

Numerical Analysis  
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 15 日



# 目录

<b>1 数学基础知识</b>	<b>5</b>
1.1 补充内容	5
1.1.1 矩阵的可分性	5
1.2 重要证明	5
1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质	5
1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质	6
1.3 例题与习题	7
<b>2 函数插值与重构</b>	<b>9</b>
2.1 重要证明	9
2.1.1 插值多项式的误差函数	9
2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理	9
2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式	10
2.1.4 三角插值的误差分析	10
2.2 函数逼近	10
2.3 补充内容	10
2.3.1 Schauder 基	10
2.4 重要证明	10
2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理	10
2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明	10
2.4.3 最佳一致逼近存在性定理	11
2.4.4 Chebyshev 交错点组定理	11
2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理	11
2.5 重要例题与习题	11
<b>3 数值微积分</b>	<b>13</b>
3.1 补充内容	13
3.2 重要证明	13
3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析	13

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析 . . . . .	13
3.3 重要习题与例题 . . . . .	13
<b>4 常微分方程数值解</b>	<b>15</b>
4.1 补充内容 . . . . .	15
4.1.1 一致 Lipschitz 常数的求解 . . . . .	15
4.2 重要证明 . . . . .	15
4.2.1 $y$ 的各阶导数 . . . . .	15
4.2.2 一步误差与局部截断误差的关系 . . . . .	16
4.3 重要习题与例题 . . . . .	16
4.3.1 求相容阶和主局部截断误差: 泰勒级数展开法 . . . . .	16
4.3.2 显式 RK 的推导 . . . . .	16
4.3.3 课本习题 . . . . .	19
<b>5 圣遗物, 考前必看</b>	<b>33</b>
<b>6 圣遗物答案</b>	<b>37</b>

# Chapter 1

## 数学基础知识

### 1.1 补充内容

#### 1.1.1 矩阵的可分性

### 1.2 重要证明

#### 1.2.1 Legendre 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. 在所有首项为 1 的  $n$  次多项式中, Legendre 多项式  $\tilde{P}_n(x)$  在  $[-1, 1]$  上与零的平方误差最小。

证明:

考虑一个首项为 1 的  $n$  次多项式  $f \in \mathbb{P}_n$ , 必有

$$f = \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{P}_k(x) \quad (1.1)$$

考虑误差函数

$$\phi(\mathbf{a}) = \|f(x) - 0\|_2^2 \quad (1.2)$$

$$= \int_{-1}^1 \tilde{P}_n^2(x) dx + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^1 \tilde{P}_n(x) \tilde{P}_k(x) dx + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^1 \tilde{P}_k^2(x) dx \quad (1.3)$$

由 Legendre 多项式的正交性,

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_i(x) \tilde{P}_j(x) dx = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij} \quad (1.4)$$

于是

$$\phi(\mathbf{a}) = \int_{-1}^1 \tilde{P}_n^2(x) dx + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^1 \tilde{P}_k^2(x) dx \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

当且仅当  $a_k = 0$  时,  $\phi(\mathbf{a})$  取得最小值, 即 Legendre 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的平方误差最小。

### 1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

**定理 1.2.2.** 在所有首项为 1 的 n 次多项式中, Chebyshev 多项式  $T_n(x)$  在  $[-1, 1]$  上与零的一致误差最小。

证明:

方法 1: 将一致误差转化, 并考虑在  $\mathbb{P}_{n-1}$  上的最佳一致逼近多项式

$$f = \tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x) \quad (1.7)$$

考虑误差函数

$$\Delta(f, 0) = \|f(x) - 0\|_\infty \quad (1.8)$$

$$= \|\tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)\|_\infty \quad (1.9)$$

$$= \|\tilde{T}_n(x) - \left( - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x) \right)\|_\infty \quad (1.10)$$

$$= \Delta(\tilde{T}_n, - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) \quad (1.11)$$

该误差函数取得最小值时, 即为

$$\min_{\mathbf{a}} \Delta(\tilde{T}_n, - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) = \text{dist}(\tilde{T}_n, \text{span}\{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}) \quad (1.12)$$

$$= \text{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) \quad (1.13)$$

则只要证  $\text{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \text{dist}(\tilde{T}_n, 0)$  即可。

考虑到  $\tilde{T}_n$  在  $[-1, 1]$  上恰有  $n+1$  个极值点, 且这些极值点构成了一个  $n+1$  个点的交错点组, 故 0 就是  $\tilde{T}_n$  在  $\mathbb{P}_{n-1}$  中的最佳一致逼近多项式, 因此

$$\text{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \text{dist}(\tilde{T}_n, 0) \quad (1.14)$$

因此, 当  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  时, 误差函数可以取得最小值, 即 Chebyshev 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的一致误差最小。

**方法 2: 利用交错点组证明差多项式为 0** 假设存在另一个首项为 1 的 n 次多项式  $f_n(x)$ , 使得  $\|f_n(x) - 0\|_\infty < \|T_n(x) - 0\|_\infty$ 。

考慮

$$Q(x) = f_n(x) - \tilde{T}_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1} \quad (1.15)$$

在  $\tilde{T}_n$  的  $n+1$  个极值点  $x_k$  处, 设  $\tilde{T}_n$  取得极值  $\pm M$ , 则由于  $\|f_n(x) - 0\|_\infty < \|T_n(x) - 0\|_\infty$ , 必有

$$|f_n(x_k)| < M \quad (1.16)$$

因此

$$Q(x_k) = \begin{cases} M - p(x_k) > 0, & k \text{ 为偶数} \\ -M - p(x_k) < 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (1.17)$$

于是 Q 在区间内  $n+1$  个点上符号交替, 故 Q 至少有  $n$  个零点。由于  $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$ , Q 只能为 0. 于是  $f_n(x) = \tilde{T}_n(x)$ , 与假设矛盾。

### 1.3 例题与习题



# Chapter 2

## 函数插值与重构

### 2.1 重要证明

#### 2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设  $f \in C^{n+1}[a, b]$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为区间  $[a, b]$  上的  $n + 1$  个两两不同的节点, 则对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.1)$$

其中  $p(x)$  为通过节点  $(x_i, f(x_i))$  的插值多项式。

证明:

#### 2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题: 定义

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \quad (2.2)$$

则进行分片线性插值时,

- 若  $f \in C[a, b]$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - \phi\|_\infty \rightarrow 0$
- 若  $f \in C^1[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若  $f \in C^2[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时,

- 若  $f \in C^1[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq ch \|f'\|_\infty$
- 若  $f \in C^2[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^2 \|f''\|_\infty$

- 若  $f \in C^3[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^3 \|f'''\|_\infty$
- 若  $f \in C^4[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

证明:

Note: 分片线性插值只要做泰勒展开即可; 分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出, 低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

### 2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

### 2.1.4 三角插值的误差分析

## 2.2 函数逼近

## 2.3 补充内容

### 2.3.1 Schauder 基

## 2.4 重要证明

### 2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

**定理 2.4.1.** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $\Phi$  为  $C[a, b]$  的有限维子空间, 则存在唯一的  $\phi^* \in \Phi$ , 使得

$$\|f - \phi^*\| = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| \quad (2.3)$$

证明:

### 2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到  $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$  的完备化空间  $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$  中的一个元素。若  $\|\cdot\|_2$  为权系数  $\rho$  的内积诱导范数, 则  $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$  即为  $L^2_\rho(a, b)$ 。

2、设  $f \in C[a, b]$ ,  $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$  为  $C[a, b]$  中的规范正交函数组, 则  $f$  在  $\{\phi_m\}$  下的广义傅里叶展开

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi_m(x), \quad a_m = (f, \phi_m) \quad (2.4)$$

在  $C[a, b]$  中一致收敛于  $f$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=0}^n a_m \phi_m(x) \right\|_\infty = 0 \quad (2.5)$$

证明:

提示: 1 的证明用到  $\sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$ , 2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

### 2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

**定理 2.4.2** (最佳一致逼近存在性定理). 设  $f \in C[a, b]$ , 则在  $n$  次多项式空间  $P_n$  中, 存在一个多项式  $p_n^* \in P_n$ , 使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \quad (2.6)$$

