《物理学中的张量分析》习题

Armour Piercer

February 2025

Chapter 1

三维欧式空间中的矢量与张量

1.1 用矢量方法证明球面三角形中的余弦定理

1.1.1 定理内容：

$$\cos\alpha = \cos\gamma\cos\beta + \sin\beta\sin\gamma\cos A \tag{1.1}$$

式中，α, β, γ 分别为大圆弧 BC, CA, AB 对应的圆心角；A 为大圆弧 BA 与 CA 所在平面的夹角。

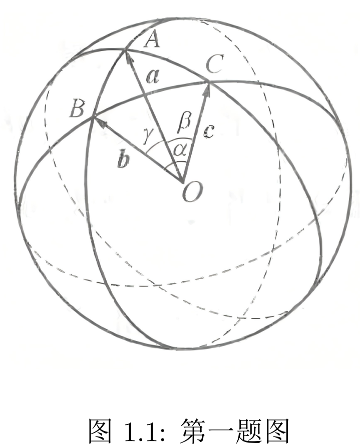

图 1.1: 第一题图

1.1.2 证明

$$\begin{aligned}
\cos\alpha =& \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && (1.2)\\
\cos\gamma =& a\cdot b && (1.3)\\
\cos\beta =& a\cdot c && (1.4)\\
\cos A =& \frac{a\times b}{|a\times b|}\cdot\frac{a\times c}{|a\times c|} && (1.5)\\
=& \frac{a\times b}{\sin\gamma}\cdot\frac{a\times c}{\sin\beta} && (1.6)
\end{aligned}$$

即证明

$$\begin{aligned}
b\cdot c =& (a\cdot b)(a\cdot c)+(a\times b)\cdot(a\times c) && (1.7)\\
=& (a\cdot b)(a\cdot c)+c\cdot[(a\times b)\times a] && (1.8)\\
=& (a\cdot b)(a\cdot c)+c\cdot[b(a\cdot a)-a(a\cdot b)] && (1.9)\\
=& (a\cdot b)(a\cdot c)+c\cdot[b-a(a\cdot b)] && (1.10)\\
=& (a\cdot b)(a\cdot c)+c\cdot b-(c\cdot a)(a\cdot b) && (1.11)\\
=& b\cdot c && (1.12)
\end{aligned}$$

得证。

1.2 基矢性质

1.2.1 题目内容

基矢满足

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij} \tag{1.13}$$

试证明

$$\mathbf{e_1}=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)} \tag{1.14}$$

以及这一公式的轮换对称性。

1.2.2 证明：

只要证明等式右侧在 $\mathbf{e}_1$ 分量为 1，在 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 方向上分量为 0.

$$\begin{aligned} RHS\cdot\mathbf{e}_1 =& \mathbf{e}_1\cdot\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=1 && (1.15)\\ RHS\cdot\mathbf{e}_2 =& \mathbf{e}_2\cdot\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)} && (1.16)\\ =& \frac{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)} && (1.17)\\ =& \frac{\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)} && (1.18)\\ =& 0 && (1.19) \end{aligned}$$

$\mathbf{e}_3$ 方向分量同理为 0. 另外两个式子用类似方法可证，因此本题得证。

1.3 矢量分解

1.3.1 题目

试证明：任意矢量 $\mathbf{r}$ 可以用基矢 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 写成

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \tag{1.20}$$

1.4 张量识别定理——缩并形式

1.4.1 题目

若 $a_{i_1i_2\ldots i_\mu j_1j_2\ldots j_\nu}$ 和任意 ν 阶张量 $b_{j_1j_2\ldots j_\nu}$ 的缩并恒为 μ 阶张量，试证明：$a_{i_1i_2\ldots i_\mu j_1j_2\ldots j_\nu}$ 为 $\mu+\nu$ 阶张量。

