

Numerical Analysis  
Exam Minimum

Astral Projection

2026 年 1 月 9 日



# 目录

<b>1 数学基础知识</b>	<b>5</b>
1.1 核心概念与理论 . . . . .	5
1.1.1 线性空间 . . . . .	5
1.1.2 度量与赋范空间 . . . . .	6
1.1.3 内积空间 . . . . .	9
1.1.4 正交多项式 . . . . .	10
1.1.5 矩阵空间 . . . . .	13
<b>2 函数插值与重构</b>	<b>15</b>
2.1 通用理论 . . . . .	15
2.1.1 问题模型 . . . . .	15
2.1.2 插值空间 . . . . .	15
2.1.3 误差分析与收敛性 . . . . .	15
2.2 具体插值方法 . . . . .	15
2.2.1 一维多项式插值 . . . . .	15
2.2.2 分段插值 . . . . .	19
2.2.3 Fourier 插值 . . . . .	19
<b>3 函数逼近</b>	<b>21</b>
3.1 通用理论 . . . . .	21
3.1.1 问题模型 . . . . .	21
3.1.2 逼近准则 . . . . .	21
3.1.3 核心定理 . . . . .	21
3.2 具体逼近方法 . . . . .	21
3.2.1 最优平方逼近 . . . . .	21
3.2.2 最优一致逼近 . . . . .	21
<b>4 数值微积分</b>	<b>23</b>
4.1 数值积分 . . . . .	23

4.1.1 通用理论 . . . . .	23
4.1.2 具体求积方法 . . . . .	23
4.2 数值微分 . . . . .	24
4.2.1 基础方法 . . . . .	24
4.2.2 高精度方法 . . . . .	24
<b>5 非线性方程求根</b>	<b>25</b>
5.1 通用理论 . . . . .	25
5.1.1 问题模型 . . . . .	25
5.1.2 迭代法基础 . . . . .	25
5.1.3 收敛性分析 . . . . .	25
5.1.4 收敛效率 . . . . .	25
5.2 具体方法 . . . . .	25
5.2.1 单步法 . . . . .	25
5.2.2 多步法 . . . . .	26
5.2.3 其他方法 . . . . .	26
<b>6 常微分方程初值问题数值解法</b>	<b>27</b>
6.1 通用理论 . . . . .	27
6.1.1 问题模型 . . . . .	27
6.1.2 数值解法核心 . . . . .	27
6.1.3 基本概念 . . . . .	27
6.1.4 收敛性与稳定性判定 . . . . .	27
6.2 具体方法 . . . . .	27
6.2.1 单步法 . . . . .	27
6.2.2 多步法 . . . . .	28
<b>7 线性代数方程组数值解法</b>	<b>29</b>
7.1 直接解法 . . . . .	29
7.1.1 通用理论 . . . . .	29
7.1.2 具体方法 . . . . .	29
7.2 定常线性迭代解法 . . . . .	30
7.2.1 通用理论 . . . . .	30
7.2.2 具体迭代法 . . . . .	30
7.3 非线性迭代解法（基于变分原理） . . . . .	30
7.3.1 通用理论 . . . . .	30
7.3.2 具体方法 . . . . .	30

# Chapter 1

## 数学基础知识

### 1.1 核心概念与理论

#### 1.1.1 线性空间

定义与性质

定义 1.1.1 (线性空间). 设  $S$  是一个集合,  $P$  是一个数域 ( $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ ). 定义两种映射关系:

- 向量加法:  $+ : S \times S \rightarrow S$
- 数乘:  $\cdot : P \times S \rightarrow S$

如果对任意的  $u, v, w \in S$  和  $a, b \in P$ , 满足以下八条公理, 则称  $(S, P)$  为一个线性空间 (向量空间):

