Numerical Analysis
Exam Minimum

Astral Projection

2026 年 1 月 11 日

目录

一　数学基础知识

（一）　核心概念与理论

1．线性空间

(1) 定义与性质

定义 (线性空间)**.** 设 S 是一个集合，P 是一个数域 ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$). 定义两种映射关系：

- 向量加法：$+: S \times S \to S$
- 数乘：$\cdot: P \times S \to S$

如果对任意的 $u, v, w \in S$ 和 $a, b \in P$，满足以下八条公理，则称 (S,P) 为一个线性空间（向量空间）：

1. 加法交换律：$u + v = v + u$
2. 加法结合律：$(u + v) + w = u + (v + w)$
3. 存在加法单位元：存在零向量 $0 \in S$，使得对任意 $v \in S$，有 $v + 0 = v$
4. 存在加法逆元：对任意 $v \in S$，存在 $-v \in S$，使得 $v + (-v) = 0$
5. 数乘结合律：$a(bv) = (ab)v$
6. 数乘分配律 1：$a(u + v) = au + av$
7. 数乘分配律 2：$(a + b)v = av + bv$
8. 数乘单位元：$1v = v$

则称 (S,P) 构成一个线性空间。

此外，如果对于给定空间的运算法则和数域是不言自明的，则通常简写为 S 是一个线性空间。如我们说 $\mathbb{R}^n$ 是一个线性空间，通常指 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 是一个线性空间或 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 是一个线性空间，具体取决于数域的选择。

(2) 线性无关与相关

待填写：*(定义)* 线性无关与线性相关

(3) 基、框架与维数

待填写：*(定义)* 基、框架与维数
性质：

- 空间的维度是一个内蕴量，与基的选择无关
- 多项式空间 P_N 中，$\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ 构成其一组基，维数为 $\dim P_N = N + 1$
- 连续函数空间 $C[a, b]$ 中，$\forall N$，$\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ 是线性无关的，但不能构成其基，因其维数为无穷大

2. 度量与赋范空间

(1) 距离空间

定义 (距离空间)**.** *设 M 是一个集合，$d : M \times M \to \mathbb{R}$ 是一个映射，如果对任意的 $x, y, z \in M$，满足以下三条公理，则称 (M,d) 为一个距离空间：*

1. *非负性与分离性：$d(x, y) \geq 0$，且当且仅当 $x = y$ 时，$d(x, y) = 0$*
2. *对称性：$d(x, y) = d(y, x)$*
3. *三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*

则称 (M,d) 构成一个距离空间。

(2) 距离空间的完备性

待填写：*(定义)* 完备性
$\mathbb{R}$ 是完备的，且任意有限维赋范空间都是完备的。

a. 构造方法：距离空间的完备化

设 (M, d) 是一个距离空间，可以按照如下过程构造其完备化空间：

1. 构造对偶的柯西列空间

$$\tilde{M} = \{(x_n) \,|\, x_n \in M, \quad (x_n)\text{为柯西列}\}$$

2. 在柯西列空间 $\tilde{M}$ 中定义等价关系

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

即这两个柯西列按照角标顺序，交叉放在一起，还是柯西列。

3. 构造商空间：

$$\hat{M} = \tilde{M}/\sim = \{[\tilde{x}]\}$$

式中，$[\tilde{x}]$ 表示柯西列 $\tilde{x}$ 的等价类，即 $[\tilde{x}]$ 是一个集合，集合中的所有元素在等价关系 $\sim$ 下都是等价的。

4. 在商空间 $\hat{M}$ 中定义距离

$$\hat{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

5. 则 $(\hat{M}, \hat{d})$ 即为距离空间 (M, d) 的完备化空间。

嵌入映射：可以在原空间 M 与完备化空间 $\hat{M}$ 之间定义一个单射 i：

$$i : M \to \hat{M}, \quad i(x) = [(x, x, x, \ldots)]$$

该映射将原空间中的每个点 x 映射为完备化空间中由常值序列 $(x, x, x, \ldots)$ 所构成的等价类，且**映射前后任意两元素的距离不变**

(3) 赋范空间与 Banach 空间

待填写：*(定义)* 赋范空间

完备的赋范空间称为 Banach 空间，或者 B 空间。

(4) 等价范数

定义 (范数的等价性)**.** 设 V 是一个线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 V 上的两个范数，如果存在正常数 c 和 C，使得对任意 $v \in V$，都有

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$$

则称这两个范数是等价的。

若存在正数 C，使得对任意 $v \in V$，都有

$$\|v\|_2 \le C\|v\|_1$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$。

性质：

- 在有限维线性空间上，任意两个范数都是等价的
- 在无限维线性空间上，范数不一定是等价的
- 若一个点列在较强的范数下是 Cauchy 列，则在较弱的范数下也是 Cauchy 列；反之不必然。

(5) 常用的范数

a. $\mathbb{R}^n$ 上的范数

记 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$，则常用的范数有：

- 无穷范数：所有元素的最大值

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

- 1-范数：所有元素的绝对值之和

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

- 2-范数：欧几里得范数，即所有元素的平方和的平方根

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b. $C[a,b]$（有界闭区间上连续函数空间）上的范数

- 无穷范数：函数在区间上的最大绝对值

$$\|f\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

- 1-范数：函数在区间上的绝对值积分

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$$

- 2-范数：函数在区间上的平方积分的平方根

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$C[a,b]$ 上三个范数的性质：

- 任意两个范数不等价
- 无穷范数强于 2 范数，2 范数强于 1 范数
- 只有无穷范数对应的赋范空间是完备的
- 1-范数对应的完备化空间为 $L^1(a,b)$，2-范数对应的完备化空间为 $L^2(a,b)$ [1]

[1] $L^1(a,b)$ 为 (a,b) 上的可积函数空间，$L^2(a,b)$ 为 (a,b) 上的平方可积函数空间。

3. 内积空间

(1) 内积定义与性质

定义 (内积). 设 (S,P) 是一个线性空间,如果对任意的 $u,v,w\in S$ 和 $a,b\in P$,存在一个映射 $S\times S\to P$,满足

1. 共轭对称性:$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$
2. 线性性:$\langle au+bv,w\rangle=a\langle u,w\rangle+b\langle v,w\rangle$
3. 正定性:$\langle v,v\rangle\geq 0$,且当且仅当 $v=0$ 时,$\langle v,v\rangle=0$

则称该映射为内积,(S,P) 构成一个内积空间。

若 $\langle x,y\rangle=0$,则称 x 与 y 正交。

几个常用空间上的内积:

- $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上的内积
$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$
- $C[a,b]$(有界闭区间上连续函数空间)上的内积
$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$
- $C[a,b]$ 上的带权内积:
$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx$$
  其中,权函数 $\rho(x)$ 需要满足条件:
  - $\rho(x)\in C[a,b]$
  - $\rho(x)$ 几乎处处为正
  - $\int_a^b \rho(x)\,dx<+\infty$
  - $\forall q(x)\in P_n$,$\int_a^b \rho(x)|q(x)|\mathrm{d}x<\infty$

