Numerical Analysis
Exam Appendix

Astral Projection

2026 年 1 月 15 日

目录

Chapter 1

数学基础知识

1.1 补充内容

1.1.1 矩阵的可分性

1.2 重要证明

1.2.1 Legender 多项式的零平方误差最小性质

定理 1.2.1. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小。*

证明：

考虑一个首项为 1 的 n 次多项式 $f \in \mathbb{P}_n$，必有

$$f = \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{P}_k(x) \tag{1.1}$$

考虑误差函数

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{a}) &= \|f(x) - 0\|_2^2 \qquad (1.2) \\ &= \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\mathrm{d}x + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_k(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^{1} \tilde{P}_k^2(x)\mathrm{d}x \qquad (1.3) \end{aligned}$$

由 Legendre 多项式的正交性，

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i(x)\tilde{P}_j(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij} \tag{1.4}$$

于是

$$\phi(\boldsymbol{a}) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^{1} \tilde{P}_k^2(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

当且仅当 $a_k = 0$ 时，$\phi(\boldsymbol{a})$ 取得最小值，即 Legendre 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的平方误差最小。

1.2.2 Chebyshev 多项式的零一致误差最小性质

定理 1.2.2. *在所有首项为 1 的 n 次多项式中，Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的一致误差最小。*

证明：

方法 1：将一致误差转化，并考虑在 $\mathbb{P}_{n-1}$ 上的最佳一致逼近多项式

$$f = \tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x) \tag{1.7}$$

考虑误差函数

$$\begin{aligned}
\Delta(f, 0) =& \|f(x) - 0\|_\infty && (1.8)\\
=& \|\tilde{T}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)\|_\infty && (1.9)\\
=& \|\tilde{T}_n(x) - \left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)\right)\|_\infty && (1.10)\\
=& \Delta(\tilde{T}_n, -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) && (1.11)
\end{aligned}$$

该误差函数取得最小值时，即为

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{a}} \Delta(\tilde{T}_n, -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{T}_k(x)) =& \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathrm{span}\{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_{n-1}\}) && (1.12)\\
=& \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) && (1.13)
\end{aligned}$$

则只要证 $\mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, 0)$ 即可。

考虑到 $\tilde{T}_n$ 在 $[-1,1]$ 上恰有 $n+1$ 个极值点，且这些极值点构成了一个 n+1 个点的交错点组，故 0 就是 $\tilde{T}_n$ 在 $\mathbb{P}_{n-1}$ 中的最佳一致逼近多项式，因此

$$\mathrm{dist}(\tilde{T}_n, \mathbb{P}_{n-1}) = \mathrm{dist}(\tilde{T}_n, 0) \tag{1.14}$$

因此，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，误差函数可以取得最小值，即 Chebyshev 多项式在所有首项为 1 的 n 次多项式中与零的一致误差最小。

方法 2: 利用交错点组证明差多项式为 0 假设存在另一个首项为 1 的 n 次多项式 $f_n(x)$，使得 $\|f_n(x)-0\|_\infty < \|T_n(x)-0\|_\infty$。

考虑

$$Q(x) = f_n(x) - \tilde{T}_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1} \tag{1.15}$$

在 $\tilde{T}_n$ 的 n+1 个极值点 x_k 处，设 $\tilde{T}_n$ 取得极值 $\pm M$，则由于 $\|f_n(x)-0\|_\infty < \|T_n(x)-0\|_\infty$，必有

$$|f_n(x_k)| < M \tag{1.16}$$

因此

$$Q(x_k) = \begin{cases} M - p(x_k) > 0, & k\text{为偶数} \\ -M - p(x_k) < 0, & k\text{为奇数} \end{cases} \tag{1.17}$$

于是 Q 在区间内 n+1 个点上符号交替，故 Q 至少有 n 个零点。由于 $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$，Q 只能为 0. 于是 $f_n(x) = \tilde{T}_n(x)$，与假设矛盾。

1.3 例题与习题

Chapter 2

函数插值与重构

2.1 重要证明

2.1.1 插值多项式的误差函数

定理 2.1.1 (插值多项式误差公式)**.** 设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个两两不同的节点，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.1}$$

其中 $p(x)$ 为通过节点 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式。

证明：

2.1.2 分片线性插值和分片三次 Hermite 插值的收敛性定理

命题：定义

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \tag{2.2}$$

则进行分片线性插值时，

- 若 $f \in C[a,b]$，则 $\lim_{h \to 0} \|f - \phi\|_\infty \to 0$
- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h}{2} \|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

进行分片三次 Hermite 插值时，

- 若 $f \in C^1[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch\|f'\|_\infty$
- 若 $f \in C^2[a,b]$，则 $\|f - \phi\|_\infty \le ch^2\|f''\|_\infty$

- 若 $f \in C^3[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le ch^3\|f'''\|_\infty$
- 若 $f \in C^4[a,b]$，则 $\|f-\phi\|_\infty \le \frac{1}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty$

证明：

Note：分片线性插值只要做泰勒展开即可；分片三次 Hermite 插值在 4 阶光滑性时可以通过余项公式给出，低于 4 阶光滑性需要用到 Peano 核定理。

2.1.3 三角插值多项式形式、相多项式形式

2.1.4 三角插值的误差分析

2.2 函数逼近

2.3 补充内容

2.3.1 Schauder 基

2.4 重要证明

2.4.1 最佳平方逼近存在唯一性定理

定理 2.4.1. 设 $f \in C[a,b]$，Φ 为 $C[a,b]$ 的有限维子空间，则存在唯一的 $\phi^* \in \Phi$，使得

$$\|f-\phi^*\| = \min_{\phi\in\Phi}\|f-\phi\| \tag{2.3}$$

证明：

2.4.2 广义傅里叶展开收敛性的证明

1、广义傅里叶级数收敛到 $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ 的完备化空间 $(\bar{C[a,b]}, \|\cdot\|_2)$ 中的一个元素。若 $\|\cdot\|_2$ 为权系数 ρ 的内积诱导范数，则 $(\bar{C[a,b]}, \|\cdot\|_2)$ 即为 $L^2_\rho(a,b)$。

2、设 $f \in C[a,b]$，$\{\phi_m\}_{m=0}^\infty$ 为 $C[a,b]$ 中的规范正交函数组，则 f 在 $\{\phi_m\}$ 下的广义傅里叶展开

$$f \sim \sum_{m=0}^\infty a_m\phi_m(x), \quad a_m = (f,\phi_m) \tag{2.4}$$

在 $C[a,b]$ 中一致收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{m=0}^n a_m\phi_m(x)\right\|_\infty = 0 \tag{2.5}$$

证明：

提示：1 的证明用到 $\sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$，2 的证明用到 Weierstrass 逼近定理。

2.4.3 最佳一致逼近存在性定理

定理 2.4.2 (最佳一致逼近存在性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则在 n 次多项式空间 P_n 中，存在一个多项式 $p_n^* \in P_n$，使得

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_\infty \tag{2.6}$$

即 P_n 中关于 $f \in C[a,b]$ 的最小偏差是可以达到的。

证明：

提示：利用偏差泛函的性质

2.4.4 Chebyshev 交错点组定理

定理 2.4.3 (Chebyshev 交错点组定理). 设 $f \in C[a,b]$，$p_n^* \in P_n$ 为 f 在 P_n 中的最佳一致逼近多项式，则存在 $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \leq b$，使得

$$f(x_i) - p_n^*(x_i) = (-1)^i \|f - p_n^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, ..., n+1 \tag{2.7}$$

即误差函数在 $n+2$ 个点上达到最大偏差且符号交替。

证明：

提示：分别证明必要性和充分性，且均用到反证法。

2.4.5 最佳一致逼近唯一性定理

定理 2.4.4 (最佳一致逼近唯一性定理). 设 $f \in C[a,b]$，则 f 在 n 次多项式空间 P_n 中的最佳一致逼近多项式 p_n^* 是唯一的。

证明：

提示：反证法。

2.5 重要例题与习题

求解最佳平方逼近

记 $\Phi = \text{span}(1, x^2)$，求 $x \in [0,1]$ 上在 Φ 中的最佳平方逼近。

Chapter 3

数值微积分

3.1 补充内容

3.2 重要证明

3.2.1 闭型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.2.2 开型 Newton-Cotes 公式的导出与误差分析

