

Logic Session - Mon 9th Oct - W3

Q1: Constructive: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

Q2: Constructive: $(A \wedge B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

Q3: Constructive: $(A \vee B \vee C) \rightarrow \neg A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D$

Q4: Constructive: $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Q5: Constructive: $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

Q6: Constructive: Assuming Q , prove: $(Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q7: Constructive: $Q \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q8: Constructive: $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S$

Q1: Constructive: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$$\frac{\frac{\frac{\neg(A \wedge B)}{1} \quad \frac{\frac{\bar{A}^2 \quad \bar{B}^3}{A \wedge B} [I\Gamma]}{[\neg E]}}{\perp} 3 [\neg I]}{\neg B} 2 [\rightarrow I]$$

$$\frac{(A \rightarrow \neg B)}{\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)} 1 [\rightarrow I]$$

Q2: Constructive: $(A \wedge B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{B \rightarrow \neg C}{3} \quad \frac{\frac{A \wedge B}{1} [A E_R]}{B} [\rightarrow E]}{\frac{A \rightarrow C}{2}} 2 \quad \frac{\frac{A \wedge B}{1} [A E_L]}{A} [\rightarrow E]}{C} C [\neg E]}

$$\frac{\frac{\frac{\perp}{3 [\neg I]}}{\neg(B \rightarrow \neg C)} 2 [\rightarrow I]}{(A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)} 1 [\rightarrow I]$$

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))}{(A \wedge B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))} 1 [\rightarrow I]$$$$

$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg A}{\neg A}^2 \quad \frac{A}{A}^4 [\neg E]}{\perp C [\perp E]} \quad \frac{A \vee (B \vee C)}{A \rightarrow C}^1 \quad \frac{A \rightarrow C}{C}^2}{C}^3 \quad \frac{D}{(C \rightarrow D) \rightarrow D}^3 [\rightarrow I]}{(C \rightarrow D) \rightarrow D}^4 [\rightarrow I] \quad \frac{\neg A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D}{(A \vee B \vee C) \rightarrow \neg A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D}^1 [\rightarrow I]$	$\frac{\neg A}{\neg A}^2 \quad \frac{\frac{B \rightarrow A}{A}^6 \quad \frac{B}{B \rightarrow E}^6}{A \rightarrow E}^5 [\neg E]$ $\frac{\frac{\frac{\perp}{C}^6 [\perp E]}{B \rightarrow C}^6 \quad \frac{C}{C \rightarrow C}^7}{C \rightarrow C}^7 [\vee E]$ $\frac{\frac{C}{(B \vee C) \rightarrow C}^5 [\rightarrow I]}{(B \vee C) \rightarrow C}^5 [\vee E]$ $1. (A \vee B \vee C)$ $2. \neg A$ $3. (B \rightarrow A)$ $4. (C \rightarrow D)$
--	---

Q4: Constructive: $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ NB: This is called a contrapositive

$$\frac{\frac{\frac{\neg Q}{P \rightarrow Q} 1 \quad \frac{P}{Q} 3}{Q} 2 \quad [\neg E]}{(\neg Q \rightarrow \neg P) 2 [\rightarrow I]} 1 [\rightarrow I]$$

Q5: Constructive: $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

$$\frac{\frac{\frac{(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C)}{B \rightarrow \neg C}^1_{[\neg E_R]} \frac{\overline{A \wedge B}^2_{[\wedge E_R]}}{B}^{[\neg E]}}{\neg C}^2}{\frac{(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C)}{A \rightarrow C}^1_{[\neg E_L]} \frac{\overline{A \wedge B}^2_{[\wedge E_L]}}{A}^{[\neg E]}}$$

Q6: Constructive: Assuming Q , prove: $(Q \rightarrow R) \rightarrow R$

$$\frac{\overline{Q \rightarrow R}^1 \quad Q}{\frac{R}{(Q \rightarrow R) \rightarrow R}} 1[\rightarrow I]$$