  带权内积所研究的空间称为加权内积空间:
$$L^2_\rho(a,b)=\{f(x)\mid \int_a^b \rho(x)|f(x)|^2\,dx<+\infty\}$$

常用的权函数有:

$$\rho(x)=1,\quad [a,b]=[-1,1]$$
$$\rho(x)=\frac{1}{1-x^2},\quad [a,b]=[-1,1]$$

(2) 正交性与 Schmidt 正交化

待填写：*(定义)* 正交性

待填写：*(方法)* 用 *Grammer* 矩阵判断内积空间中向量组的线性无关性

待填写：*(方法)Schmidt* 正交化过程：从一个线性无关向量组构造一个正交向量组：让每个向量减去与已有空间垂直的分量

用 Schmidt 正交化过程得到的正交向量组具有以下性质：

$$\Phi_{k-1} \subset \Phi_k$$
$$y_k \perp \Phi_{k-1}$$

(3) 由内积诱导的范数

定义 (诱导范数). 设 (S, P) 是一个内积空间，则可以定义范数 $\|\cdot\|$ 如下：

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

则称该范数为由内积诱导的范数。

- 任何内积均能诱导对应的范数
- 当且仅当范数满足平行四边形法则时

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

  范数可以诱导内积：

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

4. 正交多项式

定义 (正交多项式). 设 $\{\phi_n(x)\}$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一组多项式，且每个多项式的次数为 n，如果对任意 $m \neq n$，都有

$$\int_a^b \rho(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$$

则称 $\{\phi_n(x)\}$ 为区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的正交多项式。

正交多项式的性质：

- $\deg \phi_i = i$
- $(\phi_i, \phi_j) = 0, \quad \forall i \neq j$
- ϕ_n 为实系数多项式
- ϕ_n 在开区间 (a, b) 内恰有 n 个实单根

待填写：*(证明)*ϕ_n 在开区间 (a, b) 内恰有 n 个实单根的证明。证法：分别证明实根、单根、全在 (a, b) 内。*3* 个命题均可用反证法。

(1) $\rho = 1$：Legendre 多项式

产生方法：

- 权函数 $\rho(x) = 1$
- 区间 $[-1, 1]$

表达式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2 - 1)^n]$$

性质：

- 首项系数：

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

- 正交归一化：

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

- 三项递推关系：

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

- 奇偶性：

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

- 导数关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_n(x) = \frac{n}{x^2 - 1} [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

- 前五项：

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

- 零平方误差最小：

定理. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上与零的平方误差最小。*

(2) $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$：Chebyshev 多项式

产生方法：

- 权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 区间 $[-1, 1]$

表达式：

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

性质：

- 首项系数：2^{n-1}
- 正交归一化：

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

- 三项递推关系：

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

- 奇偶性：

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

- 前五项：

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

- 零点：

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

- 极值点：

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- 简单表达式：当 $|x| \geq 1$ 时，

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

5. 矩阵空间

待填写：*(性质)* 矩阵空间的基本性质：线性空间、乘法运算、代数性质

(1) 矩阵范数

定义 (矩阵范数)**.** 矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为矩阵范数，如果对任意的 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $a \in \mathbb{C}$，满足以下性质：

1. 非负性与分离性：$\|A\| \geq 0$，且当且仅当 $A = 0$ 时，$\|A\| = 0$
2. 齐次性：$\|aA\| = |a|\|A\|$
3. 三角不等式：$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. 次乘性：$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Note: 矩阵范数是定义在矩阵代数而非矩阵空间上的，必须与矩阵乘法相容。

定义 (矩阵范数与向量范数的相容性)**.** 设 $\|\cdot\|_v$ 是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数，$\|\cdot\|_m$ 是矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一个范数，如果对任意的 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$，都有

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|x\|_v$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 与向量范数 $\|\cdot\|_v$ 是相容的。

矩阵范数的两种常见构造方法：

- 直接构造：Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

  Frobenius 范数的性质：

  - Frobenius 范数与向量 2-范数相容
  - $\|I\|_F = \sqrt{n}$

- 向量范数诱导：算子范数

  定义 (算子范数)**.** 设 $\|\cdot\|_v$ 是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数，则可以定义矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的算子范数 $\|\cdot\|_m$ 如下：

$$\|A\|_m = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v$$

  则称该范数为由向量范数 $\|\cdot\|_v$ 诱导的算子范数。

常用的几个算子范数：

- 无穷范数：行和最大值

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 1-范数：列和最大值

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-范数（谱范数）：A 的最大奇异值，即 $A^H A$ 的最大特征值的平方根

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$$

(2) 谱半径

定义 (谱半径). 谱半径定义为矩阵所有特征值模的最大值，即

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$

谱半径和矩阵范数的关系：

- 矩阵范数下界：

  定理. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$\rho(A) \le \|A\|$$

- 无穷接近范数的存在性：

  定理. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，存在一个矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得

$$\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$$

  其中，ε 为任意给定的正常数。

(3) 可逆矩阵相关定理

定理 (扰动引理 I). 给定 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。设 $\|B\| < 1$，则 $I + B$ 可逆，且

$$\|(I+B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|}$$

定理 (扰动引理 II). 设 $A, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 可逆。若

$$\|C - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

则 C 也可逆，且

$$\|C^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|C - A\|}$$

定理 (扰动定理 II). 设 $A, \delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 可逆。若 $\|A^{-1}\delta A\| < 1$，则 $A+\delta A$ 也可逆，且

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}$$

二　函数插值与重构

总结：基本方法是利用插值基函数构造插值多项式，从而实现对函数的近似与重构。

问题 1：求解插值函数

- 整个区间上的连续插值：Lagrange 插值、Newton 插值、Hermite 插值
  - Lagrange 插值基函数：

$$L_\alpha(x) = \prod_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I$$

  - Newton 插值和 Hermite 插值：构造均差表，列表计算。
    * 均差递推关系：

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

    * 均差构造插值多项式：各项为 $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$

- 分段插值：分片线性插值、分片三次 Hermite 插值
  - 分片线性插值基函数：

$$L_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}, & x \in [x_{\alpha-1}, x_\alpha] \\ \frac{x_{\alpha+1} - x}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}, & x \in [x_\alpha, x_{\alpha+1}] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\phi(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} f_\alpha L_\alpha(x)$$

– 分片三次 Hermite 插值基函数：

$$
\begin{aligned}
\alpha_k =& \left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \\
\beta_k =& (x-x_k)\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \\
\alpha_{k+1} =& \left(1+2\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \\
\beta_{k+1} =& -(x_{k+1}-x)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \\
\phi(x) =& \sum_{k=0}^{n}\left[f_k\alpha_k + f_k'\beta_k\right], \quad x\in[x_k, x_{k+1}]
\end{aligned}
$$

