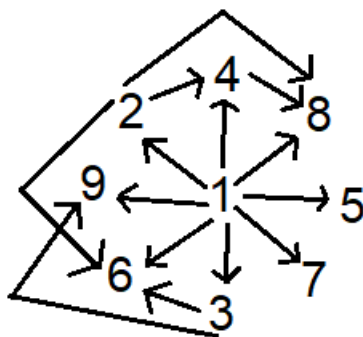


## Fiks 2021/2022 úloha č. 14 „Kamery“

**Kryštof Olík**

V ZOO máme celkem  $N-1$  kamer, ze kterých každá je označená indexem  $i$ , které je v rozmezí přirozených čísel  $\{ 2, \dots, N \}$ . Index číslo jedna patří centrálnímu serveru. Dále platí, že jsou kamery propojeny jednosměrným kabelem, který vede z kamery s indexem  $i$  do kamery s indexem  $j$  pokud  $i \mid j$ , čili pokud index  $i$  dělí index  $j$  beze zbytku. Každá kamera vysílá rádiové vlny ve frekvenci přirozených čísel.



Grafické znázornění kabelového připojení

### Část 1

Naším cílem je vymyslet algoritmus, ve kterém kamera vezme svůj index  $i$  a přiřadí si frekvenci vysílání takovou, aby žádné kamery připojené kabelem k ní neměly stejnou frekvenci. Zároveň je naším cílem, aby počet různých frekvencí byl co nejmenší.

Nejdůležitější je si najít všechny dělitele indexu  $i$  – ty si označíme písmenem  $D$ . Například pro  $i = 8$  platí, že  $D = \{ 1, 2, 4, 8 \}$ . Z toho můžeme zjistit všechny zapojené kamery, které vedou do kamery s indexem  $i$ : to je množina  $D \setminus \{ 1, i \}$ . Teď už zbývá jenom zjistit jaké frekvence mají zapojené kamery, ale jak?

Vytvoříme si rekurzivní funkci. První si nastavíme základní frekvenci = 1, ke které budeme postupně přidávat. Pokud  $D \setminus \{ 1, i \} = \{ \}$ , tak také frekvence 1 zůstane. Začneme iterovat přes seřazenou množinu  $D \setminus \{ 1, i \}$ . Rekurzivně zavoláme tuto samou funkci, abychom zjistili frekvenci iterované kamery. Dále postupuje takto: pokud se poslední frekvence předešlé kamery nerovná té zjištěné, tak přičteme ke frekvenci 1. V pseudokódu by se tato funkce napsala takto:

```
def frekvence_kamery(i):
    predesle_kamery = D \ { 1, i }
    frekvence = 1
    posledni_frekvence_predesle_kamery = 0
    for kamera in predesle_kamery:
        frekvence_predesle_kamery = frekvence_kamery(kamera)
        if (posledni_frekvence_predesle_kamery != frekvence_predesle_kamery):
            frekvence += 1
        posledni_frekvence_predesle_kamery = frekvence_predesle_kamery

    return frekvence
```

Na konec nám zbývá dokázat, že algoritmus opravdu najde pro všechny kamery frekvenci tak, aby bylo různých frekvencí co nejméně, a že je algoritmus konečný. Díky tomu, že rekurzivně postupujeme a zjišťujeme všechny frekvence napojených kamer, si můžeme být jistí, že opravdu najdeme nejmenší možný počet frekvencí. Algoritmus je konečný - sice se ve funkci nachází rekurze, ale ta se pokaždé zastaví poté co dojde na index, u kterého platí  $D \setminus \{1, i\} = \{\}$ .

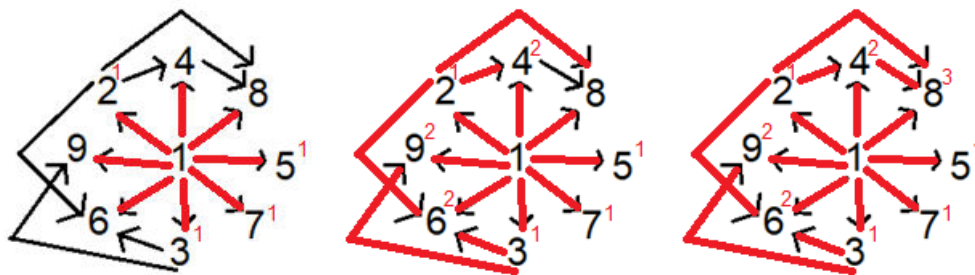
Tímto jsme vytvořili algoritmus, díky kterému si může každá kamera, která má v paměti uložený svůj index, nastavit správnou frekvenci.

## Část 2

Ve druhé části musíme splnit stejné podmínky jako v první, čili každé kameře přiřadit frekvenci takovou, aby nerušila kamery připojené na ní, a zároveň, aby různých frekvencí bylo co nejméně. Je tu však jeden háček. Tentokrát kamery nemají uložený svůj index, ale mají uložený počet vstupních a výstupních kabelů. Zároveň můžeme každou sekundu posílat přes kabelovou síť bit.

První sekundu vyšle centrální počítač bit do všech kamer. Kamerám, které mají pouze jeden vstupní kabel, nastavíme frekvenci 1 (o kolikáté kolo/sekundu se jedná). Dále z těchto kamer vyšleme bit do dalších kamer. Kamery, do kterých přišel počet bitů, jako jejich počet vstupů, vyšlou bit do všech výstupů a sobě nastaví frekvenci stejnou jako momentální kolo. Toto opakujeme do té doby, dokud nemá každá kamera svou frekvenci.

Pro lepší představu je tady graficky znázorněn příklad, kde  $N = 9$ :



Červená znamená kabel, do kterého už byl poslán bit. A červené číslo je nastavená frekvence kamery.

Ještě nám zbývá dokázat, že algoritmus opravdu funguje. Jelikož je kamera závislá na všech vstupních kamerách, které společně s informací času dávají kameře všechny potřebné informace, tak se nemůže stát, že by se nastavila špatná frekvence – nikdy se nenastaví stejná frekvence jako frekvence sousedů. Můžeme se kouknout na jakýkoliv příklad a uvidíme, že poslední signál dojde do kamery opravdu v ten správný čas. A jelikož signál se zasílá dál ihned po všech vstupních signálech, tak si můžeme být jistí, že bude frekvence nejmenší možná.