Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 13 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小。*

证明：

提示：考虑 $f = \tilde{P}_n + a_{n-1}\tilde{P}_{n-1} + ... + a_1\tilde{P}_1 + a_0\tilde{P}_0$ 和误差函数 $\|f-0\|^2$

1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 1.2.2. *在所有首项为 2^{n-1} 的 n 次多项式中，Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的一致误差最小。*

证明：

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个两两不同的节点，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.1}$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明：

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题：定义

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.2}$$

则进行分片线性插值时，

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h \to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h}{2}\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时，

- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^2\|f''\|_\infty$

- 若 $f\in C^3[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty\le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f\in C^4[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty\le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

证明：

Note：分片线性插值只要做泰勒展开即可；分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出，低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析

2.2 函数逼近

2.3 补充内容

2.3.1 Schauder 基

2.4 重要证明

2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

定理 2.4.1. *设 $f\in C[a,b]$，Φ 为 $C[a,b]$ 的有限维子空间，则存在唯一的 $\phi^*\in\Phi$，使得*

$$\|f-\phi^*\|=\min_{\phi\in\Phi}\|f-\phi\| \tag{2.3}$$

证明：

2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到 $(C[a,b],\|\cdot\|_2)$ 的完备化空间 $(\overline{C[a,b]},\|\cdot\|_2)$ 中的一个元素。若 $\|\cdot\|_2$ 为权系数 ρ 的内积诱导范数，则 $(\overline{C[a,b]},\|\cdot\|_2)$ 即为 $L^2_\rho(a,b)$。

2、设 $f\in C[a,b]$，$\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开

$$f\sim\sum_{m=0}^\infty a_m\phi_m(x),\quad a_m=(f,\phi_m) \tag{2.4}$$

在 $C[a,b]$ 中一致收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{m=0}^n a_m\phi_m(x)\right\|_\infty=0 \tag{2.5}$$

证明：

提示：1 的证明用到 $\sum_{i=0}^\infty|a_i|^2<\infty$，2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

定理 2.4.2 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则在 n 次多项式空间 P_n 中，存在一个多项式 $p_n^* \in P_n$，使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \tag{2.6}$$

即 P_n 中关于 $f \in C[a,b]$ 的最小偏差是可以达到的。

证明：

提示：利用偏差泛函的性质

2.4.4 Chebyshev 交错点组定理

定理 2.4.3 (Chebyshev 交错点组定理). 设 $f \in C[a,b]$，$p_n^* \in P_n$ 为 f 在 P_n 中的最佳一致逼近多项式，则存在 $a \le x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \le b$，使得

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \|f - p_n^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, ..., n+1 \tag{2.7}$$

即误差函数在 $n+2$ 个点上达到最大偏差且符号交替。

证明：

提示：分别证明必要性和充分性，且均用到反证法。

2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理

定理 2.4.4 (最佳一致逼近唯一性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则 f 在 n 次多项式空间 P_n 中的最佳一致逼近多项式 p_n^* 是唯一的。

证明：

提示：反证法。

2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记 $\Phi = \mathrm{span}(1, x^2)$，求 $x \in [0,1]$ 上在 Φ 中的最佳平方逼近。

Chapter 3

数值微积分

3.1 补充内容

3.2 重要证明

3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.3 重要习题与例题

Chapter 4

常微分方程数值解

4.1 补充内容

4.2 重要证明

4.2.1 y 的各阶导数

当 $y' = f(t, y)$ 时，求 y 的各阶导数。

符号规范：记 $\partial f/\partial x_i = f_i$，即 f_i 是 f 对第 i 个变量的偏导数。在当前情境中，有

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.1}$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{4.2}$$

求解：

题目条件为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y) \tag{4.3}$$

即将对 y 的求导转化为了对 f 的全微分。于是有算符关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.4}$$

因此

$$
\begin{aligned}
y' &= f && (4.5)\\
y'' &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} && (4.6)\\
&= f_1 + ff_2 && (4.7)\\
y''' &= \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + f\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + f_2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} && (4.8)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t} + f\frac{\partial f_1}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + f\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + f_2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) && (4.9)\\
&= f_1 1 + ff_{12} + f(f_{21} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.10)\\
&= f_{11} + 2ff_{12} + f^2 f_{22} + f_2(f_1 + ff_2) && (4.11)
\end{aligned}
$$

4.2.2 一步误差与局部截断误差的关系

$$
(1 - h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \le |R_{n+1}| \le (1 + h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \tag{4.12}
$$

4.3 重要习题与例题

4.3.1 求相容阶和主局部截断误差：泰勒级数展开法

欧拉法

梯形方法

4.3.2 显式 RK 的推导

基本思路：

局部截断误差为

$$
\begin{aligned}
R &= y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y, f) && (4.13)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(t) h^k && (4.14)\\
&\quad - y(t) && (4.15)\\
&\quad - h \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k h^k && (4.16)
\end{aligned}
$$

要令 RK 具有 n 阶相容性，即要令

$$
R = p_{n+1}(t) h^{n+1} + O(h^{n+2}) \tag{4.17}
$$

需要消去 R 中低于 h^{n+1} 的各阶项，即可得到一系列关于 a_{ij}, b_i, c_i 的方程。

计算方法即为：

- 在 t 点对 $t(t+h)$ 作泰勒展开
- 在 (t_n, y_n) 对 $\phi(t_n, y_n, f)$ 作多元泰勒展开
- 令各阶系数相等，即

$$\phi_k = \frac{1}{(k+1)!} y^{(k+1)} \tag{4.18}$$

显式二阶推导

显式 RK 参数矩阵：

$$\begin{array}{c|cc} c_1 = 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 = 1 \end{array} \tag{4.19}$$

