

Numerical Analysis  
Exam Minimum

Astral Projection

2026 年 1 月 10 日



# 目录

<b>一 数学基础知识</b>	<b>5</b>
(一) 核心概念与理论 . . . . .	5
1. 线性空间 . . . . .	5
2. 度量与赋范空间 . . . . .	6
3. 内积空间 . . . . .	9
4. 正交多项式 . . . . .	10
5. 矩阵空间 . . . . .	13
<b>二 函数插值与重构</b>	<b>17</b>
(一) 通用理论 . . . . .	18
1. 问题模型 . . . . .	18
2. 插值空间 . . . . .	18
3. 误差分析与收敛性 . . . . .	18
(二) 具体插值方法 . . . . .	18
1. 一维多项式插值 . . . . .	18
2. 分段插值 . . . . .	23
3. Fourier 插值 . . . . .	24
<b>三 函数逼近</b>	<b>27</b>
(一) 通用理论 . . . . .	28
1. 问题模型 . . . . .	28
2. 逼近准则 . . . . .	28
3. 核心定理 . . . . .	28
(二) 具体逼近方法 . . . . .	28
1. 最优平方逼近 . . . . .	28
2. 最小二乘逼近: 最优平方逼近的离散化形式 . . . . .	31
3. 最佳一直逼近 . . . . .	32
<b>四 数值微积分</b>	<b>35</b>
(一) 数值积分 . . . . .	36

1. 通用理论	36
2. 具体求积方法	36
(二) 数值微分	36
1. 基础方法	36
2. 高精度方法	36
<b>五 非线性方程求根</b>	<b>37</b>
(一) 通用理论	38
1. 问题模型	38
2. 迭代法基础	38
3. 收敛性分析	38
4. 收敛效率	38
(二) 具体方法	38
1. 单步法	38
2. 多步法	38
3. 其他方法	38
<b>六 常微分方程初值问题数值解法</b>	<b>39</b>
(一) 通用理论	40
1. 问题模型	40
2. 数值解法核心	40
3. 基本概念	40
4. 收敛性与稳定性判定	40
(二) 具体方法	40
1. 单步法	40
2. 多步法	40
<b>七 线性代数方程组数值解法</b>	<b>41</b>
(一) 直接解法	42
1. 通用理论	42
2. 具体方法	42
(二) 定常线性迭代解法	42
1. 通用理论	42
2. 具体迭代法	42
(三) 非线性迭代解法 (基于变分原理)	42
1. 通用理论	42
2. 具体方法	42

# 一 数学基础知识

## (一) 核心概念与理论

### 1. 线性空间

#### (1) 定义与性质

定义 (线性空间). 设  $S$  是一个集合,  $P$  是一个数域 ( $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ ). 定义两种映射关系:

- 向量加法:  $+ : S \times S \rightarrow S$
- 数乘:  $\cdot : P \times S \rightarrow S$

如果对任意的  $u, v, w \in S$  和  $a, b \in P$ , 满足以下八条公理, 则称  $(S, P)$  为一个线性空间 (向量空间):

1. 加法交换律:  $u + v = v + u$
2. 加法结合律:  $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. 存在加法单位元: 存在零向量  $0 \in S$ , 使得对任意  $v \in S$ , 有  $v + 0 = v$
4. 存在加法逆元: 对任意  $v \in S$ , 存在  $-v \in S$ , 使得  $v + (-v) = 0$
5. 数乘结合律:  $a(bv) = (ab)v$
6. 数乘分配律 1:  $a(u + v) = au + av$
7. 数乘分配律 2:  $(a + b)v = av + bv$
8. 数乘单位元:  $1v = v$

则称  $(S, P)$  构成一个线性空间。

此外, 如果对于给定空间的运算法则和数域是不言自明的, 则通常简写为  $S$  是一个线性空间。如我们说  $\mathbb{R}^n$  是一个线性空间, 通常指  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  是一个线性空间或  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  是一个线性空间, 具体取决于数域的选择。

## (2) 线性无关与相关

待填写: (定义) 线性无关与线性相关

## (3) 基、框架与维数

待填写: (定义) 基、框架与维数

性质:

- 空间的维度是一个内蕴量, 与基的选择无关
- 多项式空间  $P_N$  中,  $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$  构成其一组基, 维数为  $\dim P_N = N + 1$
- 连续函数空间  $C[a, b]$  中,  $\forall N$ ,  $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$  是线性无关的, 但不能构成其基, 因其维数为无穷大

## 2. 度量与赋范空间

### (1) 距离空间

定义 (距离空间). 设  $M$  是一个集合,  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  是一个映射, 如果对任意的  $x, y, z \in M$ , 满足以下三条公理, 则称  $(M, d)$  为一个距离空间:

1. 非负性与分离性:  $d(x, y) \geq 0$ , 且当且仅当  $x = y$  时,  $d(x, y) = 0$
2. 对称性:  $d(x, y) = d(y, x)$
3. 三角不等式:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则称  $(M, d)$  构成一个距离空间。

### (2) 距离空间的完备性

待填写: (定义) 完备性

$\mathbb{R}$  是完备的, 且任意有限维赋范空间都是完备的。

#### a. 构造方法: 距离空间的完备化

设  $(M, d)$  是一个距离空间, 可以按照如下过程构造其完备化空间:

