高等电动力学课程总结笔记

学生姓名

2025 年 12 月 26 日

目录

课程概述

课程目标

高等电动力学是物理和电子工程专业的重要基础课程，本课程旨在：

- 深入理解电磁场的基本理论和数学描述
- 掌握电磁波的传播、反射和折射规律
- 学习各种导波系统的特性分析
- 了解运动电荷的场和辐射现象

课程结构

本课程共包含 13 个主要章节，从基础理论到实际应用，系统涵盖了高等电动力学的核心内容。

数学基础知识

0.1 重要常数

物理常数

- 真空介电常数：$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m
- 真空磁导率：$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
- 光速：$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8$ m/s
- 电子电荷：$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
- 普朗克常数：$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J • s

材料参数

- 铜的电导率 $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7$ S/m

0.2 矢量分析：参见 Jackson 书扉页

0.2.1 矢量运算律

混合积：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{1}$$

(2)

三矢量的矢积：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) \tag{3}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{4}$$

对称点积-叉积混合：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{5}$$

(6)

0.3 nabla 算符

0.3.1 各种坐标系下的 nabla 算符展开

0.4 nabla 算符与矢量积的运算律

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{7}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{r}) \tag{8}$$

0.5 偏微分方程

0.6 特殊函数

0.6.1 delta 函数

$$\int f(x)\delta'(x-a)=-f'(a) \tag{9}$$

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{10}$$

0.6.2 Bessel 函数

0.6.3 Legendre 多项式

0.7 张量代数的基本规则

1 第一章：基础知识回顾

1.1 麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{14}$$

1.2 边界条件

- 电场的切向分量连续：$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$
- 磁场的法向分量连续：$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$
- 电位移的法向分量：$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma_f$
- 磁场强度的切向分量：$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f$

2 静电场

电场与电势：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{15}$$

2.1 静电场的基本性质

2.1.1 叠加原理

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \tag{16}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{17}$$

2.1.2 泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{18}$$

2.2 高斯定理

积分形式：

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{19}$$

微分形式：

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

2.2.1 静电场的边界条件

1、面电荷两侧：电场和电位移矢量的切向分量连续，法向分量有跳变：

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \tag{21}$$

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma_f \tag{22}$$

2、偶电层两侧：电势有跳变

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{D}{\varepsilon_0} \tag{23}$$

2.2.2 静电场的能量

点电荷场：

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi(\mathbf{r}_i) \tag{24}$$

体电荷场：

$$\begin{aligned}
W =& \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV\,dV' && (25)\\
=& \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV && (26)\\
=& -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \phi\nabla^2\phi dV && (27)\\
=& \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\nabla\phi|^2 dV && (28)\\
=& \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbf{E}|^2 dV && (29)
\end{aligned}$$

能量密度

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 \tag{30}$$

2.2.3 导体表面和介质界面的静电场

对于导体表面的静电荷场：

$$\sigma = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial n} \tag{31}$$

式中，Φ 为真空区的电势。

导体表面受到的静电压强：

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\sigma E_n\mathbf{n} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2\mathbf{n} \tag{32}$$

2.3 静电场的求解方法

各种不同方法的基础：唯一性定理

定理 2.1 (唯一性定理).

假设区域 V 内给定电荷分布，区域 V 的边界 S 上给定电势或者 $\partial\phi/\partial n$，则区域 V 内的电势 ϕ 唯一确定。

假设区域 V 内有一些导体，导体之外的电荷分布已知，导体上的总电荷已知，区域的边界上电势 Φ 或者 $\partial\phi/\partial n$ 已知，则区域 V 内的电势 ϕ 唯一确定。

2.3.1 分离变量法

在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系中的应用。

2.3.2 镜像法

- 导体平面的镜像法
- 导体球面的镜像法
- 柱状导体的镜像法

2.3.3 格林函数法（需要进一步加深理解）

定理 2.2 (格林恒等式).