3.3 重要习题与例题

Chapter 4

常微分方程数值解

4.1 补充内容

4.1.1 一致 Lipschitz 常数的求解

若 $f(t,y)$ 关于 y 连续可微，则 Lipschitz 常数即为区间内 f 对 y 的偏导数的最大值，即

$$L = \max_{(t,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \tag{4.1}$$

4.2 重要证明

4.2.1 y 的各阶导数

当 $y' = f(t,y)$ 时，求 y 的各阶导数。

符号规范：记 $\partial f/\partial x_i = f_i$，即 f_i 是 f 对第 i 个变量的偏导数。在当前情境中，有

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{4.3}$$

求解：

题目条件为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,y) \tag{4.4}$$

即将对 y 的求导转化为了对 f 的全微分。于是有算符关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.5}$$

因此

$$
\begin{aligned}
y' &= f && (4.6)\\
y'' &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} && (4.7)\\
&= f_1 + ff_2 && (4.8)\\
y''' &= \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + f\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + f_2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} && (4.9)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t} + f\frac{\partial f_1}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + f\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + f_2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) && (4.10)\\
&= f_{11} + ff_{12} + f(f_{21} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.11)\\
&= f_{11} + 2ff_{12} + f^2 f_{22} + f_2(f_1 + ff_2) && (4.12)
\end{aligned}
$$

4.2.2 一步误差与局部截断误差的关系

$$
(1 - h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \le |R_{n+1}| \le (1 + h_{n+1}L)|\tilde{R}_{n+1}| \tag{4.13}
$$

4.3 重要习题与例题

4.3.1 求相容阶和主局部截断误差：泰勒级数展开法

欧拉法

梯形方法

4.3.2 显式 RK 的推导

基本思路：

局部截断误差为

$$
\begin{aligned}
R &= y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y, f) && (4.14)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(t) h^k && (4.15)\\
&\quad - y(t) && (4.16)\\
&\quad - h \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k h^k && (4.17)
\end{aligned}
$$

要令 RK 具有 n 阶相容性，即要令

$$
R = p_{n+1}(t) h^{n+1} + O(h^{n+2}) \tag{4.18}
$$

需要消去 R 中低于 h^{n+1} 的各阶项，即可得到一系列关于 a_{ij}, b_i, c_i 的方程。

计算方法即为：

- 在 t 点对 $t(t+h)$ 作泰勒展开
- 在 (t_n, y_n) 对 $\phi(t_n, y_n, f)$ 作多元泰勒展开
- 令各阶系数相等，即

$$\phi_k = \frac{1}{(k+1)!} y^{(k+1)} \tag{4.19}$$

显式二阶推导

显式 RK 参数矩阵：

$$\begin{array}{c|cc} c_1 = 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 = 1 \end{array} \tag{4.20}$$

RK 斜率：

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{4.21}$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(t_n, y_n)) \tag{4.22}$$

增量函数：

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2 \tag{4.23}$$

对 k_1, k_2 作泰勒展开：

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f \tag{4.24}$$

$$k_2 = f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot c_2 h f + O(h^2) \tag{4.25}$$

则 $\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$ 的展开可表示为

$$\text{常数项：} \phi_0 = (b_1 + b_2) f \tag{4.26}$$

$$\text{一次项系数：} \phi_1 = b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 \tag{4.27}$$

对 y 进行泰勒展开：

$$y' = f(t, y) \tag{4.28}$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = f_1 + f f_2 \tag{4.29}$$

因此需要满足关系

$$(b_1 + b_2) f = y' = f \tag{4.30}$$

$$b_2 c_2 f_1 + b_2 c_2 f f_2 = \frac{1}{2} y'' = \frac{1}{2} (f_1 + f f_2) \tag{4.31}$$

即

$$b_1 + b_2 = 1 \tag{4.32}$$
$$b_2 c_2 = \frac{1}{2} \tag{4.33}$$

显式三阶推导

RK 参数矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 = 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 + & b_2 + & b_3 = 1 \end{array} \tag{4.34}$$

RK 斜率：

$$\begin{aligned}
k_1 =& f(t_n, y_n) = f && (4.35)\\
k_2 =& f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) && (4.36)\\
=& f + f_1 c_2 h + f_2 \cdot a_{21} h f && (4.37)\\
&+ \frac{f_{11}(c_2 h)^2 + 2 f_{12}(c_2 h)(a_{21} h k_1) + f_{22}(a_{21} h k_1)^2}{2} + O(h^3) && (4.38)\\
=& f + c_2 f_1 h + a_{21} f f_2 h && (4.39)\\
&+ \frac{c_2^2 f_{11} + 2 a_{21} c_2 f f_{12} + a_{21}^2 f^2 f_{22}}{2} h^2 + O(h^3) && (4.40)\\
=& f + c_2 (f_1 + f f_2) h + \frac{c_2^2}{2}(f_{11} + 2 f f_{12} + f^2 f_{22}) h^2 + O(h^3) && (4.41)\\
k_3 =& f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) && (4.42)\\
=& f + f_1 c_3 h + f_2 h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) && (4.43)\\
&+ \frac{f_{11} c_3^2 h^2 + 2 f_{12} \cdot c_3 h \cdot h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2) + f_{22}(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)^2 h^2}{2} + O(h^3) && (4.44)\\
& && (4.45)
\end{aligned}$$

此时，向 k_3 中代入 k_1 和 k_2 时，不一定要带入到 h^2 项，只要令所有的 h^2 项系数正确即可。于是有

$$\begin{aligned}
k_3 =& f + f_1 c_3 h + f_2 h [a_{31} f + a_{32}(f + c_2(f_1 + f f_2) h)] && (4.46)\\
&+ \frac{h^2}{2}[c_3^2 f_{11} + 2 c_3 f_{12}(a_{31} f + a_{32} f) + f_{22}(a_{31} f + a_{32} f)^2] + O(h^3) && (4.47)\\
=& f + [c_3 f_1 + (a_{31} + a_{32}) f f_2] h && (4.48)\\
&+ \frac{1}{2}[2 a_{32} c_2 f_2 (f_1 + f f_2) + c_3^2 f_{11} + 2 c_3 (a_{31} + a_{32}) f f_{12} + f^2 f_{22} (a_{31} + a_{32})^2] h^2 + O(h^3) && (4.49)
\end{aligned}$$

代入 $a_{31}+a_{32}=c_3$ 后，有

$$\begin{aligned} k_3 =& f + c_3(f_1+ff_2)h \quad (4.50)\\ &+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2f_{11}+2c_3^2ff_{12}+f^2f_{22}c_3^2]h^2+O(h^3) \quad (4.51)\\ =& f+c_3(f_1+ff_2)h+\frac{1}{2}[2a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+c_3^2(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})]h^2+O(h^3) \quad (4.52)\end{aligned}$$

先考虑 y 的各阶导数，有

$$y' = f(t,y) \quad (4.53)$$
$$y'' = f_1+ff_2 \quad (4.54)$$
$$y''' = f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2) \quad (4.55)$$

代入增量函数 $\phi=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3$，可得

$$\text{常数项：}\phi_0 = (b_1+b_2+b_3)f \quad (4.56)$$
$$\text{一次项系数：}\phi_1 = (b_2c_2+b_3c_3)(f_1+ff_2) \quad (4.57)$$
$$\text{二次项系数：}\phi_2 = \frac{1}{2}\left[2b_3a_{32}c_2f_2(f_1+ff_2)+(b_2c_2^2+b_3c_3^2)(f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22})\right] \quad (4.58)$$

由

$$\phi_0 = y' = f \quad (4.59)$$
$$\phi_1 = \frac{1}{2}y'' = \frac{1}{2}(f_1+ff_2) \quad (4.60)$$
$$\phi_2 = \frac{1}{6}y''' = \frac{1}{6}[f_{11}+2ff_{12}+f^2f_{22}+f_2(f_1+ff_2)] \quad (4.61)$$

可得方程组

$$b_1+b_2+b_3=1 \quad (4.62)$$
$$b_2c_2+b_3c_3=\frac{1}{2} \quad (4.63)$$
$$a_{32}b_3c_2=\frac{1}{6} \quad (4.64)$$
$$b_2c_2^2+b_3c_3^2=\frac{1}{3} \quad (4.65)$$

4.3.3 课本习题

1、显式 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用显式 Euler 方法来求解初值问题, 列出数值解与解析解的误差.

