CUPRINS

ALGEBRÃ .......... 5
I. Elemente de logicã matematicã .......... 5
I.1. Noţiunea de propoziţie .......... 5
I.2. Operatori logici .......... 5
I.3. Expresii în calculul propoziţiilor .......... 7
I.4. Noţiunea de predicat .......... 7
I.5. Cuantificatori .......... 7
I.6. Metoda de demonstraţie prin reducere la absurd .......... 7
I.7. Proprietãţi fundamentale ale operatorilor logici .......... 8
II. Mulţimi .......... 8
II.1. Egalitatea mulţimlor *A* şi *B:* .......... 8
II.2. Incluziunea mulţimii *A* în mulţimea *B:* .......... 8
II.3. Reuniunea mulţimilor *A* şi *B:* .......... 9
II.4. Intersecţia mulţimilor *A* şi *B:* .......... 9
II.5. Diferenţa mulţimilor *A* şi *B:* .......... 9
II.6. Diferenţa simetricã a mulţimilor *A* şi *B:* .......... 9
II.7. Complementara unei mulţimi *A* în raport cu mulţimea *E:* .......... 10
II.8. Formulele lui de Morgan ($\forall A, B \subset E$) .......... 10
II.9. Produsul cartezian a douã mulţimi *A* şi *B:* .......... 10
III. Relaţii binare .......... 11
IV. Funcţii .......... 12
IV.1. Noţiunea de funcţie .......... 12
IV.2. Funcţii injective, surjective, bijective .......... 12
IV.3. Compunerea funcţiilor .......... 12
IV.4. Funcţia inversã .......... 13
V. Operaţii cu numere reale .......... 13
V.1. Puteri naturale ale numerelor reale .......... 13
V.2. Identitãţi fundamentale .......... 14
V.3. Radicali. Proprietãţi .......... 14
VI. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul întâi .......... 15
VI.1. Ecuaţii de gradul întâi sau ecuaţii afine .......... 15
VI.2. Inecuaţii de gradul întâi sau inecuaţii afine .......... 15
VI.3. Modulului unui numãr real .......... 16
VII. Numere complexe .......... 16
VII.1. Forma algebricã a numerelor complexe .......... 17
VII.2. Modulul unui numãr complex .......... 17
VII.2. Forma trigonometricã a numerelor complexe .......... 17
VII.4. Formula lui Moivre .......... 17
VII.5. Extragerea rãdãcinii de ordinul *n* dintr-un numãr complex .......... 18
VII.6. Ecuaţia binomã .......... 18
VIII. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul al II-lea .......... 18
VIII.1. Ecuaţii de gradul al doilea .......... 18
VIII.2. Inecuaţii fundamentale de gradul al II-lea .......... 21
VIII.3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii cu coeficienţi reali .......... 22

IX. Ecuaţii algebrice de gradul III, IV şi V ........ 23
X. Funcţia exponenţială și funcția logaritmică ........ 24
X.1. Funcția exponențială ........ 24
X.2. Funcția logaritmică ........ 25
X.3. Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice fundamentale ........ 26
X.4. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale fundamentale ........ 26
X.5. Exemple: ........ 27
XI. Metoda inducţiei matematice ........ 28
XI.1. Axioma de recurenţã a lui Peano ........ 28
XI.2. Metoda inducţiei matematice ........ 28
XI.2. Variantã a metodei inducţiei matematice ........ 29
XII. Analizã combinatorie ........ 29
XII.1. Permutãri ........ 29
XII.2. Aranjamente ........ 29
XII.3. Combinãri ........ 29
XII.4. Binomul lui Newton ........ 29
XII.5. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale ........ 30
XIII. Progresii ........ 30
XIII.1. Progresii aritmetice ........ 30
XIII.2. Progresii geometrice ........ 31
XIV. Polinoame ........ 31
XIV.1. Forma algebricã a unui polinom ........ 31
XIV.2. Divizibilitatea polinoamelor ........ 32
XIV.3. Rãdãcinile polinoamelor ........ 32
XIV.4. Ecuaţii algebrice ........ 33
XIV.5. Polinoame cu coeficienţi din R, Q, Z ........ 33
XV. Permutãri, matrici, determinanţi ........ 33
XV.1. Permutãri ........ 34
XV.2. Matrici ........ 34
XV.3. Determinanţi ........ 35
XV.4. Inversa unei matrici ........ 36
XVI. Sisteme lineare ........ 37
XVI.1. Notaţii: ........ 37
XVI.2. Compatibilitatea ........ 37
XVI.3. Sisteme omogene ........ 37
XVII. Structuri algebrice ........ 38
XVII.1. Monoid ........ 38
XVII.2. Grup ........ 38
XVII.3. Inel ........ 38
XVII.4. Corp ........ 39
XVII.5. Caz general ........ 40
GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE ........ 42
Notaţii: ........ 42
I. Triunghiul ........ 42
II. Poligoane convexe ........ 43

III. Relaţii metrice în triunghi ........ 43
III.1. Triunghiul dreptunghic ........ 43
III.2. Triunghiul dreptunghic ABC (AD⊥BC) ........ 44
III.3. Triunghiul oarecare ABC ........ 44
III.4. Relaţii exprimate prin funcţii trigonometrice ........ 44
IV. Patrulatere ........ 45
IV.1. Paralelogramul ........ 45
IV.2. Dreptunghiul ........ 45
IV.3. Rombul ........ 45
IV.4. Pãtratul ........ 45
IV.5. Trapezul ........ 46
V. Poligoane înscrise în cerc ........ 46
V.1. Patrulaterul înscris în cerc A ........ 46
V.2. Poligoane regulate înscrise în cercul de razã *R* ........ 46
VI. Cercul ........ 46
VII. Complemente de geometrie planã ........ 47
VIII. Poliedre ........ 48
VIII.1. Prisma ........ 48
VIII.2. Piramida ........ 49
VIII.3. Trunchiul de piramidã ........ 51
VIII.4. Poliedrul regulat ........ 51
IX. Corpuri rotunde ........ 52
IX.1. Cilindrul circular drept ........ 52
IX.2. Conul circular drept ........ 52
IX.3. Trunchiul de con ........ 52
IX.4. Sfera ........ 52
X. Funcţii trigonometrice ........ 53
X.2. Proprietãţile funcţiilor trigonometrice ........ 53
XI. Formule trigonometrice ........ 54
XI.1. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale unui argument: ........ 54
XI.2. Formule de adunare: ........ 54
XI.3. Formule pentru multiplii de argument ........ 54
XI.4. Formule pentru jumãtãţi de argument: ........ 55
XI.5. Sume, diferenţe şi produse: ........ 55
XII. Inversarea funcţiilor trigonometrice ........ 56
XIII. Soluţiile ecuaţiilor trigonometrice simple ........ 56
XIII.1. Ecuaţii fundamentale ........ 56
XIII.2. Tabele de valori: ........ 56
XIV. Elemente de geometrie analiticã ........ 57
XIV.1. Segmente ........ 57
XIV.2. Ecuaţia dreptei în plan ........ 57
XIV.3. Dreapta în spațiu ........ 59
XIV.4. Cercul ........ 60
XIV.5. Conice raportate la axele de simetrie ........ 60
ANALIZÃ MATEMATICÃ ........ 61

I. Şiruri ........ 61
I.1. Şiruri şi limite ........ 61
I.2. Dreapta încheiată ........ 62
I.3. Operații fără sens ........ 62
I.4. Criterii suficiente de convergenţã sau de existenţã a limitei unui şir ........ 62
I.5. Operaţii cu şiruri convergente ........ 63
I.6. Operaţii cu şiruri care au limitã ........ 63
I.7. Şiruri tip ........ 63
II. Limite de funcţii ........ 64
II.1. Definiţii ale limitei ........ 64
II.2. Operaţii cu limite de funcţii ........ 64
II.3. Limite tip ........ 65
II.4. Continuitatea funcţiilor ........ 66
III. Funcţii derivabile ........ 66
III.1. Definiţia derivatei într-un punct ........ 66
III.2. Reguli de derivare ........ 67
III.3. Derivatele funcţiilor elementare ........ 67
III.4. Derivata funcţiilor compuse ........ 68
III.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcţii elementare ........ 68
III.6. Proprietãţi ale funcţiilor derivabile ........ 69
IV. Asimptote ........ 69
IV.1. Asimptote orizontale ........ 69
IV.2. Asimptote oblice ........ 69
IV.3. Asimptote verticale ........ 70
IV.4. Trasarea graficului unei funcții ........ 70
V. Primitive ........ 73
V.1. Integrarea prin pãrţi ........ 73
V.2. Prima metodã de schimbare a variabilei ........ 73
V.3. A doua metodã de schimbare a variabilei ........ 74
V.4. Tabel de primitive ........ 74
V.5. Tabel de primitive funcții compuse ........ 74
V.6. Primitivele funcţiilor raţionale ........ 75
V.7. Substituţiile lui Euler: ........ 77
VI. Integrale definite ........ 78
VI.1. Definiţia integrabilitãţii (integrale Riemann) ........ 78
VI.2. Aplicaţii ale integralei definite ........ 79

**ALGEBRÃ**

# I. Elemente de logicã matematicã

## I.1. Noţiunea de propoziţie

Definiţia I.1.1. ***Se numeşte <u>propoziţie</u> un enunţ despre care se poate spune cã este adevãrat sau fals, dar nu şi adevãrat şi fals simultan.***

Se noteazã cu *p,q, P, Q*

Ex: 1) $\pi \notin \mathbf{Q}$ : acesta este un enunţ care exprimã un adevãr, deci o propoziţie adevãratã.

2) $x + 5 = 3$, $x \in \mathbf{N}$ este o propoziţie falsã, pentru cã nu existã nici un numãr natural astfel ca $x + 5 = 3$

3) $x \le y$, $x,y \in \mathbf{N}$ este un enunţ despre care nu se poate spune nimic. Deci nu este o propoziţie.

***Valoarea logicã sau valoarea de adevãr a unei propoziţii***. Dacã o propoziţie *p* este adevãratã se spune cã are valoarea logicã sau valoarea de adevãr: adevãrul; aceastã valoare de adevãr se noteazã cu simbolul 1 sau *a* şi scriem $v(p) = 1$ sau $(v)p = a$. Daca o propoziţie *q* este falsã, se spune cã are valoarea de adevãr: falsul; aceastã valoare de adevãr se noteazã cu simbolul 0 sau *f* şi scriem $v(q) = 0$ sau $v(q) = f$.

## I.2. Operatori logici

### *Negaţia*

Definiţia I.1.2. ***<u>Negaţia</u> unei propoziţii* p *este propoziţia care este falsã când* p *este adevãratã şi este adevãratã când p este falsã.*** Se noteazã: *non p*, $\rceil p$, $\overline{p}$.

Tabela de adevãr a propoziţiei *non p* se întocmeşte be baza relaţiei $v(non\ p) = 1 - v(p)$.

| *p* | *non p* |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

### *Conjuncţia*

Definiţia I.2.2. ***<u>Conjuncţia</u> a douã propoziţii* p *şi* q *este propoziţia care este adevãratã dacã şi numai dacã fiecare propoziţie* p *şi* q *este adevãratã.***

Se noteazã: $p \wedge q$

Tabela de adevãr a propoziţiei $p \wedge q$ este:

| *p* | *q* | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

## Disjuncţia

Definiţia I.2.3. ***<u>Disjuncţia</u> a douã propoziţii* p *şi* q *este propoziţia care este adevãratã dacã şi numai dacã cel puţin una din propoziţiile* p, q*este adevãratã.***

Se notează: $p \vee q$

Tabela de adevãr a propoziţiei $p \vee q$ este:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

## Implicaţia

Definiţia I.2.4. ***<u>Implicaţia</u> propoziţiilor* p *şi* q *este propoziţia care este falsã dacã şi numai dacã* p *este adevãratã şi* q *este falsã.***

Se notează: *(non p)* sau *q*, $p \to q$ şi se citeşte: “*p* implicã *q*” sau “dacã *p*, atunci *q*”. Propoziţia *p* este ipoteza, iar propoziţia *q* este concluzia.

Tabela de adevãr a propoziţiei $p \to q$ este:

| $p$ | $q$ | non $p$ | (non $p$)$\vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

## Echivalenţa logicã

Definiţia I.2.4. ***Propoziţiile* p *şi* q *sunt <u>echivalente logic</u>, dacã şi numai dacã* p, q *sunt adevãrate sau false simultan.***

Se notează *(non p)*$\vee q$ şi *(non q)*$\vee p$; $(p \to q)$ şi $(q \to p)$; $p \leftrightarrow q$; se citeşte: “*p* echivalent cu *q*” sau “*p* dacã şi numai dacã *q*”, “*p* este condiţie necesarã şi suficientã pentru *q*”.

Tabela de adevãr a propoziţiei compuse $p \leftrightarrow q$ este:

| $p$ | $q$ | non $p$ | non $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $(p \to q) \wedge (q \to p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## I.3. Expresii în calculul propoziţiilor

Propoziţiile *p,q, r,* ... fiind date, cu ajutorul operatorilor logici $\rceil$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ putem formula diferite expresii, care se numesc ***formule ale calculului cu propoziţii sau expresii logice***. Ele se notează $\alpha$ sau $\alpha(p,q,r,...)$, $\beta(p,q,r,...)$.

Înlocuind în $\alpha$ pe *p,q,r,...* cu diferite propoziţii obţinem o altã propoziţie, adevãratã sau nu, a cãrei valoare de adevãr se numeşte ***valoarea expresiei*** $\alpha$, obţinutã pentru propoziţiile *p,q,r,...* respective.

Definiţia I.3.1. ***O expresie logicã*** $\alpha$ ***care se reduce la o propoziţie adevãratã, oricare ar fi propoziţiile*** *p,q,r,...* ***se numeşte <u>tautologie</u>***.

Definiţia I.3.2. ***Douã expresii logice*** $\alpha$ ***şi*** $\beta$ ***se numesc <u>echivalente</u> dacã şi numai dacã pentru orice propoziţii*** *p,q,r,...* ***cele douã expresii reprezintã propoziţii care au aceeaşi valoare de adevãr. În scris se noteazã*** $\alpha \equiv \beta$.

## I.4. Noţiunea de predicat

Definiţia I.4.1. ***Se numeşte <u>predicat</u> sau <u>propoziţie cu variabile</u> un enunţ care depinde de o variabilã sau de mai multe variabile şi are proprietatea cã pentru orice valori date variabilelor se obţine o propoziţie adevãratã sau o propoziţie falsã.***

Predicatele se noteazã *p(z,y,z,...), q(x,y,z,...)* şi pot fi unare (de o variabilã), binare (de douã variabile), ternare (de trei variabile), etc., variabilele *x,y,z,...* luând valori în mulţimi date.

Definiţia I.4.2. ***Predicatele*** *p(z,y,z,...), q(x,y,z,...)* ***se numesc <u>echivalente</u> dacã, oricare ar fi valorile pe care le iau*** *x,y,z,...* ***în unul şi acelaşi domeniu, propoziţiile corespunzãtoare au aceleaşi valori de adevãr. Scriem*** $p(z,y,z,...) \Leftrightarrow q(x,y,z,...)$.

## I.5. Cuantificatori

Definiţia I.5.1. ***Fie p(x), cu*** $x \in M$***, un predicat. Dacã existã (cel puţin) un element*** $x' \in M$***, astfel încât propoziţia*** *p(x')* ***este adevãratã, atunci scriem*** $\exists x p(x)$, $(\exists x)p(x)$ sau $(\exists x \in M)p(x)$. ***Simbolul*** $\exists$ ***se numeşte <u>cuantificator existenţial</u> şi se citeşte "existã".***

Definiţia I.5.2. ***Fie p(x) cu*** $x \in M$***, un predicat. Dacã p(x) este o propoziţie adevãratã pentru orice*** $x \in M$***, atunci scriem*** $\forall x p x$, $(\forall x)p(x)$ *sau* $(\forall x \in M)p(x)$. ***Simbolul*** $\forall$ ***se numeşte <u>cuantificator universal</u> şi se citeşte "oricare ar fi".***

*Proprietatea de comutativitate a cuantificatorilor:*

1. $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$;
2. $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$;

*Reguli de negare:*

1. $\rceil((\exists x)p(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\rceil(p(x))$;
2. $\rceil((\forall x)p(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\rceil(p(x))$;
3. $\rceil((\exists x)(\exists y)p(x,y)) \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)\rceil p(x,y))$;
4. $\rceil((\forall x)(\forall y)p(x,y)) \Leftrightarrow ((\exists x)(\exists y)\rceil p(x,y))$;

## I.6. Metoda de demonstraţie prin reducere la absurd

Aceastã metodã se bazeazã pe tautologia $(p \rightarrow q) \equiv (non\ p \rightarrow non\ q)$, care ne aratã cã pentru a demonstra cã $p \rightarrow q$, este totuna cu a demonstra cã $non\ p \rightarrow non\ q$.

## I.7. Proprietãţi fundamentale ale operatorilor logici

Oricare ar fi propoziţiile *p,q,r,…* avem:

1. $non(non\ p) \equiv p$;
2. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (comutativitatea conjuncţiei);
3. $((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$ (asociativitatea conjuncţiei);
4. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (comutativitatea disjuncţiei);
5. $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$ (asociativitatea discjuncţiei);
6. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ (tranzitivitatea implicaţiei);
7. $non(p \wedge q) \equiv (non\ p) \vee (non\ q)$ legile lui de Morgan;
   $non(p \vee q) \equiv (non\ p) \wedge (non\ q)$
8. $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge (p \wedge r))$ conjuncţia este distributivã în raport cu disjuncţia şi
   $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ disjuncţia este distributivã în raport cu conjuncţia

# II. Mulţimi

***Moduri de definire a mulţimilor***. Mulţimile se definesc fie prin indicarea elementelor lor (de pildã $\{0,1,3\}$ sau $\{x,y,z\}$), fie prin specificarea unei proprietãţi caracteristice a elementelor lor (de exemplu $\{x \in \mathbf{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\}$).

Mulţimile se noteazã cu litere mari: A, B, C,… X, Y, Z, iar elementele lor cu litere mici: a, b, c,…

***Apartenenţa unui element la o mulţime***. Dacã un element *a* aparţine unei mulţimi *A*, acesta se noteazã $a \in A$ şi se citeşte "*a* aparţine lui *A*".

Definiţie. ***Mulţimea vidã** este mulţimea care nu are nici un element. Se noteazã cu* $\varnothing$.

## II.1. Egalitatea mulţimlor *A* şi *B:*

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ şi } (\forall y \in B \Rightarrow y \in A)$$

*Proprietãţile egalitãţii:*

1. $\forall$ A, A = A (reflexivitatea);
2. (A = B) $\Rightarrow$ (B = A) (simetria);
3. (A = B $\wedge$ B = C) $\Rightarrow$ (A = C) (tranzitivitatea);

## II.2. Incluziunea mulţimii *A* în mulţimea *B:*

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Mulţimea A se numeşte *o parte* sau *o submulţime* a lui B.

*Proprietãţile incluziunii:*

1. $\forall$ A, A $\subset$ A (reflexivitatea);
2. (A $\subset$ B) $\wedge$ (B $\subset$ A) $\Rightarrow$ (A = B) (antisimetria);
3. (A $\subset$ B $\wedge$ B $\subset$ C) $\Rightarrow$ (A $\subset$ C) (tranzitivitatea);
4. $\forall$ A, $\varnothing \subset$ A

Relaţia de neincluziune se notează $A \not\subset B$.

## II.3. Reuniunea mulţimilor *A* şi *B:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

*Proprietăţile reuniunii:*

1. $\forall$ A, B: $A \cup B = B \cup A$ (reflexivitatea);
2. $\forall$ A, B, C: $(A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C)$ (asociativitatea);
3. $\forall$ A: $A \cup A = A$ (idempotenţa);
4. $\forall$ A: $A \cup \varnothing = A$;
5. $\forall$ A, B: $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

## II.4. Intersecţia mulţimilor *A* şi *B:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

*Proprietăţile intersecţiei:*

1. $\forall$ A, B: $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea);
2. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea);
3. $\forall$ A: $A \cap A = A$ (idempotenţa);
4. $\forall$ A: $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $\forall$ A, B: $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$
6. $\forall$ A, B, C: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune);
7. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie);
8. $\forall$ A, B: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (absorbţia).

Definiţie. ***Mulţimile** A **şi** B **care nu au nici un element comun se numesc <u>disjuncte</u>. Pentru ele avem** $A \cap B = \varnothing$.*

## II.5. Diferenţa mulţimilor *A* şi *B:*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

*Proprietăţile diferenţei:*

1. $\forall$ A: $A \setminus A = \varnothing$;
2. $\forall$ A, B, C: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
3. $\forall$ A, B: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
4. $\forall$ A, B: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
5. $\forall$ A, B, C: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
6. $\forall$ A, B, C: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
7. $\forall$ A, B, C: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
8. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$.

## II.6. Diferenţa simetrică a mulţimilor *A* şi *B:*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

*Proprietăţile diferenţei simetrice:*

1. $\forall$ A: $A \Delta A = \varnothing$;

2. $\forall$ A, B: $A \Delta B = B \Delta A$ (comutativitatea);
3. $\forall$ A: $A \Delta \varnothing = \varnothing \Delta A = A$;
4. $\forall$ A, B, C: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (asociativitatea);
5. $\forall$ A, B, C: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
6. $\forall$ A, B: $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

## II.7. Complementara unei mulţimi *A* în raport cu mulţimea *E:*

(*A* fiind o parte a lui *E*, adicã $A \subset E$)

$$C_E A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$$

*Proprietãţi:* ($\forall$A, B$\subset$E)

1. $C_E(C_E A) = A$ (principiul reciprocitãţii);
2. $C_E A = E \setminus A$;
3. $C_E \varnothing = E$;
4. $C_E E = \varnothing$;
5. $A \cup C_E A = A$ (principiul exluderii terţiului);
6. $A \cap C_E A = \varnothing$ (principiul necontradicţiei);
7. $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$;
8. $A \setminus B = C_E(A \cap B)$.

