REZUMAT DE TEORIE PENTRU BAC

CUPRINS

I. ALGEBRĂ

1. Numere reale 3
2. Logaritmi 5
3. Numere complexe 7
4. Inducţia matematică 9
5. Progresii 10
6. Funcţia de gradul I 11
7. Funcţia de gradul al II-lea 12
8. Proprietăţi ale funcţiilor 15
9. Funcţia exponenţială. Funcţia logaritmică 18
10. Combinatorică 20
11. Permutări 22
12. Matrice 24
13. Determinanţi 27
14. Matrice inversabile 29
15. Rangul unei matrice 31
16. Sisteme de ecuaţii liniare 33
17. Legi de compoziţie 35
18. Grupuri 36
19. Inele şi corpuri 38
20. Inele de polinoame 40

II. GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

1. Trigonometrie 44
2. Ecuaţii trigonometrice 47
3. Vectori 49
4. Geometrie analitică 51
5. Aplicaţii ale trigonometriei 53

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Şiruri de numere reale 54

2. Limite de funcţii. Asimptote 57

3. Funcţii continue 61

4. Funcţii derivabile 63

5. Teoreme ale calculului diferenţial 65

6. Regulile lui L'Hospital 69

7. Aplicaţii ale derivatelor 71

8. Reprezentarea grafică a funcţiilor 75

9. Tabel cu derivate şi primitive 77

1. NUMERE REALE

1. Formule de calcul prescurtat

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$

$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$ $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

2. Modulul unui număr real

Definiţie. Pentru orice număr real x, *modulul lui x* este numărul real notat cu $|x|$ şi dat prin:

$$|x| = x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad |x| = -x, \text{ dacă } x < 0.$$

Numărul $|x|$ se mai numeşte *valoarea absolută a lui a.*

Proprietăţi ale modulului:

$\boxed{|x| \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{|x| = 0 \iff x = 0}$ $\boxed{|x| = |-x|,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{|a-b| = |b-a|,\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$

$\boxed{|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0}$ $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}}$

3. Partea întreagă. Partea fracţionară

Definiţie. Pentru orice număr real x, există şi este unic un număr întreg k astfel încât $k \leqslant x < k+1$. Numărul $k \in \mathbb{Z}$ de mai sus se numeşte *partea întreagă a numărului real x* şi se notează cu $[x]$.
Mai putem spune că partea întreagă a numărului real x este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât x.

Proprietăţi ale părţii întregi:

$\boxed{[x] \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{[x] \leqslant x < [x] + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{[x+k] = [x] + k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}.}$

Definiţie. Pentru orice număr real x, se defineşte *partea fracţionară a lui x*, notată cu $\{x\}$, ca fiind diferenţa dintre x şi partea întreagă a lui x, adică $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăţi ale părţii fracţionare:

$\boxed{\{x\} \in [0; 1),\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\{x\} = 0 \iff x \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{\{x+k\} = \{x\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}.}$

4. Puterea cu exponent întreg a unui număr real

Definiţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Definim *puterea lui x de exponent natural n*, notată cu x^n, prin $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$. Dacă $x \neq 0$, prin definiţie, $x^0 = 1$. Fie $x \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Definim $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

5. Rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$. Definim *rădăcina pătrată a lui a*, numărul real notat cu $\sqrt{a}$ şi având proprietăţile: $\sqrt{a} \geqslant 0$ şi $(\sqrt{a})^2 = a$.

Proprietăţi ale rădăcinii pătrate:

$\sqrt{x^2} = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y},\ \forall x, y \geqslant 0$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},\ \forall x \geqslant 0,\ \forall y > 0$

Formulele radicalilor dubli:

$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} - \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$ $\qquad$ $c^2 = a^2 - b,\ c \geqslant 0$

6. Rădăcina cubică a unui număr real

Definiţie. *Rădăcina cubică a numărului $a \in \mathbb{R}$* este numărul notat cu $\sqrt[3]{a}$ astfel încât $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Proprietăţi ale rădăcinii cubice:

$\sqrt[3]{x^3} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^*$

7. Radicalul de ordin n

Definiţie.

- Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, n par. Definim *radicalul de ordin par n al lui a*, numărul real notat cu $\sqrt[n]{a}$ şi având proprietăţile: $\sqrt{a} \geqslant 0$ şi $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
- Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, n impar. Definim *radicalul de ordin impar n al lui a*, numărul real notat cu $\sqrt[n]{a}$ şi având proprietatea $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

8. Puterea cu exponent raţional a unui număr real pozitiv

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ şi $r = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Definim *puterea cu exponent raţional r a lui a* prin $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional:

$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ $\qquad$ $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$ $\qquad$ $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$ $\qquad$ $(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$ $\qquad$ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^s = \dfrac{x^s}{y^s}$

$(x, y \in \mathbb{R}^*;\ r, s \in \mathbb{Q})$

2. LOGARITMI

1. Definiţia logaritmului

Definiţie. Fiind date numerele reale $a > 0$, $a \neq 1$ şi $N > 0$, unica soluţie reală a ecuaţiei $a^x = N$ se numeşte *logaritmul numărului N în baza a* şi se notează $x = \log_a N$. Citim *logaritm în bază a din N.*

Convenţie. Dacă $a = 10$, notăm $\boxed{\log_{10} N = \lg N,}$ numit *logaritmul zecimal al lui N.*
Dacă $a = e$, unde $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $e \approx 2,71$, notăm $\boxed{\log_e N = \ln N,}$ numit *logaritmul natural al lui N.*

2. Condiţiile de existenţă a logaritmului

$$\boxed{\log_a N \text{ există (are sens, este corect definit)} \iff \begin{cases} a > 0,\ a \neq 1 \\ N > 0 \end{cases}}$$

3. Proprietăţi ale logaritmilor

- $\boxed{\log_a N = b \iff N = a^b}$ $(a, N > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbb{R})$
- $\boxed{a^{\log_a N} = N}$ $(a > 0,\ a \neq 1, N > 0)$
- $\boxed{\log_a 1 = 0}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- $\boxed{\log_a a = 1}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- $\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x, y > 0)$
- $\boxed{\log_a x^r = r \cdot \log_a x}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ r \in \mathbb{R})$
- $\boxed{\log_{a^r} x = \frac{1}{r} \cdot \log_a x}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ r \in \mathbb{R}^*)$
- $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x, y > 0)$
- $\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$ $(a, b, c > 0,\ b \neq 1)$

4. Formule de schimbare a bazei

- $\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$ $(a, b, c > 0\ , a, c \neq 1)$
- $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$ $(a, b > 0,\ a, b \neq 1)$

5. Semnul unui logaritm

- Dacă $a, b \in (1, +\infty)$ sau $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a b > 0$.
- Dacă $a \in (1, +\infty), b \in (0, 1)$ sau $a \in (0, 1), b \in (1, +\infty)$, atunci $\log_a b < 0$.

6. Compararea logaritmilor

- Pentru $\boxed{a \in (1, +\infty)}$ şi $N_1, N_2 > 0$ avem: $\boxed{\log_a N_1 < \log_a N_2 \iff N_1 < N_2.}$
- Pentru $\boxed{a \in (0, 1)}$ şi $N_1, N_2 > 0$ avem: $\boxed{\log_a N_1 < \log_a N_2 \iff N_1 > N_2.}$

6. Logaritmarea unei expresii. Logaritmarea unei egalităţi

Fie $a > 0, a \neq 1$.

- Procedeul prin care unei expresii $E > 0$ i se asociază $\log_a E$ se numeşte *logaritmarea expresiei E*.
- Procedeul prin care din egalitatea $E = F$, unde $E, F > 0$, se obţine egalitatea $\log_a E = \log_a F$ se numeşte *logaritmarea egalităţii* $E = F$. Mai mult, are loc: $\boxed{E = F \iff \log_a E = \log_a F.}$

3. NUMERE COMPLEXE

1. Forma algebrică a unui număr complex

- Orice număr complex z se poate scrie în mod unic sub forma $\boxed{z = a + bi, \text{ unde } a,\ b \in \mathbb{R},}$ numită *formă algebrică a lui z*, unde i este un număr cu proprietatea $\boxed{i^2 = -1}$ şi care se numeşte *unitate imaginară.*
- Mulţimea numerelor complexe este $\boxed{\mathbb{C} = \left\{a + bi \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}.}$

2. Puterile unităţii imaginare i

- $\boxed{i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.}$
- $\boxed{i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,}$ unde $k \in \mathbb{N}$.

3. Partea reală şi partea imaginară a unui număr complex

- Fiind dat numărul complex $z = a + bi$, *partea reală* a lui z este $\boxed{\operatorname{Re}(z) = a,}$ *partea imaginară* a lui z este $\boxed{bi}$, iar *coeficientul părţii imaginare* a lui z este $\boxed{\operatorname{Im}(z) = b.}$
- Un număr complex este număr real dacă şi numai dacă are partea imaginară 0, adică

$$\boxed{z = a + bi \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow b = 0.}$$

4. Egalitatea a două numere complexe

- Două numere complexe sunt egale dacă şi numai dacă au părţile reale egale şi părţile imaginare egale, adică

$$\boxed{a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.} \qquad \text{Caz particular: } \boxed{a + bi = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.}$$

5. Conjugatul unui număr complex

- *Conjugatul* numărului complex $z = a + bi$ este numărul complex $\boxed{\overline{z} = a - bi.}$
- Proprietăţi ale conjugării:

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},} \quad \boxed{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},} \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \quad \boxed{\overline{\overline{z}} = z,} \ \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}.}$$

6. Modulul unui număr complex

- *Modulul* numărului complex $z = a + bi$ este numărul real $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$

- Proprietăţi ale modulului:

$$\boxed{|z| \geqslant 0,}\ \forall z \in \mathbb{C}; \quad \boxed{|z| = 0 \iff z = 0.}$$

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \quad \boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$\boxed{|z^n| = |z|^n,}\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2,}\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$ (Inegalitatea triunghiulară.)

7. Rezolvarea ecuaţiei de gradul 2

- Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $\Delta < 0$ are două rădăcini complexe conjugate date de formulele:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.}$$

8. Forma trigonometrică a unui număr complex

- Pentru orice număr complex nenul $z = a + bi$, există şi sunt unice numerele reale $r > 0$ şi $t \in [0, 2\pi)$ date de formulele

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$ (r este modulul lui z);

$$\boxed{\cos t = \frac{a}{r},\ \sin t = \frac{b}{r}}$$ (t este argumentul redus al lui z).

astfel încât

$$\boxed{z = a + bi = r(\cos t + i \sin t).}$$

9. Operaţii cu numere complexe în formă trigonometrică

- Dacă $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ şi $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$, atunci

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)];}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)].}$$

- Dacă $z = r(\cos t + i \sin t)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\boxed{z^n = r^n \cdot (\cos nt + i \sin nt).}$$ (Formula lui Moivre.)

10. Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex

- Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi numărul complex $w = r \cdot (cost + i \sin t)$.

Atunci ecuaţia $z^n = w$ are n rădăcini complexe distincte date de:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right),}$$ unde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

- Dacă ε este o rădăcină complexă şi nereală de ordin 3 a unităţii, atunci

$$\boxed{\varepsilon^3 = 1}\ \text{şi}\ \boxed{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.}$$

4. INDUCŢIA MATEMATICĂ

Principiul inducţiei matematice

Fie n_0 un număr natural fixat şi, pentru fiecare $n \geqslant n_0$, fie propoziţia $p(n)$. Dacă:

1. propoziţia $p(n_0)$ este adevărată

2. implicaţia $p(k) \implies p(k+1)$ este adevărată, $\forall k \geqslant n_0$,

atunci propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant n_0$.

Metoda inducţiei matematice înseamnă aplicarea principiului inducţiei matematice. Aceasta comportă parcurgerea a două etape:

Etapa I (verificare). Se demonstrează că propoziţia $p(n_0)$ este adevărată.

Etapa a II-a (demonstraţie). Se presupune că propoziţia $p(k)$ este adevărată şi se demonstrează că propoziţia $p(k+1)$ este, de asemenea, adevărată.

În concluzie, rezultă că propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant n_0$.

Observaţie. Există şi o altă variantă a metodei inducţiei matematice, obţinută prin aplicarea aceluiaşi principiu al inducţiei matematice:

Etapa I (verificare). Se demonstrează că propoziţia $p(n_0)$ este adevărată.

Etapa a II-a (demonstraţie). Se presupune că propoziţiile $p(n_0), p(n_0+1), \ldots, p(k)$ sunt adevărate şi se demonstrează că propoziţia $p(k+1)$ este, de asemenea, adevărată.

În concluzie, rezultă că propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant n_0$.

5. PROGRESII

1. Progresii aritmetice

Definiţie. *Progresia aritmetică* este un şir de numere cu proprietatea că fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen prin adunarea cu acelaşi număr numit *raţia progresiei aritmetice.*

Exemplu. Şirul 2, 4, 6, 8, 10, ... este o progresie aritmetică de raţie $r = 2$.

- $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ este progresie aritmetică de raţie } r \Longleftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, \quad \forall n \geqslant 2}$
- $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ este progresie aritmetică de raţie } r \Longleftrightarrow a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \quad \forall n \geqslant 2}$
- Numărul termenilor aflaţi în progresie aritmetică este $\boxed{n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1}$
- $\boxed{x,\ y,\ z \text{ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice} \Longleftrightarrow y = \dfrac{x+z}{2}}$
- Suma primilor n termeni ai unei progresiei aritmetice:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

2. Progresii geometrice

Definiţie. *Progresia geometrică* este un şir de numere cu proprietatea că fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen prin înmulţirea cu acelaşi număr nenul numit *raţia progresiei geometrice.*

Exemplu. Şirul 1, 3, 9, 27, 81, ... este o progresie geometrică de raţie $q = 3$.

- $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 1} \text{ este progresie geometrică de raţie } q \Longleftrightarrow b_n = b_{n-1}\cdot q, \quad \forall n \geqslant 2}$
- $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 1} \text{ este progresie geometrică de raţie } q \Longleftrightarrow b_n = b_1\cdot q^{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2}$
- $\boxed{x,\ y,\ z \text{ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice} \Longleftrightarrow y^2 = x\cdot z}$
- Suma primilor n termeni ai unei progresiei geometrice:

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1\cdot\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

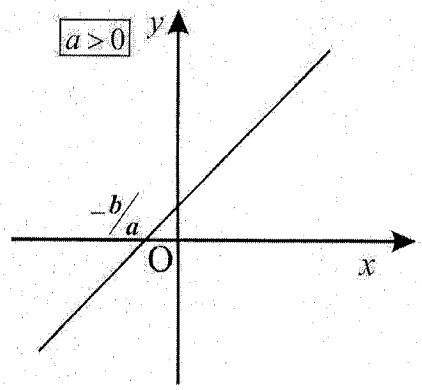
6. FUNCŢIA DE GRADUL I

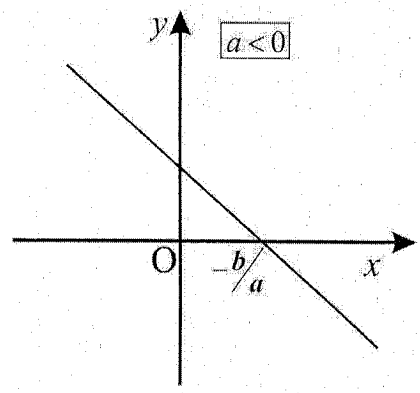
1. Definiţia funcţiei de gradul I

Definiţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ se numeşte *funcţie de gradul I.*

2. Graficul funcţiei de gradul I

- Dacă $\boxed{a > 0,}$ atunci graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă care "urcă".
- Dacă $\boxed{a < 0,}$ atunci graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă care "coboară".
- Dreapta corespunzătoare graficului intersectează axa Ox în $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ şi axa Oy în $B(0; b)$.





3. Monotonia funcţiei de gradul I

- Dacă $\boxed{a > 0,}$ atunci funcţia de gradul I este strict crescătoare.
- Dacă $\boxed{a < 0,}$ atunci funcţia de gradul I este strict descrescătoare.

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4. Semnul funcţiei de gradul I

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$ $+$	0	$-$ $-$	$-$

7. FUNCŢIA DE GRADUL 2

1. Ecuaţia de gradul 2

- $\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ se numeşte *ecuaţie de gradul 2.*
- $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ se numeşte *discriminantul ecuaţiei.*
- Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei de gradul 2 este dat de următoarea clasificare:

$$\boxed{\Delta > 0 \Longleftrightarrow \text{ecuaţia are două rădăcini reale şi distincte: } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};}$$

$$\boxed{\Delta = 0 \Longleftrightarrow \text{ecuaţia are două rădăcini reale şi egale: } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a};}$$

$$\boxed{\Delta < 0 \Longleftrightarrow \text{ecuaţia nu are rădăcini reale.}}$$

- Rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei de gradul 2 verifică *relaţiile lui Viéte*:

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

- Formule utile:

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P}$$

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP}$$

- Dacă rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$ sunt x_1 şi x_2, atunci

$$\boxed{aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)}$$

- Ecuaţia de gradul 2 ale cărei rădăcini sunt numerele x_1 şi x_2 este

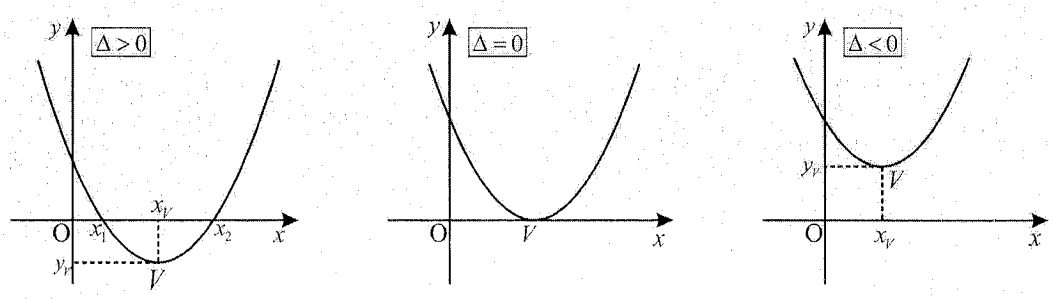
$\boxed{x^2 - Sx + P = 0,}$ unde $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1 \cdot x_2$.