1. 加法交换律:  $u + v = v + u$
2. 加法结合律:  $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. 存在加法单位元: 存在零向量  $0 \in S$ , 使得对任意  $v \in S$ , 有  $v + 0 = v$
4. 存在加法逆元: 对任意  $v \in S$ , 存在  $-v \in S$ , 使得  $v + (-v) = 0$
5. 数乘结合律:  $a(bv) = (ab)v$
6. 数乘分配律 1:  $a(u + v) = au + av$
7. 数乘分配律 2:  $(a + b)v = av + bv$
8. 数乘单位元:  $1v = v$

则称  $(S, P)$  构成一个线性空间。

此外, 如果对于给定空间的运算法则和数域是不言自明的, 则通常简写为  $S$  是一个线性空间。如我们说  $\mathbb{R}^n$  是一个线性空间, 通常指  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  是一个线性空间或  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  是一个线性空间, 具体取决于数域的选择。

## 线性无关与相关

**待填写：(定义) 线性无关与线性相关**

### 基、框架与维数

**待填写：(定义) 基、框架与维数**

性质：

- 空间的维度是一个内蕴量，与基的选择无关
- 多项式空间  $P_N$  中， $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$  构成其一组基，维数为  $\dim P_N = N + 1$
- 连续函数空间  $C[a, b]$  中， $\forall N$ ， $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$  是线性无关的，但不能构成其基，因其维数为无穷大

## 1.1.2 度量与赋范空间

### 距离空间

**定义 1.1.2** (距离空间). 设  $M$  是一个集合， $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  是一个映射，如果对任意的  $x, y, z \in M$ ，满足以下三条公理，则称  $(M, d)$  为一个距离空间：

1. 非负性与分离性： $d(x, y) \geq 0$ ，且当且仅当  $x = y$  时， $d(x, y) = 0$
2. 对称性： $d(x, y) = d(y, x)$
3. 三角不等式： $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则称  $(M, d)$  构成一个距离空间。

### 距离空间的完备性

**待填写：(定义) 完备性**

$\mathbb{R}$  是完备的，且任意有限维赋范空间都是完备的。

**构造方法：距离空间的完备化** 设  $(M, d)$  是一个距离空间，可以按照如下过程构造其完备化空间：

1. 构造对偶的柯西列空间

$$\tilde{M} = \{(x_n) \mid x_n \in M, (x_n) \text{ 为柯西列}\} \quad (1.1)$$

2. 在柯西列空间  $\tilde{M}$  中定义等价关系

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad (1.2)$$

即这两个柯西列按照角标顺序，交叉放在一起，还是柯西列。

3. 构造商空间:

$$\hat{M} = \tilde{M} / \sim = \{[\tilde{x}]\} \quad (1.3)$$

式中,  $[\tilde{x}]$  表示柯西列  $\tilde{x}$  的等价类, 即  $[\tilde{x}]$  是一个集合, 集合中的所有元素在等价关系  $\sim$  下都是等价的。

4. 在商空间  $\hat{M}$  中定义距离

$$\hat{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad (1.4)$$

5. 则  $(\hat{M}, \hat{d})$  即为距离空间  $(M, d)$  的完备化空间。

**嵌入映射:** 可以在原空间  $M$  与完备化空间  $\hat{M}$  之间定义一个单射  $i$ :

$$i : M \rightarrow \hat{M}, \quad i(x) = [(x, x, x, \dots)] \quad (1.5)$$

该映射将原空间中的每个点  $x$  映射为完备化空间中由常值序列  $(x, x, x, \dots)$  所构成的等价类, 且映射前后任意两元素的距离不变

### 赋范空间与 Banach 空间

**待填写: (定义) 赋范空间**

完备的赋范空间称为 Banach 空间, 或者 B 空间。

### 等价范数

**定义 1.1.3** (范数的等价性). 设  $V$  是一个线性空间,  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $V$  上的两个范数, 如果存在正常数  $c$  和  $C$ , 使得对任意  $v \in V$ , 都有

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1 \quad (1.6)$$

则称这两个范数是等价的。

若存在正数  $C$ , 使得对任意  $v \in V$ , 都有

$$\|v\|_2 \leq C\|v\|_1 \quad (1.7)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  强于  $\|\cdot\|_2$ 。

