ArminC

Teorie Matematica

Modul sau valoare absolută

$$|x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

$|3| = 3$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|0| = 0$

Proprietăți modul

1) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

2) $|x + y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

3) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ecuații)

4) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (ecuații)

5) $|x| = c$; $c > 0 \Leftrightarrow x = c$ sau $x = -c$ (ecuații)

6) $|x| \leq c$; $c > 0 \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$ (inecuații)

Obs $\sqrt{x^2} = |x|$

$(\sqrt{x})^2 = x$; $x \geq 0$

7) $|-x| = |x|$

8) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$

Formulele radicalilor compuși

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a-b^2}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Ex. $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{14-\sqrt{6^2\cdot 5}} = \sqrt{14-\sqrt{180}}$

$$= \sqrt{\frac{14+\sqrt{14^2-180}}{2}} - \sqrt{\frac{14-\sqrt{14^2-180}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{14+\sqrt{16}}{2}} - \sqrt{\frac{14-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{14+4}{2}} - \sqrt{\frac{14-4}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{5} = 3-\sqrt{5}$$

Funcția de gradul al II-lea

Forma generală este:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

a, b, c coeficienții funcției

c termen liber

Monotonia

1) $a > 0$ ($\cup$)

$-\frac{b}{2a} = ?$; $-\frac{\Delta}{4a} = ?$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\Delta/4a$	$\nearrow$	

Intervale de monotonie:

f s. d. pt $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$

f s. c. pt $x \in [-\frac{b}{2a}; +\infty)$

Punctul de minim al funcției este

$x_{min} = -\frac{b}{2a}$

Valoarea minimă a funcției este

$f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \in \boxed{[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty) = Im f}$

Vârful parabolei este $V_{min}(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$

2) $a < 0$ ($\cap$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

punctul de maxim este $x_{max} = -\frac{b}{2a}$

Valoarea maxima a functiei este $f_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \in \boxed{\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right] = Im f}$

Interv. de monotonie:

f s.c. pt $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$

f. s.d. pt $x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

$V_{max}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Obs 1) interv. de monotonie sunt $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$; $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

2) punctul de extrem este $x_{extrem} = -\frac{b}{2a}$

valoarea extremă a functiei este $f_{extrem} = -\frac{\Delta}{4a}$

3) Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

4) $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$

Ex. Se dă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$

a) Găsiți interv. de monotonie, valoarea extremă, punctul de extrem, vârful parabolei și $Im f$

b) Aduceți f la forma canonică

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1-2+8}{4} =$

$= \frac{7}{4}$

$f(x) = x^2 - x + 2$

a) $a = 1;\ b = -1,\ c = 2$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-7}{4 \cdot 1} = \frac{7}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	

Intervalele de monotonie:

f strict descr. pt $x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$

f strict cresc. pt $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$

Punctul de extrem: $x_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

Valoarea extremă a funcției f: $f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{4}$

$Im f = [-\frac{\Delta}{4a}; +\infty) = [\frac{7}{4}; +\infty)$

$V(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}) = V(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$

b) $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

$\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\Delta}{4a} = \frac{-7}{4 \cdot 1} = -\frac{7}{4}$

Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea

1) Se aduce mai întâi ecuația la forma generală care este: $ax^2 + bx + c = 0$

2) Se face identificarea coeficienților

3) Se calculează: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

a) Dacă $\Delta > 0$ ec. are 2 soluții reale și distincte de forma

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \{ x_1, x_2 \}$$

b) Dacă $\Delta = 0$ ec are soluția dublă

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$S = \{ -\frac{b}{2a} \}$$

c) Dacă $\Delta < 0$ ec. nu are soluții reale

$$S = \emptyset$$

Dar dacă ne cere rezolvarea în $\mathbb{C}$

atunci $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ex. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$a = 1,\ b = 3,\ c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$S = \{-1, -2\}$

b) $2x + 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$S = \{-1\}$

c) $x^2 + 1 = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Dacă pt ① avem

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{i\sqrt{4}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-i\sqrt{4}}{2} = -\frac{2i}{2} = -i$$

Intersecția cu axele de coordonate:

$$\boxed{\begin{array}{l} G_f \cap Ox \Leftrightarrow f(x) = 0 \\ G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \end{array}}$$

Relațiile lui Viète

$ax^2 + bx + c = 0$; x_1, x_2 soluțiile ec.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Formule utile:

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$

Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
4) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

* $A(a, b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$

Partea întreagă și fracționară *

① Se numește partea întreagă a lui x, cel mai mare nr. întreg mai mic sau egal decât x

Se not. $[x]$

Partea fracționară $\{x\} = x - [x]$

Ex. $[2,35] = 2$

$[16,018] = 16$

$[-2,35] = -3$

$[-0,121] = -1$

$\{2,35\} = 2,35 - [2,35] = 2,35 - 2 = 0,35$

$\{16,018\} = 16,018 - 16 = 0,018$

$\{-2,35\} = -2,35 - (-3) = -2,35 + 3 =$

$= 0,65$

$$\begin{array}{r} 3,00 - \\ 2,35 \\ \hline 0,65 \end{array}$$

$\{-12,3716\} = -12,3716 + 13 = 0,6284$

$$\begin{array}{r} 13,0000 - \\ 12,3716 \\ \hline 0,6284 \end{array}$$

(2) a) $\boxed{[x] \le x < [x]+1}$

$2 \le 2{,}3 < 3$

b) $[x] = x$ dacă $x \in \mathbb{Z}$

$\{x\} = 0$ dacă $x \in \mathbb{Z}$

$0 \le \{x\} < 1$

c) $[x+k] = [x] + k$ dacă $k \in \mathbb{Z}$

$[x+2] = [x] + 2$

d) $[x] = k \iff x \in [k; k+1)$

Rez. ec.

a) $[2x-1] = 5 \iff 2x-1 \in [5,6) \iff 5 \le 2x-1 < 6 \quad |+1$

$6 \le 2x < 7 \quad |:2 \iff 3 \le x < \frac{7}{2} \iff x \in [3; \frac{7}{2})$

b) $\left[\frac{x-1}{2}\right] = \frac{2x-3}{5}$

$\left[\frac{x-1}{2}\right] = k;\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2x-3}{5} = k \iff 2x-3 = 5k$