1. 构造对偶的柯西列空间

$$\tilde{M} = \{(x_n) \mid x_n \in M, (x_n) \text{ 为柯西列}\}$$

2. 在柯西列空间  $\tilde{M}$  中定义等价关系

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

即这两个柯西列按照角标顺序，交叉放在一起，还是柯西列。

3. 构造商空间：

$$\hat{M} = \tilde{M} / \sim = \{[\tilde{x}]\}$$

式中， $[\tilde{x}]$  表示柯西列  $\tilde{x}$  的等价类，即  $[\tilde{x}]$  是一个集合，集合中的所有元素在等价关系  $\sim$  下都是等价的。

4. 在商空间  $\hat{M}$  中定义距离

$$\hat{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

5. 则  $(\hat{M}, \hat{d})$  即为距离空间  $(M, d)$  的完备化空间。

嵌入映射：可以在原空间  $M$  与完备化空间  $\hat{M}$  之间定义一个单射  $i$ ：

$$i : M \rightarrow \hat{M}, \quad i(x) = [(x, x, x, \dots)]$$

该映射将原空间中的每个点  $x$  映射为完备化空间中由常值序列  $(x, x, x, \dots)$  所构成的等价类，且映射前后任意两元素的距离不变

### (3) 赋范空间与 Banach 空间

**待填写：(定义) 赋范空间**

完备的赋范空间称为 Banach 空间，或者 B 空间。

### (4) 等价范数

定义 (范数的等价性). 设  $V$  是一个线性空间， $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $V$  上的两个范数，如果存在正常数  $c$  和  $C$ ，使得对任意  $v \in V$ ，都有

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$$

则称这两个范数是等价的。

若存在正数  $C$ ，使得对任意  $v \in V$ ，都有

$$\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  强于  $\|\cdot\|_2$ 。

性质：

- 在有限维线性空间上，任意两个范数都是等价的
- 在无限维线性空间上，范数不一定是等价的
- 若一个点列在较强的范数下是 Cauchy 列，则在较弱的范数下也是 Cauchy 列；反之不必然。

## (5) 常用的范数

### a. $\mathbb{R}^n$ 上的范数

记  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 则常用的范数有:

- 无穷范数: 所有元素的最大值

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- 1-范数: 所有元素的绝对值之和

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- 2-范数: 欧几里得范数, 即所有元素的平方和的平方根

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

### b. $C[a, b]$ (有界闭区间上连续函数空间) 上的范数

- 无穷范数: 函数在区间上的最大绝对值

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- 1-范数: 函数在区间上的绝对值积分

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

- 2-范数: 函数在区间上的平方积分的平方根

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$C[a, b]$  上三个范数的性质:

- 任意两个范数不等价
- 无穷范数强于 2 范数, 2 范数强于 1 范数
- 只有无穷范数对应的赋范空间是完备的
- 1-范数对应的完备化空间为  $L^1(a, b)$ , 2-范数对应的完备化空间为  $L^2(a, b)$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup>  $L^1(a, b)$  为  $(a, b)$  上的可积函数空间,  $L^2(a, b)$  为  $(a, b)$  上的平方可积函数空间。

### 3. 内积空间

#### (1) 内积定义与性质

**定义 (内积).** 设  $(S, P)$  是一个线性空间, 如果对任意的  $u, v, w \in S$  和  $a, b \in P$ , 存在一个映射  $S \times S \rightarrow P$ , 满足

1. 共轭对称性:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2. 线性性:  $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
3. 正定性:  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , 且当且仅当  $v = 0$  时,  $\langle v, v \rangle = 0$

则称该映射为内积,  $(S, P)$  构成一个内积空间。

若  $\langle x, y \rangle = 0$ , 则称  $x$  与  $y$  正交。

几个常用空间上的内积:

- $\mathbb{R}^n$  或  $\mathbb{C}^n$  上的内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- $C[a, b]$  (有界闭区间上连续函数空间) 上的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

- $C[a, b]$  上的带权内积:

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

其中, 权函数  $\rho(x)$  需要满足条件:

- $\rho(x) \in C[a, b]$
- $\rho(x)$  几乎处处为正
- $\int_a^b \rho(x) dx < +\infty$
- $\forall q(x) \in P_n$ ,  $\int_a^b \rho(x) |q(x)| dx < \infty$

带权内积所研究的空间称为加权内积空间:

$$L_\rho^2(a, b) = \{f(x) \mid \int_a^b \rho(x) |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

常用的权函数有:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= 1, \quad [a, b] = [-1, 1] \\ \rho(x) &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad [a, b] = [-1, 1] \end{aligned}$$

## (2) 正交性与 Schmidt 正交化

待填写: (定义) 正交性

待填写: (方法) 用 Grammer 矩阵判断内积空间中向量组的线性无关性

待填写: (方法) Schmidt 正交化过程: 从一个线性无关向量组构造一个正交向量组: 让每个向量减去与已有空间垂直的分量

用 Schmidt 正交化过程得到的正交向量组具有以下性质:

$$\Phi_{k-1} \subset \Phi_k$$

$$y_k \perp \Phi_{k-1}$$

## (3) 由内积诱导的范数

定义 (诱导范数). 设  $(S, P)$  是一个内积空间, 则可以定义范数  $\|\cdot\|$  如下:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

则称该范数为由内积诱导的范数。

- 任何内积均能诱导对应的范数
- 当且仅当范数满足平行四边形法则时

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

范数可以诱导内积:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

## 4. 正交多项式

定义 (正交多项式). 设  $\{\phi_n(x)\}$  是定义在区间  $[a, b]$  上的一组多项式, 且每个多项式的次数为  $n$ , 如果对任意  $m \neq n$ , 都有

$$\int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

则称  $\{\phi_n(x)\}$  为区间  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  的正交多项式。

