ikR} \hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} \ddot{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (321)$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} \quad (322)$$

能流和辐射功率:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta \hat{\mathbf{n}} \quad (323)$$

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (324)$$

13 相对论运动电荷的场和同步辐射

13.1 相对论下运动电荷的辐射

13.1.1 Lienard-Wiechert 势

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}/c)R} \right]_{ret} \quad (325)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}/c)R} \right]_{ret} \quad (326)$$

13.1.2 推迟关系及变换关系导出的导数

推迟关系:

$$t' = t - \frac{r(t')}{c} \quad (327)$$

求导时, 需要用隐函数求导方法得到导数结果:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta(t')} \quad (328)$$

$$\nabla t' = -\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta(t'))} \quad (329)$$

13.1.3 运动点电荷的场

场的表达式:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\gamma^2 4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\hat{\mathbf{n}} - \beta}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta)^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \beta) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta)^3} \quad (330)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \quad (331)$$

辐射功率:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \epsilon_0 c |E_a|^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (332)$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = r^2 (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \beta) \times \dot{\beta}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta)^5} \quad (333)$$

注意: 推迟时间和观测时间中的辐射功率角分布不同, 满足变换关系:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dP(t')}{d\Omega} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (334)$$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \beta) \times \dot{\beta}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta)^6} \quad (335)$$

13.2 两种特殊情况下的辐射

13.2.1 速度平行于加速度

$\mathbf{v} \parallel \dot{\mathbf{v}}$:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (336)$$

$$P(t') = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \gamma^6 \dot{v}^2 \quad (337)$$

13.2.2 速度垂直于加速度

$\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - \gamma^{-2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (338)$$

$$P(t') = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \gamma^4 \dot{v}^2 \quad (339)$$

13.3 同步辐射

- 时间结构: 每 $T_0 = 2\pi R/c$ 发出一个脉冲, 脉冲宽度约为 $\Delta t \approx R/\gamma^3 c$;
- 频谱结构: 频谱宽度约为 $\Delta\omega \approx \gamma^3 c/R$, 中心频率约为 $\omega_c \approx 3\gamma^3 c/2R$;
- 角分布: 辐射集中在一个开口角约为 $1/\gamma$ 的锥形区域内。

14 切伦科夫辐射

- 辐射条件: 带电粒子速度 v 大于介质中光速 c/n , 即 $\beta > 1/n$;
- 辐射角: $\cos \theta = \frac{1}{n\beta}$, 由于电子射程通常不大, 可以认为仅在这个锥面上有光

15 重要公式汇总

15.1 基本常数

- 真空介电常数: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- 真空磁导率: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
- 光速: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

15.2 常用矢量恒等式

- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

16 学习建议和复习要点

16.1 重点掌握

- 麦克斯韦方程组及其物理意义

2. 电磁波的传播特性和边界条件
3. 各种导波系统的模式分析
4. 运动电荷的辐射特性

16.2 学习方法

- 理论推导与物理图像相结合
- 多做习题加深理解
- 注意不同坐标系下的数学技巧
- 建立知识框架，融会贯通

参考文献

- [1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, 1998.
- [2] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Cambridge University Press, 2017.
- [3] 郭硕鸿, 电动力学, 高等教育出版社, 2008.
- [4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge University Press, 1999.