$\iff 2x = 5k+3 \iff x = \frac{5k+3}{2}$

$\left[\frac{x-1}{2}\right] \le \frac{x-1}{2} < \left[\frac{x-1}{2}\right]+1$

$k \le \frac{\frac{5k+3}{2} - 1}{2} < k+1 \quad |\cdot 2$

$2k \le \frac{5k+3-2}{2} < 2k+2 \quad |\cdot 2$

$$4k \le 5k+1 < 4k+4$$

$$\left.\begin{array}{l} 4k \le 5k+1 \iff 5k-4k \geq -1 \iff k \geq -1 \\ 5k+1 < 4k+4 \iff 5k-4k < 4-1 \iff k < 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 \le k < 3 \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{5.(-1)+3}{2} = -1$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5.0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5.1+3}{2} = 4$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5.2+3}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$S = \left\{-1 ; \frac{3}{2} ; 4 ; \frac{13}{2}\right\}$$

Sisteme simetrice

Def: O ecuație cu două necunoscute, x, y se numește simetrică dacă înlocuind pe x cu y și y pe x, ecuația rămâne neschimbată.

Exemple:

$x + y = 4$

$x \cdot y = 6$

$2x + 5xy + 2y = 0$

Dacă ecuația simetrică are soluția (x_0, y_0), atunci ea admite și soluția (y_0, x_0)

Def: Se numește sistem simetric, un sistem format din ecuații simetrice

Sistemul de forma: $\begin{cases} x + y = S \\ x \cdot y = P \end{cases}$ se numește sistem simetric fundamental

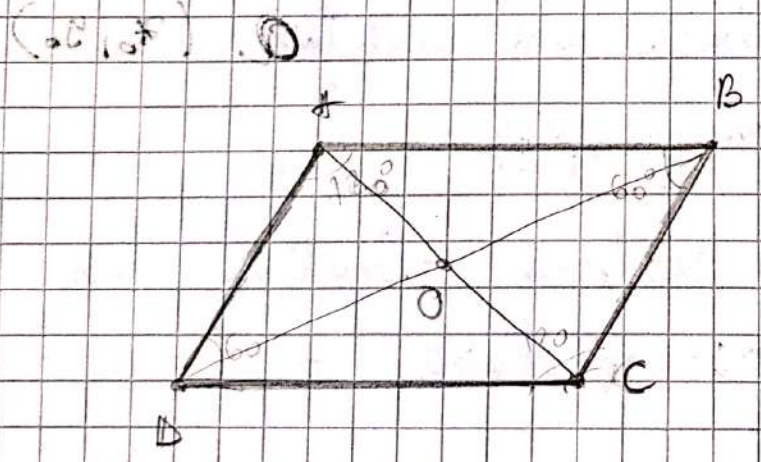
Rezolvarea sistemului simetric fundamental se face folosind ecuația de gradul II în z când cunoaștem suma și produsul și vom forma ecuația: $z^2 - sz + p = 0$ care se rezolvă.

În structura ecuației simetrice vor apărea expresii pe x, y pe care le vom trebui să le exprimăm în funcție S și P utilizând formulele:

1. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy = S^2-2P$
2. $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = S(S^2-3P)$
3. $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 = (S^2-2P)^2-2P^2$

Patrulatere

Def. • Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele 2 câte 2.



ABCD paralelogram $\Leftrightarrow$ ABCD patrulater convex

$AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$

Proprietăți:

a) Legate de laturi: laturile opuse sunt congruente 2 câte 2

$[AB] \equiv [CD]$ și $[AD] \equiv [BC]$

b) Legate de unghiuri

b_1) Unghiurile alăturate sunt suplementare

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180$ ...

b_2) Unghiurile opuse sunt $\equiv$

$\hat{A} \equiv \hat{C} \Leftrightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{C})$

$\hat{B} \equiv \hat{D} \Leftrightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{D})$

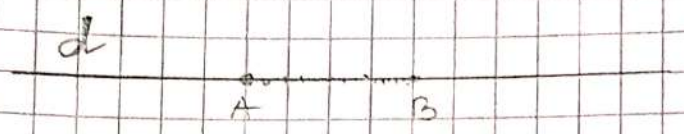
c) Diagonalele se înjumătățesc.

O e mijlocul fiecărei diagonale în parte

$[DO] \equiv [OB]$

$[AO] \equiv [OC]$

Segment de dreaptă



Def: Segmentul de dreaptă este mulțimea punctelor de pe o dreaptă cuprinsă între 2 puncte distincte de pe acea dreaptă.

A, B capetele sau extremitățile segmentului AB

Notații [AB] segment închis (își conține capetele)

(AB) segment deschis (nu își conține capetele)

$(AB) = [AB] - \{A, B\}$

$[AB]$, $[AB)$

Def. Lungimea unui segment reprezintă distanța dintre capetele segmentului raportată la o unitate de măsură

lungimea seg. [AB]

?

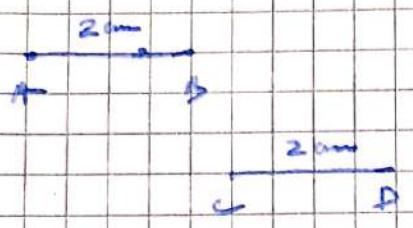
$AB = d(A, B) \cdot 1\ um.$

km
hm
dam
m
dm
cm
mm

$AB = 2\ cm = 20\ mm = 0{,}2\ dm$

Def: Două segmente de dreaptă sunt congruente dacă au aceeași lungime.

$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow AB = CD$

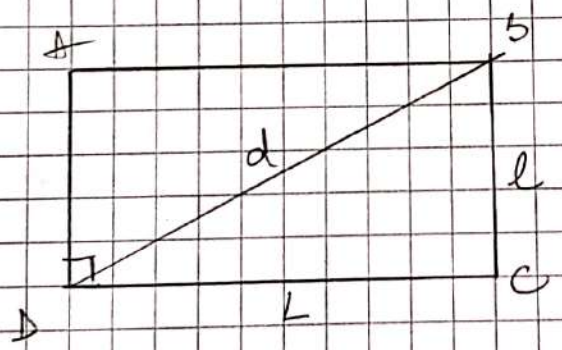


Dreptunghiul

$d = \sqrt{L^2 + l^2}$

$A_{ABCD} = L \cdot l$

$P_{ABCD} = 2L + 2l$



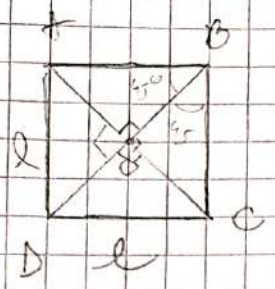
Def. Este paralelogramul cu un unghi drept

Proprietăți în plus față de paralelogram:

1) Toate unghiurile sunt congruente, fiecare unghi având măsura de 90°.

