Numere complexe. $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \}$$

$z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$ (conjugatul lui z)

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (modulul lui z)

Puterile lui i: $\boxed{i^2 = -1}$ $\boxed{i^3 = -i}$ $\boxed{i^4 = 1}$

$i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

Funcția de gradul I

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

MONOTONIE

$a > 0 \Rightarrow f$ este **strict** crescătoare pe $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

$a < 0 \Rightarrow f$ este **strict** descrescătoare pe $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

SEMN

$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		∞
$f(x)$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

- intersecția cu Ox : $f(x) = 0$
- intersecția cu Oy : $f(0)$
- intersecția a două grafice : $G_f \cap G_g$: $f(x) = g(x)$

$A(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$

$G_f = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in D \}$

$\hookrightarrow$ domeniu

Ecuația de gradul al II-lea

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

I $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta} \cdot i}{2a} \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$$

II $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ ecuația are 2 soluții reale egale

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

III $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ ecuația are 2 soluții reale distincte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ecuația are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Viete:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\begin{cases} x + y = S \\ x \cdot y = P \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \qquad t^2 - St + P = 0$$

Funcția de gradul al II-lea

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \cup \\ a < 0 \Rightarrow \cap \end{cases}$ (ramuri)

Vârful parabolei : $V(x_V, y_V) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$x_V = -\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

Axa de simetrie : $x = -\frac{b}{2a}$

axa de simetrie

$x = \frac{-b}{2a}$

$G_f \cap Ox$: $f(x) = 0$

I $\Delta < 0 \Rightarrow G_f$ nu intersectează axa Ox

II $\Delta = 0 \Rightarrow G_f$ este tangent la Ox (un singur punct)

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow A\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$

III $\Delta > 0 \Rightarrow G_f$ intersectează Ox în 2 puncte distincte

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow A(x_1, 0)$

$B(x_2, 0)$

$G_f \cap Oy$: $f(0) = c \Rightarrow C(0, c)$

Forma canonică: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Descompunerea: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Semnul funcției de gradul II -

I $\Delta < 0$

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		semnul lui a	

II $\Delta = 0$

$x_1 = x_2$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
$f(x)$		semnul lui a	0	semnul lui a	

III $\Delta > 0$

$x_1 \neq x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Monotonia

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ min	$\nearrow$	

$a > 0 \Rightarrow \cup$

$\Rightarrow$ funcția admite minim în $x = -\frac{b}{2a}$

valoarea minimă: $-\frac{\Delta}{4a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ max	$\searrow$	

$a < 0 \Rightarrow \cap$

$\Rightarrow$ funcția admite maxim în $x = -\frac{b}{2a}$

valoarea maximă: $-\frac{\Delta}{4a}$

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathcal{G}_f$ este situat

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

deasupra Ox

- $ax^2 + bx + c \leq 0 \quad ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathcal{G}_f$ este situat

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

sub Ox

Funcția de gradul al II-lea

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a \neq 0$

$x_V = \frac{-b}{2a} \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow f \text{ admite } \min f = \frac{-\Delta}{4a} \\ a < 0 \Rightarrow f \text{ admite } \max f = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right) \\ a < 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \quad f: \left[\frac{-b}{2a}, \infty\right) \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right) \text{ este BIJECTIVĂ} \\ a < 0 \quad f: \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right) \to \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] \text{ este BIJECTIVĂ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \iff \Delta \geq 0 \; ; \; a > 0 \\ f(x) \leq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \iff \Delta \leq 0 \; ; \; a < 0 \end{cases}$$

Relațiile lui Viette:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \end{cases}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Funcția exponențială și logaritmică

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\boxed{\log_a A = x \iff a^x = A}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Proprietățile logaritmilor

- $\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B)$
- $\log_a A - \log_a B = \log_a \left(\frac{A}{B}\right)$
- $\log_a A^m = m \log_a A$
- $\log_a a^m = m$
- $a^{\log_a A} = A$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Cazuri particulare

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a \frac{1}{a} = -1$

$\ln 1 = 0$ $\quad$ $\ln e = 1$ $\quad$ $\ln \frac{1}{e} = -1$ $\quad$ $\ln e^n = n$

