Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 14 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小。*

证明：

考虑一个首项为 1 的 n 次多项式 $f \in \mathbb{P}_n$，必有

$$f = \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{P}_k(x) \tag{1.1}$$

考虑误差函数

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{a}) =& \|f(x) - 0\|_2^2 & (1.2) \\ =& \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\mathrm{d}x + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_k(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^{1} \tilde{P}_k^2(x)\mathrm{d}x & (1.3) \end{aligned}$$

由 Legendre 多项式的正交性，

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i(x)\tilde{P}_j(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij} \tag{1.4}$$

于是

$$\phi(\boldsymbol{a}) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^{1} \tilde{P}_k^2(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

当且仅当 $a_k = 0$ 时，$\phi(\boldsymbol{a})$ 取得最小值，即 Legendre 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的平方误差最小。

1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 1.2.2. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的一致误差最小。*

证明：

方法 1：将一致误差转化，并考虑在 $\mathbb{P}_{n-1}$ 上的最佳一致逼近多项式

$$f = \tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x) \tag{1.7}$$

考虑误差函数

$$\begin{aligned}
\Delta(f,0) =& \|f(x) - 0\|_\infty && (1.8)\\
=& \|\tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)\|_\infty && (1.9)\\
=& \|\tilde{T}_n(x) - \left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)\right)\|_\infty && (1.10)\\
=& \Delta(\tilde{T}_n, -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) && (1.11)
\end{aligned}$$

该误差函数取得最小值时，即为

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{a}} \Delta(\tilde{T}_n, -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) =& \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathrm{span}\{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_{n-1}\}) && (1.12)\\
=& \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) && (1.13)
\end{aligned}$$

则只要证 $\mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, 0)$ 即可。

考虑到 $\tilde{T}_n$ 在 $[-1,1]$ 上恰有 $n+1$ 个极值点，且这些极值点构成了一个 n+1 个点的交错点组，故 0 就是 $\tilde{T}_n$ 在 $\mathbb{P}_{n-1}$ 中的最佳一致逼近多项式，因此

$$\mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, 0) \tag{1.14}$$

因此，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，误差函数可以取得最小值，即 Chebyshev 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的一致误差最小。

方法 2: 利用交错点组证明差多项式为 0 假设存在另一个首项为 1 的 n 次多项式 $f_n(x)$, 使得 $\|f_n(x)-0\|_\infty < \|T_n(x)-0\|_\infty$。

考虑

$$Q(x) = f_n(x) - \tilde{T}_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1} \tag{1.15}$$

在 $\tilde{T}_n$ 的 n+1 个极值点 x_k 处，设 $\tilde{T}_n$ 取得极值 $\pm M$，则由于 $\|f_n(x)-0\|_\infty < \|T_n(x)-0\|_\infty$，必有

$$|f_n(x_k)| < M \tag{1.16}$$

因此

$$Q(x_k) = \begin{cases} M - p(x_k) > 0, & k\text{为偶数} \\ -M - p(x_k) < 0, & k\text{为奇数} \end{cases} \tag{1.17}$$

于是 Q 在区间内 n+1 个点上符号交替，故 Q 至少有 n 个零点。由于 $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$，Q 只能为 0. 于是 $f_n(x) = \tilde{T}_n(x)$，与假设矛盾。

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个两两不同的节点，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.1}$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明：

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题：定义

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.2}$$

则进行分片线性插值时，

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h \to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时，

- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^2 \|f''\|_\infty$

- 若 $f \in C^3[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

证明：

Note：分片线性插值只要做泰勒展开即可；分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出，低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析

2.2 函数逼近

2.3 补充内容

2.3.1 Schauder 基

2.4 重要证明

2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

定理 2.4.1. *设 $f \in C[a,b]$，Φ 为 $C[a,b]$ 的有限维子空间，则存在唯一的 $\phi^* \in \Phi$，使得*

$$\|f-\phi^*\| = \min_{\phi\in\Phi}\|f-\phi\| \tag{2.3}$$

证明：

2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到 $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ 的完备化空间 $(\bar{C[a,b]}, \|\cdot\|_2)$ 中的一个元素。若 $\|\cdot\|_2$ 为权系数 ρ 的内积诱导范数，则 $(\bar{C[a,b]}, \|\cdot\|_2)$ 即为 $L^2_\rho(a,b)$。