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) dV = \oint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \tag{33}$$

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \oint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) dS \tag{34}$$

对任意确定的边值问题，我们想找到的格林函数总是满足如下方程：

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{35}$$

边界条件：

- 第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）：$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0$，当 $\mathbf{r}'$ 在边界 S 上时
- 第二类边界条件（Neumann 边界条件）：$\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$，当 $\mathbf{r}'$ 在边界 S 上时

则对于任意给定的格林函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$，静电势的解为：

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) dS' \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS' \quad \text{（Dirichlet 边界条件）} \\
=& \langle\phi\rangle_S + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\phi}{\partial n'}dS' \quad \text{（Neumann 边界条件）}
\end{aligned}$$

2.3.4 多极展开

电势的多极展开表达式：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l} Q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{36}$$

2.4 电偶极子、电四极子

高阶多极矩的计算和物理意义。

3 静磁场

3.1 静磁场的基本性质

3.1.1 比奥-萨伐尔定律

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \tag{37}$$

3.1.2 安培环路定理

积分形式：

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{38}$$

微分形式：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{39}$$

3.1.3 磁矢势

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{40}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{41}$$

3.2 磁介质中的静磁场

3.2.1 磁化强度和磁极化强度

$$\mathbf{M} = \frac{\text{磁矩}}{\text{体积}} \tag{42}$$

3.2.2 磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{43}$$

3.2.3 磁介质中的边界条件

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} \tag{44}$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \tag{45}$$

3.3 静磁场的能量

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}dV \tag{46}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int |\mathbf{B}|^2 dV \tag{47}$$

4 电磁场的基本性质

4.1 能量与能流

- 电磁场的能量密度：$u = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2)$
- 坡印廷矢量：$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$
- 能量守恒方程：$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$

4.2 动量

- 电磁场的动量密度：$\mathbf{g} = \varepsilon\mathbf{E}\times\mathbf{B}$
- 电磁力密度：$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$
- 动量守恒方程：$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{T} = -\mathbf{f}$

4.3 角动量

- 电磁场的角动量密度：$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{g}$
- 角动量守恒方程：$\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{M} = -\mathbf{r}\times\mathbf{f}$
- 角动量密度张量：$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{T}$

5 电磁波

5.1 波动方程

从麦克斯韦方程组导出的波动方程：

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{48}$$

对于单色波，导出 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \tag{49}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0 \tag{50}$$

式中，$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为波数。

5.2 平面电磁波

最简单情况：均匀平面波电场矢量沿 x 方向，波沿 z 方向传播

方程组：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon E_x = 0 \tag{51}$$

$$E_x = E_+e^{ikz} + E_-e^{-ikz} \tag{52}$$

磁场

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta}Ee^{ikz}\hat{y} \tag{53}$$

式中，$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ 为波阻抗。

重要概念：

- 波阵面：空间中相位相同的点构成的曲面，即等相位面
- 平面波：等相位面为无限大平面的电磁波
- 相速度：电磁波的等相位面在空间中的移动速度,$v_p = \omega/k$
- 群速度：电磁波中能量和信息传递的速度, $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$

5.2.1 电磁场关系

均匀平面波的电磁场关系:

$$\mathbf{E} = \eta \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{54}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \tag{55}$$

即：$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \widehat{\mathbf{n}}$ 三者互相垂直，构成右手系。

5.2.2 波阻抗

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{56}$$

真空波阻抗

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega \tag{57}$$

5.2.3 能量密度与能流密度

能量密度：理想媒质中均匀平面波的电场能量等于磁场能量

- 电场能量密度：$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
- 磁场能量密度：$u_H = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
- 总能量密度：$u = u_E + u_H = \varepsilon E^2$

能流密度：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\eta}|\mathbf{E}|^2\mathbf{n} \tag{58}$$

电磁波的能量传播速度：

$$v = \frac{|\mathbf{S}|}{u} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{59}$$

5.2.4 复数形式表达

复数表示的场：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \tag{60}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \tag{61}$$

复坡印廷矢量：

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \tag{62}$$

复数表示和实际物理量关系：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \tag{63}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \tag{64}$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{-i2\omega t}\} \tag{65}$$
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{S}}\} \tag{66}$$