$\lg 1 = 0$ $\quad$ $\lg 10 = 1$ $\quad$ $\lg \frac{1}{10} = -1$

Schimbarea bazei unui logaritm

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

$$\log_a A = \frac{1}{\log_A a}$$

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$$

$$\log_{a^y} b^x = \frac{x}{y} \log_a b$$

Progresii aritmetice

$\div\ a_n$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

$\div\ a, b, c \iff b = \frac{a+c}{2}$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

$(a_n)_{n \geq 1}$ p.a $\iff$ $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]\,n}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n + r$$
$$= a_1 + n\cdot r$$

Progresii geometrice

$\div\!\div\ b_n$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$\div\!\div\ a, b, c \iff b^2 = a\cdot c$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$(b_n)_{n \geq 1}$ p.g. $\iff$ $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_n$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$
$$= b_1 \cdot q^n$$

$S_n = b_1 \cdot n$ dacă $q = 1$

Permutări. Aranjamente. Combinări.

$$0! = 1 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

- numărul de mulțimi ordonate: $P_n = n!$
- numărul de submulțimi cu k elemente: $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- numărul de submulțimi ordonate cu k elemente: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$\begin{cases} C_n^0 = 1 \\ A_n^0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_n^1 = n \\ A_n^1 = n \end{cases} \qquad \begin{cases} C_n^n = 1 \\ A_n^n = 1 \end{cases} \qquad C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$ - numărul total de submulțimi

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$$

- Binomul lui Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a \cdot b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

- Formula termenului general:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \qquad k \leq n$$

Bisectoarea unui unghi interior este segmentul de dreaptă care împarte unghiul în două unghiuri congruente.

- sunt concurente într-un punct egal depărtat de laturile triunghiului (i)

i = centrul cercului ÎNSCRIS în triunghi

r este raza

Mediana este segmentul de dreaptă care unește vârful unui triunghi cu mijlocul laturii opuse

- sunt concurente într-un punct G

G = centrul de GREUTATE al triunghiului

G este situat la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de baza

Mediatoarea unui segment este perpendiculara prin mijlocul acestuia.

- sunt concurente într-un punct (O)

O = centrul cercului CIRCUMSCRIS

R este raza

Înălțimea este perpendiculara dusă dintr-un punct pe latura opusă.

- sunt concurente într-un punct H

H = ORTOCENTRUL triunghiului

$A(x_1, y_2)$	$B(x_2, y_2)$

Formula distanței : $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Coordonatele vectorului AB : $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_2)\vec{j}$

Mijlocul segmentului : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ecuația dreptei AB : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Panta dreptei : $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$A(x_1, y_1)$	$B(x_2, y_2)$	$C(x_3, y_3)$

$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

A, B, C - coliniare $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$ - dacă A, B, C - necoliniare

$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ - centru de greutate al triunghiului ABC

Ecuația dreptei determinate de un punct și o pantă:

$$d: \; y - y_0 = m_d (x - x_0)$$

Ecuația carteziană generală a unei drepte:

$$d: \; ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow \; m_d = -\frac{a}{b}$$

$$d: \; y = \underbrace{m}_{m_d} x + n$$

Distanța de la un punct la o dreaptă:

$$M_0 (x_0, y_0)$$

$$d: \; ax + by + c = 0$$

$$d(M_0, d) = \frac{(ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Condiții de paralelism și perpendicularitate

I $\begin{cases} d_1 \parallel d_2 \iff m_{d_1} = m_{d_2} \\ d_1 \perp d_2 \iff m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \end{cases}$

II : $d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

- $d_1 = d_2 \iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

- $d_1 \parallel d_2 \iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

- $d_1 \perp d_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

Vectori

- LUNGIMEA segmentului [AB] s.n. MODULUL (lungimea) vectorului $\vec{AB}$ și se notează $|\vec{AB}|$.