2、设 $f \in C[a,b]$，$\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开

$$f \sim \sum_{m=0}^\infty a_m\phi_m(x), \quad a_m = (f,\phi_m) \tag{2.4}$$

在 $C[a,b]$ 中一致收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{m=0}^n a_m\phi_m(x)\right\|_\infty = 0 \tag{2.5}$$

证明：

提示：1 的证明用到 $\sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$，2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

定理 2.4.2 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则在 n 次多项式空间 P_n 中，存在一个多项式 $p_n^* \in P_n$，使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \tag{2.6}$$

即 P_n 中关于 $f \in C[a,b]$ 的最小偏差是可以达到的。

证明：

提示：利用偏差泛函的性质

2.4.4 Chebyshev 交错点组定理

定理 2.4.3 (Chebyshev 交错点组定理). 设 $f \in C[a,b]$，$p_n^* \in P_n$ 为 f 在 P_n 中的最佳一致逼近多项式，则存在 $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \leq b$，使得

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \|f - p_n^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, ..., n+1 \tag{2.7}$$

即误差函数在 $n+2$ 个点上达到最大偏差且符号交替。

证明：

提示：分别证明必要性和充分性，且均用到反证法。

2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理

定理 2.4.4 (最佳一致逼近唯一性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则 f 在 n 次多项式空间 P_n 中的最佳一致逼近多项式 p_n^* 是唯一的。

证明：

提示：反证法。

2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记 $\Phi = \mathrm{span}(1, x^2)$，求 $x \in [0,1]$ 上在 Φ 中的最佳平方逼近。

Chapter 3

数值微积分

3.1 补充内容

3.2 重要证明

3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.3 重要习题与例题

Chapter 4

常微分方程数值解

4.1 补充内容

4.1.1 一致 Lipschitz 常数的求解

若 $f(t, y)$ 关于 y 连续可微，则 Lipschitz 常数即为区间内 f 对 y 的偏导数的最大值，即

$$L = \max_{(t,y)\in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \tag{4.1}$$

4.2 重要证明

4.2.1 y 的各阶导数

当 $y' = f(t, y)$ 时，求 y 的各阶导数。

符号规范：记 $\partial f/\partial x_i = f_i$，即 f_i 是 f 对第 i 个变量的偏导数。在当前情境中，有

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{4.3}$$

求解：

题目条件为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y) \tag{4.4}$$

即将对 y 的求导转化为了对 f 的全微分。于是有算符关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.5}$$

因此

$$\begin{aligned} y' =& f & (4.6) \\ y'' =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} & (4.7) \\ =& f_1 + ff_2 & (4.8) \\ y''' =& \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + f\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + f_2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} & (4.9) \\ =& \frac{\partial f_1}{\partial t} + f\frac{\partial f_1}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + f\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + f_2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) & (4.10) \\ =& f_1 1 + ff_{12} + f(f_{21} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) & (4.11) \\ =& f_{11} + 2ff_{12} + f^2 f_{22} + f_2(f_1 + ff_2) & (4.12) \end{aligned}$$

4.2.2 一步误差与局部截断误差的关系

$$(1 - h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \leq |R_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \tag{4.13}$$

4.3 重要习题与例题

4.3.1 求相容阶和主局部截断误差：泰勒级数展开法

欧拉法

梯形方法

4.3.2 显式 RK 的推导

基本思路：

局部截断误差为

$$\begin{aligned} R =& y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y, f) & (4.14) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(t) h^k & (4.15) \\ & - y(t) & (4.16) \\ & - h \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k h^k & (4.17) \end{aligned}$$