Q7: Constructive: $Q \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow R$

$$\frac{\overline{Q \rightarrow R}^1 \quad \overline{Q}^0}{\frac{R}{(Q \rightarrow R) \rightarrow R}} 1[\rightarrow I]$$
$$\frac{(Q \rightarrow R) \rightarrow R}{Q \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow R} 0[\rightarrow I]$$

Q8: Constructive: $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S$

$$\frac{\overline{(P \wedge Q) \wedge R}^1}{\frac{\overline{P \wedge Q}^2 [\wedge E] \quad \overline{R}^2}{\frac{P \wedge Q}{\frac{Q}{Q \wedge S}} 1[\wedge I]}} 2[\wedge I]$$
$$\frac{Q \wedge S}{(S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S} 2[\rightarrow I]$$
$$\frac{(S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S}{((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S} 1[\rightarrow I]$$

Logic Session - W4&5 - Mon 16th & 23rd

Q1: Constructive: $(A \vee (B \wedge A)) \rightarrow A$

Q3: Classical: $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

Q4: Classical: $(\neg P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \vee Q$

Q5: Classical: $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow R) \rightarrow (\neg Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q6: Classical: $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C \vee A) \rightarrow (C \vee \neg B)$

Q7: Classical: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Q1: Constructive: $(A \vee (B \wedge A)) \rightarrow A$

$$\frac{\frac{\frac{A \vee (B \wedge A)}{\neg(A \vee (B \wedge A))} \stackrel{1}{1} \quad \frac{\frac{\neg A}{A \rightarrow A} \stackrel{2}{2} [\neg I]}{A \rightarrow A} \quad \frac{\frac{\overline{B \wedge A}}{A} \stackrel{3}{3} [\wedge E_R]}{\overline{(B \wedge A) \rightarrow A}} \stackrel{3}{3} [\neg I]}{\frac{A}{A \vee (B \wedge A) \rightarrow A} \stackrel{1}{1} (\neg I)}$$

$$\frac{\frac{\frac{((A \wedge B) \rightarrow C)^1}{\frac{A \wedge B}{\frac{A \wedge B}{A \wedge B} [\neg I]}} 3}{A \rightarrow B \rightarrow C^2 [\neg I]} 2}{(A \wedge B) \rightarrow C^1 [\neg I]} 1$$

Q3: Classical: $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$$\frac{\cancel{-Q} \rightarrow P^1}{P} \frac{\cancel{-Q}^3}{[E]} \quad \frac{\cancel{-P}^2}{[E]}$$

DNE

$$\frac{1}{\gamma Q} \begin{cases} 3[-I] \\ [DNE] \end{cases}$$

$$\frac{Q}{P \rightarrow Q} 2 [\rightarrow I]$$

$$\frac{\neg P \rightarrow Q}{(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)} \text{ [C-I]}$$

LFM:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{Q \vee \neg Q}{[LEM]} \frac{\frac{\frac{\neg Q}{Q \rightarrow Q} \frac{Q \rightarrow I}{\neg Q \rightarrow Q} \frac{\frac{I}{Q}}{3[\neg I]}}{[vE]}}{2[\neg I]}}{1[\neg I]}}{(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)}{1[\neg I]}$$

Q4: Classical: $(\neg P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \vee Q$

Q5: Classical: $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow R) \rightarrow (\neg Q \rightarrow R) \rightarrow R$

$$1. \neg(P \wedge Q)$$

2. $\nabla P \rightarrow R$

3. $T \Omega \rightarrow R$

$\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg Q} s[\neg I]}{\neg P \vee \neg Q} v[I_Q]}{\neg P \rightarrow \neg P \vee \neg Q} 4[\rightarrow I]}{P \vee \neg P} [LEM]$	$4. P$ $5. Q$	$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg P}{\neg P \vee Q} v[I_u]}{\neg P \vee Q} 6[\rightarrow I]}{\neg P \rightarrow \neg P \vee \neg Q} 6[\rightarrow I]}{v[E]} 6. P$
$\neg P \vee \neg Q$	$\frac{\neg P \rightarrow R}{R} 2$	$\frac{\neg Q \rightarrow R}{R} 3$

