1 Ecuaţii

1.1 Rezolvarea ecuaţiilor de gradul I

Fie ecuaţia $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b$.

$$a \neq 0 \begin{cases} (DA)\ x = -\frac{b}{a} \text{soluţie unică} \\ (NU)\ b \neq 0 \begin{cases} (DA) \text{ ecuaţia are o infiinitate de soluţii } x \in \mathbb{R} \\ (NU)\ x \in \varnothing \end{cases} \end{cases}$$

1.2 Rezolvarea ecuaţiilor de gradul II

Fie ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{ ecuaţia are 2 soluţii reale şi distincte: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{ecuaţia are o singură solutie } x_1 = x_2 \ = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{ecuaţia are 2 soluţii complexe conjugate } x_{1,2} = \frac{-b \pm\ i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

1.3 Relaţiile lui Viete

Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\text{Notăm} \quad \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 \Rightarrow \mathbf{S} = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \mathbf{P} = \frac{c}{a} \end{array} \quad \text{iar} \quad \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2p \\ x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3p) \end{array}$$

1.4 Semnul rădacinilor ecuaţiiei de gradul II

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\textit{Dacă} \quad \begin{array}{l} P < 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0 \\ P > 0 \begin{array}{l} S < 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0 \text{ şi } x_1 < |x_2| \\ S > 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0 \text{ şi } x_1 > |x_2| \end{array} \\ P = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

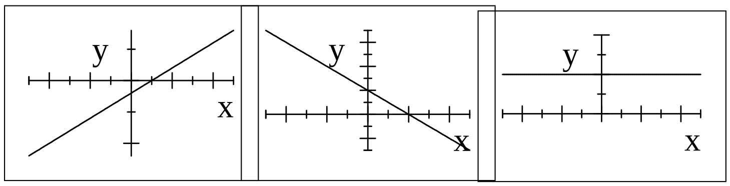
2 Funcţii

2.1 Funcţia de gradul I

Definim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$.

Graficul este o dreaptă.

$$f(x) = ax + b \begin{cases} \text{crescătoare dacă } a > 0 \\ \text{descrescătoare dacă } a < 0 \\ \text{constantă dacă } a = 0 \end{cases}.$$



a>0 a<0 a=1

2.2 Semnul funcţiei de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	semn contrar lui a	0	semnul lui a

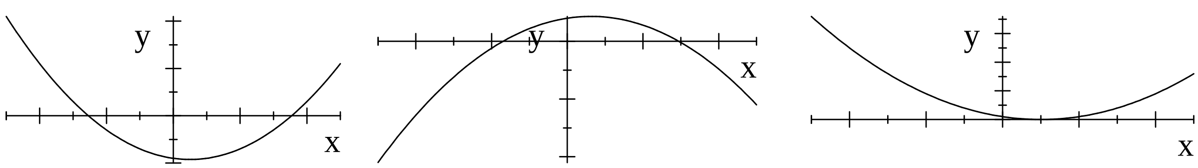
2.3 Funcţia de gradul II

Definim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$.

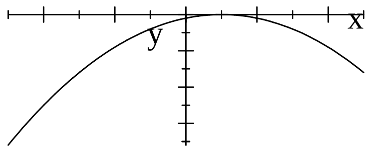
Graficul este o parabolă $\begin{cases} \textit{convexă}, \text{ dacă } a > 0 \\ \textit{concavă}, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$.

În ambele cazuri vârful parabolei $V(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$.

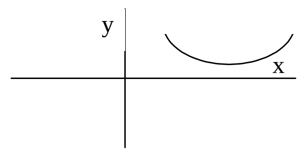
Graficul poate arată astfel :



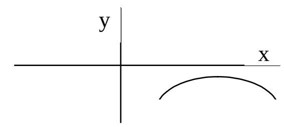
a>0, $\Delta > 0$ a<0, $\Delta > 0$ a>0, $\Delta = 0$



a<0, $\Delta = 0$



a>0, $\Delta < 0$



$a < 0$, $\Delta > 0$

2.4 Minimul sau maximul funcţiei de gradul II

$a > 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ admite un minim şi $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ şi se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

$a < 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ admite un maxim şi $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ şi se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

2.5 Monotonia funcţiei de gradul II

Dacă $a > 0$, funcţia e strict decrescătoare pe $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ şi crescătoare pe $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Dacă $a < 0$, funcţia e strict crescătoare pe $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ şi decrescătoare pe $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

2.6 Semnul funcţiei de gradul II

1) $\Delta > 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

2) $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semnul lui a	

3 Şiruri de numere

3.1 Progresii aritmetice. Progresii geometrice.

Definiţie. O funcţie definită pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ a numerelor naturale nenule cu valori într-o mulţime E de numere reale se denumeşte şir de elemente ale mulţimii E.

Definiţie. Două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt egale dacă $a_k = b_k\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq a_n \leq \beta\ \ \forall\ n \geq 1$.

Definiţie. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton dacă e crescător $(a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1})$ sau descrescător $(a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1})$.

Definiţie. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton dacă e strict descrescător $(a_1 < a_2 < ... < a_n < a_{n+1})$ sau dacă e strict descrescator $(a_1 > a_2 > ... > a_n > a_{n+1})$.

Definiţie. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ e **progresie aritmetică** dacă diferenţa oricăror doi termeni connsecutivi este constantă. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r$; Dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică $\leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$.

$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{r}$(**formula termenului general al unei progresii aritmetice**);

$\mathbf{S}_n = \frac{a_1+a_n}{2}, \mathbf{S}_n = \mathbf{n}\ \mathbf{a}_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{r}$(**formula sumei primelor n termeni ai unei progresii aritmetice**)
.

Progresiile geometrice sunt şiruri de numere reale ce au proprietatea că raportul oricaror doi termeni consecutivi este constant şi egal cu raţia progresiei geometrice: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.Dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică $\Longleftrightarrow b = \sqrt{ac}$.

$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1\mathbf{q}^{n-1}$(**formula termenului general al unei progresii geometrice**);

$\mathbf{S}_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$(**formula sumei primelor n termeni ai unei progresii geometrice**).

4 Ecuaţii iraţionale

a) $\sqrt{f(x)} = a$; $C.E.\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x) = a^2$;

b) $\sqrt{f(x)} = g(x)$; $C.E \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = g^2(x)$;

c) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$; $C.E \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ h(x) - f(x) - g(x) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = h(x) \\ 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) - f(x) - g(x) \\ 4f(x)g(x) = (h(x) - f(x) - g(x))^2 \end{array}$;

d) $\begin{array}{c} \sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} \\ f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)h(x)} = h(x) \\ 3\sqrt[3]{f(x)g(x)h(x)} = h(x) - f(x) - g(x) \\ 27h(x)f(x)g(x) = (h(x) - f(x) - g(x))^3; \end{array}$

5 Trigonometrie

$M(a,b)$; $M(\cos x, \sin x)$

$$\text{Dacă} \begin{array}{c} M(a,b)\in Cadranul\ I\ \ \Rightarrow \sin x>0,\ \ \cos x>0; \\ M(a,b)\in Cadranul\ II\ \ \Rightarrow \sin x>0,\ \ \cos x<0; \\ M(a,b)\in Cadranul\ III\ \ \Rightarrow \sin x<0,\ \ \cos x<0; \\ M(a,b)\in Cadranul\ IV\ \ \Rightarrow \sin x<0,\ \ \cos x>0; \end{array}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$tg(a \pm b) = \frac{tg\ a\ \pm\ tg\ b}{1 \mp tg\ a\ tg\ b}$