1.4.2 证明

将其缩并记为

$$c_{i_1i_2\ldots i_\mu}=\sum_{j_1j_2\ldots j_\nu}a_{i_1i_2\ldots i_\mu j_1j_2\ldots j_\nu}b_{j_1j_2\ldots j_\nu} \tag{1.21}$$

则在变换：

$$\mathbf{e}_{i'}=\sum_i A_{i'i}\mathbf{e_i} \tag{1.22}$$

进行时，有：

$$\begin{aligned} c_{i'_1i'_2\ldots i'_\mu} &= \sum_{i_1i_2\ldots i_\mu}A_{i'_1i_1}A_{i'_2i_2}\ldots A_{i'_\mu i_\mu}c_{i_1i_2\ldots i_\mu} && (1.23)\\ &= \sum_{i_1i_2\ldots i_\mu}A_{i'_1i_1}A_{i'_2i_2}\ldots A_{i'_\mu i_\mu}\left[\sum_{j_1j_2\ldots j_\nu}a_{i_1i_2\ldots i_\mu j_1j_2\ldots j_\nu}b_{j_1j_2\ldots j_\nu}\right] && (1.24) \end{aligned}$$

同时，有

$$c_{i_1'i_2'...i_\mu'} = \sum_{j_1'j_2'...j_\nu'} a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} b_{j_1'j_2'...j_\nu'} \tag{1.25}$$

$$= \sum_{j_1'j_2'...j_\nu'} a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} \left(\sum_{j_1j_2...j_\nu} A_{j_1'j_1} A_{j_2'j_2} ... A_{j_\nu'j_\nu} b_{j_1j_2...j_\nu} \right) \tag{1.26}$$

由于对任意张量 b 成立，因此有

$$\sum_{i_1i_2...i_\mu} A_{i_1'i_1} A_{i_2'i_2} ... A_{i_\mu'i_\mu} a_{i_1i_2...i_\mu j_1j_2...j_\nu} = \sum_{j_1'j_2'...j_\nu'} a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} A_{j_1'j_1} A_{j_2'j_2} ... A_{j_\nu'j_\nu} \tag{1.27}$$

考虑一组数字 $k_1, k_2, ..., k_\nu$，各数字 k_p 在对应角标的 j_p 的取值范围内随机取值，则其构成一组随机下标排列。由于上式中 j_1, j_2... j_ν 是自由标，可以对上式两侧同时乘以 $A_{k_1'j_1} A_{k_2'j_2} ... A_{k_\nu'j_\nu}$，再并对 j_1, j_2... j_ν 求和，可得

$$\sum_{i_1i_2...i_\mu} \sum_{j_1j_2...j_\nu} A_{i_1'i_1} A_{i_2'i_2} ... A_{i_\mu'i_\mu} A_{k_1'j_1} A_{k_2'j_2} ... A_{k_\nu'j_\nu} a_{i_1i_2...i_\mu j_1j_2...j_\nu} \tag{1.28}$$

$$= \sum_{j_1'j_2'...j_\nu'} \sum_{j_1j_2...j_\nu} a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} A_{j_1'j_1} A_{j_2'j_2} ... A_{j_\nu'j_\nu} A_{k_1'j_1} A_{k_2'j_2} ... A_{k_\nu'j_\nu} \tag{1.29}$$

首先在右侧对 j 序列分别求和，得到

$$\sum_{i_1i_2...i_\mu} \sum_{j_1j_2...j_\nu} A_{i_1'i_1} A_{i_2'i_2} ... A_{i_\mu'i_\mu} A_{k_1'j_1} A_{k_2'j_2} ... A_{k_\nu'j_\nu} a_{i_1i_2...i_\mu j_1j_2...j_\nu} \tag{1.30}$$

$$= \sum_{j_1'j_2'...j_\nu'} a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} \delta_{j_1'k_1'} \delta_{j_2'k_2'} ... \delta_{j_\nu'k_\nu'} \tag{1.31}$$