即：复坡印廷矢量的实部为平均功率流密度，虚部为磁场和电场之间能量转换的无功功率流密度。

5.3 电磁波的能量和动量

- 能量密度：$u = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$
- 坡印廷矢量：$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
- 动量密度：$\mathbf{g} = \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B}$

5.4 平面电磁波的传播

5.4.1 理想介质

- 电场、磁场、传播方向之间相互垂直，是横电磁波
- 无衰减，电场与磁场振幅不变
- 波阻抗为实数，电场与磁场同相位
- 电磁波的相速度与频率无关，即无色散
- 电场能量密度等于磁场能量密度
- 能量的传输速度等于相速度

5.4.2 导电媒质

特征：电导率 $\sigma \neq 0$，会引发传导电流 $J = \sigma E$

复介电常数理论

定义一个复介电常数

$$\varepsilon_c = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \tag{67}$$

对应地得到复的波数：

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \tag{68}$$

并引入衰减常数 $\alpha[Np/m]$、相位常数 $\beta[rad/m]$ 和电磁波的传播常数 $\gamma[1/m]$：

$$k_c = i\gamma = \beta + i\alpha \tag{69}$$

导电媒质中的波动方程：

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_c^2\mathbf{E} = 0 \tag{70}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k_c^2\mathbf{H} = 0 \tag{71}$$

$$k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c = \omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma \tag{72}$$

平面波解：

$$\dot{\mathbf{E}}(z,t) = E_{xm}e^{-\alpha z}e^{i\beta z}\hat{\mathbf{x}} \tag{73}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(z,t) = \frac{1}{|\eta_c|}e^{i\phi}E_{xm}e^{-\alpha z}e^{i\beta z}\hat{\mathbf{y}} \tag{74}$$

注意，此时电磁场不再同相位：导电媒质本征阻抗此时为复数，**电场超前磁场相位** ϕ：

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = |\eta_c|e^{-i\phi} \tag{75}$$

平面波的传播特性

- 三个传播参数：

  由 $k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma$，可解出 α 和 β：

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \tag{76}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \tag{77}$$

  此时 α，β 和 γ 均与频率有关，表现出色散特性

- 相速度：与频率有关，是色散波。一般来讲，导电系数越大，色散越强。

$$v_p = \frac{\omega}{\beta(\omega)} \tag{78}$$

- 电磁场关系

（1）仍通过波阻抗联系：

$$\mathbf{E} = \eta_c \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = |\eta_c| e^{-i\phi} \cdot \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{79}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_c} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \frac{1}{|\eta_c|} e^{i\phi} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \tag{80}$$

（2）E、H、n 三者仍互相垂直，构成右手系

（3）电场超前相位 $\phi = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

$$\eta_c = |\eta_c| e^{-i\frac{1}{2}\arctan\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \tag{81}$$

- 能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon|E|^2 = \frac{\varepsilon}{2}E_{xm}^2 e^{-2\alpha z}\cos^2(\omega t - \beta z) \tag{82}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu|H|^2 = \frac{\mu}{2}\frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|^2} e^{-2\alpha z}\cos^2(\omega t - \beta z + \phi) \tag{83}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}E_{xm}^2 e^{-2\alpha z}\cos^2(\omega t - \beta z)\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2} \tag{84}$$

$$= w_e\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2} \tag{85}$$

结论：导电媒质中均匀平面波的磁场能量大于电场能量

- 能流密度：衰减快于场的衰减

$$\mathbf{S}_{ave} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{1}{2}\frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z}\cos\phi\,\hat{\mathbf{n}} \tag{86}$$

$$\tag{87}$$

良导体近似

在良导体中，$\sigma \gg \omega\varepsilon$，则有近似关系：

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu\sigma} \tag{88}$$

$$\tag{89}$$

于是传播性质简化为：

- 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{\dfrac{4\pi f}{\mu\sigma}}$
- 波长：$\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{f\mu\sigma}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}$
- 波阻抗：$|\eta_c| = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma}}$
- 电磁场相位差：$\phi = \dfrac{\pi}{4}$
- 能量密度：$w_m \approx w_e \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg w_e$
- 能流密度：$\mathbf{S}_{ave} = \dfrac{1}{2}\frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{n}}$