Q6: Classical: $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C \vee A) \rightarrow (C \vee \neg B)$

$\frac{\frac{\frac{B \rightarrow C \vee A}{B} 3}{C} 5}{C \vee A}$	$\frac{\frac{\perp}{C} 6 \{\rightarrow I\}}{\frac{A \rightarrow C}{\neg E}}$	1. $\neg A$
$\frac{C}{C \vee \neg B} \{\neg I\}$	$\frac{\frac{B}{B \vee \neg B} \{\neg I\}}{\frac{\neg B \rightarrow C \vee \neg B}{\neg E}}$	2. $B \rightarrow C \vee A$
$\frac{C \vee \neg B}{B \rightarrow C \vee \neg B} 3 \{\rightarrow I\}$	$\frac{\frac{B}{B \vee \neg B} \{\neg I\}}{\frac{\neg B \rightarrow C \vee \neg B}{\neg E}}$	3. B
$\frac{C \vee \neg B}{(B \rightarrow C \vee A) \rightarrow ((C \vee \neg B))} 2 \{\rightarrow I\}$	$\frac{\frac{B}{B \vee \neg B} \{\neg I\}}{\frac{\neg B \rightarrow C \vee \neg B}{\neg E}}$	4. $\neg B$
$\frac{(B \rightarrow C \vee A) \rightarrow ((C \vee \neg B))}{\neg A \rightarrow (B \rightarrow C \vee A) \rightarrow (C \vee \neg B)} 1 \{\rightarrow I\}$	$\frac{\frac{B}{B \vee \neg B} \{\neg I\}}{\frac{\neg B \rightarrow C \vee \neg B}{\neg E}}$	5. C
		6. A

Q7: Classical: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$$\begin{array}{c}
 \text{LEM: } \frac{\frac{\frac{A^3 B^4}{\neg(A \wedge B)} \quad \frac{[A]_I}{A \wedge B} [E]}{\frac{1}{\neg B} \neg [A]_I \quad \frac{[B]_I}{A \vee \neg B} [V_I_R]} \quad \frac{\frac{\neg A^2}{\neg A \vee \neg B} \quad \frac{[V_I_L]}{\neg A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)} [V_E]}{\frac{A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)}{\frac{(\neg A \vee \neg B)}{\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)}} \quad 2 [\neg I]}}{3 [\rightarrow I]} \\
 \hline
 \frac{A \vee \neg A \quad [LEM]}{\frac{A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)}{\frac{(\neg A \vee \neg B)}{\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)}} \quad 2 [\neg I] \quad 3 [\rightarrow I]} \quad 1 [\neg I]
 \end{array}$$

Logic Session - Mon 30th Oct - W6

(Difficulty in yellow)

- Q1: Constructive: $((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)) \rightarrow (\neg D \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$ - Moderate
- Q2: Classical: $(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg C \rightarrow A$ - Moderate
- Q3: Constructive: $(A \wedge B \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \neg B$ - Easy
- Q4: Classical: $((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$ - Easy
- Q5: Constructive: $(A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A$ - Hard!
- Q6: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow D \wedge B \rightarrow C$ - Moderate
- Q7: Constructive: $(C \rightarrow B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)$ - Moderate
- Q8: Classical: $(C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A$ - Moderate
- Q9: Classical: $(C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow B$ - Moderate
- Q10: Constructive: $A \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)$ - Easy
- Q11: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C$ - Moderate