要令 RK 具有 n 阶相容性，即要令

$$R = p_{n+1}(t)h^{n+1} + O(h^{n+2}) \tag{4.18}$$

需要消去 R 中低于 h^{n+1} 的各阶项，即可得到一系列关于 a_{ij}, b_i, c_i 的方程。

计算方法即为：

- 在 t 点对 $t(t+h)$ 作泰勒展开
- 在 (t_n, y_n) 对 $\phi(t_n, y_n, f)$ 作多元泰勒展开
- 令各阶系数相等，即

$$\phi_k = \frac{1}{(k+1)!} y^{(k+1)} \tag{4.19}$$

显式二阶推导

显式 RK 参数矩阵：

$$\begin{array}{c|cc} c_1 = 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 = 1 \end{array} \tag{4.20}$$

RK 斜率：

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{4.21}$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(t_n, y_n)) \tag{4.22}$$

增量函数：

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2 \tag{4.23}$$

对 k_1, k_2 作泰勒展开：

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f \tag{4.24}$$

$$k_2 = f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot c_2 h f + O(h^2) \tag{4.25}$$

则 $\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$ 的展开可表示为

$$\text{常数项：} \phi_0 = (b_1 + b_2) f \tag{4.26}$$

$$\text{一次项系数：} \phi_1 = b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 \tag{4.27}$$

对 y 进行泰勒展开：

$$y' = f(t, y) \tag{4.28}$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_1 + f f_2 \tag{4.29}$$

因此需要满足关系

$$(b_1 + b_2) f = y' = f \tag{4.30}$$

$$b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 = \frac{1}{2} y'' = \frac{1}{2}(f_1 + f f_2) \tag{4.31}$$

即

$$b_1 + b_2 = 1 \tag{4.32}$$
$$b_2 c_2 = \frac{1}{2} \tag{4.33}$$

显式三阶推导

RK 参数矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 = 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 + & b_3 = 1 \end{array} \tag{4.34}$$

RK 斜率：

$$\begin{aligned}
k_1 =& f(t_n, y_n) = f && (4.35)\\
k_2 =& f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) && (4.36)\\
=& f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot a_{21} h f && (4.37)\\
&+ \frac{f_{11}(c_2 h)^2 + 2 f_{12}(c_2 h)(a_{21} h k_1) + f_{22}(a_{21} h k_1)^2}{2} + O(h^3) && (4.38)\\
=& f + c_2 f_1 h + a_{21} f f_2 h && (4.39)\\
&+ \frac{c_2^2 f_{11} + 2 a_{21} c_2 f f_{12} + a_{21}^2 f^2 f_{22}}{2} h^2 + O(h^3) && (4.40)\\
=& f + c_2(f_1 + f f_2) h + \frac{c_2^2}{2}(f_{11} + 2 f f_{12} + f^2 f_{22}) h^2 + O(h^3) && (4.41)\\
k_3 =& f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) && (4.42)\\
=& f + f_1 c_3 h + f_2 h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) && (4.43)\\
&+ \frac{f_{11} c_3^2 h^2 + 2 f_{12} \cdot c_3 h \cdot h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) + f_{22}(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)^2 h^2}{2} + O(h^3) && (4.44)\\
& && (4.45)
\end{aligned}$$

此时，向 k_3 中代入 k_1 和 k_2 时，不一定要带入到 h^2 项，只要令所有的 h^2 项系数正确即可。于是有

$$\begin{aligned}
k_3 =& f + f_1 c_3 h + f_2 h [a_{31} f + a_{32}(f + c_2(f_1 + f f_2) h)] && (4.46)\\
&+ \frac{h^2}{2}[c_3^2 f_{11} + 2 c_3 f_{12}(a_{31} f + a_{32} f) + f_{22}(a_{31} f + a_{32} f)^2] + O(h^3) && (4.47)\\
=& f + [c_3 f_1 + (a_{31} + a_{32}) f f_2] h && (4.48)\\
&+ \frac{1}{2}[2 a_{32} c_2 f_2 (f_1 + f f_2) + c_3^2 f_{11} + 2 c_3 (a_{31} + a_{32}) f f_{12} + f^2 f_{22}(a_{31} + a_{32})^2] h^2 + O(h^3) && (4.49)
\end{aligned}$$