即  $P_n$  中关于  $f \in C[a, b]$  的最小偏差是可以达到的。

证明:

提示: 利用偏差泛函的性质

### 2.4.4 Chebyshev 交错点组定理

**定理 2.4.3** (Chebyshev 交错点组定理). 设  $f \in C[a, b]$ ,  $p_n^* \in P_n$  为  $f$  在  $P_n$  中的最佳一致逼近多项式, 则存在  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ , 使得

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \|f - p_n^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1 \quad (2.7)$$

即误差函数在  $n + 2$  个点上达到最大偏差且符号交替。

证明:

提示: 分别证明必要性和充分性, 且均用到反证法。

### 2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理

**定理 2.4.4** (最佳一致逼近唯一性定理). 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $n$  次多项式空间  $P_n$  中的最佳一致逼近多项式  $p_n^*$  是唯一的。

证明:

提示: 反证法。

## 2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记  $\Phi = \text{span}(1, x^2)$ , 求  $x \in [0, 1]$  上在  $\Phi$  中的最佳平方逼近。



# Chapter 3

## 数值微积分

### 3.1 补充内容

### 3.2 重要证明

3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

### 3.3 重要习题与例题



# Chapter 4

## 常微分方程数值解

### 4.1 补充内容

#### 4.1.1 一致 Lipschitz 常数的求解

若  $f(t, y)$  关于  $y$  连续可微，则 Lipschitz 常数即为区间内  $f$  对  $y$  的偏导数的最大值，即

$$L = \max_{(t,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \quad (4.1)$$

### 4.2 重要证明

#### 4.2.1 $y$ 的各阶导数

当  $y' = f(t, y)$  时，求  $y$  的各阶导数。

符号规范：记  $\partial f / \partial x_i = f_i$ ，即  $f_i$  是  $f$  对第  $i$  个变量的偏导数。在当前情境中，有

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.3)$$

求解：

题目条件为

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (4.4)$$

即将对  $y$  的求导转化为了对  $f$  的全微分。于是有算符关系

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.5)$$

因此

$$y' = f \quad (4.6)$$

$$y'' = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.7)$$

$$= f_1 + ff_2 \quad (4.8)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dt} = \frac{df_1}{dt} + f \frac{df_2}{dt} + f_2 \frac{df}{dt} \quad (4.9)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t} + f \frac{\partial f_1}{\partial y} + f \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + f_2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (4.10)$$

$$= f_1 1 + ff_{12} + f(f_{21} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) \quad (4.11)$$

$$= f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22} + f_2(f_1 + ff_2) \quad (4.12)$$

#### 4.2.2 一步误差与局部截断误差的关系

$$(1 - h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \leq |R_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \quad (4.13)$$

### 4.3 重要习题与例题

#### 4.3.1 求相容阶和主局部截断误差：泰勒级数展开法

欧拉法

梯形方法

#### 4.3.2 显式 RK 的推导

基本思路：

局部截断误差为

$$R = y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y, f) \quad (4.14)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(t) h^k \quad (4.15)$$

$$- y(t) \quad (4.16)$$

$$- h \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k h^k \quad (4.17)$$

要令 RK 具有 n 阶相容性，即要令

$$R = p_{n+1}(t)h^{n+1} + O(h^{n+2}) \quad (4.18)$$

需要消去 R 中低于  $h^{n+1}$  的各阶项，即可得到一系列关于  $a_{ij}, b_i, c_i$  的方程。

计算方法即为：

- 在 t 点对  $t(t+h)$  作泰勒展开
- 在  $(t_n, y_n)$  对  $\phi(t_n, y_n, f)$  作多元泰勒展开
- 令各阶系数相等，即

$$\phi_k = \frac{1}{(k+1)!} y^{(k+1)} \quad (4.19)$$

## 显式二阶推导

显式 RK 参数矩阵：

$$\begin{array}{c|cc} c_1 = 0 & 0 & 0 \\ \hline c_2 & a_{21} & 0 \\ & b_1 + b_2 = 1 & \end{array} \quad (4.20)$$

RK 斜率：

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (4.21)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(t_n, y_n)) \quad (4.22)$$

增量函数：

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2 \quad (4.23)$$

对  $k_1, k_2$  作泰勒展开：

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f \quad (4.24)$$

$$k_2 = f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot c_2 h f + O(h^2) \quad (4.25)$$

则  $\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$  的展开可表示为

$$\text{常数项: } \phi_0 = (b_1 + b_2) f \quad (4.26)$$

$$\text{一次项系数: } \phi_1 = b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 \quad (4.27)$$

对 y 进行泰勒展开：

$$y' = f(t, y) \quad (4.28)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = f_1 + f f_2 \quad (4.29)$$

因此需要满足关系

$$(b_1 + b_2) f = y' = f \quad (4.30)$$

$$b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 = \frac{1}{2} y'' = \frac{1}{2} (f_1 + f f_2) \quad (4.31)$$

即

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (4.32)$$

$$b_2 c_2 = \frac{1}{2} \quad (4.33)$$

### 显式三阶推导

RK 参数矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 = 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 + & b_3 = 1 \end{array} \quad (4.34)$$

RK 斜率：

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f \quad (4.35)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \quad (4.36)$$

$$= f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot a_{21} h f \quad (4.37)$$

$$+ \frac{f_{11}(c_2 h)^2 + 2f_{12}(c_2 h)(a_{21} h k_1) + f_{22}(a_{21} h k_1)^2}{2} + O(h^3) \quad (4.38)$$

$$= f + c_2 f_1 h + a_{21} f f_2 h \quad (4.39)$$

$$+ \frac{c_2^2 f_{11} + 2a_{21} c_2 f f_{12} + a_{21}^2 f^2 f_{22}}{2} h^2 + O(h^3) \quad (4.40)$$

$$= f + c_2(f_1 + f f_2)h + \frac{c_2^2}{2}(f_{11} + 2f f_{12} + f^2 f_{22})h^2 + O(h^3) \quad (4.41)$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \quad (4.42)$$

$$= f + f_1 c_3 h + f_2 h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \quad (4.43)$$

$$+ \frac{f_{11} c_3^2 h^2 + 2f_{12} \cdot c_3 h \cdot h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) + f_{22}(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)^2 h^2}{2} + O(h^3) \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

此时，向  $k_3$  中代入  $k_1$  和  $k_2$  时，不一定要带入到  $h^2$  项，只要令所有的  $h^2$  项系数正确即可。于是有

$$k_3 = f + f_1 c_3 h + f_2 h[a_{31} f + a_{32}(f + c_2(f_1 + f f_2)h)] \quad (4.46)$$

$$+ \frac{h^2}{2}[c_3^2 f_{11} + 2c_3 f_{12}(a_{31} f + a_{32} f) + f_{22}(a_{31} f + a_{32} f)^2] + O(h^3) \quad (4.47)$$

$$= f + [c_3 f_1 + (a_{31} + a_{32}) f f_2]h \quad (4.48)$$

$$+ \frac{1}{2}[2a_{32} c_2 f_2(f_1 + f f_2) + c_3^2 f_{11} + 2c_3(a_{31} + a_{32}) f f_{12} + f^2 f_{22}(a_{31} + a_{32})^2]h^2 + O(h^3) \quad (4.49)$$

代入  $a_{31} + a_{32} = c_3$  后, 有

$$k_3 = f + c_3(f_1 + ff_2)h \quad (4.50)$$

$$+ \frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1 + ff_2) + c_3^2f_{11} + 2c_3^2ff_{12} + f^2f_{22}c_3^2]h^2 + O(h^3) \quad (4.51)$$

$$= f + c_3(f_1 + ff_2)h + \frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1 + ff_2) + c_3^2(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22})]h^2 + O(h^3) \quad (4.52)$$

先考虑  $y$  的各阶导数, 有

$$y' = f(t, y) \quad (4.53)$$

$$y'' = f_1 + ff_2 \quad (4.54)$$

$$y''' = f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22} + f_2(f_1 + ff_2) \quad (4.55)$$