2) Diagonalele sunt congruente.

Pătrat



$d = l\sqrt{2}$

$A_{\square} = l^2$

$P_{\square} = 4l$

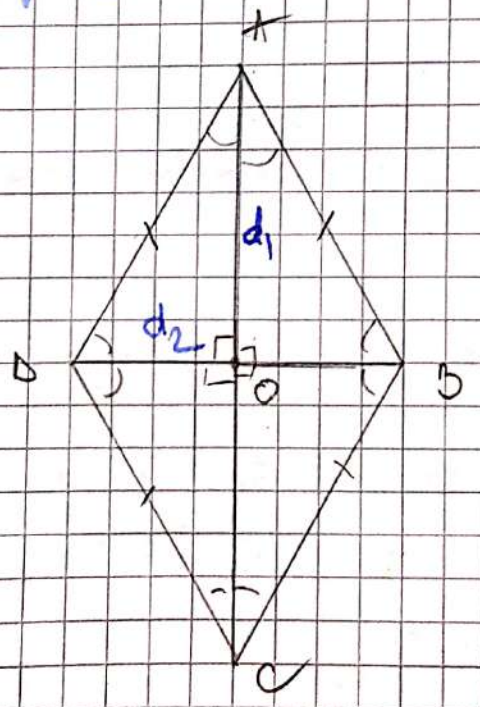
Def: Este dreptunghiul cu 2 lat. consecutive congruente.

Proprietăți în plus față de dreptunghi:

- diagonalele sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor din care provin.

Romb

Def: Este paralelogramul cu 2 lat. consecutive congruente.



$A_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Proprietăți în plus față de paralelogram:

1) Toate laturile sunt congruente

2) Diagonalele sunt perpendiculare și reprezintă și bisectoarele unghiurilor din care provin.

Vectori în plan

Def: O mărime este scalară dacă pt. determinarea ei este suficient un singur număr.

Ex: lungimea unui segment, aria unui triunghi, temperatura...

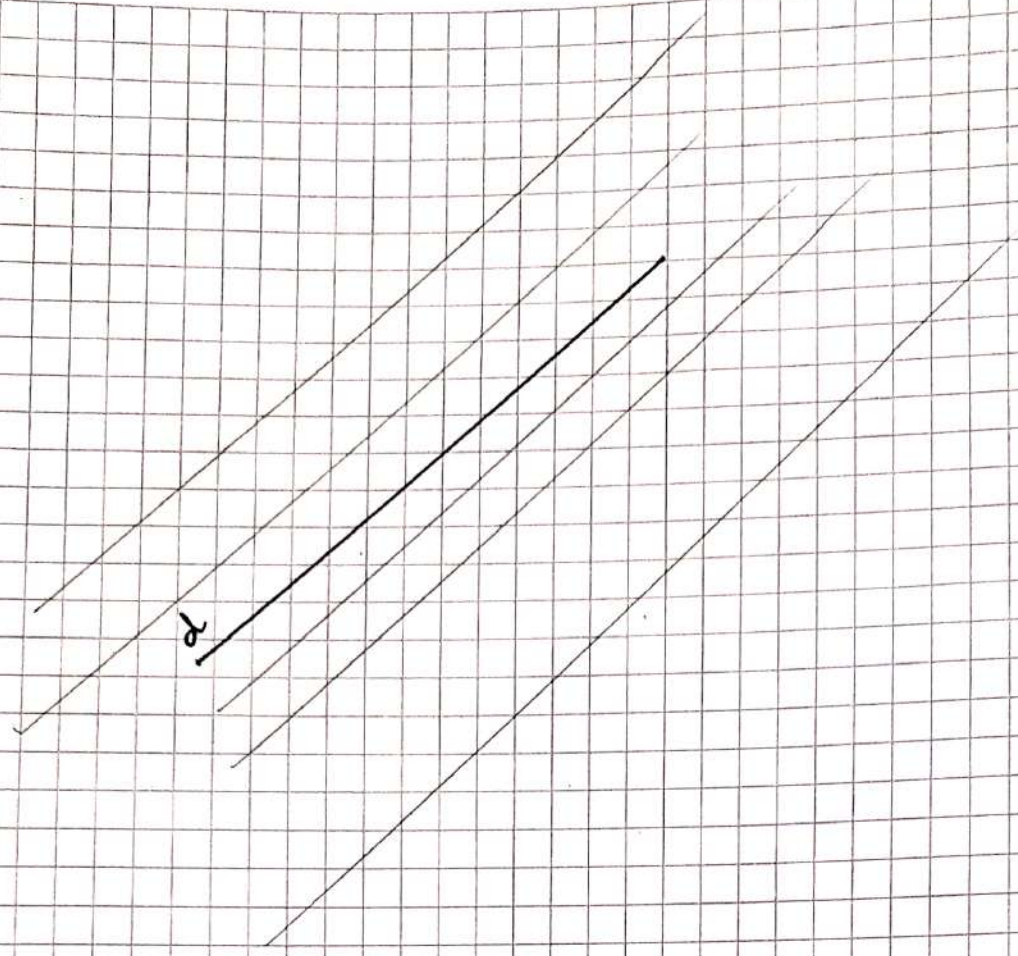
Def: O mărime este vectorială dacă este determinată de următoarele 3 elemente: lungime, direcție, sens.

Vom nota cu $\mathcal{P}$ (pasond), mulțimea punctelor unui plan.

Segmentele, semidreptele, dreptele, le vom considera mulțimi ale acestui plan.

Fie $d \subset \mathcal{P}$

Def: Se numește direcția a dreptei d, mulțimea formată din dreapta d și toate dreptele paralele cu d.



Fie [AB] un segment dreapta AB pe care este situat segmentul [AB] se numește dreapta suport a segmentului [AB].

Def: Se numește segment orientat sau vector legat de A și se notează cu $\overline{AB}$, a perechii ordonate de puncte (A; B)

Punctul A se numește origine sau punct de aplicație

Punctul B se numește extremitatea sau capătul segmentului orientat [AB].

Uneori segmentul orientat mai este numit și segment.