(1)

$$y'=1+\frac{y}{x},\ 1\le x\le 2,\ y(1)=2,\ \text{取 } h=0.25\ (\text{相应解析解为 } y(x)=x\ln x+2x).$$

(2)

$$y'=\cos x+\sin 3x,\ 0\le x\le 1,\ y(0)=1,\ \text{取 } h=0.25\ (\text{相应解析解为 } y(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{4}{3}).$$

证明： 显式 Euler 方法的格式为：

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_n, y_n) \tag{4.66}$$

（1）

$$x_0 = 1, \quad y_0 = y(1) = 2 \tag{4.67}$$

$$x_1 = 1.25, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0.25 \times \left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2 + 0.25 \times 3 = 2.75 \tag{4.68}$$

$$x_2 = 1.5, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2.75 + 0.25 \times (1 + \frac{2.75}{1.25}) = 2.75 + 0.25 \times 3.2 = 3.55 \tag{4.69}$$

$$x_3 = 1.75, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 3.55 + 0.25 \times (1 + \frac{3.55}{1.5}) = 3.55 + 0.25 \times 3.3667 = 4.3917 \tag{4.70}$$

$$x_4 = 2.0, \quad y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 4.3917 + 0.25 \times (1 + \frac{4.3917}{1.75}) = 4.3917 + 0.25 \times 3.5084 = 5.2698 \tag{4.71}$$

（2）

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y(0) = 1 \tag{4.72}$$

$$x_1 = 0.25, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.25 \times (\cos 0 + \sin 0) = 1 + 0.25 \times 1 = 1.25 \tag{4.73}$$

$$x_2 = 0.5, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.25 + 0.25 \times (\cos 0.25 + \sin 0.75) \tag{4.74}$$

$$= 1.25 + 0.25 \times (0.9689 + 0.6816) = 1.25 + 0.25 \times 1.6505 = 1.6626 \tag{4.75}$$

$$x_3 = 0.75, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.6626 + 0.25 \times (\cos 0.5 + \sin 1.5) \tag{4.76}$$

$$= 1.6626 + 0.25 \times (0.8776 + 0.9975) = 1.6626 + 0.25 \times 1.8751 = 2.1304 \tag{4.77}$$

$$x_4 = 1.0, \quad y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 2.1304 + 0.25 \times (\cos 0.75 + \sin 2.25) \tag{4.78}$$

$$= 2.1304 + 0.25 \times (0.7317 + 0.7781) = 2.1304 + 0.25 \times 1.5098 = 2.5079 \tag{4.79}$$

2、改进 Euler 方法求解初值问题并分析误差

用改进的 Euler 方法解第 1 题中的问题, 并列出数值解和相应解析解的误差.

证明：

3、梯形方法迭代格式的收敛性证明

用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = e^x \sin(xy), \ x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

若迭代初值为 $y_{s+1}^{(0)} = y_s + hf(x_s, y_s)$, 试证逐步长 h 使迭代格式

$$y_{s+1}^{(k+1)} = y_s + \frac{h}{2}\left[f(x_s, y_s) + f(x_{s+1}, y_{s+1}^{(k)})\right], \ s = 0, 1, \cdots$$

是收敛的.

证明： 求解过程为：

1. 微分方程数值解问题：用显欧拉法给出一套迭代初值 $\{y_k^{(0)}\}$
2. 非线性方程数值解问题：在每个点上，用给出的迭代格式进行迭代，求解非线性方程的数值解

因此，要证明第二步非线性方程的迭代格式是收敛的，只要证明它满足压缩映像原理。

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| = \left|\frac{h}{2}\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})\right]\right| \tag{4.80}$$

$$= \frac{h}{2}|f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})| \tag{4.81}$$

该微分方程有唯一数值解，即满足 Lipschitz 条件。对应的 Lipschitz 常数 L 可以将 Δf 与 Δy 联系起来。

$$L = \max_{x\in[0,1], y\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{x\in[0,1], y\in\mathbb{R}} |xe^x \cos(xy)| \le e \tag{4.82}$$

因此迭代过程有

$$|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}^{(s)}| \le \frac{h}{2}L|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \tag{4.83}$$

$$\le \frac{he}{2}|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}^{(s-1)}| \tag{4.84}$$

压缩映像原理要求

$$\frac{h}{2}e < 1 \tag{4.85}$$

即

$$h < \frac{2}{e} \tag{4.86}$$

4、梯形方法求解特定初值问题的结论证明

用梯形方法解初值问题 $y' = -y,\ y(1) = 1$, 试证明:

(1) 取 $y_0 = y(1) = 1$, 有 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$.

(2) 当 $h \to 0, x = nh$ 不变时,y_n 收敛于初值问题的准确解 e^{-x_n}.

证明： （1）梯形方法迭代格式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \tag{4.87}$$

由于该问题是自治的，不需要求解非线性方程，

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}] \tag{4.88}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n \tag{4.89}$$

初值为 $y_0 = 1$，因此

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n \tag{4.90}$$

（2）代入 $n = x/h$，求极限即可。注意，要用到对数求极限。

5、单步法的局部截断误差与绝对稳定性分析

试求出单步法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的局部截断误差主项及绝对稳定性区间.

证明： 增量函数

$$\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) = f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \tag{4.91}$$

局部截断误差：

$$\begin{aligned} R_{n+1} =& y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) && (4.92)\\ =& y(x+h) - y(x) - hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) && (4.93)\\ =& y(x+h) - y(x) - hf(x+h, y+hf) && (4.94) \end{aligned}$$

求 y 的各阶导数：

$$\begin{aligned} y' &= f && (4.95)\\ y'' &= f_1 + ff_2 && (4.96) \end{aligned}$$

求 ϕ 的各阶导数：

$$\phi = f(x+h, y+hf) = f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2) \tag{4.97}$$

于是有

$$\begin{aligned} R_{n+1} =& y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + O(h^3) - y(x) && (4.98)\\ & - h(f + (f_1 + ff_2)h + O(h^2)) && (4.99)\\ =& -\frac{1}{2}h^2(f_1 + ff_2) + O(h^3) && (4.100)\\ =& -\frac{h^2}{2}y'' + O(h^3) && (4.101) \end{aligned}$$

故单步法的局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{2}y''$。

绝对稳定性分析：将单步法格式代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \tag{4.102}$$

得到

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + h \cdot \lambda (y_n + h \cdot \lambda y_n) && (4.103) \\ =& [(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1] y_n && (4.104) \end{aligned}$$

绝对稳定性要求

$$|E(h\lambda)| = |(h\lambda)^2 + (h\lambda) + 1| < 1 \tag{4.105}$$

解得绝对稳定区间为复平面上满足

$$|z^2 + z + 1| < 1 \tag{4.106}$$

的区域。

6、中点公式与 Heun 方法求解初值问题并分析误差

应用中点公式及 Heun 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} h f(x_n, y_n) + \frac{3}{4} h f \left(x_n + \frac{2}{3} h, y_n + \frac{2}{3} h f(x_n, y_n) \right)$$

计算初值问题

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, \ x \in [0, 1], \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

取 $h = 0.2$, 列出数值解及相应的误差 (问题的解析解为 $y(x) = (x+1)^2 - \frac{1}{2} e^x$).

证明： 他都不让带计算器了，我认为不会考这玩意

7、多种数值方法求解初值问题的结果对比

应用显式 Euler 方法、改进的 Euler 方法以及四阶经典 Runge-Kutta 方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y + 2x^2 + 2x, \ x \in [0, 0.5], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

这三种方法步长 h 依次取为 $0.25, 0.05, 0.1$, 列出相应计算结果、解析解 $y(x) = e^{-2x} + x^2$ 的结果及相应的误差.

证明： 呃呃

8、中点公式的局部截断误差分析

试求出中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

的局部截断误差主项.

证明： 对 y 逐次求导：

算子：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + f\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
y' =& f && (4.108)\\
y'' =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f_1 + ff_2 && (4.109)\\
y''' =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + f\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)f_2 && (4.110)\\
=& f_{11} + ff_{21} + f(f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.111)\\
=& f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2) && (4.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(x+h) - y(x) - h\phi(x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f) && (4.113)\\
=& y(x+h) - y(x) - hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}hf\right) && (4.114)\\
=& y(x) + fh + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 + \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) && (4.115)\\
&- y(x) && (4.116)\\
&- h(f + f_1\frac{h}{2} + f_2\frac{h}{2}f + \frac{f_{11}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2f_{12}\left(\frac{hf}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) + f_{22}\left(\frac{hf}{2}\right)^2}{2} + O(h^3)) && (4.117)\\
=& \frac{1}{6}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + f_2(f_1 + ff_2)]h^3 - \frac{1}{8}(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22})h^3 + O(h^4) && (4.118)\\
=& \frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 + O(h^4) && (4.119)
\end{aligned}$$

故局部截断误差主项为

$$\frac{1}{24}[f_{11} + f(2f_{12} + ff_{22}) + 4f_2(f_1 + ff_2)]h^3 \tag{4.120}$$

9、特定初值问题下数值方法的近似值一致性证明

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1,\ x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

试证明用中点方法、改进的 Euler 方法以及 Heun 方法 (见第 6 题) 求解, 对任意的步长 h 均有相同的近似值.