这要求对任意的 k_p，都要等于对应下标的 j_p。则有

$$\sum_{i_1i_2...i_\mu} \sum_{j_1j_2...j_\nu} A_{i_1'i_1} A_{i_2'i_2} ... A_{i_\mu'i_\mu} A_{k_1'j_1} A_{k_2'j_2} ... A_{k_\nu'j_\nu} a_{i_1i_2...i_\mu j_1j_2...j_\nu} \tag{1.32}$$

$$= a_{i_1'i_2'...i_\mu'k_1'k_2'...k_\nu'} \tag{1.33}$$

由于 k' 只是一组独立下标序列，与实际的变换无关，将原式中的 k' 项全部改写成 j' 项不会影响结果。这就能得到我们熟悉的张量表达式，

$$a_{i_1'i_2'...i_\mu'j_1'j_2'...j_\nu'} = \sum_{i_1i_2...i_\mu} \sum_{j_1j_2...j_\nu} A_{i_1'i_1} A_{i_2'i_2} ... A_{i_\mu'i_\mu} A_{j_1'j_1} A_{j_2'j_2} ... A_{j_\nu'j_\nu} a_{i_1i_2...i_\mu j_1j_2...j_\nu} \tag{1.34}$$

1.5 张量识别定理——张量积形式

1.5.1 题目

若 $a_{i_1i_2...i_\mu}$ 和任意 ν 阶张量 $b_{j_1j_2...j_\nu}$ 的张量积为 $\mu+\nu$ 阶张量，则 $a_{i_1i_2...i_\mu}$ 为 μ 阶张量。

1.5.2 证明

将 a 和 b 的张量积记为

$$c_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} = a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \tag{1.35}$$

当坐标变换

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_i A_{i'i} \mathbf{e_i} \tag{1.36}$$

进行时，有：

$$\begin{aligned} c_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} =& a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} b_{j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} & (1.37)\\ =& a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} & (1.38) \end{aligned}$$

同时，

$$\begin{aligned} c_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu j'_1 j'_2 \dots j'_\nu} &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} c_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\nu} & (1.39)\\ &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} b_{j_1 j_2 \dots j_\nu} & (1.40) \end{aligned}$$

要对任意的张量 b 成立，则有

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} A_{j'_1 j_1} A_{j'_2 j_2} \dots A_{j'_\nu j_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \tag{1.41}$$

由于右侧没有对下标 j 进行求和，可以提取公因式并约去等式两侧的 $A_{j'_m j_m}$ 项。因此，

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} A_{i'_1 i_2} A_{i'_2 i_2} \dots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \tag{1.42}$$

即证明了 $a_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ 也是按照张量的形式变化的，它也是一个张量。

1.6 张量识别定理的应用

1.6.1 题目内容

试根据张量识别定理证明：δ_{ij} 是二阶张量，ε_{ijk} 为三阶张量。

1.6.2 证明

考虑一个一阶张量 a_i，将 δ_{ij} 与 a_i 进行缩并。有：

$$b_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j \tag{1.43}$$

显然，b_j 也是一个张量，且它与 a_j 相等。因此，δ_{ij} 是二阶张量。

同样，将 ε_{ijk} 与 δ_{ij} 缩并，

$$\sum_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}=\sum_{i}\varepsilon_{iik}=0_k \tag{1.44}$$

即缩并的结果是一个一阶零张量。因此，ε_{ijk} 是一个三阶张量。

1.7 证明矢量等式

1.7.1 题目

利用克罗内克符号 δ_{ij} 和三阶完全反对称张量 ε_{ijk} 证明：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) =& \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) && (1.45)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) =& \mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]-\mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] && (1.46)\\
=& \mathbf{c}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})]-\mathbf{d}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] && (1.47)
\end{aligned}$$