$ctg(a \pm b) = \frac{ctg\ a\ ctg\ b\ \mp 1}{ctg\ a\ \pm\ ctg\ b}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$tg\ (\frac{\pi}{2} - x) = ctg\ x$

$ctg\ (\frac{\pi}{2} - x) = tg\ x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$

$tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2 x}$

$ctg\ 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctg\ x}$

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$tg\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$tg\ \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$tg\ \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

$ctg\ \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

$ctg\ \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$

$\sin x = \frac{tg\ \ x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

$\sin x = \frac{2tg\ \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$

$\cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$

$tg\ x = \frac{2tg\ \frac{x}{2}}{1-tg^2 \frac{x}{2}}$

$ctg\ x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{2tg\ \frac{x}{2}}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$tg\ x + tg\ y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\ \ \cos x}$

$tg\ x - tg\ y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\ \ \cos x}$

$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$

$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(a - \frac{\pi}{4})$

$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(a - \frac{\pi}{4})$

$\sin x \cos x = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

Produsul scalar a doi vectori nenuli $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ este $\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos\alpha$ unde $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Teorema cosinusului. Într-un triunghi oarecare ABC are loc relaţia: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ a$ unde a, b, c sunt laturile triunghiului.

Teorema sinusului. Într-un triunghi oarecare raportul dintre lungimea fiecărei laturi şi sinusul unghiului opus este constant şi egal cu lungimea diametrului cercului circumscris triunghiului: $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Dacă notăm cu $p = \frac{a+b+c}{2} \Longrightarrow \begin{array}{c} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \end{array}$

Formule pentru aria triunghiului.

$S = \frac{\alpha h_o}{2}$; $S = \frac{ac\sin B}{2}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = \frac{abc}{4R}$. Notăm cu r raza cercului înscris în triunghi. Atunci $r = \frac{S}{p}$ unde S este aria trungiului iar p este semiperimetrul.

6 Funcţia exponenţială

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Definim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = a^x$ se numeste funcţie exponenţială

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x b^y$

$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^y}$

Funcţia exponenţială este funcţie bijectivă.

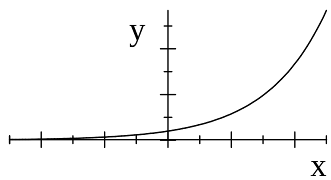
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

$a^x = b^x \Leftrightarrow x = 0$

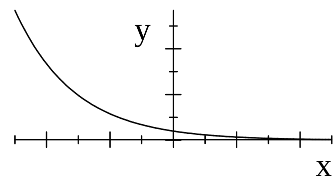
Monotonia. Dacă $a \in (0,1)$ $f(x) = a^x$ este strict descrescatoare $\begin{array}{l} x < y \Leftrightarrow a^x > a^y \\ x > y \Leftrightarrow a^x < a^y \end{array}$

.Dacă $a \in (0,1)$ este strict crescătoare $\begin{array}{l} x < y \Leftrightarrow a^x < a^y \\ x > y \Leftrightarrow a^x > a^y \end{array}$

6.1 Graficele:



a>0



0< a <1

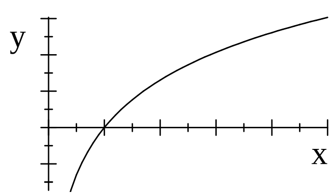
7 Funcţia logaritmică

Fie $a > 0 \quad a \neq 1 \quad f : \mathbb{R} \to (0, \infty) \quad f(x) = a^x$ este bijectivă adică ecuaţia a^x, y cu $y > 0$ si necunoscuta x, are soluţie unică. Această soluţie este $x = \log_a y$ şi se numeşte logaritmul în bază a al numărului pozitiv y.

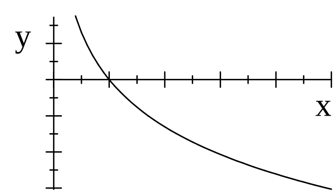
Deci $x = \log_a y \overset{Def}{\Longleftrightarrow} a^x = y \Rightarrow a^{\log_a a} = x$ şi $\log_a a = 1$.

Definiţie. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = log_a x$ se numeşte funcţie logaritmică de bază a.

Funcţia logaritmică este inversă funcţiei exponenţiale şi graficul funcţiei logaritmice este simetricul faţă de *prima bisectoare* a graficului funcţiei exponenţiale.



a>0



0< a <1

7.1 Proprietăţi ale funcţiei logaritmice:

a) $log_a 1 = 0$

b) dacă $a > 1$, f e strict crescătoare adică $x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ şi $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$, iar dacă $a \in (0, 1)$, f e strict descrescătoare adică $x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$ şi $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

c) dacă $a > 1$, f e conveva pe $(0, \infty)$, iar dacă $a < 0 < 1$, funcţia e concavă pe $(0, \infty)$.

d) f e bijectivă.

e) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

f) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a x$

g) $\log_a x^n = n \log_a x$

h) $\log_a \sqrt[m]{x^n} = \frac{n \log_a x}{m}$

g) $\log_a x = \frac{\log_a x}{\log_b a}$ (formula de schimbare a bazei) în particular $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ $\forall\ x > 0,\ x \neq 1$

8 Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale sau logaritmice

In rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale ne bazăm pe injectivitatea funcţiei exponenţiale $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, $a \neq 1$.

8.1 Tipurile clasice de ecuaţii exponenţiale:

a) Ecuaţii de tipul $a^{f(x)} = b$ $\begin{array}{l} b \leq 0 \Rightarrow S = \varnothing \\ b = a^{\alpha} \Rightarrow f(x) = \alpha \\ b \neq a^{\alpha}, b > 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b \end{array}$.

b) Ecuaţii de tipul $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

c) Ecuaţii de tipul $\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma = 0$ care se reduce prin notarea lui $a^{f(x)} = t$ la o ecuaţie de gradul doi iar apoi, prin revenirea la notaţii, la 2 ecuaţii de tipul a).

d) Ecuaţii de tipul $\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} b^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$ care se împarte la $b^{2f(x)}$ şi apoi se notează $(\frac{a}{b})^{f(x)}$ cu t devine astfel o ecuaţie de gradul doi: $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ cu soluţiile t_1, t_2. Problema revine la rezolvarea a două ecuaţii de tipul a) de forma $(\frac{a}{b})^{f(x)} = t$.

e) Ecuaţii de tipul $a^{f(x)} + b^{f(x)} = c$ unde $ab = 1$. Se notează $a^{f(x)} = t$ se obţine o ecuaţie de gradul al II-lea in t , se rezolvă şi apoi problema revine la rezolvarea a două ecuaţii de tipul a).