（一） 通用理论

1. 问题模型

待填写：*(数学描述)* 采样泛函视角下的插值问题数学描述

2. 插值空间

常用的插值空间：多项式函数空间、样条函数空间、三角多项式函数空间

3. 误差分析与收敛性

（二） 具体插值方法

1. 一维多项式插值

问题：给定插值数据（采样数据）(x_α, f_α)，$\alpha \in I$，确定多项式 $P(x)\in P_n$，$n=|I|-1$，满足插值条件

$$x_\alpha(P) = P(x_\alpha) = f_\alpha, \quad \alpha \in I$$

定理 (多项式插值基本定理). 给定 $n+1$ 个插值条件

$$(x_\alpha, f_\alpha), \quad \alpha\in I, \quad x_\alpha \neq x_\beta \textit{ for } \alpha\neq\beta$$

则存在唯一的插值多项式 $P\in P_n$ 满足插值条件。

Note：若 x_α 取之于复平面，上述定理依然成立；且上述定理与采样节点的排序无关。

(1) Lagrange 插值

a. 基函数构造

定义 (Lagrange 插值基函数). 定义

$$L_\alpha(x) = L_{\alpha;I}(x) = \prod_{\substack{\beta\in I\\ \beta\neq\alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I$$

称为插值基函数。

若给定 3 个插值条件 (x_0, f_0)，(x_1, f_1)，(x_2, f_2)，则对应的插值基函数为

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

插值基函数天然满足性质：

$$x_\beta(L_\alpha) = L_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

b. 插值公式

在计算出插值基函数的基础上，插值多项式可写为：

$$P(x) = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha L_\alpha(x)$$

c. 余项

d. 均差定义

定义 (均差的递推公式). 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，则定义如下均差：

$$f[x_i] = f(x_i)$$
$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

其中，$i = 0, 1, \ldots, n-k$，$k = 1, 2, \ldots, n$。

均差的性质：

- $f_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ 与节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ 的顺序无关
- 设 f 是 N 次多项式，若 $k > N$，则对任意节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$，都有

$$f_{i_0 i_1 \ldots i_k} = 0$$

e. 插值公式

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + f_{i_0 i_1 i_2}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \dots \\ + f_{i_0 i_1 \dots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-1}})$$

f. Newton 插值多项式的列表计算

以给定 4 个节点时 x_0, x_1, x_2, x_3 的插值问题为例。可以按照如下表格从左向右逐列填写计算均差：

x_i	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
x_0	$\boxed{f(x_0)}$			
		$\boxed{f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$		
x_1	$f(x_1)$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}}$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3] = ...}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

之后用插值表最上方一行的均差值逐个组装 Newton 插值多项式。

(2) Hermite 插值

a. Hermite 插值问题

给定 ξ_i, $f_i^{(k)}$, $i = 0, 1, ..., m$, $k = 0, 1, ..., n_i - 1$, 其中 ξ_i 两两不同，且

$$\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_m$$

希望确定一个次数为 n 的多项式函数

$$P_n(x), \quad n = \sum_{i=0}^{m} n_i - 1$$

满足插值条件

$$P^{(k)}(\xi_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, ..., m \quad k = 0, 1, ..., n_i - 1$$

b. 拓展均差

定义 (拓展均差). 设 $f \in C^n(I(x_0, x_1, ..., x_n))$，定义

$$f[x_0, x_1, x_n] = \int_0^{t_0} \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n$$

$$f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + t_{n-1}[x_{n-1} - x_{n-2}] + ... + t_1[x_1 - x_0] + t_0 x_0)$$

式中，$n \geq 1$ 且 $t_0 = 1$。

Note: 这一积分实际上表示了一个单位标准 n-维标准型上的积分，或者说积分区域始终是一个插值节点构造的凸组合。这隐含了一个要求是 $1 = t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n \geq 0$。

拓展均差的性质：

- 若 x_i 两两不一，则拓展均差等价于普通均差

$$f[x_0, x_1, x_n] = f_{x_0, x_1, ..., x_n}$$

  且具有相同的递推关系：

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- 极限性质：若 f 足够光滑，则

$$\lim_{\epsilon_i \to 0} f[x_0 + \epsilon_0, x_1 + \epsilon_1, ..., x_n + \epsilon_n] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

- 导数与重节点：可从极限性质导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x]$$

- 介值定理：若 $f \in C^n[a, b]$，$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$，则存在 $\xi \in I(x_0, x_1, ..., x_n)$，使得

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

  特别地，

$$f[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n+1\text{个}}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

c. Hermite 插值多项式

Hermite 插值多项式可表示为

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

其中，$x_0, ..., x_n$ 为下面序列的任意置换：

$$\underbrace{\xi_0, \xi_0, ..., \xi_0}_{n_0\text{个}}, \underbrace{\xi_1, \xi_1, ..., \xi_1}_{n_1\text{个}}, ..., \underbrace{\xi_m, \xi_m, ..., \xi_m}_{n_m\text{个}}$$

d. 列表法求 Hermite 插值多项式

假设给定 2 个节点 ξ_0, ξ_1，对应的插值条件分别为 f_0, f_0', f_0''，f_1，则可按下表计算均差：

Hermite 插值均差表（节点序列：$\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1$）：

节点	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$			
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f_0'$		
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f_0'$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0] = \dfrac{f_0''}{2}$	
ξ_1	$f[\xi_1] = f_1$	$f[\xi_0, \xi_1] = \dfrac{f_1 - f_0}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] = \dfrac{f[\xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1] = \dfrac{f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$

对应的插值多项式为：

$$\begin{aligned} P(x) &= f[\xi_0] + f[\xi_0, \xi_0](x - \xi_0) + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0](x - \xi_0)^2 + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1](x - \xi_0)^3 \\ &= f_0 + f_0'(x - \xi_0) + \frac{f_0''}{2}(x - \xi_0)^2 \\ &\quad + \frac{2(f_1 - f_0 - f_0'(\xi_1 - \xi_0)) - f_0''(\xi_1 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}(x - \xi_0)^3 \end{aligned}$$

(3) Lagrange 插值和 Hermite 插值的收敛分析

a. 插值余项

若 f 在区间 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶连续导数，则对任意 $x \in [a, b]$，存在 $\xi \in I(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$，使得

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{01\ldots n}(x)$$

此外，使用 $n+1$ 个节点 x_0, x_1, $\ldots$, x_n 进行 Hermite 插值时，总有

$$R(x) = f(x) - P(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

b. 收敛性

收敛性的定义：当给定插值点的最大间距 $h \to 0$ 时，插值余项 $R(x) \to 0$，则称插值多项式序列在区间 $[a, b]$ 上收敛于函数 $f(x)$。