证明： 只要证明其一阶泰勒展开式相等。

- 中点方法：

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf) && (4.121) \\ \approx& y_n + h(f + \frac{1}{2}hf_1 + \frac{1}{2}hff_2) && (4.122) \\ =& y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 && (4.123) \end{aligned}$$

- Heun 方法：

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right) && (4.124) \\ \approx& y_n + \frac{1}{4}hf + \frac{3}{4}h(f + \frac{2}{3}hf_1 + \frac{2}{3}hff_2) && (4.125) \\ =& y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 && (4.126) \end{aligned}$$

- 改进 Euler 方法：

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + \frac{h}{2}[f + f(t + h, y + hf)] && (4.127) \\ \approx& y_n + \frac{h}{2}[f + f + hf_1 + hff_2] && (4.128) \\ =& y_n + hf + \frac{1}{2}(f_1 + ff_2)h^2 && (4.129) \end{aligned}$$

故三者具有相同的近似值。

10、隐式中点方法的绝对稳定性区间分析

试求出隐式中点方法

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

的绝对稳定性区间 (推广 §3.5 的方法).

证明： 试验方程：

$$y' = f(y) = \lambda y \tag{4.130}$$

代入隐式中点方法有

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{\lambda}{2}(y_n + y_{n+1}) \tag{4.131}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{2 + (h\lambda)}{2 - (h\lambda)} y_n \tag{4.132}$$

则绝对稳定性区间为

$$|E(h\lambda)| = \left| \frac{2 + (h\lambda)}{2 - (h\lambda)} \right| < 1 \tag{4.133}$$

$$\Rightarrow \Re(h\lambda) < 0 \tag{4.134}$$

即绝对稳定性区间为负半实轴。

11、二步显式 Adams 方法的局部截断误差推导

试推导二步显式 Adams 方法与二步隐式 Adams 方法的局部截断误差.

证明： 二步显式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.135}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.136}$$

局部截断误差：

$$R_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\left(\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{4.137}$$

$$= y(t+h) - y(t) - h\left(\frac{3}{2}f - \frac{1}{2}y'(t-h)\right) \tag{4.138}$$

$$= y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.139}$$

$$- y(t) \tag{4.140}$$

$$- h[\frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}(y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2) + O(h^3)] \tag{4.141}$$

$$= \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{4}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.142}$$

$$= -\frac{5}{12}y'''h^3 + O(h^4) \tag{4.143}$$

二步隐式 Adams 方法：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \tag{4.144}$$

$$\Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) \tag{4.145}$$

局部截断误差：

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{1}{12}h(5f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) && (4.146)\\
=& y(t+h) - y(t) - \frac{1}{12}h(5y'(t+h) + 8y'(t) - y'(t-h)) && (4.147)\\
=& y(t) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) && (4.148)\\
&- y(t) && (4.149)\\
&- \frac{1}{12}h[5(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 + \frac{1}{6}y''''h^3 + O(h^4)) + 8y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2 - \frac{1}{6}y''''h^3 + Oh^(4))] && (4.150)\\
=& -\frac{1}{24}y''''h^4 + O(h^5) && (4.151)
\end{aligned}
$$

12、Hamming 公式的局部截断误差分析

试推导 Hamming 公式

$$y_{n+3} = \frac{1}{8}(9y_{n+2} - y_n) + \frac{3}{8}h\left[f(x_{n+3}, y_{n+3}) + 2f(x_{n+2}, y_{n+2}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

的局部截断误差主项.

证明： 活不了了

13、数值积分法推导二步数值方法

试用数值积分方法直接推导二步方法

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\left[5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\right].$$

证明： 记 $x_n = -h$, $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = h$，则可以构造 Lagrange 插值多项式：

$$L_0 = \frac{x^2 - hx}{2h^2} \tag{4.152}$$

$$L_1 = \frac{h^2 - x^2}{h^2} \tag{4.153}$$

$$L_2 = \frac{x^2 + hx}{2h^2} \tag{4.154}$$

三者在 $[0, h]$ 上的积分是

$$\int_0^h L_0 \mathrm{d}x = -\frac{1}{12}h \tag{4.155}$$

$$\int_0^h L_1 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}h = \frac{8}{12}h \tag{4.156}$$

$$\int_0^h L_2 \mathrm{d}x = \frac{5}{12}h \tag{4.157}$$

于是有

$$y_{n+1}-y_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{2} f(x_{n+i},y_{n+i})\int_0^h L_i\mathrm{d}x \tag{4.158}$$

$$=-\frac{h}{12}f_n+\frac{8}{12}f_{n+1}+\frac{5}{12}f_{n+2} \tag{4.159}$$

$$=\frac{h}{12}[5f(x_{n+2},y_{n+2})+8f(x_{n+1},y_{n+1})-f(x_n,y_n)] \tag{4.160}$$

14、Adams 方法求解初值问题并与解析解对比

用四阶的显式 Adams 方法和隐式 Adams 方法解初值问题

$$\begin{cases} y'=-y+x+1,\ x\in[0,1], \\ y(0)=2, \end{cases}$$

取 $h=0.2$, 将结果与解析解作比较 (解析解 $y(x)=(x+1)+\frac{1}{2}e^{-x}$).

证明： 呜咕

15、线性二步法的阶数证明

证明线性二步法

$$y_{n+2}+(b-1)y_{n+1}-by_n=\frac{1}{4}h\left[(b+3)f(x_{n+2},y_{n+2})+(3b+1)f(x_n,y_n)\right]$$

当 $b\neq-1$ 时是二阶的, 当 $b=-1$ 时是三阶的.

证明：

16、线性多步法的阶数参数确定

试确定 α 使线性多步法

$$y_{n+3}+\alpha(y_{n+2}-y_{n+1})-y_n=\frac{1}{2}(3+\alpha)h\left[f(x_{n+2},y_{n+2})+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$$

是四阶的.

证明： 以 t_{n+1} 为展开点，

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(t+h)+(b-1)y(t)-by(t-h)-\frac{1}{4}h[(b+3)y'(t+h)+(3b+1)y'(t-h)] && (4.161)\\
=& y+y'h+\frac{1}{2}y''h^2+\frac{1}{6}y'''h^3+\frac{1}{24}y''''h^4+O(h^5) && (4.162)\\
&+(b-1)y && (4.163)\\
&-b(y-y'h+\frac{1}{2}y''h^2-\frac{1}{6}y'''h^3+\frac{1}{24}y''''h^4+O(h^5)) && (4.164)\\
&-\frac{h}{4}[(b+3)(y'+y''h+\frac{1}{2}y'''h^2+\frac{1}{6}y''''h^3+O(h^4)) && (4.165)\\
&\quad+(3b+1)(y'-y''h+\frac{1}{2}y'''h^2-\frac{1}{6}y''''h^3+O(h^4))] && (4.166)\\
=& (1+b-1-b)y+y'h(1+b-\frac{b+3}{4}-\frac{3b+1}{4})+y''h^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b-\frac{b+3}{4}+\frac{3b+1}{4}) && (4.167)\\
&+y'''h^3(\frac{1}{6}+\frac{b}{6}-\frac{b+3}{8}-\frac{3b+1}{8})+y''''h^4(\frac{1}{24}-\frac{b}{24}-\frac{b+3}{24}-\frac{3b+1}{24})+O(h^5) && (4.168)
\end{aligned}
$$

可见 h^0, h^1, h^2 项恒为 0，要求 h^3 项为 0，有

$$\frac{1}{6}+\frac{b}{6}-\frac{b+3}{8}-\frac{3b+1}{8}=0 \tag{4.169}$$

解得 $b=-1$，此时 h^4 项也为 0，因此该线性多步法在 $b=-1$ 时是四阶的。

17、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+3}+\frac{1}{4}y_{n+2}-\frac{1}{2}y_{n+1}-\frac{3}{4}y_n=\frac{1}{8}h\left[19f(x_{n+2},y_{n+2})+5f(x_n,y_n)\right]$$

的收敛性.