2. Definiţia şi forma canonică a funcţiei de gradul 2

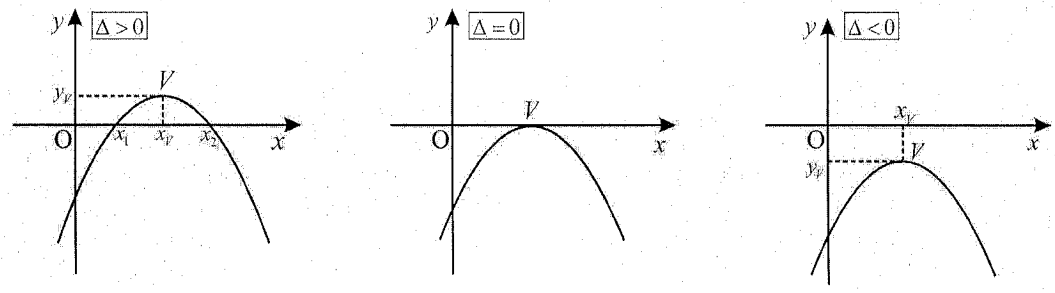
- $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ se numeşte *funcţie de gradul 2.*
- *Forma canonică* a funcţiei de gradul 2 este $\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.}$

3. Graficul funcţiei de gradul 2

- Dacă $\boxed{a > 0,}$ atunci graficul funcţiei de gradul 2 este o parabolă cu vârful în jos.



- Dacă $\boxed{a < 0,}$ atunci graficul funcţiei de gradul 2 este o parabolă cu vârful în sus.



Observaţii

- Numărul punctelor de intersecţie cu axa Ox:
  - parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte $\iff \Delta > 0$;
  - parabola este tangentă axei $Ox \iff \Delta = 0$;
  - parabola nu intersectează axa $Ox \iff \Delta < 0$.
- Vârful V al parabolei are coordonatele $\boxed{x_V = -\dfrac{b}{2a},\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}.}$
- Parabola are axă de simetrie, dreapta verticală de ecuaţie $\boxed{x = x_V.}$

4. Intervale de monotonie şi puncte de extrem

$\boxed{\text{Cazul } \ a > 0.}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

- f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.
- f admite valoarea minimă $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
- Imaginea funcţiei f este $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

Cazul $a < 0.$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

- f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
- f admite valoarea maximă $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Imaginea funcţiei f este $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

5. Semnul funcţiei de gradul 2

Cazul $\Delta > 0.$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		acelaşi semn cu a	0	semn contrar lui a	0	acelaşi semn cu a	

Cazul $\Delta = 0.$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x)$		acelaşi semn cu a	0	acelaşi semn cu a	

Cazul $\Delta < 0.$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		acelaşi semn cu a	

Observaţie:

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

8. PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR

1. Noţiunea de funcţie, imaginea unei funcţii, graficul unei funcţii

Definiţie. Fiind date mulţimile nevide A şi B, spunem că am definit o funcţie f pe mulţimea A cu valori în mulţimea B, dacă, printr-un anumit procedeu (formulă, lege, convenţie, etc.), fiecărui element x din A i-am asociat un unic element din B, notat $f(x)$.

- Pentru o funcţie definită pe A cu valori în B folosim notaţia $f : A \to B$.
- Mulţimea A se numeşte *domeniu de definiţie*, iar mulţimea B se numeşte *codomeniu*.
- Elementul $f(x)$ din mulţimea B se numeşte *imaginea elementului x prin funcţia f*.
- Imaginile tuturor elementelor din domeniu formează o submulţime a codomeniului numită *imaginea funcţiei f*. Aşadar, $\boxed{\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A \text{ astfel încât } y = f(x)\}}$.
- Dacă $S \subset A$, atunci mulţimea $\boxed{f(S) = \{y \in B \mid \text{există } x \in S \text{ astfel încât } y = f(x)\}}$ se numeşte *imaginea mulţimii S prin funcţia f*.
- Funcţiile $f : A \to B$ şi $g : A' \to B'$ sunt egale dacă $A = A'$, $B = B'$ şi $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.
- Fiind dată funcţia $f : A \to B$, mulţimea $\boxed{G_f = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b = f(a)\}}$ se numeşte *graficul funcţiei f*. Dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, atunci f este o *funcţie numerică*, iar graficul ei se poate reprezenta geometric într-un sistem de axe ortogonale.

2. Monotonia funcţiilor numerice

Definiţie. Fie funcţia $f : A \to B$, unde A, $B \in \mathbb{R}$, iar A' este o submulţime a lui A.
Atunci, pe mulţimea A', funcţia f este:
- **crescătoare** dacă $\forall x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- **strict crescătoare** dacă $\forall x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **descrescătoare** dacă $\forall x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- **strict descrescătoare** dacă $\forall x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **monotonă** dacă este crescătoare pe A' sau descrescătoare pe A'.
- **strict monotonă** dacă este strict crescătoare pe A' sau strict descrescătoare pe A'.

3. Funcţii pare, funcţii impare

Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$ o submulţime simetrică faţă de origine (adică $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$).
Spunem că o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este:
- *funcţie pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$;
- *funcţie impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy, iar graficul unei funcţii impare este simetric faţă de originea O a sistemului de axe.

4. Funcţii periodice

Definiţie. Fie $T \neq 0$ fixat şi o mulţime $D \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall x \in D \Rightarrow x - T \in D$ şi $x + T \in D$.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este *periodică* de perioadă T, dacă $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Observaţie. În condiţiile definiţiei de mai sus, orice număr kT ($k \in \mathbb{Z}$) este perioadă a funcţiei f.

Definiţie. Dacă există cea mai mică perioadă strict pozitivă, aceasta se numeşte *perioadă principală a funcţiei* f.

5. Funcţii mărginite

Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$. Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă imaginea funcţiei este o mulţime mărginită, adică

$$\text{există } m,\ M \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } m \leqslant f(x) \leqslant M,\ \forall x \in D.$$

Putem spune echivalent că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă

$$\text{există } K > 0 \text{ astfel încât } |f(x)| \leqslant K,\ \forall x \in D.$$

O funcţie este mărginită dacă şi numai dacă graficul ei este situat între două drepte paralele la axa Ox.

6. Funcţii injective, funcţii surjective, funcţii bijective

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ este *injectivă* dacă

$$\forall x_1,\ x_2 \in A \text{ cu } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Teoremă. O funcţie $f : A \to B$ este *injectivă* dacă şi numai dacă

$$\forall x_1,\ x_2 \in A \text{ cu } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Observaţie. Dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, atunci f este injectivă dacă şi numai dacă orice paralelă dusă la axa Ox, prin punctele codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct. (Interpretarea geometrică a injectivităţii.)

Teoremă. Dacă $f : A \to B$ este o funcţie numerică strict monotonă (strict crescătoare pe A sau strict descrescătoare pe A), atunci f este injectivă.

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ astfel încât } y = f(x).$$

Teoremă. O funcţie $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} f = B$.

Observaţie. Dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, atunci f este surjectivă dacă şi numai dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct. (Interpretarea geometrică a surjectivităţii.)

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ este *bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Teoremă. O funcţie $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă şi numai dacă

$$\forall y \in B,\ \exists! x \in A \text{ astfel încât } y = f(x).$$

Observaţie. Dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, atunci f este bijectivă dacă şi numai dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului intersectează graficul funcţiei în exact un punct. (Interpretarea geometrică a bijectivităţii.)

7. Compunerea funcţiilor, funcţii inversabile

Definiţie. Fiind date funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ definim *funcţia compusă a lui g cu f*, în această ordine, notată cu $g \circ f$, prin

$$g \circ f : A \to C,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ oricare ar fi } x \in A.$$

Teoremă. Operaţia de compunere a funcţiilor este asociativă, adică

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f), \text{ oricare ar fi } f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D.$$

Definiţie. Fiind dată mulţimea nevidă A, definim *funcţia identică a mulţimii A*, notată cu 1_A, prin

$$1_A : A \to A,\ 1_A(x) = x, \text{ oricare ar fi } x \in A.$$

Teoremă. Fiind dată funcţia $f : A \to B$, avem $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Definiţie. Spunem că o funcţie $f : A \to B$ este *inversabilă* dacă există o funcţie $f^{-1} : B \to A$ astfel încât

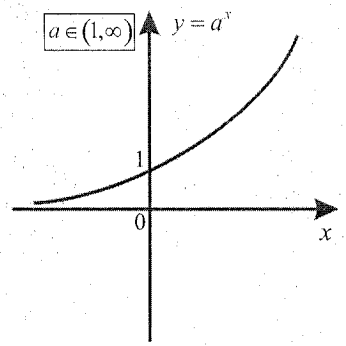
$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ f^{-1} = 1_B.$$

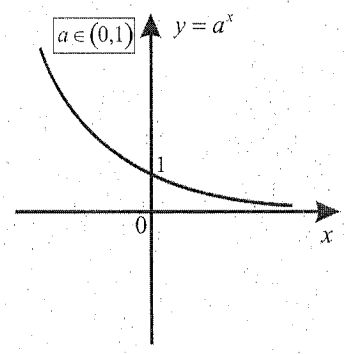
Teoremă. O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

9. FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ FUNCŢIA LOGARITMICĂ

1. Funcţia exponenţială

Pentru $a > 0$, $a \neq 1$, definim $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, numită *funcţie exponenţială de bază* a. Figurile de mai jos, redau graficul funcţiei exponenţiale de bază supraunitară, respectiv de bază subunitară.





Proprietăţi ale funcţiei exponenţiale

- Monotonia funcţiei exponenţiale:

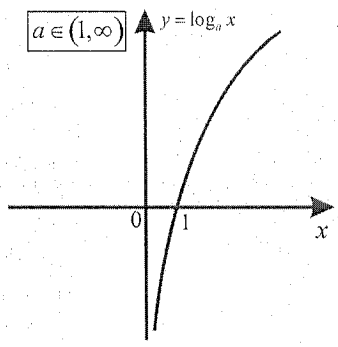
$$\boxed{a \in (1, \infty) \Longrightarrow f \ s \nearrow} \text{ adică } \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ cu } x_1 < x_2, \text{ avem } a^{x_1} < a^{x_2}}$$

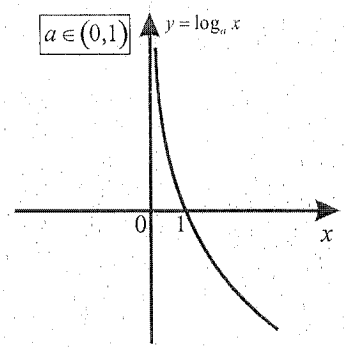
$$\boxed{a \in (0, 1) \Longrightarrow f \ s \searrow} \text{ adică } \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ cu } x_1 < x_2, \text{ avem } a^{x_1} > a^{x_2}}$$

- Funcţia exponenţială este injectivă. Prin urmare, dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $a^{x_1} = a^{x_2}$, atunci $x_1 = x_2$.
- Funcţia exponenţială este surjectivă. Fiind şi injectivă, rezultă că funcţia exponenţială este bijectivă.
- Funcţia exponenţială este inversabilă; inversa ei este funcţia logaritmică.

2. Funcţia logaritmică

Pentru $a > 0$, $a \neq 1$, definim $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, numită *funcţie logaritmică de bază* a. Figurile de mai jos redau graficul funcţiei exponenţiale de bază supraunitară, respectiv de bază subunitară.





Proprietăţi ale funcţiei logaritmice

- Monotonia funcţiei logaritmice:

$$\boxed{a \in (1, \infty) \Longrightarrow f \ s \nearrow} \text{ adică } \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ cu } x_1 < x_2, \text{ avem } \log_a x_1 < \log_a x_2}$$

$$\boxed{a \in (0, 1) \Longrightarrow f \ s \searrow} \text{ adică } \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ cu } x_1 < x_2, \text{ avem } \log_a x_1 > \log_a x_2}$$

- Funcţia logaritmică este injectivă. Prin urmare, dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $\log_a x_1 = \log_a x_2$, atunci $x_1 = x_2$.
- Funcţia logaritmică este surjectivă. Fiind şi injectivă, rezultă că funcţia logaritmică este bijectivă.
- Funcţia logaritmică este inversabilă; inversa ei este funcţia exponenţială.

10. COMBINATORICĂ

1. Permutări

Definiţie. Fie A o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Numim *permutare a mulţimii* A un $n-$uplu ordonat format cu toate elementele lui A. Notăm cu P_n numărul permutărilor mulţimii A.

Exemplu. Pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$ permutările sunt: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Teoremă. Numărul permutărilor de n obiecte este: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Prin convenţie, $0! = 1$.

Aplicaţie. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu cifrele mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

Rezolvare. Calculând numărul permutărilor celor 4 elemente ale mulţimii A, obţinem $P_4 = 4! = 24$, deci există 24 numere care verifică cerinţele problemei.

2. Aranjamente

Definiţie. Fie A o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Numim *aranjament de n elemente luate câte k* un $k-$uplu ordonat format din k elemente din A. Notăm cu A_n^k numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k.

Exemplu. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Aranjamentele de 4 elemente luate câte 2 sunt:

$$\begin{array}{cccccc} (1,2), & (2,1), & (1,3), & (3,1), & (1,4), & (4,1), \\ (2,3), & (3,2), & (2,4), & (4,2), & (3,4), & (4,3). \end{array}$$

Teoremă. Numărul aranjamentelor de n obiecte luate câte k este: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Aplicaţie. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu cifre din $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Rezolvare. Calculăm numărul aranjamentelor de 6 obiecte luate câte 4.

Astfel, $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, deci există 360 de numere.

3. Combinări

Definiţie. Fie A o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Numim *combinare de n elemente luate câte k* orice submulţime formată din k elemente din A. Notăm cu C_n^k numărul combinărilor de n elemente luate câte k.

Exemplu. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Combinările de 5 elemente luate câte 3 sunt submulţimile:

$$\begin{array}{ccccc} \{1,2,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,2,5\}, & \{1,3,4\}, & \{1,3,5\}, \\ \{1,4,5\}, & \{2,3,4\}, & \{2,3,5\}, & \{2,4,5\}, & \{3,4,5\}. \end{array}$$

Teoremă. Numărul combinărilor de n obiecte luate câte k este: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Aplicaţie. Un grup, format din 8 bărbaţi şi 10 femei, trebuie să îşi aleagă un comitet reprezentativ format din 2 bărbaţi şi 3 femei. În câte moduri poate fi ales comitetul?

Rezolvare. Bărbaţii pot fi aleşi în $C_8^2 = 28$ moduri, iar femeile pot fi alese în $C_{10}^3 = 120$ moduri. Prin urmare, există $C_8^2 \cdot C_{10}^3 = 28 \cdot 120 = 3360$ moduri de alegere a comitetului reprezentativ.

Proprietăţi ale combinărilor:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. (formula combinărilor complementare)
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n-1$. (formula de recurenţă)

4. Binomul lui Newton

Teoremă. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, are loc formula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

numită *formula binomului lui Newton.*

- Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots C_n^{n-1}, C_n^n$ sunt numite *coeficienţi binomiali ai dezvoltării.*
- Dezvoltarea conţine $n+1$ termeni.
- Termenul general al dezvoltării este: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, unde $k \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$.
- Suma tuturor coeficienţilor binomiali este dată de formula: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
- Suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar şi suma coeficienţilor termenilor de rang par sunt egale. În plus: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

5. Alte probleme de numărare

- Dacă un obiect A poate fi ales în n moduri şi un obiect B poate fi ales în p moduri, atunci perechea ordonată (A, B) poate fi aleasă în $n \cdot p$ moduri. În general, dacă obiectul A_1 poate fi ales în n_1 moduri, obiectul A_2 poate fi ales în n_2 moduri şi aşa mai departe, obiectul A_k poate fi ales în n_k moduri, atunci $k-$uplul ordonat $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ poate fi ales în $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ moduri. (Regula produsului.)
- Numărul submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este egal cu 2^n.
- Dacă A şi B sunt mulţimi finite cu $\text{card}(A) = a \in \mathbb{N}^*$ şi $\text{card}(B) = b \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul funcţiilor $f : A \to B$ este egal cu b^a.
- Dacă A şi B sunt mulţimi finite cu $\text{card}(A) = a \in \mathbb{N}^*$, $\text{card}(B) = b \in \mathbb{N}^*$ şi $b \geqslant a$, atunci numărul funcţiilor injective $f : A \to B$ este egal cu A_b^a.

