

# 《物理学中的张量分析》习题

Armour Piercer

February 2025

2026 年 1 月 21 日

---

# Chapter 1

## 三维欧式空间中的矢量与张量

### 1.1 用矢量方法证明球面三角形中的余弦定理

1.1.1 定理内容：

$$\cos \alpha = \cos \gamma \cos \beta + \sin \beta \sin \gamma \cos A \quad (1.1)$$

式中， $\alpha, \beta, \gamma$  分别为大圆弧 BC, CA, AB 对应的圆心角；A 为大圆弧 BA 与 CA 所在平面的夹角。

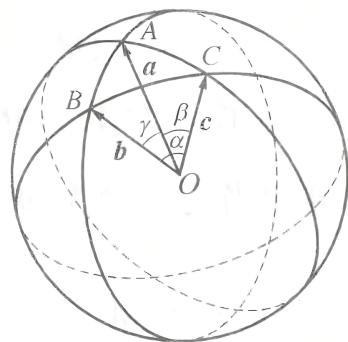


图 1.1: 第一题图

### 1.1.2 证明

$$\cos \alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad (1.2)$$

$$\cos \gamma = a \cdot b \quad (1.3)$$

$$\cos \beta = a \cdot c \quad (1.4)$$

$$\cos A = \frac{a \times b}{|a \times b|} \cdot \frac{a \times c}{|a \times c|} \quad (1.5)$$

$$= \frac{a \times b}{\sin \gamma} \cdot \frac{a \times c}{\sin \beta} \quad (1.6)$$

即证明

$$b \cdot c = (a \cdot b)(a \cdot c) + (a \times b) \cdot (a \times c) \quad (1.7)$$

$$= (a \cdot b)(a \cdot c) + c \cdot [(a \times b) \times a] \quad (1.8)$$

$$= (a \cdot b)(a \cdot c) + c \cdot [b(a \cdot a) - a(a \cdot b)] \quad (1.9)$$

$$= (a \cdot b)(a \cdot c) + c \cdot [b - a(a \cdot b)] \quad (1.10)$$

$$= (a \cdot b)(a \cdot c) + c \cdot b - (c \cdot a)(a \cdot b) \quad (1.11)$$

$$= b \cdot c \quad (1.12)$$

得证。

## 1.2 基矢性质

### 1.2.1 题目内容

基矢满足

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.13)$$

试证明

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (1.14)$$

以及这一公式的轮换对称性。

### 1.2.2 证明:

只要证明等式右侧在  $\mathbf{e}_1$  分量为 1, 在  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$  方向上分量为 0.

$$RHS \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} = 1 \quad (1.15)$$

$$RHS \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (1.16)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (1.17)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (1.18)$$

$$= 0 \quad (1.19)$$

$\mathbf{e}_3$  方向分量同理为 0. 另外两个式子用类似方法可证, 因此本题得证。

## 1.3 矢量分解

### 1.3.1 题目

试证明: 任意矢量  $\mathbf{r}$  可以用基矢  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  写成

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \quad (1.20)$$

## 1.4 张量识别定理——缩并形式

### 1.4.1 题目

若  $a_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu}$  和任意  $\nu$  阶张量  $b_{j_1 j_2 \dots j_\nu}$  的缩并恒为  $\mu$  阶张量, 试证明:  $a_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu}$  为  $\mu + \nu$  阶张量。

### 1.4.2 证明

将其缩并记为

$$c_{i_1 i_2 \dots i_\mu} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1.21)$$

则在变换:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_i A_{i' i} \mathbf{e}_i \quad (1.22)$$

进行时, 有:

$$c_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\mu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\mu i_\mu} c_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \quad (1.23)$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\mu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\mu i_\mu} \left[ \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \right] \quad (1.24)$$

同时，有

$$c_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu}} = \sum_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} b_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} \quad (1.25)$$

$$= \sum_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} \left( \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_{\nu} j_{\nu}} b_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} \right) \quad (1.26)$$