性质:

- 在有限维线性空间上, 任意两个范数都是等价的
- 在无限维线性空间上, 范数不一定是等价的
- 若一个点列在较强的范数下是 Cauchy 列, 则在较弱的范数下也是 Cauchy 列; 反之不必然。

### 常用的范数

$\mathbb{R}^n$  上的范数 记  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 则常用的范数有:

- 无穷范数: 所有元素的最大值

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (1.8)$$

- 1-范数: 所有元素的绝对值之和

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1.9)$$

- 2-范数: 欧几里得范数, 即所有元素的平方和的平方根

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

### $C[a, b]$ (有界闭区间上连续函数空间) 上的范数

- 无穷范数: 函数在区间上的最大绝对值

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (1.11)$$

- 1-范数: 函数在区间上的绝对值积分

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.12)$$

- 2-范数: 函数在区间上的平方积分的平方根

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

$C[a, b]$  上三个范数的性质:

- 任意两个范数不等价
- 无穷范数强于 2 范数, 2 范数强于 1 范数
- 只有无穷范数对应的赋范空间是完备的
- 1-范数对应的完备化空间为  $L^1(a, b)$ , 2-范数对应的完备化空间为  $L^2(a, b)$  <sup>1</sup>

<sup>1</sup>  $L^1(a, b)$  为  $(a, b)$  上的可积函数空间,  $L^2(a, b)$  为  $(a, b)$  上的平方可积函数空间。

### 1.1.3 内积空间

#### 内积定义与性质

**定义 1.1.4 (内积).** 设  $(S, P)$  是一个线性空间, 如果对任意的  $u, v, w \in S$  和  $a, b \in P$ , 存在一个映射  $S \times S \rightarrow P$ , 满足

1. 共轭对称性:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2. 线性性:  $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
3. 正定性:  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , 且当且仅当  $v = 0$  时,  $\langle v, v \rangle = 0$

则称该映射为内积,  $(S, P)$  构成一个内积空间。

若  $\langle x, y \rangle = 0$ , 则称  $x$  与  $y$  正交。

几个常用空间上的内积:

- $\mathbb{R}^n$  或  $\mathbb{C}^n$  上的内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (1.14)$$

- $C[a, b]$  (有界闭区间上连续函数空间) 上的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.15)$$

- $C[a, b]$  上的带权内积:

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.16)$$

其中, 权函数  $\rho(x)$  需要满足条件:

- $\rho(x) \in C[a, b]$
- $\rho(x)$  几乎处处为正
- $\int_a^b \rho(x) dx < +\infty$
- $\forall q(x) \in P_n$ ,  $\int_a^b \rho(x) |q(x)| dx < \infty$

带权内积所研究的空间称为加权内积空间:

$$L_\rho^2(a, b) = \{f(x) \mid \int_a^b \rho(x) |f(x)|^2 dx < +\infty\} \quad (1.17)$$

常用的权函数有:

$$\rho(x) = 1, \quad [a, b] = [-1, 1] \quad (1.18)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad [a, b] = [-1, 1] \quad (1.19)$$

$$(1.20)$$

## 正交性与 Schmidt 正交化

待填写: (定义) 正交性

待填写: (方法) 用 Grammer 矩阵判断内积空间中向量组的线性无关性

待填写: (方法) Schmidt 正交化过程: 从一个线性无关向量组构造一个正交向量组: 让每个向量减去与已有空间垂直的分量

用 Schmidt 正交化过程得到的正交向量组具有以下性质:

$$\Phi_{k-1} \subset \Phi_k \quad (1.21)$$

$$y_k \perp \Phi_{k-1} \quad (1.22)$$

## 由内积诱导的范数

定义 1.1.5 (诱导范数). 设  $(S, P)$  是一个内积空间, 则可以定义范数  $\|\cdot\|$  如下:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (1.23)$$