1.7.2 证明

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_k =& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}a_i(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_j && (1.48)\\
=& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}a_i\sum_{lm}\varepsilon_{lmj}b_lc_m && (1.49)\\
=& -\sum_{ilm}\sum_{j}\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jlm}a_ib_lc_m && (1.50)\\
=& -\sum_{ilm}(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})a_ib_lc_m && (1.51)\\
=& \sum_{i}a_ib_ic_k-\sum_{m}a_lb_kc_m && (1.52)\\
=& b_k\sum_{i}a_ic_i-c_k\sum_{m}a_mb_m && (1.53)\\
=& [\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})]_k && (1.54)
\end{aligned}$$

第一式得证。

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]_k =& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i(\mathbf{c}\times\mathbf{d})_j & (1.55)\\
=& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}\sum_{lm}\varepsilon_{lmi}a_l b_m\sum_{np}\varepsilon_{npj}c_n d_p & (1.56)\\
=& \sum_{jlmnp}\sum_{i}\varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{npj}a_l b_m c_n d_p & (1.57)\\
=& \sum_{jlmnp}(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})\varepsilon_{npj}a_l b_m c_n d_p & (1.58)\\
=& \sum_{l}\varepsilon_{npl}a_l b_k c_n d_p - \sum_{jrs}\varepsilon_{rsj}a_k b_j c_r d_s & (1.59)\\
=& b_k\sum_{lnp}a_l\sum_{np}\varepsilon_{npl}c_n d_p - a_k\sum_{j}b_j\sum_{rs}\varepsilon_{rsj}c_r d_s & (1.60)\\
=& b_k[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] - a_k[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] & (1.61)\\
=& \{\mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\}_k & (1.62)
\end{aligned}
$$

同理，选择另外两个三阶完全反对称张量 ε_{ijk} 和 ε_{npj} 缩并即可得到第二式的第二个等号：

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]_k =& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i(\mathbf{c}\times\mathbf{d})_j & (1.63)\\
=& \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}\sum_{lm}\varepsilon_{lmi}a_l b_m\sum_{np}\varepsilon_{npj}c_n d_p & (1.64)\\
=& -\sum_{ilmnp}\sum_{j}\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jnp}\varepsilon_{lmi}a_l b_m c_n d_p & (1.65)\\
=& \sum_{ilmnp}(\delta_{ip}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{kp})\varepsilon_{lmi}a_l b_m c_n d_p & (1.66)\\
=& \sum_{ilm}\varepsilon_{lmi}a_l b_m c_k d_i - \sum_{rsn}\varepsilon_{rsn}a_r b_s c_n d_k & (1.67)\\
=& c_k\sum_{i}d_i\sum_{lm}\varepsilon_{lmi}a_l b_m - d_k\sum_{n}c_n\sum_{rs}\varepsilon_{rsn}a_r b_s & (1.68)\\
=& \{\mathbf{c}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})] - \mathbf{d}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\}_k & (1.69)
\end{aligned}
$$

于是第二个等式得证。

1.8 梯度关系

1.8.1 题目

试证明：

$$\mathrm{div}(\phi\delta_{ij}) = \mathbf{grad}\phi \tag{1.70}$$

$$\mathrm{div}(\phi p_{ij}) = \phi\,\mathrm{div}\,\vec{\vec{p}} + \mathbf{grad}\phi\cdot\vec{\vec{p}} \tag{1.71}$$

其中，$\vec{\vec{p}}$ 是二阶张量 p_{ij} 的整体记号。

1.8.2 证明

对第一个微分式，有展开形式：

$$\begin{aligned}
[\mathrm{div}(\phi\delta_{ij})]_k =& \sum_{li} \delta_{li} \frac{\partial}{\partial x_l}(\phi\delta_{ik}) && (1.72)\\
=& \sum_{i} \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi\delta_{ik}) && (1.73)\\
=& \sum_{i} [\phi\frac{\partial\delta_{ik}}{\partial x_i} + \delta_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}] && (1.74)\\
=& \frac{\partial\phi}{\partial x_k} && (1.75)\\
=& [\mathbf{grad}\,\phi]_k && (1.76)
\end{aligned}$$