Obs: Dacă $A = B$, segmentul orientat $\overline{AA}$ se numește segment orientat nul sau vectorul legat nul.

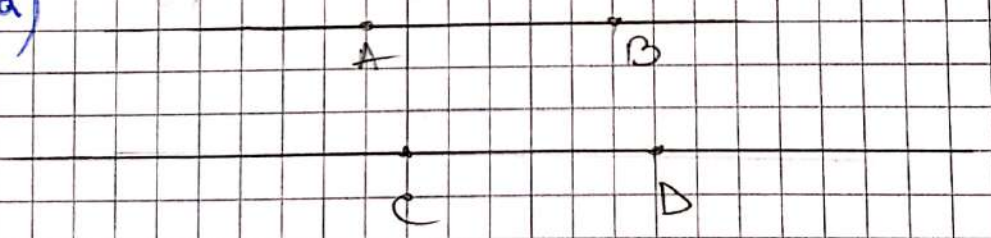
• Definiții privind segmentele orientate:

1. Se numește modulul sau lungimea unui segment orientat $\overline{AB}$ (măsura), lungimea segmentului $[AB]$ și se notează: $|\overline{AB}| = AB$

Evident $|\overline{AA}| = 0$

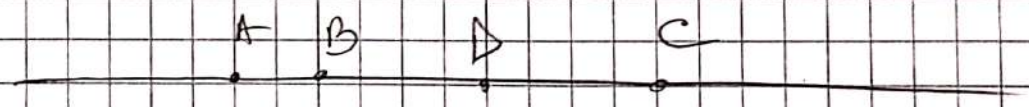
2. Spunem că două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau egale.

a)



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ au aceeași dir pt. că $AB \parallel CD$

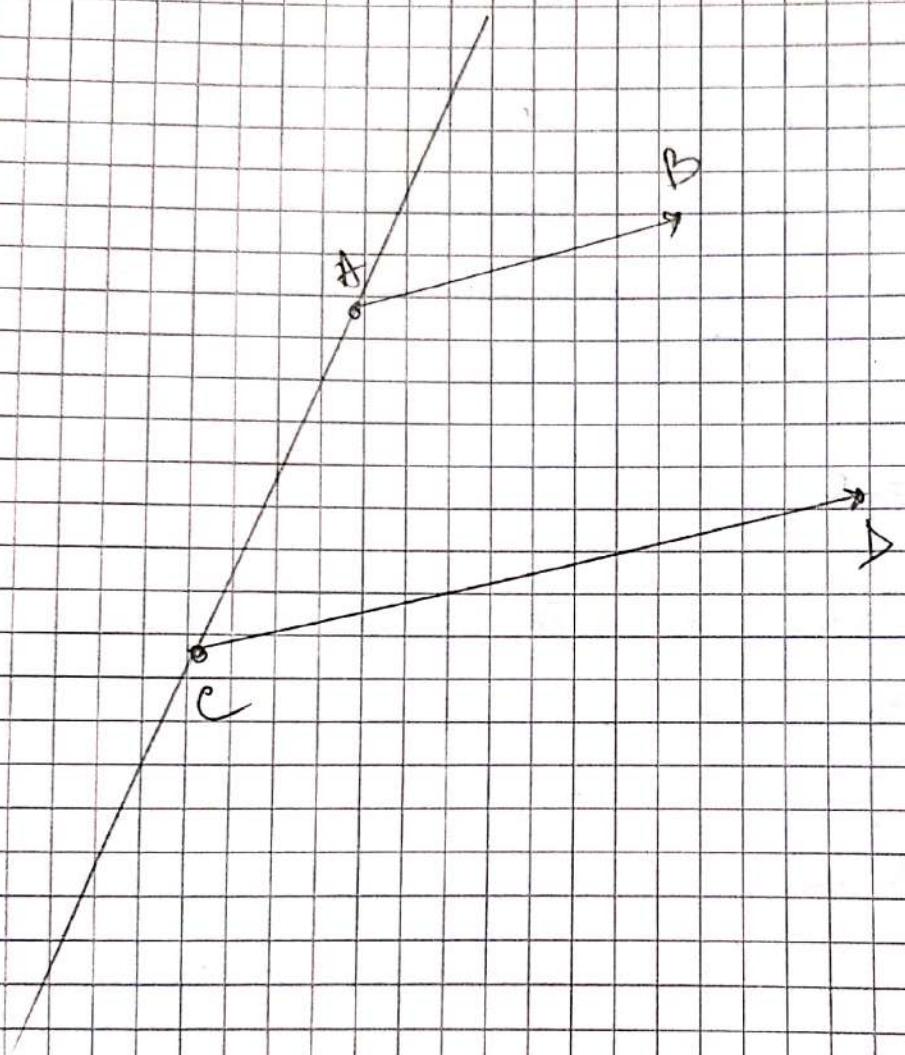
b)



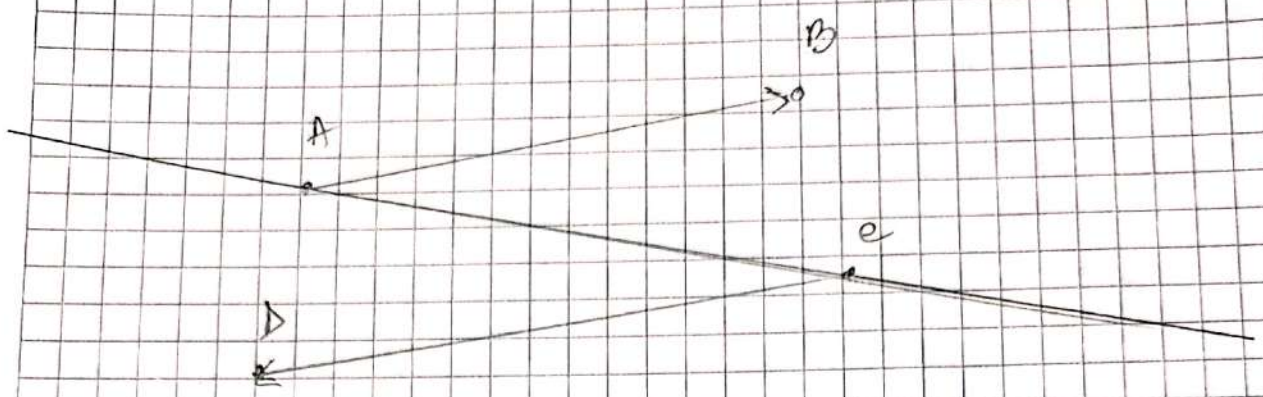
$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ au aceeași dir. pt. că $AB \neq CD$

Obs: Un segment orientat nul, are aceeași direcție cu orice segment orientat.

