Numerical Analysis
Exam Minimum

Astral Projection

2026 年 1 月 9 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 核心概念与理论

1.1.1 线性空间

定义与性质

定义 1.1.1 (线性空间). *设 S 是一个集合，P 是一个数域 (ℝ 或 ℂ). 定义两种映射关系：*

- *向量加法：$+: S \times S \to S$*
- *数乘：$\cdot: P \times S \to S$*

如果对任意的 $u, v, w \in S$ 和 $a, b \in P$，满足以下八条公理，则称 (S,P) 为一个线性空间（向量空间）：

1. *加法交换律：$u + v = v + u$*
2. *加法结合律：$(u + v) + w = u + (v + w)$*
3. *存在加法单位元：存在零向量 $0 \in S$，使得对任意 $v \in S$，有 $v + 0 = v$*
4. *存在加法逆元：对任意 $v \in S$，存在 $-v \in S$，使得 $v + (-v) = 0$*
5. *数乘结合律：$a(bv) = (ab)v$*
6. *数乘分配律 1：$a(u + v) = au + av$*
7. *数乘分配律 2：$(a + b)v = av + bv$*
8. *数乘单位元：$1v = v$*

则称 (S,P) 构成一个线性空间。

此外，如果对于给定空间的运算法则和数域是不言自明的，则通常简写为 S 是一个线性空间。如我们说 $\mathbb{R}^n$ 是一个线性空间，通常指 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 是一个线性空间或 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 是一个线性空间，具体取决于数域的选择。

线性无关与相关

待填写：*(定义)* 线性无关与线性相关

基、框架与维数

待填写：*(定义)* 基、框架与维数
性质：

- 空间的维度是一个内蕴量，与基的选择无关
- 多项式空间 P_N 中，$\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ 构成其一组基，维数为 $\dim P_N = N + 1$
- 连续函数空间 $C[a, b]$ 中，$\forall N$，$\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ 是线性无关的，但不能构成其基，因其维数为无穷大

1.1.2 度量与赋范空间

距离空间

定义 1.1.2 (距离空间). *设 M 是一个集合，$d : M \times M \to \mathbb{R}$ 是一个映射，如果对任意的 $x, y, z \in M$，满足以下三条公理，则称 (M,d) 为一个距离空间：*

1. *非负性与分离性：$d(x, y) \geq 0$，且当且仅当 $x = y$ 时，$d(x, y) = 0$*
2. *对称性：$d(x, y) = d(y, x)$*
3. *三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*

则称 (M,d) 构成一个距离空间。

距离空间的完备性

待填写：*(定义)* 完备性
$\mathbb{R}$ 是完备的，且任意有限维赋范空间都是完备的。

构造方法：距离空间的完备化 设 (M, d) 是一个距离空间，可以按照如下过程构造其完备化空间：

1. 构造对偶的柯西列空间

$$\tilde{M} = \{(x_n) \,|\, x_n \in M, \quad (x_n)\text{为柯西列}\} \tag{1.1}$$

2. 在柯西列空间 $\tilde{M}$ 中定义等价关系

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \tag{1.2}$$

即这两个柯西列按照角标顺序，交叉放在一起，还是柯西列。

3. 构造商空间：

$$\hat{M} = \tilde{M}/\sim = \{[\tilde{x}]\} \tag{1.3}$$

式中，$[\tilde{x}]$ 表示柯西列 $\tilde{x}$ 的等价类，即 $[\tilde{x}]$ 是一个集合，集合中的所有元素在等价关系 $\sim$ 下都是等价的。

4. 在商空间 $\hat{M}$ 中定义距离

$$\hat{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{1.4}$$

5. 则 $(\hat{M}, \hat{d})$ 即为距离空间 (M, d) 的完备化空间。

嵌入映射：可以在原空间 M 与完备化空间 $\hat{M}$ 之间定义一个单射 i：

$$i : M \to \hat{M}, \quad i(x) = [(x, x, x, \dots)] \tag{1.5}$$

该映射将原空间中的每个点 x 映射为完备化空间中由常值序列 $(x, x, x, \dots)$ 所构成的等价类，且**映射前后任意两元素的距离不变**

赋范空间与 Banach 空间

待填写：*(定义)* 赋范空间

完备的赋范空间称为 Banach 空间，或者 B 空间。

等价范数

定义 1.1.3 (范数的等价性)**.** *设 V 是一个线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 V 上的两个范数，如果存在正常数 c 和 C，使得对任意 $v \in V$，都有*