正交多项式的性质:

- $\deg \phi_i = i$
- $(\phi_i, \phi_j) = 0, \quad \forall i \neq j$
- $\phi_n$  为实系数多项式
- $\phi_n$  在开区间  $(a, b)$  内恰有  $n$  个实单根

待填写: (证明)  $\phi_n$  在开区间  $(a, b)$  内恰有  $n$  个实单根的证明。证法: 分别证明实根、单根、全在  $(a, b)$  内。3 个命题均可用反证法。

(1)  $\rho = 1$ : Legendre 多项式

产生方法:

- 权函数  $\rho(x) = 1$
- 区间  $[-1, 1]$

表达式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

性质:

- 首项系数:

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

- 正交归一化:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

- 三项递推关系:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

- 奇偶性:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

- 导数关系:

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \frac{n}{x^2 - 1} [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

- 前五项:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

- 零平方误差最小:

**定理.** 在所有首项为 1 的  $n$  次多项式中, Legendre 多项式  $\tilde{P}_n(x)$  在  $[-1, 1]$  上与零的平方误差最小。

(2)  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ : Chebyshev 多项式

产生方法:

- 权函数  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 区间  $[-1, 1]$

表达式:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

性质:

- 首项系数:  $2^{n-1}$
- 正交归一化:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

- 三项递推关系:

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

- 奇偶性:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

- 前五项:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

- 零点:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- 极值点:

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- 简单表达式: 当  $|x| \geq 1$  时,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right]$$

## 5. 矩阵空间

待填写: (性质) 矩阵空间的基本性质: 线性空间、乘法运算、代数性质

### (1) 矩阵范数

**定义** (矩阵范数). 矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的范数  $\|\cdot\|$  称为矩阵范数, 如果对任意的  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $a \in \mathbb{C}$ , 满足以下性质:

1. 非负性与分离性:  $\|A\| \geq 0$ , 且当且仅当  $A = 0$  时,  $\|A\| = 0$
2. 齐次性:  $\|aA\| = |a|\|A\|$
3. 三角不等式:  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. 次乘性:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Note: 矩阵范数是定义在矩阵代数而非矩阵空间上的, 必须与矩阵乘法相容。

**定义** (矩阵范数与向量范数的相容性). 设  $\|\cdot\|_v$  是向量空间  $\mathbb{C}^n$  上的一个范数,  $\|\cdot\|_m$  是矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的一个范数, 如果对任意的  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $x \in \mathbb{C}^n$ , 都有

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|x\|_v$$

则称矩阵范数  $\|\cdot\|_m$  与向量范数  $\|\cdot\|_v$  是相容的。

矩阵范数的两种常见构造方法:

- 直接构造: Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Frobenius 范数的性质:

- Frobenius 范数与向量 2-范数相容
- $\|I\|_F = \sqrt{n}$
- 向量范数诱导: 算子范数

**定义** (算子范数). 设  $\|\cdot\|_v$  是向量空间  $\mathbb{C}^n$  上的一个范数, 则可以定义矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的算子范数  $\|\cdot\|_m$  如下:

$$\|A\|_m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v$$

则称该范数为由向量范数  $\|\cdot\|_v$  诱导的算子范数。

常用的几个算子范数:

- 无穷范数：行和最大值

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- 1-范数：列和最大值

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- 2-范数（谱范数）： $A$  的最大奇异值，即  $A^H A$  的最大特征值的平方根

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$$

## (2) 谱半径

定义（谱半径）。谱半径定义为矩阵所有特征值模的最大值，即

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

谱半径和矩阵范数的关系：

- 矩阵范数下界：

定理。对任意  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，有

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

- 无穷接近范数的存在性：

定理。对任意  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，存在一个矩阵范数  $\|\cdot\|$ ，使得

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

其中， $\varepsilon$  为任意给定的正常数。

## (3) 可逆矩阵相关定理

定理（扰动引理 I）。给定  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 。设  $\|B\| < 1$ ，则  $I + B$  可逆，且

$$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

定理（扰动引理 II）。设  $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，且  $A$  可逆。若

$$\|C - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

则  $C$  也可逆，且

$$\|C^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|C - A\|}$$

定理 (扰动定理 II). 设  $A, \delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 且  $A$  可逆。若  $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ , 则  $A + \delta A$  也可逆, 且

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}$$



## 二 函数插值与重构

总结：基本方法是利用插值基函数构造插值多项式，从而实现对函数的近似与重构。

问题 1：求解插值函数

- 整个区间上的连续插值：Lagrange 插值、Newton 插值、Hermite 插值

- Lagrange 插值基函数：

$$L_\alpha(x) = \prod_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I$$

- Newton 插值和 Hermite 插值：构造均差表，列表计算。

- \* 均差递推关系：

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

- \* 均差构造插值多项式：各项为  $f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$

- 分段插值：分片线性插值、分片三次 Hermite 插值

- 分片线性插值基函数：

$$L_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}, & x \in [x_{\alpha-1}, x_\alpha] \\ \frac{x_{\alpha+1} - x}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}, & x \in [x_\alpha, x_{\alpha+1}] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$
$$\phi(x) = \sum_{\alpha=0}^n f_\alpha L_\alpha(x)$$

- 分片三次 Hermite 插值基函数：

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \beta_k &= (x - x_k) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \alpha_{k+1} &= \left(1 + 2\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \beta_{k+1} &= -(x_{k+1} - x) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \phi(x) &= \sum_{k=0}^n [f_k \alpha_k + f'_k \beta_k], \quad x \in [x_k, x_{k+1}]\end{aligned}$$