- Dreapta AB s.n. DIRECȚIA vectorului $\vec{AB}$

- SENS (A - originea ; B - extremitatea)

1. Doi vectori au ACEEAȘI DIRECȚIE dacă sunt situați:
   - pe aceeași dreaptă suport
   - pe drepte paralele (vectori coliniari)

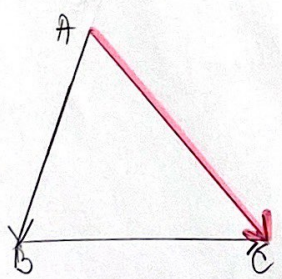
2. Doi vectori de ACEEASI DIRECȚIE pot avea:
   - aceleași sens
   - sensuri opuse

3. Doi vectori sunt EGALI dacă au:
   - aceeași lungime
   - aceeași direcție
   - aceleași sens

ADUNAREA

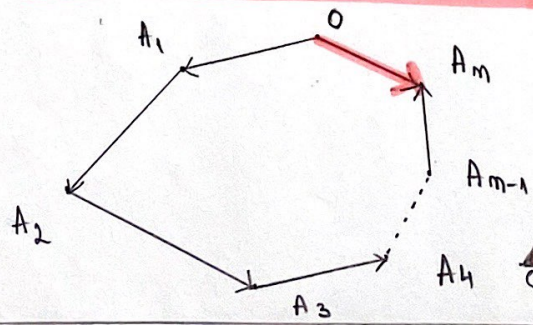
Regula triunghiului

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



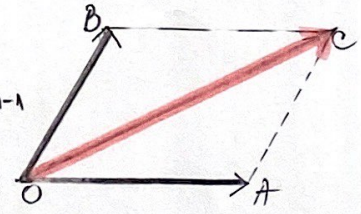
Regula poligonului

$\vec{OA_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{OA_n}$



Regula paralelogramului

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

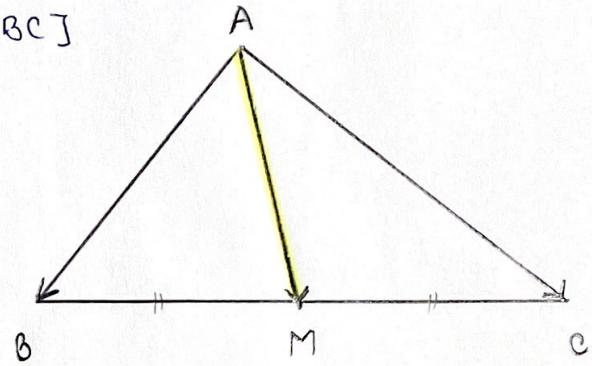


- Relatia vectoriala a MEDIANEI

Mediana - uneste vârful cu MIJLOCUL laturii opuse

M - mijlocul segmentului [BC]

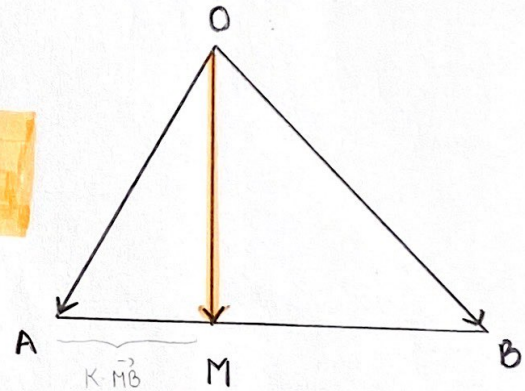
$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$$



- Punctul care împarte un segment într-un raport dat

$\vec{AM} = K \cdot \vec{MB}$

$$\vec{OM} = \frac{1}{1+K}\vec{OA} + \frac{K}{1+K}\vec{OB}$$



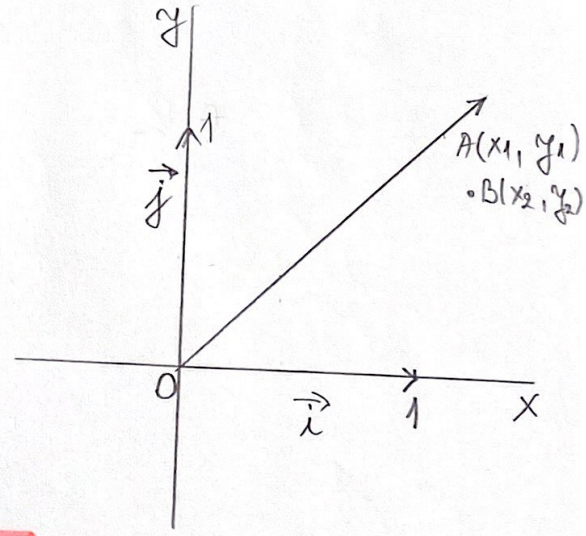
- Coordonatele unui vector:

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \\ |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \end{cases}$$