8.2 Tipuri clasice de ecuaţii logaritmice:

a) Ecuaţii de tipul $\log_{f(x)} g(x) = a$ C.E. $\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{array}$. În aceste condiţii $g(x) = f(x)^a$.

b) Ecuaţii de tipul $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ C.E. $\begin{array}{l} f(x), g(x) > 0 \\ a > 0,\ a \neq 1 \end{array}$. În aceste condiţii ecuaţia devine $f(x) = g(x)$.

c) Ecuaţii de tipul $\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ C.E. $\begin{array}{l} f(x),\ g(x) > 0 \\ g(x) > 0,\ g(x) \neq 1 \end{array}$. În aceste condiţii se impune $f(x) = h(x)$.

d) Ecuaţii de tipul $\alpha \log^2_{g(x)} f(x) + \beta \log_{g(x)} f(x) + \gamma = 0 \quad \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ C.E. $\begin{array}{l} g(x) > 0,\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{array}$. Se notează $\log_{g(x)} f(x) = t$ şi ecuaţia dată redevine o ecuaţie de gradul al II-lea. Revenind la notaţie vom avea în funcţie de Δ 2,1 sau 0 ecuaţii de tipul a).

9 Funcţii trigonometrice inverse.

Dacă funcţia $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Inversa funcţiei sin numita arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $arcsin\ y = x \Leftrightarrow sin\ x = y$ pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $y \in [-1,1]$.

Dacă funcţia $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Inversa funcţiei cos numita arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$, $ar\cos y = x \Leftrightarrow \quad cos\ x = y$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $y \in [-1,1]$.

Dacă funcţia $tg : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei tg este **arctangentă** şi $arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $arctg\ y = x \Leftrightarrow tg\ x = y$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

Dacă funcţia $ctg : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei ctg este **arccotangentă** şi $arcctg : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $arcctg\ y = x \Leftrightarrow x = y$ pentru $x \in (0,\pi)$, $y \in \mathbb{R}$.

10 Ecuaţii trigonometrice

O ecuaţie în care necunoscuta apare ca argument al unei funcţii trigonometrice se numeşte ecuaţie trigonometrică

Ecuaţia $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$ are soluţii $\Leftrightarrow a \in [-1, 1]$

Dacă
$a = 1$ $\quad x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$a = -1$ $\quad x \in \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$|a| < 1$ $\quad x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ecuaţia $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$ are soluţii $\Leftrightarrow a \in [-1, 1]$

Dacă
$a = 1$ $\quad x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$a = -1$ $\quad x \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$|a| < 1$ $\quad x \in \{-ar\cos x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{ar\cos x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ecuaţia $tg\ x = a$ are soluţia $x \in \{arctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia $ctg\ x = a$ are soluţia $x \in \{arcctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11 Elemente de combinatorică

Definiţie. Se consideră o mulţime A cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$.Orice funcţie injectivă $f : \{1, 2, 3, ...n\} \to A$ se numeşte permutare a mulţimii A. Numărul tuturor permutărilor unei mulţimi A se notează cu P_n şi $P_n = n!$.

Definiţie. Fie A o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Numim aranjamente de n elemente luate câte k, $k \geq 1$ ale mulţimii A orice submulţime ordonată de k elemente.

Numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate cîte k se notează cu A_n^k şi $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$ sau $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Definiţie. Fie A o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Numim combinare de n elemente luate cîte k elemente, a mulţimii A orice submulţime cu k elemente a mulţimii A.

Numărul tuturor combinărilor de n elemente luate cîte k se notează cu C_n^k şi $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$; $\quad P_n = n(n-1)...(n-k+1)P_{n-k}$; $\quad n! = (n-k)!(n-k+1)...(n-1)n$; $P_0 = 0! = 1(conventie)$

$P_{n+1} = (n+1)P_n$ sau $(n+1)! = n!(n+1)$

$k!k = (k+1)! - k!\ \ \forall\ 0 \leq k \leq n$

$\frac{1}{(k-1)!(k+1)} = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$; $\quad A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}$; $\quad A_n^k = (n-k+1)A_n^{k-1}$; $\quad A_n^0 = 1(conventii)$

$P_n = (n-k)!A_n^k$; $\ P_n = A_n^k = n!$

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (formula combinărilor complementare)

$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (formula de recurentă pentru combinări)

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{1} kC_n^k = n - 2^{n-1}$$

11.1 Binomul lui Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (termenul general de rang k+1al dezvoltării)

12 Numere complexe

Un element $z = a + ib$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $i^2 = -1$ se numeşte număr complex.

a = partea reală a lui z şi se notează $\operatorname{Re} z$

b = partea imaginară a lui z şi se notează $\operatorname{Im} z$

Adunarea şi scăderea numerelor complexe $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$:

$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

Imulţirea a două numere complexe :

$z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Conjugatul unui număr complex $z = a + ib$ este $\overline{z} = a - ib$.

Impărţirea a două numere complexe :

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$

Egalitatea a două numere complexe :

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ şi $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0; \operatorname{Im} z = 0$

Puterile numărului i :

$i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -1 \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}$

Modulul unui număr complex :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$

Numere complexe sub formă trigonometrică

Pentru orice număr complex nenul z, există un unic $\theta \in [0, 2\pi]$ astfel încât $z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$ unde $|z|$ este modulul lui z.

Notăm $|z| = r \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)$

Rădăcinile de ordinul n **ale unui număr complex** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$z_k = \sqrt[n]{k}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}) \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

13 Polinoame

Definiţie. Fie a_1, $i = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{N}$, numere complexe. Expresia $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ se numeşte polinom în formă algebrică.

a_1, $i = \overline{0, n}$ se numesc coeficienţii polinomului :

Fie $f, g \in C[x]$ $\begin{array}{l} f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \\ g = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n \end{array}$

$f = g \Leftrightarrow n = m$ şi $a_k = b_k \quad k = \overline{0, n}$

$f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + ... + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_n x^n$ $(n \geq m)$

$fg = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + ... + (a_0 b_k + a_1 k_{k-1} + ... + a_k b_0)x^k + ... + a_n b_m x^{n+m}$

Fie $f, g, h \in C[x]$

$(f + g) + h = f + (g + h)$

$0 + f = f + 0 = f$

$f - g = f + (-g)$

$f + g = g + f \quad \forall\ f, g \in C[x]$

$(fg)h = f(gh) \quad \forall\ f, g, h \in C[x]$

$1 \times f = f \times 1 \quad \forall\ f \in C[x]$

$fg = gf \quad \forall\ f, g \in C[x]$

$f(g + h) = fg + fh \quad \forall\ f, g, h \in C[x]$

Teorema împărţiri cu rest. Pentru fiecare pereche $f, g \in C[x]$ cu $g \neq 0$ există şi sunt unuce polinoamele $q, r \in C[x]$ cu proprietăţile $\begin{cases} f = gq + r \\ \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g \end{cases}$.

Teorema restului. Dacă $f \in C[x]$ şi $a \in \mathbb{C}$ atunci restul împărţirii polinomului f prin polinomul $x - a$ e polinomul constant $f(a)$.

Definiţie. Fie $f, g \in C[x]$ spunem că polinomul nenul g divide polinomul f şi notăm g/f dacă există un polinom $h \in C[x]$ astfel încât $f = gh$

Teorema lui Bezout. Fie $f \in C[x]$, $f \neq 0$. Numărul $a \in \mathbb{C}$ e rădăcină a polinomului f dacă şi numai dacă f se divide cu $x - a$.