## II.8. Formulele lui de Morgan ($\forall$*A*, *B*$\subset$*E*)

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;
$C_E(A \cap B)= C_E A \cup C_E B$.

## II.9. Produsul cartezian a douã mulţimi *A* şi *B:*

$$A \text{ x } B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

*Proprietãţile produsului cartezian* ($\forall$ A,B,C,D avem):

1. A x B $\neq$ B x A, dacã A $\neq$ B;
2. (A x B) $\cup$ (A x C) = A x (B $\cup$ C);
3. (A $\cup$ B) x C = (A x C) $\cup$ (B x C);
4. (A $\cap$ B) x C = (A x C) $\cap$ (B x C);
5. (A \ B) x C = A x C \ B x C;
6. (A $\cap$ B) x (C $\cap$ D) = (A x C) $\cap$ (B x D)

Definiţia II.9.1. ***Mulţimile** A **şi** B **se numesc <u>echipotente</u> dacã existã o bijecţie de la** A **la** B.*

Definiţia II.9.2. ***Fie** E **o mulţime. Aceasta se numeşte <u>finitã</u> dacã** E = $\varnothing$ **sau dacã existã** n$\in$**N**, **astfel încât** E **este echipotentã cu mulţimea** {1,2,…,n}.*

Definiţia II.9.3. ***O mulţime** E **se numeşte <u>infinitã</u> dacã ea nu este finitã**.* Exemple de mulţimi infinite sunt: **N, Z, Q, R.**

Definiţia II.9.4. ***Fie** E **o mulţime. Aceasta se numeşte <u>numãrabilã</u> dacã este echipoentã cu N.*** Exemplu: Mulţimea numerelor raţionale.

Definiţia II.9.5. ***O mulţime se numeşte <u>cel mult numãrabilã</u> dacã este finitã sau numãrabilã**.*

Definiţia II.9.6. ***Fie** E **o mulţime. Se numeşte <u>cardinalul</u> acestei mulţimi un simbo asociat ei, notat** $|E|$ **sau** card E, **astfel încât** $|E| = |F|$, **dacã şi numai dacã** E*

***este echipotentã cu*** *F*; ***cardinalul mulţimii vide se noteazã cu*** 0, ***cardinalul mulţimii*** *{1,2,…,n}* ***cu*** $n\in N$, ***se noteazã cu*** *n*, ***iar cardinalul mulţimii* N *se noteazã cu*** $x_0$ ***(alef zero)***.

Teorema II.9.1. ***Fie*** *A* ***şi*** *B* ***douã mulţimi finite. Atunci:***

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorema II.9.2. ***Fie*** *A, B* ***şi*** *C* ***trei mulţimi finite. Atunci:***

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C$$

# III. Relaţii binare

***Relaţia binarã pe o mulţime***

Definiţia III.1. ***Fie M o mulţime nevidã. Se numeşte <u>relaţia binarã R pe M</u> o parte a produsului cartezian MxM. Dacã x∈M este relaţia R cu y∈M, atunci scriem xRy sau (x,y)∈R. Deci o relaţie binarã se referã la perechile de elemente din M.***

*Proprietãţi ale relaţiilor binare pe o mulţime:*

1. Relaţia binarã *R* pe mulţimea *M* se numeşte reflexivã dacã ∀ a∈M avem pe *aRa*.
2. Relaţia binarã *R* pe mulţimea *M* se numeşte simetricã dacã ∀ a,b∈M avem *aRb* implicã *bRa*.
3. Relaţia binarã *R* pe mulţimea *M* se numeşte antisimetricã dacã ∀ a,b∈M, *aRb* şi *bRa* implicã a=b.
4. Relaţia binarã *R* pe mulţimea *M* se numeşte tranzitivã dacã ∀ a,b,c ∈M, *aRb* implicã *bRc* implicã *aRc*.

Definiţia III.2. ***Se numeşte graficul relaţiei R definitã pe M mulţimea G = {(x,y)| xRy}.***

Definiţia III.3. ***O relaţie binarã R definitã pe o mulţime nevidã M se numeşte <u>relaţie de echivalenţã</u> dacã ea este reflexicã, tranzitivã şi simetricã***.

Exemplu: Fie **N** mulţimea numerelor naturale şi numãrul 3 fixat. Pe **N** stabilim urmãtoarea relaţie *R*: *a* şi *b* din **N** sunt în relaţie cu *R*, dacã *a* şi *b* împãrţite la 3 dau acelaşi rest. Scriem $a \equiv b \pmod 3$; de pildã $4 \equiv 1 \pmod 3$. Aceasta este o relaţie de echivalenţã.

Definiţia III.4. ***Fie M o mulţime. R o relaţie de echivalenţã pe M şi a un element fixat din M. Se numeşte <u>clasã de echivalenţã</u> corespunzãtoare elementului a mulţimea*** $C_a = \{x \in M \mid xRa\}$. ***Douã clase de echivalenţã*** $C_a$ ***şi*** $C_b$ ***sau coincid (când*** *aRb*) ***sau sunt disjuncte.***

Definiţia III.5. ***Fie M o mulţime şi R o relaţie de echivalenţã pe M. Se numeşte <u>mulţimea cât</u> a lui M în raport cu relaţia R şi se noteazã M/R mulţimea claselor de echivalenţã.***

Definiţia III.6. ***Fie M o mulţime nevidã. Se numeşte <u>relaţie de ordin</u> pe M o relaţie binarã care este reflexivã, tranzitivã şi antisimetricã.***

Se noteazã: "<" sau "≤"

De exemplu: relaţia cunoscutã de ordine naturalã "≤" pe **N, Z, Q** şi **R** este o relaţie de ordine.

Definiţia III.7. ***Fie M o mulţime nevidã şi "$\leq$" o relaţie de ordin pe M. Această relaţie de ordin se numeşte <u>relaţie de ordine totală</u> dacã oricare două elemente ale lui M sunt comparabile adicã*** $\forall a,b\in M$ ***avem sau a<b sau b<a. Mulţimea înzestratã cu o relaţie de ordine totală se numeşte mulţime total ordonatã.***

Definiţia III.8. ***Fie M o mulţime nevidã. O relaţie de ordine pe M se numeşte <u>relaţie de bunã ordonare</u> dacă orice parte nevidă a lui M are un cel mai mic element. Mulţimea M, cu această relaţie de bunã ordonare, se zice bine ordonatã.***

O relaţie de bunã ordonare pe M este o relaţie de ordie totalã pe M.

# IV. Funcţii

## IV.1. Noţiunea de funcţie

Definiţia IV.1.1. ***Fie A şi B două mulţimi. Prin <u>funcţie definitã pe mulţimea A, cu valori în mulţimea B</u> se înţelege orice lege (procedeu sau convenţie) f, în baza cãreia oricãrui element*** $a\in A$ ***i se asociazã un unic element, notat*** $f(a)$***, din B. Mulţimea A se numeşte <u>domeniu de definiţie</u>, iar mulţimea B se numeşte <u>codomeniu de definiţie</u> sau <u>domeniul valorilor funcţiei.</u>***

Definiţia IV.1.2. ***Fie*** $f:A\to B$ ***o funcţie. Prin <u>graficul</u> acestei funcţii înţelegem submulţimea*** $G_f$ ***a produsului cartezian A x B formatã din toate perechile*** $(a,f(a))$, $a\in A$. ***deci*** $G_f = \{(a, f(a) \mid a\in A\}$

Definiţia IV.1.3. ***Se numeşte <u>funcţie numericã</u> o funcţie*** $f:A\to B$***, pentru care atât domeniul de definiţie*** $A$ ***cât şi domeniul valorilor*** $B$ ***sunt submulţimi ale mulţimilor numerelor reale (deci*** $A, B\subset \mathbf{R}$***).***

## IV.2. Funcţii injective, surjective, bijective

Definiţia IV.2.1. ***Fie*** $f:A\to B$ ***o funcţie. Spunem cã f este o <u>funcţie injectivã</u>, dacã pentru oricare douã elemente*** $x$ ***şi*** $y$ ***ale lui*** $A$***,*** $x\neq y$***, avem*** $f(x) \neq f(y)$***. Faptul cã f este injectivã se mai exprimã şi altfel:*** $\forall x,y\in A$: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

De exemplu: $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, definitã prin formula $f(x) = x^2$, este injectivã, dar $g:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$, $g(x) = x^2$ nu este o funcţie injectivã deoarece $g(-2) = g(2) = 4$.

Definiţia IV.2.2. ***O funcţie*** $f:A\to B$ ***este o <u>funcţie surjectivã</u>, dacã pentru orice*** $b\in B$ ***existã cel puţin un element*** $a\in A$***, astfel încât*** $f(a) \neq b$. ***Deci*** $f:A\to B$ ***<u>nu este surjectivã</u> dacã*** $\exists\ b\in B$ ***avem*** $f(a) \neq b(\forall)a\in A$.

De exemplu: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$ este surjectivã.

Definiţia IV.2.3. ***O funcţie*** $f:A\to B$ ***care este simultan injectivã şi surjectivã se numeşte <u>funcţie bijectivã</u>.***

De exemplu: Fie $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ şi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Funcţia $f$ este bijectivã.

## IV.3. Compunerea funcţiilor

Definiţia IV.3.1. ***Fie funcţiile*** $f:A\to B$ ***şi*** $f:B\to C$ ***(domeniul de definiţie al funcţiei*** $g$ ***coincide cu codomeniul funcţiei*** $f$***). Fie*** $a\in A$***, atunci*** $f(a)\in B$***, deci existã imaginea sa prin*** $g$***, adicã*** $g(f(a))\in C$***. Astfel putem defini o funcţie*** $h:A\to C$ ***unde*** *h(a) = g(f(a))* ***pentru*** *∀a∈A.* ***Funcţia*** *h* ***astfel definitã se noteazã*** *g∘f* ***(sau gf) şi se numeşte <u>compunerea funcţiei g cu funcţia f.</u>***

Observaţii:

1. Dacã $f:A\to B$ şi $g:C\to D$ sunt douã funcţii, are sens sã vorbim de compunerea funcţiei $g$ cu funcţia $f$ numai dacã $B = C$.
2. Dacã $f:A\to B$ şi $g:B\to A$ sunt douã funcţii, are sens $g\circ f:A\to A$ şi $f\circ g:B\to B$, în general $f\circ g \neq g\circ f$.

Teoremã. Fie $f:A\to B$ şi $g:B\to C$ şi $h:C\to D$ trei funcţii. Atunci fiecare din funcţiile $h\circ(g\circ f)$, $(h\circ g)\circ f$ are sens şi existã egalitatea: $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

## IV.4. Funcţia inversã

Definiţia IV.4.1. ***Fie A o mulţime oarecare. Notãm cu*** $\mathbf{1_A}:A\to A$ ***funcţia definitã astfel:*** $\mathbf{1_A}(a) = a$ ***pentru*** $\forall a\in A$. $\mathbf{1_A}$ ***se numeşte <u>funcţia identicã</u> a mulţimii A.***

Propoziţie. Fie $A$ o mulţime şi $1_A$ funcţia sa identicã. Atunci:

1. Pentru orice mulţime $B$ şi pentru orice funcţie $f:A\to B$ avem $f\circ 1_A = f$
2. Pentru orice mulţime $C$ şi pentru orice funcţie $g:C\to A$ avem $1_A\circ g = g$

Definiţia IV.4.2. ***O funcţie*** $f:A\to B$ ***se numeşte inversabilã dacã existã o funcţie*** $g:B\to A$ ***astfel încât*** $g\circ f = 1_A$ ***şi*** $f\circ g = 1_B$.

Teoremã. O funcţie este inversabilã dacã şi numai dacã este bijectivã.

# V. Operaţii cu numere reale

## V.1. Puteri naturale ale numerelor reale

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$
5. $a^m:a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$
6. $a^m\cdot b^m=(a\cdot b)^m$
7. $a^m:b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$;
8. $\frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}$, $a \neq 0$;
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;
10. $a^0 = 1$, $a \neq 0$;
11. $0^n = 0$, $n \neq 0$, $n\in\mathbf{N}$.

Puterile numerelor reale se extind atât pentru exponenţi raţionali pozitivi sau negativi, cât şi pentru exponenţi reali, puterile reale fiind definite cu ajutorul şirurilor de puteri raţionale. Aceste puteri au proprietãţi identice cu exponenţi numere naturale.

## V.2. Identităţi fundamentale

Oricare ar fi $x,y,z,t,a,b,c \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$, avem:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$;
3. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ax + bx)^2$;
4. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - bt)^2 + (bx + ay - dz - ct)^2 + (cx + + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2$;
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$;
8. $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$;
9. $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;
10. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab$
11. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
12. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
13. $(1 + a)(1 + a^2 + a^4) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$;
14. $a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2$ (G. de Recquigny-Adanson);
15. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
16. $a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \ldots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2})$;
17. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n})$;
18. $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)(1 + a^{n+1}) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n+1}$.

## V.3. Radicali. Proprietăţi

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}, a > 0$;
2. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}, a > 0$;
3. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a, a \geq 0$;
4. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, a,b \geq 0$;
5. $\left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^m = \frac{1}{a}, a > 0$;
6. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}, a,b,c, \geq 0$;
7. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$;
8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m+n}}, a \geq 0$;
9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m-n}}, a > 0$;
10. $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m, a \geq 0$;
11. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}, a \geq 0$;
12. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}, a > 0$;
13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} \cdot b^{qm}}, a,b \geq 0$;
14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, a \geq 0$;
15. $\sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} : b^{qm}}, a \geq 0, b > 0$;
16. $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbf{R}$;
17. $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a}, a \geq 0$;
18. $\left(\sqrt[2n+1]{-a}\right)^{2n+1} = -a, a \geq 0$;
19. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}, a,b \geq 0$;
20. $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, dacă şi numai dacă $A^2 - B = C^2$;
21. Expresia conjugată a lui $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ este $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ iar pentru $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ este $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

# VI. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul întâi

## VI.1. Ecuaţii de gradul întâi sau ecuaţii afine

$ax + b = 0,\ a,b,x \in \mathbf{R}$

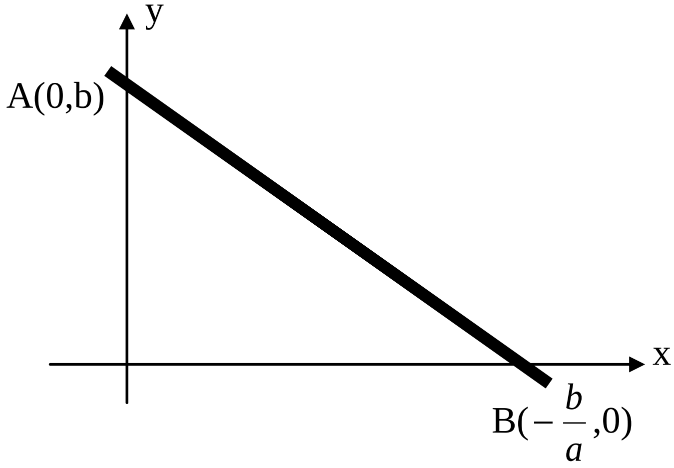
Fie S mulţimea de soluţii a acestei ecuaţii. Dacã

1. $a \neq 0,\ x = -\frac{b}{a}$ (soluţie unicã). $S = \{-\frac{b}{a}\}$.
2. $a = 0$ şi $b \neq 0$, ecuaţia nu are soluţii: $S = \varnothing$;
3. $a = 0$ şi $b = 0$, orice numãr real x este soluţie a ecuaţiei afine date; $S = \mathbf{R}$.

Semnul funcţiei afine $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(X) | | *semn contrar lui a* | 0 | *semnul lui a* | |

Graficul funcţiei de gradul întâi va fi o linie dreaptã.




## VI.2. Inecuaţii de gradul întâi sau inecuaţii afine

*Cazul 1.* $ax + b > 0,\ a,b,x \in \mathbf{R}$. Fie S mulţimea soluţiilor. Dacã:

1. $a > 0,\ S = (-\frac{b}{a}, +\infty)$;
2. $a < 0,\ S = (-\infty, -\frac{b}{a})$;
3. $a = 0,\ b > 0,\ S = \mathbf{R}$;
4. $a = 0,\ b = 0,\ S = \varnothing$.

*Cazul 2.* $ax + b = 0,\ a,b,x \in \mathbf{R}$. Dacã:

1. $a > 0,\ S = (+\infty, -\frac{b}{a}]$
2. $a < 0,\ S = [-\frac{b}{a}, +\infty)$
3. $a = 0,\ b = 0,\ S = \mathbf{R}$;
4. $a = 0,\ b > 0,\ S = \varnothing$.

Inecuaţiile $ax + b < 0$ şi $ax + b \geq 0$ se reduc la cele douã cazuri (prin înmulţirea inecuaţiei respective cu $-1$ şi schimbarea sensului inegalitãţilor).

## VI.3. Modulului unui numãr real

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ daca } x < 0 \\ 0, \text{ daca } x = 0 \\ x, \text{ daca } x > 0 \end{cases}$$

Proprietãţi: ∀ x,y∈**R**, avem:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $|-x| = |x|$;
3. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$;
4. $|x| = a \Leftrightarrow -a = x = a, a \in \mathbf{R}$;
5. $-|x| \le x \le |x|$;
6. $|x+y| \le |x| + |y|$;
7. $|x-y| \le |x| + |y|$
8. $||x| - |y|| \le |x - y|$;
9. $||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$;
10. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
11. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \ne 0$.

**Ecuaţii şi inecuaţii fundamentale, care conţin modulul**:

**1.** $|x - a| = b$, (a,b,x∈R, S = mulţimea soluţiilor)

| *b* | *S* |
|---|---|
| b < 0 | ∅ |
| b = 0 | a |
| b >0 | {a – b; a + b} |

**2.** $|x - a| > b$

| *b* | *S* |
|---|---|
| b < 0 | **R** |
| b = 0 | **R**\{a} |
| b >0 | {-∞,a – b)∪{a + b,∞} |

**3.** $|x - a| < b$

| *b* | *S* |
|---|---|
| b < 0 | ∅ |
| b = 0 | ∅ |
| b >0 | {a – b; a + b} |

# VII. Numere complexe

Definiţia VII.1. ***Se numeşte <u>numãr complex</u> orice element z=(a,b) al mulţimii*** **R**x**R** = **{*(a,b)*| *a,b*∈R}*, înzestrate cu douã operaţii algebrice, adunarea:*** ∀z=(a,b), ∀*z'=(a',b')*∈**R**x**R**, *z + z' = (a + a', b + b')* ***şi înmulţirea:*** ∀z=(a,b), ∀*z'=(a',b')*∈**R**x**R**, *z z' = (aa'-bb', ab' +a' b)*. ***Mulţimea numerelor complexe se noteazã cu*** **C** ***şi este corp comutativ***.

## VII.1. Forma algebricã a numerelor complexe

z = a + ib, cu a = (a,0), b = (b,0) şi i = (0,1), respectiv $i^2 = -1$.

**Egalitatea a douã numere complexe z şi z':**

a + ib = a' + ib' ⇔ a = a' şi b = b'

**Adunarea numerelor complexe are proprietãţile**:
este asociativã, comutativã, admite ca element neutru pe 0 şi orice numãr complex *a + bi* admite un opus *–a – ib.*

**Înmulţirea numerelor complexe are proprietãţile:**
este asociativã, comutativã, admite ca element neutru pe 1 şi orice numãr complex *a + bi* nenul admite un invers $\left((a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)$; este distributivã faţã de adunare *z(z' + z") = zz' + zz"* ∀z,z',z"∈**C**.

**Puterile numãrului** *i:* ∀m∈**N**, $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$.

Definiţia 2.1.1. ***Dacã z = a +bi, atunci numãrul a – ib se numeşte <u>conjugatul lui z</u> şi se noteazã*** a – ib = $\overline{a+ib} = \overline{z}$.

Au loc urmãtoarele proprietãţi, ∀z,z',z"∈**C**.

1. $z + \overline{z} = 2a$;
2. $z - \overline{z} = 2bi$;
3. $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$;
4. $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;
5. $z\overline{z} = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$;
6. $\frac{z}{z'} = \frac{\overline{z'}z}{z\overline{z}}$;
7. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$;
8. $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

## VII.2. Modulul unui numãr complex

∀ z∈C

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} \quad \text{sau} \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Avem apoi:

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $|z + z'| \le |z| + |z'|$;
3. $|z| - |z'| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$;
4. $|zz'| = |z||z'|$;
5. $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, |z| \ne 0$.

## VII.2. Forma trigonometricã a numerelor complexe

z = r(cos *u* + *i*sin *u*)

unde r = | z |, iar unghiul *u*∈[0,2π) este soluţia ecuaţiilor trigonometrice *r*cos *u* = a şi *r*sin *u* = b.

De exemplu: dacã z = -1 – i, atunci $|z| = \sqrt{2}, u = \frac{5\pi}{4}$ şi z = $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$.

## VII.4. Formula lui Moivre

∀u∈R şi ∀n∈N, $(\cos u + i\sin u)^n = \cos(nu) + i\sin(nu)$

Consecinţele formulei lui Moivre

$\cos nu = \cos^n u + C^2_n \cos^{n-2} u \sin^2 u + C^4_n \cos^{n-4} u \sin^4 u + \ldots$;
$\sin nu = C^1_n \cos^{n-1} u \sin u + C^3_n \cos^{n-3} u \sin^3 u + \ldots$;
$$\text{tg } nu = \frac{C_n^1 tgu - C_n^2 tg^3 u + C_n^5 tg^5 u - ...}{1 - C_n^2 tg^2 u + C_n^4 tg^4 u - ...}.$$

## VII.5. Extragerea rãdãcinii de ordinul *n* dintr-un numãr complex

$$z = r(\cos u + i\sin u)$$
$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{u+2k\pi}{n} + i\sin\frac{u+2k\pi}{n}\right], k = 0,1,2,...,n-1$$
$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1$$
$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1$$

Pentru simplificare folosim urmãtoarea notaţie:
$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \varepsilon_k \text{ şi } \left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \omega_k$$
$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

## VII.6. Ecuaţia binomã

$x^n - A = 0$, $A \in \mathbf{C}$, $A = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$x_k = |A|^{1/n}\omega_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A < 0$;
$x_k = A^{1/n}\varepsilon_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A > 0$;
$x_k = \sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$

# VIII. Ecuaţii şi inecuaţii de gradul al II-lea

## VIII.1. Ecuaţii de gradul al doilea

$ax^2 + bx + c = 0$, $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

**1.** ***Formule de rezolvare***: $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$; sau

$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$.