$\vec{OA} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} = \vec{r_A}$

$\vec{OB} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} = \vec{r_B}$



$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

Condiții de paralelism și perpendicularitate

$$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{i} + b_1 \vec{j}$$

$$\vec{v} = a_2 \vec{j} + b_2 \vec{j}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

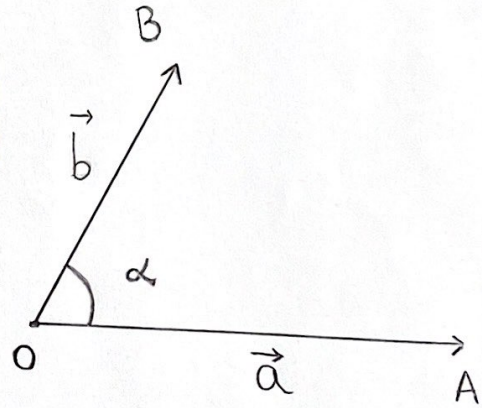
$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

(coliniari)

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

Produsul scalar a doi vectori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

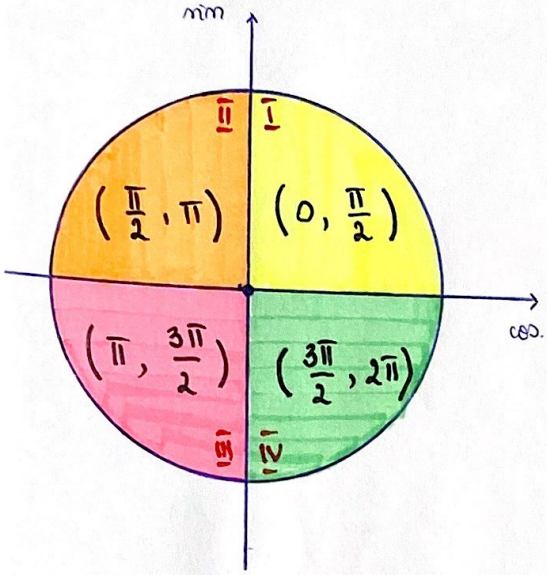


$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

TRIGONOMETRIE



	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+

C_{I} : $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ C_{II} : $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

C_{III} : $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ C_{IV} : $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x = a$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + k\pi$

$\cos x = a$

$x = \pm \arccos a + 2k\pi$

$\operatorname{tg} x = a$

$x = \operatorname{arctg} a + k\pi$

$\operatorname{ctg} x = a$

$x = \operatorname{arctg} + k\pi$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \iff \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$	$180 = \pi$	$270 = 3\frac{\pi}{2}$	$360 = 2\pi$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
ctg	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

Formule trigonometrice

!

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

- $\sin(2\pi - x) = -\sin x$
- $\cos(2\pi - x) = \cos x$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctg\, x \\ ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg(\pi - x) = -tg\, x \\ ctg(\pi - x) = -ctg\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg(\pi + x) = tg\, x \\ ctg(\pi + x) = ctg\, x \end{cases}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

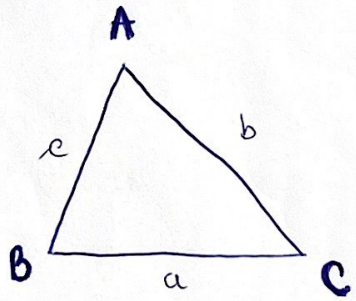
$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \iff x = k\pi \\ \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x = 1 \iff x = x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x = -1 \iff x = (2k+1) \cdot \pi \end{cases}$$



Teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R- raza cercului circumscris.

Teorema cosinusurilor:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \; ; \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \; ; \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$\sin(-x) = -\sin x$ - funcție IMPARĂ

$\cos(-x) = \cos x$ - funcție PARĂ

$tg(-x) = -tg\, x$ - funcție IMPARĂ

$ctg(-x) = -ctg\, x$ - funcție IMPARĂ

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \dfrac{2\, tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} \\ \cos x = \dfrac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} \end{cases}$$

FUNCȚII PERIODICE

$$\begin{cases} \sin(x+2k\pi) = \sin x \\ \cos(x+2k\pi) = \cos x \end{cases}$$

(2π este perioada principală)

$$\begin{cases} tg(x+k\pi) = tg\, x \\ ctg(x+k\pi) = ctg\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \iff x = k\pi \\ \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad \left.\begin{cases} \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \iff x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \iff x = (2k+1)\pi \end{cases}\right\} \text{sire}$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$\sin(\arcsin x) = x$