3. a) Spunem că segmentele orientate $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ au același sens dacă au aceeași direcție iar extremitățile lor B și D se află în același semiplan față de dreapta AC.



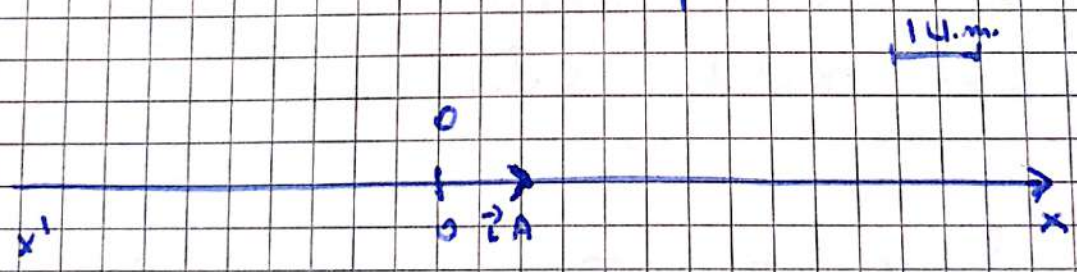
b) Spunem că segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au sensuri opuse dacă au aceeași direcție iar B și D se află în semiplane opuse față de dreapta AC



Def: Se numește versor sau vector unitate, un vector de lungime egal cu 1.

<u>Versorul unei axe</u>

Să considerăm o dreaptă xx' cu originea O

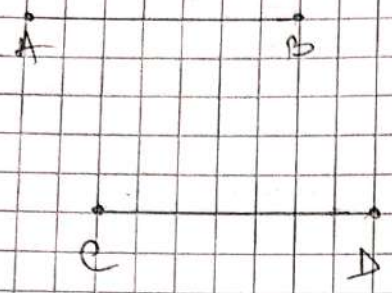


$\vec{OA} = \vec{i}$

$|\vec{i}| = 1$ (fiind lungimea u.m.)

$\vec{i}$ se numește versor al axei care indică sensul de separare pe axă

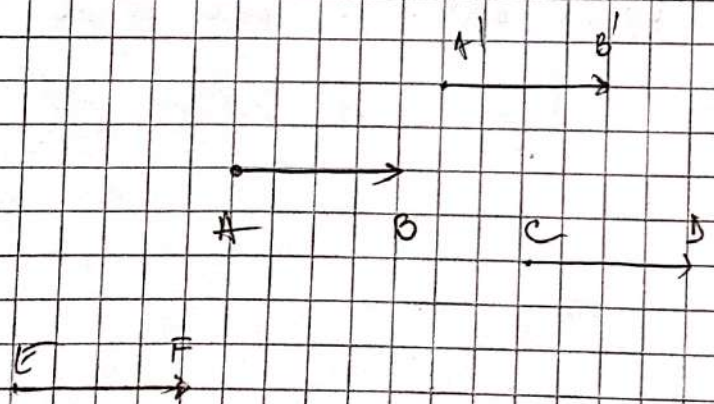
Def: Spunem că 2 segmente orientate sunt echipolente dacă au aceeași direcție, sens și lungime.



$\overline{AB} \sim \overline{CD}$ $\overline{AB}$ echipolent cu $\overline{CD}$

Def: Un vector liber (vector) reprezintă mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat, fixat.

$$\overrightarrow{AB} = \{ \overline{A'B'}; \overline{CD}; \overline{AB}; \overline{EF}, \dots \}$$



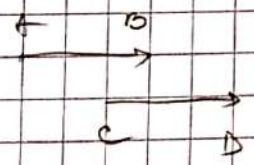
Def: 1) Lungimea comună a tuturor segmentelor orientate care definesc vectorul $\overrightarrow{AB}$ se numește lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ și se notează cu $|\overrightarrow{AB}|$ modul $\overrightarrow{AB}$ sau norma $\overrightarrow{AB}$.

2) Spunem că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau egale.

3) Spunem că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au același sens dacă segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au același sens.

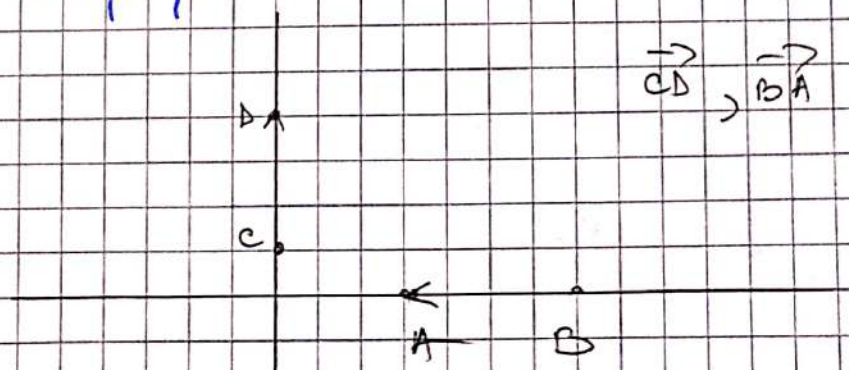
4) Doi vectori liberi sunt egali dacă și numai dacă au:

- aceeași direcție
- aceeași sens
- aceeași modul



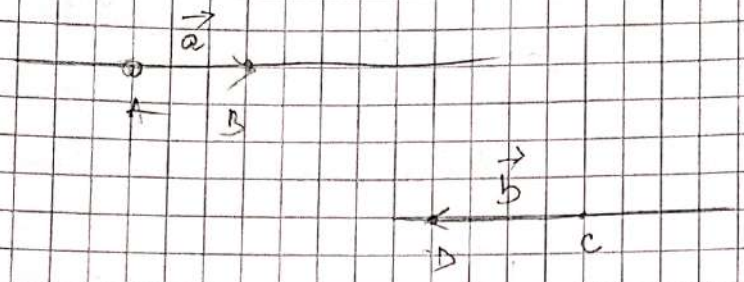
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Obs: 1) 2 vectori se numesc ortogonali dacă au direcțiile perpendiculare.