则称该范数为由内积诱导的范数。

- 任何内积均能诱导对应的范数
- 当且仅当范数满足平行四边形法则时

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad (1.24)$$

范数可以诱导内积:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \quad (1.25)$$

## 1.1.4 正交多项式

定义 1.1.6 (正交多项式). 设  $\{\phi_n(x)\}$  是定义在区间  $[a, b]$  上的一组多项式, 且每个多项式的次数为  $n$ , 如果对任意  $m \neq n$ , 都有

$$\int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (1.26)$$

则称  $\{\phi_n(x)\}$  为区间  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  的正交多项式。

正交多项式的性质:

- $\deg \phi_i = i$
- $(\phi_i, \phi_j) = 0, \forall i \neq j$
- $\phi_n$  为实系数多项式
- $\phi_n$  在开区间  $(a, b)$  内恰有  $n$  个实单根

待填写: (证明)  $\phi_n$  在开区间  $(a, b)$  内恰有  $n$  个实单根的证明。证法: 分别证明实根、单根、全在  $(a, b)$  内。3 个命题均可用反证法。

**$\rho = 1$ : Legendre 多项式**

产生方法:

- 权函数  $\rho(x) = 1$
- 区间  $[-1, 1]$

表达式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (1.27)$$

性质:

- 首项系数:

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad (1.28)$$

- 正交归一化:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (1.29)$$

- 三项递推关系:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (1.30)$$

- 奇偶性:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (1.31)$$

- 导数关系:

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \frac{n}{x^2 - 1} [xP_n(x) - P_{n-1}(x)] \quad (1.32)$$

- 前五项:

$$P_0(x) = 1 \quad (1.33)$$

$$P_1(x) = x \quad (1.34)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (1.35)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (1.36)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (1.37)$$

## Chebyshev 多项式

产生方法:

- 权函数  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 区间  $[-1, 1]$

表达式:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (1.38)$$

性质:

- 首项系数:  $2^{n-1}$
- 正交归一化:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (1.39)$$

- 三项递推关系:

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \quad (1.40)$$

- 奇偶性:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \quad (1.41)$$

- 前五项:

$$T_0(x) = 1 \quad (1.42)$$

$$T_1(x) = x \quad (1.43)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (1.44)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (1.45)$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (1.46)$$

- 零点:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.47)$$

- 极值点:

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.48)$$

- 简单表达式: 当  $|x| \geq 1$  时,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right] \quad (1.49)$$

### 1.1.5 矩阵空间

待填写：(性质) 矩阵空间的基本性质：线性空间、乘法运算、代数性质

#### 矩阵范数

**定义 1.1.7** (矩阵范数). 矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的范数  $\|\cdot\|$  称为矩阵范数，如果对任意的  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $a \in \mathbb{C}$ ，满足以下性质：

1. 非负性与分离性： $\|A\| \geq 0$ , 且当且仅当  $A = 0$  时,  $\|A\| = 0$
2. 齐次性： $\|aA\| = |a|\|A\|$
3. 三角不等式： $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. 次乘性： $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Note: 矩阵范数是定义在矩阵代数而非矩阵空间上的，必须与矩阵乘法相容。

**定义 1.1.8** (矩阵范数与向量范数的相容性). 设  $\|\cdot\|_v$  是向量空间  $\mathbb{C}^n$  上的一个范数,  $\|\cdot\|_m$  是矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的一个范数, 如果对任意的  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $x \in \mathbb{C}^n$ , 都有