由于对任意张量  $b$  成立，因此有

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_{\mu} i_{\mu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu} j_1 j_2 \dots j_{\nu}} = \sum_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_{\nu} j_{\nu}} \quad (1.27)$$

考虑一组数字  $k_1, k_2, \dots, k_{\nu}$ ，各数字  $k_p$  在对应角标的  $j_p$  的取值范围内随机取值，则其构成一组随机下标排列。由于上式中  $j_1, j_2 \dots j_{\nu}$  是自由标，可以对上式两侧同时乘以  $A_{k'_1 j_1} A_{k'_2 j_2} \dots A_{k'_{\nu} j_{\nu}}$ ，再并对  $j_1, j_2 \dots j_{\nu}$  求和，可得

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_{\mu} i_{\mu}} A_{k'_1 j_1} A_{k'_2 j_2} \dots A_{k'_{\nu} j_{\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu} j_1 j_2 \dots j_{\nu}} \quad (1.28)$$

$$= \sum_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_{\nu} j_{\nu}} A_{k'_1 j_1} A_{k'_2 j_2} \dots A_{k'_{\nu} j_{\nu}} \quad (1.29)$$

首先在右侧对  $j$  序列分别求和，得到

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_{\mu} i_{\mu}} A_{k'_1 j_1} A_{k'_2 j_2} \dots A_{k'_{\nu} j_{\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu} j_1 j_2 \dots j_{\nu}} \quad (1.30)$$

$$= \sum_{j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} \delta_{j'_1 k'_1} \delta_{j'_2 k'_2} \dots \delta_{j'_{\nu} k'_{\nu}} \quad (1.31)$$

这要求对任意的  $k_p$ ，都要等于对应下标的  $j_p$ 。则有

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_{\mu} i_{\mu}} A_{k'_1 j_1} A_{k'_2 j_2} \dots A_{k'_{\nu} j_{\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu} j_1 j_2 \dots j_{\nu}} \quad (1.32)$$

$$= a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} k'_1 k'_2 \dots k'_{\nu}} \quad (1.33)$$

由于  $k'$  只是一组独立下标序列，与实际的变换无关，将原式中的  $k'$  项全部改写成  $j'$  项不会影响结果。这就能得到我们熟悉的张量表达式，

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{\mu} j'_1 j'_2 \dots j'_{\nu}} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_{\mu} i_{\mu}} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_{\nu} j_{\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu} j_1 j_2 \dots j_{\nu}} \quad (1.34)$$

## 1.5 张量识别定理——张量积形式

### 1.5.1 题目

若  $a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}}$  和任意  $\nu$  阶张量  $b_{j_1 j_2 \dots j_{\nu}}$  的张量积为  $\mu + \nu$  阶张量，则  $a_{i_1 i_2 \dots i_{\mu}}$  为  $\mu$  阶张量。

### 1.5.2 证明

将  $a$  和  $b$  的张量积记为

$$c_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} = a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1.35)$$

当坐标变换

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_i A_{i' i} \mathbf{e}_i \quad (1.36)$$

进行时，有：

$$c_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} = a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} b_{j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} \quad (1.37)$$

$$= a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1.38)$$

同时，

$$c_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} c_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1.39)$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1.40)$$

要对任意的张量  $b$  成立，则有

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \quad (1.41)$$

由于右侧没有对下标  $j$  进行求和，可以提取公因式并约去等式两侧的  $A_{j'_m j_m}$  项。因此，

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \quad (1.42)$$

即证明了  $a_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$  也是按照张量的形式变化的，它也是一个张量。

## 1.6 张量识别定理的应用

### 1.6.1 题目内容

试根据张量识别定理证明： $\delta_{ij}$  是二阶张量， $\varepsilon_{ijk}$  为三阶张量。

### 1.6.2 证明

考虑一个一阶张量  $a_i$ ，将  $\delta_{ij}$  与  $a_i$  进行缩并。有：

$$b_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j \quad (1.43)$$

显然， $b_j$  也是一个张量，且它与  $a_j$  相等。因此， $\delta_{ij}$  是二阶张量。

同样，将  $\varepsilon_{ijk}$  与  $\delta_{ij}$  缩并，

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = \sum_i \varepsilon_{iik} = 0_k \quad (1.44)$$