$\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ortogonali

2) Doi vectori care au aceeași direcție dar sensuri opuse, se numesc vectori opuși



$\vec{AB}$, $\vec{CD}$ sunt vectori opuși

$$\vec{a} = -\vec{b}$$

(*) $\vec{AB} = -\vec{BA}$

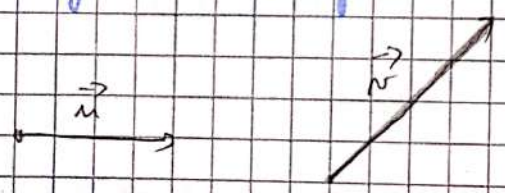
Adunarea vectorilor

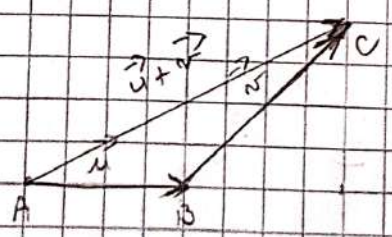
1) Formula lui Charles

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

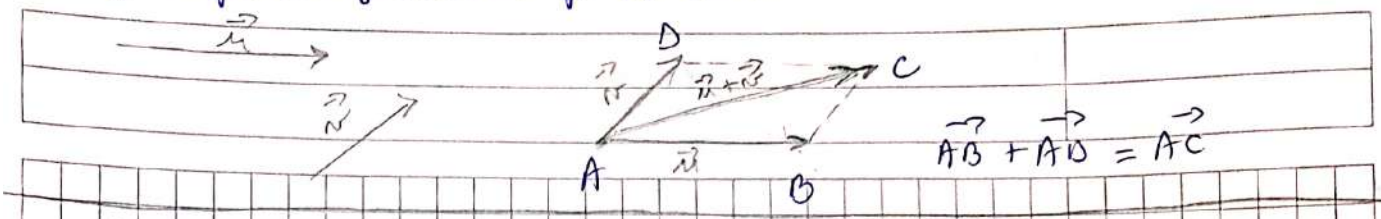
2) Regula triunghiului pt. adunarea vectorilor

a)



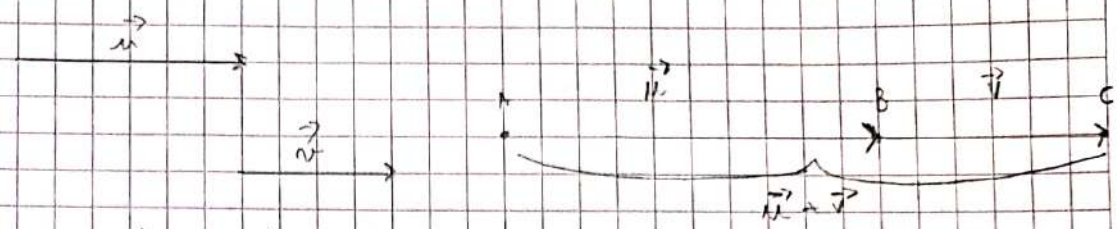


3) Regula paralelogramului pt adunarea vectorilor



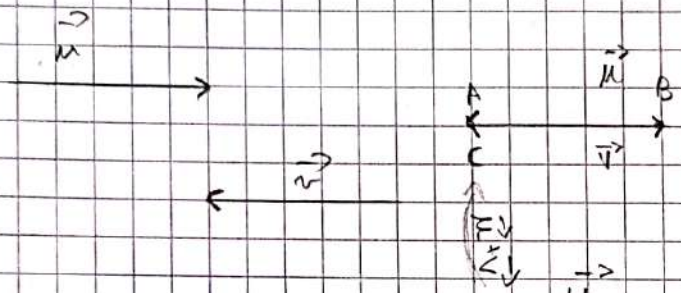
$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

b)



obs. $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

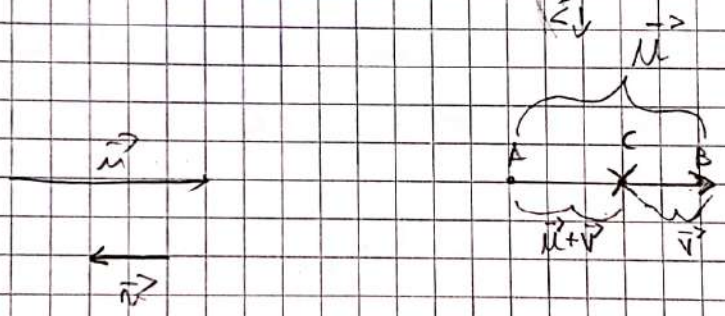
c)



obs. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$

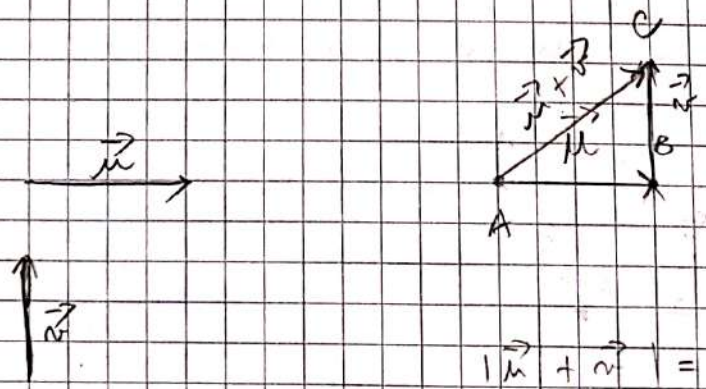
$|\vec{u}+\vec{v}| = 0$

d)



Obs. $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$

e)



$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$

Obs $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

4) $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Proprietăţile adunării vectorilor

Vom nota cu V (mulţimea vectorilor din plan):

1. Adunarea vectorilor este asociativă

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$$

2. Adunarea vectorilor este comutativă

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}, \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$$

3. Vectorul nul $\vec{0}$ este elementul neutru pt. adunare adică:

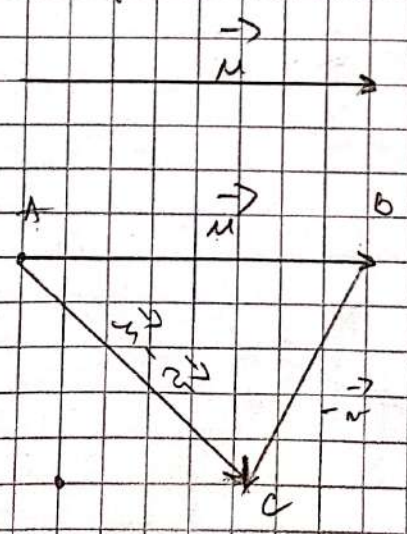
$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a} \quad \forall\, \vec{a} \in V$$