## (一) 通用理论

### 1. 问题模型

待填写：(数学描述) 采样泛函视角下的插值问题数学描述

### 2. 插值空间

常用的插值空间：多项式函数空间、样条函数空间、三角多项式函数空间

### 3. 误差分析与收敛性

## (二) 具体插值方法

### 1. 一维多项式插值

问题：给定插值数据（采样数据） $(x_\alpha, f_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , 确定多项式  $P(x) \in P_n$ ,  $n = |I| - 1$ , 满足插值条件

$$x_\alpha(P) = P(x_\alpha) = f_\alpha, \quad \alpha \in I$$

定理 (多项式插值基本定理). 给定  $n + 1$  个插值条件

$$(x_\alpha, f_\alpha), \quad \alpha \in I, \quad x_\alpha \neq x_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta$$

则存在唯一的插值多项式  $P \in P_n$  满足插值条件。

Note: 若  $x_\alpha$  取之于复平面, 上述定理依然成立; 且上述定理与采样节点的排序无关。

## (1) Lagrange 插值

### a. 基函数构造

定义 (Lagrange 插值基函数). 定义

$$L_\alpha(x) = L_{\alpha;I}(x) = \prod_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I$$

称为插值基函数。

若给定 3 个插值条件  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ , 则对应的插值基函数为

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

插值基函数天然满足性质:

$$x_\beta(L_\alpha) = L_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

### b. 插值公式

在计算出插值基函数的基础上, 插值多项式可写为:

$$P(x) = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha L_\alpha(x)$$

### c. 余项

### d. 均差定义

定义 (均差的递推公式). 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义, 且给定插值节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , 则定义如下均差:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

其中,  $i = 0, 1, \dots, n - k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

均差的性质:

- $f_{i_0 i_1 \dots i_k}$  与节点  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  的顺序无关
- 设  $f$  是  $N$  次多项式, 若  $k > N$ , 则对任意节点  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ , 都有

$$f_{i_0 i_1 \dots i_k} = 0$$

## e. 插值公式

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + f_{i_0 i_1 i_2}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \dots + f_{i_0 i_1 \dots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-1}})$$

## f. Newton 插值多项式的列表计算

以给定 4 个节点时  $x_0, x_1, x_2, x_3$  的插值问题为例。可以按照如下表格从左向右逐列填写计算均差：

$x_i$	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$		
$x_1$	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dots$
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		

之后用插值表最上方一行的均差值逐个组装 Newton 插值多项式。

## (2) Hermite 插值

## a. Hermite 插值问题

给定  $\xi_i, f_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n_i - 1$ , 其中  $\xi_i$  两两不同, 且

$$\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m$$

希望确定一个次数为  $n$  的多项式函数

$$P_n(x), \quad n = \sum_{i=0}^m n_i - 1$$

满足插值条件

$$P^{(k)}(\xi_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1$$

### b. 拓展均差

**定义 (拓展均差).** 设  $f \in C^n(I(x_0, x_1, \dots, x_n))$ , 定义

$$f[x_0, x_1, x_n] = \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$

$$f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + t_{n-1}[x_{n-1} - x_{n-2}] + \dots + t_1[x_1 - x_0] + t_0 x_0)$$

式中,  $n \geq 1$  且  $t_0 = 1$ 。

Note: 这一积分实际上表示了一个单位标准  $n$ -维标准型上的积分, 或者说积分区域始终是一个插值节点构造的凸组合。这隐含了一个要求是  $1 = t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq 0$ 。

拓展均差的性质:

- 若  $x_i$  两两不一, 则拓展均差等价于普通均差

$$f[x_0, x_1, x_n] = f_{x_0, x_1, \dots, x_n}$$

且具有相同的递推关系:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- 极限性质: 若  $f$  足够光滑, 则

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} f[x_0 + \epsilon_0, x_1 + \epsilon_1, \dots, x_n + \epsilon_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

- 导数与重节点: 可从极限性质导出

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]$$

- 介值定理: 若  $f \in C^n[a, b]$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , 则存在  $\xi \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , 使得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

特别地,

$$\underbrace{f[x, x, \dots, x]}_{n+1 \uparrow} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

### c. Hermite 插值多项式

Hermite 插值多项式可表示为

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

其中,  $x_0, \dots, x_n$  为下面序列的任意置换:

$$\underbrace{\xi_0, \xi_0, \dots, \xi_0}_{n_0 \uparrow}, \underbrace{\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_1}_{n_1 \uparrow}, \dots, \underbrace{\xi_m, \xi_m, \dots, \xi_m}_{n_m \uparrow}$$

#### d. 列表法求 Hermite 插值多项式

假设给定 2 个节点  $\xi_0, \xi_1$ , 对应的插值条件分别为  $f_0, f'_0, f''_0, f_1$ , 则可按下表计算均差:

Hermite 插值均差表 (节点序列:  $\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1$ ):

节点	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$			
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f'_0$		
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f'_0$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0] = \frac{f''_0}{2}$	
$\xi_1$	$f[\xi_1] = f_1$	$f[\xi_0, \xi_1] = \frac{f_1 - f_0}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$