代入 $a_{31}+a_{32}=c_3$ 后，有

$$k_3 = f + c_3(f_1+ff_2)h \tag{4.50}$$

$$+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2f_{11}+2c_3^2ff_{12}+f^2f_{22}c_3^2]h^2+O(h^3) \tag{4.51}$$

$$= f + c_3(f_1+ff_2)h+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})]h^2+O(h^3) \tag{4.52}$$

先考虑 y 的各阶导数，有

$$y' = f(t,y) \tag{4.53}$$

$$y'' = f_1+ff_2 \tag{4.54}$$

$$y''' = f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2) \tag{4.55}$$

代入增量函数 $\phi=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3$，可得

$$\text{常数项：}\phi_0 = (b_1+b_2+b_3)f \tag{4.56}$$

$$\text{一次项系数：}\phi_1 = (b_2c_2+b_3c_3)(f_1+ff_2) \tag{4.57}$$

$$\text{二次项系数：}\phi_2 = \frac{1}{2}\left[2b_3a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+(b_2c_2^2+b_3c_3^2)(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})\right] \tag{4.58}$$

由

$$\phi_0 = y' = f \tag{4.59}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}y'' = \frac{1}{2}(f_1+ff_2) \tag{4.60}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6}y''' = \frac{1}{6}[f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2)] \tag{4.61}$$

可得方程组

$$b_1+b_2+b_3=1 \tag{4.62}$$

$$b_2c_2+b_3c_3=\frac{1}{2} \tag{4.63}$$

$$a_{32}b_3c_2=\frac{1}{6} \tag{4.64}$$

$$b_2c_2^2+b_3c_3^2=\frac{1}{3} \tag{4.65}$$

4.3.3 课本习题

1、显式 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用显式 Euler 方法来求解初值问题, 列出数值解与解析解的误差.

(1)

$$y'=1+\frac{y}{x},\ 1\le x\le 2,\ y(1)=2,\ \text{取 } h=0.25\ (\text{相应解析解为 } y(x)=x\ln x+2x).$$

(2)

$$y'=\cos x+\sin 3x,\ 0\le x\le 1,\ y(0)=1,\ \text{取 } h=0.25\ (\text{相应解析解为 } y(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{4}{3}).$$

证明： 显式 Euler 方法的格式为：

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_n, y_n) \tag{4.66}$$

（1）

$$\begin{aligned}
x_0 = 1, \quad y_0 =& y(1) = 2 && (4.67)\\
x_1 = 1.25, \quad y_1 =& y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0.25 \times \left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2 + 0.25 \times 3 = 2.75 && (4.68)\\
x_2 = 1.5, \quad y_2 =& y_1 + hf(x_1, y_1) = 2.75 + 0.25 \times (1 + \frac{2.75}{1.25}) = 2.75 + 0.25 \times 3.2 = 3.55 && (4.69)\\
x_3 = 1.75, \quad y_3 =& y_2 + hf(x_2, y_2) = 3.55 + 0.25 \times (1 + \frac{3.55}{1.5}) = 3.55 + 0.25 \times 3.3667 = 4.3917 && (4.70)\\
x_4 = 2.0, \quad y_4 =& y_3 + hf(x_3, y_3) = 4.3917 + 0.25 \times (1 + \frac{4.3917}{1.75}) = 4.3917 + 0.25 \times 3.5084 = 5.2698 && (4.71)
\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
x_0 = 0, \quad y_0 =& y(0) = 1 && (4.72)\\
x_1 = 0.25, \quad y_1 =& y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.25 \times (\cos 0 + \sin 0) = 1 + 0.25 \times 1 = 1.25 && (4.73)\\
x_2 = 0.5, \quad y_2 =& y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.25 + 0.25 \times (\cos 0.25 + \sin 0.75) && (4.74)\\
=& 1.25 + 0.25 \times (0.9689 + 0.6816) = 1.25 + 0.25 \times 1.6505 = 1.6626 && (4.75)\\
x_3 = 0.75, \quad y_3 =& y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.6626 + 0.25 \times (\cos 0.5 + \sin 1.5) && (4.76)\\
=& 1.6626 + 0.25 \times (0.8776 + 0.9975) = 1.6626 + 0.25 \times 1.8751 = 2.1304 && (4.77)\\
x_4 = 1.0, \quad y_4 =& y_3 + hf(x_3, y_3) = 2.1304 + 0.25 \times (\cos 0.75 + \sin 2.25) && (4.78)\\
=& 2.1304 + 0.25 \times (0.7317 + 0.7781) = 2.1304 + 0.25 \times 1.5098 = 2.5079 && (4.79)
\end{aligned}$$

2、改进 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用改进的 Euler 方法解第 1 题中的问题, 并列出数值解和相应解析解的误差.