第一个微分式得证。

$$\begin{aligned}
[\mathrm{div}(\phi p_{ij})]_k =& \sum_{li} \delta_{li} \frac{\partial}{\partial x_l}(\phi p_{ik}) && (1.77)\\
=& \sum_{i} \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi p_{ik}) && (1.78)\\
=& \sum_{i} [\phi\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} + p_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}] && (1.79)\\
=& \phi(\mathrm{div}\,\overset{\rightrightarrows}{p})_k + (\mathbf{grad}\phi\cdot\overset{\rightrightarrows}{p})_k && (1.80)
\end{aligned}$$

第二个微分式得证。

1.9 对称-反对称分解

1.9.1 题目

将并矢张量 **ab** 分解为对称部分和反对称部分，试证明：与反对称部分相当的矢量为 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{b}\times\mathbf{a}$。

1.9.2 证明

反对称部分为

$$\begin{aligned}
(ab)_{[ij]} =& \frac{1}{2}[(ab)_{ij} - (ab)_{ji}] && (1.81)\\
=& \frac{1}{2}[a_i b_j - a_j b_i] && (1.82)\\
=& \frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k && (1.83)
\end{aligned}$$

由于是反对称的，所有的 $(ab)_{[ii]} = 0$。因此，有

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.84}$$

式中，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b}$。

1.10 导数张量的分解

1.10.1 题目

将张量 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 分解为对称部分 s 和反对称部分 w，试证明：

(1)

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{rot\,a} \tag{1.85}$$

(2)

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = s\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{rot\,a} \times \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{1.86}$$

1.10.2 证明

由于反对称二阶张量与一阶赝矢量是一一对应的，可以说：

$$w_k = (w)_{ij} \tag{1.87}$$

$$w_k = (w)_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) = (\frac{1}{2}\mathbf{rot\,a})_k \tag{1.88}$$

第一式得证。

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \tag{1.89}$$

故

$$(\mathrm{d}\mathbf{a})_i = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{1.90}$$

$$(s\mathrm{d}\mathbf{x})_i = \sum_j s_{ij}\mathrm{d}x_j \tag{1.91}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i})\mathrm{d}x_j \tag{1.92}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j \tag{1.93}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{d}\mathbf{a})_i + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j \tag{1.94}$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{a}\times \mathrm{d}\mathbf{x})_i =&\frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{jki}(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_j(\mathrm{d}\mathbf{x})_k && (1.95)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{jki}\sum_{lm}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial a_m}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k && (1.96)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{klm}\sum_{j}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial a_m}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k && (1.97)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{klm}(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})\frac{\partial a_m}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k && (1.98)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{k}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k-\frac{1}{2}\sum_{m}\frac{\partial a_m}{\partial x_i}\mathrm{d}x_m && (1.99)\\
=&\frac{1}{2}(\mathrm{d}\mathbf{a})_i-\frac{1}{2}\sum_{j}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j && (1.100)
\end{aligned}
$$

以上两式求和即可令第二式得证。

1.11 亥姆霍兹速度分解定律

1.11.1 题目

由于流体运动时，除平动外还有形变运动，故某一点邻域内流体微团的运动速度可写为

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{1.101}$$

若将二阶张量 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 分解为反对称张量 a_{ij} 和对称张量 s_{ij}，则得到亥姆霍兹速度分解定律

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\times\delta\mathbf{x} + \mathbf{grad}\,\phi \tag{1.102}$$

写出反对称张量 a_{ij}，对称张量 s_{ij}，并求出 ϕ。

1.11.2 解

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial x_j} =&\frac{\partial}{\partial x_j}(v_{0i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j) && (1.103)\\
=&\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\delta x_j && (1.104)
\end{aligned}
$$

反对称张量：

$$
\begin{aligned}
a_{ij} =&\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) && (1.105)\\
=&\frac{1}{2}(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}-\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\delta x_j-\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\delta x_i) && (1.106)
\end{aligned}
$$