11. PERMUTĂRI

Definiţie. Orice funcţie bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se numeşte *permutare de grad n*.

Prin convenţie, permutarea σ se notează $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Notăm cu S_n mulţimea permutărilor de grad n.

Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ se numeşte *permutare identică*.

Numărul tuturor permutărilor de gradul n este egal cu $n!$ adică card $(S_n) = n!$

Exemplu. Mulţimea S_3 are $3! = 6$ elemente. Mai precis:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definiţie. Fie permutările $\sigma, \tau \in S_n$. Definim *produsul* sau *compunerea* permutărilor σ şi τ, în această ordine, ca fiind operaţia prin care se obţine permutarea $\sigma \circ \tau \in S_n$.

În locul notaţiei $\sigma \circ \tau$ se preferă notaţia $\sigma\tau$ şi astfel:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Notăm $\sigma^2 = \sigma\sigma$, $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$, ..., $\sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

Exemplu. Pentru permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Produsul (compunerea) permutărilor are următoarele proprietăţi:

1. *Produsul permutărilor este asociativ*, adică:

$$(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi), \quad \forall \sigma, \tau, \varphi \in S_n.$$

2. Permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ este *element neutru* pentru produsul permutărilor, adică:

$$\sigma e = e\sigma = \sigma, \quad \forall \sigma \in S_n.$$

3. *Orice permutare are inversă*, adică:

$$\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n \text{ astfel încât } \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

Permutarea σ^{-1} se numeşte *inversa permutării* σ.

Observaţie. Produsul permutărilor nu este comutativ, în sensul că există $\sigma, \tau \in S_n$ astfel încât $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Exemplu. Pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, inversa este $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Definiţie. Fiind dată permutarea $\sigma \in S_n$, se numeşte *inversiune* a lui σ orice pereche ordonată (i, j) cu $1 \leqslant i < j \leqslant n$, astfel încât $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Notăm cu $\mathrm{m}(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{m}(\sigma)}$ se numeşte *signatura* permutării σ.

- Dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, atunci σ se numeşte *permutare pară*.
- Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci σ se numeşte *permutare impară*.

Exemplu. Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, avem $\mathrm{m}(\sigma) = 3$ şi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$, adică σ este permutare impară.

Signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor permutărilor, adică:

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \quad \forall \sigma, \tau \in S_n.$$

În consecinţă:

$$\varepsilon(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_p) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \ldots \varepsilon(\sigma_p), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_p \in S_n, \ \forall p \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$\varepsilon(\sigma^p) = (\varepsilon(\sigma))^p, \quad \forall \sigma \in S_n, \ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

12. MATRICE

1. Noţiunea de matrice

Definiţie. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Numim *matrice de tipul* (m, n) o funcţie $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$. Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, atunci vom nota pe A sub forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

adică un tablou cu m linii şi n coloane ce cuprinde valorile funcţiei A. În loc de matrice de tipul (m, n) se mai spune *matrice cu m linii şi n coloane.* Numerele complexe a_{ij} se numesc *elementele matricei A.*

De multe ori pentru matricea A se mai foloseşte notaţia prescurtată $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mulţimea matricelor de tipul (m, n) având elemente numere complexe.

Două matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt egale dacă şi numai dacă au elementele respectiv egale, adică $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cazuri particulare:

- Dacă $m = 1$, atunci matricea A este de tipul $(1, n)$, se numeşte *matrice linie* şi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

- Dacă $n = 1$, atunci matricea A este de tipul $(m, 1)$, se numeşte *matrice coloană* şi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- Dacă $m = n$, atunci matricea A este de tipul (n, n) şi se numeşte *matrice pătratică de ordinul n.*

Notăm cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulţimea matricelor pătratice de ordin n având elemente complexe.

Pentru o matrice pătrtică de ordin n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ se numeşte *diagonala principală a matricei A*, iar suma elementelor de pe diagonala principală se numeşte *urma matricei A* şi se notează cu $\operatorname{tr}(A)$. Aşadar,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \in \mathbb{C}.$$

2. Operaţii cu matrice

1. Adunarea matricelor. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Definim matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, , \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matricea C se numeşte *suma dintre matricele A şi B* şi se notează $C = A + B$, iar operaţia prin care oricăror două matrice A şi B din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază suma lor se numeşte *adunare.*

Observaţie. Adunarea a două matrice se poate efectua numai dacă matricele sunt de acelaşi tip.

Adunarea matricelor are următoarele proprietăţi:

- *Adunarea este asociativă*, adică $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \implies (A + B) + C = A + (B + C)$.
- *Adunarea este comutativă*, adică $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \implies A + B = B + A$.
- *Element neutru.* Matricea de tipul (m, n) ale cărei elemente sunt toate egale cu 0 se notează cu $O_{m,n}$ şi se numeşte *matricea nulă.* Matricea nulă este element neutru pentru adunarea matricelor, adică $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- *Orice matrice are o matrice opusă*, adică pentru orice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ există matricea $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ numită *opusă a matricei A* astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$.

Observaţie. Pentru $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ suma $A + (-B)$ se notează mai simplu $A - B$ şi se numeşte *diferenţa dintre A şi B.* Operaţia prin care oricăror două matrice A şi B din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază diferenţa lor se numeşte *scădere.*

2. Înmulţirea matricelor. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = (b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Definim matricea $C = (c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, unde

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ \forall i \in \{1, 2, , \ldots, m\},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Matricea C se numeşte *produsul dintre matricele A şi B* (în această ordine) şi se notează $C = A \cdot B$, iar operaţia prin care oricăror două matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ li se asociază produsul lor lor se numeşte *înmulţire.*

Observaţie. Are sens să vorbim despre produsul matricei A cu matricea B (în această ordine) numai dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B.

Înmulţirea matricelor are următoarele proprietăţi:

- *Înmulţirea este asociativă*, în sensul că $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- *Înmulţirea matricelor este distributivă la stânga şi la dreapta faţă de adunare*, în sensul că
$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \implies A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \implies (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$
- *În mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există un element neutru facă de înmulţire.* Matricea pătratică de ordin n
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
are proprietatea că oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are loc $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Observaţie. Înmulţirea matricelor nu este comutativă în sensul că, în general, pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3. Înmulţirea cu scalari a matricelor. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$. Definim matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, unde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, , \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matricea B se numeşte *produsul dintre numărul α (sau scalarul α) şi matricea A* (în această ordine) şi se notează $B = \alpha \cdot A$, iar operaţia prin care oricărui scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ şi oricărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază produsul $\alpha \cdot A$ se numeşte *înmulţire cu scalari (la stânga).*

Înmulţirea cu scalari a matricelor are următoarele proprietăţi:

- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, atunci $1 \cdot A = A$.
- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ şi $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$.
- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ şi $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$.
- Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ şi $a \in \mathbb{C}$, atunci $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$.
- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ şi $a \in \mathbb{C}$, atunci $a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B$.

3. Transpusa unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $A^t = (a^t_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, unde $a^t_{kl} = a_{lk}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se numeşte *transpusa matricei A.*

Matricea A^t se obţine din matricea A astfel: prima linie din A devine prima coloană din A^t, a doua linie din A devine a doua coloană din A^t şi aşa mai departe, a $n-$a linie din A devine a $n - a$ coloană din A^t. Mai precis:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}).$$

13. DETERMINANŢI

1. Noţiunea de determinant

Definiţie. Fiind dată matricea pătratică $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, numim *determinant* al său numărul complex $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$, unde S_n este mulţimea tuturor permutărilor de gradul n şi $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ.

Cazuri particulare:

- Dacă $n = 1$, atunci $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.
- Dacă $n = 2$, atunci $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
- Dacă $n = 3$, atunci

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

2. Proprietăţi ale determinanţilor

1. Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse, adică dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A) = \det(A^t)$.

2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul să este nul.

5. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un număr α obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.

6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale, atunci determinantul matricei este nul.

7. Dacă elementele uni linii ale unui determinant sunt scrise ca sume de câte doi termeni, atunci determinantul se poate scrie ca sumă de doi determinanţi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

O proprietate asemănătoare are loc şi pentru coloane:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j}+a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j}+a''_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj}+a''_{1j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Dacă o linie (sau o coloană) a unei matrice este o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei este nul.

9. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci matricea obţinută are acelaşi determinant ca şi matricea A.

3. Calculul determinanţilor

Calculul determinantului $d = |a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de ordin n se poate reduce la calculul unui anumit număr de minori de ordin $n-1$.

Definiţie. Determinantul de ordin $n-1$ care se obţine pin eliminarea liniei i şi a coloanei j din determinantul d se numeşte *minorul elementului* a_{ij} şi se notează cu d_{ij}. Numărul $\boxed{\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}}$ se numeşte *complementul algebric al elementului* a_{ij} *în determinantul* d.

Teoremă. Fie determinantul $d = |a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de ordin n. Atunci pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, are loc egalitatea $\boxed{d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in},}$ numită *dezvoltarea determinantului* d *după linia* i.

De asemenea, pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, are loc egalitatea $\boxed{d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \ldots + a_{nj}\delta_{nj},}$ numită *dezvoltarea determinantului* d *după coloana* j.

4. Formula Cauchy-Binet

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Consecinţe. a) $\det(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdots \det(A_k)$, $\forall A_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall k \geqslant 1$;

b) $\det(A^k) = (\det(A))^k$, $\forall A_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall k \geqslant 1$.

14. MATRICE INVERSABILE

1. Matrice inversabile. Inversa unei matrice inversabile

Definiţie. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este *inversabilă* dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordin n.

Matricea B se numeşte *inversa matricei* A şi se notează cu A^{-1}, deci $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.}$

Observaţie. Matricea A^{-1} definită mai sus este, de asemenea, inversabilă şi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Teoremă. Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

Teoremă. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$.

În acest caz, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, unde A^* este matricea adjunctă a matricei A.

2. Calculul inversei unei matrice

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

<u>**Etapa I.**</u> Se calculează $\det(A)$.

- Dacă $\det(A) = 0$, atunci A nu este inversabilă şi ne oprim.
- Dacă $\det(A) \neq 0$, atunci A este inversabilă şi trecem la etapa următoare.

<u>**Etapa a II-a.**</u> Se scrie matricea transpusă a matricei A :

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>**Etapa a III-a.**</u> Se scrie matricea adjunctă a matricei A :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ji} din matricea A^t : $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}.}$ (d_{ij} este minorul lui A^t rămas după eliminarea liniei i şi coloanei j).

<u>**Etapa a IV-a.**</u> Se scrie matricea inversă a matricei A :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*.}$$

3. Exemple

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se afle dacă A este inversabilă şi în caz afirmativ să se calculeze A^{-1}.

Rezolvare.

Etapa I. Calculăm determinantul lui A : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow A$ inversabilă.

Etapa a II-a. Scriem matricea transpusă: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Etapa a III-a. Calculăm matricea adjunctă: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Avem: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, unde $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ s-a format prin eliminarea liniei 1 şi coloanei 1 din matricea A^t.

Apoi $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, unde $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ s-a format prin eliminarea liniei 1 şi coloanei 2 din matricea A^t.

În mod asemănător, obţinem: $A_{13} = -5$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = 5$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = 5$, deci $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Etapa a IV-a. Calculăm matricea inversă: $A^{-1} = \dfrac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

b) Demonstraţi că, dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă şi calculaţi A^{-1}.

Rezolvare. a) Calcul direct. b) Mai întâi, $A \cdot A^t = \alpha I_4 \Longrightarrow \det(A \cdot A^t) = \det(\alpha \cdot I_4) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \det(A) \cdot \det(A^t) = \alpha^4 \Longrightarrow (\det(A))^2 = \alpha^4 \Longrightarrow \det(A) = \alpha^2$.

Evident, $\alpha \neq 0$, deoarece, în caz contrar, dacă $\alpha = a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$ am obţine $a = b = c = d = 0$, adică $A = O_4$, în contradicţie cu ipoteza $A \neq O_4$. Prin urmare, $\det(A) = \alpha^2 \neq 0$, deci A este inversabilă. Folosind acum $A \cdot A^t = A^t \cdot A = \alpha \cdot I_4$, deducem că $A \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha} \cdot A^t\right) = \left(\dfrac{1}{\alpha} \cdot A^t\right) \cdot A = I_4$ deci conform definiţiei inversei unei matrice inversabile, obţinem $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot A^t$.

15. RANGUL UNEI MATRICE

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ cu m linii, n coloane şi cu elemente numere complexe şi, de asemenea, fie numărul natural k astfel încât $1 \leqslant k \leqslant \min(m,n)$.

Definiţie. Numim *minor de ordin k al matricei A* determinantul unei matrice pătrate de ordin k ale cărei elemente se află la intersecţia a k linii şi k coloane ale matricei A.

Observaţie. Matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are $C_m^k \cdot C_n^k$ minori de ordin k.

Exemplu. Pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \mathbf{9} & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$$

determinantul

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$$

este minor de ordinul 2, deoarece elementele sale se află la intersecţia dintre liniile l_1, l_3 şi coloanele c_1, c_2.

Definiţie. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă. Spunem că matricea A are *rangul* r şi scriem $\operatorname{rang}(A) = r$, dacă A are un minor nenul de ordin r, iar toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Prin convenţie, matricea nulă are rangul 0, adică $\operatorname{rang}(O_{m,n}) = 0$.

Exemplu. Matricea

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$$

are rangul 2 deoarece există minorul de ordin 2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0,$$

iar toţi minorii de ordin mai mare decât 2 sunt nuli.

Teoremă. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă. Atunci $\operatorname{rang}(A) = r \in \mathbb{N}^*$ dacă şi numai dacă există un minor nenul de ordinul r al lui A, iar toţi minorii de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Definiţie. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi Δ_r un minor de ordinul r al matricei A, $1 \leqslant r < \min(m,n)$. Numim *bordare* a minorului Δ_r, procedeul prin care, adăugând lui Δ_r elemente de pe o linie şi respectiv de pe o coloană din A, se obţine un minor de ordinul $r+1$ al lui A.

Exemplu. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pentru minorul $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ există două moduri de bordare şi se obţin astfel minorii:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Teoremă. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă. Atunci $\operatorname{rang}(A) = r \in \mathbb{N}^*$ dacă şi numai dacă există un minor nenul de ordinul r, Δ_r al lui A, iar toţi minorii de ordinul $r+1$ (dacă există) obţinuţi din Δ_r prin bordare cu elemente ale lui A, sunt nuli.

Pentru calculul rangului unei matrice, vom folosi una dintre metodele expuse mai jos:

- ***metoda ascendentă,*** în care se începe cu un minor nenul de ordin 1 şi prin bordare, se obţin minori nenuli de ordin cât mai mare;
- ***metoda descendentă,*** în care se începe cu minori de ordin maxim r. Dacă toţi minorii de ordin r sunt nuli, atunci trecem la calculul minorilor de ordin $r-1$. Procedeul continuă până când găsim un minor nenul şi astfel obţinem rangul matricei date.

Exemplu. Să calculăm rangul lui $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ prin metoda ascendentă.

- Alegem un minor nenul de ordin 1, cel situat la intersecţia dintre linia 1 şi coloana 1:

$$\Delta_1 = |-1| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1.$$

- Bordăm Δ_1 cu elemente de pe linia 2 şi coloana 2 şi obţinem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2.$$

- Avem acum două moduri de bordare, pentru a obţine minori de ordin 3:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

16. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. Sisteme de ecuaţii liniare. Clasificare

Definiţie. Un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se numeşte *sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute:* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Coeficienţii necunoscutelor formează matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

unde A este *matricea sistemului,* iar $\overline{A}$ este *matricea extinsă a sistemului.*

Un $n-$uplu $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se numeşte *soluţie a sistemului* dacă, înlocuind x_1 cu α_1, x_2 cu α_2, ..., x_n cu α_n în ecuaţiile sistemului, obţinem propoziţii adevărate.

Un sistem de ecuaţii liniare este:

- *compatibil,* dacă are cel puţin o soluţie;
- *compatibil determinat,* dacă are exact o soluţie;
- *compatibil nedeterminat,* dacă are cel puţin două soluţii;
- *incompatibil,* dacă nu are soluţie.

2. Rezolvarea sistemelor

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\overline{A})$.

Etapele rezolvării unui sistem de ecuaţii liniare:

1. Se scriu matricele A şi $\overline{A}$.

2. Se calculează $\text{rang}\,(A)$. Pentru aceasta, se caută un minor nenul Δ, având ordinul r, al lui A, astfel încât orice minor de ordin $r+1$ obţinut din Δ prin bordare cu elemente din A, să fie nul.