定义 (多项式插值收敛定义). 设 $f \in C^\infty[a, b]$，且存在正常数 $M > 0$，使得对任意的 $n \geq 0$，都有

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq M$$

则对任意在 $[a, b]$ 上的插值节点序列 $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{n}$，对应的插值多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上均匀收敛于 $f(x)$。

收敛的充分条件：

定理. 记 $\delta = |I(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)|$, $\tilde{x}$ 为 I 的中心。若 f 在 $B(\tilde{x}, w\delta)$ 上复解析，则对任意 $\bar{x} \in I$，插值法收敛。

2. 分段插值

(1) 分段线性插值

待填写：*()* 分片线性插值问题描述

a. 分片线性插值的插值基函数

定义 (分片线性插值基函数). 设给定插值节点 $x_0 < x_1 < ... < x_n$，则定义分片线性插值基函数为

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其中，$i = 0, 1, ..., n$，且约定 $x_{-1} = x_0$，$x_{n+1} = x_n$。

则线性插值基函数为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k l_k(x)$$

b. 分片线性插值的收敛性定理

定义

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

- 若 $f \in C[a, b]$，则 $\lim_{h \to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a, b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a, b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

(2) 分段三次 Hermite 插值

待填写：*()* 分片三次 ***Hermite*** 插值的数学描述

a. 插值基函数

分段三次 Hermite 插值的基函数满足如下条件：

$$
\begin{aligned}
\alpha_k(x_i) =& \delta_{ik}, \quad \alpha_k'(x_i) = 0 \\
\beta_k(x_i) =& 0, \quad \beta_k'(x_i) = \delta_{ik}
\end{aligned}
$$

在单元 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，三次 Hermite 插值基函数为

$$
\begin{aligned}
\alpha_k =& \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\
\beta_k =& (x - x_k)\left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\
\alpha_{k+1} =& \left(1 + 2\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \\
\beta_{k+1} =& -(x_{k+1} - x)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2
\end{aligned}
$$

- α_k 满足单位分解性：$\alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$
- $\alpha_k(x_i) = \delta_{ik}$，$\alpha_k'(x_i) = 0$
- $\beta_k(x_i) = 0$，$\beta_k'(x_i) = \delta_{ik}$

b. 三次 Hermite 插值多项式

$$
\phi = \sum_{k=0}^{n} [f_k \alpha_k(x) + f_k' \beta_k(x)]
$$

c. 收敛性定理

定义 (分段三次 Hermite 插值收敛性定理)**.** 设 $f \in C^1[a, b]$，则分段三次 *Hermite* 插值多项式 ϕ 满足

$$
\|f - \phi\|_\infty \leq ch\|f'\|_\infty
$$

若 f 有更好的光滑性，则：

- 若 $f \in C^2[a, b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^2\|f''\|_\infty$
- 若 $f \in C^3[a, b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a, b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

此外，对于不高于三次的多项式，分段三次 Hermite 插值是精确的。

3. Fourier 插值

(1) 离散傅里叶变换

待填写：*(定义)* 离散傅里叶变换式、变换式系数表达式

如果 f 的光滑性满足 $f \in C_{per}^{M}$，则有

$$a_n = O(n^{-M})$$
$$b_n = O(n^{-M})$$

且

$$\|f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx\right]\|_\infty = O(N^{-M})$$

(2) 三角多项式插值空间

三角多项式插值空间为：

$$\Phi_{2M+1} := \left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right\}$$
$$\Phi_{2M} := \left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) + A_M \cos Mx\right\}$$

(3) 三角多项式插值与一般多项式插值

待填写：*(问题)* 三角多项式插值问题的数学描述

待填写：*(问题)* 辅助插值问题：找相多项式

待填写：*(理论)* 两个插值问题之间的联系：欧拉公式

(4) 插值定理与三角插值多项式

定理 (三角多项式插值定理). 设给定插值节点

$$x_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

则对任意插值数据 f_k，存在唯一的三角多项式

$$P(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

（当 N 为奇数时，$M = \frac{N-1}{2}$；当 N 为偶数时，$M = \frac{N}{2}$）满足插值条件

$$P(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

同样，存在唯一的相多项式

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n e^{inx}$$

满足插值条件

$$Q(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- 三角插值多项式：

$$A_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M$$

$$B_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

- 相插值多项式：

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{-kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

  式中，$w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$。

三　函数逼近

总结

Note：这里为了让总结看起来更顺畅，没有遵循原 PPT 和书中的符号规范，转而应用了比较统一的符号。这些符号规范仅在总结一部分使用。

- 最佳平方逼近求解：
  - 给定一组规范正交函数基时：
    - 写出规范正交函数基 $\{\phi_m\}_{m=0}^n$
    - 计算系数 $a_m = \dfrac{(f,\phi_m)}{(\phi_m,\phi_m)}$
    - 写出逼近多项式 $\phi^* = \sum_{m=0}^n a_m\phi_m$
  - 给定一组非规范正交函数基时：
    - 写出非规范正交函数基 $\{\phi_m\}_{m=0}^n$
    - 构建法方程组：

$$m_{ij} = (\phi_j,\phi_i), \quad b_i = (f,\phi_i)$$

    - 求解线性方程组 $\mathbf{Ma} = \mathbf{b}$，得到系数 a_m
    - 写出逼近多项式 $\phi^* = \sum_{m=0}^n a_m\phi_m$
- Legendre 多项式作最佳平方逼近的收敛速度：高阶时控制在 $1/\sqrt{n}$ 以下
- 最小二乘逼近求解：计算过程可视作最佳平方逼近的离散形式
  - 给定基底 $\{\phi_m\}_{m=0}^n$ 和采样点 $\{x_k\}_{k=0}^N$
  - 估计一个误差系数 $\rho(x_i)$
  - 用半内积构建法方程组：

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^N \rho(x_k)\phi_j(x_k)\phi_i(x_k), \quad b_i = \sum_{k=0}^N \rho(x_k)f(x_k)\phi_i(x_k)$$

  - 求解线性方程组 $\mathbf{Ma} = \mathbf{b}$，得到系数 a_m
  - 写出逼近多项式 $\phi^* = \sum_{m=0}^{n} a_m \phi_m$

- 一致逼近求解：
  - 给定原函数 $f \in C[a, b]$ 和基底 $\{\phi_m\}_{m=0}^{n}$
  - 写出待定逼近多项式 $\phi(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \phi_m(x)$
  - 写出误差函数 $E(x) = f(x) - \phi(x)$
  - 根据切比雪夫交错点组定理，写出求解条件：
    * 交错条件：$E(x_i) = -e(x_{x-1})$
    * 偏差点条件：除端点作为偏差点的情况，必有 $f'(x_i) = p_n'(x_i)$
  - 由偏差点条件可以解出一系列偏差点 $x_i(\boldsymbol{a})$，再代入交错条件中，解出系数 a_m