即缩并的结果是一个一阶零张量。因此， $\varepsilon_{ijk}$  是一个三阶张量。

## 1.7 证明矢量等式

### 1.7.1 题目

利用克罗内克符号  $\delta_{ij}$  和三阶完全反对称张量  $\varepsilon_{ijk}$  证明：

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.45)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \quad (1.46)$$

$$= \mathbf{c}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})] - \mathbf{d}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \quad (1.47)$$

### 1.7.2 证明

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_j \quad (1.48)$$

$$= \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} a_i \sum_{lm} \varepsilon_{lmj} b_l c_m \quad (1.49)$$

$$= - \sum_{ilm} \sum_j \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jlm} a_i b_l c_m \quad (1.50)$$

$$= - \sum_{ilm} (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) a_i b_l c_m \quad (1.51)$$

$$= \sum_i a_i b_i c_k - \sum_m a_l b_k c_m \quad (1.52)$$

$$= b_k \sum_i a_i c_i - c_k \sum_m a_m b_m \quad (1.53)$$

$$= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]_k \quad (1.54)$$

第一式得证。

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_j \quad (1.55)$$

$$= \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \sum_{lm} \varepsilon_{lmi} a_l b_m \sum_{np} \varepsilon_{npj} c_n d_p \quad (1.56)$$

$$= \sum_{jlmnp} \sum_i \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{npj} a_l b_m c_n d_p \quad (1.57)$$

$$= \sum_{jlmnp} (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) \varepsilon_{npj} a_l b_m c_n d_p \quad (1.58)$$

$$= \sum_l \varepsilon_{npl} a_l b_k c_n d_p - \sum_{jrs} \varepsilon_{rsj} a_k b_j c_r d_s \quad (1.59)$$

$$= b_k \sum_{lnp} a_l \sum_{np} \varepsilon_{npl} c_n d_p - a_k \sum_j b_j \sum_{rs} \varepsilon_{rsj} c_r d_s \quad (1.60)$$

$$= b_k [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - a_k [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \quad (1.61)$$

$$= \{\mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\}_k \quad (1.62)$$

同理，选择另外两个三阶完全反对称张量  $\varepsilon_{ijk}$  和  $\varepsilon_{npj}$  缩并即可得到第二式的第二个等号：

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_j \quad (1.63)$$

$$= \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \sum_{lm} \varepsilon_{lmi} a_l b_m \sum_{np} \varepsilon_{npj} c_n d_p \quad (1.64)$$

$$= - \sum_{ilmnp} \sum_j \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jnp} \varepsilon_{lmi} a_l b_m c_n d_p \quad (1.65)$$

$$= \sum_{ilmnp} (\delta_{ip} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kp}) \varepsilon_{lmi} a_l b_m c_n d_p \quad (1.66)$$

$$= \sum_{ilm} \varepsilon_{lmi} a_l b_m c_k d_i - \sum_{rsn} \varepsilon_{rsn} a_r b_s c_n d_k \quad (1.67)$$

$$= c_k \sum_i d_i \sum_{lm} \varepsilon_{lmi} a_l b_m - d_k \sum_n c_n \sum_{rs} \varepsilon_{rsn} a_r b_s \quad (1.68)$$

$$= \{\mathbf{c}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})] - \mathbf{d}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\}_k \quad (1.69)$$

于是第二个等式得证。

## 1.8 梯度关系

### 1.8.1 题目

试证明：

$$\operatorname{div}(\phi \delta_{ij}) = \mathbf{grad} \phi \quad (1.70)$$

$$\operatorname{div}(\phi p_{ij}) = \phi \operatorname{div} \vec{p} + \mathbf{grad} \phi \cdot \vec{p} \quad (1.71)$$