证明：

3、梯形方法迭代格式的收敛性证明

用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = e^x \sin(xy), \ x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

若迭代初值为 $y_{s+1}^{(0)} = y_s + hf(x_s, y_s)$, 试证逐步长 h 使迭代格式

$$y_{s+1}^{(k+1)} = y_s + \frac{h}{2} \left[f(x_s, y_s) + f(x_{s+1}, y_{s+1}^{(k)}) \right], \ s = 0, 1, \cdots$$

是收敛的.

证明： 求解过程为：

1. 微分方程数值解问题：用显欧拉法给出一套迭代初值 $\{y_k^{(0)}\}$
2. 非线性方程数值解问题：在每个点上，用给出的迭代格式进行迭代，求解非线性方程的数值解

因此，要证明第二步非线性方程的迭代格式是收敛的，只要证明它满足压缩映像原理。

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| = \left|\frac{h}{2}\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})\right]\right| \tag{4.80}$$

$$= \frac{h}{2}|f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})| \tag{4.81}$$

该微分方程有唯一数值解，即满足 Lipschitz 条件。对应的 Lipschitz 常数 L 可以将 Δf 与 Δy 联系起来。

$$L = \max_{x\in[0,1],y\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{x\in[0,1],y\in\mathbb{R}} |xe^x\cos(xy)| \le e \tag{4.82}$$

因此迭代过程有

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| \le \frac{h}{2}L|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \tag{4.83}$$

$$\le \frac{he}{2}|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \tag{4.84}$$

压缩映像原理要求

$$\frac{h}{2}e < 1 \tag{4.85}$$

即

$$h < \frac{2}{e} \tag{4.86}$$

4、梯形方法求解特定初值问题的结论证明

用梯形方法解初值问题 $y' = -y,\ y(1) = 1$, 试证明:

(1) 取 $y_0 = y(1) = 1$, 有 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$.

(2) 当 $h \to 0, x = nh$ 不变时,y_n 收敛于初值问题的准确解 e^{-x_n}.

证明： （1）梯形方法迭代格式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \tag{4.87}$$

由于该问题是自治的，不需要求解非线性方程，

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}] \tag{4.88}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n \tag{4.89}$$

初值为 $y_0 = 1$，因此

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n \tag{4.90}$$

（2）代入 $n = x/h$，求极限即可。注意，要用到对数求极限。

5、单步法的局部截断误差与绝对稳定性分析

试求出单步法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的局部截断误差主项及绝对稳定性区间.

证明： 增量函数

$$\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) = f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \tag{4.91}$$

局部截断误差：

$$\begin{aligned} R_{n+1} =& y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) && (4.92) \\ =& y(x+h) - y(x) - hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) && (4.93) \\ =& y(x+h) - y(x) - hf(x+h, y+hf) && (4.94) \end{aligned}$$

求 y 的各阶导数：

$$\begin{aligned} y' &= f && (4.95) \\ y'' &= f_1 + ff_2 && (4.96) \end{aligned}$$

求 ϕ 的各阶导数：

$$\phi = f(x+h, y+hf) = f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2) \tag{4.97}$$

于是有

$$\begin{aligned} R_{n+1} =& y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + O(h^3) - y(x) && (4.98) \\ & - h(f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2)) && (4.99) \\ =& -\frac{1}{2}h^2(f_1 + ff_2) + O(h^3) && (4.100) \\ =& -\frac{h^2}{2}y'' + O(h^3) && (4.101) \end{aligned}$$

故单步法的局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{2}y''$。

绝对稳定性分析：将单步法格式代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \tag{4.102}$$