代入增量函数  $\phi = b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3$ , 可得

$$\text{常数项: } \phi_0 = (b_1 + b_2 + b_3)f \quad (4.56)$$

$$\text{一次项系数: } \phi_1 = (b_2c_2 + b_3c_3)(f_1 + ff_2) \quad (4.57)$$

$$\text{二次项系数: } \phi_2 = \frac{1}{2} [2b_3a_{32}c_2f_2(f_1 + ff_2) + (b_2c_2^2 + b_3c_3^2)(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22})] \quad (4.58)$$

由

$$\phi_0 = y' = f \quad (4.59)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}y'' = \frac{1}{2}(f_1 + ff_2) \quad (4.60)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6}y''' = \frac{1}{6}[f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22} + f_2(f_1 + ff_2)] \quad (4.61)$$

可得方程组

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad (4.62)$$

$$b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \quad (4.63)$$

$$a_{32}b_3c_2 = \frac{1}{6} \quad (4.64)$$

$$b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3} \quad (4.65)$$

### 4.3.3 课本习题

#### 1、显式 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用显式 Euler 方法来求解初值问题, 列出数值解与解析解的误差.

(1)

$$y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad \text{取 } h = 0.25 \quad (\text{相应解析解为 } y(x) = x \ln x + 2x).$$

(2)

$$y' = \cos x + \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad \text{取 } h = 0.25 \quad (\text{相应解析解为 } y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{4}{3}).$$

证明： 显式 Euler 方法的格式为：

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}f(t_n, y_n) \quad (4.66)$$

(1)

$$x_0 = 1, \quad y_0 = y(1) = 2 \quad (4.67)$$

$$x_1 = 1.25, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0.25 \times \left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2 + 0.25 \times 3 = 2.75 \quad (4.68)$$

$$x_2 = 1.5, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2.75 + 0.25 \times \left(1 + \frac{2.75}{1.25}\right) = 2.75 + 0.25 \times 3.2 = 3.55 \quad (4.69)$$

$$x_3 = 1.75, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 3.55 + 0.25 \times \left(1 + \frac{3.55}{1.5}\right) = 3.55 + 0.25 \times 3.3667 = 4.3917 \quad (4.70)$$

$$x_4 = 2.0, \quad y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 4.3917 + 0.25 \times \left(1 + \frac{4.3917}{1.75}\right) = 4.3917 + 0.25 \times 3.5084 = 5.2698 \quad (4.71)$$

(2)

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y(0) = 1 \quad (4.72)$$

$$x_1 = 0.25, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.25 \times (\cos 0 + \sin 0) = 1 + 0.25 \times 1 = 1.25 \quad (4.73)$$

$$x_2 = 0.5, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.25 + 0.25 \times (\cos 0.25 + \sin 0.75) \quad (4.74)$$

$$= 1.25 + 0.25 \times (0.9689 + 0.6816) = 1.25 + 0.25 \times 1.6505 = 1.6626 \quad (4.75)$$

$$x_3 = 0.75, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.6626 + 0.25 \times (\cos 0.5 + \sin 1.5) \quad (4.76)$$

$$= 1.6626 + 0.25 \times (0.8776 + 0.9975) = 1.6626 + 0.25 \times 1.8751 = 2.1304 \quad (4.77)$$

$$x_4 = 1.0, \quad y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 2.1304 + 0.25 \times (\cos 0.75 + \sin 2.25) \quad (4.78)$$

$$= 2.1304 + 0.25 \times (0.7317 + 0.7781) = 2.1304 + 0.25 \times 1.5098 = 2.5079 \quad (4.79)$$

## 2、改进 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用改进的 Euler 方法解第 1 题中的问题，并列出数值解和相应解析解的误差.

证明：

## 3、梯形方法迭代格式的收敛性证明

用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = e^x \sin(xy), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

若迭代初值为  $y_{s+1}^{(0)} = y_s + hf(x_s, y_s)$ , 试证逐步长  $h$  使迭代格式

$$y_{s+1}^{(k+1)} = y_s + \frac{h}{2} \left[ f(x_s, y_s) + f(x_{s+1}, y_{s+1}^{(k)}) \right], \quad s = 0, 1, \dots$$

是收敛的.

证明：求解过程为：

1. 微分方程数值解问题：用显欧拉法给出一套迭代初值  $\{y_k^{(0)}\}$
2. 非线性方程数值解问题：在每个点上，用给出的迭代格式进行迭代，求解非线性方程的数值解

因此，要证明第二步非线性方程的迭代格式是收敛的，只要证明它满足压缩映像原理。

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| = \left| \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})] \right| \quad (4.80)$$

$$= \frac{h}{2} |f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})| \quad (4.81)$$

该微分方程有唯一数值解，即满足 Lipschitz 条件。对应的 Lipschitz 常数  $L$  可以将  $\Delta f$  与  $\Delta y$  联系起来。

$$L = \max_{x \in [0,1], y \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_{x \in [0,1], y \in \mathbb{R}} |xe^x \cos(xy)| \leq e \quad (4.82)$$

因此迭代过程有

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| \leq \frac{h}{2} L |y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \quad (4.83)$$

$$\leq \frac{he}{2} |y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \quad (4.84)$$

压缩映像原理要求

$$\frac{h}{2} e < 1 \quad (4.85)$$

即

$$h < \frac{2}{e} \quad (4.86)$$

#### 4、梯形方法求解特定初值问题的结论证明

用梯形方法解初值问题  $y' = -y$ ,  $y(1) = 1$ , 试证明:

- (1) 取  $y_0 = y(1) = 1$ , 有  $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$ .
- (2) 当  $h \rightarrow 0, x = nh$  不变时,  $y_n$  收敛于初值问题的准确解  $e^{-x_n}$ .

证明：(1) 梯形方法迭代格式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (4.87)$$

由于该问题是自治的，不需要求解非线性方程，

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [-y_n - y_{n+1}] \quad (4.88)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h} y_n \quad (4.89)$$

初值为  $y_0 = 1$ , 因此

$$y_n = \left( \frac{2-h}{2+h} \right)^n \quad (4.90)$$

(2) 代入  $n = x/h$ , 求极限即可。注意, 要用到对数求极限。

## 5、单步法的局部截断误差与绝对稳定性分析

试求出单步法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的局部截断误差主项及绝对稳定性区间.

**证明:** 增量函数

$$\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) = f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \quad (4.91)$$

局部截断误差:

$$R_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) \quad (4.92)$$

$$= y(x+h) - y(x) - hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \quad (4.93)$$

$$= y(x+h) - y(x) - hf(x+h, y+hf) \quad (4.94)$$

求  $y$  的各阶导数:

$$y' = f \quad (4.95)$$

$$y'' = f_1 + ff_2 \quad (4.96)$$

求  $\phi$  的各阶导数:

$$\phi = f(x+h, y+hf) = f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2) \quad (4.97)$$

于是有

$$R_{n+1} = y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + O(h^3) - y(x) \quad (4.98)$$

$$- h(f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2)) \quad (4.99)$$

$$= - \frac{1}{2}h^2(f_1 + ff_2) + O(h^3) \quad (4.100)$$

$$= - \frac{h^2}{2}y'' + O(h^3) \quad (4.101)$$

故单步法的局部截断误差主项为  $-\frac{h^2}{2}y''$ 。

绝对稳定性分析：将单步法格式代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \quad (4.102)$$

得到

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \lambda(y_n + h \cdot \lambda y_n) \quad (4.103)$$

$$= [(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1]y_n \quad (4.104)$$

绝对稳定性要求

$$|E(h\lambda)| = |(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1| < 1 \quad (4.105)$$

解得绝对稳定区间为复平面上满足

$$|z^2 + z + 1| < 1 \quad (4.106)$$

的区域。

## 6、中点公式与 Heun 方法求解初值问题并分析误差

应用中点公式及 Heun 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right)$$

计算初值问题

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

取  $h = 0.2$ , 列出数值解及相应的误差 (问题的解析解为  $y(x) = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}e^x$ ).