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1 \tag{1.6}$$

则称这两个范数是等价的。

若存在正数 C，使得对任意 $v \in V$，都有

$$\|v\|_2 \le C\|v\|_1 \tag{1.7}$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$。

性质：

- 在有限维线性空间上，任意两个范数都是等价的
- 在无限维线性空间上，范数不一定是等价的
- 若一个点列在较强的范数下是 Cauchy 列，则在较弱的范数下也是 Cauchy 列；反之不必然。

常用的范数

$\mathbb{R}^n$ 上的范数 记 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$，则常用的范数有：

- 无穷范数：所有元素的最大值

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \tag{1.8}$$

- 1-范数：所有元素的绝对值之和

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1.9}$$

- 2-范数：欧几里得范数，即所有元素的平方和的平方根

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

$C[a,b]$（有界闭区间上连续函数空间）上的范数

- 无穷范数：函数在区间上的最大绝对值

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \tag{1.11}$$

- 1-范数：函数在区间上的绝对值积分

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{1.12}$$

- 2-范数：函数在区间上的平方积分的平方根

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

$C[a,b]$ 上三个范数的性质：

- 任意两个范数不等价
- 无穷范数强于 2 范数，2 范数强于 1 范数
- 只有无穷范数对应的赋范空间是完备的
- 1-范数对应的完备化空间为 $L^1(a,b)$，2-范数对应的完备化空间为 $L^2(a,b)$ [1]

[1] $L^1(a,b)$ 为 (a,b) 上的可积函数空间，$L^2(a,b)$ 为 (a,b) 上的平方可积函数空间。

1.1.3 内积空间

内积定义与性质

定义 1.1.4 (内积). 设 (S,P) 是一个线性空间，如果对任意的 $u,v,w\in S$ 和 $a,b\in P$，存在一个映射 $S\times S\to P$，满足

1. 共轭对称性：$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$
2. 线性性：$\langle au+bv,w\rangle=a\langle u,w\rangle+b\langle v,w\rangle$
3. 正定性：$\langle v,v\rangle\geq 0$，且当且仅当 $v=0$ 时，$\langle v,v\rangle=0$

则称该映射为内积，(S,P) 构成一个内积空间。

若 $\langle x,y\rangle=0$，则称 x 与 y 正交。
几个常用空间上的内积：

- $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上的内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i} \tag{1.14}$$

- $C[a,b]$（有界闭区间上连续函数空间）上的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{1.15}$$

- $C[a,b]$ 上的带权内积：

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{1.16}$$

其中，权函数 $\rho(x)$ 需要满足条件：

- $\rho(x)\in C[a,b]$
- $\rho(x)$ 几乎处处为正
- $\int_a^b \rho(x)\,dx<+\infty$
- $\forall q(x)\in P_n$，$\int_a^b \rho(x)|q(x)|\mathrm{d}x<\infty$

带权内积所研究的空间称为加权内积空间：

$$L^2_\rho(a,b)=\{f(x)\mid \int_a^b \rho(x)|f(x)|^2\,dx<+\infty\} \tag{1.17}$$

常用的权函数有：

$$\rho(x)=1,\quad [a,b]=[-1,1] \tag{1.18}$$

$$\rho(x)=\frac{1}{1-x^2},\quad [a,b]=[-1,1] \tag{1.19}$$

$$\tag{1.20}$$

正交性与 Schmidt 正交化

待填写：*(定义)* 正交性

待填写：*(方法)* 用 *Grammer* 矩阵判断内积空间中向量组的线性无关性

待填写：*(方法)Schmidt* 正交化过程：从一个线性无关向量组构造一个正交向量组：让每个向量减去与已有空间垂直的分量

用 Schmidt 正交化过程得到的正交向量组具有以下性质：

$$\Phi_{k-1} \subset \Phi_k \tag{1.21}$$

$$y_k \perp \Phi_{k-1} \tag{1.22}$$

由内积诱导的范数

定义 1.1.5 (诱导范数). 设 (S,P) 是一个内积空间，则可以定义范数 $\|\cdot\|$ 如下：

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \tag{1.23}$$

则称该范数为由内积诱导的范数。

- 任何内积均能诱导对应的范数
- 当且仅当范数满足平行四边形法则时

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \tag{1.24}$$

  范数可以诱导内积：

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{1.25}$$

1.1.4 正交多项式

定义 1.1.6 (正交多项式). 设 $\{\phi_n(x)\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一组多项式，且每个多项式的次数为 n，如果对任意 $m \neq n$，都有