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|x\|_v \quad (1.50)$$

则称矩阵范数  $\|\cdot\|_m$  与向量范数  $\|\cdot\|_v$  是相容的。

矩阵范数的两种常见构造方法：

- 直接构造：Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.51)$$

Frobenius 范数的性质：

- Frobenius 范数与向量 2-范数相容
- $\|I\|_F = \sqrt{n}$
- 向量范数诱导：算子范数

**定义 1.1.9** (算子范数). 设  $\|\cdot\|_v$  是向量空间  $\mathbb{C}^n$  上的一个范数，则可以定义矩阵空间  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上的算子范数  $\|\cdot\|_m$  如下：

$$\|A\|_m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v \quad (1.52)$$

则称该范数为由向量范数  $\|\cdot\|_v$  诱导的算子范数。

常用的几个算子范数：

- 无穷范数：行和最大值

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (1.53)$$

- 1-范数：列和最大值

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (1.54)$$

- 2-范数（谱范数）： $A$  的最大奇异值，即  $A^H A$  的最大特征值的平方根

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} \quad (1.55)$$

## 谱半径

**定义 1.1.10** (谱半径). 谱半径定义为矩阵所有特征值模的最大值，即

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (1.56)$$

谱半径和矩阵范数的关系：

- 矩阵范数下界：

**定理 1.1.11.** 对任意  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 有

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (1.57)$$

- 无穷接近范数的存在性：

**定理 1.1.12.** 对任意  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 存在一个矩阵范数  $\|\cdot\|$ , 使得

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon \quad (1.58)$$

其中,  $\varepsilon$  为任意给定的正常数。

## 可逆矩阵相关定理

**定理 1.1.13** (扰动引理 I). 给定  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 设  $\|B\| < 1$ , 则  $I + B$  可逆, 且

$$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \quad (1.59)$$

**定理 1.1.14** (扰动引理 II). 设  $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 且  $A$  可逆。若

$$\|C - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad (1.60)$$

则  $C$  也可逆, 且

$$\|C^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|C - A\|} \quad (1.61)$$

**定理 1.1.15** (扰动定理 II). 设  $A, \delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 且  $A$  可逆。若  $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ , 则  $A + \delta A$  也可逆, 且

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} \quad (1.62)$$

# Chapter 2

## 函数插值与重构

### 2.1 通用理论

#### 2.1.1 问题模型

待填写：(数学描述) 采样泛函视角下的插值问题数学描述

#### 2.1.2 插值空间

常用的插值空间：多项式函数空间、样条函数空间、三角多项式函数空间

#### 2.1.3 误差分析与收敛性

### 2.2 具体插值方法

#### 2.2.1 一维多项式插值

问题：给定插值数据（采样数据） $(x_\alpha, f_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , 确定多项式  $P(x) \in P_n$ ,  $n = |I| - 1$ , 满足插值条件

$$x_\alpha(P) = P(x_\alpha) = f_\alpha, \quad \alpha \in I \quad (2.1)$$

定理 2.2.1 (多项式插值基本定理). 给定  $n + 1$  个插值条件

$$(x_\alpha, f_\alpha), \quad \alpha \in I, \quad x_\alpha \neq x_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta \quad (2.2)$$

则存在唯一的插值多项式  $P \in P_n$  满足插值条件。

Note: 若  $x_\alpha$  取之于复平面, 上述定理依然成立; 且上述定理与采样节点的排序无关。

## Lagrange 插值

### 基函数构造

**定义 2.2.2** (Lagrange 插值基函数). 定义

$$L_\alpha(x) = L_{\alpha;I}(x) = \prod_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I \quad (2.3)$$

称为插值基函数。

若给定 3 个插值条件  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ , 则对应的插值基函数为

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (2.4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad (2.5)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (2.6)$$

插值基函数天然满足性质:

$$x_\beta(L_\alpha) = L_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

**插值公式** 在计算出插值基函数的基础上, 插值多项式可写为:

$$P(x) = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha L_\alpha(x) \quad (2.8)$$

### 余项

### 均差定义

**定义 2.2.3** (均差的递推公式). 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义, 且给定插值节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , 则定义如下均差:

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (2.9)$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (2.10)$$

其中,  $i = 0, 1, \dots, n-k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。

均差的性质:

- $f_{i_0 i_1 \dots i_k}$  与节点  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  的顺序无关
- 设  $f$  是  $N$  次多项式, 若  $k > N$ , 则对任意节点  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ , 都有

$$f_{i_0 i_1 \dots i_k} = 0 \quad (2.11)$$

## 插值公式

$$\begin{aligned} P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) &= f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + f_{i_0 i_1 i_2}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \dots \\ &\quad + f_{i_0 i_1 \dots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-1}}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Newton 插值多项式的列表计算** 以给定 4 个节点时  $x_0, x_1, x_2, x_3$  的插值问题为例。可以按照如下表格从左向右逐列填写计算均差：

$x_i$	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$		
$x_1$	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dots$
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		

之后用插值表最上方一行的均差值逐个组装 Newton 插值多项式。

## Hermite 插值

**Hermite 插值问题** 给定  $\xi_i, f_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n_i - 1$ , 其中  $\xi_i$  两两不同, 且

$$\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m \quad (2.13)$$

希望确定一个次数为  $n$  的多项式函数

$$P_n(x), \quad n = \sum_{i=0}^m n_i - 1 \quad (2.14)$$

满足插值条件

$$P^{(k)}(\xi_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1 \quad (2.15)$$

## 拓展均差

**定义 2.2.4 (拓展均差).** 设  $f \in C^n(I(x_0, x_1, \dots, x_n))$ , 定义

$$f[x_0, x_1, x_n] = \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$

$$f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + t_{n-1}[x_{n-1} - x_{n-2}] + \dots + t_1[x_1 - x_0] + t_0 x_0)$$

式中,  $n \geq 1$  且  $t_0 = 1$ 。

Note: 这一积分实际上表示了一个单位标准  $n$ -维标准型上的积分, 或者说积分区域始终是一个插值节点构造的凸组合。这隐含了一个要求是  $1 = t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq 0$ 。

拓展均差的性质:

- 若  $x_i$  两两不一, 则拓展均差等价于普通均差

$$f[x_0, x_1, x_n] = f_{x_0, x_1, \dots, x_n} \quad (2.16)$$

且具有相同的递推关系:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (2.17)$$

- 极限性质: 若  $f$  足够光滑, 则

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} f[x_0 + \epsilon_0, x_1 + \epsilon_1, \dots, x_n + \epsilon_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (2.18)$$

- 导数与重节点: 可从极限性质导出

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x] \quad (2.19)$$

- 介值定理: 若  $f \in C^n[a, b]$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , 则存在  $\xi \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , 使得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (2.20)$$

特别地,

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n+1 \uparrow}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \quad (2.21)$$

**Hermite 插值多项式** Hermite 插值多项式可表示为

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (2.22)$$

其中,  $x_0, \dots, x_n$  为下面序列的任意置换:

$$\underbrace{\xi_0, \xi_0, \dots, \xi_0}_{n_0 \uparrow}, \underbrace{\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_1}_{n_1 \uparrow}, \dots, \underbrace{\xi_m, \xi_m, \dots, \xi_m}_{n_m \uparrow} \quad (2.23)$$

**列表法求 Hermite 插值多项式** 假设给定 2 个节点  $\xi_0, \xi_1$ , 对应的插值条件分别为  $f_0, f'_0, f''_0, f_1$ , 则可按下表计算均差:

Hermite 插值均差表 (节点序列:  $\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1$ ):

节点	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$			
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f'_0$		
$\xi_0$	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f'_0$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0] = \frac{f''_0}{2}$	
$\xi_1$	$f[\xi_1] = f_1$	$f[\xi_0, \xi_1] = \frac{f_1 - f_0}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$

对应的插值多项式为:

$$\begin{aligned} P(x) &= f[\xi_0] + f[\xi_0, \xi_0](x - \xi_0) + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0](x - \xi_0)^2 + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1](x - \xi_0)^3 \\ &= f_0 + f'_0(x - \xi_0) + \frac{f''_0}{2}(x - \xi_0)^2 \\ &\quad + \frac{2(f_1 - f_0 - f'_0(\xi_1 - \xi_0)) - f''_0(\xi_1 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}(x - \xi_0)^3 \end{aligned}$$