（一） 通用理论

1. 问题模型

待填写：*(问题)* 函数逼近问题的数学模型

最佳逼近问题：找 $\phi^* \in \Phi$，使得

$$\|f - \phi^*\| = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|$$

2. 逼近准则

(1) 最小二乘准则（L 范数）

(2) 一致逼近准则（L∞ 范数）

3. 核心定理

（二） 具体逼近方法

1. 最优平方逼近

(1) 基础理论

问题：给定一个线性子空间 Φ，找 $\phi^* \in \Phi$，使得

$$\|f - \phi^*\|_2 = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|_2$$

问题等价于

$$\|f-\phi^*\|_2^2 = \min_{\phi\in\Phi}\|f-\phi\|_2^2$$

于是构造出一个辅助函数：

$$\begin{aligned} I = \|f-\phi\|_2^2 &= \left(f-\sum_{i=0}^n a_i\phi_i, f-\sum_{i=0}^n a_i\phi_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n a_ia_j(\phi_i,\phi_j) - 2\sum_{i=0}^n a_i(f,\phi_i) + (f,f) \end{aligned}$$

式中，$\{\phi_i\}$ 为 Φ 的一组基。

a. 法方程

多元函数取得最小值的条件：对各变量偏导为 0、在这一点的二阶偏导数构成的矩阵正定。

各变量偏导为 0 即导出法方程：

$$\sum_{j=0}^n a_j(\phi_j,\phi_i) = (f,\phi_i), \quad i=0,1,\dots,n$$

或写成矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_1,\phi_0) & \cdots & (\phi_n,\phi_0) \\ (\phi_0,\phi_1) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_n,\phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_0,\phi_n) & (\phi_1,\phi_n) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix}$$

定理 (最小二乘逼近法方程). *设 Φ 为线性子空间，$\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ 为 Φ 的一组基，则函数 f 在 Φ 中的最优平方逼近 ϕ^* 可表示为*

$$\phi^* = \sum_{j=0}^n a_j^*\phi_j$$

其中，系数 c_j^* 满足法方程组

$$\sum_{j=0}^n a_j(\phi_j,\phi_i) = (f,\phi_i), \quad i=0,1,\dots,n$$

b. 最佳平方逼近的性质

引理 (最佳平方逼近的正交性质). *设 ϕ^* 为函数 f 在子空间 Φ 中的最佳平方逼近，则对任意 $\phi\in\Phi$，都有*

$$f-\phi^* \perp \Phi$$

推论 (最佳平方逼近的勾股定理). *设 ϕ^* 为函数 f 在子空间 Φ 中的最佳平方逼近，则有*

$$\|f\|_2^2 = \|f-\phi^*\|_2^2 + \|\phi^*\|_2^2$$

(2) 幂函数基的逼近

考虑连续函数在 n-次多项式空间 P_n 中的最佳平方逼近问题。

若选取 $\{x^m\}_{m=0}^n$ 作为基函数，在 $[0,1]$ 区间上求解最佳平方逼近，则法方程组的系数矩阵为 Hilbert 矩阵：

定义 (Hilbert 矩阵). 阶数为 $n+1$ 的 *Hilbert* 矩阵定义为

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n+1$$

即

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

这一逼近形式的问题：

- Hilbert 矩阵病态，随着 n 的增大，条件数迅速增大，导致数值解不稳定
- 幂函数基不正交，导致法方程系数矩阵接近奇异

(3) 正交多项式逼近

a. 广义傅里叶展开

在 $C[a,b]$ 中，取一个规范正交函数组 $\{\phi_m\}_{m=0}^n$，即确定了一个用于逼近的线性子空间 $\Phi_n = \text{span}\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$。

相应地，对于任意给定函数 f，存在唯一的最佳平方逼近 $\phi^* \in \Phi_n$，且

$$\phi^* = \sum_{i=0}^{n} a_i^* \phi_i, \quad a_i^* = (f,\phi_i)$$

定义 (广义傅里叶展开). 设 $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则对任意 $f \in C[a,b]$，都有

$$f \sim f_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \phi_i, \quad a_i = (f,\phi_i)$$

f_∞ 称为函数 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开。

定理 (广义傅里叶展开的收敛性). 设 $\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则对任意 $f \in C[a,b]$，其广义傅里叶展开在 L_2 范数下收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

其中，$f_n = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i$。

b. Legendre 多项式作最佳平方逼近

设内积为 $[-1,1]$ 上的权 1 内积，给定 $f\in C[-1,1]$，则 f 在 Legendre 多项式空间 P_n 中的最佳平方逼近为

$$I_n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}\phi_k(x)$$

性质：

- 收敛性：$I_n f\to f,\quad n\to\infty$，且收敛到 $L^2((-1,1))$ 空间中
- 收敛速度估计：若 $f\in C^2[-1,1]$，则 $\forall\epsilon>0$，$\exists N>)$，使得

$$\|f-I_n f\|_\infty\le\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\quad n\ge N$$

即对于 n 次的 Legendre 多项式逼近，误差会被控制在 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 范围内

(4) Legender 多项式的零平方误差最小性质

定理 (Legendre 多项式的零平方误差最小性质). *设 $f\in C[-1,1]$，则在所有满足 $\deg(p_n)\le n$ 且 $(p_n,x^k)=0,\quad k=0,1,\dots,n-1$ 的多项式中，Legendre 多项式 $P_n(x)$ 使得平方误差 $\|f-P_n\|_2$ 最小。*

2. 最小二乘逼近：最优平方逼近的离散化形式

待填写：*(问题)* 最小二乘逼近的问题模型：确定的输入-输出关系叠加系统噪声和随机误差，希望拟合输入-输出关系的具体形式

(1) 基础理论

核心假设：观测数据 f_i 和正确输 $\phi^*(x_i)$ 之间的误差 $a_i\xi_i$ 是一个独立同分布的零均值随机变量。
假设导出：当拟合结果 ϕ 取得正确的关系 $\phi=\phi^*$ 时，（归一化）误差的方差最小。
数学化：ϕ^* 是以下优化问题的极小解：

$$\phi^*=\arg\min_{\phi\in\Phi}\sigma^2=\arg\min_{\phi\in\Phi}\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}[f_i-\phi(x_i)]^2$$

(2) 数学方法："半"内积

定理 (Haar 条件). *若给定一组采样点 $\{x_i\}_{i=0}^m$，且 Φ 中的任意非 0 元素在这组采样点上的采样结果不全为 0，则称这组采样点满足 Haar 条件。*