**2.** ***Formule utile în studiul ecuaţiei de gradul al II-lea:***

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 2SP$
$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1^2x_2^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$

**3.** ***Discuţia naturii şi semnul rãdãcinilor*** în funcţie de semnele lui $\Delta = b^2 - 4ac$, $P = x_1x_2$, $S = x_1 + x_2$.

| $\Delta$ | P | S | Natura şi semnul rãdãcinilor |
|---|---|---|---|
| $\Delta < 0$ | - | - | Rãdãcini complexe: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$ | - | - | Rãdãcini reale şi egale $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ |
| $\Delta > 0$ | $P > 0$ | $S > 0$ | Rãdãcini reale pozitive |
| | $P > 0$ | $S < 0$ | Rãdãcini reale negative |
| | $P < 0$ | $S > 0$ | Rãdãcini reale şi de semne contrare; cea pozitivã este mai mare decât valoarea absoluta a celei negativi |
| | $P < 0$ | $S < 0$ | Rãdãcini reale şi de semne contrare; cea negativã este mai mare în valoare absolutã. |

**4.** ***Semnul funcţiei*** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$

$\Delta > 0$: $a \neq 0$, $x_1 < x_2$.

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | semnul lui a | 0 | semn contrar lui a | 0 | semnul lui a | |

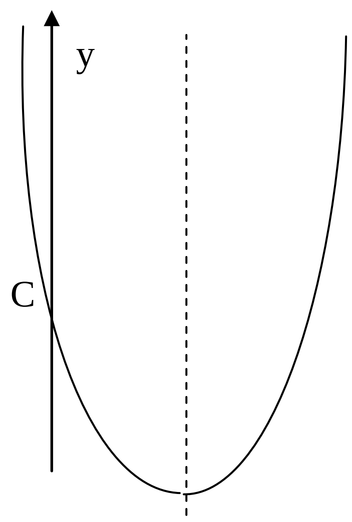
$\Delta = 0$

| X | $-\infty$ | | $x_1 = x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | semnul lui a | 0 | semnul lui a | |

$\Delta < 0$

| X | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | | semnul lui a | |

**5.** ***Graficul funcţiei*** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$ este o *parabolã*. Aceastã funcţie se poate scrie şi sub forma $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a}$, numitã formã canonicã.




$\Delta > 0$
$a > 0$
$A(x_1,0)$
$B(x_2,0)$
$C(0,c)$
$V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

O A B x
D

6. ***Maximul sau minimul funcţiei de gradul al doilea***

1. Dacã $a > 0$, funcţia $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, minim ce se realizeazã pentru $x = \frac{-b}{2a}$
2. Dacã $a < 0$, funcţia $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, maxim ce se realizeazã pentru $x = \frac{-b}{2a}$

**7.** ***Intervale de monotonie pentru funcţia de gradul al doilea***

Teoremã. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a\neq 0$

1. Dacã $a > 0$, funcţia f este strict descrescãtoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict crescãtoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.
2. Dacã $a < 0$, funcţia f este strict crescãtoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict descrescãtoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

Observaţie: Intervalele $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc ***intervale de monotonie ale funcţiei f***.

**Descompunerea trinomului** $f(x) = aX^2 + bX + c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $x_1$ şi $x_2$ fiind rãdãcinile trinomului.

1. $\Delta > 0$, $f(x) = a(X - x_1)(X - x_2)$;
2. $\Delta = 0$, $f(x) = a(X - x_1)^2$;
3. $\Delta < 0$, $f(x)$ este ireductibil pe $\mathbf{R}$, deci $f(x) = aX^2 + bX + c$

*Construirea unei ecuaţii de gradul al doilea când se cunosc suma şi produsul rãdãcinilor ei:* $x^2 - Sx + P = 0$, cu $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1x_2$.

Teoremã: Ecuaţiile $ax^2 + bx + c = 0$ şi $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $\forall a,b,c,a',b',c'\in\mathbf{R}$, $a,a'\neq 0$, au cel puţin o rãdãcinã comunã dacã şi numai dacã:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

*Condiţii necesare şi suficiente pentru ca numerele reale date* $\alpha$ *şi* $\beta$ *sã fie în anumite relaţii cu rãdãcinile* $x_1$ *şi* $x_2$ *ale ecuaţiei de gradul al doilea* $f(x)=ax^2 + bx + c$ $a,b,c\in R$, $a\neq 0$, *respectiv, pentru ca f(x) sã pãstreze un semn constant* $\forall x \in \mathbf{R}$.

| *Nr.crt.* | *Relaţii între* $x_1$, $x_2$, $\alpha$ *şi* $\beta$ | *Condiţii necesare şi suficiente* |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha < x_1 < \beta < x_2$ sau<br>$x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ | 1. $f(\alpha)f(\beta) < 0$ |
| 2 | $\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$ | 1. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$<br>2. $af(\alpha) > 0$<br>3. $af(\beta) > 0$<br>4. $\alpha < \frac{-b}{2a}$<br>5. $\beta > \frac{-b}{2a}$ |
| 3 | $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ | 1. $af(\alpha) < 0$<br>2. $af(\beta) < 0$ ceea ce atrage dupã sine $\Delta > 0$ |
| 4 | $x_1 < \alpha < x_2$ | 1. $af(\alpha) < 0$ |
| 5 | $\alpha < x_1 \leq x_2$ | 1. $\Delta = 0$<br>2. $af(\alpha) > 0$<br>3. $\alpha < \frac{-b}{2a}$ |
| 6 | $x_1 \leq x_2 < \alpha$ | 1. $\Delta = 0$<br>2. $af(\alpha) > 0$<br>3. $\frac{-b}{2a} < \alpha$ |
| 7 | $f(X) = 0, \forall x, x\in R$ | 1. $\Delta \leq 0$<br>2. $a > 0$ |
| 8 | $f(X) \leq 0, \forall x, x\in R$ | 1. $\Delta \leq 0$<br>2. $a < 0$ |

Observaţie: Rezolvarea ecuaţiei bipãtrate $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $\forall n\in N$, $n > 2$, prin substituţia $x^n = y$, se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea în y, anume $ay^2 + by + c = 0$ şi la rezolvarea a douã ecuaţii binome de forma $x^n = y_1$, $x^n = y_2$.

## VIII.2. Inecuaţii fundamentale de gradul al II-lea

1. $ax^2 + bx + c > 0$, $a,b,c\in \mathbf{R}$, $a\neq 0$, S = mulţimea soluţiilor:

| $\Delta$ | a | S |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $a > 0$ | $(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ |
| $\Delta > 0$ | $a < 0$ | $(x_1,x_2)$ |
| $\Delta = 0$ | $a > 0$ | $\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta = 0$ | $a < 0$ | $\varnothing$ |
| $\Delta < 0$ | $a > 0$ | **R** |
| $\Delta < 0$ | $a < 0$ | $\varnothing$ |

2. 2. $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, S = mulţimea soluţiilor:

| $\Delta$ | a | S |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $a > 0$ | $(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$ |
| $\Delta > 0$ | $a < 0$ | $[x_1,x_2]$ |
| $\Delta = 0$ | $a > 0$ | **R** |
| $\Delta = 0$ | $a < 0$ | $\{x_1\}$ |
| $\Delta < 0$ | $a > 0$ | **R** |
| $\Delta < 0$ | $a < 0$ | $\varnothing$ |

Inecuaţiile $ax^2 + bx + c < 0$ şi $ax^2 + bx + c \leq 0$ se reduc la cazurile precedente (prin înmulţirea cu –1 şi schimbarea sensului acestor inegalităţi).

## VIII.3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii cu coeficienţi reali

***1. Sisteme formate dintr-o ecuaţie de gradul al doilea şi una de gradul întâi***

Aceste sisteme sunt de forma:

$$(S)\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \end{cases}$$

Se rezolvã prin metoda ***substituţiei***. În prima ecuaţie putem presupune cã sau $a\neq 0$ sau $b\neq 0$ (dacã a = b = 0 atunci prima ecuaţie dispare). Presupunând cã $b\neq 0$, atunci ecuaţia ax + by + c =0 este echivalentã cu ecuaţia $y=\frac{-c-ax}{b}=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Dacã substituim în *y* în cea de a doua ecuaţie a sistemului (S), atunci (S) este echivalent cu sistemul:

$$(S')\begin{cases} y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \\ a_1x^2+b_1x\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)+c_1\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)^2+d_1x+e_1\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)+f_1=0 \end{cases}$$

Rezolvând ecuaţia a doua a sistemului (S’) obţinem valorile lui x, apoi, înlocuind în prima ecuaţie din sistemul (S’) obţinem valorile lui y.

Discuţie. **1.** Dacã ecuaţia a doua din sistemul (S’) are douã rãdãcini reale, atunci sistemul (S) are o soluţie realã.

**2.** Dacã ecuaţia a doua din sistemul (S’) are douã rãdãcini egale, sau în cazul când aceasta este o ecuaţie de gradul întâi, atunci sistemul (S) are douã soluţii reale.

**3.** Dacã ecuaţia a doua a sistemului (S’) nu are nici o rãdãcinã realã, atunci sistemul (S) nu are soluţii reale.

***2. Sisteme de ecuaţii omogene***

Un astfel de sistem este de forma:

$$(S)\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

Sistemul (S) se numeşte ***omogen*** deoarece polinoamele $a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2$ şi $a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$ sunt omogene, în sensul cã toate monoamele care apar în scrierea lor au acelaşi grad.

Presupunem mai întâi cã $d_1 \neq 0$ şi $d_2 \neq 0$. Existã în aces caz numerele reale $\alpha$ şi $\beta$ diferite de zero astfel încât $\alpha d_1 + \beta d_2 = 0$. Se înmulţeşte prima ecuaţie cu $\alpha$ şi cea de a doua cu $\beta$ şi apoi se adunã. Se obţine sistemul echivalent:

$$(S')\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ (\alpha a_2 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)xy + (\alpha c_1 + \beta c_2)y^2 = 0 \end{cases}$$

Notãm coeficientul ecuaţiei a doua din (S') cu $a_3,b_3,c_3$. Atunci:

$$(S')\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0 \end{cases}$$

Deoarece $d_1 \neq 0$ sistemul (S') nu are soluţia x = 0 şi y = 0. Putem presupune cã $x \neq 0$. Împãrţim ecuaţia a doua din (S') cu $x^2$ şi obţinem ecuaţia de gradul al doilea în $\frac{y}{x}$:

$c_3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_3\frac{y}{x} + a_3 = 0$ care, rezolvatã, ne dã în general douã valori $k_1$ şi $k_2$ pentru $\frac{y}{x}$ adicã, $\frac{y}{x} = k_1$ şi $\frac{y}{x} = k_2$.

Rezolvarea sistemului (S) este echivalentã cu rezolvarea urmãtoarelor douã sisteme:

$$(S_1)\begin{cases} y = k_1x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases} \text{ şi } (S_2)\begin{cases} y = k_2x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

Când $d_1 = 0$ şi $d_2 = 0$, sistemul (S) este de forma (S') şi rezolvarea se continuã ca pentru sistemul (S').

***3. Sisteme de ecuaţii simetrice***

Definiţia VIII.3.3. ***O ecuaţie în douã necunoscute se zice <u>simetricã</u> dacã înlocuind*** *x* ***cu*** *y* ***şi*** *y* ***cu*** *x****, ecuaţia nu se schimbã.***

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii simetrice se face astfel: se introduc necunoscutele auxiliare *s* şi *p* date de relaţiile: x + y = s şi xy = p.

Prin introducerea acestor noi necunoscute *s* şi *p*, în foarte multe cazuri sistemul se reduce la un sistem de ecuaţii format dintr-o ecuaţie de gradul întâi şi o ecuaţie de gradul al doilea în necunoscutele *s* şi *p*.

# IX. Ecuaţii algebrice de gradul III, IV şi V

## IX.1. Ecuaţia reciprocã de gradul al treilea

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0,\ a,b \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a ecuaţiei $(x \pm 1)[ax^2 + (b + a) + a] = 0$

## IX.2. Ecuaţia reciprocă de gradul al patrulea

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0,\ a,b,c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a unei ecuaţii de gradul al doilea, împărțim ecuația cu $x^2$ și grupăm, apoi prin substituţia $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow a(x^2 + \frac{1}{x^2}) \pm b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$ sau $ay^2 + by + c - 2a = 0$.

## IX.2. Ecuaţia bipătrată

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a,b,c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

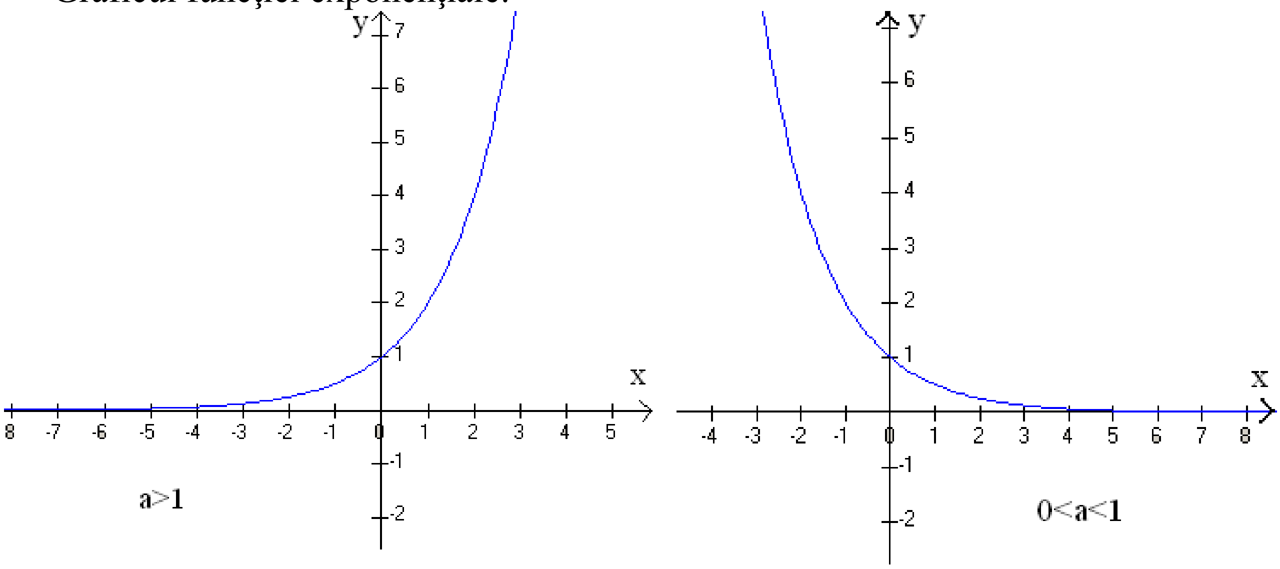
Cu $x = y^2$, rezultă ecuaţia $ay^2 + by + c = 0$, deci $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

# X. Funcţia exponenţială şi funcția logaritmică

## X.1. Funcția exponențială

Def. Fie $a>0$, $a\neq1$. Funcţia $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$, $f(x) = a^x$ se numeşte funcţia exponenţială de bază $a$.

Graficul funcţiei exponenţiale:




Proprietăţi:

1) $f(0)=a^0=1$, graficul funcţiei exponenţiale taie axa O$x$ în (0,1).
2) Funcţia exponenţială exte convexă.
3) Monotonia: dacă $a>1$, atunci $f$ este strict crescătoare;
   dacă $0<a<1$, atunci $f$ este strict descrescătoare.
4) Dacă $a>1$ şi $x>0 \Rightarrow f(x)>1$
   $x<0 \Rightarrow f(x)<1$

$0<a<1$ şi $x>0 \Rightarrow f(x)<1$

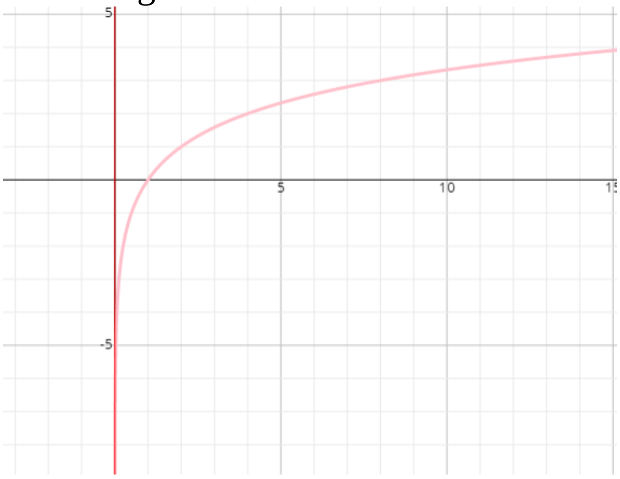
$x<0 \Rightarrow f(x)>1$.

5) Funcţia exponenţială este bijectivă.

## X.2. Funcția logaritmică

Definiţia X.1. ***Fie $a \in \mathbf{R}^*_+$, $a \neq 1$ şi $b \in \mathbf{R}^*_+$ douã numere reale. Se numeşte <u>logaritm</u> al numãrului real strict pozitiv b exponentul la care trebuie ridicat numãrul a, numit bazã, pentru a obţine numãrul b.***

Logaritmul numãrului *b* în baza *a* se noteazã $\log_a b$




$f(x) = \log_2 x$


$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru a = 10 obţinem logaritmi zecimali, iar pentru a = *e* obţinem logaritmi naturali.

*Proprietãţi:*

1. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, $(b,c > 0)$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a 1 = 0$
4. $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $x \neq 0$
5. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b, (b > 0, m \in N, m \geq 2)$;
6. $\log_a b \log_b a = 1$;
7. Formula de schimbare a bazei logaritmului: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
8. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
9. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; *co*$\log_a x = -\log_a y$
10. $a>1$ şi $x \in (0,1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a>1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
11. $0<a<1$ şi $x \in (0,1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0<a<1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
12. $a>1$ şi $0<x<y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

13. x>0, y>0, a>0, b>0, a≠1, b≠1 ⇒ $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$;

14. x>0, a>0, a≠1, n∈**N** ⇒ $\log_a x = \log_a x^{n;}$

15. x∈**R**, a>0, a≠1 ⇒ $a^x = e^{x\ln a}$.

***<u>Operaţii cu logaritmi zecimali</u>***

1. Suma a doi logaritmi: se adunã separat caracteristicile (se adunã algebric, întrucât existã caracteristici pozitive şi caracteristici negative) şi separat mantisele (care sunt întotdeauna pozitive în afarã de cazul în care întregul logaritm este negativ); apoi cele douã rezultate se adunã algebric.
2. Scãderea a doi logaritmi: se adunã descãzutul cu logaritmul scãzãtorului.
3. Înmulţirea unui logaritm cu un numãr întreg: când caracteristica este pozitivã, înmulţirea se face în mod obişnuit; când caracteristica este negativã se înmulţeşte separat mantisa şi separat caracteristica şi se adunã algebric rezultatele.
4. Împãrţirea unui logaritm printr-un numãr întreg: în cazul când caracteristica este pozitivã, împãrţirea se face obişnuit. În cazul în care este negativã se împarte separat mantisa şi separat caracteristica; dacã nu se împarte exact cu caracteristica prin numãrul dat, atunci se adaugã caracteristicii atâtea unitãţi negative câte sunt necesare pentru a avea un numãr divizibil prin împãrţitorul respectiv şi, pentru a nu se modifica rezultatul, se adaugã şi mantisei tot atâtea unitãţi, dar pozitive.

## X.3. Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice fundamentale

1. $\log_a x = b$, a>0, a≠1, b∈**R**. Soluţia: $x = a^b$.
2. $\log_a x > b$, b∈**R**. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

| a | S |
|---|---|
| a > 1 | $(a^b, +\infty)$ |
| 0 < a < 1 | $(0, a^b)$ |

3. $\log_a x < b$, b∈R. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

| a | S |
|---|---|
| a > 1 | $(0, a^b)$ |
| 0 < a < 1 | $(a^b, +\infty)$ |

## X.4. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale fundamentale

1. $a^x = b$, a>0, a≠1, b>0. Soluţia $x = \log_a b$, b∈**R**
2. $a^x = b$, a>0, a≠1, b≤0, nu are nici o soluţie realã
3. $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ metoda de rezolvare: $f(x)=g(x)$
4. $a^{f(x)}=b$ metoda de rezolvare: $f(x)=\log_a b$
5. $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ metoda de rezolvare: $f(x)\lg a=g(x)\lg b$
6. $c_1a^{2f(x)}+c_2a^{f(x)}+c_3=0$ metoda de rezolvare: se face substituţia $a^{f(x)}=y>0$
7. $c_1a^{f(x)}+c_2b^{f(x)}+c_3=0$, cu proprietatea $ab=1$, se notează $a^{f(x)}=y$ şi avem $b^{f(x)}=\frac{1}{y}$.

8. $c_1a^{2f(x)}+c_2(ab)^{f(x)}+c_3b^{2f(x)}=0$, se împarte cu $b^{2f(x)}$ şi se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=y$

9. ecuaţii exponenţiale cu soluţie unică – se observă soluţia şi se verifică unicitatea ei – de exemplu: $3^x+4^x=5^x$ se observă că are soluţia $x=2$, iar funcţia $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare.