$$\int_a^b \rho(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0 \tag{1.26}$$

则称 $\{\phi_n(x)\}$ 为区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的正交多项式。

正交多项式的性质：

- $\deg \phi_i = i$
- $(\phi_i, \phi_j) = 0, \quad \forall i \neq j$
- ϕ_n 为实系数多项式
- ϕ_n 在开区间 (a,b) 内恰有 n 个实单根

待填写：*(证明)*ϕ_n 在开区间 (a,b) 内恰有 n 个实单根的证明。证法：分别证明实根、单根、全在 (a,b) 内。*3* 个命题均可用反证法。

$\rho = 1$：Legendre 多项式

产生方法：

- 权函数 $\rho(x) = 1$
- 区间 $[-1, 1]$

表达式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{1.27}$$

性质：

- 首项系数：

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \tag{1.28}$$

- 正交归一化：

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \tag{1.29}$$

- 三项递推关系：

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{1.30}$$

- 奇偶性：

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{1.31}$$

- 导数关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) = \frac{n}{x^2-1}[xP_n(x) - P_{n-1}(x)] \tag{1.32}$$

- 前五项：

$$P_0(x) = 1 \tag{1.33}$$

$$P_1(x) = x \tag{1.34}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \tag{1.35}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{1.36}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \tag{1.37}$$

Chebyshev 多项式

产生方法：

- 权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 区间 $[-1, 1]$

表达式：

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{1.38}$$

性质：

- 首项系数：2^{n-1}
- 正交归一化：

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{1.39}$$

- 三项递推关系：

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \tag{1.40}$$

- 奇偶性：

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \tag{1.41}$$

- 前五项：

$$T_0(x) = 1 \tag{1.42}$$
$$T_1(x) = x \tag{1.43}$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{1.44}$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \tag{1.45}$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{1.46}$$

- 零点：

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.47}$$

- 极值点：

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1.48}$$

- 简单表达式：当 $|x| \geq 1$ 时，

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \tag{1.49}$$

1.1.5 矩阵空间

待填写：*(性质)* 矩阵空间的基本性质：线性空间、乘法运算、代数性质

矩阵范数

定义 1.1.7 (矩阵范数). *矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为矩阵范数，如果对任意的 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $a \in \mathbb{C}$，满足以下性质：*

1. *非负性与分离性：$\|A\| \geq 0$，且当且仅当 $A = 0$ 时，$\|A\| = 0$*
2. *齐次性：$\|aA\| = |a|\|A\|$*
3. *三角不等式：$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$*
4. *次乘性：$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$*

Note: 矩阵范数是定义在矩阵代数而非矩阵空间上的，必须与矩阵乘法相容。

定义 1.1.8 (矩阵范数与向量范数的相容性). *设 $\|\cdot\|_v$ 是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数，$\|\cdot\|_m$ 是矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一个范数，如果对任意的 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$，都有*

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|x\|_v \tag{1.50}$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 与向量范数 $\|\cdot\|_v$ 是相容的。

矩阵范数的两种常见构造方法：

- 直接构造：Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.51}$$

  Frobenius 范数的性质：

  - Frobenius 范数与向量 2-范数相容
  - $\|I\|_F = \sqrt{n}$

- 向量范数诱导：算子范数

  定义 1.1.9 (算子范数). *设 $\|\cdot\|_v$ 是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数，则可以定义矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的算子范数 $\|\cdot\|_m$ 如下：*

$$\|A\|_m = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v \tag{1.52}$$

  则称该范数为由向量范数 $\|\cdot\|_v$ 诱导的算子范数。

常用的几个算子范数：

- 无穷范数：行和最大值

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.53}$$

- 1-范数：列和最大值

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.54}$$

- 2-范数（谱范数）：A 的最大奇异值，即 A^HA 的最大特征值的平方根

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)} \tag{1.55}$$

谱半径

定义 1.1.10 (谱半径). 谱半径定义为矩阵所有特征值模的最大值，即

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| \tag{1.56}$$

谱半径和矩阵范数的关系：

- 矩阵范数下界：

  定理 1.1.11. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$\rho(A) \le \|A\| \tag{1.57}$$