证明： 他都不让带计算器了， 我认为不会考这玩意

## 7、多种数值方法求解初值问题的结果对比

应用显式 Euler 方法、改进的 Euler 方法以及四阶经典 Runge-Kutta 方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y + 2x^2 + 2x, & x \in [0, 0.5], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

这三种方法步长  $h$  依次取为  $0.25, 0.05, 0.1$ , 列出相应计算结果、解析解  $y(x) = e^{-2x} + x^2$  的结果及相应的误差.

证明： 呃呃

## 8、中点公式的局部截断误差分析

试求出中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n) \right)$$

的局部截断误差主项.

**证明：** 对  $y$  逐次求导:

算子:

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + f \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.107)$$

$$y' = f \quad (4.108)$$

$$y'' = \frac{df}{dx} = f_1 + ff_2 \quad (4.109)$$

$$y''' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + f \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) f_2 \quad (4.110)$$

$$= f_{11} + ff_{21} + f(f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) \quad (4.111)$$

$$= f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) \quad (4.112)$$

$$R_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) \quad (4.113)$$

$$= y(x+h) - y(x) - hf \left( x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}hf \right) \quad (4.114)$$

$$= y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) \quad (4.115)$$

$$- y(x) \quad (4.116)$$

$$- h(f + f_1 \frac{h}{2} + f_2 \frac{h}{2}f + \frac{f_{11} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2f_{12} \left(\frac{hf}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right) + f_{22} \left(\frac{hf}{2}\right)^2}{2} + O(h^3)) \quad (4.117)$$

$$= \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 - \frac{1}{8}(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22})h^3 + O(h^4) \quad (4.118)$$

$$= \frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) \quad (4.119)$$

故局部截断误差主项为

$$\frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 \quad (4.120)$$

## 9、特定初值问题下数值方法的近似值一致性证明

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

试证明用中点方法、改进的 Euler 方法以及 Heun 方法 (见第 6 题) 求解, 对任意的步长  $h$  均有相同的近似值.

**证明:** 只要证明其一阶泰勒展开式相等。

- 中点方法:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf) \quad (4.121)$$

$$\approx y_n + h(f + \frac{1}{2}hf_1 + \frac{1}{2}hff_2) \quad (4.122)$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \quad (4.123)$$

- Heun 方法:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right) \quad (4.124)$$

$$\approx y_n + \frac{1}{4}hf + \frac{3}{4}h(f + \frac{2}{3}hf_1 + \frac{2}{3}hff_2) \quad (4.125)$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \quad (4.126)$$

- 改进 Euler 方法:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f + f(t + h, y + hf)] \quad (4.127)$$

$$\approx y_n + \frac{h}{2}[f + f + hf_1 + hff_2] \quad (4.128)$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \quad (4.129)$$

故三者具有相同的近似值。

## 10、隐式中点方法的绝对稳定性区间分析

试求出隐式中点方法

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

的绝对稳定性区间 (推广 §3.5 的方法).

证明：试验方程：

$$y' = f(y) = \lambda y \quad (4.130)$$

代入隐式中点方法有

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{\lambda}{2}(y_n + y_{n+1}) \quad (4.131)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2 + (h\lambda)}{2 - (h\lambda)} y_n \quad (4.132)$$

则绝对稳定性区间为

$$|E(h\lambda)| = \left| \frac{2 + (h\lambda)}{2 - (h\lambda)} \right| < 1 \quad (4.133)$$

$$\Rightarrow \Re(h\lambda) < 0 \quad (4.134)$$

即绝对稳定性区间为负半实轴。

## 11、二步显式 Adams 方法的局部截断误差推导

试推导二步显式 Adams 方法与二步隐式 Adams 方法的局部截断误差.

证明：二步显式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right) \quad (4.135)$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = h \left( \frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right) \quad (4.136)$$

局部截断误差：

$$R_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \left( \frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right) \quad (4.137)$$

$$= y(t+h) - y(t) - h \left( \frac{3}{2}f(t, y) - \frac{1}{2}y'(t-h) \right) \quad (4.138)$$

$$= y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + O(h^4) \quad (4.139)$$

$$- y(t) \quad (4.140)$$

$$- h \left[ \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}(y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2) + O(h^3) \right] \quad (4.141)$$

$$= \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{4}y'''h^3 + O(h^4) \quad (4.142)$$

$$= - \frac{5}{12}y'''h^3 + O(h^4) \quad (4.143)$$

二步隐式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \quad (4.144)$$

$$\Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \quad (4.145)$$

局部截断误差:

$$R_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \quad (4.146)$$

$$= y(t+h) - y(t) - \frac{1}{12}h(5y'(t+h) + 8y'(t) - y'(t-h)) \quad (4.147)$$

$$= y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) \quad (4.148)$$

$$- y(t) \quad (4.149)$$

$$- \frac{1}{12}h[5(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 + \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4)) + 8y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 - \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4))] \quad (4.150)$$

$$= -\frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) \quad (4.151)$$

## 12、Hamming 公式的局部截断误差分析

试推导 Hamming 公式

$$y_{n+3} = \frac{1}{8}(9y_{n+2} - y_n) + \frac{3}{8}h[f(x_{n+3}, y_{n+3}) + 2f(x_{n+2}, y_{n+2}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

的局部截断误差主项.

证明: 活不了了

## 13、数值积分法推导二步数值方法

试用数值积分方法直接推导二步方法

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}[5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)].$$

证明: 记  $x_n = -h, x_{n+1} = 0, x_{n+2} = h$ , 则可以构造 Lagrange 插值多项式:

$$L_0 = \frac{x^2 - hx}{2h^2} \quad (4.152)$$

$$L_1 = \frac{h^2 - x^2}{h^2} \quad (4.153)$$

$$L_2 = \frac{x^2 + hx}{2h^2} \quad (4.154)$$

三者在  $[0, h]$  上的积分是

$$\int_0^h L_0 dx = -\frac{1}{12}h \quad (4.155)$$

$$\int_0^h L_1 dx = \frac{2}{3}h = \frac{8}{12}h \quad (4.156)$$

$$\int_0^h L_2 dx = \frac{5}{12}h \quad (4.157)$$

于是有

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = \sum_{i=0}^2 f(x_{n+i}, y_{n+i}) \int_0^h L_i dx \quad (4.158)$$

$$= -\frac{h}{12} f_n + \frac{8}{12} f_{n+1} + \frac{5}{12} f_{n+2} \quad (4.159)$$

$$= \frac{h}{12} [5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)] \quad (4.160)$$

#### 14、Adams 方法求解初值问题并与解析解对比

用四阶的显式 Adams 方法和隐式 Adams 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

取  $h = 0.2$ , 将结果与解析解作比较 (解析解  $y(x) = (x + 1) + \frac{1}{2}e^{-x}$ ).

证明： 鸣咕

#### 15、线性二步法的阶数证明

证明线性二步法

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - by_n = \frac{1}{4}h [(b+3)f(x_{n+2}, y_{n+2}) + (3b+1)f(x_n, y_n)]$$

当  $b \neq -1$  时是二阶的, 当  $b = -1$  时是三阶的.

证明：

#### 16、线性多步法的阶数参数确定

试确定  $\alpha$  使线性多步法

$$y_{n+3} + \alpha(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = \frac{1}{2}(3+\alpha)h [f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

是四阶的.

