Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 9 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 重要补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个两两不同的节点，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.1}$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明：

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题：定义

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.2}$$

则进行分片线性插值时，

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h \to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时，

- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^2 \|f''\|_\infty$

- 若 $f \in C^3[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

证明：

Note：分片线性插值只要做泰勒展开即可；分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出，低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析