Minorul nenul Δ (care dă rangul lui A) se numeşte *minor principal.*

3. Se calculează $\text{rang}\,(\overline{A})$. Astfel, este suficient să calculăm toţi minorii de ordin $r+1$ obţinuţi din minorul principal Δ prin bordare cu elemente de pe coloana termenilor liberi şi cu elemente de pe o linie rămasă. Un astfel de minor (dacă există) se numeşte *minor caracteristic.* Apar situaţiile:

- Dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli, sistemul este compatibil;
- Dacă există cel puţin un minor caracteristic nenul, sistemul este incompatibil.

4. Se determină mulţimea soluţiilor sistemului. Apar astfel situaţiile:

- Dacă $\boxed{\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\overline{A}) = n,}$ atunci sistemul este compatibil determinat şi se rezolvă folosind **formulele lui Cramer**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

unde $\Delta = \det(A)$, iar Δ_k este determinantul obţinut din Δ prin inlocuirea coloanei k cu coloana termenilor liberi.

- Dacă $\boxed{\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\overline{A}) < n,}$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat. Necunoscutele ale căror coeficienţi apar în minorul principal se numesc *necunoscute principale,* iar ecuaţiile corespunzătoare liniilor minorului principal se numesc *ecuaţii principale.* Celelelalte se numesc *necunoscute secundare,* respectiv *ecuaţii secundare.* Pentru a rezolva sistemul, păstrăm numai ecuaţiile principale, necunoscutele secundare se renotează şi se trec în membrul drept, apoi sistemul obţinut se rezolvă cu formulele lui Cramer sau prin alte medode.

- Dacă $\boxed{\text{rang}\,(A) < \text{rang}\,(\overline{A}),}$ atunci sistemul este incompatibil.

Ţinând cont de cele discutate mai sus, teorema Kronecker-Capelli se poate reformula astfel:

Teorema lui Rouché. Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici (dacă există) sunt nuli.

3. Sisteme de ecuaţii liniare omogene

Definiţie. Un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

în care toţi termenii liberi sunt nuli, se numeşte *sistem de ecuaţii liniare omogene.*

Observaţie. Orice sistem de ecuaţii liniare omogene este compatibil, întrucât se observă că $(0, 0, \ldots, 0)$ este soluţie a sistemului, numită *soluţie nulă* sau *soluţie banală.*

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare omogene comportă aceleaşi etape ca în rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare oarecare.

- Dacă $\boxed{\text{rang}\,(A) = n,}$ atunci sistemul are soluţia unică $(0, 0, \ldots, 0)$.
- Dacă $\boxed{\text{rang}\,(A) < n,}$ atunci sistemul are şi soluţii nebanale. Pentru a le afla, se procedează ca în cazul sistemelor liniare oarecare.

17. LEGI DE COMPOZIŢIE

Definiţie. Fie M o mulţime nevidă. O aplicaţie $\varphi : M \times M \to M$ care asociază fiecărei perechi $(x; y) \in M \times M$ elementul $\varphi(x; y) \in M$ se numeşte *lege de compoziţie* sau *operaţie algebrică pe M*. Elementul $\varphi(x; y) \overset{\text{not.}}{=} x \star y \in M$ se numeşte *compusul lui x cu y (în această ordine)*.

Definiţie. O lege de compoziţie " $\star$ " este *asociativă* dacă $\forall x, y, z \in M \implies (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Definiţie. O lege de compoziţie " $\star$ " este *comutativă* dacă $\forall x, y \in M \implies x \star y = y \star x$.

Definiţie. Fie legea de compoziţie " $\star$ ". Un element $e \in M$ este *element neutru pentru legea de compoziţie* " $\star$ " dacă $e \star x = x \star e = x$, $\forall x \in M$.

Teoremă. Dacă o lege de compoziţie admite element neutru, atunci acesta este unic.

Definiţie. Fie legea de compoziţie " $\star$ " asociativă şi cu elementul neutru e. Un element $x \in M$ este *simetrizabil în raport cu legea de compoziţie* " $\star$ " dacă există $x' \in M$ astfel încât $x \star x' = x' \star x = e$.

Elementul x' cu această proprietate se numeşte *simetricul elementului x în raport cu legea* " $\star$ ".

Teoremă. Dacă un element este simetrizabil, atunci el admite un unic element simetric.

Definiţie. Fie M o mulţime nevidă şi " $\star$ " o lege de compoziţie pe M. O submulţime nevidă H a lui M se numeşte *parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziţie* " $\star$ " dacă $\forall x, y \in H \implies x \star y \in H$.

18. GRUPURI

1. Noţiunea de grup

Definiţie. Un cuplu $(G, \star)$, unde G este o mulţime nevidă, iar " $\star$ " este o lege de compoziţie pe G, se numeşte *grup* dacă sunt verificate următoarele condiţii:

1. " $\star$ " este lege de compoziţie: $\forall x, y \in G \implies x \star y \in G$;

2. " $\star$ " este asociativă: $\forall x, y, z \in G \implies (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;

3. " $\star$ " admite element neutru: $\exists e \in G$ astfel încât $x \star e = e \star x = x$, $\forall x \in G$;

4. orice element din G este simetrizabil în raport cu legea " $\star$ " : $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ astfel încât $x \star x' = x' \star x = e$.

Dacă, în plus, este verificată şi proprietatea

5. " $\star$ " este comutativă: $\forall x, y \in G \implies x \star y = y \star x$, atunci $(G, \star)$ se numeşte *grup comutativ* sau *grup abelian.*

2. Izomorfism de grupuri

Definiţie. Fie $(G, \star)$ şi $(\Gamma, \circ)$ două grupuri. O funcţie $f : G \to \Gamma$ este *izomorfism de grupuri* dacă:

1. f este morfism de grupuri, adică $f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G$;

2. f este bijectivă.

În condiţiile definiţiei, spunem că grupurile $(G, \star)$ şi $(\Gamma, \circ)$ sunt *izomorfe* şi scriem $(G, \star) \simeq (\Gamma, \circ)$.

În caz contrar, dacă nu există un izomorfism de la $(G, \star)$ la $(\Gamma, \circ)$ atunci grupurile *nu sunt izomorfe* şi scriem $(G, \star) \not\simeq (\Gamma, \circ)$.

Dacă $(G, \star)$ este grup, iar $f : G \to G$ este morfism de grupuri, atunci f se numeşte *endomorfism* al grupului G. Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci f se numeşte *automorfism* al grupului G.

Teoremă. Fie $(G, \star)$ şi $(\Gamma, \circ)$ grupuri cu elementele neutre e_1 şi respectiv e_2. Dacă funcţia $f : G \to \Gamma$ este morfism de grupuri, atunci:

1. $f(e_1) = e_2$;

2. $f(x') = [f(x)]'$, $\forall x \in G$.

3. Subgrup

Definiţie. Fie $(G, \star)$ un grup şi H o submulţime nevidă a lui G. Spunem că H este *subgrup al grupului* G dacă perechea $(H, \star)$ este grup.

Observaţie. Dacă $(G, \star)$ este un grup cu elementul neutru e, atunci $(\{e\}, \star)$ şi $(G, \star)$ sunt subgrupuri ale grupului G numite *subgrupuri improprii.* Orice alt subgrup al lui G, diferit de $\{e\}$ şi G se numeşte *subgrup propriu.*

Teoremă. Fie $(G, \star)$ un grup şi H o submulţime nevidă a lui G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. H este subgrup al grupului G;
2. $\forall x, y \in H \implies x \star y \in H$ şi $\forall x \in H \implies x' \in H$;
3. $\forall x, y \in G \implies x \star y' \in G$.

Teoremă. Fie $(G, \star)$ un grup şi H o submulţime nevidă şi finită a lui G. Atunci H este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $\forall x, y \in H \implies x \star y \in H$, adică H este parte stabilă a lui G în raport cu legea " $\star$ ".

4. Grup finit. Ordinul unui element într-un grup

Definiţie. Un grup $(G, \star)$ se numeşte *grup finit* dacă mulţimea G este finită.

Dacă $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, atunci cardinalul $n \in \mathbb{N}^*$ al lui G se numeşte *ordinul grupului* G şi se notează cu $\operatorname{ord}(G)$.

Definiţie. Fie $(G, \star)$ un grup cu elementul neutru e şi fie $a \in G$. Spunem că a este element de *ordin finit al grupului* G dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^m = e$. În caz contrar, spunem că elementul a are *ordin infinit.*

Dacă a este un element de ordin finit al grupului G, atunci cel mai mic $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a^m = e$ se numeşte *ordinul elementului a în grupul G* şi notăm $\operatorname{ord}(a) = m$.

Teorema lui Lagrange. Fie $(G, \star)$ un grup finit cu $\operatorname{ord}(G) = n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Dacă H este un subgrup al lui G, atunci $\operatorname{ord}(H)$ divide $\operatorname{ord}(G)$.

(b) Dacă $a \in G$ atunci $\operatorname{ord}(a)$ divide $\operatorname{ord}(G)$.

19. INELE ŞI CORPURI

1. Inele şi corpuri

Definiţie. Un triplet $(A, +, \cdot)$, unde A este o mulţime nevidă, iar " + " şi " $\cdot$ " sunt două legi de compoziţie pe A (notate aditiv, respectiv multiplicativ) se numeşte *inel* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(A, +)$ este grup abelian, adică:

a) " + " este lege de compoziţie: $\forall x, y \in A \implies x + y \in A$;

b) " + " este asociativă: $\forall x, y, z \in A \implies (x + y) + z = x + (y + z)$;

c) " + " admite element neutru: $\exists 0 \in A$ astfel încât $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in A$;

d) orice element din A este simetrizabil în raport cu legea " + " : $\forall x \in A$, $\exists(-x) \in A$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

e) " + " este comutativă: $\forall x, y \in A \implies x + y = y + x$.

2. $(A, \cdot)$ este monoid, adică:

a) " $\cdot$ " este lege de compoziţie: $\forall x, y \in A \implies x \cdot y \in A$;

b) " $\cdot$ " este asociativă: $\forall x, y, z \in A \implies (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

c) " $\cdot$ " admite element neutru: $\exists 1 \in A$ astfel încât $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall x \in A$.

3. " $\cdot$ " este distributivă faţă de " + " : $\forall x, y, z \in A \implies x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ şi $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Dacă, în plus, este verificată şi proprietatea:

4. " $\cdot$ " este comutativă: $\forall x, y \in A \implies x \cdot y = y \cdot x$,

atunci $(A, +, \cdot)$ se numeşte *inel comutativ.*

Definiţie. Spunem că un inel $(A, +, \cdot)$ *nu are divizori ai lui zero,* dacă $\forall x \neq 0, y \neq 0 \implies x \cdot y \neq 0$, unde 0 este elementul neutru al lui A în raport cu legea " + ".

În caz contrar, dacă există $x \neq 0, y \neq 0$ astfel încât $x \cdot y = 0$, atunci spunem că x şi y sunt *divizori ai lui zero* din inelul A.

Un inel A comutativ, cu cel puţin două elemente şi fără divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate.*

Definiţie. Un inel $(K, +, \cdot)$ se numeşte *corp* dacă are cel puţin două elemente şi orice element $x \in K$, $x \neq 0$ este simetrizabil în raport cu legea " $\cdot$ ".

2. Izomorfisme de inele şi corpuri

Definiţie. Fie inelele $(A, +, \cdot)$ şi $(A', \oplus, \odot)$. O funcţie $f : A \to A'$ se numeşte *morfism de inele* dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1. $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, $\forall x, y \in A$;

2. $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$, $\forall x, y \in A$;

3. $f(1) = 1'$, unde 1 este elementul neutru al lui A în raport cu legea " $\cdot$ ", iar $1'$ este elementul neutru al lui A' în raport cu legea " $\odot$ ".

Un morfism bijectiv de inele se numeşte *izomorfism de inele.*

Teoremă. Dacă $f : A \to A'$ este un morfism de inele, atunci au loc proprietăţile:

1. $f(0) = 0'$;

2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$;

3. dacă x este inversabil în inelul A, atunci $f(x)$ este inversabil în inelul A' şi $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

Definiţie. O funcţie $f : K \to K'$ de la un corp K la un corp K' se numeşte *morfism (izomorfism) de corpuri* dacă este morfism (izomorfism) de la K la K' considerate ca inele.

3. Inelul claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{Z}$. Conform teoremei împărţirii cu rest a numerelor întregi, există şi sunt unice numerele $q \in \mathbb{Z}$ şi $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel încât $a = nq + r$.

Restul r al împărţirii lui a la n se notează cu $a \mod n$, se citeşte "a modulo n" şi se numeşte *redusul modulo n al lui a.*

Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc următoarele legi de compoziţie:

(a) " $\oplus$ " : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \oplus b = (a+b) \mod n$ numită *adunarea modulo n.*

(b) " $\odot$ " : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \odot b = (a \cdot b) \mod n$ numită *înmulţirea modulo n.*

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie mulţimile: $\widehat{0} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\widehat{1} = \{nk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \ldots, \widehat{n-1} = \{nk+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ numite *clase de resturi modulo n.*

Notăm cu $\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ *mulţimea claselor de resturi modulo n.*

Pe mulţimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziţie:

(a) " $+$ " : $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a \oplus b}$ numită *adunarea claselor de resturi modulo n*;

(b) " $\cdot$ " : $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{a \odot b}$ numită *înmulţirea claselor de resturi modulo n.*

Teoremă. Tripletul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel numit *inelul claselor de resturi modulo n.*

Observaţie. În monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ un element $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $(k, n) = 1$.

În particular, dacă n este prim, atunci toate elementele nenule sunt inversabile. Altfel spus:

Teoremă. Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp dacă şi numai dacă n este prim.

20. INELE DE POLINOAME

1. Noţiunea de polinom. Rădăcinile unui polinom

Se consideră $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ, $n \in \mathbb{N}$ şi $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in A$. Expresiile formale de tipul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ se numesc *polinoame* în nedeterminata X şi având coeficienţii $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$. Mulţimea acestor polinoame se notează cu $A[X]$.

• Dacă polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ are cel puţin un coeficient nenul, atunci cel mai mare $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a_n \neq 0$ se numeşte *gradul polinomului* f şi notăm $\text{grad}\,(f) = n$. Dacă toţi coeficienţii polinomului f sunt nuli, atunci $f = 0$ se numeşte *polinomul nul* şi gradul lui este $-\infty$.

• Două polinoame $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ şi $g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_1X + b_0$ din $A[X]$ sunt *egale* dacă $n = m$ şi $a_i = b_i$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

• Mulţimea $A[X]$, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a polinoamelor (presupuse cunoscute) formează un inel comutativ $(A[X], +, \cdot)$ numit *inelul polinoamelor peste* A.

• Inelul $(A[X], +, \cdot)$ este domeniu de integritate dacă şi numai dacă inelul $(A, +, \cdot)$ este domeniu de integritate. În acest caz, $\text{grad}\,(f \cdot g) = \text{grad}\,(f) + \text{grad}\,(g)$.

• Fiind dat polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in A[X]$ şi $\alpha \in A$, elementul $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 \in A$ se numeşte *valoarea polinomului* f *în* a. Dacă $f(\alpha) = 0$, spunem că α este *rădăcină a polinomului* f.

• Fie polinomul $f \in A[X]$. Numim *funcţie polinomială ataşată polinomului* f funcţia $\tilde{f} : A \to A$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

• Fie domeniul de integritate $(A, +, \cdot)$ şi polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in A[X]$. Dacă f are cel puţin $n + 1$ rădăcini în A, atunci f este polinomul nul.

2. Împărţirea cu rest a polinoamelor

Teorema împărţirii cu rest. Fie K un corp comutativ şi polinoamele $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$. Atunci există şi sunt unic determinate două polinoame $q, r \in K[X]$ cu proprietăţile:

1) $f = g \cdot q + r$; 2) $\text{grad}\,(r) < \text{grad}\,(g)$.

3. Divizibilitatea polinoamelor

Definiţie. Fiind date $f, g \in K[X]$, spunem că f *este divizibil cu* g (scriem $f \vdots g$) sau că g *divide pe* f (scriem $g \mid f$) dacă există polinomul $h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$.

Definiţie. Spunem că polinoamele $f, g \in K[X]$ sunt *asociate în divizibilitate* dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$.

Definiţie. Fiind date $f, g \in K[X]$, spunem că $d \in K[X]$ este *cel mai mare divizor comun al polinoamelor* f *şi* g dacă: a) $d \mid f$, $d \mid g$; b) din $d' \mid f$ şi $d' \mid g$, rezultă $d' \mid d$. Notăm $d = (f, g)$.

Definiţie. Fiind date $f, g \in K[X]$, spunem că $m \in K[X]$ este *cel mai mic multiplu comun al polinoamelor* f *şi* g dacă: a) $f \mid m$, $g \mid m$; b) din $f \mid m'$ şi $g \mid m'$, rezultă $m \mid m'$. Notăm $m = [f, g]$.

4. Teorema restului. Teorema factorului (Bézout). Schema lui Horner

• **Teorema restului.** Restul împărţirii polinomului $f \in K[X]$ prin polinomul $g = X - a \in K[X]$ este $r = f(a)$.