证明： 要让多步法收敛，只要求其满足相容性。

收敛性要求多步法满足强稳定性和相容性。

强稳定性：只要证特征方程的根全部在单位圆内，且模为 1 的根是单根。

特征方程：

$$
\begin{aligned}
\rho(x) =& x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} && (4.170)\\
\sigma(x) =& \frac{19}{8}x^2+\frac{5}{8} && (4.171)
\end{aligned}
$$

解得特征方程的根为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 && (4.172)\\
x_2 &= \frac{-5-i\sqrt{23}}{8} && (4.173)\\
x_3 &= \frac{-5+i\sqrt{23}}{8} && (4.174)
\end{aligned}
$$

三个根的模分别为

$$|x-1| = 1 \tag{4.175}$$

$$|x_2| = |x_3| = \frac{48}{64} < 1 \tag{4.176}$$

故多步法是具有强稳定性的。

相容性：

$$\rho'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \neq \sigma(x) \tag{4.177}$$

故多步法不具有相容性，多步法不收敛。

18、线性多步法的收敛性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{1}{4}h\left[f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(x_n, y_n)\right]$$

的收敛性

证明：

$$\rho(x) = x^2 + x - 2 \tag{4.178}$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{4} \tag{4.179}$$

强稳定性：特征多项式的根为

$$x_1 = 1 \tag{4.180}$$

$$x_2 = -2 \tag{4.181}$$

故不具有强稳定性。多步法不收敛。

19、线性多步法的相容性分析

讨论线性多步法

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)] \tag{4.182}$$

的相容性。

证明： 在 x_{n+1} 处展开：

$$R_{n+1} = y(x+h) - y - \frac{h}{2}[3y' - y'(x-h)] \tag{4.183}$$
$$= y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 \tag{4.184}$$
$$- y \tag{4.185}$$
$$- \frac{h}{2}[3y' - (y' - y''h + \frac{1}{2}y'''h^2)] \tag{4.186}$$
$$= \frac{5}{12}h^3y''' + O(h^4) \tag{4.187}$$

故具有二阶相容性。

20、A-稳定性

试证明隐式 Euler 方法是 A-稳定的.

证明： 隐式 Euler 方法：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{4.188}$$

代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \tag{4.189}$$

得到

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \tag{4.190}$$
$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}y_n \tag{4.191}$$

故绝对稳定性要求

$$\left|\frac{1}{1-\mu}\right| < 1 \tag{4.192}$$

令 $\mu = x + iy$，则有

$$(x-1)^2 + y^2 > 1 \tag{4.193}$$

只要实部 $x < 0$，则上式恒成立，因此隐式 Euler 方法是 A-稳定的。

Chapter 5

圣遗物，考前必看

圣遗物 1

1. (共 10 分) 对于线性代数方程组 $Ax = b$，残量定义为 $r = b - Ax$。回答下述问题：
   (a) 写出 Richardson 迭代格式，分析格式的收敛性。
   (b) 设 M 为可逆矩阵，写出以 M 为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式。
   (c) 设 A 为对称正定矩阵，选择预处理矩阵为数乘矩阵，即 $M = \mu I$ (I 为单位矩阵，μ 为标量)。则当 (且仅当) μ 满足何种条件时，此预处理方法是收敛的？

2. (共 10 分) 给定系数矩阵为对称正定矩阵的线性代数方程组 $Ax = b$。请回答下述问题：
   (a) 定义函数
   $$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$
   其中内积 (x, y) 为标准的欧式内积。证明在全空间中存在唯一的临界点；该临界点为全局最小值点，且恰好是 $Ax = b$ 的根。
   (b) 设当前近似向量为 x。写出从 x 出发，平行于方向 p 做一维极小搜索得到的新近似向量的表达式。
   (c) 证明新近似向量的残量与搜索方向 p 是正交的 (关于欧式内积)。

   证明：

3. (共 10 分) 设 A 是一个实对称矩阵，则其特征值和特征向量都是实的。若特征向量满足 $\|x\|_2 = 1$，则称 x 为归一化特征向量。请回答下述问题：
   (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式。
   (b) 证明当特征值是单特征值时，上述计算方法是局部二阶收敛的。

   解：

4. (共 10 分) 设实矩阵序列 $\{X_k\}$ 满足

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

证明如下结论：

(a) 令 $E_k = I - AX_k$，则 $E_{k+1} = E_k^2$。

(b) $\{X_k\}$ 至少局部二阶收敛到 A^{-1}。

证明：

（1）令 $E_k = I - AX_k$，则 $X_k = A^{-1}(I - E_k)$。

由迭代格式：

$$\begin{aligned}
E_{k+1} &= I - AX_{k+1} && (5.1)\\
&= I - A(X_k + X_k(I - AX_k)) && (5.2)\\
&= I - AX_k - AX_k + AX_kAX_k && (5.3)\\
&= I - 2AX_k + AX_kAX_k && (5.4)\\
&= (I - AX_k)^2 && (5.5)\\
&= E_k^2 && (5.6)
\end{aligned}$$

（2）由于 $E_{k+1} = E_k^2$，可得递推关系：

$$E_k = E_0^{2^k} \tag{5.7}$$

因此，

$$X_k = A^{-1}(I - E_k) = A^{-1}(I - E_0^{2^k}) \tag{5.8}$$

当 $k \to \infty$ 时，若 $\|E_0\| < 1$，则 $E_0^{2^k} \to 0$，从而 $X_k \to A^{-1}$。

误差分析：

$$\begin{aligned}
\|X_{k+1} - A^{-1}\| &= \|A^{-1}E_{k+1}\| = \|A^{-1}E_k^2\| && (5.9)\\
&\leq \|A^{-1}\|\|E_k\|^2 = \|A^{-1}\|\|A(X_k - A^{-1})\|^2 && (5.10)
\end{aligned}$$

这表明误差的范数以平方速度收敛，故 $\{X_k\}$ 至少局部二阶收敛到 A^{-1}。

5. (共 10 分) 考虑常微分方程组 $y' = f(t, y)$ 的初值问题。请回答下述问题：

(a) 写出一般步长情况下的显式 Euler 方法、隐式 Euler 方法以及梯形方法的计算格式。

(b) 分析梯形方法的相容性，写出该方法的主局部截断误差。

证明：

6. (共 10 分) 考虑常微分方程组 $y' = f(t, y)$ 的初值问题。用如下的等步长 Runge-Kutta 方法

$$y_{n+1} = y_n + hK,$$

其中 K 满足

$$K = f(t_n + h/2, y_n + hK/2).$$

请回答下述问题：

(a) 证明该方法恰好是二阶收敛的 (需要说明其不是三阶方法)。

(b) 确定该方法的绝对稳定区域。

证明：

圣遗物 2

1. 证明：设得到 $Ax = b$ 的一个近似解 $\bar{x}$，其残量为

$$r = b - A\bar{x} \tag{5.11}$$

设 x 和 $\bar{x}$ 分别是准确解和近似解，证明：

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{5.12}$$

证明：

2. 矩阵 A 不可分且弱对角占优，证明：

   (a) A 对角元素不等于 0

   (b) 矩阵 A 非奇异

   (c) Ax=b 的 Jacobi 迭代收敛

证明：

3. 有以下迭代格式：

$$x_{k+1} = \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1}$$

   (a) 求该迭代的不动点

   (b) 分析各不动点的局部收敛性和收敛阶

   (c) 求各不动点的收敛域

证明：

4. 经典再放送

(共 10 分) 设 A 是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的. 若特征向量 x 满足 $\|x\|_2 = 1$, 则称 x 为归一化特征向量. 请回答下述问题:

   (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式

   (b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的

证明：

5. 微分方程：$y' = f(t,y)$ ，迭代式：

$$y_{n+1} = y_n + h\big(\theta f(t_n + y_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, y_{n+1})\big), \quad \theta \in [0,1]$$