重要概念：趋肤深度

定义：电磁波穿入良导体时，当波的幅度下降为表面处振幅的 $1/e$ 时，波在良导体中传播的距离

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \tag{90}$$

对良导体，有 $\delta = 1/\alpha = 1/\beta = \lambda/2\pi$

弱导体近似

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{91}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{92}$$

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + i\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \tag{93}$$

- 衰减较小
- 相位常数和非导电媒质中基本相等
- 电场和磁场之间相位差很小

6 电磁波的反射和折射

计算框架：

- 分区写出入射波、反射波、透射波各分量的场表达式
- 应用边界条件（不同区域的 k 的关系、幅度、相位关系），列出方程
- 解方程，得到反射系数和透射系数

6.1 边界条件

(1) 场强条件：电场和磁场的切向分量在边界上连续
需注意：区分极化方向；总的电磁场是所有波的叠加

$$E_{ix} + E_{rx} = E_{tx+} + E_{tx-} \tag{94}$$

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{ty+} + E_{ty-} \tag{95}$$

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx+} + H_{tx-} \tag{96}$$

$$H_{iy} + H_{ry} = H_{ty+} + H_{ty-} \tag{97}$$

(2) 相位匹配条件：所有波的波矢在边界面的切向分量相等
需注意：是针对单个波而言，不用叠加；
导出结论：Snell 定律

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t \tag{98}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{99}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ \dfrac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} = \dfrac{n_1}{n_2} \end{cases} \tag{100}$$

非磁性介质中，入射角/透射角满足

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{101}$$

6.2 理想介质单一交界面的解

6.2.1 垂直极化：电场方向垂直于法平面，磁场方向由右手螺旋定则确定

$$E_{1y} = E_i + E_r = (1+\Gamma)E_0 \tag{102}$$

$$E_{2y} = E_t = \tau E_0 \tag{103}$$

$$H_{1x} = H_{ix} + H_{rx} = \frac{1}{\eta_1}E_0(\cos\theta_i - \Gamma\cos\theta_r) = \frac{1}{\eta_1}E_0(1-\Gamma)\cos\theta_i \tag{104}$$

$$H_{2x} = H_{tx} = \frac{1}{\eta_2}\tau E_0 \cos\theta_t \tag{105}$$

透射、反射系数：

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{106}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{107}$$

非磁性介质中，

$$\Gamma_\perp = -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{108}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{109}$$

反射-透射关系：

$$1+\Gamma_\perp = \tau_\perp \tag{110}$$

$$1-\Gamma_\perp^2 = \frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\tau_\perp^2 \tag{111}$$

6.2.2 水平极化：磁场方向垂直于法平面，电场方向由右手螺旋定则确定

$$E_{1x} = E_i + E_r = E_0(1-\Gamma)\cos\theta_i \tag{112}$$

$$E_{2x} = E_{tx} = \tau E_0\cos\theta_t \tag{113}$$

$$H_{1y} = H_i + H_r = \frac{1}{\eta_1}E_0(1+\Gamma) \tag{114}$$

$$H_{2y} = H_{ty} = \frac{1}{\eta_2}\tau E_0 \tag{115}$$

透射、反射系数：

$$\Gamma_\parallel = \frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \tag{116}$$

$$\tau_\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \tag{117}$$

非磁性介质：

$$\Gamma_\parallel = \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)} = \frac{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{118}$$

$$\tau_\parallel = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_i}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{119}$$