其中， $\vec{p}$  是二阶张量  $p_{ij}$  的整体记号。

### 1.8.2 证明

对第一个微分式，有展开形式：

$$[\operatorname{div}(\phi\delta_{ij})]_k = \sum_{li} \delta_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} (\phi\delta_{ik}) \quad (1.72)$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi\delta_{ik}) \quad (1.73)$$

$$= \sum_i [\phi \frac{\partial \delta_{ik}}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}] \quad (1.74)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (1.75)$$

$$= [\mathbf{grad} \phi]_k \quad (1.76)$$

第一个微分式得证。

$$[\operatorname{div}(\phi p_{ij})]_k = \sum_{li} \delta_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} (\phi p_{ik}) \quad (1.77)$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi p_{ik}) \quad (1.78)$$

$$= \sum_i [\phi \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} + p_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}] \quad (1.79)$$

$$= \phi (\operatorname{div} \vec{p})_k + (\mathbf{grad} \phi \cdot \vec{p})_k \quad (1.80)$$

第二个微分式得证。

## 1.9 对称-反对称分解

### 1.9.1 题目

将并矢张量  $\mathbf{ab}$  分解为对称部分和反对称部分，试证明：与反对称部分相当的矢量为  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 。

### 1.9.2 证明

反对称部分为

$$(ab)_{[ij]} = \frac{1}{2}[(ab)_{ij} - (ab)_{ji}] \quad (1.81)$$

$$= \frac{1}{2}[a_i b_j - a_j b_i] \quad (1.82)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k \quad (1.83)$$

由于是反对称的，所有的  $(ab)_{[ii]} = 0$ 。因此，有

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

## 1.10 导数张量的分解

### 1.10.1 题目

将张量  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$  分解为对称部分  $s$  和反对称部分  $w$ , 试证明:

(1)

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (1.85)$$

(2)

$$d\mathbf{a} = sdx + \frac{1}{2}\mathbf{rot} \mathbf{a} \times dx \quad (1.86)$$

### 1.10.2 证明

由于反对称二阶张量与一阶赝矢量是一一对应的, 可以说:

$$w_k = (w)_{ij} \quad (1.87)$$

$$w_k = (w)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{rot} \mathbf{a}\right)_k \quad (1.88)$$

第一式得证。

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \quad (1.89)$$

故

$$(d\mathbf{a})_i = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.90)$$

$$(sdx)_i = \sum_j s_{ij} dx_j \quad (1.91)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (1.92)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_j \quad (1.93)$$

$$= \frac{1}{2}(d\mathbf{a})_i + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_j \quad (1.94)$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{rot} \mathbf{a} \times d\mathbf{x}\right)_i = \frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{jki} (\mathbf{rot} \mathbf{a})_j (d\mathbf{x})_k \quad (1.95)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{jki} \sum_{lm} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} dx_k \quad (1.96)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{klm} \sum_j \varepsilon_{kij} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} dx_k \quad (1.97)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{klm} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \frac{\partial a_m}{\partial x_l} dx_k \quad (1.98)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k - \frac{1}{2} \sum_m \frac{\partial a_m}{\partial x_i} dx_m \quad (1.99)$$

$$= \frac{1}{2} (da)_i - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_j \quad (1.100)$$

以上两式求和即可令第二式得证。

## 1.11 亥姆霍兹速度分解定律

### 1.11.1 题目

由于流体运动时，除平动外还有形变运动，故某一点邻域内流体微团的运动速度可写为

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1.101)$$

若将二阶张量  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  分解为反对称张量  $a_{ij}$  和对称张量  $s_{ij}$ ，则得到亥姆霍兹速度分解定律

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{x} + \mathbf{grad} \phi \quad (1.102)$$

写出反对称张量  $a_{ij}$ ，对称张量  $s_{ij}$ ，并求出  $\phi$ 。

### 1.11.2 解

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j) \quad (1.103)$$

$$= \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \delta x_j \quad (1.104)$$

反对称张量：

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.105)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} - \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \delta x_j - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \delta x_i \right) \quad (1.106)$$

对称张量:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.107)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \delta x_j + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \delta x_i \right) \quad (1.108)$$