对应的插值多项式为:

$$\begin{aligned} P(x) &= f[\xi_0] + f[\xi_0, \xi_0](x - \xi_0) + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0](x - \xi_0)^2 + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1](x - \xi_0)^3 \\ &= f_0 + f'_0(x - \xi_0) + \frac{f''_0}{2}(x - \xi_0)^2 \\ &\quad + \frac{2(f_1 - f_0 - f'_0(\xi_1 - \xi_0)) - f''_0(\xi_1 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}(x - \xi_0)^3 \end{aligned}$$

### (3) Lagrange 插值和 Hermite 插值的收敛分析

#### a. 插值余项

若  $f$  在区间  $[a, b]$  上具有  $n+1$  阶连续导数, 则对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in I(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ , 使得

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{01\dots n}(x)$$

#### b. 收敛性

收敛性的定义: 当给定插值点的最大间距  $h \rightarrow 0$  时, 插值余项  $R(x) \rightarrow 0$ , 则称插值多项式序列在区间  $[a, b]$  上收敛于函数  $f(x)$ 。

定义 (多项式插值收敛定义). 设  $f \in C^\infty[a, b]$ , 且存在正常数  $M > 0$ , 使得对任意的  $n \geq 0$ , 都有

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \leq M$$

则对任意在  $[a, b]$  上的插值节点序列  $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ , 对应的插值多项式序列  $\{P_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上均匀收敛于  $f(x)$ 。

收敛的充分条件:

定理. 记  $\delta = |I(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)|$ ,  $\tilde{x}$  为  $I$  的中心。若  $f$  在  $B(\tilde{x}, w\delta)$  上复解析, 则对任意  $\bar{x} \in I$ , 插值法收敛。

## 2. 分段插值

### (1) 分段线性插值

待填写: () 分片线性插值问题描述

#### a. 分片线性插值的插值基函数

定义 (分片线性插值基函数). 设给定插值节点  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , 则定义分片线性插值基函数为

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其中,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 且约定  $x_{-1} = x_0$ ,  $x_{n+1} = x_n$ 。

则线性插值基函数为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^n f_k l_k(x)$$

#### b. 分片线性插值的收敛性定理

定义

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

- 若  $f \in C[a, b]$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - \phi\|_\infty \rightarrow 0$
- 若  $f \in C^1[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若  $f \in C^2[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

### (2) 分段三次 Hermite 插值

待填写: () 分片三次 Hermite 插值的数学描述

#### a. 插值基函数

分段三次 Hermite 插值的基函数满足如下条件:

$$\begin{aligned} \alpha_k(x_i) &= \delta_{ik}, & \alpha'_k(x_i) &= 0 \\ \beta_k(x_i) &= 0, & \beta'_k(x_i) &= \delta_{ik} \end{aligned}$$

在单元  $[x_k, x_{k+1}]$  上，三次 Hermite 插值基函数为

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \beta_k &= (x - x_k) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \alpha_{k+1} &= \left(1 + 2\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\ \beta_{k+1} &= -(x_{k+1} - x) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2\end{aligned}$$

- $\alpha_k$  满足单位分解性:  $\alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$
- $\alpha_k(x_i) = \delta_{ik}$ ,  $\alpha'_k(x_i) = 0$
- $\beta_k(x_i) = 0$ ,  $\beta'_k(x_i) = \delta_{ik}$

### b. 三次 Hermite 插值多项式

$$\phi = \sum_{k=0}^n [f_k \alpha_k(x) + f'_k \beta_k(x)]$$

### c. 收敛性定理

定义 (分段三次 Hermite 插值收敛性定理). 设  $f \in C^1[a, b]$ , 则分段三次 Hermite 插值多项式  $\phi$  满足

$$\|f - \phi\|_\infty \leq ch \|f'\|_\infty$$

若  $f$  有更好的光滑性, 则:

- 若  $f \in C^2[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^2 \|f''\|_\infty$
- 若  $f \in C^3[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^3 \|f'''\|_\infty$
- 若  $f \in C^4[a, b]$ , 则  $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

此外, 对于不高于三次的多项式, 分段三次 Hermite 插值是精确的。

## 3. Fourier 插值

### (1) 离散傅里叶变换

待填写: (定义) 离散傅里叶变换式、变换式系数表达式

如果  $f$  的光滑性满足  $f \in C_{per}^M$ , 则有

$$\begin{aligned} a_n &= O(n^{-M}) \\ b_n &= O(n^{-M}) \end{aligned}$$

且

$$\|f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right]\|_\infty = O(N^{-M})$$

## (2) 三角多项式插值空间

三角多项式插值空间为:

$$\begin{aligned} \Phi_{2M+1} &:= \left\{ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \right\} \\ \Phi_{2M} &:= \left\{ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) + A_M \cos Mx \right\} \end{aligned}$$

## (3) 三角多项式插值与一般多项式插值

**待填写: (问题) 三角多项式插值问题的数学描述**

**待填写: (问题) 辅助插值问题: 找相多项式**

**待填写: (理论) 两个插值问题之间的联系: 欧拉公式**

## (4) 插值定理与三角插值多项式

定理 (三角多项式插值定理). 设给定插值节点

$$x_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则对任意插值数据  $f_k$ , 存在唯一的三角多项式

$$P(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

(当  $N$  为奇数时,  $M = \frac{N-1}{2}$ ; 当  $N$  为偶数时,  $M = \frac{N}{2}$ ) 满足插值条件

$$P(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

同样, 存在唯一的相多项式

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n e^{inx}$$

满足插值条件

$$Q(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- 三角插值多项式:

$$A_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi j k}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M$$
$$B_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi j k}{N}\right), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

- 相插值多项式:

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{-kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