- Q1: Constructive: $((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)) \rightarrow (\neg D \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\neg A}^5 \quad \overline{A}^3 [\neg E]}{\frac{1}{(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg \neg A}^5 [\neg \neg I]}{\frac{\neg \neg A \vee B}{[\neg E]}}^1} \\
 \frac{2}{\frac{\neg D \rightarrow C}{\frac{3}{\frac{C}{A \rightarrow C}^3 [\neg \neg I]}^2}}^2 \\
 \frac{4}{\frac{C \rightarrow C}{[\neg E]}^4 [\neg \neg I]} \\
 \frac{5}{\frac{1 [\neg \neg I]}{((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)) \rightarrow (\neg D \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C}}^1
 \end{array}$$

1. $(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)$
2. $(\neg D \rightarrow C)$
3. A
4. C
5. $\neg A$

Q2: Classical: $(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg C \rightarrow A$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg A \rightarrow B \vee C}{\neg A} \text{ 1} \quad \frac{\neg A}{\neg A} \text{ 4} \\
 \hline
 \frac{}{B \vee C} \quad \frac{\neg B^2 \quad B^5_{[\neg E]}}{\perp} \text{ 5 } [\rightarrow I] \quad \frac{\neg C^3 \quad C^6_{[\neg E]}}{\perp} \text{ 6 } [\rightarrow I] \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg A} \text{ 4 } [\neg I] \\
 \frac{\neg A}{A} \text{ DNE} \\
 \frac{A}{\neg C \rightarrow A} \text{ 3 } [\rightarrow I] \\
 \frac{\neg C \rightarrow A}{\neg B \rightarrow \neg C \rightarrow A} \text{ 2 } [\rightarrow I] \\
 \hline
 (\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg C \rightarrow A \text{ 1 } [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q3: Constructive: $(A \wedge B \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \neg B$ - Easy

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg C^2}{\frac{A \wedge B \rightarrow \neg C}{\neg C} \text{ 1 } [\neg E]} \\
 \frac{\perp}{\neg B} \text{ 4 } [\neg I] \\
 \frac{\neg B}{\frac{A \rightarrow \neg B}{C \rightarrow A \rightarrow \neg B} \text{ 3 } [\rightarrow I]} \\
 \hline
 (A \wedge B \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \neg B \text{ 1 } [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q4: Classical: $((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$ - Easy

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C}{\neg C} \text{ 1 } \frac{\frac{A^3 \neg B^4}{A \wedge \neg B} \text{ [\wedge I]} \text{ 2 } [\rightarrow E]}{\neg C} \text{ 2 } \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg \neg B} \text{ 4 } [\neg I] \\
 \frac{\neg \neg B}{B} \text{ DNE} \\
 \frac{B}{\frac{A \rightarrow B}{C \rightarrow A \rightarrow B} \text{ 3 } [\rightarrow I]} \\
 \hline
 ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \text{ 1 } [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q5: Constructive: $(A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A$ - Hard!

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\neg D}^4 \quad \frac{\overline{B \rightarrow D}^2 \overline{B}^9}{D}}{D} \\
 \frac{\overline{A \rightarrow B \vee C}^1 \overline{A}^5 \quad \frac{\perp}{C} \quad \frac{\overline{C}^8 \quad 8[\rightarrow I]}{C \rightarrow C} \quad \frac{\overline{B \rightarrow D}^2 \overline{B}^6 \quad [\rightarrow E]}{D \quad [G E]}}{B \rightarrow C \quad 9[\rightarrow I]} \\
 \frac{\overline{C \rightarrow B \vee D}^3 \quad C \quad \frac{\perp}{B \rightarrow \perp} \quad \frac{\perp}{D \rightarrow \perp} \quad 6[\rightarrow I]}{B \vee D} \quad \frac{\overline{\neg D}^4 \quad \frac{\perp}{D} \quad \frac{\perp}{D \rightarrow \perp} \quad 7[\rightarrow I]}{D \rightarrow \perp} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg A} \quad 5[\neg I]}{\neg D \rightarrow \neg A} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg D \rightarrow \neg A} \quad 4[\rightarrow I]}{(\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A} \\
 \frac{(\neg B \rightarrow D) \rightarrow (\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A \quad 2[\rightarrow I]}{(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (\neg B \rightarrow D) \rightarrow (\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A \quad 1[\rightarrow I]}
 \end{array}$$