Teoremă. Dacă $f \in C[x]$, grad $f = n \geq 1$ atunci el are n rădăcini complexe (nu neapărat distincte) $x_1, x_2, ...x_n$. În plus polinomul f se descompune, în $C[x]$, în n factori liniari astfel : $f = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

13.1 Relaţiile între rădăciinile şi coeficienţi

Teoremă. Fie $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in C[x]$, $a_n \neq 0$ un polinom de gradul n. Numerele $x_1, x_2, ...x_n$ sunt rădăcinile polinomului dacă şi numai dacă :

$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$- - - - - - - - - - - - - - - - -$

$x_1x_2...x_k + ... + x_{n-k+1}...x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Teoremă. Fie f un polinom cu coeficienţi reali. Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a polinomului f, atunci $\overline{z} = a - bi$ este de asemenea, rădăcină a polinomului f.

Observaţie

1) z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

) Orice polinom cu coeficienţi reali de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.

3) Pentru polinoamele cu cel puţin un coeficient din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ teorema nu este valabilă.

4) Singurele polinoame ireductibile din $R[x]$ sunt cele de gradul întâi şi al doilea cu $\Delta < 0$.

Teoremă. Fie f un polinom cu coeficienţi raţionali. Dacă $z = a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină iraţională a polinomului f atunci $z^* = a - \sqrt{b}$ este, de asemenea, rădăcină a polinomului f.

14 Statistici şi probabilităţi

Considerăm un lot de numere $x_1, x_2, ...x_n$.

$$M = \frac{x_1+...+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(media)}$$

$$D = \sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+...+(x_n-M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - M)^2} \quad \text{(dispersia)}$$

Fie U mulţime şi E parţile mulţimii U. Elementele lui E se numesc evenimente.
$P : E \to [0, 1]$.

P are următoarele proprietăţi:

1) $P(\varnothing) = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile evenimentului}}{\text{numărul total de cazuri}}$.

15 Elemente de geometrie analitică

Un reper cartezian $x \circ y$ în plan determină o împărţire a planului în patru cadrane.

I $= \{M(x, y) \; | x > 0, y > 0\}$

II $= \{M(x, y) \; | x < 0, y > 0\}$

III $= \{M(x, y) \; | x < 0, y < 0\}$

IV $= \{M(x, y) \; | x > 0, y < 0\}$

Distanţa dintre două puncte $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ în plan: $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$
.

Panta unei drepte reprezintă tangenta unghiului pe care acea dreaptă o face cu Ox :

$m_{MN} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Două drepte d_1, d_2 sunt paralele $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$.

Două drepte d_1, d_2 sunt perpendiculare $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \times m_{d_2} = -1$.

Ecuaţia unei drepte ce trece printr+un punct $A(x_0, y_0)$ şi este de panta m este $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Ecuaţia unei drepte ce trece prin două puncte distincte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ este : $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ecuaţia carteziană generală a unei drepte d este $ax + by + c = 0$.

Condiţia ca trei puncte $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$ să fie coliniare este : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Condiţia ca trei drepte $a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad i = \overline{1,3}$ să fie concurente este : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Distanţa de la un punct $A(x_0, y_0)$ la o dreaptă $d : ax + by + c = 0$ este : $d(A, h) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Formula ariei unui triunghi de $Vf \quad A_i(x_i, y_i) \quad i = \overline{1,3}$ este : $\frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$.

15.0.1

Distanţa dintre două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ din spaţiu este : $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Ecuaţia generală a planului trigonometric în spaţiu este : $Ax+By+Cz+D = 0$ unde A, B, C nu sunt toate nule .

Ecuaţia planului ce trece prin punctul (x_0, y_0, z_0) este : $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ecuaţia planului ce trece prin trei puncte necoliniare (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) este : $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Condiţia de necoliniaritate a trei puncte de cordonate (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) este : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

15.1 Ecuaţiile dreptei în spaţiu.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul director $\overrightarrow{v}(l.m, n)$ sunt $d : \begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Ecuaţiile canonice ale dreptei : $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

Ecuaţiile canonice ale dreptei d determinată de punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt : $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2$.

Fie dreptele d_1, d_2 date prin ecuaţiile concentrice: $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ şi $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. Unghiul γ format de dreptele d_1 şi d_2 este dat de formula : $\cos\gamma = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\pm\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\times\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

Poziţia relativă a unei drepte $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ faţă de un plan şi $P : Ax + By + Cz + D = 0$.

1) Dacă $Al + Bm + Cn \neq 0 \Rightarrow d \cap P = \{A\}$

2) Dacă $Al + Bm + Cn = 0$ şi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \Rightarrow d \parallel P$.

3) Dacă $Al + Bm + Cn = 0$ şi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow d \subset P$.

Unghiul format de o dreaptă cu un plan. Fie dreapta d dată de ecuaţiile : $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ şi planul P de ecuaţia $Ax + By + Cz + D = 0$. Fie γ unghiul dintre dreapta d şi planul P : $\sin\gamma = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2m^2+n^2}+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Distanţa de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la un plan este : $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Fiind date două plane : $A_1x + B_1y + C_1y + D_1 = 0$ şi $A_2x + B_2y + C_2y + D_2 = 0$. Cosinusul unghiului format de cele două plane are formula : $\cos\gamma = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Două plane $P_1 : A_1x+B_1y+C_1y+D_1 = 0$ şi $P_2 : A_2x+B_2y+C_2y+D_2 = 0$ sunt paralele dacă $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Aria triunghiului cu vârfului în $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3)$ este : $A_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volumul tetraedului cu vârfurile $M_0(x_0, y_0, z_0),\ M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este : $V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$.

Ecuaţia arcului cu centrul în punctul $M(a, b)$ şi raza r este : $(x-a)^2-(x-b)^2 = r^2$. Ecuaţiile parometrice sunt : $\begin{matrix} x = r\cos\alpha + a \\ y = r\sin\alpha + b \end{matrix}$.

Ecuaţia implicită a elipsei este $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2} = 1 \;\; a, b > 0$ iar ecuaţiile parametrice sunt : $\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ecuaţia parabolei cu axa de simetrie Oy este : $x^2 = 2py, \;\; p \neq 0$.

Ecuaţia parabolei cu axa de simetrie Ox este : $y^2 = 2px, \;\; p \neq 0$.

Ecuaţiile parametrice ale parabolei cu axa de simetrie Ox sunt : $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, \;\; p \neq 0 \\ y = t \end{cases}$.

Ecuaţia hiperbolei : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0$.

Ecuaţia tangentei la curbă în punctul $M(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$ cu $y_0 = f(x_0)$.

Ecuaţia tangentei la cerc în punctul $M(x_0, y_0) \in C$ este $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b) = r^2$ (ecuaţia cercului prin dedublare).

Ecuaţia tangentei la elipsă (hiperbolă) în punctul $M(x_0, y_0)$ este $yy_0 = p(x + x_0)$.

16 Siruri de numere reale

Fie un şir numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Şirul $(a_n)_n$ este crescător dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este strict crescător dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este decrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este strict decrescător dacă $a_n > a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este mărginit superior dacă $\exists\ B \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n \leq B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este mărginit inferior dacă $\exists\ A \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n \geq A$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este mărginit dacă $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $A \leq a_n \leq B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirul $(a_n)_n$ este mărginit dacă $\exists\ M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Şirurile care nu sunt mărginite se numesc nemărginite.