$\cos(\arccos x) = x$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

$\arcsin(\sin x) = x$

$\arccos(\cos x) = x$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

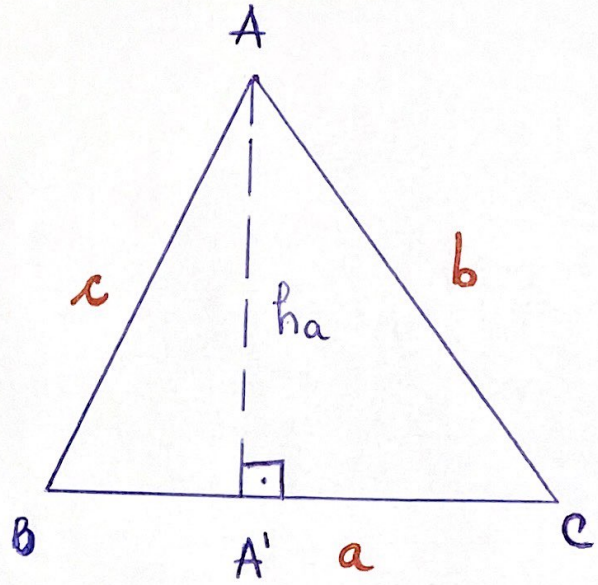
Teorema medianei

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

mediana din A

$$m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(b^2+a^2)-c^2}{4}$$



ARIA TRIUNGHIULUI (S)

- $S = \frac{ab \sin c}{2} = \frac{ac \cdot \sin B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$
- $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

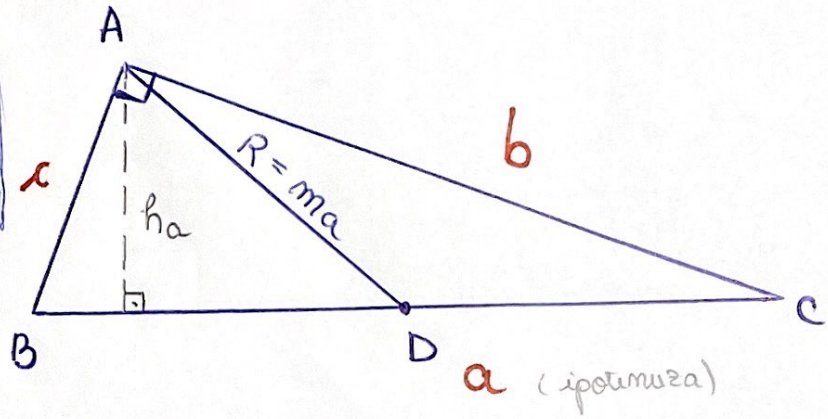
R - raza cercului circumscris Δ

r - raza cercului înscris Δ

p - semiperimetrul Δ $\frac{a+b+c}{2}$

TRIUNCHIUL DREPTUNGHIC

$$R = \frac{\text{ipotenuza}}{2} = m_a$$



T. Pitagora : $a^2 = b^2 + c^2$

$$\sin \alpha = \frac{c \cdot op}{ip} \qquad \cos = \frac{c \cdot al.}{ip}$$

$$tg\ \alpha = \frac{c \cdot op.}{c \cdot al} \qquad ctg = \frac{c \cdot al.}{c \cdot op}$$

$$S = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \qquad h_a = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$$

TRIUNGHI ECHILATERAL

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \qquad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Sistem de ecuații liniare

COMPATIBIL DETERMINAT (are soluție unică)

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Sistem Cramer

ex: d_1 : coloana 1 se schimbă cu B

$$x = \frac{d_1}{\det A} \qquad y = \frac{d_2}{\det A} \qquad z = \frac{d_3}{\det A}$$

COMPATIBIL NEDETERMINAT (are mai multe soluții)

$\det(A) = 0$; $m_{caracteristici} = 0 \Rightarrow$ Rouche

- determinăm un minor principal (dp)
- calculăm toți minorii caracteristici → din dp prin bordare cu termeni liberi și câte o linie rămasă

$\Rightarrow$ necunoscute principale / secundare

↳ rezolvăm sistemul

INCOMPATIBIL (nu are soluții)

