Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 12 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小。*

证明：

提示：考虑 $f = \tilde{P}_n + a_{n-1}\tilde{P}_{n-1} + ... + a_1\tilde{P}_1 + a_0\tilde{P}_0$ 和误差函数 $\|f-0\|^2$

1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 1.2.2. *在所有首项为 2^{n-1} 的 n 次多项式中，Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的一致误差最小。*

证明：

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式). 设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个两两不同的节点，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.1}$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明：

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题：定义

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.2}$$

则进行分片线性插值时，

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h\to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h}{2}\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时，

- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^2\|f''\|_\infty$

- 若 $f \in C^3[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

证明：

Note：分片线性插值只要做泰勒展开即可；分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出，低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析

2.2 函数逼近

2.3 补充内容

2.3.1 Schauder 基

2.4 重要证明

2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

定理 2.4.1. 设 $f \in C[a,b]$，Φ 为 $C[a,b]$ 的有限维子空间，则存在唯一的 $\phi^* \in \Phi$，使得

$$\|f-\phi^*\| = \min_{\phi\in\Phi}\|f-\phi\| \tag{2.3}$$

证明：

2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到 $(C[a,b],\|\cdot\|_2)$ 的完备化空间 $(\overline{C[a,b]},\|\cdot\|_2)$ 中的一个元素。若 $\|\cdot\|_2$ 为权系数 ρ 的内积诱导范数，则 $(\overline{C[a,b]},\|\cdot\|_2)$ 即为 $L^2_\rho(a,b)$。

2、设 $f \in C[a,b]$，$\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m\phi_m(x), \quad a_m = (f,\phi_m) \tag{2.4}$$

在 $C[a,b]$ 中一致收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{m=0}^{n} a_m\phi_m(x)\right\|_\infty = 0 \tag{2.5}$$

证明：

提示：1 的证明用到 $\sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$，2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

定理 2.4.2 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则在 n 次多项式空间 P_n 中，存在一个多项式 $p_n^* \in P_n$，使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \tag{2.6}$$

即 P_n 中关于 $f \in C[a,b]$ 的最小偏差是可以达到的。

证明：

提示：利用偏差泛函的性质

2.4.4 Chebyshev 交错点组定理

定理 2.4.3 (Chebyshev 交错点组定理). 设 $f \in C[a,b]$，$p_n^* \in P_n$ 为 f 在 P_n 中的最佳一致逼近多项式，则存在 $a \le x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \le b$，使得

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \|f - p_n^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, ..., n+1 \tag{2.7}$$

即误差函数在 $n+2$ 个点上达到最大偏差且符号交替。

证明：

提示：分别证明必要性和充分性，且均用到反证法。

2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理

定理 2.4.4 (最佳一致逼近唯一性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则 f 在 n 次多项式空间 P_n 中的最佳一致逼近多项式 p_n^* 是唯一的。

证明：

提示：反证法。

2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记 $\Phi = \mathrm{span}(1, x^2)$，求 $x \in [0,1]$ 上在 Φ 中的最佳平方逼近。

Chapter 3

数值微积分

3.1 补充内容

3.2 重要证明

3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.3 重要习题与例题

Chapter 4

常微分方程数值解

4.1 补充内容

4.2 重要证明

4.2.1 一步误差与局部截断误差的关系

$$(1 - h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \leq |R_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \tag{4.1}$$

4.3 重要习题与例题

4.3.1 求相容阶和主局部截断误差：泰勒级数展开法

欧拉法

梯形方法

4.3.2 二阶和三阶显式 RK 的推导