反射-透射关系：

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2}\tau_{\parallel} \tag{120}$$

$$1 - \Gamma_{\parallel}^2 = \tau_{\parallel}^2 \tag{121}$$

6.3 全透射与全反射

6.3.1 全透射：反射系数为 0，仅出现在平行极化分量中

条件：

$$\sin\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \tag{122}$$

$$\cos\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \tag{123}$$

临界角度：Brewster 角

$$\theta_B = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{124}$$

性质：

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \tag{125}$$

6.3.2 全反射：透射系数为 0，各种极化模式都可能发生

条件：

$$\sin\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{126}$$

$$\theta_i = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \theta_c \tag{127}$$

即如下两条：

- 入射波媒质 1 向媒质 2 斜入射，且 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
- 入射角 θ_i 大于临界角 θ_c，即 $\theta_c \leq \theta_i \leq 90°$

此时透射波可写为衰减形式：

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0}e^{-\alpha z}e^{i\beta x} \tag{128}$$

其中

$$\alpha = k_2\sqrt{\left(\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c}\right)^2 - 1} \tag{129}$$

$$\beta = k_2\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c} \tag{130}$$

衰减长度 $\delta = k_1\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_c}$

7 波导基本理论

7.1 从麦克斯韦方程组导出的波动方程

7.1.1 直角坐标系的波动方程及其基本解

7.1.2 柱坐标系的波动方程及其基本解

7.2 纵向均匀系统的纵横关系

7.3 波导的阻抗与功率传输

8 几种常见波导

8.1 矩形波导

8.1.1 矩形波导的模式

8.1.2 截止频率和传播特性

8.1.3 TE 模式场分布

8.1.4 TM 模式场分布

8.1.5 波导的阻抗和功率传输

8.2 圆波导

8.2.1 圆波导的模式

8.2.2 截止频率和传播特性

8.2.3 TE 模式场分布

8.2.4 TM 模式场分布

8.2.5 波导的阻抗和功率传输

8.2.6 高阶模式的特性

8.3 介质加载波导

8.3.1 部分填充介质的波导

介质对传播常数的影响。

8.3.2 特征方程的求解

不同边界条件下的特征方程。

8.4 介质加载圆波导和介质波导

8.4.1 介质圆波导

- 介质波导的导模条件
- 泄漏模和辐射模

8.5 光纤原理

光在光纤中的传播机制。

9 谐振腔基础理论

9.1 波动方程及其基本解

9.2 谐振系统的纵横关系

9.2.1 波导的储能与品质因数

10 常见谐振腔

10.1 矩形谐振腔

- 谐振频率的计算
- 品质因数 Q 的定义和计算
- 模式的正交性

10.2 圆柱谐振腔

圆柱形谐振腔的谐振特性。

11 第十一章：谐振腔链和空间谐波

11.1 耦合谐振腔

多个谐振腔的耦合效应。

11.2 周期结构

- 布洛赫定理
- 色散关系
- 带隙结构

12 矢势和运动电荷的场

12.1 电磁势

- 标势 ϕ 和矢势 $\mathbf{A}$ 的定义
- 洛伦兹规范条件：$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

12.2 达朗贝尔方程

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{131}$$

12.3 李纳-维谢尔势

运动电荷产生的电磁势。

13 运动电荷的场和同步辐射

13.1 加速电荷的辐射

- 拉莫尔公式
- 相对论性推广

13.2 同步辐射

- 同步辐射的特性
- 角分布和频谱
- 应用领域

14 重要公式汇总

14.1 基本常数

- 真空介电常数：$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m
- 真空磁导率：$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
- 光速：$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8$ m/s

14.2 常用矢量恒等式

- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

15 学习建议和复习要点

15.1 重点掌握

1. 麦克斯韦方程组及其物理意义
2. 电磁波的传播特性和边界条件
3. 各种导波系统的模式分析
4. 运动电荷的辐射特性

15.2 学习方法

- 理论推导与物理图像相结合
- 多做习题加深理解
- 注意不同坐标系下的数学技巧
- 建立知识框架，融会贯通

参考文献

[1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, 1998.

[2] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Cambridge University Press, 2017.

[3] 郭硕鸿, *电动力学*, 高等教育出版社, 2008.

[4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge University Press, 1999.