求标量函数:

容易看出, 这一分解实际上就是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} \quad (1.109)$$

与??同理可得,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{x} + \vec{s} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (1.110)$$

只要展开  $\vec{s} \cdot \delta \mathbf{x}$ , 并据此找到对应的  $\phi$  即可。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = (\vec{s} \cdot \delta \mathbf{x})_i \quad (1.111)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \delta x_j + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \delta x_i \right) \delta x_j \quad (1.112)$$

略去所有二阶变分, 可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = (\vec{s} \cdot \delta \mathbf{x})_i \quad (1.113)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \delta x_j \right) \quad (1.114)$$

可以看出

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{lm} v_{0l} \delta x_m \quad (1.115)$$

## 1.12 偏应力张量

### 1.12.1 题目

流体应力张量  $\vec{p}$  可分解为  $p_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$ , 其中,  $\vec{p}$  是二阶张量  $p_{ij}$  的整体符号,  $P$  为流体压力函数,  $\tau_{ij}$  为偏应力张量, 它是速度梯度张量各分量的线性齐次函数, 即

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (1.116)$$

试推导:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left( s_{ij} - \frac{1}{2} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij} \quad (1.117)$$

式中,  $s_{ij}$  为张量  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  的对称部分;  $\mu, \mu'$  为常数, 分别是动力学黏性系数和膨胀黏性系数。

### 1.12.2 证明

将四阶各向同性张量写成  $\delta$  形式:

$$c_{ijkl} = \nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.118)$$

将  $\partial_j u_i$  的对称分量记为  $s_{ij}$ , 反对称分量记为  $a_{ij}$ , 则有

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\partial_l u_k \quad (1.119)$$

$$= [\nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\partial_l u_k \quad (1.120)$$

$$= \nu\delta_{ij}\partial_k u_k + \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (1.121)$$

$$= \nu\delta_{ij}(s_{kk} + a_{kk}) + \mu(s_{ij} + a_{ij} + s_{ji} + a_{ji}) \quad (1.122)$$

反对称分量的对角元均为 0, 且有  $a_{ij} + a_{ji} = 0$ 。则有

$$\tau_{ij} = \nu\delta_{ij}s_{kk} + 2\mu s_{ij} \quad (1.123)$$

令  $\nu = \mu' - \mu$ , 则

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} + \mu\delta_{ij}s_{kk} - \mu'\delta_{ij}s_{kk} \quad (1.124)$$

$$= 2\mu \left( s_{ij} - \frac{1}{2}s_{kk}\delta_{ij} \right) + \mu's_{kk}\delta_{ij} \quad (1.125)$$

得证。

## 1.13 证明张量恒等式

### 1.13.1 题目

试证明:

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\vec{e}\mathbf{E}^2) \quad (1.126)$$

### 1.13.2 证明

$$(LHS)_i = (\partial_p E_p)E_i + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}E_k(\partial_l E_m) \quad (1.127)$$

$$= (\partial_p E_p)E_i - (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})E_k(\partial_l E_m) \quad (1.128)$$

$$= (\partial_p E_p)E_i - E_k(\partial_i E_k) + E_l(\partial_l E_i) \quad (1.129)$$

$$(RHS)_i = (\nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}))_i - [\nabla(\frac{1}{2}\vec{e}\mathbf{E}^2)]_i \quad (1.130)$$

$$= \partial_p(\mathbf{E}\mathbf{E})_{pi} - \frac{1}{2}\partial_i(\vec{e}\mathbf{E}^2)_i \quad (1.131)$$

$$= \partial_p(E_p E_i) - \frac{1}{2}\partial_i e_{ij} \mathbf{E}_{ji}^2 \quad (1.132)$$

$$= E_i \partial_p E_p + E_p \partial_p E_i - \frac{1}{2}\partial_j \delta_{ij} E_i E_j \quad (1.133)$$

$$= E_i \partial_p E_p + E_p \partial_p E_i - \frac{1}{2}\partial_j E_i^2 \quad (1.134)$$

$$= E_i \partial_p E_p + E_p \partial_p E_i - E_i \partial_j E_i \quad (1.135)$$

得证。

2026 年 1 月 21 日

---

# Chapter 2

## 仿射空间与伪欧氏空间中的张量

### 2.1 叉乘线性相关性

#### 2.1.1 题目

若  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ , 求证  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  线性相关。