- 无穷接近范数的存在性：

  定理 1.1.12. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，存在一个矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得

$$\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A) + \varepsilon \tag{1.58}$$

  其中，ε 为任意给定的正常数。

可逆矩阵相关定理

定理 1.1.13 (扰动引理 I). 给定 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。设 $\|B\| < 1$，则 $I + B$ 可逆，且

$$\|(I+B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|} \tag{1.59}$$

定理 1.1.14 (扰动引理 II). 设 $A, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 可逆。若

$$\|C - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \tag{1.60}$$

则 C 也可逆，且

$$\|C^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|C - A\|} \tag{1.61}$$

定理 1.1.15 (扰动定理 II). 设 $A, \delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 可逆。若 $\|A^{-1}\delta A\| < 1$，则 $A + \delta A$ 也可逆，且

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} \tag{1.62}$$

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 通用理论

2.1.1 问题模型

待填写：*(数学描述)* 采样泛函视角下的插值问题数学描述

2.1.2 插值空间

常用的插值空间：多项式函数空间、样条函数空间、三角多项式函数空间

2.1.3 误差分析与收敛性

2.2 具体插值方法

2.2.1 一维多项式插值

问题：给定插值数据（采样数据）(x_α, f_α)，$\alpha \in I$，确定多项式 $P(x) \in P_n$，$n = |I| - 1$，满足插值条件

$$x_\alpha(P) = P(x_\alpha) = f_\alpha, \quad \alpha \in I \tag{2.1}$$

定理 2.2.1 (多项式插值基本定理)**.** *给定 $n+1$ 个插值条件*

$$(x_\alpha, f_\alpha), \quad \alpha \in I, \quad x_\alpha \neq x_\beta \ for\ \alpha \neq \beta \tag{2.2}$$

则存在唯一的插值多项式 $P \in P_n$ 满足插值条件。

Note：若 x_α 取之于复平面，上述定理依然成立；且上述定理与采样节点的排序无关。

Lagrange 插值

基函数构造

定义 2.2.2 (Lagrange 插值基函数). 定义

$$L_\alpha(x) = L_{\alpha;I}(x) = \prod_{\substack{\beta\in I\\ \beta\neq\alpha}} \frac{x - x_\beta}{x_\alpha - x_\beta}, \quad \alpha \in I \tag{2.3}$$

称为插值基函数。

若给定 3 个插值条件 (x_0, f_0)，(x_1, f_1)，(x_2, f_2)，则对应的插值基函数为

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \tag{2.4}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \tag{2.5}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{2.6}$$

插值基函数天然满足性质：

$$x_\beta(L_\alpha) = L_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

插值公式 在计算出插值基函数的基础上，插值多项式可写为：

$$P(x) = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha L_\alpha(x) \tag{2.8}$$

余项

均差定义

定义 2.2.3 (均差的递推公式). 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，则定义如下均差：

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{2.9}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{2.10}$$

其中，$i = 0, 1, \ldots, n - k$，$k = 1, 2, \ldots, n$。

均差的性质：

- $f_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ 与节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ 的顺序无关
- 设 f 是 N 次多项式，若 $k > N$，则对任意节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$，都有

$$f_{i_0 i_1 \ldots i_k} = 0 \tag{2.11}$$

插值公式

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + f_{i_0 i_1 i_2}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \dots \\ + f_{i_0 i_1 \dots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-1}}) \tag{2.12}$$

Newton 插值多项式的列表计算 以给定 4 个节点时 x_0, x_1, x_2, x_3 的插值问题为例。可以按照如下表格从左向右逐列填写计算均差：

x_i	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
x_0	$\boxed{f(x_0)}$			
		$\boxed{f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$		
x_1	$f(x_1)$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$		$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dots}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