   (a) 该迭代的相容阶

   (b) 绝对稳定区间

证明：

圣遗物 3

1. 证明不等式：
   (a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$
   (b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$
   (c) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$
2. 用均差表求满足以下插值条件的三次插值函数 $p_3(x)$:
$$p(0) = p'(0) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 4 \tag{5.13}$$
3. 求 Gauss 求积公式：
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(\sqrt{x}) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \tag{5.14}$$
   注意：权函数是 $\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. 旧题
5. 旧题
6. 旧题
7. 旧题
8. 旧题
9. 旧题
10. 考虑 BDF2 格式：
$$3y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 2hf(t_{n+2}, y_{n+2}) \tag{5.15}$$
   (a) 若初值足够相容，证明该方法至少是二阶收敛的。
   (b) 求绝对稳定区域。

Chapter 6

圣遗物答案

圣遗物 1

1. (共 10 分) 对于线性代数方程组 $Ax = b$，残量定义为 $r = b - Ax$。回答下述问题：

   (a) 写出 Richardson 迭代格式，分析格式的收敛性。

   (b) 设 M 为可逆矩阵，写出以 M 为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式。

   (c) 设 A 为对称正定矩阵，选择预处理矩阵为数乘矩阵，即 $M = \mu I$ (I 为单位矩阵，μ 为标量)。则当 (且仅当) μ 满足何种条件时，此预处理方法是收敛的？

证明：

（1）Richardson 迭代格式的修正量即为当前的残差，

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k) = (I - A)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} \tag{6.1}$$

迭代矩阵

$$B = I - A \tag{6.2}$$

当迭代矩阵的谱半径小于 1 时，迭代收敛。

（2）以 M 为预处理矩阵的 Richardson 迭代格式为

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + M^{-1}\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{x}_k + M^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k) = (I - M^{-1}A)\boldsymbol{x}_k + M^{-1}\boldsymbol{b} \tag{6.3}$$

（3）A 为 SPD 矩阵，$M = \mu I$ 可得 $M^{-1} = \frac{1}{\mu}I$，则迭代矩阵为

$$B = I - M^{-1}A = I - \frac{1}{\mu}A \tag{6.4}$$

则特征值方程

$$0=\det(\lambda' I-B)=\det(\lambda' I-(I-\frac{1}{\mu}A)) \tag{6.5}$$

$$=\det[(\lambda'-1)I+\frac{1}{\mu}A)] \tag{6.6}$$

$$=\left(-\frac{1}{\mu}\right)^n\det[-\frac{1}{\mu}(\lambda'-1)I-A] \tag{6.7}$$

前面的系数 $(-1/\mu)^n$ 不会改变特征值方程的解，因此有

$$\det[-\frac{1}{\mu}(\lambda'-1)I-A]=0 \tag{6.8}$$

这一方程与 A 的特征值问题

$$\det(\lambda I-A)=0 \tag{6.9}$$

有类似的形式，因此新的特征值 λ' 与 A 的特征值 λ 之间有如下关系：

$$\lambda'=1-\frac{\lambda}{\mu} \tag{6.10}$$

要让预处理方法收敛，只要让 B 的谱半径小于 1，即 $\max_n|\lambda'_n|<1$，则有

$$\max_k|\lambda'_k|=\max_k\left|1-\frac{\lambda_k}{\mu}\right| \tag{6.11}$$

设 $\lambda_1=\max_k\lambda_k$，$\lambda_n=\min_k\lambda_k$，则有

$$\max_k|\lambda'_k|=\max_k\left|1-\frac{\lambda_k}{\mu}\right| \tag{6.12}$$

$$=\max\left\{\left|1-\frac{\lambda_1}{\mu}\right|,\left|1-\frac{\lambda_n}{\mu}\right|\right\} \tag{6.13}$$

只要

$$\begin{cases}\left|1-\frac{\lambda_1}{\mu}\right|<1\Rightarrow\mu\in(\frac{\lambda_1}{2},\infty)\\ \left|1-\frac{\lambda_n}{\mu}\right|<1\Rightarrow\mu\in(\frac{\lambda_n}{2},\infty)\end{cases} \tag{6.14}$$

取交集解得

$$\mu\in(\frac{\lambda_n}{2},\infty) \tag{6.15}$$

即

$$\mu>\frac{\lambda_{\min}(A)}{2} \tag{6.16}$$

2. (共 10 分) 给定系数矩阵为对称正定矩阵的线性代数方程组 $Ax=b$。请回答下述问题：

(a) 定义函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x),$$

其中内积 (x,y) 为标准的欧式内积。证明在全空间中存在唯一的临界点；该临界点为全局最小值点，且恰好是 $Ax=b$ 的根。

(b) 设当前近似向量为 x。写出从 x 出发，平行于方向 p 做一维极小搜索得到的新近似向量的表达式。

(c) 证明新近似向量的残量与搜索方向 p 是正交的 (关于欧式内积)。

证明：

解：

（1）$\phi(x)$ 对向量 x 的梯度为

$$\nabla\phi(x)=Ax-b \tag{6.17}$$

同时，由于 A 是对称正定的，ϕ 对 x 的 Hessian 矩阵

$$|\nabla^2\phi|=|A|>0 \tag{6.18}$$

故这一点是一个极小值点而不是鞍点。

此外，由于 A 是对称正定的，必非奇异，$Ax=b$ 有且只有一个根，即只有一个 $x=x^*$ 使得 $Ax^*=b$，即这个极小值点是全局唯一的极小值点，即为全局最小值点。

综上，全空间中存在唯一的临界点，该临界点为全局最小值点，且恰好是 $Ax=b$ 的根。

（2）残差：

$$r=b-Ax \tag{6.19}$$

最优步长：

$$\alpha_k=\frac{(r,p)}{(Ap,p)}=\frac{p^T(b-Ax)}{p^TAp} \tag{6.20}$$

新向量：

$$x_{new}=x+\alpha_k p=x+\frac{(r,p)}{(Ap,p)}p=x+\frac{p^T(b-Ax)}{p^TAp}p \tag{6.21}$$

（3）新残量：

$$r_{new}=b-Ax_{new}=b-A\left(x+\frac{p^Tr}{p^TAP}p\right) \tag{6.22}$$

$$=b-Ax-\frac{p^Tr}{p^TAP}Ap \tag{6.23}$$

与搜索方向作内积得到

$$
\begin{aligned}
p^T r_{new} =& p^T \left(b - Ax - \frac{p^T r}{p^T AP} Ap \right) && (6.24) \\
=& p^T r - \frac{p^T r}{p^T AP} p^T AP && (6.25) \\
=& 0 && (6.26)
\end{aligned}
$$

因此新近似向量的残量与搜索方向 p 是正交的。

3. (共 10 分) 设 A 是一个实对称矩阵，则其特征值和特征向量都是实的。若特征向量满足 $\|x\|_2 = 1$，则称 x 为归一化特征向量。请回答下述问题：

   (a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式。

   (b) 证明当特征值是单特征值时，上述计算方法是局部二阶收敛的。

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个实对称矩阵。我们需要寻找特征对 (λ, x)，使得 $Ax = \lambda x$ 且满足归一化条件 $\|x\|_2 = 1$。

（1）使用 Newton 法计算特征值及其归一化特征向量的计算格式

为了使用 Newton 法，定义非线性映射 $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 如下：

$$
F(z) = F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(x^T x - 1) \end{pmatrix} = 0
$$

其中 $z = [x^T, \lambda]^T$。其相应的 Jacobian 矩阵 $J(x, \lambda)$ 为：

$$
J(x, \lambda) = \begin{pmatrix} A - \lambda I & -x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}
$$

给定初始近似值 x_0 和 λ_0，第 k 步迭代格式为：

(a) 解线性方程组得到增量 $\Delta z_k = [\Delta x_k^T, \Delta\lambda_k]^T$：

$$
\begin{pmatrix} A - \lambda_k I & -x_k \\ x_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta\lambda_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \end{pmatrix}
$$

(b) 更新解：$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$，$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k$。

更新：这里似乎可以写出显形式迭代

当迭代未实现收敛时，总有 $\det(A-\lambda I)\neq 0$，因此可以解出 J^{-1}，从而得到显式迭代格式：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + J^{-1}(x_k)F(x_k) \qquad (6.27)\\
&= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A-\lambda_k I)^{-1} - \frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1}}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} & \frac{1}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_k - \lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1) \end{bmatrix} \qquad (6.28)\\
&= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k - \frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k}(A-\lambda_k I)^{-1}x_k + \frac{1}{2}(x_k^T x_k - 1)\frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} \\ -\frac{x_k^T x_k}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} + \frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k - 1}{x_k^T x_k (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \qquad (6.29)\\
&= \begin{bmatrix} 2x_k - \frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k}(A-\lambda_k I)^{-1}x_k \\ \lambda_k - \frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k + 1}{x_k^T (A-\lambda_k I)^{-1} x_k} \end{bmatrix} \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