$\det(A) = 0$ $m_{caracteristici} \neq 0$

Matrice. Sisteme de ecuații liniare

A inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Ecuații matriciale

$$X \cdot A = B \mid \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

IZOMORFISME :

$(\mathbb{Z}, \square)$; $(\mathbb{Z}, \circ)$

IZOMORFISM $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1. \ f \text{ MORFISM} \\ 2. \ f \text{ BIJECTIVĂ} \end{cases}$ injectivă / surjectivă

1. f MORFISM

$\Leftrightarrow$ $f(x \square y) = f(x) \circ f(y)$; $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

2. f BIJECTIVĂ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a) \ f. \text{ INJECTIVĂ} \\ b) \ f. \text{ SURJECTIVĂ} \end{cases}$

a) f. INJECTIVĂ $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

a. î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b) f. SURJECTIVĂ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathbb{Z}$ $\exists x \in \mathbb{Z}$

a. î. $f(x) = y$

IZOMORFISM

$f : \underline{\underline{D}} \to \underline{\underline{C}}$ $\qquad f(x) = \ldots\ldots\ldots$

izomorfism de la $(\underline{\underline{D}}, \square)$ la $(\underline{\underline{C}}, \circ)$

IZOMORFISM $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1.\ f \text{ MORFISM} \\ 2.\ f \text{ BIJECTIVĂ} \end{cases}$ < injectivă, surjectivă

1. f MORFISM

$\Leftrightarrow$ $f(x \square y) = f(x) \circ f(y)$; $\forall\, x, y \in \underline{\underline{D}}$

2. f BIJECTIVĂ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a)\ f \text{ INJECTIVĂ} \\ b)\ f \text{ SURJECTIVĂ} \end{cases}$

a) studiezi monotonia : $f'(x) = 0$

dacă f este **strict** crescătoare / descrescătoare

$\Rightarrow$ f este injectivă

b) calculezi limitele la cele două capete ale tabelului

$\mathrm{Im} f$ = cea mai mică limită calculată și după cea mai mare limită calculată

↳ trebuie să fie egală cu codomeniul $\underline{\underline{C}}$

$\mathrm{Im} f = (\ldots, \ldots)$ = codomeniul funcției $f = C$

LEGI DE COMPOZIȚIE

1. **COMUTATIVITATE** : $x \circ y = y \circ x$

2. **ASOCIATIVITATE** : $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

3. **ELEMENT NEUTRU** : $\exists\, e \in M$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$

ex: $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ $\quad x \circ e = x$

$\Rightarrow x \circ e = xe - 2x - 2e + 6 = x$

$\Rightarrow x(e-2) - 2e + 6 = \boxed{1 \cdot x + 0} \Rightarrow \begin{cases} e - 2 = 1 \\ -2e + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 3 \\ e = 3 \end{cases}$

4. **ELEMENTE SIMETRIZABILE** :

Fie $x \in M$ un element simetrizabil

$\exists\, x' \in M$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

ex: $e = 3 \Rightarrow x \circ x' = x' \circ x = e \Rightarrow x \circ x' = 3$

$\Rightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3$

$\Rightarrow x'(x-2) = 2x - 3 \quad |:(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2} \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\exists\, x' = \dfrac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

5. **PARTE STABILĂ** : $\forall\, x, y \in M \Longrightarrow x \circ y \in M$

ex: $(5, \infty)$ p.s. în raport cu „o" $\quad x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$

$\Leftrightarrow \forall\, x, y \in (5, \infty) \Rightarrow x \circ y \in (5, \infty)$

$x \circ y \in (5, \infty) \Leftrightarrow xy - 5x - 5y + 30 > 5 \Leftrightarrow xy - 5x - 5y + 25 > 0$

$\Leftrightarrow x(y-5) - 5(y-5) > 0 \Rightarrow \underbrace{(y-5)(x-5)}_{>0}$

$c' = 0$ $\qquad \ln(u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$x' = 1$

$(x^n)' = nx^{n-1}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$
$(x^r)' = rx^{r-1}\ ,\ r \in \mathbb{R}$	$(u^r)' = ru^{r-1} \cdot u'\ ,\ r \in \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[3]{u})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ecuația tangentei la G_f în $x = x_0$ $\left(A(x_0, f(x_0))\right)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

unde $f'(x_0)$ este panta tangentei

$(f+g)' = f' + g'$
$(f-g)' = f' - g'$
$(cf)' = cf'$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Mulțimea primitivelor (integrala nedefinită)