10. $f(x)^{g(x)}=f(x)^{h(x)}$, cazuri: **1.** $f(x)>0$ avem $g(x)=h(x)$, **2.** $f(x)=1$, **3.** $f(x)=0$

11. $a^x > b$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

| a | b | S |
|---|---|---|
| $a > 1$ | $b > 0$ | $(\log_a b, +\infty)$ |
| $0 < a < 1$ | $b > 0$ | $(-\infty, \log_a b)$ |
| $a > 0$, $a \neq 1$ | $b < 0$ | **R** |

12. $a^x < b$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

| a | b | S |
|---|---|---|
| $a > 1$ | $b > 0$ | $(-\infty, \log_a b)$ |
| $0 < a < 1$ | $b > 0$ | $(\log_a b, +\infty)$ |
| $a > 0$, $a \neq 1$ | $b < 0$ | $\varnothing$ |

## X.5. Exemple:

**1.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

**R.** $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$, condiţia $x \geq 0$ şi obţinem:

$3^{x-2}=3^{-\sqrt{x}} \Rightarrow x-2=-\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}-2=0$, notăm $\sqrt{x}=y \Rightarrow$ ecuaţia $y^2+y-2=0$ cu soluţiile $y_1=-2$ şi 2 şi $y_2 = 1$. Revenim la substituţia făcută şi obţinem: $\sqrt{x}=-2$ nu are soluţii reale şi $\sqrt{x}=1$ are soluţia $x = 1$, soluţia ecuaţiei.

**2.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x + 2^{x+3} = 36$ .

**R.** $2^x + 2^{x+3} = 36 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36 \Rightarrow 2^x + 8\cdot 2^x = 36 \Rightarrow 9\cdot 2^x = 36 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.

**3.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0$ .

**R.** Ecuaţia se poate scrie $\left(2^2\right)^x-3\cdot 2^x+2=0 \Rightarrow \left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+2=0$. Notăm $2^x = y$ şi obţinem ecuaţia $y^2 - 3y + 2 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 1$ şi $y_2 = 2$. Revenim la subsituţie: $2^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1$. $S = \{0, 1\}$.

**4.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5 (3x + 4) = 2$ .

**R.** Condiţii: $3x+4>0 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ $=D$, domeniul de rezolvabilitate.

Din definiţia logaritmului obţinem: $3x+4=2^5 \Rightarrow$

$3x = 32-4 \Rightarrow 3x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{3} \in D$, soluţie.

**5.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)+\log_2 x = 3$.

**R.** Condiţii: $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,+\infty) = D$. Aplicând proprietăţile logaritmilor: $\log_a A + \log_a B = \log_a(A \cdot B)$ se obţine: $\log_2 x(x+2) = 3$ şi din definiţia logaritmului avem:

$x(x+2) = 2^3 \Rightarrow x^2+2x-8=0$ cu soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=-4$. Soluţia ecuaţiei este $x=2\in D$.

**6.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ .

**R.** Condiţii: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>5 \end{cases} \Rightarrow D=(5,+\infty)$.

Aplicând proprietăţile logaritmului ecuaţia va fi:

$$\log_2\frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 2^3 \Rightarrow x+2=8(x-5) \Rightarrow x+2=8x-40 \Rightarrow 7x=42 \Rightarrow x=6\in D$$

.

# XI. Metoda inducţiei matematice

## XI.1. Axioma de recurenţă a lui Peano

Fie A o parte a lui **N** astfel că:

1. $0\in A$
2. $(\forall n\in \mathbf{N})$, $n\in A \Rightarrow n+1\in A$. Atunci rezultă A = **N**.

## XI.2. Metoda inducţiei matematice

Fie P(n) o propoziţie care depinde de numărul natural *n*. Dacă avem:

1. P(0) adevărată;
2. $\forall n\in\mathbf{N}$, P(n) adevărată $\Rightarrow$ P(n+1) adevărată, atunci P(n) este adevărată pentru orice număr natural *n*.

În demonstraţie prin metoda inducţiei matematice (recurenţă) poate apărea în loc de 0, un număr natural $n_0$, dacă în propoziţia P(n) pe care vrem să demonstrăm am constatat $n\neq n_0$.

## XI.2. Variantã a metodei inducţiei matematice

Fie P(n) o propoziţie care depinde de numãrul natural $n \neq n_0$. Dacã avem:

1. $P(n_0)$ adevãratã;
2. ($\forall m \in \mathbf{N}$, $n_0 \leq m \leq k$) P(m) adevãratã $\Rightarrow$ P(k) adevãratã, atunci P(n) este adevãratã pentru orice numãr natural $n \geq n_0$.

# XII. Analizã combinatorie

## XII.1. Permutãri

Definiţia XII.1.1. ***O mulţime împreunã cu o ordine bine determinatã de dispunere a elementelor sale este o <u>mulţime ordonatã</u> şi se notazã*** *$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Definiţia XII.1.2. ***Se numesc <u>permutãri</u> ale unei mulţimi A cu n elemente toate mulţimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente ale lui n. Numãrul permutãrilora n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$, este $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$; 0! = 1 (prin definiţie).***

Factoriale (proprietãţi): n! = (n – 1)!n; $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

## XII.2. Aranjamente

Definiţia XII.2.1. ***Se numesc <u>aranjamente a n elemente luate câte m</u> ($m \leq n$) ale unei mulţimi A cu n elemente, toate submulţimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulţimii A.*** Se noteazã $A^m_n$.

Numãrul aranjamentelor a n elemente luate câte m este:

$$A^m_n = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\ n \geq m.$$

*Proprietãţi:* $A^n_n = P_n$; $A^n_n = \frac{n!}{0!}$ sau $A^n_n = n!$; $A_n^{n-1} = A_n^n; A_n^0 = 1$.

## XII.3. Combinãri

Definiţia XII.3.1. ***Se numesc <u>combinãri a n elemente luate câte m</u> ($m \leq n$) ale unei mulţimi A cu n elemente toate submulţimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulţimii A***. Se noteazã $C_n^m$.

*Proprietãţi:*

1. $C_n^1 = n; C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$;
2. $C_n^n = C_n^{n-m}; C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
3. Numãrul submulţimilor unei mulţimi cu *n* elemente este $2^n$;
4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$;
5. $\frac{n!}{p_1! p_2! \ldots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-(p_1+\ldots+p_{m-1})}$ unde $p_1 + \ldots p_{m-1} < n$

## XII.4. Binomul lui Newton

$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n$

$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1}a + ... + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + ... + (-1)^n C_n^n a^n$ unde n∈N

*Proprietãţi:*

1. Termenul de rank *k+1* este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$;
2. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k ; C_{n+1}^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$;
3. $T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1}$;
4. Numãrul termenilor dezvoltãrii $(x \pm a)^n$ este n+1;
5. Coeficienţii termenilor egal depãrtaţi de extremi sunt egali.

*Relaţii importante*:

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n ; C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1} ; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$$

*Dezvoltãri particulare uzuale:*

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$;
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$;
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

## XII.5. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale

Dacã $S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, p∈N, atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} ; S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; S_3 = \left[\frac{n(n+1}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} ; S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relaţie care permite calculul lui $S_p$, când se cunosc $S_{p-1}, S_{p-2}, \ldots, S_1$ este formula lui Pascal: $(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{P+1}^2 S_{p-1} + ... + C_{p+1}^p S_1 + n$

# XIII. Progresii

## XIII.1. Progresii aritmetice

Definiţia XIII.1.1. ***Se numeşte <u>progresie aritmeticã</u> un şir de numere $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ în care fiecare termen, începând cu $a_2$, se obţine din cel precedent prin adãugarea unui numãr constant numit <u>raţia progresiei</u>.*** Se noteazã $\div a_1,a_2,a_3,\ldots a_n,\ldots$

Dacã $a_1$ este primul termen, $a_n$ cel de-al n-lea termen (termenul general), *r* raţia, *n* numãrul termenilor şi $S_n$ suma celor *n* termeni, atunci avem:

$a_n = a_{n-1} + r$, $n\geq 2$ (prin definiţie)

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, $n\geq 2$ (prin definiţie)

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$$

***Termenii echidistanţi de extremi***. Într-o progresie aritmeticã *suma termenilor echidistanţi de extremi este egalã cu suma termenilor extremi:* $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Observaţie. Dacã numãrul termenilor este impar (n = 2m + 1), atunci existã un termen în mijloc, $a_{m+1}$, astfel încât $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$.

Condiţia necesarã şi suficientã pentru ca trei termeni *a,b,c,* luate în aceastã ordine, sã formeze o progresie aritmeticã, este sã avem $2b = a + c$.

## XIII.2. Progresii geometrice

Definiţia XIII.2.1. ***Se numeşte progresie geometricã un şir de numere*** $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ ***în care fiecare termen, începând cu*** $a_2$***, se obţine din cel precedent prin înmulţirea acestuia cu un acelaşi numãr q (***$q\neq 0$***) numit raţie.*** Se noteazã $\div\div a_1,a_2,a_3,\ldots a_n,\ldots$

Dacã $a_1$ este primul termen, $a_n$ cel de-al n-lea termen (termenul general), *q* raţia, *n* numãrul termenilor şi $S_n$ suma celor n termeni, atunci avem:

$a_n = qa_{n-1}$, $n\geq 2$ (prin definiţie)

$a_n = a_1q^{n-1}$, $n\geq 2$ ($a_n$ în funcţie de $a_1$, q şi n)

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$$S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1 - q}, q \neq 1$$

***Termeni echidistanţi de extremi***. Într-o progresie geometricã, *produsul a doi termeni echidistanţi de extremi este egal cu produsul termenilor extremi*: $a_pa_{n-p+1} = a_1a_n$.

Observaţie. Dacã numãrul termenilor este impar (n = 2m + 1) atunci existã un termen la mijloc, $a_{m+1}$, astfel încât $a_{m+1}^2 = a_1a_{2m+1}$.

Condiţia necesarã şi suficientã ca trei numere *a,b,c,* luate în aceastã ordine, sã formeze o progresie geometricã este sã avem $b^2 = ac$.

# XIV. Polinoame

## XIV.1. Forma algebricã a unui polinom

$f\in C[x]$ este $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$, unde *n* este gradul, $a_0$ – coeficientul dominant, $a_n$ – termenul liber.

***Funcţia polinomialã*** asociatã lui $f\in C[x]$ este $\tilde{f}: C\to C$ $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ $\forall\alpha\in C$; $f(\alpha)$ fiind valoarea polinomului f în $\alpha$.

***Teorema împãrţirii cu rest***: $\forall f,g\in C[x]$, $g\neq 0$ existã polinoamele unice $q,r\in C[x]$ astfel încât f = gq + r, grad $r$ < grad $g$.

***Împãrţirea unui polinom cu X-a***: Restul împãrţirii polinomului $f\in C[x]$, $f\neq 0$ la X-a este f(a).

***Schema lui Horner***: ne ajutã sã aflãm câtul $q = b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ al împãrţirii polinomului $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$ la binomul X-a; precum şi restul acestei împãrţiri r = f(a);

| | $a_0$ | $a_1$ | … | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | $b_0 = a_0$ | $b_1 = ab_0+a_1$ | … | $b_{n-1} = ab_{n-2}+a_{n-1}$ | $r=f(a)=ab_{n-1}+a_n$ |

## XIV.2. Divizibilitatea polinoamelor

Definiţia XIV.2.1. ***Fie f,g∈C[x], spunem cã g divide pe f şi notãm g|f dacã ∃q∈C[x] astfel încât f=gq.***

Proprietãţi:

1. $a \mid f$, $\forall a\in C^*$, $\forall f\in C[x]$;
2. $g \mid f$ şi $f\neq 0 \Leftrightarrow r = 0$;
3. $g \mid f$ şi $f\neq 0 \Rightarrow$ grad $f \geq$ grad $g$;
4. $a\in C^* \Rightarrow af \mid f$;
5. $f \mid f$ (refelexivitate);
6. $f \mid g$ şi $g \mid h \Rightarrow f \mid h$ (tranzitivitate);
7. $f \mid g$ şi $g \mid f \Rightarrow \exists\ a\in C^*$ cu f = ag (f,g sunt asociate în divizibilitate).

Definiţia XIV.2.2. ***Un polinom*** *d* ***se numeşte cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor*** *f* ***şi*** *g* ***dacã***: ***1)*** $d \mid f$ şi $d \mid g$.
***2)*** $d' \mid f$ şi $d' \mid g \Rightarrow d' \mid d$ ***şi notãm*** $d=(f,g)$

Definiţia XIV.2.3. ***Dacã d=1 atunci*** *f* ***şi*** *g* ***se numesc prime între ele***.

Definiţia XIV.2.4. ***Un polinom*** *m* ***se numeşte cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor*** *f* ***şi*** *g* ***dacã:*** ***1)*** $f \mid m$ şi $g \mid m$.
***2)*** $f \mid m'$ şi $g \mid m' \Rightarrow m \mid m'$

Teoremã. Dacã d=(f,g) atunci $m = \dfrac{f\cdot g}{d}$

## XIV.3. Rãdãcinile polinoamelor

Definiţia XIV.3.1. ***Numãrul*** $\alpha\in$ **C** ***se numeşte rãdãcinã a polinomului*** *f* ***dacã şi numai dacã*** $\tilde{f}(\alpha) = 0$.

***Teorema lui Bezout:*** Numãrul $\alpha\in C$ este rãdãcinã a polinomului $f\neq 0 \Leftrightarrow (X-a) \mid f$.

Definiţia XIV.3.2. ***Numãrul*** $\alpha$ ***se numeşte rãdãcinã multiplã de ordinul*** *p* ***a polinomului f≠0 dacã şi numai dacã*** $(X-a) \mid f$ ***iar*** $(X-a)^{p+1}$ ***nu-l divide pe*** *f*.

Teoremã: Dacã $f\in C[x]$ este un polinom de gradul $n$ şi $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ sunt rãdãcinile lui cu ordinele de multiplicitate $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n$ atunci $f = a_0(X-x_1)^{m_1}(X-x_2)^{m_2}\ldots(X-x_n)^{m_n}$ unde $a_0$ este coeficientul dominant al lui $f$, iar $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ = grad $f$.

## XIV.4. Ecuaţii algebrice

Definiţia XIV.4.1. ***O ecuaţie de forma f(x) = 0 unde $f\neq 0$ este un polinom, se numeşte <u>ecuaţie algebricã</u>.***

***Teorema lui Abel-Ruffini***: Ecuaţiile algebrice de grad mai mare decât patru nu se pot rezolva prin radicali.

***Teorema lui D'Alambert-Gauss:*** Orice ecuaţie algebricã de grad mai mare sau egal cu unu, are cel puţin o rãdãcinã (complexã).

***Formulele lui Viete:*** Dacã numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rãdãcinile polinomului $f\in C[x]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0\neq 0$ atunci:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+\dots+x_1x_n+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2\dots x_k+x_1x_2\dots x_{k-1}x_{k+1}+\dots+x_{m-k+1}x_{m-k+2}\dots x_m = (-1)^k\dfrac{a_k}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2\dots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

## XIV.5. Polinoame cu coeficienţi din R, Q, Z

Teoremã: Dacã $f\in R[x]$ admite pe $\alpha = a + ib$, $b\neq 0$ ca rãdãcinã atunci el admite ca rãdãcinã şi pe $\overline{\alpha} = a - ib$, iar $\alpha$ şi $\overline{\alpha}$ au acelaşi ordin, de mutiplicitate.

Teoremã: Dacã un polinom $f\in Q[x]$ admite pe $\alpha = a + b\sqrt{d}$ $(a,b\in Q,\ b\neq 0,\ d\in R\setminus Q)$ ca rãdãcinã, atunci el admite şi pe $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{d}$, iar $\alpha$ şi $\overline{\alpha}$ au acelaşi ordin, de mutiplicitate.

Teoremã: Dacã un polinom $f\in Z[x]$, grad $f\geq 1$, admite o rãdãcinã $\alpha = \dfrac{p}{2}\in Q$, $(p,q) = 1$ atunci $p \mid a_n$ şi $q \mid a_0$.

În particular dacã $f\in Z[x]$ are rãdãcina $\alpha = p\in Z$ atunci $p \mid a_n$.

# XV. Permutãri, matrici, determinanţi

## XV.1. Permutãri

Definiţie XV.1.1. ***Fie A={1,2,…n},*** φ ***se numeşte*** **<u>permutare de gradul</u>** <u>n</u> ***daacã*** **φ:A→*A*** ***şi*** **φ *bijectivã***.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$S_n$ – mulţimea permutãrilor de grad *n*; card $S_n$ = n!

$1_A = e$, permutarea identicã $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$

***<u>Compunerea permutãrilor</u>***

Fie $\sigma,\tau \in S_n$ atunci $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(\tau(1)) & \varphi(\tau(2)) & ... & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} \in S_n$

***<u>Transpoziţii</u>***

Definiţia XV.1.2. ***Fie i,j*∈A, *i≠j,*** $\tau_{ij} \in S_n$, $\tau_{ij}$ ***se numeşte transpoziţie dacã:***

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} \mathrm{j, daca\ k = i} \\ \mathrm{i, daca\ k = j} \\ \mathrm{k, daca\ k \neq i, j} \end{cases} \qquad \tau_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & k & ... & j & ... & n \\ 1 & 2 & ... & j & ... & k & ... & i & ... & n \end{pmatrix}$$

Observaţii: 1. $(\tau_{ij})^{-1} = \tau_{ij}$;

2. Numãrul transpoziţiilor de grad *n* este $C_n^2$

***<u>Signatura (semnul) unei permutãri</u>***

Definiţia XV.1.3. ***Fie (i,j)*∈AxA, *i<j, (i,j) se numeşte*** ***<u>inversiune</u> a lui*** φ ***dacă*** **φ(j)<φ(i),** ***m*(φ) *numãrul inversiunilor lui*** **φ:** $0 \le m(\varphi) \le C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

$\varepsilon(\varphi) = (-1)^{m(\varphi)}$ se numeşte ***<u>signatura</u>*** lui φ.

Observaţii: 1. Permutarea φ se numeşte ***parã*** dacã ε(φ) = 1, respectiv ***imparã*** dacã ε(φ) = - 1;

2. Orice transpoziţie este imparã;

3. $\varepsilon(\varphi) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\varphi(i) - \varphi(j)}{i - j}$;

4. $\varepsilon(\varphi \circ \sigma) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\sigma)$.

## XV.2. Matrici

Definiţia XV.2.1. Fie M = {1,2,…m} şi N = {1,2,…n}. O aplicaţie A:MxN→**C** $A(i,j)=a_{ij}$ se numeşte matrice de tipul (m,n): cu *m* linii şi *n* coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şi notãm $M_{m,n}$(**C**) mulţimea matricelor de tipul (m,n) cu elemente numere complexe.

Definiţia XV.2.2. ***Dacã** $m=n$ **atunci matricea se numeşte <u>pãtraticã de ordinul</u>** $n$**, iar mulţimea lor se noteazã** $M_n(\mathbf{C})$.*

Definiţia XV.2.3. ***Douã matrici** $A,B\in M_{m,n}(C)$ **sunt egale dacã şi numai dacã** $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall(i,j)\in MxN$.*

Operaţii cu matrici:

***<u>1. Adunarea</u>***

Fie $A,B\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ atunci $C = A + B\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ unde $c_{ij}=a_{ij} + b_{ij}$ $\forall$ $(i,j)\in MxN$ este suma lor.

*Proprietãţi* $\forall A,B,C\in M_{m,n}(\mathbf{C})$:

1. A+B = B+A (comutativitate);
2. (A+B)+C = A+(B+C) (asociativitate);
3. A+0 = 0+A = A (elementul neutru este matricea nula 0);
4. A+(-A) = (-A)+A = 0 (opusul lui A este –A).

***<u>2. Înmulţirea cu scalari</u>***

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $\lambda\in\mathbf{C}$ atunci $B=\lambda A\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ unde $b_{ij}=\lambda_{ij}$ $\forall(i,j)\in MxN$ este produsul matricei A cu scalarul $\lambda$.

*Proprietãţi* $\forall A,B\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$.

1. $1\cdot A = A$;
2. $\lambda\cdot A = A\cdot\lambda$;
3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu (\lambda A)$.

***<u>3. Transpusa unei matrici</u>***

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ atunci ${}^tA\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ unde ${}^ta_{ij} = a_{ji}$, $\forall(i,j)\in MxN$

***<u>4. Înmulţirea matricelor</u>***

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $B\in M_{n,p}(\mathbf{C})$ atunci $C=A\cdot B\in M_{m,p}(\mathbf{C})$ unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $\forall(i,j)\in MxN$ este produsul lor

*Proprietãţi:*

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (asociativitate);
2. $A\cdot I_n = I_n\cdot A$ (element neutru-matricea unitate) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$
3. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
4. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

## XV.3. Determinanţi

Fie $M_n(\mathbf{C})$ – mulţimea matricilor pãtrate de ordin $n$ cu elemente din $\mathbf{C}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$, A∈$M_n$(**C**)

Definiţia XV.3.1. ***Se numeşte <u>determinantul matricii A</u>, numãrul***

det A = $\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{vmatrix}$

det A = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ unde $A_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{ij}$ din matricea $A$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j-1} & a_{1j+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j-1} & a_{2j+1} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i-11} & a_{i-12} & ... & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & ... & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & ... & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & ... & a_{i+1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj-1} & a_{nj+1} & ... & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Dacã C = AB, atunci det $C$ = det $A$ det $B$ (A,B,C∈$M_n$(**C**))

***Determinantul de ordinul 2***:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

***Determinantul de ordinul 3:***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

## XV.4. Inversa unei matrici

Fie A∈$M_n$(**C**), dacã det $A$≠0 existã $A^{-1}$∈$M_n$(**C**) astfel încât $AA^{-1} = I_n$, $I_n$∈$M_n$(**C**), $I_n$ – matricea unitate: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

# XVI. Sisteme lineare

## XVI.1. Notaţii:

$a_{ij}$ – coeficienţi, $x_I$ – necunoscute, $b_i$ – termeni liberi;

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$ , *m* – ecuaţii, *n* – necunoscute;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_n \end{pmatrix},$$

*r* – rangul matricii A = rangul sistemului

## XVI.2. Compatibilitatea

Sistemul (S) este ***compatibil determinat*** dacã:

1. r = m = n (sistem de tip Cramer) şi det A = Δ ≠ 0, atunci $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, unde

$$\Delta_i=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. r = n < m şi rang $\overline{A}$= r.