• **Teorema factorului (Bézout).** Un element $a \in K$ este rădăcină a polinomului $f \in K[X]$ dacă şi numai dacă f este divizibil cu $X - a$, adică

$$f \vdots X - a \Leftrightarrow f(a) = 0.$$

• **Schema lui Horner.** Prin împărţirea polinomului $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$ la polinomul $g = X - a \in K[X]$ se obţin câtul $q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1X + b_0$ şi restul $r = f(a)$. Din $f = gq + r$, prin identificarea coeficienţilor, rezultă $a_n = b_{n-1}$ şi $b_k = ab_{k+1} + a_{k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Coeficienţii $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ ai câtului şi restul se obţin din schema lui Horner:

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	$\ldots$	X^1	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{=b_{n-1}}$	$\underbrace{ab_{n-1} + a_{n-1}}_{=b_{n-2}}$	$\underbrace{ab_{n-2} + a_{n-2}}_{=b_{n-3}}$	$\ldots$	$\underbrace{ab_1 + a_1}_{=b_0}$	$\underbrace{ab_0 + a_0}_{=r}$

5. Rădăcini multiple

Definiţie. Fie polinomul $f \in K[X]$ şi $a \in K$ o rădăcină a lui f. Spunem că rădăcina a are *ordinul de multiplicitate* $p \in \mathbb{N}^*$ dacă f este divizibil prin $(X - a)^p$ şi f nu este divizibil prin $(X - a)^{p+1}$.

Cazuri particulare:

• dacă $p = 1$, atunci a este *rădăcină simplă* a lui $f \overset{def.}{\Longleftrightarrow} f \vdots X - a$ şi $f \nmid (X - a)^2$;

• dacă $p = 2$, atunci a este *rădăcină dublă* a lui $f \overset{def.}{\Longleftrightarrow} f \vdots (X - a)^2$ şi $f \nmid (X - a)^3$;

• dacă $p = 3$, atunci a este *rădăcină triplă* a lui $f \overset{def.}{\Longleftrightarrow} f \vdots (X - a)^3$ şi $f \nmid (X - a)^4$.

Teoremă. Polinomul $f \in K[X]$ are pe $a \in K$ ca rădăcină multiplă cu ordinul de multiplicitate $p \in \mathbb{N}^*$ dacă şi numai dacă

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0 \text{ şi } f^{(p)}(a) \neq 0.$$

6. Descompunerea unui polinom. Polinoame ireductibile

Definiţie. Un polinom $f \in A[X]$ se numeşte *reductibil peste inelul* A dacă există polinoamele $g, h \in A[X]$ astfel încât $\operatorname{grad}(g) \geqslant 1$, $\operatorname{grad}(h) \geqslant 1$ şi $f = gh$. În caz contrar, spunem că polinomul f este *ireductibil peste* A.

Teoremă. Orice polinom $f \in K[X]$, având gradul cel puţin 1, se poate descompune în produs de polinoame ireductibile peste corpul K. Descompunerea este unică până la asocierile în divizibilitate şi ordinea factorilor.

7. Polinoame cu coeficienţi complecşi

Teorema fundamentală a algebrei (D'Alembert-Gauss). Orice polinom cu coeficienţi complecşi, de grad $\geqslant 1$, are cel puţin o rădăcină complexă.

Consecinţe:

- Singurele polinoame din $\mathbb{C}[X]$, ireductibile peste $\mathbb{C}$, sunt polinoamele constante şi cele de grad 1.
- Orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, cu grad $(f) = n \in \mathbb{N}^*$, are exact n rădăcini complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nu neapărat distincte. În plus, are loc descompunerea: $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f.

8. Polinoame cu coeficienţi reali

Teoremă. Singurele polinoame din $\mathbb{R}[X]$, ireductibile peste $\mathbb{R}$, sunt cele constante, cele de grad 1 şi cele de grad 2 fără rădăcini reale.

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ este rădăcină a polinomului f, atunci:

a) $\overline{z} = a - bi$ este rădăcină a polinomului f;

b) z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Corolar. a) Orice polinom cu coeficienţi reali are un număr par de rădăcini complexe nereale.

b) Orice polinom cu coeficienţi reali, de grad impar, are cel puţin o rădăcină reală.

9. Polinoame cu coeficienţi raţionali

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $u = a + \sqrt{b}$, unde $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}_+$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dacă u este rădăcină a polinomului f, atunci:

a) $\overline{u} = a - \sqrt{b}$ este rădăcină a polinomului f;

b) u şi $\overline{u}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie numerele iraţionale $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $x_3 = -\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x_4 = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}_+$, $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Dacă unul din numerele x_1, x_2, x_3, x_4 este rădăcină a polinomului f, atunci şi celelalte trei sunt rădăcini ale polinomului f. În plus, toate cele patru rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.

10. Polinoame cu coeficienţi întregi

Teoremă. Fie polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a polinomului f, atunci α divide a_0.

b) Dacă $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ este rădăcină a polinomului f, atunci p divide a_0 şi q divide a_n.

11. Relaţiile lui Viéte

Fie polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Atunci legăturile dintre rădăcinile şi coeficienţii polinomului f sunt date de egalităţile:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \ldots + x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k + x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = (-1)^k \cdot \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases},$$

numite *relaţiile lui Viéte*

O relaţie utilă în care apare suma pătratelor rădăcinilor unui polinom este:

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = s_1^2 - 2s_2.}$$

Cazuri particulare:

- **Relaţiile lui Viéte pentru polinomul de gradul 2**

Fie $\boxed{f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X],\ a \neq 0}$ cu rădăcinile x_1 şi x_2. Atunci:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ s_2 = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

- **Relaţiile lui Viéte pentru polinomul de gradul 3**

Fie $\boxed{f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X],\ a \neq 0}$ cu rădăcinile x_1, x_2 şi x_3. Atunci:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ s_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \\ s_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

- **Relaţiile lui Viéte pentru polinomul de gradul 4**

Fie $\boxed{f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{C}[X],\ a \neq 0}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4. Atunci:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ s_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \dfrac{c}{a} \\ s_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ s_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}.$$

1. TRIGONOMETRIE

1. Funcţiile trigonometrice sinus şi cosinus

- Formula fundamentală a trigonometriei: $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- Funcţiile sin şi cos sunt mărginite: $\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$ şi $\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- Funcţia sin este impară, iar funcţia cos este pară:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x} \quad \text{şi} \quad \boxed{\cos(-x) = \cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Funcţiile sin şi cos sunt periodice, având perioada principală 2π:

$$\boxed{\sin(x + 2k\pi) = \sin x} \quad \text{şi} \quad \boxed{\cos(x + 2k\pi) = \cos x} \ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Semnul funcţiilor sin şi cos :

$$\boxed{\sin x > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbf{C_I} \cup \mathbf{C_{II}}} \quad \text{şi} \quad \boxed{\sin x < 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbf{C_{III}} \cup \mathbf{C_{IV}}}$$

$$\boxed{\cos x > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbf{C_I} \cup \mathbf{C_{IV}}} \quad \text{şi} \quad \boxed{\cos x < 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbf{C_{II}} \cup \mathbf{C_{III}}}$$

- Trecerea de la sin la cos şi invers:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x} \quad \text{şi} \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Funcţiile trigonometrice tangentă şi cotangentă

- Definiţii:

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \quad \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \boxed{\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

- Funcţiile tg şi ctg sunt impare: $\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x}$ şi $\boxed{\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x}$
- Funcţiile tg şi ctg sunt periodice având perioada principală π:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x} \quad \text{şi} \quad \boxed{\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Trecerea de la tg la ctg şi invers: $\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x}$ şi $\boxed{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x}$

3. Valori remarcabile ale funcţiilor trigonometrice

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\operatorname{ctg} t$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\nexists$	0

4. Formule de reducere la primul cadran

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

5. Funcţii trigonometrice pentru sume/diferenţe de unghiuri

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

6. Formule pentru jumătatea, dublul şi triplul unui unghi

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \implies \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

7. Transformarea sumei în produs

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

8. Transformarea produsului în sumă

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

2. ECUAŢII TRIGONOMETRICE

1. Funcţia arcsinus

- Funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este inversabilă, inversa ei fiind:

$$\boxed{f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f^{-1}(x) = \arcsin x}$$

numită *funcţie arcsinus.*

- Sunt valabile formulele:

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x} \quad \forall x \in [-1, 1], \qquad \boxed{\arcsin(\sin x) = x} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

2. Funcţia arccosinus

- Funcţia $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ este inversabilă, inversa ei fiind:

$$\boxed{f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],\ f^{-1}(x) = \arccos x}$$

numită *funcţie arccosinus.*

- Sunt valabile formulele:

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x} \quad \forall x \in [-1, 1], \qquad \boxed{\arccos(\cos x) = x} \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

3. Funcţia arctangentă

- Funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este inversabilă, inversa ei fiind:

$$\boxed{f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x}$$

numită *funcţie arctangentă.*

- Sunt valabile formulele:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Ecuaţii trigonometrice fundamentale

- $\sin x = a \in [-1, 1] \Longleftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = a \in [-1, 1] \Longleftrightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x = a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. Rezolvarea ecuaţiei $\boxed{a \sin x + b \cos x = c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0}$

- Dacă $c^2 > a^2 + b^2$, atunci ecuaţia nu are soluţii reale.
- Dacă $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, atunci se împarte ecuaţia prin $\sqrt{a^2 + b^2}$ şi avem

$$a \sin x + b \cos x = c \Longleftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ţinând cont că $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, rezultă că există $t \in [0; 2\pi)$ astfel încât

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos t \text{ şi } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin t.$$

În consecinţă, ecuaţia devine

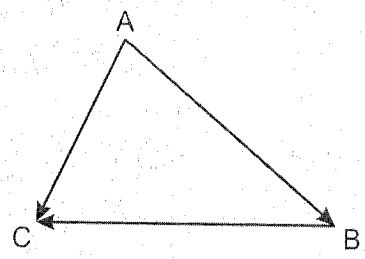
$$\sin x \cos t + \sin t \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Longleftrightarrow \sin (x + t) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

În final, obţinem soluţiile ecuaţiei:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - t + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

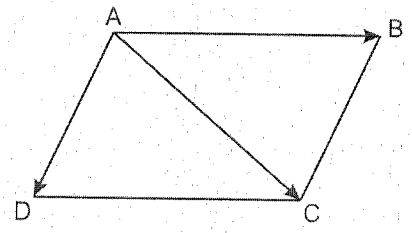
3. VECTORI

1. Regula triunghiului



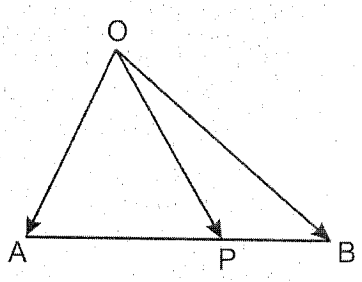
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

2. Regula paralelogramului



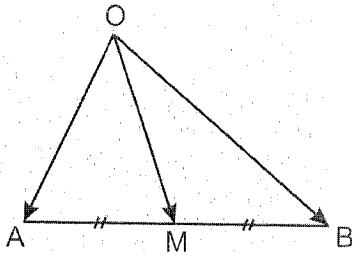
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$$

3. Punctul care împarte un segment într-un raport dat



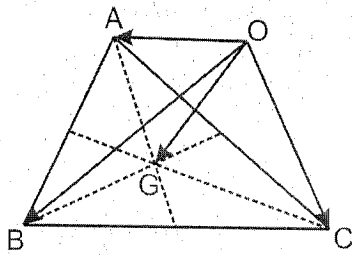
$$P \in (AB),\ \frac{AP}{PB} = k > 0 \implies \boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}\right)}$$

4. Mijlocul unui segment



$$M \in (AB),\ \frac{AM}{MB} = 1 \implies \boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}$$

5. Centrul de greutate al unui triunghi



G este centrul de greutate al $\triangle ABC$ $\implies \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}$

6. Condiţia de coliniaritate a trei puncte

A, B, C sunt coliniare $\iff \boxed{\exists k \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}}$

7. Condiţia de paralelism a două drepte

$AB \parallel CD \iff \boxed{\exists k \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}}$

8. Coordonatele unui vector

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}}$$

9. Modulul unui vector

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

10. Produsul scalar al vectorilor

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right)}$$

sau

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \\ \vec{v} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = am + bn}$$

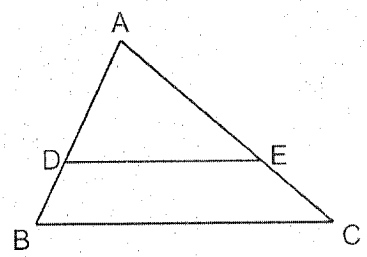
11. Condiţia de coliniaritate a vectorilor

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \\ \vec{v} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ sunt coliniari} \Longleftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}}$$

12. Condiţia de perpendicularitate a vectorilor

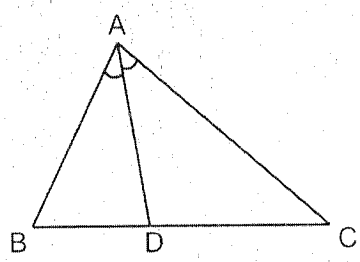
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \\ \vec{v} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow am + bn = 0}$$

13. Teorema lui Thales



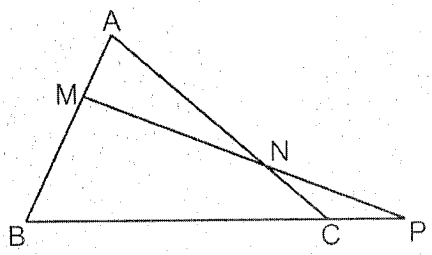
$$\boxed{DE \parallel BC \Longleftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$

14. Teorema bisectoarei



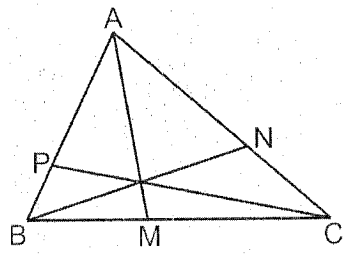
$$\boxed{[AD \text{ bis. } \sphericalangle BAC \Longleftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}}$$

15. Teorema lui Menelaus



$$\boxed{\begin{array}{c} M, N, P \text{ coliniare} \\ \Updownarrow \\ \dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{PB}{PC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1 \end{array}}$$

16. Teorema lui Ceva



$$\boxed{\begin{array}{c} AM, BN, CP \text{ concurente} \\ \Updownarrow \\ \dfrac{AP}{PB} \cdot \dfrac{BM}{MC} \cdot \dfrac{CN}{NA} = 1 \end{array}}$$

4. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Formula distanţei dintre două puncte

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

2. Coordonatele mijlocului unui segment

$$M \text{ este mijlocul segmentului } [AB] \longrightarrow \boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Generalizare. (Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat)

$$M \in (AB),\ \frac{MA}{MB} = k > 0 \longrightarrow \boxed{M\left(\frac{x_A + kx_B}{1+k}, \frac{y_A + ky_B}{1+k}\right)}$$

Consecinţă. (Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi)

$$G \text{ este centrul de greutate al } \triangle ABC \longrightarrow \boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

3. Panta dreptei determinată de două puncte date

$$A(x_A; y_A),\ B(x_B; y_B) \in d \longrightarrow \boxed{m_d = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

4. Forme ale ecuaţiei dreptei

- Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B, y_B)$

$$\boxed{d: \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$$

- Ecuaţia dreptei care trece printr-un punct dat $P(x_0, y_0)$ şi are panta dată m

$$\boxed{d: y - y_0 = m(x - x_0)}$$

- Ecuaţia normală a dreptei

$$\boxed{d: y = mx + n}\ (m \text{ este panta dreptei } d)$$

- Ecuaţia carteziană generală a dreptei

$$\boxed{d: ax + by + c = 0}\ \left(m = -\frac{a}{b} \text{ este panta dreptei } d\right)$$

- Ecuaţia dreptei cu determinant

$$\boxed{d: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Observaţie. Fie dreptele $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Avem una din situaţiile:

$$\boxed{d_1 = d_2 \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

$$\boxed{d_1,\ d_2 \text{ sunt concurente} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

5. Condiţia de paralelism a două drepte

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2}$$

6. Condiţia de perpendicularitate a două drepte

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1}$$

7. Condiţia de coliniaritate a trei puncte

$$\boxed{A\left(x_A, y_A\right),\ B\left(x_B, y_B\right),\ C\left(x_C, y_C\right) \text{ sunt coliniare} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

8. Distanţa de la un punct la o dreaptă

$$P\left(x_0, y_0\right);\ d : ax + by + c = 0 \longrightarrow \boxed{d(P, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

9. Aria triunghiului folosind coordonatele vârfurilor

$$\boxed{\text{Aria}[ABC] = \frac{1}{2} \cdot |\triangle|} \text{ unde } \boxed{\triangle = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}$$

5. APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI

1. Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ este raza cercului circumscris})$$

2. Teorema cosinusului

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \iff \begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

3. Lungimea medianei

$$m_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4} \quad (m_a \text{ este mediana corespunzătoare laturii } a)$$

Caz particular. Dacă triunghiul este dreptunghic, atunci mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din ipotenuză şi, reciproc, dacă o mediană a unui triunghi este egală cu jumătate din latura pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic.