RK 斜率：

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{4.20}$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(t_n, y_n)) \tag{4.21}$$

增量函数：

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2 \tag{4.22}$$

对 k_1, k_2 作泰勒展开：

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f \tag{4.23}$$

$$k_2 = f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot c_2 h f + O(h^2) \tag{4.24}$$

则 $\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$ 的展开可表示为

$$\text{常数项：} \phi_0 = (b_1 + b_2) f \tag{4.25}$$

$$\text{一次项系数：} \phi_1 = b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 \tag{4.26}$$

对 y 进行泰勒展开：

$$y' = f(t, y) \tag{4.27}$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_1 + f f_2 \tag{4.28}$$

因此需要满足关系

$$(b_1 + b_2) f = y' = f \tag{4.29}$$

$$b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 = \frac{1}{2} y'' = \frac{1}{2}(f_1 + f f_2) \tag{4.30}$$

即

$$b_1 + b_2 = 1 \tag{4.31}$$
$$b_2 c_2 = \frac{1}{2} \tag{4.32}$$

显式三阶推导

RK 参数矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 = 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 + & b_3 = 1 \end{array} \tag{4.33}$$

RK 斜率：

$$\begin{aligned}
k_1 =& f(t_n, y_n) = f && (4.34)\\
k_2 =& f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) && (4.35)\\
=& f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot a_{21} h f && (4.36)\\
&+ \frac{f_{11}(c_2 h)^2 + 2 f_{12}(c_2 h)(a_{21} h k_1) + f_{22}(a_{21} h k_1)^2}{2} + O(h^3) && (4.37)\\
=& f + c_2 f_1 h + a_{21} f f_2 h && (4.38)\\
&+ \frac{c_2^2 f_{11} + 2 a_{21} c_2 f f_{12} + a_{21}^2 f^2 f_{22}}{2} h^2 + O(h^3) && (4.39)\\
=& f + c_2 (f_1 + f f_2) h + \frac{c_2^2}{2}(f_{11} + 2 f f_{12} + f^2 f_{22}) h^2 + O(h^3) && (4.40)\\
k_3 =& f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) && (4.41)\\
=& f + f_1 c_3 h + f_2 h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) && (4.42)\\
&+ \frac{f_{11} c_3^2 h^2 + 2 f_{12} \cdot c_3 h \cdot h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) + f_{22}(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)^2 h^2}{2} + O(h^3) && (4.43)\\
& && (4.44)
\end{aligned}$$

此时，向 k_3 中代入 k_1 和 k_2 时，不一定要带入到 h^2 项，只要令所有的 h^2 项系数正确即可。于是有

$$\begin{aligned}
k_3 =& f + f_1 c_3 h + f_2 h [a_{31} f + a_{32}(f + c_2(f_1 + f f_2) h)] && (4.45)\\
&+ \frac{h^2}{2}[c_3^2 f_{11} + 2 c_3 f_{12}(a_{31} f + a_{32} f) + f_{22}(a_{31} f + a_{32} f)^2] + O(h^3) && (4.46)\\
=& f + [c_3 f_1 + (a_{31} + a_{32}) f f_2] h && (4.47)\\
&+ \frac{1}{2}[2 a_{32} c_2 f_2 (f_1 + f f_2) + c_3^2 f_{11} + 2 c_3 (a_{31} + a_{32}) f f_{12} + f^2 f_{22}(a_{31} + a_{32})^2] h^2 + O(h^3) && (4.48)
\end{aligned}$$

代入 $a_{31}+a_{32}=c_3$ 后，有

$$\begin{aligned} k_3 =& f+c_3(f_1+ff_2)h \\ &+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2f_{11}+2c_3^2ff_{12}+f^2f_{22}c_3^2]h^2+O(h^3) \\ =& f+c_3(f_1+ff_2)h+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})]h^2+O(h^3) \end{aligned} \tag{4.49–4.51}$$

先考虑 y 的各阶导数，有

$$y' = f(t,y) \tag{4.52}$$

$$y'' = f_1+ff_2 \tag{4.53}$$

$$y''' = f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2) \tag{4.54}$$

代入增量函数 $\phi=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3$，可得

$$\text{常数项：}\phi_0 = (b_1+b_2+b_3)f \tag{4.55}$$

$$\text{一次项系数：}\phi_1 = (b_2c_2+b_3c_3)(f_1+ff_2) \tag{4.56}$$

$$\text{二次项系数：}\phi_2 = \frac{1}{2}\left[2b_3a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+(b_2c_2^2+b_3c_3^2)(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})\right] \tag{4.57}$$

由

$$\phi_0 = y' = f \tag{4.58}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}y'' = \frac{1}{2}(f_1+ff_2) \tag{4.59}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6}y''' = \frac{1}{6}[f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2)] \tag{4.60}$$

可得方程组

$$b_1+b_2+b_3=1 \tag{4.61}$$

$$b_2c_2+b_3c_3=\frac{1}{2} \tag{4.62}$$

$$a_{32}b_3c_2=\frac{1}{6} \tag{4.63}$$

$$b_2c_2^2+b_3c_3^2=\frac{1}{3} \tag{4.64}$$