之后用插值表最上方一行的均差值逐个组装 Newton 插值多项式。

Hermite 插值

Hermite 插值问题 给定 ξ_i, $f_i^{(k)}$, $i = 0, 1, ..., m$, $k = 0, 1, ..., n_i - 1$, 其中 ξ_i 两两不同，且

$$\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_m \tag{2.13}$$

希望确定一个次数为 n 的多项式函数

$$P_n(x), \quad n = \sum_{i=0}^{m} n_i - 1 \tag{2.14}$$

满足插值条件

$$P^{(k)}(\xi_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, ..., m \quad k = 0, 1, ..., n_i - 1 \tag{2.15}$$

拓展均差

定义 2.2.4 (拓展均差). 设 $f \in C^n(I(x_0, x_1, ..., x_n))$，定义

$$f[x_0, x_1, x_n] = \int_0^{t_0} \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n$$

$$f^{(n)}(t_n[x_n - x_{n-1}] + t_{n-1}[x_{n-1} - x_{n-2}] + ... + t_1[x_1 - x_0] + t_0 x_0)$$

式中，$n \geq 1$ 且 $t_0 = 1$。

Note: 这一积分实际上表示了一个单位标准 n-维标准型上的积分，或者说积分区域始终是一个插值节点构造的凸组合。这隐含了一个要求是 $1 = t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n \geq 0$。

拓展均差的性质：

- 若 x_i 两两不一，则拓展均差等价于普通均差

$$f[x_0, x_1, x_n] = f_{x_0, x_1, ..., x_n} \tag{2.16}$$

  且具有相同的递推关系：

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{2.17}$$

- 极限性质：若 f 足够光滑，则

$$\lim_{\epsilon_i \to 0} f[x_0 + \epsilon_0, x_1 + \epsilon_1, ..., x_n + \epsilon_n] = f[x_0, x_1, ..., x_n] \tag{2.18}$$

- 导数与重节点：可从极限性质导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x] \tag{2.19}$$

- 介值定理：若 $f \in C^n[a, b]$，$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$，则存在 $\xi \in I(x_0, x_1, ..., x_n)$，使得

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{2.20}$$

  特别地，

$$f[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n+1\text{个}}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \tag{2.21}$$

Hermite 插值多项式 Hermite 插值多项式可表示为

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \tag{2.22}$$

其中，$x_0, ..., x_n$ 为下面序列的任意置换：

$$\underbrace{\xi_0, \xi_0, ..., \xi_0}_{n_0\text{个}}, \underbrace{\xi_1, \xi_1, ..., \xi_1}_{n_1\text{个}}, ..., \underbrace{\xi_m, \xi_m, ..., \xi_m}_{n_m\text{个}} \tag{2.23}$$

列表法求 Hermite 插值多项式 假设给定 2 个节点 ξ_0, ξ_1，对应的插值条件分别为 f_0, f_0', f_0''，f_1，则可按下表计算均差：

Hermite 插值均差表（节点序列：$\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1$）：

节点	0 阶均差	1 阶均差	2 阶均差	3 阶均差
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$			
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f_0'$		
ξ_0	$f[\xi_0] = f_0$	$f[\xi_0, \xi_0] = f_0'$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0] = \frac{f_0''}{2}$	
ξ_1	$f[\xi_1] = f_1$	$f[\xi_0, \xi_1] = \frac{f_1 - f_0}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$	$f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1] = \frac{f[\xi_0, \xi_0, \xi_1] - f[\xi_0, \xi_0, \xi_0]}{\xi_1 - \xi_0}$

对应的插值多项式为：

$$\begin{aligned}
P(x) &= f[\xi_0] + f[\xi_0, \xi_0](x - \xi_0) + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0](x - \xi_0)^2 + f[\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_1](x - \xi_0)^3 \\
&= f_0 + f_0'(x - \xi_0) + \frac{f_0''}{2}(x - \xi_0)^2 \\
&\quad + \frac{2(f_1 - f_0 - f_0'(\xi_1 - \xi_0)) - f_0''(\xi_1 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}(x - \xi_0)^3
\end{aligned}$$