对称张量：

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.107}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\delta x_j + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\delta x_i\right) \tag{1.108}$$

求标量函数：

容易看出，这一分解实际上就是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x} \tag{1.109}$$

与1.10同理可得，

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} \times \delta\mathbf{x} + \overset{\rightarrow}{\vec{s}} \cdot \delta\mathbf{x} \tag{1.110}$$

只要展开 $\overset{\rightarrow}{\vec{s}} \cdot \delta\mathbf{x}$，并据此找到对应的 ϕ 即可。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = (\overset{\rightarrow}{\vec{s}} \cdot \delta\mathbf{x})_i \tag{1.111}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\delta x_j + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\delta x_i\right)\delta x_j \tag{1.112}$$

略去所有二阶变分，可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = (\overset{\rightarrow}{\vec{s}} \cdot \delta\mathbf{x})_i \tag{1.113}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}\delta x_j\right) \tag{1.114}$$

可以看出

$$\phi = \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{1}{2}\sum_{lm} v_{0l}\delta x_m \tag{1.115}$$

1.12 偏应力张量

1.12.1 题目

流体应力张量 $\overset{\rightarrow}{\vec{p}}$ 可分解为 $p_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$，其中，$\overset{\rightarrow}{\vec{p}}$ 是二阶张量 p_{ij} 的整体符号，P 为流体压力函数，τ_{ij} 为偏应力张量，它是速度梯度张量各分量的线性齐次函数，即

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{1.116}$$

试推导：

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{2}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij} \tag{1.117}$$

式中，s_{ij} 为张量 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的对称部分；μ, μ' 为常数，分别是动力学黏性系数和膨胀黏性系数。

1.12.2 证明

将四阶各向同性张量写成 δ 形式：

$$c_{ijkl} = \nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.118}$$

将 $\partial_j u_i$ 的对称分量记为 s_{ij}，反对称分量记为 a_{ij}，则有

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} =& c_{ijkl}\partial_l u_k && (1.119)\\
=& [\nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\partial_l u_k && (1.120)\\
=& \nu\delta_{ij}\partial_k u_k + \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j) && (1.121)\\
=& \nu\delta_{ij}(s_{kk} + a_{kk}) + \mu(s_{ij} + a_{ij} + s_{ji} + a_{ji}) && (1.122)
\end{aligned}$$

反对称分量的对角元均为 0，且有 $a_{ij} + a_{ji} = 0$。则有

$$\tau_{ij} = \nu\delta_{ij}s_{kk} + 2\mu s_{ij} \tag{1.123}$$

令 $\nu = \mu' - \mu$，则

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} =& 2\mu s_{ij} + \mu\delta_{ij}s_{kk} - \mu'\delta_{ij}s_{kk} && (1.124)\\
=& 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{2}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij} && (1.125)
\end{aligned}$$

得证。

1.13 证明张量恒等式

1.13.1 题目

试证明：

$$(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} = \nabla\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\vec{e}\mathbf{E}^2) \tag{1.126}$$

1.13.2 证明

$$\begin{aligned}
(LHS)_i =& (\partial_p E_p)E_i + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}E_k(\partial_l E_m) && (1.127)\\
=& (\partial_p E_p)E_i - (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})E_k(\partial_l E_m) && (1.128)\\
=& (\partial_p E_p)E_i - E_k(\partial_i E_k) + E_l(\partial_l E_i) && (1.129)
\end{aligned}$$

$$(RHS)_i = (\nabla \cdot (\mathbf{EE}))_i - [\nabla(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{e}\mathbf{E}^2)]_i \tag{1.130}$$
$$= \partial_p(\mathbf{EE})_{pi} - \frac{1}{2}\partial_i(\overleftrightarrow{e}\mathbf{E}^2)_i \tag{1.131}$$
$$= \partial_p(E_pE_i) - \frac{1}{2}\partial_i e_{ij}\mathbf{E}^2_{ji} \tag{1.132}$$
$$= E_i\partial_pE_p + E_p\partial_pE_i - \frac{1}{2}\partial_j\delta_{ij}E_iE_j \tag{1.133}$$
$$= E_i\partial_pE_p + E_p\partial_pE_i - \frac{1}{2}\partial_jE_i^2 \tag{1.134}$$
$$= E_i\partial_pE_p + E_p\partial_pE_i - E_i\partial_jE_i \tag{1.135}$$