#### 2.1.2 证明

首先将  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  展开为显式表达:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \quad (2.3)$$

首先考虑某个向量中有分量为 0 的情况。由对称性, 不妨假设向量  $\mathbf{a}$  中  $a_1 = 0$ , 其他元素不为 0, 则有

$$a_2b_1 = a_3b_1 = 0 \quad (2.4)$$

故必然要求  $b_1 = 0$ 。因此, 各向量的 0 分量对应, 只需要考虑向量的非 0 分量即可。

不妨设  $a_i, a_j, b_i, b_j$  都是非 0 的, 则由

$$a_i b_j - a_j b_i = 0 \quad (2.5)$$

可得

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} \quad (2.6)$$

故对于任意  $i$  分量, 总是有

$$a_i = k b_i \quad (2.7)$$

即有

$$\mathbf{a} = k\mathbf{b} \quad (2.8)$$

故  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  线性相关。

## 2.2 标量积与线性相关性

### 2.2.1 题目

若  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ , 则  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  线性相关。

### 2.2.2 证明

混合积为 0 即

$$\det(P) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

行列式为 0 表明矩阵  $P$  不满秩, 故必存在一参数组合  $(m, n)$  使得

$$\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = 0 \quad (2.10)$$

即  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  线性相关。

## 2.3 四阶完全反对称张量的缩并

### 2.3.1 题目

计算四维时空中  $e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma}$  的值。

### 2.3.2 解

有任何两个角标相同时,  $e_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ . 故只需要计算所有  $(0, 1, 2, 3)$  的排列即可, 共 24 个。

先考虑排列 0123, 有

$$e_{0123} = -1 \quad (2.11)$$

$$e^{0123} = 1 \quad (2.12)$$

乘积为-1.

对任意排列, 若它是一个偶排列, 则两个量都不变号, 乘积为-1; 若它是一个奇排列, 则两个量都变号, 乘积也是-1. 故所有的 24 个排列都是-1, 四个指标缩并结果为-24. 即

$$e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma} = -24 \quad (2.13)$$

## 2.4 四阶完全反对称张量的关系式

### 2.4.1 题目

证明下列关系式：<sup>1</sup>

$$e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = -6\delta_\sigma^\rho \quad (2.14)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = -2(\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\mu) \quad (2.15)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\mu\nu\sigma} = -(\delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\sigma - \delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\sigma\delta_\delta^\nu + \delta_\beta^\nu\delta_\gamma^\sigma\delta_\delta^\mu - \delta_\beta^\nu\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\sigma + \delta_\beta^\sigma\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\beta^\sigma\delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\mu) \quad (2.16)$$

### 2.4.2 证明

$$(1) e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = -6\delta_\sigma^\rho$$

式中共出现  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho$  共五个指标，而一共只有 4 个维度参量可供分配，故必然有两个指标相等。

当  $\sigma \neq \rho$  时，必有  $\sigma, \rho$  中的一者与  $\alpha, \beta, \gamma$  中的一个相等，则对应的张量分量为 0.

当  $\sigma = \rho$  时，二者固定为一个确定的已知指标， $\alpha\beta\gamma$  三个自由标占据其他三个位置，在求和时共有 6 个排列。上一题已经证明过，对任意排列， $e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma} = -1$ ，故求和结果为-6. 综上所述，

$$e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq \rho \\ -6, & \sigma = \rho \end{cases} = -6\delta_\sigma^\rho \quad (2.17)$$

$$(2) e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = -2(\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\mu)$$