得到

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + h \cdot \lambda(y_n + h \cdot \lambda y_n) \quad (4.103)\\ =& [(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1]y_n \quad (4.104)\end{aligned}$$

绝对稳定性要求

$$|E(h\lambda)| = |(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1| < 1 \tag{4.105}$$

解得绝对稳定区间为复平面上满足

$$|z^2 + z + 1| < 1 \tag{4.106}$$

的区域。

6、中点公式与 Heun 方法求解初值问题并分析误差

应用中点公式及 Heun 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right)$$

计算初值问题

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1,\ x \in [0, 1], \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

取 $h = 0.2$, 列出数值解及相应的误差 (问题的解析解为 $y(x) = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}e^x$).

证明： 他都不让带计算器了，我认为不会考这玩意

7、多种数值方法求解初值问题的结果对比

应用显式 Euler 方法、改进的 Euler 方法以及四阶经典 Runge-Kutta 方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y + 2x^2 + 2x,\ x \in [0, 0.5], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

这三种方法步长 h 依次取为 $0.25, 0.05, 0.1$, 列出相应计算结果、解析解 $y(x) = e^{-2x} + x^2$ 的结果及相应的误差.

证明： 呃呃

8、中点公式的局部截断误差分析

试求出中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

的局部截断误差主项.

证明： 对 y 逐次求导：

算子：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + f\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
y' =& f && (4.108)\\
y'' =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f_1 + ff_2 && (4.109)\\
y''' =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + f\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)f_2 && (4.110)\\
=& f_{11} + ff_{21} + f(f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.111)\\
=& f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) && (4.113)\\
=& y(x+h) - y(x) - hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}hf\right) && (4.114)\\
=& y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) && (4.115)\\
& - y(x) && (4.116)\\
& - h(f + f_1\frac{h}{2} + f_2\frac{h}{2}f + \frac{f_{11}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2f_{12}\left(\frac{hf}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) + f_{22}\left(\frac{hf}{2}\right)^2}{2} + O(h^3)) && (4.117)\\
=& \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 - \frac{1}{8}(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22})h^3 + O(h^4) && (4.118)\\
=& \frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) && (4.119)
\end{aligned}$$

故局部截断误差主项为

$$\frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 \tag{4.120}$$

9、特定初值问题下数值方法的近似值一致性证明

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1,\ x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

试证明用中点方法、改进的 Euler 方法以及 Heun 方法 (见第 6 题) 求解, 对任意的步长 h 均有相同的近似值.

证明： 只要证明其一阶泰勒展开式相等。

- 中点方法：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf) \tag{4.121}$$

$$\approx y_n + h(f + \frac{1}{2}hf_1 + \frac{1}{2}hff_2) \tag{4.122}$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \tag{4.123}$$

- Heun 方法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right) \tag{4.124}$$

$$\approx y_n + \frac{1}{4}hf + \frac{3}{4}h(f + \frac{2}{3}hf_1 + \frac{2}{3}hff_2) \tag{4.125}$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \tag{4.126}$$

- 改进 Euler 方法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f + f(t + h, y + hf)] \tag{4.127}$$

$$\approx y_n + \frac{h}{2}[f + f + hf_1 + hff_2] \tag{4.128}$$

$$= y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 \tag{4.129}$$

故三者具有相同的近似值。

10、隐式中点方法的绝对稳定性区间分析

试求出隐式中点方法

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

的绝对稳定性区间 (推广 §3.5 的方法).

证明： 试验方程：

$$y' = f(y) = \lambda y \tag{4.130}$$

代入隐式中点方法有

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{\lambda}{2}(y_n + y_{n+1}) \tag{4.131}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2+(h\lambda)}{2-(h\lambda)} y_n \tag{4.132}$$

则绝对稳定性区间为

$$|E(h\lambda)| = \left|\frac{2+(h\lambda)}{2-(h\lambda)}\right| < 1 \tag{4.133}$$

$$\Rightarrow \Re(h\lambda) < 0 \tag{4.134}$$

即绝对稳定性区间为负半实轴。

11、二步显式 Adams 方法的局部截断误差推导

试推导二步显式 Adams 方法与二步隐式 Adams 方法的局部截断误差.