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	$\int dx = x + C$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int sin\,x\,dx = -cos\,x + C$	$\int \frac{1}{x+1}dx = \ln\|x+1\| + C$
$\int cos\,x\,dx = \sin x + C$	
$\int tg\,x\,dx = -ln\|\cos x\| + C$	
$\int ctg\,x\,dx = ln\,\|\sin x\| + C$	
$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = tg\,x + C$	
$\int \frac{1}{sin^2 x}dx = -ctg\,x + C$	

Adunări:

$a + \infty = \infty$ $\qquad$ $\infty + \infty = \infty$

$a - \infty = -\infty$ $\qquad$ $-\infty - \infty = -\infty$

Înmulțiri:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{dc. } a > 0 \\ -\infty & \text{dc. } a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{dc. } a > 0 \\ \infty & \text{dc. } a < 0 \end{cases}$$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$$\boxed{\frac{a}{\pm\infty} = 0}$$

Operații care nu au sens - Cazuri de nedeterminare:

$\infty - \infty$ $\qquad$ $1^{\pm\infty}$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$

$-\infty + \infty$ $\qquad$ ∞^0

$0 \cdot (\pm\infty)$ $\qquad$ 0^0 $\qquad$ $\pm\frac{\infty}{\infty}$

Numărul e:

$e^{\infty} = \infty$

$e^{-\infty} = 0$

$e^0 = 1$

$e^1 = e$

ln:

$\ln 0 = -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln \infty = \infty$

$\ln e = 1$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\frac{1}{-0} = -\infty$$

$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$

$\operatorname{arcctg}(\infty) = 0$

$\operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi$

LIMITE

Funcția polinomială:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \right) = a_n \cdot (\pm\infty)^n$$

Funcția rațională:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} \cdot (\pm\infty)^{n-m} & n > m \end{cases}$$

Funcția radical

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$$

Funcția exponențială

$f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ $\quad f(x) = a^x$; $a > 0$; $a \neq 1$

I $a \in (0, 1)$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} a^x = 0$$

II $a \in (1, \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Functia logaritmica

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$; $a > 0$

$f(x) = \log_a x$ $\quad a \neq 1$

I $a \in (0, 1)$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$

II $a \in (1, \infty)$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$

Functii trigonometrice

$tg : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$tg(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} tg\, x = \infty$

$tg(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} tg\, x = -\infty$

$ctg : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$ctg(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} ctg\, x = -\infty$

$ctg(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} ctg\, x = \infty$

ASIMPTOTĂ ORIZONTALĂ

spre $+\infty$: dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow y = a$ as. oriz. spre ∞

spre $-\infty$: dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow y = a$ as. oriz. spre $-\infty$

! Dacă $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ Gf. nu are as. oriz. spre $\pm\infty$

ASIMPTOTĂ OBLICĂ

$$y = mx + n$$

spre $+\infty$ dacă $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$$

spre $-\infty$ dacă $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$$

! Dacă $m = \pm\infty \Rightarrow$ Gf. nu are as. oblice spre $\pm\infty$

$n = \pm\infty \Rightarrow$ Gf. nu are as. oblice spre $\pm\infty$

ASIMPTOTA VERTICALĂ

- se calculează limitele laterale în punctele în care nu este definită funcția (puncte excaptate)

x_0 - punct excaptat $\qquad \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$; (x_0, ∞) ; $(-\infty, x_0)$

$$ls(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = x_0 \text{ as vert la stg.}$$

$$ld(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = x_0 \text{ as. vert la dr.}$$

! Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \gtrless x_0}} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ as. vert.

Dacă $x = x_0 \Rightarrow$ as. vert și la stg și la dr.

! Tot de semne !