系数-2 来源于  $\alpha\beta$  的排列。

当  $\{\gamma, \delta\} \neq \{\nu, \mu\}$  时，必有四个指标之一与  $\alpha$  或者  $\beta$  相同，故一个分量为 0，乘积也为 0；当且仅当  $\{\gamma, \delta\} = \{\nu, \mu\}$ ，且任意指标均不等于  $\alpha, \beta$  时，乘积才不为 0. 因此，

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \{\gamma, \delta\} \neq \{\nu, \mu\} \\ 2 \times (-1), & \gamma = \mu, \delta = \nu \\ 2 \times 1, & \gamma = \nu, \delta = \mu \end{cases} \quad (2.18)$$

$$= -2(\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\mu) \quad (2.19)$$

$$(3) e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\mu\nu\sigma} = -(\delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\sigma - \delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\sigma\delta_\delta^\nu + \delta_\beta^\nu\delta_\gamma^\sigma\delta_\delta^\mu - \delta_\beta^\nu\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\sigma + \delta_\beta^\sigma\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\beta^\sigma\delta_\gamma^\nu\delta_\delta^\mu)$$

同样的方法可以证明。

## 2.5 从洛伦兹变换式

### 2.5.1 题目

从洛伦兹变换式

$$\begin{cases} x' = (\cos \theta)x + (-i \sin \theta)ct \\ ct' = (-i \sin \theta)x + (\cos \theta)ct \end{cases} \quad (2.20)$$

<sup>1</sup>第一式原题为  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\delta\rho} = -6\delta_\sigma^\rho$ ，似笔误。

出发, 证明快度变换式

$$y = y_1 + y_2 \quad (2.21)$$

### 2.5.2 证明

考虑坐标系  $K, K'$ ,  $K$  相对  $K'$  有速度  $v_0$ , 以及  $K(x, ct)$  系中速度  $v$  的一个物体。当  $t = 0$  时,  $K, K'$  的原点以及物体的位置重合。

从快度定义, 有  $K$  系相对  $K'$  系的快度

$$y_0 = \operatorname{arctanh} \beta_0 \quad (2.22)$$

物体相对  $K$  系的快度

$$y_1 = \operatorname{arctanh} \beta \quad (2.23)$$

当  $K$  系中经过  $t$  时间后, 物体在  $K$  系中位于  $(\beta ct, ct)$ , 在  $K'$  系中时空坐标

$$x' = (\cos \theta) \beta ct + (-i \sin \theta) ct \quad (2.24)$$

$$ct' = (-i \sin \theta) \beta ct + (\cos \theta) ct \quad (2.25)$$

在  $K$  系中速度为

$$\beta' = \frac{x'}{ct'} = \frac{(\cos \theta) \beta ct + (-i \sin \theta) ct}{(-i \sin \theta) \beta ct + (\cos \theta) ct} \quad (2.26)$$

$$= \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta \beta_0} \quad (2.27)$$

相应快度

$$y' = \operatorname{arctanh} \left( \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta \beta_0} \right) \quad (2.28)$$

$$= \operatorname{arctanh} \left( \frac{\tanh y_1 + \tanh y_2}{1 + \tanh y_1 \tanh y_2} \right) \quad (2.29)$$

$$= \operatorname{arctanh}[\tanh(y_1 + y_2)] \quad (2.30)$$

$$= y_1 + y_2 \quad (2.31)$$

## 2.6 洛伦兹变换的雅可比

### 2.6.1 题目

证明洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.32)$$

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.33)$$

的雅可比行列式等于 1.

### 2.6.2 证明

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{-\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.37)$$

则 Jacobi 行列式

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \quad (2.40)$$

$$= 1 \quad (2.41)$$

这意味着在对不同坐标系中的物理量进行积分时，总是有

$$dx' dy' dz' dt' = dx dy dz dt \quad (2.42)$$

换言之，四维体积元是一个不变量。

## 2.7 在闵可夫斯基空间中推导洛伦兹变换式

### 2.7.1 题目

在 3+1 维闵可夫斯基空间中推导 K' 系相对于 K 系沿任意方向以速度 v 运动的洛伦兹变换式

### 2.7.2 解

(待完成)