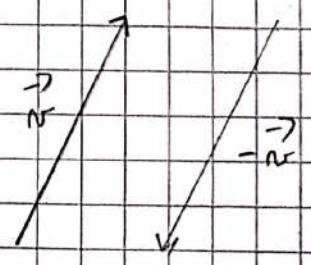
4. Oricare vector $\vec{a}$ admite un vector opus notat $-\vec{a}$ a.î. $\vec{a}+(-\vec{a}) = -\vec{a}+\vec{a} = \vec{0}$

Scăderea vectorilor

Def: Se numeşte diferenţa vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, un vector notat $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$

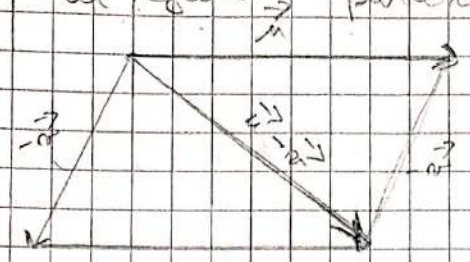
1) Cu regula Δ





$$\vec{u}+(-\vec{v}) = \vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}$$

2) Cu regula paralelogramului



Înmulțirea unui vector cu un scalar

Def: Fie $\alpha \neq 0$; $\vec{a} \neq 0$. Produsul dintre nr. real α (scalar) și $\vec{a}$ este vectorul notat cu: $\alpha \cdot \vec{a}$ care are:

a) aceeași direcție cu $\vec{a}$

b) același sens cu $\vec{a}$ dacă $\alpha > 0$, sens contrar $\vec{a}$ dacă $\alpha < 0$

c) $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

Obs: $\alpha \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $\vec{a} = 0$

Exemple:

1) Fie $M \in [AB]$ a.î. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$

Exprimați a) $\vec{MA}$ în funcție de $\vec{MB}$

b) $\vec{AB}$ în funcție de $\vec{MB}$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{1}{1+4} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB}{5}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4} \iff 4AM = MB \iff AM = \frac{1}{4} MB$$

$$\vec{MA} = -\frac{1}{4} \vec{MB}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4} \iff \frac{AM+MB}{MB} = \frac{1+4}{4} \iff \frac{AB}{MB} = \frac{5}{4}$$

$$\iff AB = \frac{5}{4} MB$$

$$\vec{AB} = \frac{5}{4} \vec{MB}$$

2) Fie $A, B \in \mathcal{P}$

a) Să se construiască un punct $M \in \mathcal{P}$

a.î. $\vec{MA} = -2\vec{MB} \Rightarrow \vec{MA}, \vec{MB}$ au aceeași dir

$MA \cap MB = \{M\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{MA}, \vec{MB}$ se găsesc pe aceeași dreaptă $\Rightarrow$

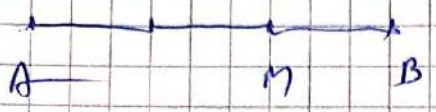
$\Rightarrow A, M, B \in AB$ sunt coliniare

$\alpha = -2 \Rightarrow \vec{MA}, \vec{MB}$ au sensuri opuse

$$\vec{MA} = -2\vec{MB} \Rightarrow |\vec{MA}| = |-2\vec{MB}| \iff$$

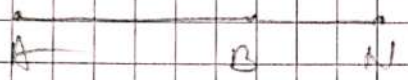
$MA = 2\,MB \iff \frac{MA}{MB} = \frac{2}{1} \iff \frac{MA}{MA+MB} = \frac{2}{2+1} \iff$

$\frac{MA}{AB} = \frac{2}{3} \iff MA = \frac{2}{3}\,AB$



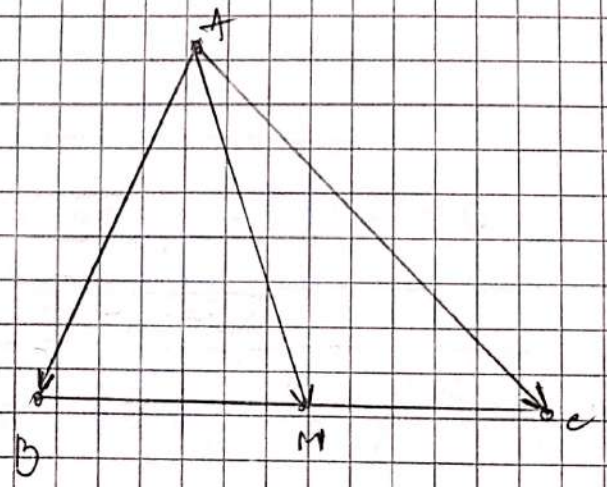
b) Construiți un punct $N \in \mathcal{P}$ a.î. $\vec{NA} = 3\vec{NB}$

$NA = \frac{3}{2}\,AB$



3) Fie un triunghi ABC oarecare. Dacă M e mijlocul laturii [BC] arătați că $\vec{AM} = \frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}$