证明：以  $t_{n+1}$  为展开点，

$$R_{n+1} = y(t+h) + (b-1)y(t) - by(t-h) - \frac{1}{4}h[(b+3)y'(t+h) + (3b+1)y'(t-h)] \quad (4.161)$$

$$= y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) \quad (4.162)$$

$$+ (b-1)y \quad (4.163)$$

$$- b(y - y'h + \frac{1}{2}y''h^2 - \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5)) \quad (4.164)$$

$$- \frac{h}{4}[(b+3)(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 + \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4)) \quad (4.165)$$

$$+ (3b+1)(y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 - \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4))] \quad (4.166)$$

$$= (1+b-1-b)y + y'h(1+b - \frac{b+3}{4} - \frac{3b+1}{4}) + y''h^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b - \frac{b+3}{4} + \frac{3b+1}{4}) \quad (4.167)$$

$$+ y''''h^3(\frac{1}{6} + \frac{b}{6} - \frac{b+3}{8} - \frac{3b+1}{8}) + y''''h^4(\frac{1}{24} - \frac{b}{24} - \frac{b+3}{24} - \frac{3b+1}{24}) + O(h^5) \quad (4.168)$$

可见  $h^0, h^1, h^2$  项恒为 0，要求  $h^3$  项为 0，有

$$\frac{1}{6} + \frac{b}{6} - \frac{b+3}{8} - \frac{3b+1}{8} = 0 \quad (4.169)$$

解得  $b = -1$ ，此时  $h^4$  项也为 0，因此该线性多步法在  $b = -1$  时是四阶的。

## 17、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n = \frac{1}{8}h[19f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 5f(x_n, y_n)]$$

的收敛性。

证明：要让多步法收敛，只要求其满足相容性。

收敛性要求多步法满足强稳定性和相容性。

强稳定性：只要证特征方程的根全部在单位圆内，且模为 1 的根是单根。

特征方程：

$$\rho(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad (4.170)$$

$$\sigma(x) = \frac{19}{8}x^2 + \frac{5}{8} \quad (4.171)$$

解得特征方程的根为

$$x_1 = 1 \quad (4.172)$$

$$x_2 = \frac{-5 - i\sqrt{23}}{8} \quad (4.173)$$

$$x_3 = \frac{-5 + i\sqrt{23}}{8} \quad (4.174)$$

三个根的模分别为

$$|x - 1| = 1 \quad (4.175)$$

$$|x_2| = |x_3| = \frac{48}{64} < 1 \quad (4.176)$$

故多步法是具有强稳定性的。

相容性：

$$\rho'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \neq \sigma(x) \quad (4.177)$$

故多步法不具有相容性，多步法不收敛。

## 18、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{1}{4}h [f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(x_n, y_n)]$$

的收敛性

证明：

$$\rho(x) = x^2 + x - 2 \quad (4.178)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{4} \quad (4.179)$$

强稳定性：特征多项式的根为

$$x_1 = 1 \quad (4.180)$$

$$x_2 = -2 \quad (4.181)$$

故不具有强稳定性。多步法不收敛。

## 19、线性多步法的相容性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)] \quad (4.182)$$

的相容性。

证明： 在  $x_{n+1}$  处展开：

$$R_{n+1} = y(x+h) - y - \frac{h}{2}[3y' - y'(x-h)] \quad (4.183)$$

$$= y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 \quad (4.184)$$

$$- y \quad (4.185)$$

$$- \frac{h}{2}[3y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2)] \quad (4.186)$$

$$= \frac{5}{12}h^3y''' + O(h^4) \quad (4.187)$$

故具有二阶相容性。

## 20、A-稳定性

试证明隐式 Euler 方法是 A-稳定的。

证明： 隐式 Euler 方法：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (4.188)$$

代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \quad (4.189)$$

得到

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \quad (4.190)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}y_n \quad (4.191)$$

故绝对稳定性要求

$$\left| \frac{1}{1-\mu} \right| < 1 \quad (4.192)$$

令  $\mu = x + iy$ , 则有

$$(x-1)^2 + y^2 > 1 \quad (4.193)$$

只要实部  $x < 0$ , 则上式恒成立, 因此隐式 Euler 方法是 A-稳定的。



# Chapter 5

## 圣遗物，考前必看

### 圣遗物 1

1. (共 10 分) 对于线性代数方程组  $Ax = b$ , 残量定义为  $r = b - Ax$ 。回答下述问题:
  - (a) 写出 Richardson 迭代格式, 分析格式的收敛性。
  - (b) 设  $M$  为可逆矩阵, 写出以  $M$  为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式。
  - (c) 设  $A$  为对称正定矩阵, 选择预处理矩阵为数乘矩阵, 即  $M = \mu I$  ( $I$  为单位矩阵,  $\mu$  为标量)。  
则当 (且仅当)  $\mu$  满足何种条件时, 此预处理方法是收敛的?
2. (共 10 分) 给定系数矩阵为对称正定矩阵的线性代数方程组  $Ax = b$ 。请回答下述问题:

- (a) 定义函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

其中内积  $(x, y)$  为标准的欧式内积。证明在全空间中存在唯一的临界点; 该临界点为全局最小值点, 且恰好是  $Ax = b$  的根。

- (b) 设当前近似向量为  $x$ 。写出从  $x$  出发, 平行于方向  $p$  做一维极小搜索得到的新近似向量的表达式。
- (c) 证明新近似向量的残量与搜索方向  $p$  是正交的 (关于欧式内积)。

证明:

3. (共 10 分) 设  $A$  是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的。若特征向量满足  $\|x\|_2 = 1$ , 则称  $x$  为归一化特征向量。请回答下述问题:

- (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式。
- (b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的。

解:

4. (共 10 分) 设实矩阵序列  $\{X_k\}$  满足

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \dots.$$

证明如下结论:

(a) 令  $E_k = I - AX_k$ , 则  $E_{k+1} = E_k^2$ 。

(b)  $\{X_k\}$  至少局部二阶收敛到  $A^{-1}$ 。

**证明:**

(1) 令  $E_k = I - AX_k$ , 则  $X_k = A^{-1}(I - E_k)$ 。

由迭代格式:

$$E_{k+1} = I - AX_{k+1} \tag{5.1}$$

$$= I - A(X_k + X_k(I - AX_k)) \tag{5.2}$$

$$= I - AX_k - AX_k + AX_kAX_k \tag{5.3}$$

$$= I - 2AX_k + AX_kAX_k \tag{5.4}$$

$$= (I - AX_k)^2 \tag{5.5}$$

$$= E_k^2 \tag{5.6}$$

(2) 由于  $E_{k+1} = E_k^2$ , 可得递推关系:

$$E_k = E_0^{2^k} \tag{5.7}$$

因此,

$$X_k = A^{-1}(I - E_k) = A^{-1}(I - E_0^{2^k}) \tag{5.8}$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 若  $\|E_0\| < 1$ , 则  $E_0^{2^k} \rightarrow 0$ , 从而  $X_k \rightarrow A^{-1}$ 。

误差分析:

$$\|X_{k+1} - A^{-1}\| = \|A^{-1}E_{k+1}\| = \|A^{-1}E_k^2\| \tag{5.9}$$

$$\leq \|A^{-1}\| \|E_k\|^2 = \|A^{-1}\| \|A(X_k - A^{-1})\|^2 \tag{5.10}$$

这表明误差的范数以平方速度收敛, 故  $\{X_k\}$  至少局部二阶收敛到  $A^{-1}$ 。

5. (共 10 分) 考虑常微分方程组  $y' = f(t, y)$  的初值问题。请回答下述问题:

(a) 写出一般步长情况下的显式 Euler 方法、隐式 Euler 方法以及梯形方法的计算格式。

(b) 分析梯形方法的相容性, 写出该方法的主局部截断误差。

**证明:**

6. (共 10 分) 考虑常微分方程组  $y' = f(t, y)$  的初值问题。用如下的等步长 Runge-Kutta 方法

$$y_{n+1} = y_n + hK,$$

其中  $K$  满足

$$K = f(t_n + h/2, y_n + hK/2).$$

请回答下述问题：

- (a) 证明该方法恰好是二阶收敛的 (需要说明其不是三阶方法)。
- (b) 确定该方法的绝对稳定区域。

证明：

## 圣遗物 2

1. 证明：设得到  $Ax = b$  的一个近似解  $\bar{x}$ , 其残量为

$$r = b - A\bar{x} \quad (5.11)$$

设  $x$  和  $\bar{x}$  分别是准确解和近似解, 证明:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad (5.12)$$

证明:

2. 矩阵 A 不可分且弱对角占优, 证明:

- (a) A 对角元素不等于 0
- (b) 矩阵 A 非奇异
- (c)  $Ax=b$  的 Jacobi 迭代收敛

证明:

3. 有以下迭代格式:

$$x_{k+1} = \frac{x_k(3 + x_k^2)}{3x_k^2 + 1}$$

- (a) 求该迭代的不动点
- (b) 分析各不动点的局部收敛性和收敛阶
- (c) 求各不动点的收敛域

证明:

4. 经典再放送

(共 10 分) 设 A 是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的. 若特征向量  $x$  满足  $\|x\|_2 = 1$ , 则称  $x$  为归一化特征向量. 请回答下述问题:

- (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式
- (b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的

证明:

5. 微分方程:  $y' = f(t, y)$ , 迭代式:

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(t_n + y_n) + (1 - \theta)f(t_{n+1}, y_{n+1})), \quad \theta \in [0, 1]$$

- (a) 该迭代的相容阶
- (b) 绝对稳定区间

证明:

# Chapter 6

## 圣遗物答案

### 圣遗物 1

1. (共 10 分) 对于线性代数方程组  $Ax = b$ , 残量定义为  $r = b - Ax$ 。回答下述问题:

- 写出 Richardson 迭代格式, 分析格式的收敛性。
- 设  $M$  为可逆矩阵, 写出以  $M$  为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式。
- 设  $A$  为对称正定矩阵, 选择预处理矩阵为数乘矩阵, 即  $M = \mu I$  ( $I$  为单位矩阵,  $\mu$  为标量)。则当 (且仅当)  $\mu$  满足何种条件时, 此预处理方法是收敛的?

证明:

(1) Richardson 迭代格式的修正量即为当前的残差,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k + (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k) = (I - A)\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \quad (6.1)$$

迭代矩阵

$$B = I - A \quad (6.2)$$

当迭代矩阵的谱半径小于 1 时, 迭代收敛。

(2) 以  $M$  为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M^{-1}\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k + M^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k) = (I - M^{-1}A)\mathbf{x}_k + M^{-1}\mathbf{b} \quad (6.3)$$

(3)  $A$  为 SPD 矩阵,  $M = \mu I$  可得  $M^{-1} = \frac{1}{\mu}I$ , 则迭代矩阵为

$$B = I - M^{-1}A = I - \frac{1}{\mu}A \quad (6.4)$$

则特征值方程

$$0 = \det(\lambda' I - B) = \det\left(\lambda' I - \left(I - \frac{1}{\mu} A\right)\right) \quad (6.5)$$

$$= \det\left[\left(\lambda' - 1\right)I + \frac{1}{\mu}A\right] \quad (6.6)$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu}\right)^n \det\left[-\frac{1}{\mu}(\lambda' - 1)I - A\right] \quad (6.7)$$

前面的系数  $(-1/\mu)^n$  不会改变特征值方程的解，因此有

$$\det\left[-\frac{1}{\mu}(\lambda' - 1)I - A\right] = 0 \quad (6.8)$$

这一方程与  $A$  的特征值问题

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (6.9)$$

有类似的形式，因此新的特征值  $\lambda'$  与  $A$  的特征值  $\lambda$  之间有如下关系：

$$\lambda' = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (6.10)$$

要让预处理方法收敛，只要让  $B$  的谱半径小于 1，即  $\max_n |\lambda'_n| < 1$ ，则有

$$\max_k |\lambda'_k| = \max_k \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\mu} \right| \quad (6.11)$$

设  $\lambda_1 = \max_k \lambda_k$ ,  $\lambda_n = \min_k \lambda_k$ , 则有

$$\max_k |\lambda'_k| = \max_k \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\mu} \right| \quad (6.12)$$

$$= \max \left\{ \left| 1 - \frac{\lambda_1}{\mu} \right|, \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\mu} \right| \right\} \quad (6.13)$$

只要

$$\begin{cases} \left| 1 - \frac{\lambda_1}{\mu} \right| < 1 \Rightarrow \mu \in (\frac{\lambda_1}{2}, \infty) \\ \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\mu} \right| < 1 \Rightarrow \mu \in (\frac{\lambda_n}{2}, \infty) \end{cases} \quad (6.14)$$

取交集解得

$$\mu \in (\frac{\lambda_n}{2}, \infty) \quad (6.15)$$

即

$$\mu > \frac{\lambda_{\min}(A)}{2} \quad (6.16)$$

2. (共 10 分) 给定系数矩阵为对称正定矩阵的线性代数方程组  $Ax = b$ 。请回答下述问题：

(a) 定义函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

其中内积  $(x, y)$  为标准的欧式内积。证明在全空间中存在唯一的临界点；该临界点为全局最小值点，且恰好是  $Ax = b$  的根。

(b) 设当前近似向量为  $x$ 。写出从  $x$  出发，平行于方向  $p$  做一维极小搜索得到的新近似向量的表达式。

(c) 证明新近似向量的残量与搜索方向  $p$  是正交的（关于欧式内积）。

证明：

解：

(1)  $\phi(x)$  对向量  $x$  的梯度为

$$\nabla\phi(x) = Ax - b \quad (6.17)$$

同时，由于  $A$  是对称正定的， $\phi$  对  $x$  的 Hessian 矩阵

$$|\nabla^2\phi| = |A| > 0 \quad (6.18)$$

故这一点是一个极小值点而不是鞍点。

此外，由于  $A$  是对称正定的，必非奇异， $Ax = b$  有且只有一个根，即只有一个  $x = x^*$  使得  $Ax^* = b$ ，即这个极小值点是全局唯一的极小值点，即为全局最小值点。

综上，全空间中存在唯一的临界点，该临界点为全局最小值点，且恰好是  $Ax = b$  的根。

(2) 残差：

$$r = b - Ax \quad (6.19)$$

最优步长：

$$\alpha_k = \frac{(r, p)}{(Ap, p)} = \frac{p^T(b - Ax)}{p^TAp} \quad (6.20)$$

新向量：

$$x_{new} = x + \alpha_k p = x + \frac{(r, p)}{(Ap, p)} p = x + \frac{p^T(b - Ax)}{p^TAp} p \quad (6.21)$$

(3) 新残量：

$$r_{new} = b - Ax_{new} = b - A \left( x + \frac{p^T r}{p^T AP} p \right) \quad (6.22)$$

$$= b - Ax - \frac{p^T r}{p^T AP} Ap \quad (6.23)$$

与搜索方向作内积得到

$$p^T r_{new} = p^T \left( b - Ax - \frac{p^T r}{p^T AP} Ap \right) \quad (6.24)$$

$$= p^T r - \frac{p^T r}{p^T AP} p^T AP \quad (6.25)$$

$$= 0 \quad (6.26)$$

因此新近似向量的残量与搜索方向  $p$  是正交的。

3. (共 10 分) 设  $A$  是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的。若特征向量满足  $\|x\|_2 = 1$ , 则称  $x$  为归一化特征向量。请回答下述问题:

(a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式。

(b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的。

设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是一个实对称矩阵。我们需要寻找特征对  $(\lambda, x)$ , 使得  $Ax = \lambda x$  且满足归一化条件  $\|x\|_2 = 1$ 。

(1) 使用 Newton 法计算特征值及其归一化特征向量的计算格式

为了使用 Newton 法, 定义非线性映射  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  如下:

$$F(z) = F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(x^T x - 1) \end{pmatrix} = 0$$

其中  $z = [x^T, \lambda]^T$ 。其相应的 Jacobian 矩阵  $J(x, \lambda)$  为:

$$J(x, \lambda) = \begin{pmatrix} A - \lambda I & -x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}$$

给定初始近似值  $x_0$  和  $\lambda_0$ , 第  $k$  步迭代格式为:

(a) 解线性方程组得到增量  $\Delta z_k = [\Delta x_k^T, \Delta \lambda_k]^T$ :

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_k I & -x_k \\ x_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta \lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \end{pmatrix}$$