满足 Haar 条件时，可以利用在采样点上的采样结果，定义一个"半"内积：

$$(f,g)_m=\sum_{i=0}^{m}\frac{f(x_i)g(x_i)}{a_i^2}$$

此时这个“半”内积在 Φ 上是一个真正的内积。因此上述问题等价于求解法方程 AU=b：

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0)_m & (\phi_1,\phi_0)_m & \cdots & (\phi_n,\phi_0)_m \\ (\phi_0,\phi_1)_m & (\phi_1,\phi_1)_m & \cdots & (\phi_n,\phi_1)_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_0,\phi_n)_m & (\phi_1,\phi_n)_m & \cdots & (\phi_n,\phi_n)_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0)_m \\ (f,\phi_1)_m \\ \vdots \\ (f,\phi_n)_m \end{bmatrix}$$

Note: 我们注意到，在求内积过程中，分母上表示采样点随机误差幅度的 a_i^2 仍然是不确定的，此时需要基于经验或先验知识给出估计。常用的估计有 $a_i \propto 1$、$a_i \propto f_i$、$a_i \propto x_i$、$a_i \propto x_i^2$ 等。

3. 最佳一致逼近

待填写：*(问题)* 最佳一致逼近的数学描述

最佳一致逼近中用到一些符号：

- $\Delta(f,p_n) = \|f-p_n\|_\infty$ 称为 p_n 关于 f 的偏差
- $E_n = \inf_{p_n\in P_n}\Delta(f,p_n)$ 称为 f 在 P_n 中的最小偏差
- 若 $f(x_i)-p_n(x_i)=\sigma\Delta(f,p_n), \sigma=\pm1$，则称 x_i 为 p_n 关于 f 的偏差点。
  - 若 $\sigma=1$，则称 x_i 为正偏差点
  - 若 $\sigma=-1$，则称 x_i 为负偏差点

(1) 偏差泛函与最优逼近多项式存在性定理

假设给定一个逼近多项式 $p_n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$，则可定义偏差泛函：

$$\phi(f,\boldsymbol{a}) = \|f-p_n\|_\infty = \|f-(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)\|_\infty$$

这个泛函具有以下性质：

- 连续性：ϕ 对 $\boldsymbol{a}$ 连续
- 对 $\boldsymbol{a}$ 下凸：$\forall \boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\in\mathbb{R}^{n+1}$，$\forall t\in[0,1]$，都有
$$\phi(f,t\boldsymbol{a_1}+(1-t)\boldsymbol{a_2}) \le t\phi(f,\boldsymbol{a_1})+(1-t)\phi(f,\boldsymbol{a_2})$$
- 正定性：对于任意 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\phi(f,\boldsymbol{a})>0$

  正定性等价于：$\phi(0;\mathbf{a})$ 在单位球面 $\sum_{i=0}^n a_i^2=1$ 上有正的最小值 μ

利用偏差泛函的性质，可以证明最佳一直逼近多项式的存在性：

定理 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f\in C[a,b]$，则在 n 次多项式空间 P_n 中，存在一个多项式 $p_n^*\in P_n$，使得

$$\|f-p_n^*\|_\infty = \min_{p_n\in P_n}\|f-p_n\|_\infty$$

即 P_n 中关于 $f\in C[a,b]$ 的最小偏差是可以达到的。

(2) 最佳一致逼近多项式的性质

定义 (Chebyshev 交错点组). *若 $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ 是 p_n 关于 f 的轮流为正负的偏差点，则称其为一个 Chebyshev 交错点组。*

定理 (最佳一致逼近多项式的 Chebyshev 交错定理). *p_n^* 是 f 的最佳一致逼近多项式的充要条件是存在一个元素个数为 $n+2$ 的 Chebyshev 交错点组 $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$*

推论. *最佳一致逼近多项式是一个 Lagrange 插值多项式，其插值节点在 (a,b) 内。*

定理 (最佳一致逼近多项式的唯一性定理). *设 $f \in C[a,b]$，则 f 在 n 次多项式空间 P_n 中的最佳一致逼近多项式 p_n^* 是唯一的。*

(3) Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 (Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质). *设 $T_n(x)$ 为 n 次 Chebyshev 多项式，则在 $[-1,1]$ 上，任意单位首项系数的 n 次多项式 $p_n(x)$ 均满足*

$$\|p_n\|_\infty \geq \|T_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$

即 Chebyshev 多项式在 $[-1,1]$ 上具有最小的无穷范数。

(4) 交错点组求解方法

a. 解析求解：利用交错点组定理

$$E(x_i) = -E(x_{i-1}), \quad \forall x_i$$
$$f'(x_i) = p_n'(x_i), \quad \forall x_i \neq a, b$$

b. Remez 算法

- 选择初始交错点组 $\{x_i^{(0)}\}_{i=0}^{n+1}$
- 计算当前逼近多项式 $p_n^{(k)}$，并计算偏差 $E^{(k)}(x) = f(x) - p_n^{(k)}(x)$
- 找到新的交错点组 $\{x_i^{(k+1)}\}_{i=0}^{n+1}$，即 $E^{(k)}(x)$ 的极值点
- 若 $\|E^{(k+1)}\|_\infty$ 与 $\|E^{(k)}\|_\infty$ 足够接近，则停止迭代，否则返回步骤 2

四　数值微积分

总结

机械积分公式：

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

- 数值积分方法的代数精度
  - 定义：可以准确积分 n 次多项式，不能准确积分 n+1 次
  - 判据：当有 n 个积分节点时，
    * 至少达到 n-1 阶：

$$A_k = I(L_k) = \int_a^b L_k(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

    * 最多达到 2n-1 阶：当且仅当积分节点为权函数 $\rho(x)$ 对应的正交多项式的 n 个不同实根时
- 数值积分方法的代数稳定性
  - 定义：对任意 n 阶的求积公式，求积系数的绝对值之和有确定的上界
  - 判据：对任意的阶数 n，所有的求积系数均大于 0，则该方法是一致稳定的
- Newton-Cotes 公式：用多项式函数插值近似函数，再对插值多项式积分
- Newton-Cotes 公式的具体应用
  - 闭型：Newton-Cotes 公式系数和余项表
  - 开型：中点公式和余项
- 复合求积方法
  - 复合中点公式
  - 复合梯形公式

  - 改造复合梯形公式
  - 复合 Simpson 公式

- 外推与 Romberg 方法
- Gauss 求积公式

（一） 数值积分

1. 通用理论

(1) 积分问题模型

待填写：*(问题)* 关注的对象是带权积分

- 目标：构造一种不依赖于函数 f 具体表达形式的近似积分方法
- 基本思想：用简单函数近似被积函数，再计算简单函数的准确积分

(2) 求积公式核心

(3) 代数精度

定义. 如果

$$\tilde{I}(f) = I(f), \quad \forall f \in P_n$$

则称 $\tilde{I}$ 的代数精度至少为 n。进一步，若存在一个 P_{n+1} 中的多项式 f，使得 $\tilde{I}(f) \neq I(f)$，则称 $\tilde{I}$ 的代数精度为 n。