Spunem că şirul (a_n) tinde la l (covergenţa la l) şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ dacă este adevărată una din propoziţii :

1) Orice vecinătate a lui l conţine toţi termeni şirului exceptând eventual un număr finit.

2) $\forall$

3) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

Spunem că şirul $(a_n)_N$ tinde la ∞ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dacă este adevărată oricare din următoarele afirmaţii :

1) Orice vecinătate a lui ∞ conţine toţi termeni şirului exceptând eventual un număr finit.

2)

3) $\forall\ M \in \mathbb{R},\ \exists\ n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât,$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ n > n_M \Rightarrow a_n > M$.

Se numeşte şir convergent un şir cu limita finită. Şirurile care nu sunt convergente se numesc divergente.

Orice şir convergent e mărginit şi monoton şi invers orice şir mărginit şi monoton e convergent.

Criteriul cleştelui. Fie $(a_n)_n, (b_n)_n, (x_n)_n$ şiruri de numere reale. Dacă $a_n < x_n < b_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Lema lui Cesaro-Stolz. Fie şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ cu proprietăţiile :

1) $y_n > 0,\ \forall n$.

2) $y_n < y_{n+1},\ \forall n$ (şirul $(y_n)_n$ e strict crescător).

3) $(y_n)_n$ e nemărginit (superior).

4) $\exists\ a = \lim\limits_n \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Atunci $(\exists)\ \lim\limits_n \frac{x_n}{y_n}$ şi mai mult $\lim\limits_n \frac{x_n}{y_n} = a$.

Criteriul lui Cauchy d' Alembert (sau criteriul rădăcinii).

Lemă. Fie şirul (x_n) cu proprietăţile :

1) $x_n > 0,\ \forall n$.

2) $(\exists)\ \lim x_n = a$.

Dacă g_n este definit prin $g_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$, $\forall n$ (şirul medulor geometrice) atunci $(g_n)_n$ este convergent şi mai mult $\lim\limits_n g_n = \lim\limits_n x_n = a$.

Criteriul lui Cauchy d' Alembert (sau criteriul rădăcinii).

Fie şirul $(x_n)_n$ cu $x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$.

Arunci şirul $(\sqrt[n]{x_n})$ are limită şi mai mult $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$.

16.1 Limite importante.

$$\lim_{n\to\infty} a\ n^{\alpha} = \begin{cases} \infty \text{ dacă } a > 0,\ \alpha > 0 \\ -\infty \text{ dacă } a < 0,\ \alpha > 0 \\ 0 \text{ dacă } a \in \mathbb{R},\ \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ dacă } q \in (-1,1) \\ 1 \text{ dacă } q = 1 \\ \infty \text{ dacă } q > 1 \\ \text{nu există dacă } q \leq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Dacă} \quad \begin{matrix} P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_0 \\ Q(n) = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + ... + b_0 \end{matrix} \quad \text{atunci } \lim_{n\to\infty} = \frac{p(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} \text{ dacă } p = q \\ 0 \text{ dacă } p < q \\ \infty \text{ dacă } p > q \text{ şi } a_p \times b_q > 0 \\ -\infty \text{ dacă } p > q \text{ şi } a_p \times b_q < 0 \end{cases}.$$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{\sin\ u(n)}{u(n)} = 1.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{tg\ u(n)}{u(n)} = 1.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{\arcsin\ u(n)}{u(n)} = 1.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{arctg\ u(n)}{u(n)} = 1.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{\ln(1+\ u(n))}{u(n)} = 1.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} \frac{a^{u(n)}-1}{u(n)} = \ln a.$

$\lim\limits_{u(n)\to 0} (1 + u(n))^{\frac{1}{u(n)}} = e.$

În particular dacă $u(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{u(n)\to 0} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$

16.2 Operaţii cu şiruri

Fie (a_n), (b_n) două şiruri cu limită (finită sau infinită). Atunci :

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (caz exceptat $\infty-\infty$).

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (caz eceptat $\infty\times 0$).

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$ (cazuri exceptate $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$).

17 Limite de funcţii

17.1 Limite fundamentale de funcţii

17.2 1. Polinoame.

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$; $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=P(x_0)$, $\forall\ x_0\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=a_n(\pm\infty)^n$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $Q(x_0)\neq 0$.

17.3 2. Funcţii raţionale.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 \text{ dacă } n<m\\ \frac{a_n}{b_m} \text{ dacă } n=m\\ \frac{a_n}{b_m}(\pm\infty)^{n-m} \text{ dacă } n>m\end{cases}.$$

17.4 3. Funcţia radical.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$, $x_0\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}$, $x_0\in\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2n+1]{x}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}=\frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}}=0$.

17.5 4.Funcţia exponemţială.

$\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} = a^x = 0$ dacă $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ dacă $0 < a < 1, a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \infty$, $e = 2,7182$.

17.6 5. Funcţia logarirmică.

$\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 > 0$, finit $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = +\infty$, dacă $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$, dacă $0 < a < 1, a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln_x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty$.

17.7 6. Funcţii trigonometrice.

$\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} tg\ x = tg\ x_0$, $x_0 \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$.

$\lim\limits_{x \to x_0} ctg\ x = ctg\ x_0$, $x_0 \notin \mathbb{Z}\pi$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} tg\ x = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} tg\ x = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ctg\ x = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} ctg\ x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$, $-1 \leq x_0 \leq 1$.

$\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$, $-1 \leq x_0 \leq 1$.

$\lim\limits_{x \to x_0} arctg\ x = arctg\ x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} arcctg\ x = arcctg\ x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\ x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} arctg\ x = \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} arcctg\ x = \pi$, $\lim\limits_{x \to \infty} arcctg\ x = 0$.

17.8 Alte limite fundamentale :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}=\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,\ \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ a>0,\ a\neq 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a\in\mathbb{R},\ a>0.$

$\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=a^b\ln a,\ a\in\mathbb{R},\ a>0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\begin{cases}0 \text{ dacă } 0<a<1, a\in\mathbb{R}\\ \infty \text{ dacă } a>1,\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}.$

$\lim\limits_{x\to\infty}a^x\cdot x^n=0,\ \forall\ a\in\mathbb{R},\ a\in(0,1),\ n\in\mathbb{N}^*.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=0,\ n\geq 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^p x}{x^a}=0,\ \forall\ p\in\mathbb{N},\ a>0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}.$

18 Funcţii continue

Fie $E\subset\mathbb{R}$ o mulţime, $x_0\in E$ şi $f:E\to\mathbb{R}$ o funcţie.

Funcţia f e continuă în punctul $x=x_0\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$.

Punctul x_0 se numeşte punct de continuitate. Punctul x_0 se numeşte punct de descontinuitate de primă speţă, dacă fie discontinuă în x_0, iar $f(x_0)$, $f(x_0+0)$ există şi sunt finite.

Definiţie. O funcţie $f:E\to\mathbb{R}$ se numeşte continuă pe $A\subset\mathbb{R}$, dacă f e continuă în fiecare punct x din A.

19 Funcţii derivabile

Funcţii cu derivată într-un punct.