(b) 更新解:  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda_k$ 。

更新: 这里似乎可以写出显形式迭代

当迭代未实现收敛时，总有  $\det(A - \lambda I) \neq 0$ ，因此可以解出  $J^{-1}$ ，从而得到显式迭代格式：

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + J^{-1}(x_k)F(x_k) \quad (6.27)$$

$$= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A - \lambda_k I)^{-1} - \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2} (x_k^T x_k - 1) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k - \frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} (A - \lambda_k I)^{-1} x_k + \frac{1}{2} (x_k^T x_k - 1) \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} + \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k - 1}{x_k^T x_k (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_k - \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} (A - \lambda_k I)^{-1} x_k \\ \lambda_k - \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

(2) 证明当特征值是单特征值时，上述计算方法是局部二阶收敛的

证明。根据 Newton 法的性质，若  $J(z^*)$  在解点处非奇异，则具有局部二阶收敛性。考虑齐次方程  $J(z^*)[u^T, v]^T = 0$ ：

$$(A - \lambda^* I)u - vx^* = 0 \quad (6.31)$$

$$(x^*)^T u = 0 \quad (6.32)$$

将式 (6.78) 左乘  $(x^*)^T$ ，利用  $A$  的对称性及  $(A - \lambda^* I)x^* = 0$ ，得：

$$(x^*)^T (A - \lambda^* I)u - v(x^*)^T x^* = 0 \implies 0 - v \cdot 1 = 0 \implies v = 0$$

将  $v = 0$  代入式 (6.78) 得  $(A - \lambda^* I)u = 0$ 。由于  $\lambda^*$  是单特征值，其特征空间维数为 1，故  $u = \alpha x^*$ 。代入式 (6.79) 有：

$$(x^*)^T (\alpha x^*) = \alpha \|x^*\|_2^2 = \alpha = 0 \implies u = 0$$

由于齐次方程只有零解，Jacobian 矩阵  $J(z^*)$  非奇异。因此，该方法在单特征值附近是局部二阶收敛的。□

4. (共 10 分) 设实矩阵序列  $\{X_k\}$  满足

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

证明如下结论：

(a) 令  $E_k = I - AX_k$ ，则  $E_{k+1} = E_k^2$ 。

(b)  $\{X_k\}$  至少局部二阶收敛到  $A^{-1}$ 。

证明：

5. (共 10 分) 考虑常微分方程组  $y' = f(t, y)$  的初值问题。请回答下述问题：
- 写出一般步长情况下的显式 Euler 方法、隐式 Euler 方法以及梯形方法的计算格式。
  - 分析梯形方法的相容性，写出该方法的主局部截断误差。

证明：

6. (共 10 分) 考虑常微分方程组  $y' = f(t, y)$  的初值问题。用如下的等步长 Runge-Kutta 方法

$$y_{n+1} = y_n + hK,$$

其中  $K$  满足

$$K = f(t_n + h/2, y_n + hK/2).$$

请回答下述问题：

- 证明该方法恰好是二阶收敛的 (需要说明其不是三阶方法)。
- 确定该方法的绝对稳定区域。

证明：

## 圣遗物 2

**比较有难度的题目是 2 和 4, 此外需要注意 3 题收敛域的求法**

- 证明: 设得到  $Ax = b$  的一个近似解  $\bar{x}$ , 其残量为

$$r = b - A\bar{x} \quad (6.33)$$

设  $x$  和  $\bar{x}$  分别是准确解和近似解, 证明:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad (6.34)$$

**证明:**

一个比较自然的思路是直接从较复杂的形式化简得到简单形式。

左边:

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|r\|}{\|b\|} = \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|Ax - A\bar{x}\|}{\|Ax\|} \quad (6.35)$$

$$\leq \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|A\|\|x - \bar{x}\|}{\|Ax\|} \quad (6.36)$$

$$= \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|A^{-1}\|\|Ax\|} \quad (6.37)$$

$$\leq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|A^{-1}Ax\|} \quad (6.38)$$

$$= \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \quad (6.39)$$

右边有类似的过程。

- 矩阵 A 不可分且弱对角占优, 证明:

- (a) A 对角元素不等于 0
- (b) 矩阵 A 非奇异
- (c)  $Ax=b$  的 Jacobi 迭代收敛

**证明:**

(1) 反证法: 设 A 的对角元为 0, 即存在某个  $i$  使得  $a_{ii} = 0$ 。由于 A 是弱对角占优矩阵, 故有

$$0 = |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq 0 \quad (6.40)$$

于是有

$$a_{ij} = 0, \quad j \neq i \quad (6.41)$$

只要将第  $i$  行变换到最后一行，则矩阵  $A$  具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

显然为一个左下角为 0 的分块矩阵，故矩阵  $A$  可分，与题设矛盾。

(2)

证明. (反证法) 假设  $A$  是奇异矩阵，则齐次线性方程组  $Ax = 0$  存在非零解  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。

令  $M = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ 。由于  $x \neq 0$ ，显然  $M > 0$ 。

定义下标集合  $S = \{i : |x_i| = M\}$ 。由于  $M$  是最大模，故  $S$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的非空子集。

对于任意  $i \in S$ ，考虑  $Ax = 0$  的第  $i$  个分量方程：

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$$

两边取绝对值，并利用三角不等式：

$$|a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \quad (6.43)$$

由于  $i \in S$ ，有  $|x_i| = M$ ，且对于所有  $j$ ，恒有  $|x_j| \leq M$ 。将这些条件代入上式 (1)：

$$|a_{ii}| M \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq \left( \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) M$$

消去  $M > 0$ ，得到：

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

然而，根据  $A$  是弱对角占优矩阵的定义，对所有  $i$  均满足  $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 。因此，上述不等式链中的等号必须成立，即：

$$|a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{且} \quad \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| M \quad (6.44)$$

由式 (2) 可知，若某个  $a_{ij} \neq 0$ ，则必须有  $|x_j| = M$ ，即  $j \in S$ 。

这意味着：在矩阵  $A$  对应的有向图中，从  $S$  中的任一顶点  $i$  出发，所有通过一条有向边直接相连的顶点  $j$  都必然属于  $S$ 。

由于矩阵  $A$  是不可约的，其对应的有向图是强连通的。这意味着从  $S$  中的任意一点出发，存在路径可以到达  $\{1, 2, \dots, n\}$  中的每一个点。通过归纳可知：

$$S = \{1, 2, \dots, n\}$$

即所有的分量都满足  $|x_j| = M$ ，且对所有的  $i = 1, \dots, n$ ，都有：

$$|a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

但这与  $A$  是弱对角占优的已知条件矛盾——弱对角占优要求至少存在一个下标  $k$  使得  $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$  (即至少有一行是严格对角占优的)。

矛盾产生，故原假设不成立。因此， $A$  必为非奇异矩阵。  $\square$

(3) Jacobi 迭代格式为  $M=D$ ,

$$B_J = D^{-1}(L + U) \quad (6.45)$$

迭代矩阵的行列式

$$\det(\lambda' I - B_J) = \det[\lambda' I - D^{-1}(L + U)] \quad (6.46)$$

$$= \det(D^{-1}) \det(\lambda' D - L - U) \quad (6.47)$$

该行列式即为  $A$  的所有对角元都乘以特征值  $\lambda'$  后的矩阵的行列式。

若  $B$  的谱半径大于等于 1，则必有一个  $\lambda$  使得  $|\lambda| \geq 1$ 。于是对于  $\lambda D - L - U$  的任意一行，总有

$$|a'_{ii}| = |\lambda| |a_{ii}| \geq |\lambda| \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| = \sum_{i \neq j} |a'_{ij}| \quad (6.48)$$

即  $\lambda D - L - U$  仍然是一个弱对角占优的。此外，这一  $\lambda$  不为 0，任何原先非 0 的矩阵元现在仍旧非 0，故  $\lambda D - L - U$  仍然是不可分的。