定理 (至少 n-1 阶代数精度的判据)**.** 设 $L_k(x)$ 为以 $x_1, \ldots, x_n$ 为节点时的第 k 个插值基函数，则当且仅当

$$A_k = I(L_k) = \int_a^b L_k(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

时，$I_n(\cdot)$ 具有至少 $n-1$ 阶代数精度。

定理 (n 个求积节点的最大可能代数精度)**.** n 个求积节点上的求积公式的最大可能代数精度为 *2n-1*，当且仅当求积节点恰为权函数 $\rho(x)$ 对应的正交多项式的 n 个不同实根时，达到这一代数精度。

(4) 一致稳定性

设 $\tilde{I}_n$ 是一个线性积分法，n 为渐进参数（对应自由度个数）。

定义 (一致稳定性). 设对于一个方法导出的 n 阶机械求积公式为

$$\tilde{I}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k)$$

若存在一个 $M > 0$，使得对任意 n 阶的求积公式，均能满足

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \le M$$

则称该数值积分法是一致稳定的。

定理. 若某个积分法对任意的阶数 n 和序数 k，均有 $A_k^{(n)} > 0$，则这一积分法是一致稳定的。

考虑一致稳定性的意义在于，当数据存在误差时，有偏数据积分结果的误差可以由一直稳定性的参数 M 和误差的上界 δ 的乘积控制。

- Simpson 公式是一致稳定的。
- Gauss 求积公式总是一致稳定的。

2. 具体求积方法

(1) Newton-Cotes 公式

a. 导出思路

用多项式函数整体插值近似求积区间内的函数值，再对插值多项式进行积分，得到近似积分公式。即如下过程导出：

- 选取插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$。注意，这些节点不一定全在积分区间内。
- 构造 n-次 Lagrange 插值多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

其中，$l_i(x)$ 为 Lagrange 基函数：

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- 对插值多项式进行积分，得到近似积分公式

$$\tilde{I}(f) = I(P_n) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) I(L_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k)$$

b. 性质：

- 近似积分的精度与插值多项式逼近精度相关
- 积分法只与函数 f 在插值节点处的取值有关

c. （闭型）Newton-Cotes 公式

取 x_i 为等距节点，且 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$，则称所得求积公式为闭型 Newton-Cotes 公式。积分系数为：

$$A_k^{(n)} = (b-a)C_k^(n)$$

（需记忆）Newton-Cotes 公式系数表：

n	weighted factor				
1	1	1			
2	1	4	1		
3	1	3	3	1	
4	7	32	12	32	7

数值积分结果

$$I_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^(n) f(x_k)$$

低阶公式：

- 一阶：梯形公式：

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1(f) =& \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ R_1(x) =& f(x) - P_1(x) = f[a,b,x](x-a)(x-b) \\ I(f) - I_1(f) =& \int_a^b R_1(x)dx = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\end{aligned}$$

- 二阶：Simpson 公式：

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2(f) =& \frac{b-a}{6}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \\ I(f) - \tilde{I}_2(f) =& -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)\end{aligned}$$

注意：Simpson 公式的误差是 4 阶导数，而不是 3 阶。

- 三阶：3/8 - 规则：

$$\tilde{I}_3(f) = \frac{b-a}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$
$$I(f)-\tilde{I}_3(f) = -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

- 奇数阶的 Newton-Cotes 公式的代数精确度是 n；偶数阶的 Newton-Cotes 公式的代数精确度是 n+1。这是由于取等距节点插值时，将均差转化为余项后，误差中的多项式在中点之前的误差和中点之后的误差恰好抵消。

d. 开型 Newton-Cotes 公式

取等距节点 $a = x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$，**仅使用中间的 $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ 作为插值节点**，则称所得求积公式为开型 Newton-Cotes 公式。

$$I(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} b_k(n) f(x_k) + \bar{R}_n(f)$$
$$b_k^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_k(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$$

n=0 的开型 Newton-Cotes 公式称为**中点公式**：

$$I(f) = (b-a)f(x_0) + \bar{R}_0(f), \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$$

中点公式的误差：

$$\bar{R}_0[f] = \int_a^b f[x_0,x](x-x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}h^3 f''(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

(2) Hermite 积分法

类似 Newton-Cotes 公式的思想，采用更高阶的近似：

在区间 $[a,b]$ 上，用 f 的三次 Hermite 插值近似 $f(x)$，再对插值多项式进行积分，即可得到 Hermite 积分公式。

仅在区间端点上采样时，得到下式：

$$I(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)] + \frac{1}{720}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$$

(3) 复合求积方法

在区间内取 n 个采样点，**不要求均匀**，即取

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

并记第 k 个区间长度为**下一个点减去这一个点**：

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

同时，为了统一表示形式，约定 $h_{-1} = h_n = 0$。

a. 复合中点公式

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \bar{R}_n(f)$$

机械求积公式形式：

$$H_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k)$$
$$A_k = h_k$$

b. 复合梯形公式

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1})) + R_n(f)$$

机械求积公式形式（约定 $h_{-1} = h_n = 0$）：

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k)$$
$$A_k = \frac{h_{k-1} + h_k}{2}$$

误差分析：

$$\begin{aligned} R_n(f) &= -\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1} h_k^3 f''(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \\ &= -\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1} h_k^3 f''(\eta), \quad \eta \in [a, b] \end{aligned}$$

设 $h = \max_{0 \le k \le n-1} h_k$，则

$$|R_n(f)| \le \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\eta)|$$

递推关系：

$$T_{2n}(f) = \frac{T_n(f) + H_n(f)}{2}$$

即在每个积分区间上增加一个节点后，复合梯形公式即为增加节点前的复合梯形公式与复合中点公式的平均值。

c. 改造复合梯形公式

使用 Hermite 积分法，考虑等距节点的复合梯形公式，可以将复合梯形公式的积分精度改造到四阶：

$$I(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_k}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+\frac{h_k^2}{12}[f'(x_k)-f'(x_{k+1})]+\frac{1}{720}(b-a)^5f^{(4)}(\xi)$$

机械求积公式：

$$\tilde{T}_n(f)=\sum_0^n A_k^{(n)}f(x_k)$$

$$A_k=\begin{cases}\frac{5}{12}h, & k=0,n\\ \frac{13}{12}h, & k=1,n-1\\ h, & 其他\end{cases}$$

d. 复合 Simpson 公式：一致稳定的求积公式

$$I(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_k}{6}[f(x_k)+4f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})+f(x_{k+1})]+R_n(f)$$