式中,  $w = e^{i \frac{2\pi}{N}}$ 。

## 三 函数逼近

### 总结

Note: 这里为了让总结看起来更顺畅, 没有遵循原 PPT 和书中的符号规范, 转而应用了比较统一的符号。这些符号规范仅在总结一部分使用。

- 最佳平方逼近求解:

- 给定一组规范正交函数基时:

- \* 写出规范正交函数基  $\{\phi_m\}_{m=0}^n$
    - \* 计算系数  $a_m = \frac{(f, \phi_m)}{(\phi_m, \phi_m)}$
    - \* 写出逼近多项式  $\phi^* = \sum_{m=0}^n a_m \phi_m$

- 给定一组非规范正交函数基时:

- \* 写出非规范正交函数基  $\{\phi_m\}_{m=0}^n$
    - \* 构建法方程组:

$$m_{ij} = (\phi_j, \phi_i), \quad b_i = (f, \phi_i)$$

- \* 求解线性方程组  $\mathbf{Ma} = \mathbf{b}$ , 得到系数  $a_m$

- \* 写出逼近多项式  $\phi^* = \sum_{m=0}^n a_m \phi_m$

- Legendre 多项式作最佳平方逼近的收敛速度: 高阶时控制在  $1/\sqrt{n}$  以下

- 最小二乘逼近求解: 计算过程可视作最佳平方逼近的离散形式

- 给定基底  $\{\phi_m\}_{m=0}^n$  和采样点  $\{x_k\}_{k=0}^N$

- 估计一个误差系数  $\rho(x_i)$

- 用半内积构建法方程组:

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^N \rho(x_k) \phi_j(x_k) \phi_i(x_k), \quad b_i = \sum_{k=0}^N \rho(x_k) f(x_k) \phi_i(x_k)$$

- 求解线性方程组  $\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , 得到系数  $a_m$
- 写出逼近多项式  $\phi^* = \sum_{m=0}^n a_m \phi_m$
- 一致逼近求解:
  - 给定原函数  $f \in C[a, b]$  和基底  $\{\phi_m\}_{m=0}^n$
  - 写出待定逼近多项式  $\phi(x) = \sum_{m=0}^n a_m \phi_m(x)$
  - 写出误差函数  $E(x) = f(x) - \phi(x)$
  - 根据切比雪夫交错点组定理, 写出求解条件:
    - \* 交错条件:  $E(x_i) = -e(x_{i-1})$
    - \* 偏差点条件: 除端点作为偏差点的情况, 必有  $f'(x_i) = p'_n(x_i)$
  - 由偏差点条件可以解出一系列偏差点  $x_i(a)$ , 再代入交错条件中, 解出系数  $a_m$

## (一) 通用理论

### 1. 问题模型

**待填写: (问题) 函数逼近问题的数学模型**

最佳逼近问题: 找  $\phi^* \in \Phi$ , 使得

$$\|f - \phi^*\| = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|$$

### 2. 逼近准则

(1) 最小二乘准则 (L 范数)

(2) 一致逼近准则 ( $L^\infty$  范数)

### 3. 核心定理

## (二) 具体逼近方法

### 1. 最优平方逼近

#### (1) 基础理论

问题: 给定一个线性子空间  $\Phi$ , 找  $\phi^* \in \Phi$ , 使得

$$\|f - \phi^*\|_2 = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|_2$$

问题等价于

$$\|f - \phi^*\|_2^2 = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|_2^2$$

于是构造出一个辅助函数：

$$\begin{aligned} I &= \|f - \phi\|_2^2 = \left( f - \sum_{i=0}^n a_i \phi_i, f - \sum_{i=0}^n a_i \phi_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j (\phi_i, \phi_j) - 2 \sum_{i=0}^n a_i (f, \phi_i) + (f, f) \end{aligned}$$

式中， $\{\phi_i\}$  为  $\Phi$  的一组基。

### a. 法方程

多元函数取得最小值的条件：对各变量偏导为 0、在这一点的二阶偏导数构成的矩阵正定。

各变量偏导为 0 即导出法方程：

$$\sum_{j=0}^n a_j (\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

或写成矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_1, \phi_0) & \cdots & (\phi_n, \phi_0) \\ (\phi_0, \phi_1) & (\phi_1, \phi_1) & \cdots & (\phi_n, \phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_0, \phi_n) & (\phi_1, \phi_n) & \cdots & (\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0) \\ (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{bmatrix}$$

**定理 (最小二乘逼近法方程).** 设  $\Phi$  为线性子空间， $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  为  $\Phi$  的一组基，则函数  $f$  在  $\Phi$  中的最优平方逼近  $\phi^*$  可表示为

$$\phi^* = \sum_{j=0}^n a_j^* \phi_j$$

其中，系数  $c_j^*$  满足法方程组

$$\sum_{j=0}^n a_j (\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

### b. 最佳平方逼近的性质

**引理 (最佳平方逼近的正交性质).** 设  $\phi^*$  为函数  $f$  在子空间  $\Phi$  中的最佳平方逼近，则对任意  $\phi \in \Phi$ ，都有

$$f - \phi^* \perp \Phi$$

**推论 (最佳平方逼近的勾股定理).** 设  $\phi^*$  为函数  $f$  在子空间  $\Phi$  中的最佳平方逼近，则有

$$\|f\|_2^2 = \|f - \phi^*\|_2^2 + \|\phi^*\|_2^2$$

## (2) 幂函数基的逼近

考虑连续函数在  $n$ -次多项式空间  $P_n$  中的最佳平方逼近问题。

若选取  $\{x^m\}_{m=0}^n$  作为基函数，在  $[0, 1]$  区间上求解最佳平方逼近，则法方程组的系数矩阵为 Hilbert 矩阵：

**定义** (Hilbert 矩阵). 阶数为  $n + 1$  的 Hilbert 矩阵定义为

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1$$

即

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

这一逼近形式的问题：

- Hilbert 矩阵病态，随着  $n$  的增大，条件数迅速增大，导致数值解不稳定
- 幂函数基不正交，导致法方程系数矩阵接近奇异

## (3) 正交多项式逼近

### a. 广义傅里叶展开

在  $C[a, b]$  中，取一个规范正交函数组  $\{\phi_m\}_{m=0}^n$ ，即确定了一个用于逼近的线性子空间  $\Phi_n = \text{span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ 。