根据 (2) 可知， $\lambda D - L - U$  非奇异，因此行列式不为 0，与  $\lambda$  为  $B$  的特征值矛盾。

因此， $B$  的谱半径必小于 1，Jacobi 迭代收敛。

3. 有以下迭代格式：

$$x_{k+1} = \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1}$$

(a) 求该迭代的不动点

(b) 分析各不动点的局部收敛性和收敛阶

(c) 求各不动点的收敛域

**证明：**

(1) 不动点：

$$x = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \quad (6.49)$$

解得

$$x = 0, \pm 1 \quad (6.50)$$

(2) 局部收敛性和收敛阶：

$$\phi(x) = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \quad (6.51)$$

$$\phi'(x) = \frac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2} \quad (6.52)$$

$$\phi''(x) = \frac{48x(x-1)(x+1)}{(3x^2+1)^3} \quad (6.53)$$

$$\phi'''(x) = 48 \frac{-9x^4 + 18x^2 - 1}{(3x^2+1)^4} \quad (6.54)$$

- $x = \pm 1$ :

$$\phi(x) = 0 \quad (6.55)$$

$$\phi'(x) = 0 \quad (6.56)$$

$$\phi''(x) = 0 \quad (6.57)$$

$$\phi'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0 \quad (6.58)$$

- $x = 0$ :

$$\phi(x) = 0 \quad (6.59)$$

$$\phi'(x) = 3 \quad (6.60)$$

故该迭代法在  $x = \pm 1$  处三阶收敛，在  $x = 0$  处不收敛。

(3) 收敛域:

对于  $x = 0$ , 由于  $\phi(0)' > 1$ , 没有收敛域。

对于  $x = 1$ , 有

$$\phi(x) = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \quad (6.61)$$

迭代时

$$x_{k+1} - 1 = \phi(x) - 1 \quad (6.62)$$

$$= \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1} - 1 \quad (6.63)$$

$$= \frac{x_k^3 + 3x_k - 3x_k^2 - 1}{3x_k^2+1} \quad (6.64)$$

$$= \frac{(x_k - 1)^3}{3x_k^2+1} \quad (6.65)$$

$$x_{k+1} + 1 = \phi(x) + 1 \quad (6.66)$$

$$= \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1} + 1 \quad (6.67)$$

$$= \frac{x_k^3 + 3x_k + 3x_k^2 + 1}{3x_k^2 + 1} \quad (6.68)$$

$$= \frac{(x_k + 1)^3}{3x_k^2 + 1} \quad (6.69)$$

于是有

$$\frac{x_{k+1} - 1}{x_{k+1} + 1} = \frac{(x_k - 1)^3}{(x_k + 1)^3} \quad (6.70)$$

令  $u_n = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$ , 则有

$$u_{k+1} = u_k^3 \quad (6.71)$$

通项公式为

$$u_n = u_0^{3^n} \quad (6.72)$$

收敛性要求当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow 1$ , 即  $u_n \rightarrow 0$ 。因此, 收敛域为

$$u_0 \in (0, 1) \quad (6.73)$$

即  $x_0 \in (0, \infty)$ 。

对于  $x = -1$ , 同理可得收敛域为  $(-\infty, 0)$ 。

#### 4. 经典再放送

(共 10 分) 设  $A$  是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的. 若特征向量  $x$  满足  $\|x\|_2 = 1$ , 则称  $x$  为归一化特征向量. 请回答下述问题:

- (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式
- (b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的

**证明:**

设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是一个实对称矩阵。我们需要寻找特征对  $(\lambda, x)$ , 使得  $Ax = \lambda x$  且满足归一化条件  $\|x\|_2 = 1$ 。

(1) 使用 Newton 法计算特征值及其归一化特征向量的计算格式

为了使用 Newton 法, 定义非线性映射  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  如下:

$$F(z) = F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(x^T x - 1) \end{pmatrix} = 0$$

其中  $z = [x^T, \lambda]^T$ 。其相应的 Jacobian 矩阵  $J(x, \lambda)$  为:

$$J(x, \lambda) = \begin{pmatrix} A - \lambda I & -x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}$$

给定初始近似值  $x_0$  和  $\lambda_0$ , 第  $k$  步迭代格式为:

(a) 解线性方程组得到增量  $\Delta z_k = [\Delta x_k^T, \Delta \lambda_k]^T$ :

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_k I & -x_k \\ x_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta \lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \end{pmatrix}$$

(b) 更新解:  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda_k$ 。

**更新:** 这里似乎可以写出显形式迭代

当迭代未实现收敛时, 总有  $\det(A - \lambda I) \neq 0$ , 因此可以解出  $J^{-1}$ , 从而得到显式迭代格式:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + J^{-1}(x_k)F(x_k) \quad (6.74)$$

$$= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A - \lambda_k I)^{-1} - \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

$$= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k - \frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} (A - \lambda_k I)^{-1} x_k + \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \frac{(A - \lambda_k I)^{-1} x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} + \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k - 1}{x_k^T x_k (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_k - \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} (A - \lambda_k I)^{-1} x_k \\ \lambda_k - \frac{1}{2} \frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A - \lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

(2) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的

证明. 根据 Newton 法的性质, 若  $J(z^*)$  在解点处非奇异, 则具有局部二阶收敛性。考虑齐次方程  $J(z^*)[u^T, v]^T = 0$ :

$$(A - \lambda^* I)u - vx^* = 0 \quad (6.78)$$

$$(x^*)^T u = 0 \quad (6.79)$$

将式 (6.78) 左乘  $(x^*)^T$ , 利用  $A$  的对称性及  $(A - \lambda^* I)x^* = 0$ , 得:

$$(x^*)^T (A - \lambda^* I)u - v(x^*)^T x^* = 0 \implies 0 - v \cdot 1 = 0 \implies v = 0$$

将  $v = 0$  代入式 (6.78) 得  $(A - \lambda^* I)u = 0$ 。由于  $\lambda^*$  是单特征值, 其特征空间维数为 1, 故  $u = \alpha x^*$ 。代入式 (6.79) 有:

$$(x^*)^T (\alpha x^*) = \alpha \|x^*\|_2^2 = \alpha = 0 \implies u = 0$$

由于齐次方程只有零解, Jacobian 矩阵  $J(z^*)$  非奇异。因此, 该方法在单特征值附近是局部二阶收敛的。  $\square$

5. 微分方程:  $y' = f(t, y)$ , 迭代式:

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(t_n + y_n) + (1 - \theta)f(t_{n+1}, y_{n+1})), \quad \theta \in [0, 1]$$

(a) 该迭代的相容阶

(b) 绝对稳定区间

证明:

(1) 局部截断误差:

$$R_{n+1} = y(t+h) - y(t) - h[\theta y'(t) + (1-\theta)y'(t+h)] \quad (6.80)$$

$$= y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 - y \quad (6.81)$$

$$- h[\theta y' + (1-\theta)(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^3)] + O(h^4) \quad (6.82)$$

$$= \left(\theta - \frac{1}{2}\right)y''h - \frac{3\theta - 2}{6}y'''h^3 + O(h^4) \quad (6.83)$$

因此, 当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 格式具有二阶相容性, 否则为一阶相容性。

(2) 绝对稳定区间: 将迭代格式代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \quad (6.84)$$

得到

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta \lambda y_n + (1-\theta)\lambda y_{n+1}) \quad (6.85)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 + \theta h \lambda}{1 - (1-\theta)h \lambda} y_n \quad (6.86)$$

绝对稳定区间只需要考虑  $h\lambda$  为实数的情况, 因此有

$$E(h\lambda) = \left| \frac{1 + \theta h \lambda}{1 - (1-\theta)h \lambda} \right| < 1 \quad (6.87)$$

$$\Rightarrow (1 - 2\theta)h\lambda \left( h\lambda - \frac{2}{1 - 2\theta} \right) > 0 \quad (6.88)$$

当  $\theta \in [0, 1/2)$  时, 抛物线开口向上, 因此有

$$h\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left( \frac{2}{1 - 2\theta}, +\infty \right) \quad (6.89)$$

当  $\theta \in (1/2, 1]$  时, 抛物线开口向下,

$$h\lambda \in \left( -\frac{2}{1 - 2\theta}, 0 \right) \quad (6.90)$$

当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 迭代格式为

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda} y_n \quad (6.91)$$

绝对稳定区间为负半实轴  $(-\infty, 0)$ 。