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcţie şi x_0 un punct de acumulare.

Funcţia f are derivată în x_0 dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f\,'(x_0)$ există în $\overline{\mathbb{R}}$.

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ se numeşte derivabilă în x_0 dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\,'(x_0)$ există şi este finită în $\mathbb{R}$.

Orice funcţie derivabilă într+un punct e continuă în acel punct.

Teotemă. Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile în $x_0 \in E \cap E'$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr dat. Atunci funcţiile $f \pm g$, λf, fg, $\frac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$ şi f^g(dacă f^g are sens) sunt derivabile în x_0 şi avem :

i) $(f \pm g)'(x_0) = f\,'(x_0) \pm g'(x_0)$

ii) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f\,'(x_0)$

iii) $(fg)'(x_0) = f\,'(x_0)g\;(x_0) + f(x_0)g\,'(x_0)$

iv) $(\frac{f}{g})'\;(x_0) = \frac{f'(x_0)g\;(x_0) - f(x_0)g\,'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

v) $(f^g)'(x_0) = (gf^{g-1}f^1)(x_0) + (f^g \ln f)(x_0)$.

19.1 Derivata funcţiei compuse a două funcţii.

Fie $f : F \to \mathbb{R}$, $g : E \to F$ două funcţii. Dacă g este derivabilă în $x_0 \in E \cap E\,'$ şi f în $g(x_0) \in F \cap F\,'$ atunci $f \circ g$ e derivabilă în $x_0 \in E$ şi avem : $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

19.2 Derivata funcţiei inverse unei funcţii date.

Fie $f : I \to J$, I, J intervale, o funcţie continuă şi bijectivă şi $f^{-1} : J \to I$ inversa ei. Dacă f e derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f\,'(x_0) \neq 0$, atunci f^{-1} e derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in J$ şi avem $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f\,'(x_0)}$.

19.3 Tabloul de derivare al funcţiilor elementare.

Funcţia	Derivata	Denumirea de derivabilitate
c (constantă)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	cel puţin $(0,\infty)$
x^r	rx^{r-1}	$(0,\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	
$a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$tg\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$ctg\ x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	(-1,1)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	(-1,1)
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

19.4 Tabloul de derivare al funcţiilor compuse.

Funcţia	Derivata	Denumirea de derivabilitate
u		
$u^n, n\geq 1$ întreg	$nu^{n-1}u'$	
u^r	$ru^{r-1}u'$	$(u>0)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u>0)$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$(u>0)$
e^u	$e^u \cdot u'$	
$a^u,\ a>0,\ a\neq 1$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$	
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	
$tg\ u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\cos u \neq 0)$
$ctg\ u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}u'$	$(\sin u \neq 0)$
$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	$(u^2<1)$
$\arccos u$	$-\frac{1}{1+u^2}$	$(u^2<1)$
$arctg\ u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	
$arcctg\ u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$	

19.5 Proprietăţii ale funcţiilor derivabile

Teorema lui Fermat. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivată pe I. În orice punct de extrem local (maxim sau minim) derivata lui f este nulă.

Teorema lui Rolle. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ şi $a, b \in I$ cu $a < b$. Dacă :

1) f e cntinuă pe intervalul $[a, b]$;

2) f e derivabilă pe intervalul deschis (a, b) ;

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci există cel puţin un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $f\ '(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $a, b \in I$ cu $a < b$. Dacă :

1) f e cntinuă pe intervalul $[a, b]$;

2) f e derivabilă pe intervalul deschis (a, b) .

Atunci există cel puţin un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $f\ '(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema lui Cauchy. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $a, b \in I$ cu $a; b$.Dacă :

1) f, g continue pe intervalul inchis $[a, b]$.

2) f, g derivabile pe intervalul deschis (a, b) .

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$

Atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există cel puţin un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\ '(c)}{g\ '(c)}$.

20 Derivate de ordin superior

Formula lui Leibuiz. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ dauă funcţii de n ori derivabilă pe I. Atunci fg este de n ori derivabilă pe I. Atunci fg este de n ori derivabilă pe I şi avem relaţia

$(fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1\ f^{(n-1)}(x) + ... + C_n^{n-1} f\ '(x)g^{(n-1)}(x) + C_n^n\ f(x)g^{(n)}(x)$, $\forall\ x \in I$.

Câteva derivate de ordinul n :

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x \pm a)^{n+1}}$.
5. $(ae^x)^{(n)} = ae^x$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
6. $(x^m)\ ^{(n)} = A_m^n\ x^{m-n}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $1 \leq n \leq m$.
7. $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Formula lui Taylor. Dacă f este o funcţie de n ori derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0 şi $f^{(n)}$ continuă în x_0, atunci are loc formula aproximativă :

$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f\,'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f\,'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ pentru orice $x \in V$, în care eroarea absolută $|\theta(x)|$ satisface condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|\theta(x)|}{(x - x_0)^m} = 0$.

Regulile lui L'Hospital.

1. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in [a, b]$. Presupunem satisfăcute următoarele condiţii :

a) f şi g derivabile pe $[a, b] \setminus \{x_0\}$ şi continue în x_0;

b) $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$;

c) $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0 $(\forall x \in V \setminus \{x_0\})$;

d) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\,'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (*în* $\overline{\mathbb{R}}$);

In aceste condiţii, există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

2. Fie $f, g : (a, \infty] \to \mathbb{R}$, $a > 0$. Presupunem că :

a) f şi g derivabile pe $[a, b]$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = l$ unde $l = 0$, ∞ sau $-\infty$;

c) $g'(x) \neq 0$ pentru orice x suficient de mare $(x \geq A,\ A \geq a)$;

d) există $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f\,'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (*în* $\overline{\mathbb{R}}$);

Atunci există $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

21 Asimptotele funcţiilor reale

21.1 Asimptote orizontale

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ cu $E \subseteq \mathbb{R}$ mulţimii, o funcţie reală şi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definitii : Dreapta $y = y_0$ este asimptotă orizontală a lui f dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

21.2 Asimptote oblice

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie reală cu $E \subseteq \mathbb{R}$.

Definitii : Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ sau $-\infty$ a funcţiei f dacă :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0;$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R};$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}.$

22 Reprezentarea grafică a funcţiilor

Etape de parcurs :

1. Stabilirea domeniului $\Delta_{\max}$ de definiţie al funcţiei.
2. Semnul funcţiei şi eventualele simetrii ale graficului.
3. Limite la capăt, continuitatea funcţiilor, asimptote.
4. Derivata I^{ii}.
5. Studiul derivării a II.
6. Tablou de varietăţi.
7. Trasarea graficului.

23 Primitive

Definiţii. Fie J un interval $\subset \mathbb{R}$ şi $f : J \to \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ astfel încât :

1) F este derivabilă pe J ;

2) $F'(x) = f(x), \forall x \in J$;

Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte integrală nedefinită a funcţiei f şi se notează cu simbolul $\int f(x)dx$.