证明： 二步显式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.135}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.136}$$

局部截断误差：

$$R_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.137}$$

$$= y(t+h) - y(t) - h\left(\frac{3}{2}f - \frac{1}{2}y'(t-h)\right) \tag{4.138}$$

$$= y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.139}$$

$$- y(t) \tag{4.140}$$

$$- h[\frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}(y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2) + O(h^3)] \tag{4.141}$$

$$= \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{4}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.142}$$

$$= -\frac{5}{12}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.143}$$

二步隐式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \tag{4.144}$$

$$\Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \tag{4.145}$$

局部截断误差：

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) && (4.146)\\
=& y(t+h) - y(t) - \frac{1}{12}h(5y'(t+h) + 8y'(t) - y'(t-h)) && (4.147)\\
=& y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) && (4.148)\\
& -y(t) && (4.149)\\
& -\frac{1}{12}h[5(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 + \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4)) + 8y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 - \frac{1}{6}y''''h^3 + Oh^(4))] && (4.150)\\
=& -\frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) && (4.151)
\end{aligned}
$$

12、Hamming 公式的局部截断误差分析

试推导 Hamming 公式

$$y_{n+3} = \frac{1}{8}(9y_{n+2} - y_n) + \frac{3}{8}h\left[f(x_{n+3}, y_{n+3}) + 2f(x_{n+2}, y_{n+2}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

的局部截断误差主项.

证明： 活不了了

13、数值积分法推导二步数值方法

试用数值积分方法直接推导二步方法

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\left[5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\right].$$

证明： 记 $x_n = -h$, $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = h$，则可以构造 Lagrange 插值多项式：

$$L_0 = \frac{x^2 - hx}{2h^2} \tag{4.152}$$

$$L_1 = \frac{h^2 - x^2}{h^2} \tag{4.153}$$

$$L_2 = \frac{x^2 + hx}{2h^2} \tag{4.154}$$

三者在 $[0, h]$ 上的积分是

$$\int_0^h L_0 \mathrm{d}x = -\frac{1}{12}h \tag{4.155}$$

$$\int_0^h L_1 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}h = \frac{8}{12}h \tag{4.156}$$

$$\int_0^h L_2 \mathrm{d}x = \frac{5}{12}h \tag{4.157}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} f(x_{n+i}, y_{n+i}) \int_0^h L_i \mathrm{d}x \qquad (4.158)\\
= -\frac{h}{12} f_n + \frac{8}{12} f_{n+1} + \frac{5}{12} f_{n+2} \qquad (4.159)\\
= \frac{h}{12} [5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)] \qquad (4.160)
\end{aligned}
$$

14、Adams 方法求解初值问题并与解析解对比

用四阶的显式 Adams 方法和隐式 Adams 方法解初值问题

$$
\begin{cases}
y' = -y + x + 1,\ x \in [0, 1], \\
y(0) = 2,
\end{cases}
$$

取 $h = 0.2$, 将结果与解析解作比较 (解析解 $y(x) = (x + 1) + \frac{1}{2} e^{-x}$).

证明： 呜咕

15、线性二步法的阶数证明

证明线性二步法

$$
y_{n+2} + (b - 1) y_{n+1} - b y_n = \frac{1}{4} h \left[(b + 3) f(x_{n+2}, y_{n+2}) + (3b + 1) f(x_n, y_n) \right]
$$

当 $b \neq -1$ 时是二阶的, 当 $b = -1$ 时是三阶的.

证明：

16、线性多步法的阶数参数确定

试确定 α 使线性多步法

$$
y_{n+3} + \alpha (y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = \frac{1}{2} (3 + \alpha) h \left[f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right]
$$

是四阶的.