4. Exprimarea unghiurilor triunghiului în funcţie de laturi

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

5. Formule pentru aria triunghiului

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{(Formula lui Heron)}$$

$$S = p \cdot r \implies r = \frac{S}{p} \quad (r \text{ este raza cercului înscris})$$

$$S = \frac{abc}{4R} \implies R = \frac{abc}{4S} \quad (R \text{ este raza cercului circumscris})$$

1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

Definiţie. Se numeşte *şir de numere reale* orice funcţie $x : \mathbb{N}\backslash A \to \mathbb{R}$, $x(n) \overset{\text{not.}}{=} x_n$, unde A este o submulţime finită a lui $\mathbb{N}$. Notăm şirul cu $(x_n)_n$.

Definiţie. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie strict crescătoare. Şirul $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ se numeşte *subşir* al şirului $(x_n)_n$.

Definiţie. Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este:
- *mărginit superior,* dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leqslant M$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *mărginit inferior,* dacă $\exists m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \geqslant m$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *mărginit,* dacă $\exists m$, $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leqslant x_n \leqslant M$, $\forall n \geqslant n_0$;

Teoremă. $(x_n)_n$ este mărginit $\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0$ astfel încât $|a_n| \leqslant \alpha$, $\forall n \geqslant n_0$.

Definiţie. Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este:
- *crescător,* dacă $x_{n+1} \geqslant x_n$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *strict crescător,* dacă $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *descrescător,* dacă $x_{n+1} \leqslant x_n$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *strict descrescător,* dacă $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \geqslant n_0$;
- *monoton,* dacă este ori crescător, ori descrescător;
- *strict monoton,* dacă este ori strict crescător, ori strict descrescător.

Observaţie. Pentru studiul monotoniei unui şir de numere reale se poate folosi metoda diferenţei (calculăm diferenţa $a_{n+1} - a_n$ şi o comparăm cu 0), iar dacă şirul are termenii pozitivi se poate folosi metoda raportului (calculăm raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ şi îl comparăm cu 1).

Definiţie. O mulţime $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate* a lui $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă există α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset V$.

Definiţie. Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ este limita unui şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui l conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit de termeni. Scriem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este *convergent* dacă are limită finită. În caz contrar, dacă şirul are limită infinită sau limita nu există, spunem că şirul este *divergent.*

Teoremă. Orice şir convergent este mărginit.

Teoremă. Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci au loc următoarele reguli de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$:

$a + \infty = +\infty$	$a - \infty = -\infty$	$\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$+\infty^{-\infty} = 0$	$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$	$\lvert \pm \infty \rvert = +\infty$

$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$	$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a < 0 \\ +\infty, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$

Observaţie. Operaţiile fără sens (cazurile exceptate, nedeterminările) din $\overline{\mathbb{R}}$ sunt:

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0}}$$

Limite remarcabile:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0\right)=+\infty\cdot a_k,\quad a_k\neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_pn^p+b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_1n+b_0}=\begin{cases}0, & \text{dacă } k<p\\ \dfrac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k=p\\ +\infty\cdot\dfrac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k>p\end{cases},\quad a_k\neq 0,\ b_p\neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}+\infty & \text{dacă } a>1\\ 1, & \text{dacă } a=1\\ 0, & \text{dacă } a\in(-1;1)\end{cases}}\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}n^a=\begin{cases}+\infty & \text{dacă } a>0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ 0, & \text{dacă } a<0\end{cases}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\pm\infty\Longrightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e}\qquad\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}x_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x_n}{x_n}=1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a,\ a>0}\qquad\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r,\ r\in\mathbb{R}}$$

Criterii de existenţă a limitei unui şir:

1. Criteriul lui Weierstrass. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

- Orice şir crescător şi mărginit superior este convergent.
- Orice şir descrescător şi mărginit inferior este convergent.

2. Orice şir crescător şi nemărginit are limita $+\infty$.
Orice şir descrescător şi nemărginit are limita $-\infty$.

3. Fie şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ şi $(y_n)_n$ este mărginit.
Atunci şirul $(x_n\cdot y_n)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=0$.

4. Criteriul majorării/minorării. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale.

- Dacă există $l \in \mathbb{R}$ şi $(a_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ şi $|x_n - l| \leqslant a_n$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.
- Dacă există $(a_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ şi $x_n \geqslant a_n$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
- Dacă există $(a_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ şi $x_n \leqslant a_n$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

5. Criteriul cleştelui. Fie şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ cu proprietăţile:

a) $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.

Atunci şirul $(y_n)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

6. Criteriul cu ε. Dacă $(x_n)_n$ este un şir de numere reale, atunci:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_\varepsilon$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_\varepsilon$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geqslant n_\varepsilon$.

7. Criteriul Cesaro-Stolz. Fie şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ cu proprietăţile:

a) şirul $(b_n)_n$ este strict crescător şi nemărginit, cu termeni nenuli;

b) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

8. Criteriul raportului. Fie şirul $(a_n)_n$ cu termenii pozitivi astfel încât $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
- Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

9. Criteriul rădăcinii (Cauchy-D'Alembert). Fie şirul $(a_n)_n \subset (0; +\infty)$ cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci şirul $(\sqrt[n]{a_n})_n$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

10. Criteriul cu subşiruri. Un şir $(x_n)_n$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă orice subşir al său are limita egală cu l.

Dacă un şir are două subşiruri cu limite diferite atunci şirul dat nu are limită.

2. LIMITE DE FUNCŢII. ASIMPTOTE

Definiţie. Fie $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de acumulare pentru mulţimea* A dacă $(V \backslash \{a\}) \cap A \neq \varnothing$, oricare ar fi vecinătatea V a lui a.

Un punct $a \in A$ care nu este punct de acumulare pentru A se numeşte *punct izolat al lui* A.

Definiţie. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al mulţimii A. Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita funcţiei* f *în punctul* a dacă pentru orice şir $(x_n) \subset A$ cu $x_n \neq a$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, are loc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Scriem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

- Pentru a arăta că o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ nu are limită într-un punct a este suficient să găsim două şiruri $(x_n)_n$, $(y_n)_n \subset A \backslash \{a\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Definiţie. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare pentru mulţimea $A_s = A \cap (-\infty; a)$. Spunem că $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita la stânga a funcţiei* f *în punctul* a dacă pentru orice şir $(x_n)_n \subset A_s$, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l_s$.

Scriem $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l_s$ sau $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = l_s$ sau $f_s(a) = l_s$ sau $f(a-0) = l_s$.

Definiţie. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare pentru mulţimea $A_s = A \cap (a; +\infty;)$. Spunem că $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita la dreapta a funcţiei* f *în punctul* a dacă pentru orice şir $(x_n)_n \subset A_d$, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l_d$.

Scriem $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l_d$ sau $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = l_d$ sau $f_d(a) = l_d$ sau $f(a+0) = l_d$.

Teoremă. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru A cu proprietatea că f are limite laterale în a. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f are limită în a;

b) $f(a-0) = f(a+0)$.

În aceste condiţii, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$.

Teoremă. (Criteriul cleştelui pentru limite de funcţii.) Fie f, g, $h : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru A şi V o vecinătate a punctului a. Dacă:

a) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in V \cap A$, $x \neq a$;

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$,

atunci g are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Teoremă. Fie f, $g : A \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru A astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, iar g este mărginită.

Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Limite ale unor funcţii elementare:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=a_k(\pm\infty)^k,\quad a_k\neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & \text{dacă } k<p\\ \dfrac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k=p\\ (\pm\infty)^{k-p}\cdot\dfrac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k>p\end{cases},\quad a_k\neq 0,\ b_p\neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}+\infty & \text{dacă } a\in(0;1)\\ 0, & \text{dacă } a\in(1;+\infty)\end{cases}}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0 & \text{dacă } a\in(0;1)\\ +\infty, & \text{dacă } a\in(1;+\infty)\end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=\begin{cases}+\infty & \text{dacă } a\in(0;1)\\ -\infty, & \text{dacă } a\in(1;+\infty)\end{cases}}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}-\infty & \text{dacă } a\in(0;1)\\ +\infty, & \text{dacă } a\in(1;+\infty)\end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=+\infty}\quad\boxed{\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=-\infty}\quad\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\operatorname{ctg}x=+\infty}\quad\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\operatorname{ctg}x=-\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}}\quad\boxed{\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}}\quad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0}\quad\boxed{\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi}$$

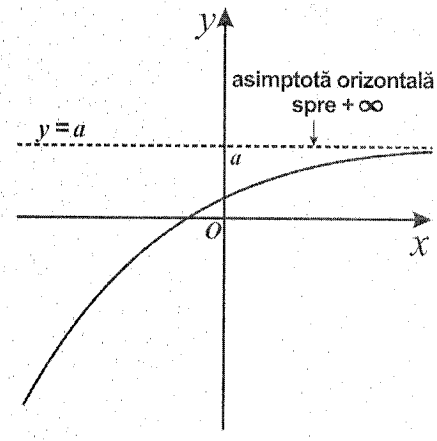
Limite remarcabile:

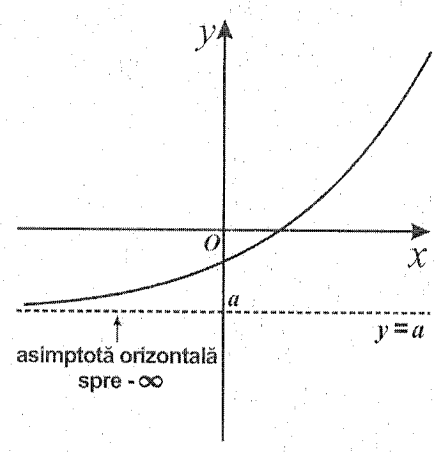
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}u(x)}{u(x)}=1$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{arctg}u(x)}{u(x)}=1$.
- $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=\pm\infty$, atunci $\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}=\ln b,\ b>0}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{b^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln b$.
- $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbb{R}}$ Dacă $\lim_{x\to a}u(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r$.

Asimptote orizontale

Definiţie. Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru mulţimea A.

- Dreapta $y = a$ este *asimptotă orizontală spre* $+\infty$ *a graficului funcţiei* f dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.
- Dreapta $y = a$ este *asimptotă orizontală spre* $-\infty$ *a graficului funcţiei* f dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.





Asimptote oblice

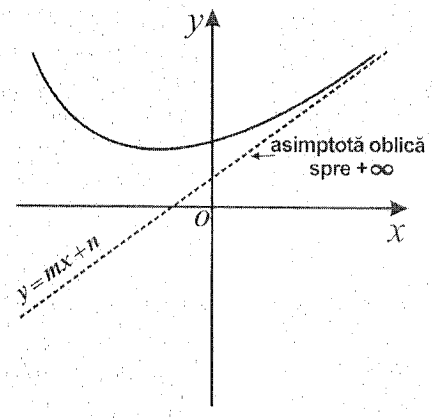
Definiţie. Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru mulţimea A.

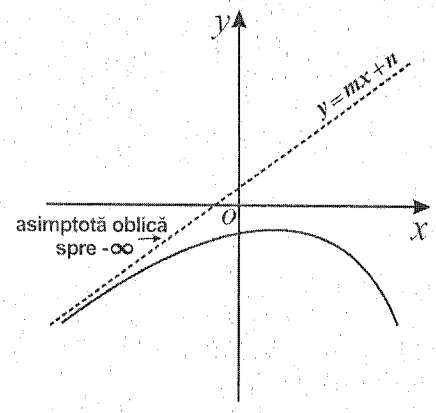
- Dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică spre* $+\infty$ *a graficului funcţiei* f dacă

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ şi } n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

- Dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică spre* $-\infty$ *a graficului funcţiei* f dacă

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ şi } n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx].$$



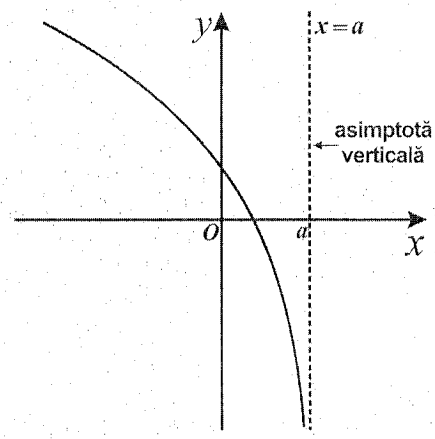


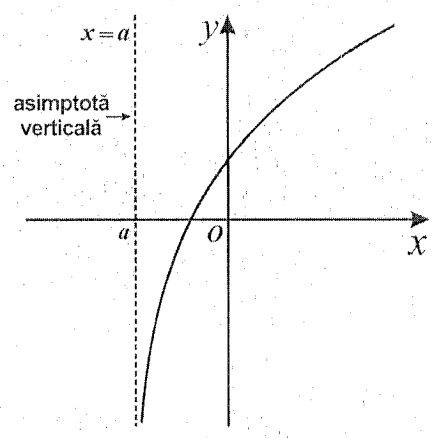
Observaţie. Graficul unei funcţii nu poate avea spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$ şi asimptotă orizontală şi asimptotă oblică; poate avea cel mult una din ele.

Asimptote verticale

Definiţie. Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea A.

Dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală a graficului funcţiei* f dacă cel puţin una dintre limitele laterale $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ există şi este infinită.





3. FUNCŢII CONTINUE

Definiţie. Fie mulţimea $D \subset \mathbb{R}$, funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ şi punctul $a \in D$.

- Spunem că funcţia f este *continuă în* a dacă, pentru orice şir $(x_n)_n \subset D$ cu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, şirul $(f(x_n))_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. În acest caz, a se numeşte *punct de continuitate al funcţiei* f.
- Dacă funcţia f nu este continuă în punctul a, spunem că ea este *discontinuă în* a sau că a este *punct de discontinuitate al funcţiei* f.
- Funcţia f este *continuă pe o mulţime* $A \subset D$ dacă este continuă în orice punct $a \in A$.
- Mulţimea $D_c = \{a \in D \mid f \text{ continuă în } a\}$ se numeşte *domeniu de continuitate al funcţiei* f.

Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$.

- Funcţia f este *continuă la stânga în* a dacă, $\forall (x_n)_n \subset D \cap (-\infty; a]$, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, şirul $(f(x_n))_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
- Funcţia f este *continuă la dreapta în* a dacă, $\forall (x_n)_n \subset D \cap [a; +\infty)$, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, şirul $(f(x_n))_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Teoremă. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$ un punct de acumulare pentru D.

- Funcţia f este continuă în a dacă şi numai dacă $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teoremă. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$ un punct de acumulare pentru D.

- Funcţia f este continuă la stânga în $a \iff$ există limita la stânga în a şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$.
- Funcţia f este continuă la dreapta în $a \iff$ există limita la dreapta în a şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.
- Funcţia f este continuă în a dacă şi numai dacă există limitele laterale în a şi

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a).$$

Observaţie. Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiţie.

Teoremă. Dacă funcţia $u : A \to D$ este continuă în $a \in A$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $u(a) \in D$, atunci funcţia compusă $f \circ u : A \to \mathbb{R}$ este continuă în a. Dacă, în plus, a este punct de acumulare pentru A şi $u(a)$ este punct de acumulare pentru D, atunci:

$$\lim_{x\to a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x\to a} u(x)\right) = f(u(a)).$$

(*Funcţiile continue comută cu limita.*)

Operaţii cu funcţii continue:

- Dacă funcţiile $f,\ g : D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe D, atunci funcţiile

$$\alpha f + \beta g,\ (\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R});\ f \cdot g;\ \frac{f}{g};\ f^g$$

sunt continue pe submulţimile lui D pe care sunt definite.

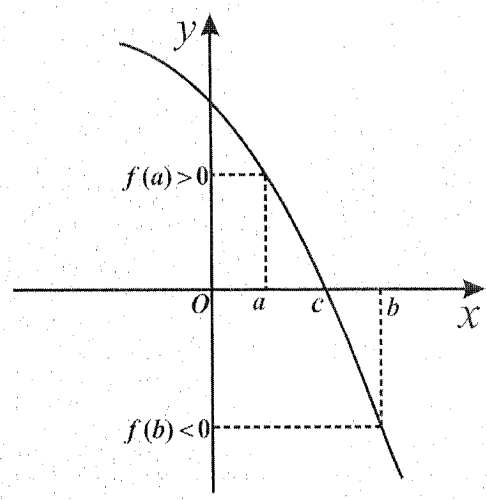
- Dacă $I,\ J \subset \mathbb{R}$ sunt două intervale şi $f : I \to J$ este o funcţie bijectivă şi continuă, atunci inversa ei, $f^{-1} : J \to I$, este continuă.

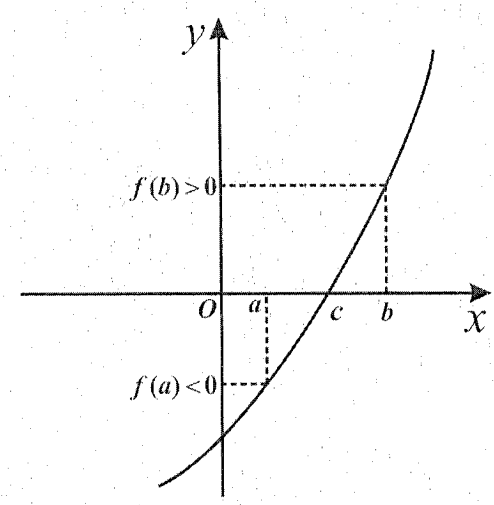
- Dacă funcţia $u : A \to D$ este continuă pe A şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci funcţia compusă $f \circ u : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe A.