（2）证明当特征值是单特征值时，上述计算方法是局部二阶收敛的

证明. 根据 Newton 法的性质，若 $J(z^*)$ 在解点处非奇异，则具有局部二阶收敛性。考虑齐次方程 $J(z^*)[u^T, v]^T = 0$：

$$(A-\lambda^* I)u - vx^* = 0 \qquad (6.31)$$

$$(x^*)^T u = 0 \qquad (6.32)$$

将式 (6.78) 左乘 $(x^*)^T$，利用 A 的对称性及 $(A-\lambda^* I)x^* = 0$，得：

$$(x^*)^T(A-\lambda^* I)u - v(x^*)^T x^* = 0 \implies 0 - v\cdot 1 = 0 \implies v = 0$$

将 $v=0$ 代入式 (6.78) 得 $(A-\lambda^* I)u = 0$。由于 λ^* 是单特征值，其特征空间维数为 1，故 $u = \alpha x^*$。代入式 (6.79) 有：

$$(x^*)^T(\alpha x^*) = \alpha\|x^*\|_2^2 = \alpha = 0 \implies u = 0$$

由于齐次方程只有零解，Jacobian 矩阵 $J(z^*)$ 非奇异。因此，该方法在单特征值附近是局部二阶收敛的。 □

4. (共 10 分) 设实矩阵序列 $\{X_k\}$ 满足

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

证明如下结论：

(a) 令 $E_k = I - AX_k$，则 $E_{k+1} = E_k^2$。

(b) $\{X_k\}$ 至少局部二阶收敛到 A^{-1}。

证明：

5. (共 10 分) 考虑常微分方程组 $y' = f(t, y)$ 的初值问题。请回答下述问题：

   (a) 写出一般步长情况下的显式 Euler 方法、隐式 Euler 方法以及梯形方法的计算格式。

   (b) 分析梯形方法的相容性，写出该方法的主局部截断误差。

   证明：

6. (共 10 分) 考虑常微分方程组 $y' = f(t, y)$ 的初值问题。用如下的等步长 Runge-Kutta 方法

$$y_{n+1} = y_n + hK,$$

其中 K 满足

$$K = f(t_n + h/2, y_n + hK/2).$$

请回答下述问题：

   (a) 证明该方法恰好是二阶收敛的 (需要说明其不是三阶方法)。

   (b) 确定该方法的绝对稳定区域。

证明：

圣遗物 2

比较有难度的题目是 *2* 和 *4*，此外需要注意 *3* 题收敛域的求法

1. 证明：设得到 $Ax = b$ 的一个近似解 $\bar{x}$，其残量为

$$r = b - A\bar{x} \tag{6.33}$$

设 x 和 $\bar{x}$ 分别是准确解和近似解，证明：

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{6.34}$$

证明：

一个比较自然的思路是直接从较复杂的形式化简得到简单形式。

左边：

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} = \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|Ax-A\bar{x}\|}{\|Ax\|} \tag{6.35}$$

$$\le \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|A\|\|x-\bar{x}\|}{\|Ax\|} \tag{6.36}$$

$$= \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|A^{-1}\|\|Ax\|} \tag{6.37}$$

$$\le \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|A^{-1}Ax\|} \tag{6.38}$$

$$= \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \tag{6.39}$$

右边有类似的过程。

2. 矩阵 A 不可分且弱对角占优，证明：

   (a) A 对角元素不等于 0

   (b) 矩阵 A 非奇异

   (c) Ax=b 的 Jacobi 迭代收敛

证明：

（1）反证法：设 A 的对角元为 0，即存在某个 i 使得 $a_{ii} = 0$。由于 A 是弱对角占优矩阵，故有

$$0 = |a_{ii}| \ge \sum_{j\ne i} |a_{ij}| \ge 0 \tag{6.40}$$

于是有

$$a_{ij} = 0, \quad j \ne i \tag{6.41}$$

只要将第 i 行变换到最后一行，则矩阵 A 具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.42}$$

显然为一个左下角为 0 的分块矩阵，故矩阵 A 可分，与题设矛盾。

（2）

证明.（反证法）假设 A 是奇异矩阵，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 存在非零解 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$。令 $M = \max_{1\le j\le n} |x_j|$。由于 $x \neq 0$，显然 $M > 0$。
定义下标集合 $S = \{i : |x_i| = M\}$。由于 M 是最大模，故 S 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的非空子集。
对于任意 $i \in S$，考虑 $Ax = 0$ 的第 i 个分量方程：

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$$

两边取绝对值，并利用三角不等式：

$$|a_{ii}||x_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \tag{6.43}$$

由于 $i \in S$，有 $|x_i| = M$，且对于所有 j，恒有 $|x_j| \le M$。将这些条件代入上式 (1)：

$$|a_{ii}|M \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \le \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) M$$

消去 $M > 0$，得到：

$$|a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

然而，根据 A 是弱对角占优矩阵的定义，对所有 i 均满足 $|a_{ii}| \ge \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$。因此，上述不等式链中的等号必须成立，即：

$$|a_{ii}| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad 且 \quad \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|M \tag{6.44}$$

由式 (2) 可知，若某个 $a_{ij} \neq 0$，则必须有 $|x_j| = M$，即 $j \in S$。
这意味着：在矩阵 A 对应的有向图中，从 S 中的任一顶点 i 出发，所有通过一条有向边直接相连的顶点 j 都必然属于 S。
由于矩阵 A 是**不可约**的，其对应的有向图是强连通的。这意味着从 S 中的任意一点出发，存在路径可以到达 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的每一个点。通过归纳可知：

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}$$

即所有的分量都满足 $|x_j| = M$，且对所有的 $i = 1, \ldots, n$，都有：

$$|a_{ii}| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

但这与 A 是**弱对角占优**的已知条件矛盾——弱对角占优要求至少存在一个下标 k 使得 $|a_{kk}| > \sum_{j\neq k}|a_{kj}|$（即至少有一行是严格对角占优的）。

矛盾产生，故原假设不成立。因此，A 必为非奇异矩阵。 □

（3）Jacobi 迭代格式为 M=D,

$$B_J = D^{-1}(L+U) \tag{6.45}$$

迭代矩阵的行列式

$$\det(\lambda' I - B_J) = \det[\lambda' I - D^{-1}(L+U)] \tag{6.46}$$

$$= \det(D^{-1})\det(\lambda' D - L - U) \tag{6.47}$$

该行列式即为 A 的所有对角元都乘以特征值 λ' 后的矩阵的行列式。

若 B 的谱半径大于等于 1，则必有一个 λ 使得 $|\lambda| > 1$。于是对于 $\lambda D - L - U$ 的任意一行，总有

$$|a'_{ii}| = |\lambda||a_{ii}| \geq |\lambda|\sum_{i\neq j}|a_{ij}| \geq \sum_{i\neq j}|a_{ij}| = \sum_{i\neq j}|a'_{ij}| \tag{6.48}$$

即 $\lambda D - L - U$ 仍然是一个弱对角占优的。此外，这一 λ 不为 0，任何原先非 0 的矩阵元现在仍旧非 0，故 $\lambda D - L - U$ 仍然是不可分的。

根据（2）可知，$\lambda D - L - U$ 非奇异，因此行列式不为 0，与 λ 为 B 的特征值矛盾。

因此，B 的谱半径必小于 1，Jacobi 迭代收敛。

3. 有以下迭代格式：

$$x_{k+1} = \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1}$$

(a) 求该迭代的不动点

(b) 分析各不动点的局部收敛性和收敛阶

(c) 求各不动点的收敛域

证明：

（1）不动点：

$$x = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \tag{6.49}$$

解得

$$x = 0, \pm 1 \tag{6.50}$$

（2）局部收敛性和收敛阶：

$$\phi(x) = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \tag{6.51}$$
$$\phi'(x) = \frac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2} \tag{6.52}$$
$$\phi''(x) = \frac{48x(x-1)(x+1)}{(3x^2+1)^3} \tag{6.53}$$
$$\phi'''(x) = 48\frac{-9x^4+18x^2-1}{(3x^2+1)^4} \tag{6.54}$$

