

Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 10 日

目录

1 数学基础知识	5
1.1 补充内容	5
1.1.1 矩阵的可分性	5
1.2 重要证明	5
1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质	5
1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质	5
1.3 例题与习题	5
2 函数插值与重构	7
2.1 重要证明	7
2.1.1 插值多项式的误差函数	7
2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理	7
2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式	8
2.1.4 三角插值的误差分析	8
2.2 函数逼近	8
2.3 补充内容	8
2.3.1 Schauder 基	8
2.4 重要证明	8
2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理	8
2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明	8
2.4.3 最佳一致逼近存在性定理	9
2.5 重要例题与习题	9

Chapter 1

数学基础知识

1.1 补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.2.1 Legendre 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. 在所有首项为 1 的 n 次多项式中, Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上与零的平方误差最小。

证明:

提示: 考虑 $f = \tilde{P}_n + a_{n-1}\tilde{P}_{n-1} + \dots + a_1\tilde{P}_1 + a_0\tilde{P}_0$ 和误差函数 $\|f - 0\|^2$

1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 1.2.2. 在所有首项为 2^{n-1} 的 n 次多项式中, Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上与零的一致误差最小。

证明:

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设 $f \in C^{n+1}[a, b]$, x_0, x_1, \dots, x_n 为区间 $[a, b]$ 上的 $n + 1$ 个两两不同的节点, 则对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.1)$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明:

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题: 定义

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \quad (2.2)$$

则进行分片线性插值时,

- 若 $f \in C[a, b]$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - \phi\|_\infty \rightarrow 0$
- 若 $f \in C^1[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时,

- 若 $f \in C^1[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^2 \|f''\|_\infty$

- 若 $f \in C^3[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^3 \|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a, b]$, 则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

证明:

Note: 分片线性插值只要做泰勒展开即可; 分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出, 低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析

2.2 函数逼近

2.3 补充内容

2.3.1 Schauder 基

2.4 重要证明

2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

定理 2.4.1. 设 $f \in C[a, b]$, Φ 为 $C[a, b]$ 的有限维子空间, 则存在唯一的 $\phi^* \in \Phi$, 使得

$$\|f - \phi^*\| = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| \quad (2.3)$$

证明:

2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到 $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ 的完备化空间 $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ 中的一个元素。若 $\|\cdot\|_2$ 为权系数 ρ 的内积诱导范数, 则 $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ 即为 $L^2_\rho(a, b)$ 。

2、设 $f \in C[a, b]$, $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a, b]$ 中的规范正交函数组, 则 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi_m(x), \quad a_m = (f, \phi_m) \quad (2.4)$$

在 $C[a, b]$ 中一致收敛于 f , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=0}^n a_m \phi_m(x) \right\|_\infty = 0 \quad (2.5)$$

证明:

提示: 1 的证明用到 $\sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$, 2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

定理 2.4.2 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f \in C[a, b]$, 则在 n 次多项式空间 P_n 中, 存在一个多项式 $p_n^* \in P_n$, 使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \quad (2.6)$$

即 P_n 中关于 $f \in C[a, b]$ 的最小偏差是可以达到的。

证明:

提示: 利用偏差泛函的性质

2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记 $\Phi = \text{span}(1, x^2)$, 求 $x \in [0, 1]$ 上在 Φ 中的最佳平方逼近。