Sistemul (S) este ***incompatibil*** dacã r ≤ min (m,n) şi rang $\overline{A}$ = r + 1.

## XVI.3. Sisteme omogene ($b_i$ = 0)

1. Sunt ***compatibile determinate*** ($x_1 = x_2 = … = x_n = 0$) dacã r = n;
2. Sunt ***compatibile nedeterminate*** dacã r < n.

# XVII. Structuri algebrice

## XVII.1. Monoid

Fie (M,*), $M\times M\to M$, $(x,y)\to x*y$, M-nevidã.

***Axiomele monoidului***:

**M1**. $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in M$ (asociativitatea);

**M2.** $\exists$ $e\in M$ astfel încât $x*e = e*x = x$ $\forall x\in M$ (*e* element neutru);

dacã **M3.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in M$ monidul este comutativ.

Ex: 1. (N,+), (N,·) sunt monoizi comutativi;

2. (F(E),∘) monoid necomutativ (F(E) este mulţimea funcţiilor $f:E\to E$, E – nevidã, ∘ – compunerea funcţiilor).

## XVII.2. Grup

Fie (G,*), $G\times G\to G$, $(x,y)\to x*y$, G-nevidã.

***Axiomele grupului:***

**G1.** $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in G$(asociativitatea);

**G2.** $\exists$ $e\in G$ astfel încât $x*e = e*x = x$ $\forall x\in G$ (*e* element neutru);

**G3.** $\forall$ $x\in G$ $\exists$ $x'\in G$ astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (x' simetricul lui x);

dacã **G4.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in G$ grupul este comutativ (sau abelian).

Ex: 1. (Z,+), (Q,+), (R,+), (C,+) – grupuri comutative;

2. $(R_n,\oplus)$ – grupul resturilor modulo *n*, comutativ;

3. $(M_n(Z),+)$ – grupul matricilor pãtrate de ordin *n* cu elemente din Z;

4. (K, ∘) – grupul lui Klein (al simetriilor faţã de sistemul de coordonate), comutativ;

5. $(\sigma_n, \circ)$ – grupul simetric de grad *n* (al permutãrilor de *n* elemente) nu este comutativ;

Definiţia XVII.2.1. ***Fie (G,*) grup, H⊂G, H este <u>subgrup</u> dacã*** $\forall$ $x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ ***şi*** $\forall$ $x\in H \Rightarrow x'\in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)***;

Fie grupurile $(G_1,\perp)$, $(G_2,\Delta)$:

Definiţia XVII.2.2. $f:G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>morfism de grupuri</u> dacã*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia XVII.2.3. $f:G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>izomorfism de grupuri</u> dacã f este bijectivã şi*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia XVII.2.4. $f:G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>automorfism (endomorfism)</u> al grupului*** $G_1$***, dacã f este un izomorfism (morfism).***

## XVII.3. Inel

Fie (A,+,•), $A\times A\to A$, $(x,y)\to x+y$ şi $A\times A\to A$, $(x,y)\to x\bullet y$, A nevidã;

Definiţia XVII.3.1. (A,+,•) ***este <u>inel</u> dacã:***

**G.** (A,+) este grup abelian;

**M.** (A,•) este monoid şi

**D.** • este distributivã faţã de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet y + y\bullet z$

$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z, \forall x,y,z\in A$

dacã **C.** $x\bullet y = y\bullet x$ $\forall x,y\in A$, inelul este comutativ.

Exemple de inele:

1. $(Z,+,\cdot)$ – inelul numerelor întregi;
2. $(Z[i],+,\cdot)$ – inelul întregilor lui Gauss, $Z[i] = \{z = a + bi \mid a,b\in Z\}$
3. $(R_n,\oplus,\otimes)$ – inelul resturilor modulo *n*;
4. $(M_n(A),+,\cdot)$ – inelul matricelor pãtratice (cu elemente din inelul *A*);
5. $(Z_n,+,\cdot)$ – inelul claselor de resturi modulo *n*.

Fie inelele $(A,\perp,*)$ şi $(A',\Delta,\circ)$:

Definiţia XVII.3.1. $f:A\to A'$ ***se numeşte <u>izomorfism de inele</u> dacã f este bijectivã şi*** $f(x\perp y) = f(x)\Delta f(y)$, $f(x*y) = f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in A$.

Definiţia XVII.3.2. $(A,+,\bullet)$ ***este <u>inel fãrã divizori ai lui zero</u> dacã $x\neq 0$, $y\neq 0$ implicã $x\bullet y\neq 0$.***

Definiţia XVII.3.3. ***Un inel comutativ cu cel puţin douã elemente şi fãrã divizori ai lui zero se numeşte <u>domeniu integritate</u>.***

Definiţia XVII.3.4. ***Dacã $(A,+,\cdot)$ este inel, atunci $(A[X],+,\cdot)$ este <u>inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienţi în A</u>.***

$f\in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ este forma algebricã a unui polinom de nedeterminatã *X* cu coeficienţi în *A*:

- dacã $a_n\neq 0$, grad $f = n$ ($a_n$ – coeficient dominant);
- dacã $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, $f = 0$ (polinom nul), grad $0 = -\infty$.

*Proprietãţi*: 1. grad $(f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$;

2. grad $f\cdot g \leq$ grad $f$ + grad $g$.

Teoremã. Dacã *A* este domeniu de integritate atunci *A[X]* este domeniu de integritate şi grad $f\cdot g$ = grad $f$ + grad $g$, $\forall f,g\in A[X]$.

## XVII.4. Corp

Fie $(K,+,\bullet)$, $K\times K\to K$, $(x,y)\to x+y$ şi $K\times K\to k$, $(x,y)\to x\bullet y$, K – nevidã.

Definiţia XVII.4.1. ***$(K,+,\bullet)$ este <u>corp</u> dacã $(K,+,\bullet)$ este inel, $0\neq 1$ şi*** $\forall x\in K$, $x\neq 0 \Rightarrow \exists\, x^{-1}\in K$, ***astfel încât $x\bullet x^{-1} = x^{-1}\bullet x = 1$.***

Dacã $x\bullet y = y\bullet x$ $\forall x,y\in K$, corpul este comutativ.

Exemple de corpuri:

1. $(Q,+,\cdot)$ – corpul numerelor raţionale;
2. $(R,+,\cdot)$ – corpul numerelor reale;
3. $(C,+,\cdot)$ – corpul numerelor complexe;
4. $(Q(\sqrt{d}),+,\cdot)$ – corpul numerelor pãtratice ($d\in Z$, d – liber de pãtrate);
5. $(Z_p,+,\cdot)$ – corpul claselor de resturi modulo *p* ($p\in N^*$, $p>1$, *p* – numãr prim).

Definiţia XVII.4.2. ***Fie corpurile $(K,\perp,*)$ şi $(K',\Delta,\circ)$, $f:K\to K'$ este izomorfism de corpuri dacã f este bijectivã,*** $f(x\perp y) = f(x)\,\Delta\, f(y)$, $f(x*y) = f(x)\circ f(y)$ $\forall x,y\in$ **R.**

**Teorema împãrţirii cu rest** în mulţimea K[X], K corp comutativ şi $g \in K[X]$, $g \neq 0$: $\forall f \in K[X]$, existã polinoamele $q, r \in K[X]$, unic determinate astfel încât $f = q \cdot g + r$, grad r < grad g.

## XVII.5. Caz general

Fie pe **R** operaţia $x \circ y = axy - abx - aby + b(ab+1)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. Se cere:

1. Să se arate că, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$;
2. Să se arate că $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$;
3. În cazul alegerii $a > 0$ considerând $H = (b; +\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând $H = (-\infty; b)$, să se arate că, $\forall x, y \in H$, are loc $x \circ y \in H$;
4. În cazul alegerii $a > 0$ considerând $H = (b; +\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând $H = (-\infty; b)$, să se arate că $f: H \to \mathbf{R}_+^*$, $f(t) = a(t-b)$, este izomorfism de la $(H; \circ)$ la $(\mathbf{R}_+^*; \cdot)$;
5. Să se arate că, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, are loc $x \circ y = y \circ x$;
6. Să se arate că $\exists$ $x, y \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ încât $x \circ y \in \mathbf{Z}$;
7. Să se arate că $\exists$ $x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ încât $x \circ y \in \mathbf{Z}$;
8. Să se arate că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, are loc $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;
9. Să se arate că $\exists e \in \mathbf{R}$ încât, $\forall x \in \mathbf{R}$, verifică $x \circ e = e \circ x = x$;
10. Să se arate că, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{b\}$, $\exists x' \in \mathbf{R} \setminus \{b\}$ încât $x \circ x' = x' \circ x = \frac{1}{a} + b$;
11. În cazul alegerii $a > 0$, considerând $H = (b; +\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$, considerând $H = (-\infty; b)$, să se determine ce fel de structură este $(H, \circ)$;
12. Să se rezolve ecuaţia $x \circ \left(\frac{1}{a} + b\right) \circ x = a \cdot A \cdot B + C$, $x \in (0, +\infty)$, unde $A =$ "an" $- b - c$, $B =$ "an" $- b + c$, $C = ac^2 + b$, $\forall c \in \mathbf{Z}$;
13. Să se arate că $\exists \theta \in \mathbf{R}$ încât $\forall x \in \mathbf{R}$ verifică $x \circ \theta = \theta \circ x = \theta$;
14. Să se determine valoarea expresiei $E = (-\text{"an"}) \circ (-\text{"an"}+1) \circ \ldots \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ (\text{"an"}-1) \circ (\text{"an"})$;
15. Să se arate că, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, $x \circ y \circ z = a^2(x-b)(y-b)(z-b)+b$;
16. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(\text{"an"}x^2 - x + b) \circ (x^2 - \text{"an"}x + b) = b$;
17. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(b - |b| + d^x) \circ (\log_d x) \circ (b - 1 + C^x_{\text{"an"}}) = b$, $\forall d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$;
18. Să se arate că $\underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{de\, n\, ori} = a^{n-1} \cdot (A-b)^n + b$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $A$ fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”;
19. Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea $(b+1) \circ (b+2) \circ (b+3) \circ \ldots \circ n \geq$ "an";
20. Să se rezolve în **R** ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = a^4 \cdot A^5 + b$, $A$ fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”.

**Rezolvare**

1. Se verifică imediat, prin calcul direct:
   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b=a(xy-bx-by+b2\ )+b=axy-abx-aby+b(ab+1)$
2. Justificarea bijectivităţii funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu
   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b \Rightarrow x\circ y-b=a(x-b)(y-b)\,|\cdot a \Rightarrow a(x\circ y-b)=a(x-b)\cdot a(y-b)$
   este chiar cerinţa, respectiv $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$.
3. Fie $x\in H \Rightarrow (x-b)\geq 0$ şi $y\in H \Rightarrow (y-b)\geq 0$ şi atunci $(x-b)(y-b)\geq 0$, dar cum $a$ este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa $a(x-b)(y-b)+b=x\circ y\in H$ este justificată.
4. Variaţia funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, studiată anterior, arată imediat că restricţia $f:H\to\mathbf{R}^*_+$ este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că $H$ este parte stabilă a structurii $(\mathbf{R};\circ)$ (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.
5. Comutativitatea este imediată
6. Luând $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi alegând $x-b=\frac{2}{3}$ şi $y-b=\frac{3}{2}$, deoarece $b\in\mathbf{Z}$, evident $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$.
7. Pe aceeaşi idee, alegând $x-b=\sqrt{2}-1$ şi $y-b=\sqrt{2}+1$, se va obţine $x,y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.
8. Asociativitatea se demonstrează prin calcul
9. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi $x\circ e=x$ conduce la $a(x-b)(e-b)+b=x$ din care se obţine
   $e=\frac{1}{a}+b$
10. Dubla egalitate $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{a}+b$ se reduce de fapt la $x\circ x'=\frac{1}{a}+b$ care se exprimă în forma $a(x-b)(x'-b)+b=\frac{1}{a}+b$, obţinând $x'=b+\frac{1}{a^2(x-b)}$ care este în mod evident din $\mathbf{R}\setminus\{b\}$, justificând afirmaţia din ***item 10***.
11. Structura $(H;\circ)$ se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.
12. Cum $e=\frac{1}{a}+b,\ x\circ\left(\frac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$ devine $x\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, adică $a(x-b)^2+b=a\cdot(\text{"an"}-b-c)\times(\text{"an"}-b+c)+ac^2+b$. Observând diferenţa de pătrate, din $a(x-b)^2=a\cdot[(\text{"an"}-b)^2-c^2]+ac^2$ se obţine $(x-b)^2=(\text{"an"}-b)^2$ şi în final $x=\text{"an"}$, în condiţia alegerii evidente $2b-\text{"an"}<0<\text{"an"}-b$.
13. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ se observă $q=b$ cu proprietatea menţionată, $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$.
14. Cum $\theta=b$ se regăseşte printre „factorii” ce compun expresia $E$ , răspunsul la este $E=\theta=b$.

15.Se obţine prin calcul folosind $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$.

16.Ecuaţia $("an"x^2-x+b)\circ(x^2-"an"x+b)=b$ devine $("an"x^2-x)(x^2-"an"x)=0$ şi răspunsul va fi $x\in\left\{0;"an";\frac{1}{"an"}\right\}$.

17.Ecuaţia devine $(d^x-|b|)(\log_d x-b)\left(C_{"an"}^{x}-1\right)=0$, deci $x\in\left\{\log_d|b|;d^b;0;"an"\right\}$.

18.Izomorfismul conduce imediat la $x_1\circ x_2\circ...\circ x_n=a^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(x_k-b\right)+b$ şi astfel identitatea $\underbrace{A\circ A\circ...\circ A}_{de\ n\ ori}=a^{n-1}\left(A-b\right)^n+b$ este evidentă.

19. $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ...\circ n=a^{n-b-1}\cdot(n-b)!+b$ şi astfel se determină imediat răspunsul.

20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a^4\cdot(x-b)^5+b$ şi $a^4\cdot(x-b)^5+b=a^4\cdot A^5+b$ soluţia $x=A+b$.

**GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE**

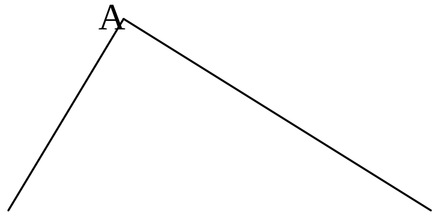
## Notaţii:

- lugimea laturilor triunghiului ABC, AB = c, BC = a, CA = b;
- lungimile segmentelor importante în triunghi:
  - AD = $h_a$ (AD⊥BC, $h_a$ lugimea înãlţimii din A, D∈BC);
  - AD = $m_a$ (BD=BC, $m_a$ lugimea medianei din A, D∈(BC));
  - AD = $b_a$ (∠BAD =∠CAD, $b_a$ lugimea bisectoarei din A, D∈(BC));
- $\frac{a+b+c}{2}$ = p (p – semiperimetrul triunghiului ABC);
- $A_{ABC}$ – aria triunghiului ABC, notatã şi S;
- R – raza cercului circumscris unui poligon;
- r – raza cercului înscris într–un poligon;
- $l_n$ – latura poligonului regulat cu *n* laturi;
- $a_n$ – apotema poligonului regulat cu *n* laturi;
- P – perimetrul poligonului;
- $A_{lat}$ – aria lateralã (prismã, piramidã, trunchi de piramidã);
- $A_{tot}$ – aria totalã, notatã şi A;
- V – volumul.

# I. Triunghiul

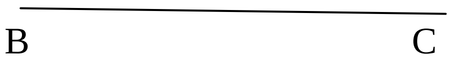
***Inegalitãţi gemetrice***:

1. m(∠MBA) > m(∠A), m(∠MBA) > m(∠C), ∠MBA este unghi exterior;
2. a+b > c, b+c > a, a+c > b
3. a >│b–c│, b >│c–a│, c >│a–b│



4. $m_a < \frac{b+c}{2}$
5. $p < m_a + m_b + m_c < P$

***Teorema bisectoarei*** ($\angle BAD \equiv \angle DAC$)




$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}; BD = \frac{a \cdot c}{b+c}; DC = \frac{a \cdot b}{b+c}$$

Observaţii:

1. Centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de intersecţie al mediatoarelor;
2. Centrul cercului înscris într–un triunghi este punctul de intersecţie al bisectoarelor;
3. Centrul de greutate al triunghiului este punctul de intersecţie al medianelor.
4. Ortocentrul triunghiului este punctul de intersecţie al înălţimilor.

# II. Poligoane convexe

Suma $S_n$ a mãsurilor unghiurilor unui poligon convex cu *n* laturi:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°$$

Poligonul regulat este inscriptibil într–un cerc şi poate fi circumscris unui alt cerc.

# III. Relaţii metrice în triunghi

## III.1. Triunghiul dreptunghic

ABC ($m(\angle A) = 90°$, $AD \perp BC$)

1. Teorema lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$;
2. Teorema catetei: $b^2 = a \cdot CD$, $c^2 = a \cdot BD$;
3. Teorema înãlţimii: $h_a^2 = BD \cdot DC$;
4. $h_a = \frac{b \cdot c}{2}, h_b = b, h_c = c$;
5. $m_a = \frac{a}{2}, m_b^2 = a^2 - \frac{3}{4}b^2, m_c^2 = a^2 - \frac{3}{4}c^2$;
6. $b_a = \frac{b \cdot c}{b+c}\sqrt{2}; b_b = c \cdot \sqrt{\frac{2a}{a+c}}; b_c = b \cdot \sqrt{\frac{2a}{a+c}}$;
7. $A_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2}$;
8. $R = \frac{a}{2}$;
9. $r = \frac{b \cdot c}{a+b+c}$;
10. Relaţii exprimate prin funcţii trigonometrice:

    b = a·sin *B*, b = a·cos *C*, b = c·tg *B*, b = c·ctg *C*.

## III.2. Triunghiul dreptunghic ABC (AD⊥BC)

1. $h_a = m_a = b_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
2. $A_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
3. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
4. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

## III.3. Triunghiul oarecare ABC

1. Teorema lui Pitagora generalizatã:
   a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2a\cdot BD$, dacã $m(\angle B)<90°$ ;
   b) $b^2 = a^2 + c^2 + 2a\cdot BD$, dacã $m(\angle B)>90°$ ;
2. Relaţiile lui Steward $O\in(BC)$:
   $b^2\cdot BO + c^2\cdot CO - a^2\cdot AO = a\cdot BO\cdot CO$;
3. $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$;
4. $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
5. $b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}$;
6. $A_{ABC} = \frac{a\cdot h_a}{2} = S$;
7. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
8. $R = \frac{abc}{4S}$;
9. $r = \frac{S}{p}$.

## III.4. Relaţii exprimate prin funcţii trigonometrice

1. Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$;
2. Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A; \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;
3. Teorema tangentelor: $tg\frac{A-B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}$;
4. $S = \frac{ab\sin C}{2}, S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}, S = p(p-a)tg\frac{A}{2}, S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$;

5. $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

6. $h_a = 2R\sin B\sin C$;

7. $m_a^2 = R^2(\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C)$;

8. $b_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$;

9. $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;

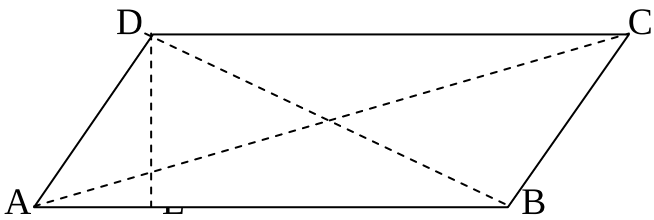
10. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

11. $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

# IV. Patrulatere

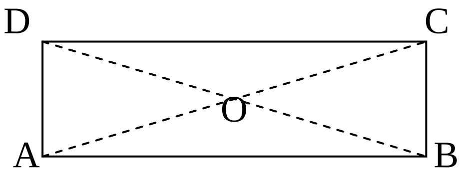
## IV.1. Paralelogramul

ABCD (AB || CD, BC || AD, DE⊥AB)
AC∩BD = {O}
OA = OC, OB = OD
$A_{ABCD}$ = AB·DE
$A_{ABCD}$ = AB·AD·sin *A*.