Alternatively:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{A \rightarrow B \vee C}^1 \overline{A}^5}{B \vee C} \quad \frac{\overline{C \rightarrow B \vee D}^3 \overline{C}^6 \quad \frac{\overline{B \rightarrow D}^2 \quad \frac{\overline{D}^7 \quad 7[\rightarrow I]}{D \rightarrow D} \quad [\vee E]}{B \vee D}}{B \rightarrow D} \\
 \frac{\overline{B \rightarrow D}^2 \quad \frac{D}{C \rightarrow D} \quad 6[\rightarrow I]}{C \rightarrow D \quad [\vee E]} \\
 \frac{D}{\frac{\perp}{\neg A} \quad 5[\neg I]} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg D \rightarrow \neg A} \quad 4[\rightarrow I]}{(\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A} \\
 \frac{(\neg B \rightarrow D) \rightarrow (\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A \quad 2[\rightarrow I]}{(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (\neg B \rightarrow D) \rightarrow (\neg C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A \quad 1[\rightarrow I]}
 \end{array}$$

(Credit to Emil for this proof)

Q6: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow D \wedge B \rightarrow C$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{D \rightarrow A \vee C}{D \wedge B}^1 \quad \frac{D \wedge B}{D}^2 [E] \quad \frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \wedge B}^3 [E_R]}{A \vee C}^4 [E]}{A \rightarrow C}^5 [\rightarrow I] \quad \frac{\overline{C}^6}{\overline{C}^7}^4 [\rightarrow I]}{C}^8 [\rightarrow I] \\
 \frac{C}{D \wedge B \rightarrow C}^9 [\rightarrow I] \\
 \frac{(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow D \wedge B \rightarrow C}{(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow D \wedge B \rightarrow C}^1 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q7: Constructive: $(C \rightarrow B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{C \rightarrow B \vee A}{C}^1 \quad \frac{C}{C \rightarrow E}^2}{B \vee A}^3 \quad \frac{\overline{A}^4}{A \rightarrow A}^5 [\vee E]}{B \rightarrow A}^6 [\rightarrow I] \\
 \frac{\frac{A}{C \rightarrow A}^7 [\rightarrow I]}{\frac{(C \rightarrow A) \vee C}{(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)}^8 [\rightarrow I]} \\
 \frac{(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)}{(C \rightarrow B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)}^9 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q8: Classical: $(C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{C \rightarrow B}{C}^1 \quad \frac{C}{C \rightarrow E}^2}{B \vee \neg C}^3 [\vee I_L]}{C \vee \neg C}^4 [\text{LEM}] \quad \frac{\frac{\frac{\neg C}{\neg C \rightarrow A}^5 [\rightarrow I]}{\neg C \rightarrow B \vee \neg C}^6 [\rightarrow I]}{\neg C \rightarrow B \vee \neg C}^7 [\vee E] \\
 \frac{\frac{\frac{B \vee \neg C}{B}^8 \quad \frac{\overline{B}^9}{B \rightarrow A}^10 [\rightarrow E]}{B \rightarrow A}^2 [\rightarrow I]}{B \rightarrow A}^3 [\rightarrow I] \\
 \frac{A}{(\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}^4 [\rightarrow I] \\
 \frac{(\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}{(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}^5 [\rightarrow I] \\
 \frac{(\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}{(C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}^6 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Alternatively