机械求积公式为

$$S_{2n}(f)=\frac{1}{3}T_n(f)+\frac{2}{3}H_n(f)=\frac{4T_{2n}(f)-T_n(f)}{3}$$

误差分析：

$$|R_{2n}(f)|\le\frac{b-a}{2880}h^4|f^{(4)}(\eta)|,\quad \eta\in[a,b]$$

其中 $h=\max_{0\le k\le n-1}h_k$。

(4) Romberg 加速方法

目的：在提升积分区间取点数时，充分利用利用已有的积分结果，通过外插法提升积分精度。

a. 外插法

在取等距节点时，成立欧拉-麦克劳林公式：

定理 (Euler-Maclaurin 公式). 设 $f \in C^{2m+2}[a,b]$，则有

$$I(f) = T_n(f) + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_{m+1}$$

其中，$T_n(f)$ 为复合梯形公式，$h = \frac{b-a}{n}$，B_{2k} 为 *Bernoulli* 数，且

$$r_{m+1} = -\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)f^{(2m+2)}(\eta)h^{2m+2}, \quad \eta \in [a,b]$$

由 Euler-Maclaurin 公式可知（只要将上式的级数移到左侧），复合梯形公式可以写成关于 h 的渐进级数形式，且 0 次项即为积分结果：

$$\begin{aligned} T_n(f) \sim & \tau_0 + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots, \\ \tau_0 = & I(f) \end{aligned}$$

在逐步提升采样节点密度时，我们总是采用等距节点，则提升密度过程可以导出一个关于 h 的单调递减序列：

$$h_i = \frac{b-a}{n_i}, \quad n_i\text{单调递增}$$

于是可以考虑一个关于 h^2 的 m 次插值多项式（具体 m 取决于精度要求）：

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{mm} &= a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots + a_m h^{2m} \\ \tilde{T}_{mm}(h_i) &= T(h_i), \quad i = 0, 1, \ldots, m \end{aligned}$$

于是将采样点的增加转化为了插值点的增加。

b. Neville 算法：外插法的计算

记 $\tilde{T}_{ik}$ 为关于 h^2 的 k 次插值多项式，满足的插值条件为最后的 k+1 个 h_i 采样点：

$$\tilde{T}_{ik}(h_j) = T(h_j), \quad j = i-k, i-k+1, \ldots i.$$

则可以通过低一阶的插值多项式构造高一阶的插值多项式：

$$\tilde{T}_{ik}(h) = \frac{(h^2 - h_{i-k})^2 \tilde{T}_{i,k-1}(h) + (h_i^2 - h^2)\tilde{T}_{i-1,k-1}(h)}{h_i^2 - h_{i-k}^2}$$

我们仅关注这一递推关系在 $h = 0$ 处的取值，于是得到（重要递推关系，需记忆！）

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1}$$

插值多项式在 0 处的值 T_{ik} 有一个需要注意的性质：

- $T_{i0} = T_{n_i}$，即 0 阶插值多项式即为对应 h 的复合梯形公式积分结果，或取 n_i 个等距节点时的复合梯形公式积分结果

c. Romberg 方法

对于最简单的二分加密过程，有 $n_i = 2^i$，则 $h_i = \frac{b-a}{2^i}$。
于是递推式化为

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}$$

特别地，当 k=1 时，有：

$$T_{i1} = \frac{4T_{i0} - T_{i-1,0}}{3} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

即为 Simpson 公式。

Romberg 方法的列表求解见例题。逐步外推过程。

Romberg 方法的代数精度

若用 Romberg 方法计算出一个 T_{mm},并将其作为积分结果,则该积分方法的代数精度至少为 $2m+1$。

(5) Gauss 型求积

定义. *若 $x_1, \ldots, x_n$ 取为权函数 $\rho(x)$ 对应的正交多项式 $\phi_n(x)$ 的 n 个不同实根，则所得求积公式*

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k), \quad A_k^{(n)} = I(L_k^{(n)}) = \int_a^b L_k^{(n)}(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

有 2n-1 阶代数精度，相应的公式称为 Gauss 公式，x_k 称为 Gauss 点。

a. Gauss 积分公式的基本性质

- Gauss 积分公式是一致稳定的
- Gauss 积分公式是收敛的，即当采样点个数趋于无穷大时，积分结果趋于真实值

b. 设计 Gauss 积分公式的步骤

- 求正交多项式 ϕ_n
- 求正交多项式的 n 个不同实根，作为 Gauss 点
- 计算积分系数 $A_k = I(L_k)$
- 得到求积公式

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

c. Gauss 积分公式的应用

应用优势区：函数光滑性足够好。如果函数光滑性不太好，可根据奇点分片。
两种典型积分：

- Gauss-Legendre 求积：适用于 $\rho(x)=1$ 的情形

$$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

- Gauss-Chebyshev 求积：适用于 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的情形

$$I(f)=\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

在一般积分区间上，可以通过线性变换将积分区间映射到 $[-1,1]$ 上：

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t$$

(6) 特殊积分处理

a. 奇异积分

b. 振荡积分

(7) 高维积分

a. 蒙特卡洛方法

（二） 数值微分

1. 基础方法

(1) 向前差商

(2) 向后差商

(3) 中心差商

2. 高精度方法

(1) 插值型数值微分

(2) Richardson 外推加速

五 非线性方程求根

（一） 通用理论

1. 问题模型

2. 迭代法基础

3. 收敛性分析

(1) 收敛阶定义

(2) 整体收敛性（压缩映像原理）

(3) 局部收敛性判定

4. 收敛效率

（二） 具体方法

1. 单步法

(1) 牛顿法

a. 迭代公式

b. 收敛性分析

c. 重根处理

(2) 不动点迭代

2. 多步法

(1) 割线法

3. 其他方法

(1) Steffensen 方法

(2) Broyden 秩 1 方法

六 常微分方程初值问题数值解法

（一） 通用理论

1. 问题模型

2. 数值解法核心

3. 基本概念

(1) 局部截断误差与整体截断误差

(2) 收敛性与收敛阶

(3) 稳定性与相容性

4. 收敛性与稳定性判定

（二） 具体方法

1. 单步法

(1) Euler 方法

a. 向前欧拉

b. 向后欧拉

(2) 改进欧拉方法

(3) 龙格 - 库塔（RK）方法

a. 2 阶 **RK** 方法

b. 4 阶 **RK** 方法

2. 多步法

(1) Adams 方法

a. 显式 **Adams** 公式

七 线性代数方程组数值解法

（一） 直接解法

1. 通用理论

(1) 问题模型

(2) 残差与误差分析

(3) 数值稳定性与条件数

2. 具体方法

(1) Gauss 消元法

a. 基本步骤

b. 主元素选取

(2) LU 分解

(3) 特殊方程组解法

a. Thomas 算法（三对角方程组）

b. Toeplitz 矩阵快速解法

（二） 定常线性迭代解法

1. 通用理论

(1) 迭代格式构造

(2) 收敛性判定

(3) 收敛速度

2. 具体迭代法

(1) Jacobi 迭代

(2) Gauss-Seidel 迭代