Proprietăţi ale funcţiilor continue:

1. Teorema lui Weierstrass. Dacă funcţia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile, adică există $x_1,\ x_2 \in [a; b]$ astfel încât $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, $\forall x \in [a; b]$.

2. Teorema Cauchy-Bolzano. Fie funcţia continuă $f : I \to \mathbb{R}$ şi $a,\ b \in I$ astfel încât $f(a)$ şi $f(b)$ au semne contrare, adică $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a; b)$ astfel încât $f(c) = 0$.





3. Dacă o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$ nu se anulează pe I atunci f are semn constant pe I.

4. Orice funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, adică:

$$\forall a,\ b \in I,\ \text{cu } a < b \text{ şi } \forall \lambda \text{ situat între } f(a) \text{ şi } f(b),\ \exists \xi \in (a; b) \text{ astfel încât } f(\xi) = \lambda.$$

5. Imaginea unui interval printr-o funcţie continuă este tot un interval.
În particular, dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\operatorname{Im} f = f(I)$ este un interval.

4. FUNCŢII DERIVABILE

Definiţie. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru D.

- Funcţia f *are derivată în punctul* x_0 dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$, numită *derivata funcţiei* f *în punctul* x_0. Notăm

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

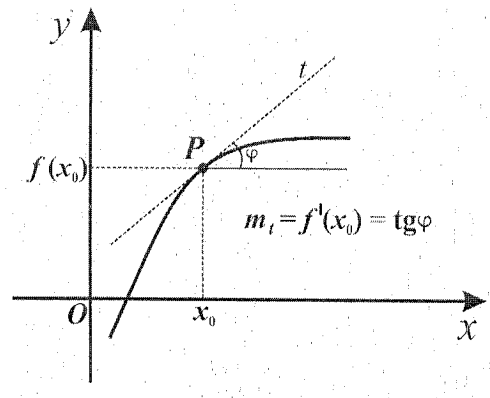
- Dacă $f'(x_0)$ există şi este finită, atunci spunem că f *este derivabilă în* x_0.

Interpretarea geometrică a derivatei:

Dacă f este derivabilă în x_0 atunci $f'(x_0)$ este panta tangentei la graficul funcţiei f construită în punctul $P(x_0; f(x_0))$.

Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul $P(x_0; f(x_0))$ este

$$\boxed{t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $A \subset D$.

- Funcţia f *este derivabilă pe mulţimea* A dacă este derivabilă în orice punct din A.
- Mulţimea $D_{f'} = \{x \in D \mid \exists f'(x) \in \mathbb{R}\}$ se numeşte *domeniul de derivabilitate al funcţiei* f.
- Funcţia $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivata funcţiei* f.
- Operaţia prin care din funcţia f se obţine funcţia f' se numeşte *derivare*.

Teoremă. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare al mulţimii $D \cap (-\infty; x_0)$.

- Funcţia f *are derivată la stânga în punctul* x_0 dacă există limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$, numită *derivata la stânga a funcţiei* f *în punctul* x_0. Notăm

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Dacă $f'_s(x_0)$ există şi este finită, atunci spunem că f *este derivabilă la stânga în* x_0.

Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare al mulţimii $D \cap (x_0; +\infty)$.

• Funcţia f *are derivată la dreapta în punctul* x_0 dacă există limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$, numită *derivata la dreapta a funcţiei* f *în punctul* x_0. Notăm

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• Dacă $f'_d(x_0)$ există şi este finită, atunci spunem că f *este derivabilă la dreapta în* x_0.

Teoremă. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare al mulţimii D.

• Funcţia f *are derivată în punctul* x_0 dacă şi numai dacă f are derivate laterale în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

• Funcţia f *este derivabilă în punctul* x_0 dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

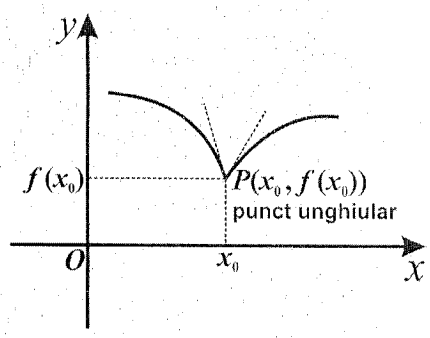
Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă f este continuă în x_0 şi are derivate laterale în x_0, atunci:

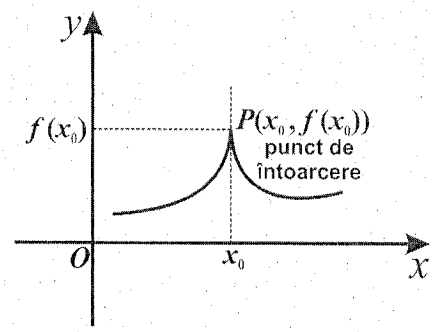
• $P(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct unghiular* dacă f nu este derivabilă în x_0 şi cel puţin una din derivatele laterale este finită;

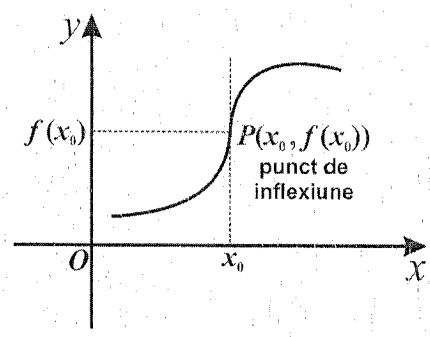
• $P(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de întoarcere* dacă derivatele laterale sunt infinite şi diferite;

• $P(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune* dacă derivatele laterale sunt egale (finite sau infinite), iar graficul funcţiei este convex de o parte a lui x_0 şi concav de cealaltă parte a lui x_0.

În figurile de mai jos sunt redate cele trei situaţii care apar în definiţia anterioară.







Definiţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Spunem că f este *de două ori derivabilă în* x_0 dacă:

• f este derivabilă pe o vecinătate a lui x_0;

• f' este derivabilă în x_0.

Notăm $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ şi o numim *derivata de ordin 2 a lui* f *în* x_0.

Definiţie. Funcţia f este de două ori derivabilă pe pe o mulţime D_1 dacă funcţia f' este derivabilă în orice punct $x_0 \in D_1$.

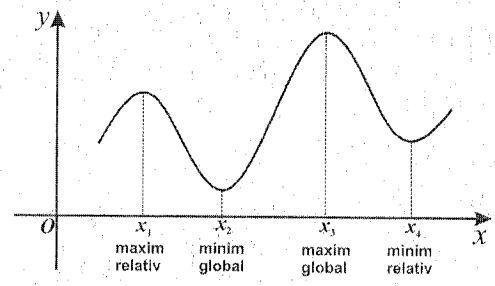
Notăm $(f')' = f''$ numită derivata de ordin 2 a funcţiei f pe mulţimea D_1.

5. TEOREME ALE CALCULULUI DIFERENŢIAL

Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Definiţie. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

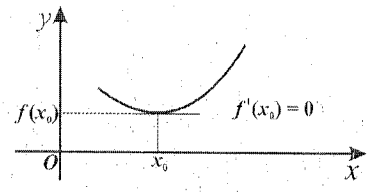
- Un punct $x_0 \in D$ se numeşte *punct de maxim local (sau relativ)* dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$. În acest caz, $f(x_0)$ se numeşte *valoare maximă locală (sau relativă) a funcţiei f.*



- Un punct $x_0 \in D$ se numeşte *punct de minim local (sau relativ)* dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$. În acest caz, $f(x_0)$ se numeşte *valoare minimă locală (sau relativă) a funcţiei f.*
- Punctele de maxim local şi cele de minim local sunt numite *puncte de extrem local.*
- Un punct $x_0 \in D$ se numeşte *punct de maxim global (sau absolut)* dacă $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in D$. În acest caz, $f(x_0)$ se numeşte *valoare maximă globală (sau absolută) a funcţiei f.*
- Un punct $x_0 \in D$ se numeşte *punct de minim global (sau absolut)* dacă $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in D$. În acest caz, $f(x_0)$ se numeşte *valoare minimă globală (sau absolută) a funcţiei f.*
- Punctele de maxim global şi cele de minim global sunt numite *puncte de extrem global.*

Teorema lui Fermat. Fie funcţia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ şi punctul $x_0 \in (a; b)$. Dacă x_0 este punct de extrem al lui f, iar f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică. În condiţiile teoremei lui Fermat, dacă x_0 este un punct de extrem, atunci tangenta dusă la grafic prin punctul $P(x_0; f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox.



Definiţie. Dacă funcţia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci zerourile derivatei f' din intervalul $(a; b)$ se numesc *puncte critice ale funcţiei.*

Observaţie. Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcţii derivabile se găsesc printre punctele critice ale acesteia.

Exemplu. Fie a, b, $c \in (0; +\infty)$ astfel încât $a^x + b^x + c^x \geqslant 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $abc = 1$.

Rezolvare. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x + c^x$. Evident, f este derivabilă şi $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

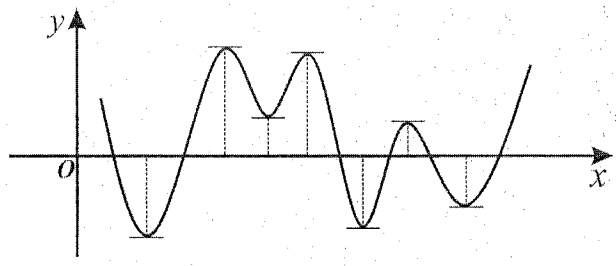
În plus, $f(0) = 3$, deci inegalitatea din ipoteză se scrie $f(x) \geqslant f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aceasta spune că punctul $x = 0$ este punct de minim pentru f.

Aplicând teorema lui Fermat, deducem că $f'(0) = 0$, deci $\ln a + \ln b + \ln c = 0$, adică $abc = 1$.

Teorema lui Rolle. Consecinţe ale teoremei lui Rolle

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:
a) f este continuă pe $[a; b]$; b) f este derivabilă pe $(a; b)$; c) $f(a) = f(b)$.
Atunci există $c \in (a; b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Consecinţe. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle. Atunci:
- între două rădăcini consecutive ale funcţiei f se află cel puţin o rădăcină a derivatei f';
- între două rădăcini consecutive ale derivatei f' se află cel mult o rădăcină a funcţiei f.



Teorema lui Lagrange. Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

Teorema lui Lagrange. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:
a) f este continuă pe $[a; b]$;
b) f este derivabilă pe $(a; b)$.
Atunci există $c \in (a; b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Consecinţa 1. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a; b]$, atunci f este funcţie constantă, adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c$, $\forall x \in [a; b]$.

Consecinţa 2. Fie f, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile. Dacă $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in [a; b]$, atunci f şi g diferă printr-o constantă aditivă, adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in [a; b]$.

Consecinţa 3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval.
a) Funcţia f este crescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.
b) Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.
c) Funcţia f este descrescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x) \leqslant 0$, $\forall x \in I$.
d) Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.

Consecinţa 4. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $x_0 \in I$. Dacă:
a) f este continuă în x_0;
b) f este derivabilă pe $I \backslash \{x_0\}$;
c) există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$
atunci funcţia f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$.

Teorema lui Cauchy. Fie funcţiile f, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
a) f, g sunt continue pe $[a; b]$; b) f, g sunt derivabile pe $(a; b)$ c) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a; b)$.

Atunci există un punct $c \in (a; b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema lui Darboux. Dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux, adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Consecinţă. Dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul I, iar derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Şirul lui Rolle

Această metodă este folosită pentru a determina numărul de soluţii ale unei ecuaţii de forma $f(x) = 0$, unde $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe intervalul I.

Folosim următoarele rezultate:

- Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, atunci între două rădăcini consecutive ale derivatei f' se află cel mult o rădăcină a funcţiei f. (Consecinţă a teoremei lui Rolle.)
- Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux, adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. (Teorema lui Darboux.)

Etapele formării şirului lui Rolle:

1. Se fixează intervalul de studiu I al ecuaţiei $f(x) = 0$, funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ fiind presupusă derivabilă.

2. Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ şi se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuaţii (situate în I), în ordine crescătoare: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

3. Se calculează valorile funcţiei f în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ la care se adaugă limitele lui f, notate cu α şi β, la capetele intervalului I. Se obţine un şir de valori:

$$\alpha,\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ \beta.$$

4. Se stabileşte semnul fiecărui termen al şirului de mai sus şi astfel se obţine un şir de semne (putând apărea şi valoarea 0) numit *şirul lui Rolle.*

Concluzii obţinute din studiul şirului lui Rolle:

1. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, de exemplu $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, atunci în intervalul $(x_1; x_2)$ nu există rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$.

2. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, de exemplu $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, atunci, conform teoremei lui Darboux şi a consecinţei teoremei lui Rolle, amintite mai sus, deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul $(x_1; x_2)$.

3. Dacă în şirul lui Rolle apare 0, de exemplu $f(x_1) = 0$, atunci x_1 este rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Exemplul 1. Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Rezolvare. Parcurgem etapele descrise mai sus.

1. Intervalul de studiu este $I = (-\infty; \infty)$ şi notăm $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
2. Ecuaţia $f'(x) = 0$ este $3x^2 - 3 = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
3. $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ şi $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
4. Considerăm tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$
şirul lui Rolle	$-$	$+$	$-$	$+$

Şirul lui Rolle este $(-\ +\ -\ +)$. Deoarece există trei schimbări de semn, deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are exact trei soluţii reale: $x_1 \in (-\infty; -1)$, $x_2 \in (-1; 1)$ şi $x_3 \in (1; \infty)$.

Exemplul 2. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^2 - 2\ln x + m = 0$, unde m este un parametru real.

Rezolvare. 1. Intervalul de studiu este $(0; \infty)$ şi notăm $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$.

2. Ecuaţia $f'(x) = 0$ este $2x - \frac{2}{x} = 0$ şi are în I soluţia unică $x = 1$.
3. $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 - \ln x + m) = 0 - \ln 0_+ + m = \infty$, $f(1) = m + 1$ şi
$\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{m - 2\ln x}{x^2}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$.
4. Considerăm tabelul:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$m+1$	$+\infty$
şirul lui Rolle	$+$	?	$+$

Apar situaţiile:

- Pentru $m \in (-\infty; 1)$, şirul lui Rolle este $(+\ -\ +)$, deci există $x_1 \in (0; 1)$ şi $x_2 \in (1; \infty)$.
- Pentru $m = 1$, şirul lui Rolle este $(+\ 0\ +)$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia unică $x = 1$.
- Pentru $m \in (1; \infty)$, şirul lui Rolle este $(+\ +\ +)$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ nu are soluţii reale.

6. REGULILE LUI L'HOSPITAL

Regula lui l'Hospital pentru limite laterale. Fie $(a;b)$ un interval cu $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ şi funcţiile $f,\ g : (a;b) \to \mathbb{R}$.

Dacă

a) $f,\ g$ sunt derivabile pe $(a;b)$ cu $g' \neq 0$ pe $(a;b)$;

b) există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ finită sau infinită;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = 0$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = \pm\infty$,

atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită la dreapta în a şi

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observaţie. Un rezultat analog se obţine dacă se înlocuieşte condiţia $x \searrow a$ cu $x \nearrow b$.

Regula lui l'Hospital. Fie I un interval al lui $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare pentru I şi funcţiile $f,\ g : I \to \mathbb{R}$.

Dacă

a) $f,\ g$ sunt derivabile pe I cu $g' \neq 0$ pe I;

b) există $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ finită sau infinită;

c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,

atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prezentăm mai jos aplicabilitatea regulilor lui L'Hospital pentru cele 7 cazuri de nedeterminare:

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0}}$$

Exemple. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^7-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^x+x)}{\ln(e^x-x)}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} (x\sin x + e^x)^{\frac{1}{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2+2x+1)^{\frac{1}{2x}}$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)^{x-2}$.

Rezolvare. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^5-1)'}{(x^7-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4}{7x^6}=\dfrac{5}{7};$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x)}{\ln(e^x-x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(e^x+x))'}{(\ln(e^x-x))'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{\frac{e^x-1}{e^x-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\cdot\dfrac{e^x-x}{e^x-1}=1;$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x+1}}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}e^{\frac{1}{x+1}}=\infty;$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0;$

Pentru a trata nedeterminările 1^∞, ∞^0, 0^0, poate fi utilă formula :

$$\boxed{f^g=e^{g\ln f},\ \text{unde } f>0}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin x+e^x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x\sin x+e^x)}=[0\cdot\infty]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x\sin x+e^x)}{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x+e^x}{x\sin x+e^x}}=e^1=e;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2x}}=[\infty^0]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\cdot\ln(x^2+2x+1)}=[0\cdot\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+2x+1)}{2x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x^2+4x}}=e^0=1;$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)^{x-2}=[0^0]=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)\ln(x-2)}=[0\cdot\infty]=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x-2}}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}}}=$

$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2-x)}=e^0=1.$

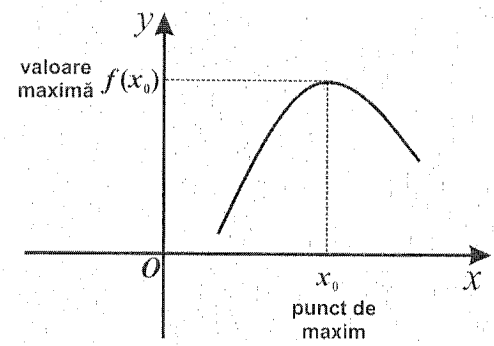
7. APLICAŢII ALE DERIVATELOR

1. INTERVALE DE MONOTONIE ŞI PUNCTE DE EXTREM

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I, iar $x_0 \in I$ un punct diferit de extremităţile intervalului I astfel încât $f'(x_0) = 0$ (adică x_0 este punct critic al funcţiei f).