相应地，对于任意给定函数  $f$ ，存在唯一的最佳平方逼近  $\phi^* \in \Phi_n$ ，且

$$\phi^* = \sum_{i=0}^n a_i^* \phi_i, \quad a_i^* = (f, \phi_i)$$

**定义** (广义傅里叶展开). 设  $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$  为  $C[a, b]$  中的规范正交函数组，则对任意  $f \in C[a, b]$ ，都有

$$f \sim f_\infty = \sum_{i=0}^\infty a_i \phi_i, \quad a_i = (f, \phi_i)$$

$f_\infty$  称为函数  $f$  在  $\{\phi_m\}$  下的广义傅里叶展开。

**定理** (广义傅里叶展开的收敛性). 设  $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$  为  $C[a, b]$  中的规范正交函数组，则对任意  $f \in C[a, b]$ ，其广义傅里叶展开在  $L_2$  范数下收敛于  $f$ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

其中， $f_n = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i$ 。

### b. Legendre 多项式作最佳平方逼近

设内积为  $[-1, 1]$  上的权 1 内积, 给定  $f \in C[-1, 1]$ , 则  $f$  在 Legendre 多项式空间  $P_n$  中的最佳平方逼近为

$$I_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2} \phi_k(x)$$

性质:

- 收敛性:  $I_n f \rightarrow f, n \rightarrow \infty$ , 且收敛到  $L^2((-1, 1))$  空间中
- 收敛速度估计: 若  $f \in C^2[-1, 1]$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N >$ , 使得

$$\|f - I_n f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \quad n \geq N$$

即对于  $n$  次的 Legendre 多项式逼近, 误差会被控制在  $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$  范围内

### (4) Legendre 多项式的零平方误差最小性质

**定理** (Legendre 多项式的零平方误差最小性质). 设  $f \in C[-1, 1]$ , 则在所有满足  $\deg(p_n) \leq n$  且  $(p_n, x^k) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$  的多项式中, Legendre 多项式  $P_n(x)$  使得平方误差  $\|f - P_n\|_2$  最小。

## 2. 最小二乘逼近: 最优平方逼近的离散化形式

待填写: (问题) 最小二乘逼近的问题模型: 确定的输入-输出关系叠加系统噪声和随机误差, 希望拟合输入-输出关系的具体形式

### (1) 基础理论

核心假设: 观测数据  $f_i$  和正确输  $\phi^*(x_i)$  之间的误差  $a_i \xi_i$  是一个独立同分布的零均值随机变量。

假设导出: 当拟合结果  $\phi$  取得正确的关系  $\phi = \phi^*$  时, (归一化) 误差的方差最小。

数学化:  $\phi^*$  是以下优化问题的极小解:

$$\phi^* = \arg \min_{\phi \in \Phi} \sigma^2 = \arg \min_{\phi \in \Phi} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m [f_i - \phi(x_i)]^2$$

### (2) 数学方法: “半” 内积

**定理** (Haar 条件). 若给定一组采样点  $\{x_i\}_{i=0}^m$ , 且  $\Phi$  中的任意非 0 元素在这组采样点上的采样结果不全为 0, 则称这组采样点满足 Haar 条件。

满足 Haar 条件时, 可以利用在采样点上的采样结果, 定义一个“半”内积:

$$(f, g)_m = \sum_{i=0}^m \frac{f(x_i)g(x_i)}{a_i^2}$$

此时这个“半”内积在  $\Phi$  上是一个真正的内积。因此上述问题等价于求解法方程  $AU=b$ :

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0)_m & (\phi_1, \phi_0)_m & \cdots & (\phi_n, \phi_0)_m \\ (\phi_0, \phi_1)_m & (\phi_1, \phi_1)_m & \cdots & (\phi_n, \phi_1)_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_0, \phi_n)_m & (\phi_1, \phi_n)_m & \cdots & (\phi_n, \phi_n)_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0)_m \\ (f, \phi_1)_m \\ \vdots \\ (f, \phi_n)_m \end{bmatrix}$$

Note: 我们注意到，在求内积过程中，分母上表示采样点随机误差幅度的  $a_i^2$  仍然是不确定的，此时需要基于经验或先验知识给出估计。常用的估计有  $a_i \propto 1$ 、 $a_i \propto f_i$ 、 $a_i \propto x_i$ 、 $a_i \propto x_i^2$  等。