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{B \rightarrow A}{B}^1 \quad \frac{\overline{B}^2}{B \rightarrow E}^3}{A \rightarrow A}^4 [\rightarrow I]}{A \rightarrow A}^5 [\rightarrow I] \\
 \frac{\frac{A}{\neg C \rightarrow A}^6 [\rightarrow I]}{\frac{(\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}{(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}^7 [\rightarrow I]} \\
 \frac{(\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}{(C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A}^8 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q9: Classical: $(C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow B$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \rightarrow B} 2 \\
 \frac{\frac{\frac{C \rightarrow A}{C} 1 \quad \frac{\neg B \rightarrow C}{} 3 \quad \neg B 4}{C \rightarrow E} [\rightarrow E]}{A} [\rightarrow E] \\
 \frac{}{B} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg \neg B} 4 [\neg I]}{B} [DNE] \\
 \frac{\frac{B}{(\neg B \rightarrow C) \rightarrow B} 3 [\rightarrow I]}{((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow B)} 2 [\rightarrow I] \\
 \frac{}{(C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow B} 1 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q10: Constructive: $A \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)$ - Easy

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{A} 1}{(A \vee C) [\vee I L]} \\
 \frac{}{(\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)} 3 [\rightarrow I] \\
 \frac{\frac{(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)}{2 [\rightarrow I]} 2 [\rightarrow I]}{A \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)} 1 [\rightarrow I]
 \end{array}$$

Q11: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C$ - Moderate

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{D \rightarrow A \vee C}{} 1 \frac{D \wedge B}{} 3 [\wedge E L]}{D} [\rightarrow E]}{A \vee C} \\
 \frac{\frac{\frac{A \wedge B \rightarrow C}{} 2 \frac{A \wedge B}{} 3 [\wedge I]}{A \rightarrow C} 4 [\rightarrow I]}{C} \\
 \frac{\frac{\frac{C}{(D \wedge B) \rightarrow C} 3 [\rightarrow I]}{A \rightarrow C} 4 [\rightarrow I]}{\frac{\frac{C}{(D \wedge B) \rightarrow C} 7 [\rightarrow I]}{C \rightarrow C} [\vee E]} \\
 \frac{\frac{\frac{(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C}{} 2 [\rightarrow I]}{(D \wedge B) \rightarrow C} 2 [\rightarrow I]}{\frac{\frac{(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C}{} 1 [\rightarrow I]}{(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C}}
 \end{array}$$

Provide Natural Deduction Proofs of
the following:

Logic Session - Mon 9th Oct - W3

Q1: Constructive: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

Q2: Constructive: $(A \wedge B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

Q3: Constructive: $(A \vee B \vee C) \rightarrow \neg A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D$

Q4: Constructive: $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Q5: Constructive: $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

Q6: Constructive: Assuming Q , prove: $(Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q7: Constructive: $Q \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q8: Constructive: $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \wedge T) \rightarrow Q \wedge S$

Logic Session - W4 & 5 - Mon 16th & 23rd

Q1: Constructive: $(A \vee (B \wedge A)) \rightarrow A$

Q2: Constructive: $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$

Q3: Classical: $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

Q4: Classical: $(\neg P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \vee Q$

Q5: Classical: $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow R) \rightarrow (\neg Q \rightarrow R) \rightarrow R$

Q6: Classical: $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C \vee A) \rightarrow (C \vee \neg B)$

Q7: Classical: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Logic Session - Mon 30th Oct - W6

(Difficulty in yellow)

- Q1: Constructive: $((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg D \vee C)) \rightarrow (\neg D \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$ - Moderate
- Q2: Classical: $(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg C \rightarrow A$ - Moderate
- Q3: Constructive: $(A \wedge B \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \neg B$ - Easy
- Q4: Classical: $((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$ - Easy
- Q5: Constructive: $(A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (C \rightarrow B \vee D) \rightarrow \neg D \rightarrow \neg A$ - Hard!
- Q6: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow D \wedge B \rightarrow C$ - Moderate
- Q7: Constructive: $(C \rightarrow B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \vee C)$ - Moderate
- Q8: Classical: $(C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A$ - Moderate
- Q9: Classical: $(C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow B$ - Moderate
- Q10: Constructive: $A \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)$ - Easy
- Q11: Constructive: $(D \rightarrow A \vee C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (D \wedge B) \rightarrow C$ - Moderate