证明： 以 t_{n+1} 为展开点，

$$R_{n+1} = y(t+h) + (b-1)y(t) - by(t-h) - \frac{1}{4}h[(b+3)y'(t+h) + (3b+1)y'(t-h)] \tag{4.161}$$

$$= y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) \tag{4.162}$$

$$+ (b-1)y \tag{4.163}$$

$$- b(y - y'h + \frac{1}{2}y''h^2 - \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5)) \tag{4.164}$$

$$- \frac{h}{4}[(b+3)(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 + \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4)) \tag{4.165}$$

$$+ (3b+1)(y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 - \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4))] \tag{4.166}$$

$$= (1 + b - 1 - b)y + y'h(1 + b - \frac{b+3}{4} - \frac{3b+1}{4}) + y''h^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b - \frac{b+3}{4} + \frac{3b+1}{4}) \tag{4.167}$$

$$+ y'''h^3(\frac{1}{6} + \frac{b}{6} - \frac{b+3}{8} - \frac{3b+1}{8}) + y''''h^4(\frac{1}{24} - \frac{b}{24} - \frac{b+3}{24} - \frac{3b+1}{24}) + O(h^5) \tag{4.168}$$

可见 h^0, h^1, h^2 项恒为 0，要求 h^3 项为 0，有

$$\frac{1}{6} + \frac{b}{6} - \frac{b+3}{8} - \frac{3b+1}{8} = 0 \tag{4.169}$$

解得 $b = -1$，此时 h^4 项也为 0，因此该线性多步法在 $b = -1$ 时是四阶的。

17、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n = \frac{1}{8}h\left[19f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 5f(x_n, y_n)\right]$$

的收敛性.

证明： 要让多步法收敛，只要求其满足相容性。

收敛性要求多步法满足强稳定性和相容性。

强稳定性：只要证特征方程的根全部在单位圆内，且模为 1 的根是单根。

特征方程：

$$\rho(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \tag{4.170}$$

$$\sigma(x) = \frac{19}{8}x^2 + \frac{5}{8} \tag{4.171}$$

解得特征方程的根为

$$x_1 = 1 \tag{4.172}$$

$$x_2 = \frac{-5 - i\sqrt{23}}{8} \tag{4.173}$$

$$x_3 = \frac{-5 + i\sqrt{23}}{8} \tag{4.174}$$

三个根的模分别为

$$|x-1|=1 \tag{4.175}$$

$$|x_2|=|x_3|=\frac{48}{64}<1 \tag{4.176}$$

故多步法是具有强稳定性的。

相容性：

$$\rho'(x)=3x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\neq\sigma(x) \tag{4.177}$$

故多步法不具有相容性，多步法不收敛。

18、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2}+y_{n+1}-2y_n=\frac{1}{4}h\left[f(x_{n+2},y_{n+2})+8f(x_{n+1},y_{n+1})+3f(x_n,y_n)\right]$$

的收敛性

证明：

$$\rho(x)=x^2+x-2 \tag{4.178}$$

$$\sigma(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+\frac{3}{4} \tag{4.179}$$

强稳定性：特征多项式的根为

$$x_1=1 \tag{4.180}$$

$$x_2=-2 \tag{4.181}$$

故不具有强稳定性。多步法不收敛。

19、线性多步法的相容性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{2}[3f(x_{n+1},y_{n+1})-f(x_n,y_n)] \tag{4.182}$$

的相容性。

证明： 在 x_{n+1} 处展开：

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(x+h) - y - \frac{h}{2}[3y' - y'(x-h)] && (4.183)\\
=& y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 && (4.184)\\
& - y && (4.185)\\
& - \frac{h}{2}[3y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2)] && (4.186)\\
=& \frac{5}{12}h^3y''' + O(h^4) && (4.187)
\end{aligned}
$$

故具有二阶相容性。

20、A-稳定性

试证明隐式 Euler 方法是 A-稳定的.

证明： 隐式 Euler 方法：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{4.188}$$

代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \tag{4.189}$$

得到

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} =& y_n + h\lambda y_{n+1} && (4.190)\\
\Rightarrow y_{n+1} =& \frac{1}{1-h\lambda}y_n && (4.191)
\end{aligned}
$$

故绝对稳定性要求

$$\left|\frac{1}{1-\mu}\right| < 1 \tag{4.192}$$

令 $\mu = x + iy$，则有

$$(x-1)^2 + y^2 > 1 \tag{4.193}$$

只要实部 $x < 0$，则上式恒成立，因此隐式 Euler 方法是 A-稳定的。