得证。

Chapter 2

仿射空间与伪欧氏空间中的张量

2.1 叉乘线性相关性

2.1.1 题目

若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$，求证 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 线性相关。

2.1.2 证明

首先将 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ 展开为显式表达：

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0 \tag{2.2}$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 \tag{2.3}$$

首先考虑某个向量中有分量为 0 的情况。由对称性，不妨假设向量 $\mathbf{a}$ 中 $a_1 = 0$，其他元素不为 0，则有

$$a_2 b_1 = a_3 b_1 = 0 \tag{2.4}$$

故必然要求 $b_1 = 0$。因此，各向量的 0 分量对应，只需要考虑向量的非 0 分量即可。

不妨设 a_i, a_j, b_i, b_j 都是非 0 的，则由

$$a_i b_j - a_j b_i = 0 \tag{2.5}$$

可得

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} \tag{2.6}$$

故对于任意 i 分量，总是有

$$a_i = k b_i \tag{2.7}$$

即有

$$\mathbf{a} = k\mathbf{b} \tag{2.8}$$

故 **a** 和 **b** 线性相关。

2.2 标量积与线性相关性

2.2.1 题目

若 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$，则 **a**, **b**, **c** 线性相关。

2.2.2 证明

混合积为 0 即

$$det(P) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

行列式为 0 表明矩阵 P 不满秩，故必存在一参数组合 (m, n) 使得

$$\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = 0 \tag{2.10}$$

即 **a**, **b**, **c** 线性相关。

2.3 四阶完全反对称张量的缩并

2.3.1 题目

计算四维时空中 $e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的值。

2.3.2 解

有任意两个角标相同时，$e_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. 故只需要计算所有 $(0, 1, 2, 3)$ 的排列即可，共 24 个。

先考虑排列 0123，有

$$e_{0123} = -1 \tag{2.11}$$

$$e^{0123} = 1 \tag{2.12}$$

乘积为-1.

对任意排列，若它是一个偶排列，则两个量都不变号，乘积为-1；若它是一个偶排列，则两个量都变号，乘积也是-1. 故所有的 24 个排列都是-1，四个指标缩并结果为-24. 即

$$e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma} = -24 \tag{2.13}$$

2.4 四阶完全反对称张量的关系式

2.4.1 题目

证明下列关系式：[1]

$$e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = -6\delta^{\rho}_{\sigma} \tag{2.14}$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = -2(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}) \tag{2.15}$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\mu\nu\sigma} = -(\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} + \delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta} - \delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta} + \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}) \tag{2.16}$$

2.4.2 证明

(1)$e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = -6\delta^{\rho}_{\sigma}$

式中共出现 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho$ 共五个指标，而一共只有 4 个维度参量可供分配，故必然有两个指标相等。

当 $\sigma \neq \rho$ 时，必有 σ, ρ 中的一者与 α, β, γ 中的一个相等，则对应的张量分量为 0.