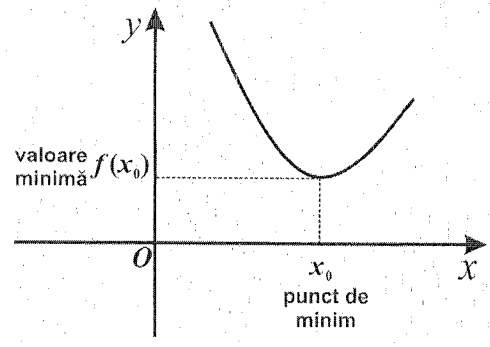
a) Dacă f' îşi schimbă semnul de la $+$ la $-$ la trecerea prin x_0, atunci x_0 este punct de maxim local pentru f, iar $f(x_0)$ este valoare maximă locală.

				punct de maxim x_0			
x							
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$			$f(x_0)$ valoare maximă			$\searrow$



b) Dacă f' îşi schimbă semnul de la $-$ la $+$ la trecerea prin x_0, atunci x_0 este punct de minim local pentru f, iar $f(x_0)$ este valoare minimă locală.

				punct de minim x_0			
x							
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$			$f(x_0)$ valoare minimă			$\nearrow$



Observaţie. Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I.

a) Dacă $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$, iar mulţimea valorilor x pentru care $f'(x) = 0$ conţine numai puncte izolate, atunci f este strict crescătoare pe I.

b) Dacă $f'(x) \leqslant 0$, $\forall x \in I$, iar mulţimea valorilor x pentru care $f'(x) = 0$ conţine numai puncte izolate, atunci f este strict descrescătoare pe I.

Etape în stabilirea intervalelor de monotonie şi a punctelor de extrem:

1. Se calculează derivata f' a funcţiei pe domeniul de derivabilitate $D_{f'} \subset D$.

2. Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$, $x \in D_{f'}$ şi se află punctele critice.

3. Se determină semnul derivatei f'.

4. Se stabilesc intervalele de monotonie şi punctele de extrem.

Exemplu. Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem local ale funcţiei

$$f : (0; \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 18x^2 - \ln x.$$

Rezolvare. Funcţia f este derivabilă şi

$$f'(x) = \frac{36x^2 - 1}{x}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are în $(0; \infty)$ soluţia unică $x = \frac{1}{6}$, iar f' îşi schimbă semnul la trecerea prin $x = \frac{1}{6}$, aşa cum reiese din tabelul de mai jos.

x	0			$\frac{1}{6}$			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$			$\frac{1}{2}+\ln 6$			$\nearrow$

Intervale de monotonie:

- f este strict descrescătoare pe $\left(0; \frac{1}{6}\right]$;
- f este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Există un singur punct de extrem (minim) local: $x = \frac{1}{6}$.

2. DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂŢI

Pentru a demonstra o inegalitate de forma $f(x) \geqslant g(x),\ \forall x \in D$ sau $f(x) > g(x),\ \forall x \in D$, unde f şi g sunt funcţii derivabile pe D, considerăm funcţia $h : D \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - g(x)$, evident derivabilă pe D, fiind diferenţă de funcţii derivabile. Din studiul variaţiei funcţiei h, reiese că $h(x) \geqslant 0,\ \forall x \in D$, respectiv $h(x) > 0,\ \forall x \in D$, de unde rezultă concluzia.

Exemplu. Să se arate că

$$\ln(1 + x) \geqslant \frac{x}{1 + x}, \forall x \geqslant 0.$$

Rezolvare. Considerăm funcţia

$$h : [0; \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x}$$

şi trebuie să arătăm că $h(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0; \infty)$.

Evident, funcţia h este derivabilă, fiind compunere de funcţii derivabile, iar

$$h'(x) = \frac{x}{(1 + x)^2} \geqslant 0,\ \forall x \in [0; \infty),$$

deci h este crescătoare pe $[0; \infty)$.

În plus, $h(0) = 0$, de unde, ţinând cont că $x \geqslant 0$ şi h este crescătoare, deducem că $h(x) \geqslant h(0)$, adică $h(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0; \infty)$, ceea ce trebuia demonstrat.

În tabelul de mai jos este redată variaţia funcţiei h.

x	0						$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$					$+\infty$

3. DEMONSTRAREA INVERSABILITĂŢII UNOR FUNCŢII

Fie $f : D \to E$ o funcţie derivabilă pe D. Ştim că

$$f \text{ este inversabilă} \Longleftrightarrow f \text{ este bijectivă} \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ este injectivă} \\ \text{şi} \\ f \text{ este surjectivă} \end{cases}$$

Pentru demonstrarea injectivităţii folosim rezultatul:

$$f \text{ este strict monotonă} \Longrightarrow f \text{ este injectivă},$$

iar pentru demonstrarea surjectivităţi, folosim:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Co} f \Longrightarrow f \text{ este surjectivă},$$

unde $\operatorname{Im} f$ este imaginea lui f sau mulţimea valorilor lui f, iar $\operatorname{Co} f$ este codomeniul lui f.

Exemplu. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ este inversabilă.

Rezolvare. Funcţia f este derivabilă şi

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Obţinem $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia unică $x = 0$. Prin urmare, f este strict crescătoare, deci f este injectivă.

Apoi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ şi cum f este continuă, rezultă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, adică f este surjectivă.

În concluzie,

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ este injectivă} \\ \text{şi} \\ f \text{ este surjectivă} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ este bijectivă} \Longrightarrow f \text{ este inversabilă}$$

Variaţia funcţiei este readată în tabelul de mai jos.

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$					$+\infty$

4. INTERVALE DE CONVEXITATE/CONCAVITATE. PUNCTE DE INFLEXIUNE

Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că:

a) f este *convexă pe* I dacă $f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in [0;1]$;

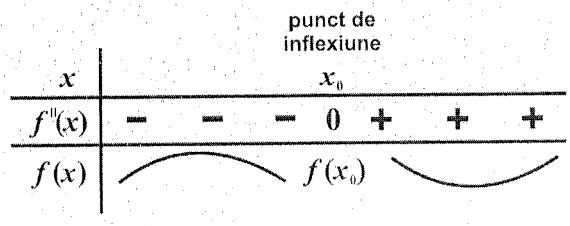
b) f este *concavă pe* I dacă $f((1-t)x_1 + tx_2) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in [0;1]$;

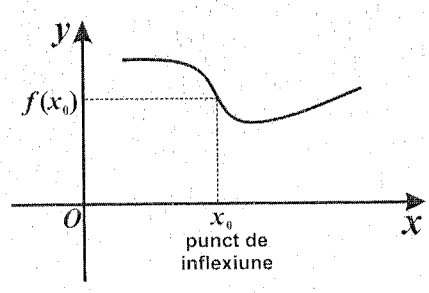
Teoremă. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul I. Atunci au loc echivalenţele:

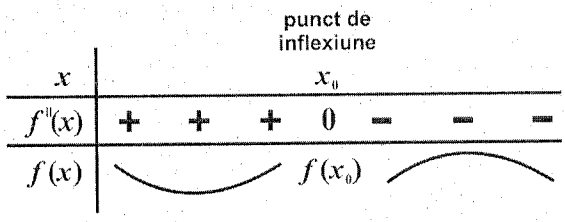
a) f este convexă pe $I \iff f''(x) \geqslant 0,\ \forall x \in I$;

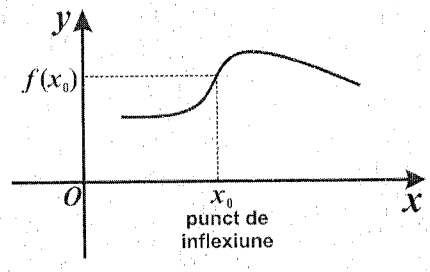
b) f este concavă pe $I \iff f''(x) \leqslant 0,\ \forall x \in I$;

Definiţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in I$ un punct diferit de capetele intervalului I. Spunem că x_0 este *punct de inflexiune al lui* f dacă f este continuă în x_0, are derivată în x_0 şi este convexă, respectiv convavă de o parte şi de alta a lui x_0.









Etape în stabilirea intervalelor de convexitate/concavitate şi a punctelor de inflexiune:

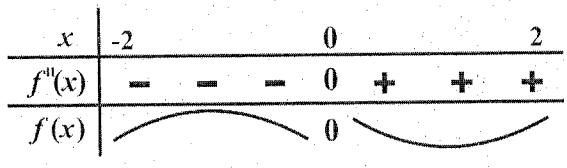
1. Se calculează derivata a doua f'' a funcţiei pe mulţimea $D_{f''} \subset D$.
2. Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0,\ x \in D_{f''}$.
3. Se determină semnul derivatei f''.
4. Se stabilesc intervalele de convexitate, intervalele de concavitate şi punctele de inflexiune.

Exemplu. Să se determine intervalele de convexitate/concavitate şi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei

$$f : (-2; 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}.$$

Rezolvare. Funcţia f este de două ori derivabilă pe $(-2; 2)$ şi $f''(x) = \dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$.

Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia unică $x = 0$, iar f'' îşi schimbă semnul la trecerea prin $x = 0$, aşa cum reiese din tabelul de mai jos:



Intervale de convexitate/concavitate:

- f este concavă pe $(-2; 0]$;
- f este convexă pe $[0; 2)$.

Există un singur punct de inflexiune al graficului funcţiei: $P(0; 0)$.

8. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

Etapele reprezentării grafice a unei funcţii

1. Domeniul D de definiţie al funcţiei

Domeniul de definiţie poate fi dat de enunţ. În caz contrar, se ia domeniul maxim de definiţie în cazul funcţiilor elementare, sau se pun condiţii de existenţă a expresiilor care compun formula funcţiei.

2. Intersecţiile graficului cu axele

Pentru $G_f \cap Ox$ se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ şi se află eventualele soluţii: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Punctele de intersecţie ale graficului cu axa Ox sunt $A_1(x_1; 0)$, $A_2(x_2; 0)$, $A_3(x_3; 0)$, ...

Pentru $G_f \cap Oy$ se calculează $f(0)$ (dacă $0 \in D$), deci $G_f \cap Oy = \{B(0; f(0))\}$.

3. Limitele la capete de interval şi asimptote

Se calculează limitele în capetele intervalelor din care este format domeniul de definiţie. Totodată, se scriu ecuaţiile asimptotelor.

4. Derivata I

Se calculează $f'(x)$, se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ şi se stabileşte semnul lui f' pentru a determina intervalele de monotonie şi punctele de extrem.

5. Derivata a II-a

Se calculează $f''(x)$, se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$ şi se stabileşte semnul lui f'' pentru a determina intervalele de convexitate, intervalele de concavitate şi punctele de inflexiune.

Există situaţii când se renunţă la studiul lui f'' deoarece aceasta are o formă relativ complicată şi sunt informaţii suficiente obţinute din etapele anterioare pentru trasarea graficului.

6. Tabloul de variaţie

Se trec toate datele obţinute într-un tablou de variaţie, ca in figura de mai jos.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

Pe prima linie se trec domeniul de definiţie şi valorile remarcabile ale lui x : zerourile funcţiei şi ale derivatelor. Pe a doua linie se trece semnul derivatei întâi. Pe a treia linie se trec valorile remarcabile ale funcţiei, limitele la capetele intervalelor care formează domeniul de definiţie şi săgeţile corespunzătoare monotoniei funcţiei. Pe a patra linie se trece semnul derivatei a doua şi se stabileşte forma graficului (convex/concav).

7. Trasarea propriu-zisă a graficului

Într-un sistem ortogonal de axe xOy se desenează asimptotele funcţiei, punctele de intersecţie ale graficului cu axele, punctele de extrem şi cele de inflexiune, apoi se desenează curba corespunzătoare graficului.

Observaţie. Reprezentarea grafică a funcţiei permite stabilirea numărului de soluţii ale unei ecuaţii de forma $f(x) = m$, unde m este un parametru real. Astfel, numărul punctelor de intersecţie dintre

graficul lui f şi dreapta de ecuaţie $y = m$, pentru un anumit m, este acelaşi cu numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = m$.

Exemplu. Să se reprezinte grafic funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x-1|}{e^x}$, apoi să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

Rezolvare.

1. Domeniul de definiţie este $D = \mathbb{R}$.

Explicitând modulul, obţinem $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & \text{dacă } x \geqslant 1 \\ -\dfrac{x-1}{e^x}, & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$

2. Punctele de intersecţie cu axele sunt $A(1;0) = G_f \cap Ox$ şi $B(0;1) = G_f \cap Oy$.

3. Limitele la capete de interval sunt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

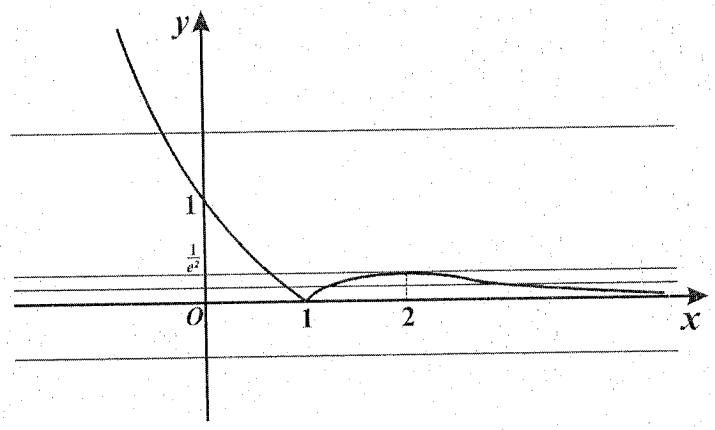
4. Derivata întâi. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, iar $x_0 = 1$ este punct unghiular.

Într-adevăr, $f'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{e}$ şi $f'_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{1}{e}$.

Tabloul de variaţie al funcţiei f redat în figura de mai jos

x	$-\infty$					1			2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘			0		↗		$\frac{1}{e^2}$	↘	0

iar graficul funcţiei f este redat în figura de mai jos.



Pentru a stabili numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = m$, ducem paralele la asa Ox prin puncte de ordonată m de pe axa Oy şi observăm în câte puncte intersectează acestea graficul funcţiei f Astfel:

- dacă $m \in (-\infty; 0)$, ecuaţia $f(x) = m$ nu are soluţii reale;
- dacă $m = 0$, ecuaţia $f(x) = m$ are soluţia unică $x = 1$;
- dacă $m \in (0; \frac{1}{e^2})$, ecuaţia $f(x) = m$ are trei soluţii reale: $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (1;2)$ şi $x_3 \in (2;\infty)$;
- dacă $m = \frac{1}{e^2}$, ecuaţia $f(x) = m$ are două soluţii: $x_1 \in (0;1)$ şi $x_2 = 2$;
- dacă $m \in (\frac{1}{e^2}; \infty)$, ecuaţia $f(x) = m$ are o singură soluţie reală: $x \in (-\infty; 1)$.

DERIVATE

Nr.	Funcţia	Derivata	$D_{f'}$	Funcţia compusă	Derivata
1.	c (constantă)	0	$\mathbb{R}$		
2.	x	1	$\mathbb{R}$	u	u'
3.	x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$	u^α	$\alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
4.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,+\infty)$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
6.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	e^u	$e^u \cdot u'$
7.	a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
9.	$\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0,+\infty)$	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
10.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
11.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
12.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Reguli de derivare

$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$ $\boxed{(k \cdot f)' = k \cdot f' \ (k \in \mathbb{R})}$ $\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$ $\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'}$ $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},\ y_0 = f(x_0)}$

$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}}$ (formula lui Leibniz)

PRIMITIVE

Nr.	Funcţia	Integrala nedefinită
1.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\int a\,\mathrm{d}x = ax + \mathcal{C}$
2.	$f : I \subset (0; +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$
3.	$f : I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$
4.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
5.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + \mathcal{C}$
6.	$f : I \subset \mathbb{R}\backslash\{\pm a\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$
7.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2},\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$
8.	$f : I \subset (-a; a) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}$
9.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$
10.	$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $I \subset (-\infty; -a)$ sau $I \subset (a; +\infty),\ a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \mathcal{C}$
11.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathcal{C}$
12.	$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \mathcal{C}$
13.	$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x,\ I \subset \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle\vert k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + \mathcal{C}$
14.	$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{ctg} x,\ I \subset \mathbb{R}\backslash\{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + \mathcal{C}$
15.	$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ I \subset \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle\vert k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
16.	$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ I \subset \mathbb{R}\backslash\{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$