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ nu sunt as. vert

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \Rightarrow$ sunt as vert și obl/oriz
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f: (-x, y) \to \mathbb{R} \Rightarrow$ nu sunt obl/oriz
$ls(-x)$ și $ld(y)$

$f: \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ sunt vert și oblice / oriz
$ls(x)$ $ld(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → nu ai verticale

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ → ai verticale și orizontale / oblice

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$ – nu ai orizontale / oblice

$l_d(-2)$ și $l_s(2)$

$f: (-\infty, 3) \to \mathbb{R}$ – ai verticale și oblice / orizontale

$l_s(3)$

$f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ – ai verticale și oblice / orizontale

$l_s(3)$ $l_d(3)$

Reguli la limite:

$$\frac{x^1}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^3}{x^1} = \frac{1}{1} \cdot \infty^{3-1}$$

$$= \frac{x^3}{x^3} = \frac{1}{1} = 1$$

Teorema clștului

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ atunci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

T: dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ și g este mărginită $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Regula lui l'Hospital: $\frac{0}{0}$; $\pm \frac{\infty}{\infty}$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Obs: a nu se confunda cu regula de derivare a raportului

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = 0$

Limite fundamentale remarcabile

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

- $\lim_{x \to 0} (1 + \underbrace{x}_{u(x)})^{\frac{1}{\underbrace{x}_{u(x)}}} = e$
- $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{\underbrace{x}_{u(x)}})^{\underbrace{x}_{u(x)}} = e$

1^{∞}

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad ; \quad a > 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$

f continuă în $x_0 \iff l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$

$$e^x = (e^x)'$$

$$e^{-x} = (-e^{-x})'$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$e^{ax} = \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'$$

$$(e^u)' = e^u \cdot (u)'$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln(u)' = \frac{1}{u} \cdot (u)'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot (u)'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (u)'$$

$$x^m = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)'$$

$$1 = x'$$

$$\cos x = (\sin x)'$$

- $$\cos ax = \left(\frac{\sin ax}{a} \right)'$$
- $$\int \cos ax = \frac{\sin ax}{a} + C$$

$$\sin x = (-\cos x)'$$

- $$\sin ax = \left(\frac{-\cos ax}{a} \right)'$$
- $$\int \sin ax = \frac{-\cos ax}{a} + C$$

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(\ln^3 x)' = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$$

Integrare prin părți: integrale nedefinite

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Schimbare de variabilă

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F \circ u + C$$

$F(x) = f'(x)$

Leibniz - Newton

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrare prin părți: integrale definite

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x)$$

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ este o primitiva a fct. f. care se anulează în $x = a$ $\Rightarrow F'(x) = f(x)$

- Verificați / Arătați dacă F este o primitivă a funcției f

F este o primitiva a lui f pe $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă pe } \mathbb{R} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

- Calculați toate primitivele
- Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F() = \ldots$

Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitiva a lui f

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\, dx$ trebuie să aflăm C

- Verificați / Arătați că functia f admite primitive

$$f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots ; & x \leq \text{ sau } < \text{ sau } \geq \text{ sau } > a \\ \ldots\ldots ; & x \geq \text{ sau } > \text{ sau } \leq \text{ sau } < a \end{cases}$$

ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} ; & x \neq 0 \\ 1 ; & x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f \text{ continua pe } (-\infty, 0) & (1) \\ f \text{ continua pe } (0, \infty) & (2) \\ f \text{ continua în } x = 0 \Leftrightarrow ls = ld = f(0) & (3) \end{cases}$$

problema continuității se pune în $x = 0$

$\Rightarrow$ f continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$

Soluție unică pentru $\int$ .....

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \ldots\ldots$

$g'(x) > 0$

$g(x) > 0$ (strict crescătoare)

$g(0) = 0 \Rightarrow g$ continuă

$\int_{-a}^{a}$ și funcția este pară $\Rightarrow I = 2\int_{0}^{a}$

$f(-x) = f(x)$

$\int_{-a}^{a}$ și funcția este impară $\Rightarrow I = 0$

$f(-x) = -f(x)$

<u>Observații</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

MONOTONIE

$f : D \to \mathbb{R}$

Studiem monotonia : $f'(x) = 0$

x	$\circ$		x_1			x_2			$\circ$
$f'(x)$	+	+	0	−	−	0	+	+	
$f(x)$	↗		$f(x_1)$ max	↘		$f(x_2)$ min	↗		...

CONVEXITATE / CONCAVITATE

$f : D \to \mathbb{R}$

$f''(x) = 0$

x	$\circ$				x_1				$\circ$
$f''(x)$	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$f(x)$	∪ convex				$f(x_1)$	∩ concav			