Teoremă. Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ funcţii care admit primitivele şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcţiile $f + g$, admit deasemenea primitive şi au loc relaţiile :

a) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f\ (x)dx + \int g(x)dx$;

b) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$;

c) $\int f(x)dx = \int f(x)dx + c$;

23.0.1 Tabel de integrale nedefinite

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset(0,\infty)$ $f(x)=x^a,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+b$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=a^x,\ a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}^*$ $f(x)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\|+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}\setminus\{-a,a\}$ $f(x)=\frac{1}{x^2-a^2},\ a\neq 0$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+b$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2},\ a\neq 0$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+b$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$	$\int \sin x\ dx = -\cos x+b$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\cos x$	$\int \cos x\ dx = \sin x+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\ x+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctg\ x+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ $f(x)=\frac{1}{tg\ x}$	$\int tg\ x\ dx = -\ln\|\cos x\|+b$

$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ $f(x)=\frac{1}{ctg\ x}$	$\int ctg\ x\ dx = \ln\|\sin x\|+b$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\ a\neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+b$
$f:J\to\mathbb{R}\ a>0\begin{cases} J\subset(-\infty,-a)\text{ sau}\\ J\subset(a,\infty)\end{cases}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|+b$
$f:J\to\mathbb{R},\ J\subset(-a,a),\ a>0$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+b$

Teoremă. *Formula de integrare prin părţi.* Dacă $f,g:J\to\mathbb{R}$ funcţii derivabile cu derivate continue atunci funcţiile fg, $f'g$ şi fg' admit primitive şi mulţimile lor de primitive şi mulţimile lor de primitive sunt legat prin relaţia :

$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f\ '(x)g(x)dx.$

Prima metodă de schimbare de variabilă.

Teoremă. Fie F, J intervale din $\mathbb{R}$ şi $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile :

a) φ derivabilă pe I ;

b) f admite primitive (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcţia $(f \circ \varphi)\ \varphi'$admite primitive, iar funcţia $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\ \varphi'$, adică :

$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi + b$

Tabel de integrale nedefinite. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivată continuă.

1) $\int \varphi^n(x)\ \varphi'(x)\ dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + b,\ n \in \mathbb{N}.$

2) $\int \varphi^a(x)\ \varphi'(x)\ dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + b,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \varphi(I) \subset (0, \infty).$

3) $\int a^{\varphi(x)}\ \varphi'(x)\ dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + b,\ a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{-1\}.$

4) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + b,\ \varphi(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I.$

5) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a}\right| + b,\ \varphi(x) \neq \pm a,\ \forall\ x \in I,\ a \neq 0.$

6) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{\varphi(x)}{a} + b.$

7) $\int \sin\varphi(x)\ \varphi'(x)\ dx = -\cos\varphi(x) + b.$

8) $\int \cos\varphi(x)\ \varphi'(x)\ dx = \sin\varphi(x) + b.$

9) $\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)} dx = tg\ \varphi(x) + b,\ \varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall\ x \in I.$

10) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)} dx = -ctg\ \varphi(x) + c,\ \varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in I.$

11) $\int tg\ \varphi(x)\ \varphi'(x) dx = -\ln|\cos\varphi(x)| + b,\ \varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall\ x \in I.$

12) $\int ctg\ \varphi(x)\ \varphi'(x) dx = \ln|\sin\varphi(x)| + b,\ \varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in I.$

13) $\int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} = \ln\left[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}\right] + b,\ a \neq 0.$

14) $\int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}} = \ln\left|\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}\right| + b,\ a > 0 \left\{\begin{array}{l} \varphi(I) \subset (-\infty, -a) \text{ sau} \\ \varphi(I) \subset (a, \infty) \end{array}\right. .$

15) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + b,\ a > 0,\ \varphi(I) \subset (-a, a).$

23.1 Primitivele funcţiilor raţionale.

Definiţie. O funcţie $f : E \to \mathbb{R}$(E fiind interval) se numeşte raţională dacă $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$unde P, Q sunt polinoame cu coeficienţi reali şi $Q(x) \neq 0$, $\forall$ $x \in \mathbb{R}$. O funcţie raţională se numeşte simplă dacă are una sin formele :

1) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq a$.

2) $f(x) = \frac{Bx+c}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $b^2 - 4ac < 0$.

Teoremă. Orice funcţie raţională poate fi repretentată sub forma unei sume finite de funcţii raţionale simple, adică dacă $f : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie raţională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, $\forall$ $x \in E$ unde P şi Q sunt polinoame prime între ele şi *dacă* Q se descompune în factori primi sub forma : $Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot (x-a_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdot ... \cdot (x^2+b_px+c_p)^{\beta_p}$, unde $b_i^2 - 4c_i < 0$, $\forall$ $i = \overline{1,r}$, *atunci* $f(x) = L(x) + \sum\limits_{k=1}^{P} \left[\frac{A_k^1}{x-a_k} + \frac{A_k^2}{(x-a_k)^2} + ... + \frac{A_k^{\alpha k}}{(x-a_k)^{\alpha k}}\right] + \sum\limits_{k=1}^{r} \left[\frac{B_k^1 x + C_k^1}{x^2+b_kx+c_k} + ... + \frac{B_k^{\beta r}x + C_k^{\beta r}}{(x^2+b_kx+c_k)^{\beta r}}\right]$ unde L este un polinom cu coeficienţii reali, iar $a_k, b_k, c_k, A_k^i, B_k^i, C_k^i$ sunt numere reale şi $b_k^2 - 4C_k < 0$.

23.2 Primitivele funcţiilor exponenţiale

Integralele nedefinite de forma $\int f(e^x)\ dx$ se calculează cu ajutorul schimbării de variabilă : $\quad e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt \Rightarrow \int(e^x)dx = \int f(\ln t)\frac{1}{t}dt.$

23.3 Primitivele funcţiilor logaritmice.

Integralele de forma $\int f(\ln x)dx$ se calculează cu ajutorul schimbării de variabilă :

$\ln x = t \Rightarrow x = e^t$, $dx = e^t dt \Rightarrow \int f(\ln x)dx = \int f(t) \cdot e^t\ dt.$

23.4 Primitivele funcţiilor trigonometrice

$\int f(\sin x, \cos x)dx$

1) Dacă $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ se face substituţia $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$

$$\Longrightarrow \int f(\sin x, \cos x)\ dx = \int f(\sqrt{1-t^2}, t) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt.$$

2) Dacă $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ se face substituţia $\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$

$$\Longrightarrow \int f(\sin x, \cos x)\ dx = \int f(t, \sqrt{1-t^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

3) Dacă $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ se face substituţia $tg\ x = 1 \Rightarrow x = arctg\ t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$

$\Longrightarrow \int f(\sin x, \cos x)\ dx = \int f(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt.$

4) În toate celelalte cazuri se face substituţia $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg\ t \Rightarrow x = 2arctg\ t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

$\Longrightarrow \int f(\sin x, \cos x)\ dx = \int f(\frac{2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt.$

23.5 Formula lui Leibniz-Newton

Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrală care admite primitive pe $[a, b]$. Atnci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea :

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

23.6 Proprietătii ale funcţiilor integrale.

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$

4) $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ unde $a < \xi < b.$

5) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pozitivă, $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [a, b]$ atunci :

$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

6) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$, atunci :

$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

7) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\ x \in [a, b]$, atunci :

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

8) Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) \overset{def}{=} \int_a^x f(t)dt$, $\forall\ x \in [a, b]$ este o primitivă a lui f care se anulează în punctul a.