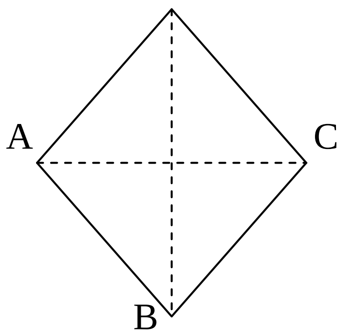

## IV.2. Dreptunghiul

ABCD (AB || CD, BC || AD, ∠A = 90°)
AC = BD
$A_{ABCD}$ = AB·AD



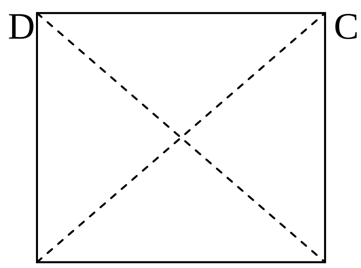

## IV.3. Rombul

ABCD (AB || CD, BC || AD, AB = BC)
AC = $d_1$, BD = $d_2$
AB = a
AC⊥BD
$A_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$




## IV.4. Pãtratul

ABCD (AB || CD, BC || AD, AB = AC
∠A = 90°, AB = a, AC = d)
AC = BD

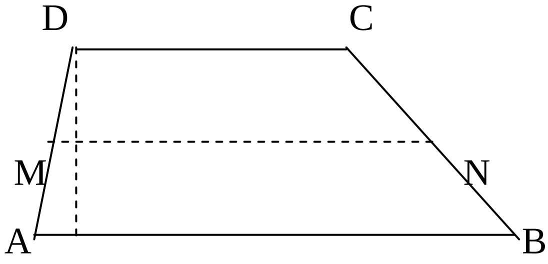


AC⊥BD O

d = a$\sqrt{2}$

$A_{ABCD}$ = $a^2$. A B

## IV.5. Trapezul




ABCD (AB || CD, AB = *B*, DC = *b*

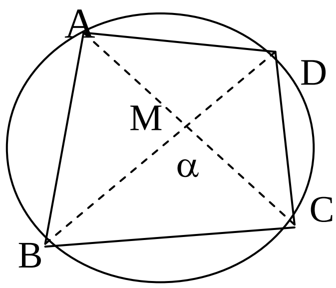
MN – linie mijlocie) M

MN = $\dfrac{B+b}{2}$

$A_{ABCD}$ = $\dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \text{MN}\cdot h$

# V. Poligoane înscrise în cerc

## V.1. Patrulaterul înscris în cerc




∠BAD + ∠BCD = 180°;

∠BAC ≡ ∠BDC;

***Teorema lui Ptolomeu***

AB·DC + AD·BC = AC·BD

$A_{ABCD}$ = ½ AC·BD·sin α

## V.2. Poligoane regulate înscrise în cercul de razã *R*

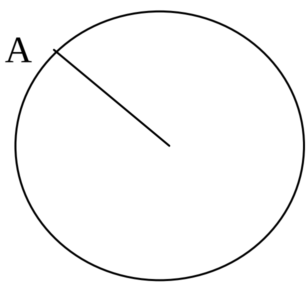
1. Triunghiul echilateral: $l_3 = R\sqrt{3}, a_3 = \dfrac{R}{2}, S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$;
2. Pãtratul: $l_4 = R\sqrt{2}, a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}, S = 2R^2$;
3. Hexagonul regulat: $l_6 = R, a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}, S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$;
4. Poligonul regulat cu *n* laturi: $l_n = 2R\sin\dfrac{\pi}{n}, a_n = R\cos\dfrac{\pi}{n}, S = \dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{n} = p\cdot a_n$

unde $p = \dfrac{n\cdot l_n}{2}$.

# VI. Cercul

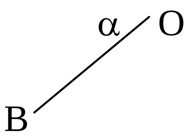
***Lungimi şi arii***: $l_{cerc} = 2\pi R$, $A_{cerc} = \pi R^2$;

$l_{arcAB} = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$; α – mãsura în grade;



$A_{sectorAB} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{180}$

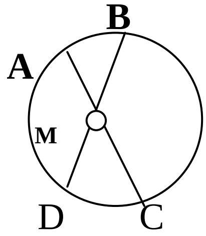
$\mu(\angle AOB) = \dfrac{\alpha \cdot \pi}{180}$ (μ – mãsura în radiani)




***Unghi cu vârful în interiorul cercului:***

$m(\angle AOB) = m(\overset{\frown}{AB})$

$m(\angle AMB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})}{2}$

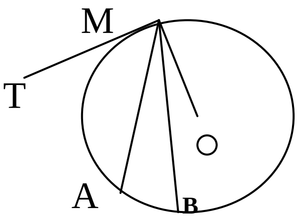



***Unghi cu vârful pe cerc***

$OM \perp MT$

$m(\angle AMB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$

$m(\angle AMT) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AM})}{2}$

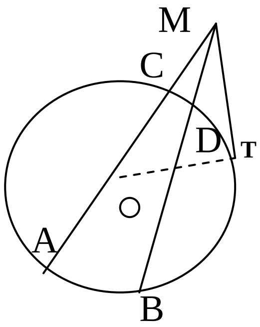



***Unghi cu vârful în exteriorul cercului***

$OT \perp MT$

$m(\angle AMB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) - m(\overset{\frown}{CD})}{2}$

$m(\angle AMB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BT}) - m(\overset{\frown}{DT})}{2}$

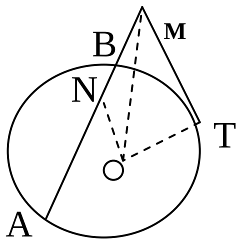



***Puterea unui punct faţã de un cerc***

$OT \perp MT$

$\rho(M) = MA \cdot MB = OM^2 - r^2 = MT^2$

$\rho(N) = NA \cdot NB = r^2 - ON^2$




# VII. Complemente de geometrie planã

***<u>Triunghiul ortic</u> este triunghiul determinat de picioarele înãlţimilor unui triunghi; dintre toate triunghiurile cu vârfurile respectiv pe laturile unui triunghi (sau pe prelungiri), triunghiul ortic are cel mai mic perimetru.***

***<u>Ceviana</u> este dreapta determinatã de vârful unui triunghi şi un punct al laturii opuse.***

***<u>Teorema lui Ceva</u>: Cevienele AM, BN, CP ale triunghiului ABC sunt concurente dacã şi numai dacã*** $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1.$

***<u>Teorema lui Menelaus</u>:* Pe dreptele BC, CA, AB, determinate de laturile triunghiului ABC, se considerã punctele M, N respectiv P situate douã dintre ele pe laturile triunghiului şi unul pe prelungirea unei laturi, sau toate trei pe prelungiri de laturi. Punctele M, N, P sunt colineare dacã şi numai dacã:** $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1.$

***<u>Dreapta lui Euler</u>:* Într–un triunghi oarecare, punctele H, O şi G (ortocentrul, centrul cercului circumscris şi centrul de greutate) sunt colineare.**

***<u>Dreapta lui Simson:</u>* Proiecţiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, pe dreptele suport ale laturilor acestuia, sunt colineare.**

***<u>Cercul exînscris:</u>* unui triunghi este tangent la o laturã a triunghiului şi la prelungirile celorlalte douã laturi; centrul cercului exînscris este intersecţia bisectoarei unui unghi interior cu bisectoarele celorlalte douã unghiuri exterioare.**

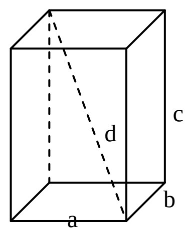
***<u>Cercul lui Euler</u>* (cercul celor nouã puncte): picioarele înãlţimilor unui triunghi, mijloacele laturilor şi mijloacele segmentelor determinate de ortocentru şi vârfurile triunghiului sunt conciclice.**

# VIII. Poliedre

## VIII.1. Prisma

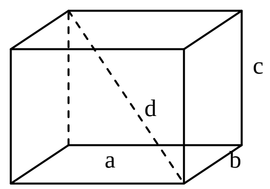
### 1. Paralelipipedul dreptunghic

$A_{lat} = 2(a + b)c$;
$A_{tot} = 2(ab + ac + bc)$;
$V = abc$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



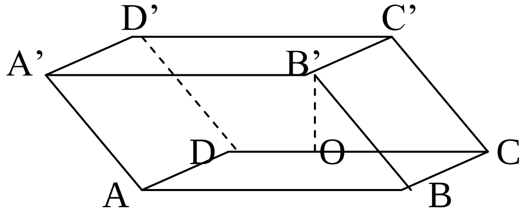

### 2. Cubul

(de laturã a = b = c)
$A = 6a^2$
$V = a^3$
$a = a\sqrt{3}$



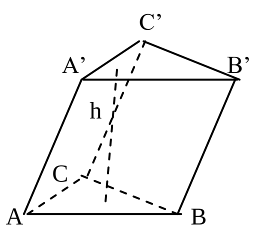

### 3. Paralelipipedul

$B'O \perp (ABC)$
$B'O = h$
$V = A_{ABCD}\cdot h$

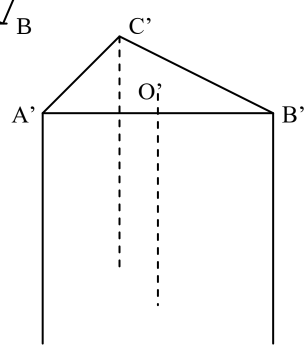



### 4. Prisma

(dreaptã sau oblicã, de înãlţime *h*)
$V = A_{bazei}\cdot h$

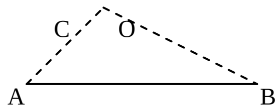



**Prisma triunghiularã regulatã**
(AB = a)
$A_{lat} = 3a\cdot h$



$$A_{tot} = 3a\cdot h + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$$

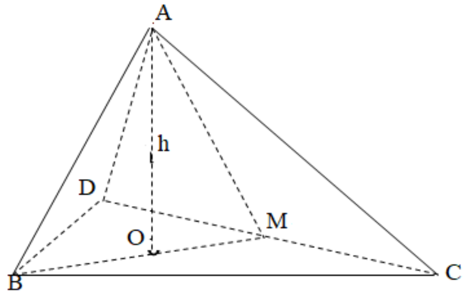



## VIII.2. Piramida

### 1. Tetraedrul regulat

(toate muchiile sunt congruente)

AO⊥(BCD), AM⊥DC)




$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}, AM = a$$

$$\sin A\hat{B}O = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin A\hat{M}O = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$A = a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

### 2. Tetraedul dreptunghic

(OA⊥OB⊥OC⊥OA,

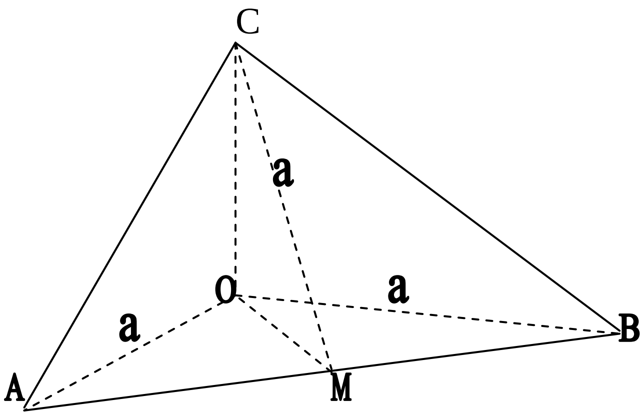
OA = OB = OC = a, CM⊥AB)

$$OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CM = \frac{a\sqrt{6}}{2}; AB = a\sqrt{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{tot} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

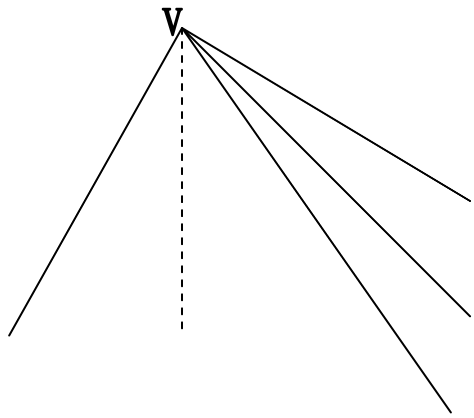
$$V = \frac{a^3}{6}$$




### 3. Piramida triunghiularã regulatã

(AB = AC = BC = A, VA = VB = VC

VM ⊥ BC, VM – apotemã)

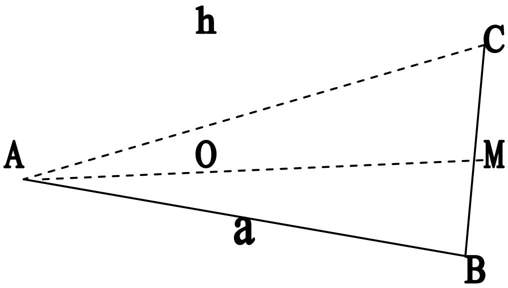


$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$$

$$A_{lat} = \frac{3a \cdot VM}{2}$$

$$A_{tot} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a \cdot VM}{2}$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{h}{3}$$



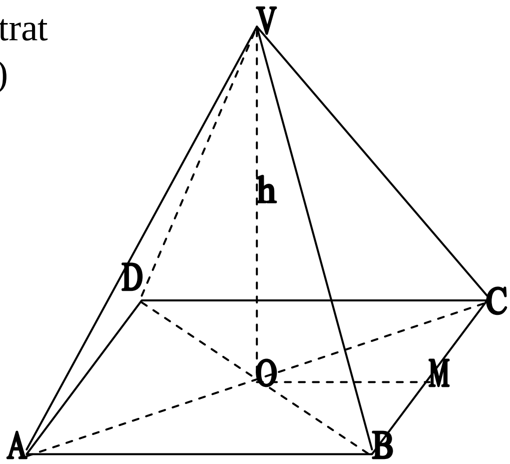

**Piramida patrulaterã regulatã** (ABCD–pãtrat de laturã $a$, VA = VB = VC = VD, VM⊥BC)

$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$A_{lat} = 2a \cdot VM$$

$$A_{tot} = a^2 + 2a \cdot VM$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$



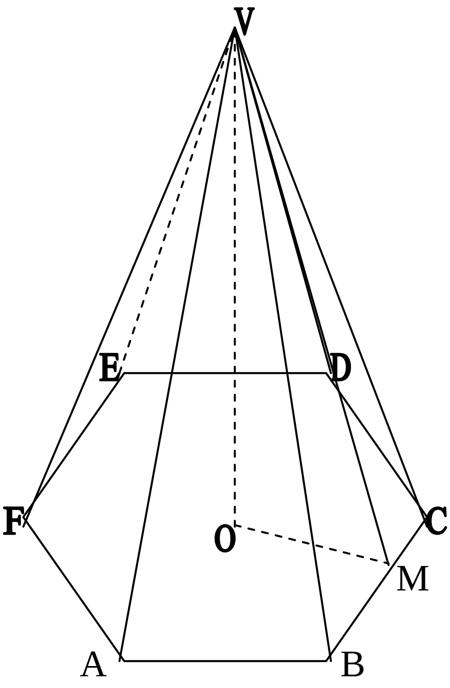

**4. Piramida hexagonalã regulatã**
(ABCDEF – hexagon regulat VM ⊥ BC, VA = VB = VC = VD = VE = VF = $a$)

$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

$$A_{lat} = 3a \cdot VM$$

$$A_{tot} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot VM$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}h}{2}$$




**5. Piramida regulatã**
(piciorul înãlţimii coincide cu centrul circumscris bazei):

$$A_{lat} = \frac{P_{bazei} \cdot apotema}{2}$$

$$A_{tot} = A_{bazei} + A_{lat}; V = \frac{A_{bazei} \cdot h}{3}$$

6. **Piramida** (de înãlţime *h*):

$$A_{tot} = A_{bazei} + A_{lat}; V = \frac{A_{bazei} \cdot h}{3}$$

## VIII.3. Trunchiul de piramidã

(*B* – aria bazei mari, *b* – aria bazei mici, *h* – înãlţimea)

1. **Trunchiul de piramidã oarecare**:

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b}$$

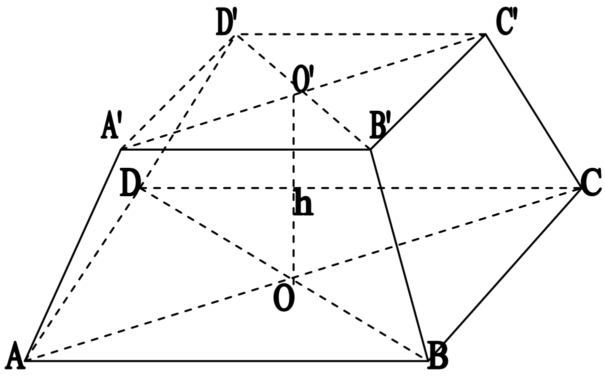
2. **Trunchiul de piramidã regulat**

*P* – perimetrul bazei mari,
*p* – perimetrul bazei mici,
$a_p$ – apotema

$$A_{lat} = \frac{(P+p)a_p}{2}$$

$$A_{tot} = B + b + \frac{(P+p)a_p}{2}$$

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$$




## VIII.4. Poliedrul regulat

Relaţia lui Euler: *v–m+f = 2*

(*v* – numal vârfurilor, *m* – numãrul muchiilor, *f* – numãrul feţelor)

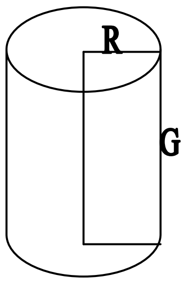
Tipurile de poliedre regulate:

- tetraedrul regulat: *f = 4, v = 4, m = 6;*
- cubul (hexaedru regulat): *f = 6, v = 8, m = 12;*
- octaedrul regulat: *f = 8, v = 6, m = 12;*
- dodecaedrul regulat: *f = 12, v = 20, m = 30;*
- icosaedrul regulat: *f = 20, v = 12, m = 30;*

# IX. Corpuri rotunde

Notaţii: $R$ – razã, $G$ – generatoare, $h$ – înãlţime

## IX.1. Cilindrul circular drept



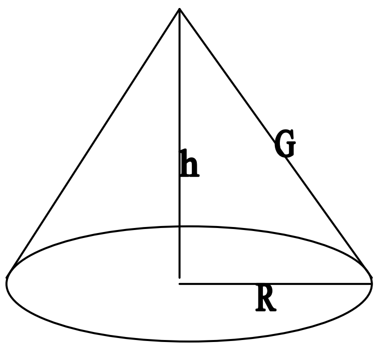

$h = G$

$A_{lat} = 2\pi RG$

$A_{tot} = 2\pi R(R + G)$

$V = \pi R^2 h$

## IX.2. Conul circular drept




$G^2 = h^2 + R^2$

$A_{lat} = \pi RG$

$A_{tot} = \pi R(R + G)$

$V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

## IX.3. Trunchiul de con

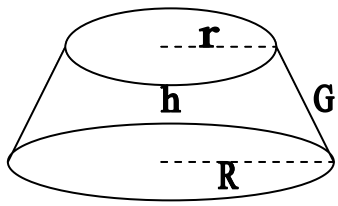
($r$ – raza bazei mici)

$G^2 = h^2 + (R - r)^2$

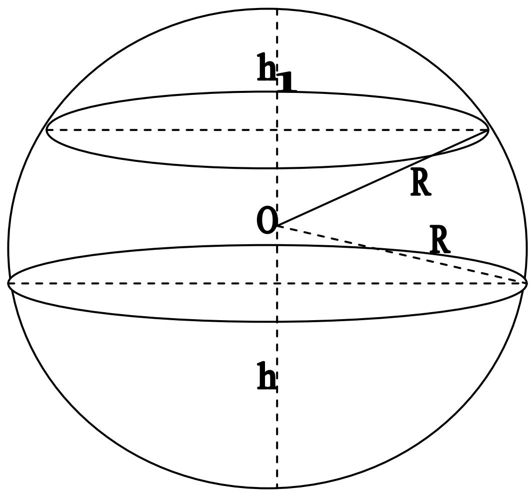
$A_{lat} = \pi G(R + r)$

$A_{tot} = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

$V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$




## IX.4. Sfera

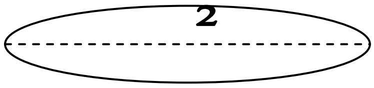



$A = 4\pi R^2$

$V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

$A_{calotei\,sferice} = 2\pi Rh_1$

$A_{zonei} = 2\pi Rh_2$

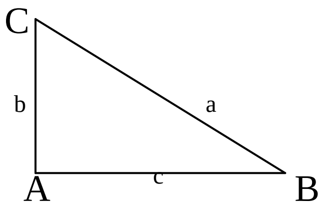



# X. Funcţii trigonometrice

## X.1. Definiţii în triunghiul dreptunghic

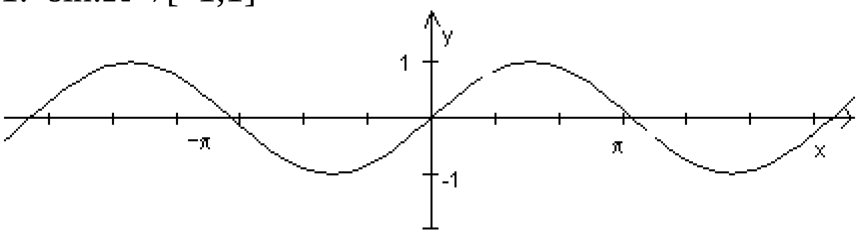
$\sin B = \dfrac{b}{a},\ \cos B = \dfrac{c}{a},\ tgB = \dfrac{b}{c}$

$ctgB = \dfrac{c}{b},\ \sin B = \cos C,\ tgB = ctgC$



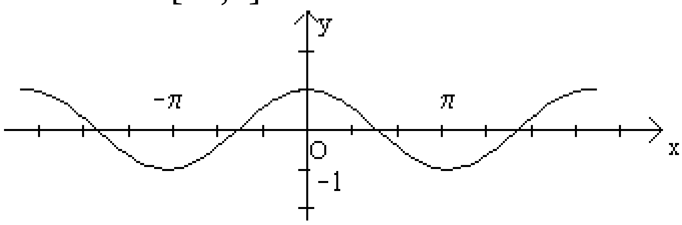

## X.2. Proprietãţile funcţiilor trigonometrice

1. sin:**R**→[–1,1]




sin(–x) = –sin x, sin(x + 2kπ) = sin x, (k∈**Z**)

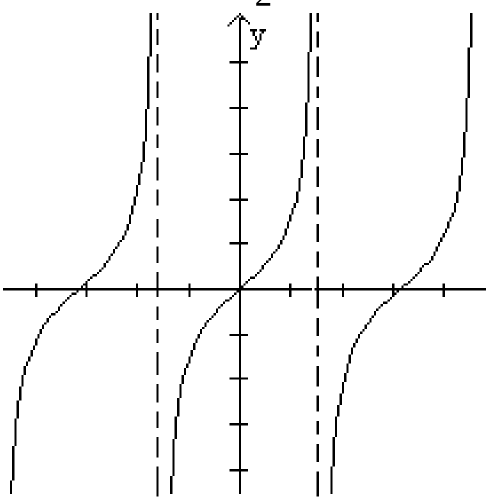
2. cos:R→[–1,1]