### 3. 最佳一直逼近

**待填写：(问题) 最佳一直逼近的数学描述**

最佳一直逼近中用到一些符号：

- $\Delta(f, p_n) = \|f - p_n\|_\infty$  称为  $p_n$  关于  $f$  的偏差
- $E_n = \inf_{p_n \in P_n} \Delta(f, p_n)$  称为  $f$  在  $P_n$  中的最小偏差
- 若  $f(x_i) - p_n(x_i) = \sigma \Delta(f, p_n)$ ,  $\sigma = \pm 1$ , 则称  $x_i$  为  $p_n$  关于  $f$  的偏差点。
  - 若  $\sigma = 1$ , 则称  $x_i$  为正偏差点
  - 若  $\sigma = -1$ , 则称  $x_i$  为负偏差点

#### (1) 偏差泛函与最优逼近多项式存在性定理

假设给定一个逼近多项式  $p_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , 则可定义偏差泛函:

$$\phi(f, \mathbf{a}) = \|f - p_n\|_\infty = \|f - (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\|_\infty$$

这个泛函具有以下性质：

- 连续性:  $\phi$  对  $\mathbf{a}$  连续
- 对  $\mathbf{a}$  下凸:  $\forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , 都有

$$\phi(f, t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{a}_2) \leq t\phi(f, \mathbf{a}_1) + (1-t)\phi(f, \mathbf{a}_2)$$

- 正定性: 对于任意  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , 都有  $\phi(f, \mathbf{a}) > 0$

正定性等价于:  $\phi(0; \mathbf{a})$  在单位球面  $\sum_{i=0}^n a_i^2 = 1$  上有正的最小值  $\mu$

利用偏差泛函的性质, 可以证明最佳一直逼近多项式的存在性:

**定理 (最佳一致逼近存在性定理).** 设  $f \in C[a, b]$ , 则在  $n$  次多项式空间  $P_n$  中, 存在一个多项式  $p_n^* \in P_n$ , 使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty$$

即  $P_n$  中关于  $f \in C[a, b]$  的最小偏差是可以达到的。

## (2) 最佳一致逼近多项式的性质

定义 (Chebyshev 交错点组). 若  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$  是  $p_n$  关于  $f$  的轮流为正负的偏差点，则称其为一个 Chebyshev 交错点组。

定理 (最佳一致逼近多项式的 Chebyshev 交错定理).  $p_n^*$  是  $f$  的最佳一致逼近多项式的充要条件是存在一个元素个数为  $n+2$  的 Chebyshev 交错点组  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$

推论. 最佳一致逼近多项式是一个 Lagrange 插值多项式，其插值节点在  $(a, b)$  内。

## (3) 唯一性定理

定理 (最佳一致逼近多项式的唯一性定理). 设  $f \in C[a, b]$ ，则  $f$  在  $n$  次多项式空间  $P_n$  中的最佳一致逼近多项式  $p_n^*$  是唯一的。

## (4) Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 (Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质). 设  $T_n(x)$  为  $n$  次 Chebyshev 多项式，则在  $[-1, 1]$  上，任意单位首项系数的  $n$  次多项式  $p_n(x)$  均满足

$$\|p_n\|_\infty \geq \|T_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$

即 Chebyshev 多项式在  $[-1, 1]$  上具有最小的无穷范数。





## 四 数值微积分

### (一) 数值积分

#### 1. 通用理论

- (1) 积分问题模型
- (2) 求积公式核心
- (3) 代数精度
- (4) 稳定性

#### 2. 具体求积方法

##### (1) Newton-Cotes 公式

- a. 梯形公式
- b. Simpson 公式
- c. 3/8 - 规则

##### (2) 复合求积方法

- a. 复合梯形公式
- b. 复合 Simpson 公式

##### (3) 加速方法

- a. Romberg 方法

##### (4) Gauss 型求积

- a. Gauss 点与权系数
- b. Gauss-Legendre 求积
- c. Gauss-Chebyshev 求积



## 五 非线性方程求根

### (一) 通用理论

1. 问题模型
2. 迭代法基础
3. 收敛性分析
  - (1) 收敛阶定义
  - (2) 整体收敛性（压缩映像原理）
  - (3) 局部收敛性判定
4. 收敛效率

### (二) 具体方法

1. 单步法
  - (1) 牛顿法
    - a. 迭代公式
    - b. 收敛性分析
    - c. 重根处理
  - (2) 不动点迭代
2. 多步法
3. 其他方法
  - (1) 割线法



## 六 常微分方程初值问题数值解法

### (一) 通用理论

1. 问题模型
2. 数值解法核心
3. 基本概念
  - (1) 局部截断误差与整体截断误差
  - (2) 收敛性与收敛阶
  - (3) 稳定性与相容性
4. 收敛性与稳定性判定

### (二) 具体方法

1. 单步法
  - (1) Euler 方法
    - a. 向前欧拉
    - b. 向后欧拉
  - (2) 改进欧拉方法
  - (3) 龙格 - 库塔 (RK) 方法
    - a. 2 阶 RK 方法
    - b. 4 阶 RK 方法
2. 多步法
  - (1) Adams 方法
    - a. 显式 Adams 公式



## 七 线性代数方程组数值解法

### (一) 直接解法

#### 1. 通用理论

- (1) 问题模型
- (2) 残差与误差分析
- (3) 数值稳定性与条件数

#### 2. 具体方法

- (1) Gauss 消元法
  - a. 基本步骤
  - b. 主元素选取
- (2) LU 分解
- (3) 特殊方程组解法
  - a. Thomas 算法 (三对角方程组)
  - b. Toeplitz 矩阵快速解法

### (二) 定常线性迭代解法

#### 1. 通用理论

- (1) 迭代格式构造
- (2) 收敛性判定
- (3) 收敛速度

#### 2. 具体迭代法

- (1) Jacobi 迭代
- (2) Gauß-Seidel 迭代