Lagrange 插值和 Hermite 插值的收敛分析

插值余项 若 f 在区间 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶连续导数，则对任意 $x \in [a, b]$，存在 $\xi \in I(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$，使得

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{01\ldots n}(x) \tag{2.24}$$

收敛性 收敛性的定义：当给定插值点的最大间距 $h \to 0$ 时，插值余项 $R(x) \to 0$，则称插值多项式序列在区间 $[a, b]$ 上收敛于函数 $f(x)$。

定义 2.2.5 (多项式插值收敛定义)**.** *设 $f \in C^\infty[a, b]$，且存在正常数 $M > 0$，使得对任意的 $n \geq 0$，都有*

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq M \tag{2.25}$$

则对任意在 $[a, b]$ 上的插值节点序列 $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$，对应的插值多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上均匀收敛于 $f(x)$。

收敛的充分条件：

定理 2.2.6. *记 $\delta = |I(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)|$, $\tilde{x}$ 为 I 的中心。若 f 在 $B(\tilde{x}, w\delta)$ 上复解析，则对任意 $\bar{x} \in I$，插值法收敛。*

2.2.2 分段插值

分段线性插值

待填写：*()* 分片线性插值问题描述

分片线性插值的插值基函数

定义 2.2.7 (分片线性插值基函数). 设给定插值节点 $x_0 < x_1 < ... < x_n$，则定义分片线性插值基函数为

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2.26}$$

其中，$i = 0, 1, ..., n$，且约定 $x_{-1} = x_0$，$x_{n+1} = x_n$。

则线性插值基函数为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k l_k(x) \tag{2.27}$$

分片线性插值的收敛性定理 定义

$$h = \max_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.28}$$

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h\to 0} \|f-\phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{h}{2}\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$

分段三次 Hermite 插值

待填写：*()* 分片三次 ***Hermite*** 插值的数学描述

插值基函数 分段三次 Hermite 插值的基函数满足如下条件：

$$\alpha_k(x_i) = \delta_{ik}, \quad \alpha_k'(x_i) = 0 \tag{2.29}$$

$$\beta_k(x_i) = 0, \quad \beta_k'(x_i) = \delta_{ik} \tag{2.30}$$

在单元 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，三次 Hermite 插值基函数为

$$\alpha_k = \left(1 + 2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \tag{2.31}$$

$$\beta_k = (x-x_k)\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \tag{2.32}$$

$$\alpha_{k+1} = \left(1 + 2\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \tag{2.33}$$

$$\beta_{k+1} = -(x_{k+1}-x)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \tag{2.34}$$

- α_k 满足单位分解性：$\alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$
- $\alpha_k(x_i) = \delta_{ik}$，$\alpha_k'(x_i) = 0$
- $\beta_k(x_i) = 0$，$\beta_k'(x_i) = \delta_{ik}$

三次 Hermite 插值多项式

$$\phi = \sum_{k=0}^{n} [f_k \alpha_k(x) + f'_k \beta_k(x)] \tag{2.35}$$

收敛性定理

定义 2.2.8 (分段三次 Hermite 插值收敛性定理). 设 $f \in C^1[a,b]$，则分段三次 *Hermite* 插值多项式 ϕ 满足

$$\|f - \phi\|_\infty \le ch\|f'\|_\infty \tag{2.36}$$

若 f 有更好的光滑性，则：

- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^2\|f''\|_\infty$
- 若 $f \in C^3[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

此外，对于不高于三次的多项式，分段三次 Hermite 插值是精确的。

2.2.3 Fourier 插值

离散傅里叶变换

待填写：*(定义)* 离散傅里叶变换式、变换式系数表达式

如果 f 的光滑性满足 $f \in C^M_{per}$，则有

$$a_n = O(n^{-M}) \tag{2.37}$$

$$b_n = O(n^{-M}) \tag{2.38}$$

且

$$\|f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx\right]\|_\infty = O(N^{-M}) \tag{2.39}$$

三角多项式插值空间

三角多项式插值空间为：

$$\Phi_{2M+1} := \left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right\} \tag{2.40}$$

$$\Phi_{2M} := \left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M-1}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) + A_M \cos Mx\right\} \tag{2.41}$$