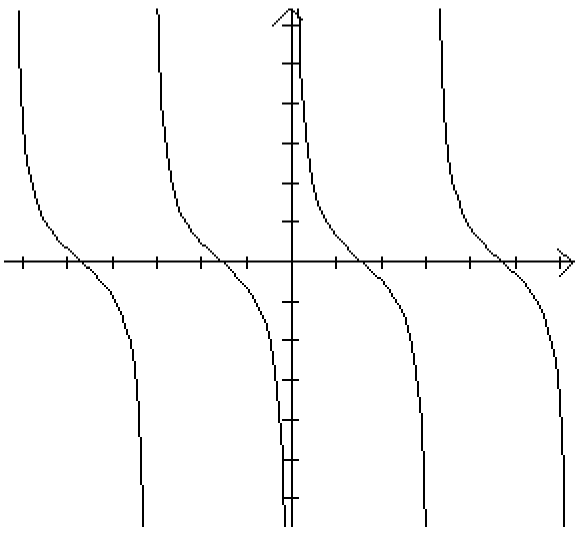



cos(–x) = cos x, cos (x + 2kπ) = cos x, (k∈**Z**)

3. tg:R\{(2k+1)$\dfrac{\pi}{2}$}→**R**

4. ctg:R\{kπ}→**R**



tg(–x) = –tg x

tg(x+kπ) = tg x, (k∈**Z**)

ctg(–x) = –ctg x

ctg(x + kπ) = ctg x, (k∈**Z**)

# XI. Formule trigonometrice

## XI.1. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale unui argument:

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$

   $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

2. $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

   $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}};\cos\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\ \ tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$

4. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

   $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;\ tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$

5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

   $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\ tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$

6. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

   $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;\ tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$

7. $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

   $\sin(2\pi-\alpha)=\cos\alpha;\ tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha$

## XI.2. Formule de adunare:

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$

## XI.3. Formule pentru multiplii de argument:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}; \cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\sin n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \cdot \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \cdot \sin^4\alpha - ...$$

$$\cos n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \cdot \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \cdot \sin^3\alpha + C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \cdot \sin^5\alpha - ...$$

## XI.4. Formule pentru jumãtãţi de argument:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

## XI.5. Sume, diferenţe şi produse:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}; tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

# XII. Inversarea funcţiilor trigonometrice

**XII.1.** arcsin:[–1.1]→$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$, arcsen ***y*** = ***x*** sin ***x*** = ***y***
arcsin (–x) = – arcsin x
**XII.2.** arcos:[–1,1]→[0,π], arcos (–x) = π – arcos x

**XII.3.** arctg:R→$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, arctg (–x) = –arctg x

**XII.4.** arctg:R→(0,π), arctg (–x) = π – arctg x

# XIII. Soluţiile ecuaţiilor trigonometrice simple

## XIII.1. Ecuaţii fundamentale

1.$\sin x=a, a\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{(-1)^k \arcsin a+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

2.$\cos x=a, a\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{\pm\arccos a+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

3.$tgx=a, a\in R\Rightarrow x\in\left\{arctga+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

4.$ctgx=a, a\in R\Rightarrow x\in\{accctga+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

## XIII.2. Tabele de valori:

| x / funcţia | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin *x* | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos *x* | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0 | –1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | |
| tg *x* | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | / | 0 | / | 0 |
| ctg *x* | / | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | / | 0 | / |

| x / funcţia | –1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arcsin *x* | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| arcos *x* | $\pi$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

| x / functia | $-\sqrt{3}$ | –1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arctg *x* | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| arcctg *x* | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

# XIV. Elemente de geometrie analiticã

## XIV.1. Segmente

1. Distanţa dintre douã puncte A($x_1$,$y_1$), B($x_2$,$y_2$): AB = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
2. Panta dreptei AB: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
3. Coordonatele (x,y) ale mijlocului segmentului AB: $x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$
4. Coordonatele punctului *M* care împarte segmentul (AB) în raportul *k:*
   $$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k}, y=\frac{y_1+ky_2}{2}$$

## XIV.2. Ecuaţia dreptei în plan

1. Drepte paralele cu axele de coordonate:
   (d):x = a (d || Oy), (d):y = a (d || Ox)

2. Dreapta determinatã de punctul $M_o(x_o,y_o)$ şi vectorul nul $\overline{a}(u,v):(d):r=\overline{r_o}+t\overline{a}$, $t\in$R, $\overline{r_o}$ –vectorul de poziţie a lui $M_o$; r–vectorul de poziţie a unui punct $M$ al dreptei $d$.

$$(d):\begin{cases}x=x_o+ut\\ y=y_o+vt\end{cases},\ t\in \mathrm{R},\ \text{ecuaţiile parametrice;}$$

3. Ecuaţia explicitã: y =mx + n (m∈**R***, n∈**R**, m – panta, n – ordonata la origine);

4. Ecuaţia prin tãieturi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,(a,b\in\mathbb{R}^*)$;

5. Ecuaţia dreptei de pantã $m$, prin punctul $M_o(x_o,y_o)$: $y-y_o=m(x-x_o)$, $(m\neq 0)$;

6. Ecuaţia dreptei determinatã de punctele $A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)\ \text{sau}$$

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

7. Ecuaţia generalã: ax + by + c = 0;

8. Aria triunghiului ABC ($A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$): $A_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta=\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix},\ \text{dacã } \Delta = 0 \text{ atunci A, B, C sunt colineare}$$

9. Poziţia relativã a dreptelor $(d_1)$ şi $(d_2)$:

$$(d_1):a_1x+b_1y+c_1=0\ \text{şi}\ (d_2):a_2x+b_2y+c_2=0$$

$d_1 = d_2$, dacã $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$d_1 \,||\, d_2$, dacã $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$;

$d_1 \neq d_2$ şi $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$, dacã $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

10. Distanţa de la punctul $M_o(x_o,y_o)$ la dreapta $(h): ax + by + c = 0$

$$d(M,h)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

11. Unghiul $\alpha$ determinat de dreptele:

$$(d_1):y=m_1x+n_1\ \text{şi}\ (d_2):y=m_2x+n_2$$

$$tg\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2},(m_1m_2\neq -1)$$

$d_1 \perp d_2$, dacã $m_1m_2 = -1$.

# XIV.3. Dreapta în spațiu

–Fie $\overrightarrow{AB} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}$. Numerele *l,m,n* se numesc parametrii directori ai direcției dreptei *d*.

–Un vector nenul $\vec{n}$ se numeste vector normal la planul *P* dacă un reprezentant al său are dreapta suport perpendiculară pe planul *P*.

1. Ecuația generală a planului: $ax + by + cz + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

2. Ecuația vectoriala a planului care trece prin $M_0$ și care este perpendicular pe $\vec{n}$ este $\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{n} = 0,$ unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct curent al planului iar $\vec{r_0}$ este vectorul de poziție al punctului $M_0$

3. Ecuația $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ se numește ecuația normală a planului. Vectorul $\vec{n} = (a,b,c)$ –vectorul normal la plan.

4. Două plane $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ si $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2$,

coincid dacă $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$;

paralele dacă $P_1 // P_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$.

5. Distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul

$P : ax + by + cz + d = 0$ este $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

6. Planele $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ si $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sunt perpendiculare $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

7. Ecuațiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\vec{v} = (l,m,n)$ sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm\ , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

8. Ecuațiile canonice ale dreptei determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul director $\vec{v} = (l,m,n)$ sunt $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

9. Ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de punctele

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ si $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt: $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$

10. Ecuațiile canonice ale dreptei determinată de doua puncte $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2)$ sunt $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

11. Ecuațiile dreptei sub forma generală.

Fie $P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Ecuațiile dreptei de intersecție a planelor $P_1$ si $P_2$ sunt: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$, unde

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2\neq 0.$$

12.Dacă $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ si $\varphi=\sphericalangle(d_1,d_2)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ atunci

$$\cos\varphi=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

13.Dacă $d_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $d_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ și $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ atunci

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

14.Dacă $P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ si $\varphi=\sphericalangle(P_1,P_2)$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ atunci $\cos\varphi=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

## XIV.4. Cercul

Cercul C de centru M(a,b) şi razã *r*:

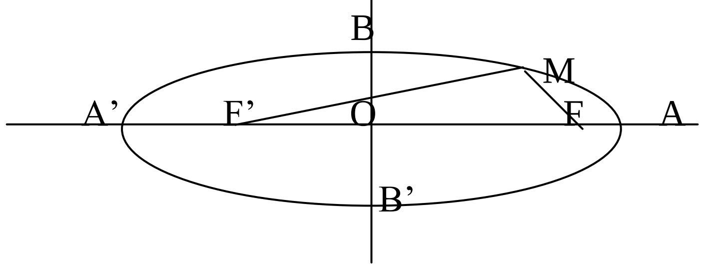
1. Ecuaţia cercului $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; dacã M(a,b) = 0(0,0): $x^2+y^2=r^2$;
2. Ecuaţia generalã: $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, unde $a=-\frac{m}{2}$, $b=-\frac{n}{2}$ şi

$$r^2=\frac{1}{4}(m^2+n^2)-p.$$

## XIV.5. Conice raportate la axele de simetrie

**1. Elipsa *E:*** F(c,0), F'(–c,0), A(a,0), A'(–a,0), B(0,b), B'(0,–b), MF + MF' = 2a, M∈E

***Ecuaţia elipsei:*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, b^2+c^2=a^2$



***Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_o,y_o)$, $M\in E$:***

$$\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}-1=0$$

**2. Hiperbola *H:*** F(c,0), F'(–c,0), A(a,0), A'(–a,0), $|MF - MF'| = 2a$, $M\in H$.

***Ecuaţiea hiperbolei:*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, c^2-b^2=a^2$

***Ecuaţia tangentei în $M_o(x_o,y_o)$, $M_o\in H$.***

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$$

**3. Parabola *P:*** F($\frac{p}{2}$,0), h:x = $-\frac{p}{2}$ (h – dreapta directoare): d(M,h) = MF, $M\in P$.

***Ecuaţia parabolei P:*** $y^2 = 2px$

***Ecuaţia tangentei în $M_o(x_o,y_o)$, $M_o\in P$:*** $yy_o = p(x + x_o)$

ANALIZÃ MATEMATICÃ

# I. Şiruri

## I.1. Şiruri şi limite

Definiţia I.1.1. ***Se numeşte <u>şir de numere reale</u> o funcţie $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $f(n) = a_n$.***

Definiţia I.1.2. ***Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte <u>crescãtor</u> (respectiv <u>descrescãtor</u>) dacã $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$). Şirurile crescãtoare şi şirurile descrescãtoare se numesc <u>şiruri monotone</u>.***

Definiţia I.1.3. ***Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este <u>mãrginit</u> dacă şi numai dacă $\exists M>0$ astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall n\in\mathbf{N}$.***

Notaţie: $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n\in\mathbf{R}$, $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Definiţia I.1.4. ***Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n\in\mathbf{R}$ are <u>limita $a$</u> şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a\in\overline{\mathbf{R}}$ dacã în orice vecinãtate a punctului $a$ se aflã toţi termenii şirului începând de la un anumit rang.***

Definiţia I.1.5. ***Şirul este <u>convergent</u>, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a\in\mathbf{R}$, dacã $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încât $\forall n> N_\varepsilon$, $|a_n - a| <\varepsilon$.***

Definiţia I.1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dacã $\exists\varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon\in$**N** ***astfel încât*** $a_n > \varepsilon$, $\forall\ n > N_\varepsilon$.

Definiţia I.1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ***dacă*** $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_\varepsilon\in$**N** ***astfel încât*** $a_n < -\varepsilon$, $\forall\ n > N_\varepsilon$.

***Dacã*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ ***, atunci şirul este <u>divergent</u>.***

## I.2. Dreapta încheiată

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

1) $x+\infty=\infty$;
2) $x-\infty=-\infty$;
3) $x\cdot\infty=\begin{cases}\infty \text{ dacă } x>0\\ -\infty \text{ dacă } x<0\end{cases}$;
4) $x\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty \text{ dacă } x>0\\ \infty \text{ dacă } x<0\end{cases}$;
5) $\infty\cdot\infty=\infty$;
6) $(-\infty)(-\infty)=\infty$;
7) $\infty(-\infty)=-\infty$;
8) $\dfrac{x}{\pm\infty}=0$;
9) $|\pm\infty|=\infty$. $\left((\forall)\, x\in\mathbb{R}\right)$

**I.3. Operații fără sens**: 1) $\infty-\infty$; 2) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; 3) $0\cdot(\pm\infty)$; 4) $0^0$; 5) $(\pm\infty)^0$; 6) $1^{\pm\infty}$.

## I.4. Criterii suficiente de convergenţã sau de existenţã a limitei unui şir

1. dacã $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n\geq 0$ şi $|a_n - a|\leq b_n$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;
2. dacã $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ şi $a_n \geq b_n$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
3. dacã $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi $a_n \leq b_n$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;
4. orice şir monoton şi mãrginit este convergent (criteriul lui Weierstrass);
5. dacã $b_n \leq a_n \leq c_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;
6. criteriul lui Stolz:

- dacã $(b_n)_{n\geq 0}$ crescãtor: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ şi existã $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$;

– dacã $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n > 0$ şi existã $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (Cesaro);

- – dacã $(b_n)_{n\geq 0}$ crescãtor: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi existã $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$;

## I.5. Operaţii cu şiruri convergente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b,\ a,b \in \mathrm{R}$$

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b;$

2. $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a, \alpha \in \mathbb{R};$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, (daca $b \neq 0$)

## I.6. Operaţii cu şiruri care au limitã

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b,\ a,b \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. dacã $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $b\in\mathbf{R}$ atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty, \text{daca } b > 0 \\ -\infty, \text{daca } b < 0 \end{cases}$$

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$;

3. dacã $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $b\in\mathbf{R}$, atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} -\infty, \text{daca } b > 0 \\ +\infty, \text{daca } b < 0 \end{cases};$$

4. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$;

5. dacã $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$;

6. dacã $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \infty$ dacã $a_n > 0$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = -\infty$ dacã $a_n < 0$.

## I.7. Şiruri tip

1. $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ daca } -1 < q < 1 \\ 1, \text{ daca } q = 1 \\ +\infty, \text{ daca } q > 1 \\ \text{nu exista, daca } q \leq -1 \end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k) = \lim_{n\to\infty} a_0 n^k = \begin{cases} +\infty, \text{ daca } a_0 > 0 \\ -\infty, \text{ daca } a_0 < 0 \end{cases}$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + ... + b_{p-1} n + n_p} = \begin{cases} 0, \text{ daca } k < p \\ +\infty, \text{ daca } k > p \text{ si } a_o p_o > 0 \\ -\infty, \text{ daca } k > p \text{ si } a_o p_o < 0 \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ daca } k = p \end{cases}$$

4. $\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+...+q^n)=\frac{1}{1-q}$, daca $|q|<1$;

5. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})=+\infty$;

6. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \forall a>0$;

7. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^p+2^p+...+n^p}=1, \forall p\geq 1$;

8. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$;

9. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)^n=e$.

# II. Limite de funcţii

Notaţii: $f$:D→**R**, D⊂**R**, α – punct de acumulare a lui D;

## II.1. Definiţii ale limitei

Definiţia II.1.1. $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbb{R}}$, ***dacã pentru orice vecinãtate** V **a lui** l* ***existã o vecinãtate** U **a lui** α **astfel încât*** ∀ x∈D∩U, x≠α, ***sã rezulte*** *f(x)*∈V.

Definiţia II.1.2. $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbb{R}}$***, dacã pentru orice şir*** $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n$∈D\{α}***,*** ***având*** $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ ***rezultã*** $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ ***(criteriul cu şiruri)***;

Definiţia II.1.3. $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbb{R}}$***, dacã*** ∀ε>0, ∃$\delta_\varepsilon$ >0 ***astfel încât*** ∀x∈D\{α} ***şi*** $|x-\alpha|<\delta_\varepsilon$ ***rezultã*** $|f(x)-l|<\varepsilon$;

Definiţia II.1.4. $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$***, dacã*** $l_s$ = $l_d$ = $l$***, unde*** $l_s=\lim_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x)$ şi $l_d=\lim_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x)$.

## II.2. Operaţii cu limite de funcţii

f:D→**R**, g:D→**R**, $\alpha$ – punct de acumulare a lui D, $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l_1$, $\lim_{x\to\alpha} g(x)=l_2$, $l_1,l_2$∈R;

1. $\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$;

2. $\lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x)=l_1\cdot l_2$;

3. $\lim_{x\to\alpha} af(x)=a\cdot l_1$;

4. daca $l_2\neq 0, \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

## II.3. Limite tip

1. $\lim_{x\to\alpha}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n$

$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n;$

2. $\lim_{x\to\alpha}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \frac{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \ldots + b_m}$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m};$

3. $\lim_{x\to\alpha}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[2n+1]{x} = -\infty;$

4. $\lim_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, dacã $a > 1$;

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, dacã $0 < a < 1$;

4. $\lim_{x\to\alpha}\log_a x = \log_a \alpha, \alpha > 0$ finita, $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x = -\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\log_a x = +\infty$ dacã $a > 1$;

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x = +\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\log_a x = -\infty$ dacã $0 < a < 1$;

6. $\lim_{x\to\alpha}\sin x = \sin\alpha$, $\lim_{x\to\alpha}\cos x = \cos\alpha$

$\lim_{x\to\alpha} tgx = tg\alpha, \alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\lim_{x\to\alpha} ctgx = ctg\alpha, \alpha \notin \pi\mathbb{Z}$

$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} tgx = \infty$, $\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}} tgx = -\infty$

7. $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} ctgx = \infty$, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} ctgx = -\infty$

$\lim_{x\to\alpha}\arcsin x = \arcsin\alpha, \alpha \in [-1,1]$, $\lim_{x\to\alpha}\arccos x = \arccos\alpha, \alpha \in [-1,1]$

$\lim_{x\to\alpha} arctgx = arctg\alpha, \alpha \in R$, $\lim_{x\to\alpha} arcctgx = arcctg\alpha, \alpha \in R$

$\lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$, $\lim_{x\to\infty} arcctgx = 0;$

8. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to0}\frac{tgx}{x} = 1$, $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to0}\frac{arctgx}{x} = 1;$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0,\forall n\in\mathbb{Z},a>1;$

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,a>0,$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\forall r\in\mathbb{R}$.

## II.4. Continuitatea funcţiilor

Definiţia II.4.1. ***Fie** $f$:D$\to$**R**, $x_o\in$D, $x_o$ – **punct de acumulare a lui** D**, $f$ este <u>continuã</u> în** $x_o$**, dacã** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $x_o$ **se numeşte <u>punct de continuitate</u>***.

Definiţia II.4.2. ***Fie $\alpha\in D$, $\alpha$ este <u>punct de discontinuitate de prima speţã</u> dacã existã şi sunt finite limitele laterale în $\alpha$, dar funcţia nu este continuã în $\alpha$.***

Definiţia II.4.3. ***Fie $\alpha\in D$, $\alpha$ este <u>punct de discontinuitate de speţa a doua</u> dacã nu este de prima speţã***.

Teoremã. ***Dacã** f:I$\to$**R**, I – **interval şi** f **continuã pe** I**, atunci** J = f(I) **este <u>interval</u> ( o funcţie continuã pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).***

# III. Funcţii derivabile

## III.1. Definiţia derivatei într–un punct

$f$:E$\to$**R**, $x_0\in$E, $x_0$ – punct de acumulare a lui E:

- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x_0+h\in E}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- $f_s'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f_d'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'(x_0)=f_s'(x_0)=f_d'(x_0)$

***Interpretarea geometricã:***

- dacã $f'(x_0)\in$**R**, $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ este ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul $A(x_0,f(x_0))$;
- dacã $f$ este continuã în $x_0$, $f_d'(x_0)=+\infty$, $f_s'(x_0)=-\infty$, sau invers, $x_0$ este punct de întoarcere al graficului;
- dacã $f$ este continuã în $x_0$ şi existã derivatele laterale în $x_0$, cel puţin una fiind finitã, dar $f$ nu este derivabilã în $x_0$, $x_0$ este punct unghiular al graficului.

# III.2. Reguli de derivare

$f,g$:E→**R**, $f,g$ derivabile în $x\in$E:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$, $c\in$R;
3. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
4. dacã $g(x)\neq 0$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
5. dacã $f$:I→J, $g$:J→**R**, f derivabilã în $x_0\in$I şi g derivabilã în $y_0 = f(x_0)$, atunci $(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$;
6. dacã $f$:I→J continuã, bijectivã şi derivabilã în $x_0$ cu $f'(x_0)\neq 0$, atunci $f^{-1}$:J→I este derivabilã în $y_0$, $y_0 = f(x_0)$ şi $f^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

# III.3. Derivatele funcţiilor elementare

| Funcţia (condiţii) | Derivata (condiţii) |
|---|---|
| $C$ | 0 |
| $x^n$, $n\in$**N***| $nx^{n-1}$ |
| $x^r$, $r\in$R, $x>0$ | $rx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}, x\geq 0$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$ |
| $\log_a x$, $a\neq 1$, $a>0$, $x>0$ | $\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}$ |
| $\ln x$, $x>0$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $a^x$, $a\neq 1$, $a>0$, $x>0$ | $a^x \ln a$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\mathrm{tg}\, x$, $x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\mathrm{ctg}\, x$, $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$, $x\in[0,1]$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(0,1)$ |
| $\arccos x$, $x\in[0,1]$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(0,1)$ |
| $\mathrm{arctg}\, x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{arcctg}\, x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |

## III.4. Derivata funcţiilor compuse

| Funcţia (condiţii) | Derivata (condiţii) |
|---|---|
| $u^n$, $n\in$N* | $nu^{n-1}\cdot u'$ |
| $u^r$, $r\in$R, $u>0$ | $ux^{n-1}\cdot u'$ |
| $\sqrt{u}, u\geq 0$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}, u>0$ |
| $\log_a u$, $a\neq 1$, $a>0$, $u>0$ | $\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{u'}{u}$ |
| $\ln u$, $u>0$ | $\frac{1}{u}\cdot u'$ |
| $a^u$, $a\neq 1$, $a>0$ | $a^u \ln a\cdot u'$ |
| $e^u$ | $e^u\cdot u'$ |
| $\sin u$ | $\cos u\cdot u'$ |
| $\cos u$ | $-\sin u\cdot u'$ |
| $\mathrm{tg}\, u$, $\cos u\neq 0$ | $\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ |
| $\mathrm{ctg}\, u$, $\sin u\neq 0$ | $-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ |
| $\arcsin u$, $u\in[-1,1]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u', u\in(-1,1)$ |
| $\arccos u$, $u\in[-1,1]$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u', u\in(-1,1)$ |
| $\mathrm{arctg}\, u$ | $\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ |
| $\mathrm{arcctg}\, u$ | $-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ |
| $u^v$, $u>0$ | $u^v\cdot v'\cdot \ln u + v\cdot u^{v-1}\cdot u'$ |

## III.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcţii elementare

| Funcţia (condiţii) | Derivata de ordinul $n(f^{(n)})$ |
|---|---|
| $x^m$, $m\in\mathbf{N}$, $m\geq n$ | $m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ |
| $\frac{1}{x^m}, m\in\mathbb{N}$ | $(-1)^n m(m-1)\ldots(m+n-1)\ \frac{1}{x^{m+n}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $(\ln a)^n\cdot a^x$ |
| $\ln x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$ |

| Funcţia (condiţii) | Derivata de ordinul $n(f^{(n)})$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ |

cos $x$ $\quad\quad\quad$ $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

***Formula lui Leibniz:***

$$(f\cdot g)^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+C_n^1 f^{(n-1)}\cdot g'+C_n^2 f^{(n-2)}\cdot g''+...C_n^{n-1}f'\cdot g^{(n-1)}+C_n^n f\cdot g^{(n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)},\ f^{(0)}=f$$

## III.6. Proprietãţi ale funcţiilor derivabile

***Teorema lui Fermat:***

Fie $f$:I→**R** derivabilã pe I. În orice punct extrem local din interiorul lui I, $f'$ este nulã.