- $x = \pm 1$:

$$\phi(x) = 0 \tag{6.55}$$
$$\phi'(x) = 0 \tag{6.56}$$
$$\phi''(x) = 0 \tag{6.57}$$
$$\phi'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0 \tag{6.58}$$

- $x = 0$:

$$\phi(x) = 0 \tag{6.59}$$
$$\phi'(x) = 3 \tag{6.60}$$

故该迭代法在 $x = \pm 1$ 处三阶收敛，在 $x = 0$ 处不收敛。

（3）收敛域：

对于 $x = 0$，由于 $\phi(0)' > 1$，没有收敛域。

对于 $x = 1$，有

$$\phi(x) = \frac{x(3+x^2)}{3x^2+1} \tag{6.61}$$

迭代时

$$x_{k+1} - 1 = \phi(x) - 1 \tag{6.62}$$
$$= \frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1} - 1 \tag{6.63}$$
$$= \frac{x_k^3 + 3x_k - 3x_k^2 - 1}{3x_k^2+1} \tag{6.64}$$
$$= \frac{(x_k-1)^3}{3x_k^2+1} \tag{6.65}$$

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}+1 =&\phi(x)+1 &(6.66)\\
=&\frac{x_k(3+x_k^2)}{3x_k^2+1}+1 &(6.67)\\
=&\frac{x_k^3+3x_k+3x_k^2+1}{3x_k^2+1} &(6.68)\\
=&\frac{(x_k+1)^3}{3x_k^2+1} &(6.69)
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\frac{x_{k+1}-1}{x_{k+1}+1} =\frac{(x_k-1)^3}{(x_k+1)^3} \tag{6.70}
$$

令 $u_n=\frac{x_n-1}{x_n+1}$，则有

$$
u_{k+1} =u_k^3 \tag{6.71}
$$

通项公式为

$$
u_n=u_0^{3^n} \tag{6.72}
$$

收敛性要求当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 1$，即 $u_n\to 0$。因此，收敛域为

$$
u_0\in(0,1) \tag{6.73}
$$

即 $x_0\in(0,\infty)$。

对于 $x=-1$，同理可得收敛域为 $(-\infty,0)$。

4. 经典再放送

(共 10 分) 设 A 是一个实对称矩阵, 则其特征值和特征向量都是实的. 若特征向量 x 满足 $\|x\|_2=1$, 则称 x 为归一化特征向量. 请回答下述问题:

(a) 写出 Newton 法计算特征值及其对应的归一化特征向量的计算格式

(b) 证明当特征值是单特征值时, 上述计算方法是局部二阶收敛的

证明：

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个实对称矩阵。我们需要寻找特征对 (λ,x)，使得 $Ax=\lambda x$ 且满足归一化条件 $\|x\|_2=1$。

（1）使用 Newton 法计算特征值及其归一化特征向量的计算格式

为了使用 Newton 法，定义非线性映射 $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 如下：

$$
F(z)=F(x,\lambda)=\begin{pmatrix} Ax-\lambda x\\ \frac{1}{2}(x^Tx-1)\end{pmatrix}=0
$$

其中 $z=[x^T,\lambda]^T$。其相应的 Jacobian 矩阵 $J(x,\lambda)$ 为：

$$J(x,\lambda)=\begin{pmatrix} A-\lambda I & -x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}$$

给定初始近似值 x_0 和 λ_0，第 k 步迭代格式为：

(a) 解线性方程组得到增量 $\Delta z_k=[\Delta x_k^T,\Delta\lambda_k]^T$：

$$\begin{pmatrix} A-\lambda_k I & -x_k \\ x_k^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta\lambda_k \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} Ax_k-\lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k-1) \end{pmatrix}$$

(b) 更新解：$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k$，$\lambda_{k+1}=\lambda_k+\Delta\lambda_k$。

更新：这里似乎可以写出显形式迭代

当迭代未实现收敛时，总有 $\det(A-\lambda I)\neq 0$，因此可以解出 J^{-1}，从而得到显式迭代格式：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}+J^{-1}(x_k)F(x_k) && (6.74)\\
&= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (A-\lambda_k I)^{-1}-\frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} & \frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} \\ -\frac{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} & \frac{1}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ax_k-\lambda_k x_k \\ \frac{1}{2}(x_k^T x_k-1) \end{bmatrix} && (6.75)\\
&= \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_k-\frac{x_k^T x_k}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}(A-\lambda_k I)^{-1}x_k+\frac{1}{2}(x_k^T x_k-1)\frac{(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} \\ -\frac{x_k^T x_k}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}+\frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k-1}{x_k^T x_k(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} \end{bmatrix} && (6.76)\\
&= \begin{bmatrix} 2x_k-\frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k+1}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k}(A-\lambda_k I)^{-1}x_k \\ \lambda_k-\frac{1}{2}\frac{x_k^T x_k+1}{x_k^T(A-\lambda_k I)^{-1}x_k} \end{bmatrix} && (6.77)
\end{aligned}$$

（2）证明当特征值是单特征值时，上述计算方法是局部二阶收敛的

证明. 根据 Newton 法的性质，若 $J(z^*)$ 在解点处非奇异，则具有局部二阶收敛性。考虑齐次方程 $J(z^*)[u^T,v]^T=0$：

$$(A-\lambda^* I)u-vx^*=0 \tag{6.78}$$

$$(x^*)^T u=0 \tag{6.79}$$

将式 (6.78) 左乘 $(x^*)^T$，利用 A 的对称性及 $(A-\lambda^* I)x^*=0$，得：

$$(x^*)^T(A-\lambda^* I)u-v(x^*)^T x^*=0 \implies 0-v\cdot 1=0 \implies v=0$$

将 $v=0$ 代入式 (6.78) 得 $(A-\lambda^* I)u=0$。由于 λ^* 是单特征值，其特征空间维数为 1，故 $u=\alpha x^*$。代入式 (6.79) 有：

$$(x^*)^T(\alpha x^*)=\alpha\|x^*\|_2^2=\alpha=0 \implies u=0$$

由于齐次方程只有零解，Jacobian 矩阵 $J(z^*)$ 非奇异。因此，该方法在单特征值附近是局部二阶收敛的。 □

5. 微分方程：$y' = f(t, y)$ ，迭代式：

$$y_{n+1} = y_n + h\big(\theta f(t_n + y_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, y_{n+1})\big), \quad \theta \in [0,1]$$

(a) 该迭代的相容阶

(b) 绝对稳定区间

证明：

（1）局部截断误差：

$$\begin{aligned}
R_{n+1} =& y(t+h) - y(t) - h[\theta y'(t) + (1-\theta) y'(t+h)] && (6.80)\\
=& y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 \quad - y && (6.81)\\
& - h[\theta y' + (1-\theta)(y' + y''h + \frac{1}{2}y'''h^3)] + O(h^4) && (6.82)\\
=& \left(\theta - \frac{1}{2}\right) y''h - \frac{3\theta - 2}{6} y'''h^3 + O(h^4) && (6.83)
\end{aligned}$$

因此，当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，格式具有二阶相容性，否则为一阶相容性。

（2）绝对稳定区间：将迭代格式代入试验方程

$$y' = f = \lambda y \tag{6.84}$$

得到

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(\theta\lambda y_n + (1-\theta)\lambda y_{n+1}) && (6.85)\\
\Rightarrow y_{n+1} &= \frac{1 + \theta h\lambda}{1 - (1-\theta)h\lambda} y_n && (6.86)
\end{aligned}$$

绝对稳定区间只需要考虑 $h\lambda$ 为实数的情况，因此有

$$\begin{aligned}
E(h\lambda) &= \left| \frac{1 + \theta h\lambda}{1 - (1-\theta)h\lambda} \right| < 1 && (6.87)\\
\Rightarrow & (1 - 2\theta)h\lambda \left(h\lambda - \frac{2}{1 - 2\theta} \right) > 0 && (6.88)
\end{aligned}$$

当 $\theta \in [0, 1/2)$ 时，抛物线开口向上，因此有

$$h\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{1 - 2\theta}, +\infty \right) \tag{6.89}$$

当 $\theta \in (1/2, 1]$ 时，抛物线开口向下，

$$h\lambda \in \left(-\frac{2}{1 - 2\theta}, 0 \right) \tag{6.90}$$

当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，迭代格式为

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda} y_n \tag{6.91}$$

绝对稳定区间为负半实轴 $(-\infty, 0)$。