当 $\sigma = \rho$ 时，二者固定为一个确定的已知指标，$\alpha\beta\gamma$ 三个自由标占据其他三个位置，在求和时共有 6 个排列。上一题已经证明过，对任意排列，$e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma} = -1$，故求和结果为-6. 综上所述，

$$e_{\alpha\beta\gamma\sigma}e^{\alpha\beta\gamma\rho} = \begin{cases} 0,\ \sigma \neq \rho \\ -6,\ \sigma = \rho \end{cases} = -6\delta^{\rho}_{\sigma} \tag{2.17}$$

(2)$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = -2(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta})$

系数-2 来源于 $\alpha\beta$ 的排列。

当 $\{\gamma,\ \delta\} \neq \{\nu,\ \mu\}$ 时，必有四个指标之一与 α 或者 β 相同，故一个分量为 0，乘积也为 0；当且仅当 $\{\gamma,\ \delta\} = \{\nu,\ \mu\}$，且任意指标均不等于 $\alpha,\ \beta$ 时，乘积才不为 0. 因此，

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 0,\ \{\gamma,\ \delta\} \neq \{\nu,\ \mu\} \\ 2\times(-1),\ \gamma = \mu,\ \delta = \nu \\ 2\times 1,\ \gamma = \nu,\ \delta = \mu \end{cases} \tag{2.18}$$

$$= -2(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}) \tag{2.19}$$

(3) $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\mu\nu\sigma} = -(\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} + \delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta} - \delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta} + \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta})$

同样的方法可以证明。

2.5 从洛伦兹变换式

2.5.1 题目

从洛伦兹变换式

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x + (-i\sin\theta)ct \\ ct' = (-i\sin\theta)x + (\cos\theta)ct \end{cases} \tag{2.20}$$

[1]第一式原题为 $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\delta\rho} = -6\delta^{\rho}_{\sigma}$，似笔误。

出发，证明快度变换式

$$y = y_1 + y_2 \tag{2.21}$$

2.5.2 证明

考虑坐标系 K, K'，K 相对 K' 有速度 v_0, 以及 $K(x, ct)$ 系中速度 v 的一个物体。当 $t = 0$ 时，K, K' 的原点以及物体的位置重合。

从快度定义，有 K 系相对 K' 系的快度

$$y_0 = \operatorname{arctanh} \beta_0 \tag{2.22}$$

物体相对 K 系的快度

$$y_1 = \operatorname{arctanh} \beta \tag{2.23}$$

当 K 系中经过 t 时间后，物体在 K 系中位于 $(\beta ct,\, ct)$，在 K' 系中时空坐标

$$x' = (\cos\theta)\beta ct + (-i\sin\theta)ct \tag{2.24}$$

$$ct' = (-i\sin\theta)\beta ct + (\cos\theta)ct \tag{2.25}$$

在 K 系中速度为

$$\begin{aligned}
\beta' =& \frac{x'}{ct'} = \frac{(\cos\theta)\beta ct + (-i\sin\theta)ct}{(-i\sin\theta)\beta ct + (\cos\theta)ct} && (2.26)\\
=& \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0} && (2.27)
\end{aligned}$$

相应快度

$$\begin{aligned}
y' =& \operatorname{arctanh}\left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}\right) && (2.28)\\
=& \operatorname{arctanh}\left(\frac{\tanh y_1 + \tanh y_2}{1 + \tanh y_1 \tanh y_2}\right) && (2.29)\\
=& \operatorname{arctanh}[\tanh(y_1 + y_2)] && (2.30)\\
=& y_1 + y_2 && (2.31)
\end{aligned}$$

2.6 洛伦兹变换的雅可比

2.6.1 题目

证明洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.32}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.33}$$

的雅可比行列式等于 1.

2.6.2 证明

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{-\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.37}$$

则 Jacobi 行列式

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{vmatrix} \tag{2.38}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \tag{2.40}$$

$$= 1 \tag{2.41}$$

这意味着在对不同坐标系中的物理量进行积分时，总是有

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\mathrm{d}t' = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{2.42}$$

换言之，四维体积元是一个不变量。

2.7 在闵可夫斯基空间中推导洛伦兹变换式

2.7.1 题目

在 3+1 维闵可夫斯基空间中推导 K’ 系相对于 K 系沿任意方向以速度 v 运动的洛伦兹变换式

2.7.2 解

（待完成）