三角多项式插值与一般多项式插值

待填写：*(问题)* 三角多项式插值问题的数学描述
待填写：*(问题)* 辅助插值问题：找相多项式
待填写：*(理论)* 两个插值问题之间的联系：欧拉公式

插值定理与三角插值多项式

定理 2.2.9 (三角多项式插值定理). 设给定插值节点

$$x_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.42}$$

则对任意插值数据 f_k，存在唯一的三角多项式

$$P(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{2.43}$$

（当 N 为奇数时，$M = \frac{N-1}{2}$；当 N 为偶数时，$M = \frac{N}{2}$）满足插值条件

$$P(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.44}$$

同样，存在唯一的相多项式

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n e^{inx} \tag{2.45}$$

满足插值条件

$$Q(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.46}$$

- 三角插值多项式：

$$A_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, M \tag{2.47}$$

$$B_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, M \tag{2.48}$$

- 相插值多项式：

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{-kj}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.49}$$

式中，$w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$。

Chapter 3

函数逼近

3.1 通用理论

3.1.1 问题模型

待填写：*(函数逼近问题的)*

3.1.2 逼近准则

最小二乘准则（L 范数）

一致逼近准则（L∞ 范数）

3.1.3 核心定理

3.2 具体逼近方法

3.2.1 最优平方逼近

线性最小二乘

加权平方逼近

正交多项式逼近

3.2.2 最优一致逼近

Chapter 4

数值微积分

4.1 数值积分

4.1.1 通用理论

积分问题模型

求积公式核心

代数精度

稳定性

4.1.2 具体求积方法

Newton-Cotes 公式

梯形公式

Simpson 公式

3/8 - 规则

复合求积方法

复合梯形公式

复合 Simpson 公式

加速方法

Romberg 方法

Gauss 型求积

Gauss 点与权系数

Gauss-Legendre 求积

Gauss-Chebyshev 求积

特殊积分处理

奇异积分

振荡积分

高维积分

蒙特卡洛方法

4.2 数值微分

4.2.1 基础方法

向前差商

向后差商

中心差商

4.2.2 高精度方法

插值型数值微分

Richardson 外推加速

Chapter 5

非线性方程求根

5.1 通用理论

5.1.1 问题模型

5.1.2 迭代法基础

5.1.3 收敛性分析

收敛阶定义

整体收敛性（压缩映像原理）

局部收敛性判定

5.1.4 收敛效率

5.2 具体方法

5.2.1 单步法

牛顿法

迭代公式

收敛性分析

重根处理

不动点迭代

5.2.2 多步法

割线法

5.2.3 其他方法

Steffensen 方法

Broyden 秩 1 方法

Chapter 6

常微分方程初值问题数值解法

6.1 通用理论

6.1.1 问题模型

6.1.2 数值解法核心

6.1.3 基本概念

局部截断误差与整体截断误差

收敛性与收敛阶

稳定性与相容性

6.1.4 收敛性与稳定性判定

6.2 具体方法

6.2.1 单步法

Euler 方法

向前欧拉

向后欧拉

改进欧拉方法

龙格 - 库塔（RK）方法

2 阶 RK 方法

4 阶 RK 方法

6.2.2 多步法

Adams 方法

显式 Adams 公式

隐式 Adams 公式

Nyström 方法

Milne-Simpson 方法

Chapter 7

线性代数方程组数值解法

7.1 直接解法

7.1.1 通用理论

问题模型

残差与误差分析

数值稳定性与条件数

7.1.2 具体方法

Gauss 消元法

基本步骤

主元素选取

LU 分解

特殊方程组解法

Thomas 算法（三对角方程组）

Toeplitz 矩阵快速解法

7.2 定常线性迭代解法

7.2.1 通用理论

迭代格式构造

收敛性判定

收敛速度

7.2.2 具体迭代法

Jacobi 迭代

Gauss-Seidel 迭代

SOR 迭代

松弛因子选取

最优松弛因子

7.3 非线性迭代解法（基于变分原理）

7.3.1 通用理论

Ritz 变分原理

迭代核心思想

7.3.2 具体方法

最速下降法

共轭梯度法（**CG**）

迭代公式

收敛性分析

预条件技术

预条件矩阵选取

预条件 **CG** 迭代格式