23.7 Aplicaţii ale integralelor cu probleme practice

Notăm $\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ şi se numeşte subgraficul funcţiei f. Această mulţime are o arie şi aria sa este :

$aria(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$

Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall\, x \in [a, b]$ atunci mulţimea :

$\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$ cuprinsă între graficele funcţiilor f, g şi dreptele paralele la Oy care intersectează axa Ox în punctele a şi b are arie şi aria sa este :

$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a, b]$. Prin rotirea suprafeţelor în jurul axei Ox ia naştere un corp de rotaţii. Volumul corpului de rotaţie obţinut :

$V = \pi \int_a^b f^{\,2}(x)dx$.

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie derivabilă cu derivată continuă pe (a, b) astfel încât $f\sqrt{1 + (f\,')^2}$ are limite finite în punctele a şi b atunci suprafaţa de rotaţie determinată de f are arie şi :

$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f\,'(x))^2}dx.$

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, cu derivată continuă, atunci graficul său are lungime finită şi

$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}dx.$

24 Elemente de algebră matematică

24.1 Matrice

Se numeşte matrice cu m lini şi n coloane un tablou bidimensional de forma :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Mulţimea tuturor matricelor cu elemente într-un corp k se notează $M_{m,n}(k)$.

Dacă $m = n$ matricea e pătratică.

Dacă matricea $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(k) \Rightarrow C = A + B \Rightarrow C = (C_{ij})$ unde $(C_{ij}) \in M_{m,n}(k)$ şi $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Proprietăţiile adunării matricelor $\forall\ A, B, C \in M_{m,n}$ avem :

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + 0 = 0 + A$;

4) $A + (-A) = (-A) + A$;

24.2 Îmulţirea matricelor cu un scalar.

Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$, $\lambda \in k$ matricea $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ şi $B = \lambda A$ dacă $b_{ij} = \lambda a_{ij} \ \ \forall\ i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Îmulţirea matricelor

Fie $\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \in M_{m,n} \\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n} \end{array}$ .Matricea $C = (c_{ij}) \in M_{m,n}$ se numeşte produsul matricelor A şi B, $C = AB$ dacă : $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Proprietăţiile îmulţirii matricelor :

1)$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$

2)$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0.$

3) $(AB) \cdot C = A \cdot (BC).$

4) $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$

5) $(A + B)C = AC + BC.$

6)$C(A + B) = CA + CB.$

24.3 Transpusa unei matrici

Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$. Matricea t_A se numeşte lrauspusa matricea A dacă $t_A = (a_{ij})\ \begin{array}{l} i = \overline{1,n} \\ j = \overline{1,n} \end{array}$. Ea se obţine din matricea A prin schimbarea linilor cu coloanele şi a coloanelor cu linile.

$$t_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

24.4 Matricea adjunctă a unei matric :

Se numeşte adjuncta unei matricei $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ şi se notează cu A^*

matricea : $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{m2} \\ -- & -- & -- & -- \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{mn} \end{pmatrix}$.

unde A_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij} determinantul ce rezultă eliminând linia şi coloana pe care se află elementul a_{ji}.

O matrice se numeşte nedegenerată, dacă $\det A \neq 0$.

24.5 Matrice inversabile.

Matricea $A \in M_n$ admite o inversă $A^{-1} \in M_n \Leftrightarrow \det A \neq 0$. în plus $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$.

Proprietăţi. $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

24.6 Rangul unei matrice.

Fie matricea $A \in M_{m,n}$. Se numeşte minor al unei matrice de ordinul k determinantul format din k^2 elemente date (păstrând ordinea elementelor). Matricea A are rangul r, dacă A are un minor nenul de ordinul r, iar toţi minorii lui A de ordin mai mare ca r, dacă există, sunt mili. Se scriu *rang* $A = r$.

24.7 Ecuaţii matriciale

$AX = B \Rightarrow x = A^{-1}B$
$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$
$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

24.8 Determinanţi

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Numărul $\alpha = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numeşte determinantul matricei A sau determinant de ordin al doilea şi se notează cu $\det A$.Deci $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Numărul obţinut astfel $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{31}$ se numeşte determinantul de ordinul al treilea sau $\det A$.

Pentru o matrice de ordinul n se dezvoltă determinantul după elementele unei linii "i" astfel :

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{1n}A_{in}$

sau după elementele coloanei "j" astfel :

$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + .. + a_{nj}A_{nj}$.

unde $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} =minor alelementului a_{ij}, determinant de ordinul $n-1$ ce se obţine din A prin eliminarea liniei "i" şi a coloanei "j".

24.9 Proprietăţiile determinanţilor.

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

2) Dacă toate elementele unei coloane sau ale unei linii dintr-o matrice sunt egale cu 0, atunci determinantul e zero.

3) Dacă elementele a două linii sau ale unei coloane sunt egale sau proporţionate, atunci determinantul este zero.

4) Dacă schimbăm între ele două linii sau două coloane ale unei matrice A, obţinând o nouă matrice A' atunci $\det A' = -\det A$.

5) Dacă într-o matrice A îmulţim o linie sau o coloană cu un număr a, obţinând o nouă matrice A', atunci

$\det A' = a \det A$.

6) Orice matrice şi transpusa ei t_A au acelaşi determinant, $\det^t A = \det A$.

7) Dacă într+o matrice A o coloană sau o line este o combinaţie liniară a celorlalte coloane sau linii, atunci $\det A = 0$.

8) Dacă într-o matrice A toate elementele unei linii sau ale unei coloane sunt sume de câte doi termeni atunci $\det A$ se poate scrie ca suma a doi determinanţii.

24.10 Sistemul de n ecuaţii cu n necunoscute.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

D_i se obţine din D prin înlocuirea elementelor din coloana i cu termenii liberi.

Dacă $D \neq 0 \Rightarrow$sistemul are o soluţie unică dată de regula lui Cramer: $x_i = \frac{D_i}{D}$, $i = \overline{1, n}$.

Dacă $D = 0 \Rightarrow$Se calculează rangul matricei.

Teorema lui Rouche-Fontene. O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul să aibă soluţii este ca toţi determinanţii lui caracteristici să fie nuli.

Din matricea $A = (a_{ik})$ a coeficienţilor necunoscutelor se extrage un determinant nenul de ordin maxim p, notat Δ_p, şi numit determinant principal şi se construiesc determinanţii caracteristici, D_c, $c = p+1, p+2, ...m$ prin bondarea determinantului principal orizontal, jos, cu coeficienţii necunoscutelor principale din ecuaţiile rămase, care nu au intrat în formarea determinantului principal, şi "vertical" în dreapta, cu termenii liberi corespunzători.

Dacă $\Delta = 0$ şi cel puţin un determinant caracteristic este diferit de zero, atunci sistemul nu are soluţii.

Dacă $\Delta = 0$ şi toţi determinanţii caracteristici sunt nuli, atunci sistemul este compatibil dar nedeterminat. Se rezolvă cele p ecuaţii principale şi se obşin necunoscutele principale $x_1, x_2..x_p$ în funcţie de $x_{p+1}, ..x_n$. Sistemul are o "nedeterminare" de ordin $n-p$, în sensul că necunoscutele x$_{p+1}, x_{p+2}...x_n$ rămân arbelare.