### Lagrange 插值和 Hermite 插值的收敛分析

**插值余项** 若  $f$  在区间  $[a, b]$  上具有  $n+1$  阶连续导数, 则对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in I(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ , 使得

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{01\dots n}(x) \quad (2.24)$$

## 2.2.2 分段插值

分段线性插值

分段三次 Hermite 插值

## 2.2.3 Fourier 插值

三角多项式插值

离散 Fourier 变换关联



# Chapter 3

## 函数逼近

### 3.1 通用理论

3.1.1 问题模型

3.1.2 逼近准则

最小二乘准则 ( $L_2$  范数)

一致逼近准则 ( $L_\infty$  范数)

3.1.3 核心定理

### 3.2 具体逼近方法

3.2.1 最优平方逼近

线性最小二乘

加权平方逼近

正交多项式逼近

3.2.2 最优一致逼近



# Chapter 4

## 数值微积分

### 4.1 数值积分

#### 4.1.1 通用理论

积分问题模型

求积公式核心

代数精度

稳定性

#### 4.1.2 具体求积方法

Newton-Cotes 公式

梯形公式

Simpson 公式

3/8 - 规则

复合求积方法

复合梯形公式

复合 Simpson 公式

加速方法

Romberg 方法

Gauss 型求积

Gauss 点与权系数

Gauss-Legendre 求积

Gauss-Chebyshev 求积

特殊积分处理

奇异积分

振荡积分

高维积分

蒙特卡洛方法

## 4.2 数值微分

### 4.2.1 基础方法

向前差商

向后差商

中心差商

### 4.2.2 高精度方法

插值型数值微分

Richardson 外推加速

# Chapter 5

## 非线性方程求根

### 5.1 通用理论

5.1.1 问题模型

5.1.2 迭代法基础

5.1.3 收敛性分析

收敛阶定义

整体收敛性（压缩映像原理）

局部收敛性判定

5.1.4 收敛效率

### 5.2 具体方法

5.2.1 单步法

牛顿法

迭代公式

收敛性分析

重根处理

不动点迭代

5.2.2 多步法

割线法

5.2.3 其他方法

Steffensen 方法

Broyden 秩 1 方法

# Chapter 6

## 常微分方程初值问题数值解法

### 6.1 通用理论

6.1.1 问题模型

6.1.2 数值解法核心

6.1.3 基本概念

局部截断误差与整体截断误差

收敛性与收敛阶

稳定性与相容性

6.1.4 收敛性与稳定性判定

### 6.2 具体方法

6.2.1 单步法

Euler 方法

向前欧拉

向后欧拉

改进欧拉方法

龙格 - 库塔 (RK) 方法

2 阶 RK 方法

4 阶 RK 方法

### 6.2.2 多步法

Adams 方法

显式 Adams 公式

隐式 Adams 公式

Nyström 方法

Milne-Simpson 方法

# Chapter 7

## 线性代数方程组数值解法

### 7.1 直接解法

#### 7.1.1 通用理论

问题模型

残差与误差分析

数值稳定性与条件数

#### 7.1.2 具体方法

Gauss 消元法

基本步骤

主元素选取

LU 分解

特殊方程组解法

Thomas 算法（三对角方程组）

Toeplitz 矩阵快速解法

## 7.2 定常线性迭代解法

### 7.2.1 通用理论

迭代格式构造

收敛性判定

收敛速度

### 7.2.2 具体迭代法

Jacobi 迭代

Gauss-Seidel 迭代

SOR 迭代

松弛因子选取

最优松弛因子

## 7.3 非线性迭代解法（基于变分原理）

### 7.3.1 通用理论

Ritz 变分原理

迭代核心思想

### 7.3.2 具体方法

最速下降法

共轭梯度法 (CG)

迭代公式

收敛性分析

预条件技术

预条件矩阵选取

预条件 CG 迭代格式