***Teorema lui Rolle:***

Dacã funcţia continuã $f$:[a,b]→**R** este derivabilã pe (a,b) şi f(a) = f(b) atunci existã c∈(a,b) astfel încât $f'(c)$ = 0.

***Teorema lui Lagrange:***

Dacã funcţia continuã $f$:[a,b]→**R** este derivabilã pe (a,b), atunci existã c∈(a,b) astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Teoremã. Dacã funcţia $f$ este continuã şi derivabilã pe I (I – interval deschis), atunci:

1. între douã rãdãcini consecutive ale funcţiei existã cel puţin o rãdãcinã a derivatei;
2. între douã rãdãcini consecutive ale derivatei existã cel mult o rãdãcinã a funcţiei.

***Teorema lui Cauchy:***

Dacã $f,g$:[a,b]→**R** continue pe [a,b], derivabile pe (a,b) şi g'(x)≠0, ∀x∈(a,b) atunci ∃c∈(a,b) astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

# IV. Asimptote

## IV.1. Asimptote orizontale ($f$:D→**R**)

Definiţia IV.1.1. ***Dacã*** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l_1$ ***sau*** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l_2$, $l_1,l_2\in$R, ***dreptele*** $y=l_1$ ***şi*** $y=l_2$ ***sunt <u>asimptote orizontale a lui f</u> spre +∞, respectiv –∞***

## IV.2. Asimptote oblice ($f$:D→**R**)

Definiţia IV.2.1. ***Dacã*** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ ***şi*** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n, m,n\in\mathbb{R}$ ***dreapta*** $y = mx + n$ ***este <u>asimptotã oblicã a lui f</u> spre +∞.***

Definiţia IV.2.2. ***Dacã*** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m'\neq 0$ ***şi*** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-m'x]=n', m',n'\in\mathbb{R}$ ***dreapta*** $y = m'x + n'$ ***este <u>asimptotã oblicã a lui f</u> spre –∞.***

## IV.3. Asimptote verticale ($f$:D→**R**)

Definiţia IV.3.1. ***Dacã*** $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)=\pm\infty$, $\alpha$ ***– punct de acumulare a lui*** *D*, ***dreapta*** $x=\alpha$ ***este <u>asimptotã verticalã la stânga a lui f</u>.***

Definiţia IV.3.2. ***Dacã*** $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)=\pm\infty$, $\alpha$ ***– punct de acumulare a lui*** *D*, ***dreapta*** $x=\alpha$ ***este <u>asimptotã verticalã la dreapta a lui f</u>.***

## IV.4. Trasarea graficului unei funcții

În studiul variației unei funcții și trasarea graficului se parcurg următoarele etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice ale funcției:

I. *Domeniul de definiție:*
 a) Determinarea domeniului de definiție (în cazul expresiilor raționale numitorul trebuie sa fie diferit de zero; în cazul celor iraționale cantitatea de sub radical trebuie sa fie cel puțin zero)
 b) Intersecția graficului cu axa *Ox*: *f(x)=0*
 c) Intersecția graficului cu axa *Oy:f(0)=…*
 d) Calculul limitelor:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\dots \qquad \text{si} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\dots$$

II. *Semnul funcției:*
 a) Determinarea parității sau imparității funcției (dacă funcția este pară, *f(x)=f(–x)*, atunci graficul este simetric față de axa ordonatelor; dacă funcția este impară, *–f(x)=f(–x)*, atunci graficul este simetric față de originea axelor).
 b) Determinarea periodicității funcției și, în cazul funcțiilor periodice, a perioadei *T*.
 c) Continuitatea funcției.

III. *Asimptote:*
 a) orizontale;
 b) oblice;
 c) verticale.

IV. *Studiul primei derivate:*
 a) Se determină mulțimea *E*` inclusă în domeniul de definiție, pe care funcția *f* este derivabilă și apoi se calculează *f `(x).*
 b) Se rezolvă ecuația *f `(x)=0*, ale cărei rădăcini sunt, eventual, puncte critice ale funcției.
 c) Se calculează valorile funcției pentru rădăcinile derivatei I.
 *d)* Determinarea semnului derivatei I, care dă monotonia funcției.

V. *Studiul derivatei a doua:*
 a) Se determină multimea *E* ” inclusa in *E*`, pe care funcția *f* ` este derivabilă și apoi se calculează *f ”(x).*
 b) Se rezolvă ecuația *f”(x)=0,* iar rădăcinile pot fi puncte de inflexiune.
 c) Se calculează valoarile functiei pentru rădăcinile derivatei a–II a.

d) Determinarea semnului derivateiei a–II a, care ne dă convexitatea sau concavitatea funcției.

VI. *Formarea tabloului de variație a funcției f* – tablou în care se trec pentru sistematizare, rezultatele obținute la punctele precedente:

| *x* | |
|---|---|
| *f `(x)* | |
| *f ''(x)* | |
| *f(x)* | |

VII. *Trasarea graficului funcției:*– conform rezultatelor sistematizate în tabloul de variație – într–un sistem de axe carteziene.

**Exemplu :**

1. Să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic:

a) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x$

I. a) $D = (-\infty, +\infty);$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - x, & \text{daca } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \sqrt{1 - x^2} - x, & \text{daca } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

b) $G_f \cap Ox:\ f(x) = 0 \ \Rightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} - x = 0$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \pm x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

c) $G_f \cap Oy:\ f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad B(0,1);$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = +\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

II. $f(-x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

III. asimptote orizontale: -spre $-\infty$ ____

- spre $+\infty$ $y=0$

asimptota oblică spre $-\infty$: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}=-2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=0$$

$\Rightarrow y=-2x$ este asimptota oblică spre -∞

asimptote verticale:___

$$\text{IV. } f`(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1 & ,\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1 & ,\ x\in(-1,\ 1)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f`_s(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f`(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1=\dfrac{-1}{0_+}-1=-\infty\\ f`_d(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f`(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1=\dfrac{-1}{0_-}=\infty\\ f(-1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow M_1(-1,+1)$-punct de intoarcere ;

$$\left.\begin{array}{l} f`_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f`(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1=\dfrac{1}{0_-}-1=-\infty\\ f`_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f`(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1=\dfrac{1}{0_+}=\infty\\ f(1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

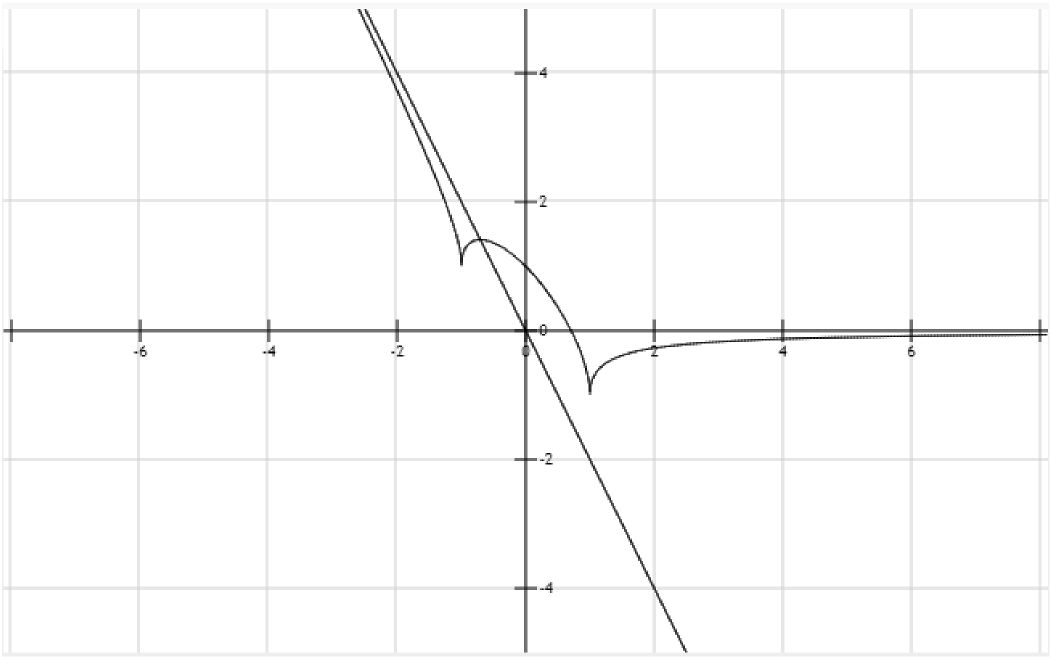
$\Rightarrow M_2(1,-1)$-punct de intoarcere ;

$$f`(x)=0\Rightarrow-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\ =0\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}\Rightarrow C(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$$

| $x$ | $-\infty$    $-1$    $-\frac{\sqrt{2}}{2}$    $0$    $1$    $+\infty$ |
|---|---|
| $f`(x)$ | $- \; - \; - \; - \; -$ \| $+ \; + \; + \; 0 \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$ \| $+ \; + \; +$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 1 \nearrow \sqrt{2} \searrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$ |

$\Rightarrow$ în –1 și 1 avem puncte de întoarcere.
Graficul funcției :




# V. Primitive
**(integrale nedefinite)**

Definiţia V.1. ***Fie funcţia*** *f*:J→**R**, J – ***interval,*** *F:*J→**R** ***este <u>primitiva lui f</u>, dacã F este derivabilã pe J şi*** *F'(x) = f(x),* ∀*x*∈*J.*

Se notează: $\int f(x)dx = F(x) + c$ mulțimea primitivelor unei funcții (integrala nedefinită)

*Proprietăţi ale primitivelor:*

1. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$;

## V.1. Integrarea prin părţi $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

## V.2. Prima metodã de schimbare a variabilei

Dacã $\varphi$ :I→J, *f*:J→**R**,$\varphi$ derivabilã pe I, *f* admite primitive *(F),* atunci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F \circ \varphi(t) + c$$

## V.3. A doua metodã de schimbare a variabilei

Dacã $\varphi$ :I→J, $f$:J→**R**,$\varphi$ bijectivã, derivabilã, cu derivata nenulã pe I, $h=(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive *(H)* atunci $\int f(x)dx = H\circ\varphi^{-1}(x)+c$ .

## V.4. Tabel de primitive: ($I$ – interval, $I\subset$**R**)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, x\in\mathbb{R}, n\in N$ ;
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, x\in(0,+\infty), \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c, x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c, x\in I, I\subset\mathbb{R}$ ;
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c, x\in I, I\subset\mathbb{R}\setminus\{-a,a\}$;
6. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c, x\in\mathbb{R}, a\neq 0$ ;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c, x\in\mathbb{R}$ ;
8. $\int \cos x dx = \sin x + c, x\in\mathbb{R}$;
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c, x\in I, I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle| k\in Z\right\}$;
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + c, x\in I, I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle| k\in Z\right\}$;
11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c, x\in I, I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle| k\in Z\right\}$;
12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c, x\in I, I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle| k\in Z\right\}$ ;
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c, x\in\mathbb{R}$ ;
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c, x\in(a,+\infty)$ sau $x\in(-\infty,-a), a>0$;
15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+c, x\in(-a,a), a>0$

**V.5. Tabel de primitive funcții compuse** Daca $\varphi$ este o funcție derivabilă pe un interval, atunci:

1) $\int \phi^a(x)\cdot\phi'(x)dx = \frac{\phi^{a+1}}{a+1}+c$

2) $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx = \ln|\phi(x)| + \mathcal{C},\ \phi \neq 0$

3) $\int a^{\phi(x)} \cdot \phi'(x)dx = \frac{a^{\phi(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}$, a>0, $a \neq 1$

4) $\int \frac{\phi'(x)}{\phi^2(x) - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\phi(x)-a}{\phi(x)+a}\right| + \mathcal{C},\ \varphi \neq \pm a, a \neq 0$

5) $\int \frac{\phi'(x)}{\phi^2(x) + a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{\phi(x)}{a} + \mathcal{C}$, $a \neq 0$

6) $\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi^2(x)+a^2}}dx = \ln\left(\phi(x) + \sqrt{\phi^2(x)+a^2}\right) + \mathcal{C},\ a \neq 0$

7) $\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi^2(x)-a^2}}dx = \ln\left|\phi(x) + \sqrt{\phi^2(x)-a^2}\right| + \mathcal{C},\ \varphi^2 > a^2$

8) $\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{a^2-\phi^2(x)}}dx = \arcsin\frac{\phi(x)}{a} + \mathcal{C},\ a > 0, -a < \varphi < a$

9) $\int \sin\phi(x) \cdot \phi'(x)dx = -\cos\phi(x) + \mathcal{C}$

10) $\int \cos\phi(x) \cdot \phi'(x)dx = \sin\phi(x) + \mathcal{C}$

11) $\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx = tg\varphi(x) + \mathcal{C},\ \phi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I$

12) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}dx = -ctg\varphi(x) + \mathcal{C},\ \phi(x) \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I$

13) $\int tg\varphi(x) \cdot \varphi'(x)dx = -\ln|\cos\varphi(x)| + \mathcal{C},\ \phi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I$

14) $\int ctg\varphi(x) \cdot \varphi'(x)dx = \ln|\sin\varphi(x)| + \mathcal{C},\ \phi(x) \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in I$

## V.6. Primitivele funcţiilor raţionale

Definiţie: Funcţiile raţionale simple sunt de forma:

$$\frac{1}{x+a}; \frac{1}{ax+b}; \frac{1}{(x+a)^n}; \frac{1}{ax^2+bx+c}; \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}; \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}; \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

definite pe domeniile lor maxime.

**I.** **1)** $\int \frac{1}{x+a}dx = \int \frac{(x+a)'}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$

**2)** $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{(ax+b)'}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

**II.** **1)** $\int \frac{1}{(x+a)^n}dx = \int (x+a)^{-n} \cdot (x+a)'dx = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n+1}} + C$

**2)** $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-n+1}\cdot(ax+b)'\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}+C=$

$= \frac{-1}{a(n-1)}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}+C$

**III.** $I = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, unde $a \neq 0$.

Caz **1)** $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)^2}dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{-1}{x-x_1}+C$ (formula **III. 1**)).

Caz **2)** $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forma canonică)

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)'}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right|+C$$

<u>Observaţie</u>: Se mai poate utiliza și: $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$ (se foloseşte formula **I.1)**)

Caz **3)** $\Delta < 0 \Rightarrow$ din forma canonică

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)'}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\,arctg\,\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}+C = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\,arctg\,\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+C$$

**IV.** Se ştie că $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b \Rightarrow$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A}{2a}\int \frac{\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A}{2a}\cdot\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\cdot$$

$\cdot\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{2aB-Ab}{2a}\cdot\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, unde

$J=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ se calculează cu formula **III.**

**V.** $I_n=\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx-$

$-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}dx-\frac{1}{2a^2}\int x\cdot\left[\left(x^2+a^2\right)^{-n}\cdot\left(x^2+a^2\right)'\right]dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-$

$\frac{1}{2a^2}\int x\left[\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}}{-n+1}\right]'dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\left[x\cdot\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}}{-n+1}-\int x'\cdot\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}}{-n+1}dx\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}$, ceea ce reprezintă relaţia de recurenţă din care se poate calcula $I_n$.

**VI.** $I_n=\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$, cu $\Delta=b^2-4ac<0$

<u>Observaţie</u>: Pentru $\Delta\ge 0\Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ şi după descompunerea în fracţii raţionale simple devine formula **II.**.

$$I_n=A\int\frac{x+\frac{B}{A}}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx+\frac{A}{2a}\int\frac{\frac{2aB}{A}-b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=\frac{A}{2a}\int\left(ax^2+bx+c\right)^{-n}\cdot\left(ax^2+bx+c\right)'dx+$$

$$+\frac{A}{2a}\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx\Rightarrow$$

$\Rightarrow I_n=\frac{A}{2a}\cdot\frac{\left(ax^2+bx+c\right)^{-n+1}}{-n+1}+\frac{A}{2a}\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\cdot J_n$, unde $J_n=\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$

Pentru $J_n$ scriem forma canonică şi notând $x+\frac{b}{2a}=t$, obţinem:

$I_n=\int\frac{1}{\left[a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]^n}dx=\frac{1}{a^n}\int\frac{1}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt$, care este formula **V.**

unde $\alpha=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$..

## V.7. Substituţiile lui Euler:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, daca $a>0$;

2. $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$, daca $c>0$;
3. $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$, daca $b^2-4ac>0$ si $x_1$ este o rãdãcinã a ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$.

# VI. Integrale definite

## VI.1. Definiţia integrabilitãţii (integrale Riemann)

Notaţii: $f$:[a,b]→**R**, $\Delta = (a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = n)$ diviziune, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ , $\xi_i$ – puncte intermediare, $\sigma_\Delta(f, \xi)$ – suma Riemann: $\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

Definiţia VI.1. ***f* se numeşte <u>integrabilã</u> dacã existã numãrul real $I_f$ cu proprietatea:** $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta_\varepsilon > 0$ **astfel încâtr pentru orice divizune $\Delta$ a lui [a,b] cu $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon$ şi orice puncte intermediare $\xi_i$ are loc $\left|\sigma_\Delta(f,\xi)-I_f\right|<\varepsilon$ unde** $\|\Delta\|=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$

Se noteazã: $I_f=\int_a^b f(x)dx$

Proprietãţi ale integralei definite:

1. $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$;
2. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$;
3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;
4. $\int_a^a f(x)dx=0$.

***Clase de funcții integrabile***

1. Orice funcție monotonă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă;
2. Orice funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă;

***Formula lui Leibniz–Newton:***

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ($F$ – primitivã a lui $f$).

***Teorema de medie:***

1. Dacã $f$ continuã pe $[a,b]$, atunci $\exists\xi\in[a,b]$ astfel încât: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$;
2. Dacă funcțiile $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue și $g(x)\ge 0, \forall x\in[a,b]$ atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

***Formula de integrare prin părţi:***

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

***Formula de schimbare de variabilă:***

Dacă $\varphi$ :[a,b]→*J*, *f*:*J*→**R**, *f* continuă pe *J*, $\varphi$ derivabilă cu derivata continuă pe [a,b], atunci $\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

***Proprietăţi de paritate:***

Dacă *f*:[–a,a]→**R** continuă atunci: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{daca } f \text{ impara} \\ 2\int_0^a f(x)dx, \text{daca } f \text{ para} \end{cases}$.

***Proprietăţi:***

1. Dacă $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ este integrabilă, atunci $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ ;
2. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții integrabile pe $[a,b]$ și $f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;
3. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ și $m\le f(x)\le M, \forall x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;
4. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci $|f|$ este integrabilă și $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

***Teorema fundamentală***

Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=\int_a^x f(t)dt$ are proprietățile:

1. *F* este derivabilă pe intervalul $[a,b]$ și
2. $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$.

Deci *F* este o primitivă a lui *f* pentru care *F*(*a*)=0.

## VI.2. Aplicaţii ale integralei definite

**1.** Aria subgraficului $\Gamma_f$, *f*:[*a*,*b*]→$\mathbf{R}_+$, *f* continuă: aria $\Gamma_f = \int_a^b f(x)dx$

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue a.î. $g(x)\le f(x),(\forall)\,x\in[a,b]$ .Dacă $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ a\le x\le b,\ g(x)\le y\le f(x)\}$, atunci aria $\Gamma_{f,g}=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$.

**2.** Volumul corpurilor de rotaţie. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continuă. Mulțimea $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \sqrt{y^2+z^2}\le|f(x)|\right\}$ se numește corpul de rotație în jurul axei Ox determinat de funcția *f*. Volumul acestui corp este $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

**3.** Lungimea graficului *f*:[a,b]→**R**₊, *f* derivabilã cu derivata continuã:
$l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

**4.** Aria suprafeţelor de rotaţie: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continuă.
$\phi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \sqrt{y^2+z^2}=f(x),\ a\le x\le b\right\}$ se numește suprafața de rotație determinată de funcția *f*. Aria acestei suprafețe este
$\mathrm{A}(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

**5.** Centrul de greutate al plăcii. Fie $\xi$ o placa plană, marginită de funcțiile continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\xi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\in[a,b],\ y\in[f(x),g(x)]\}$ continue, cu $f(x)\le g(x),\forall x\in[a,b]$ este punctul $G(x_G,y_G)$,

unde
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx} \\[2ex] y_G=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b[g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx} \end{cases}.$$