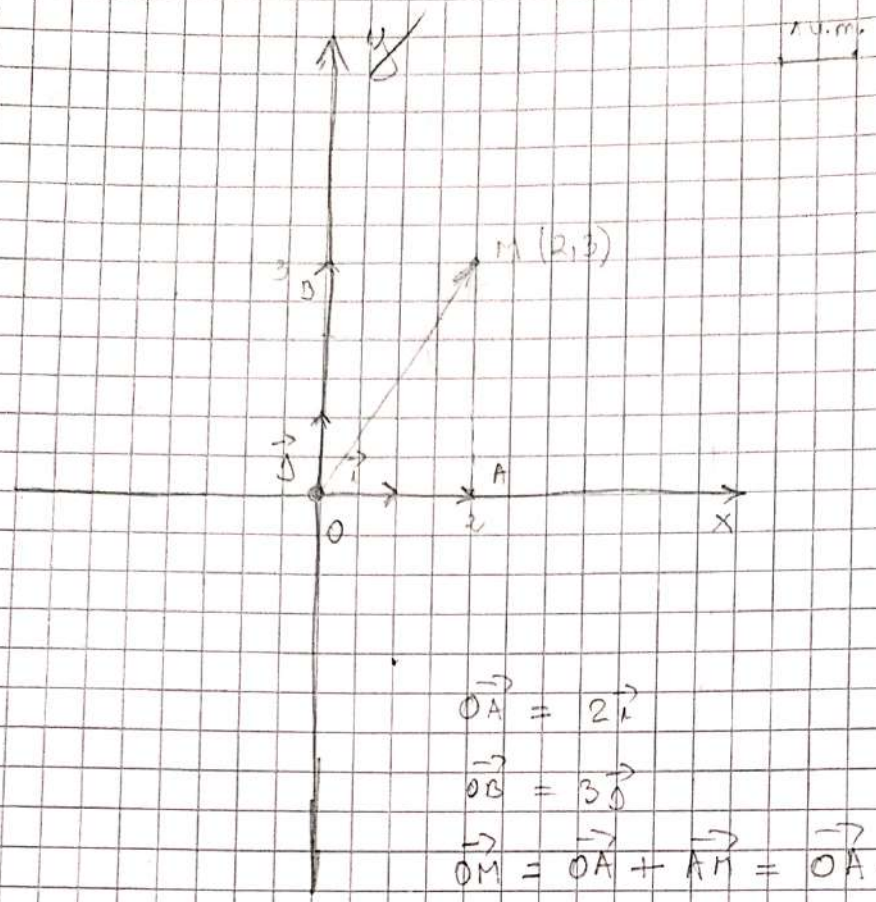
(teorema vectorială a medianei)



$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{\vec{BC}}{2} = \vec{AB} + \frac{\vec{BA}+\vec{AC}}{2}$

$= \frac{2\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC}}{2} = \frac{2\vec{AB} - \vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}$

Reper cartezian în plan



$\vec{OA} = 2\vec{i}$

$\vec{OB} = 3\vec{j}$

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \vec{OB} =$

$= 2\vec{i} + 3\vec{j}$

OX s.n. axa abscizelor

Oy s.n. axa ordonatelor

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

Dacă $M(x_M, y_M) \rightarrow \boxed{\vec{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j} = \vec{OM}(x_M, y_M)}$

$\boxed{|\vec{OM}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$

$\vec{OM}$ s.n. vectorul de poziție al punctului M

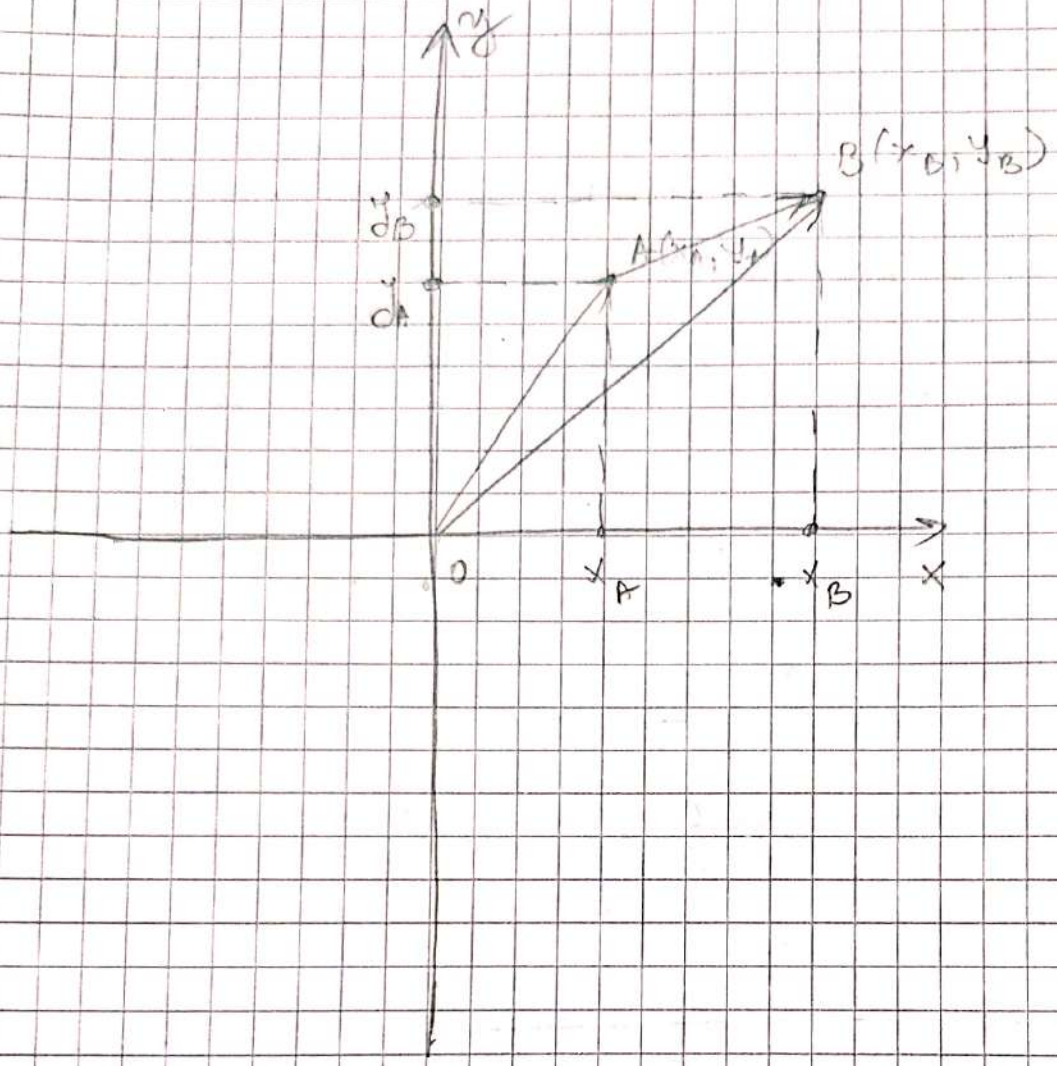
Ex. Găsiți vectorii de poziție pt punctele $A(-1,2)$; $B(3,5)$ și calc. lungimile lor.

$\vec{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{OB} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

$= \vec{OA}(-1,2)$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$



$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \iff \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \iff$$

$$\iff \vec{AB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) \iff$$

$$\iff \vec{AB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - x_A\vec{i} - y_A\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{AB} = (x_B - x_A)\cdot\vec{i} + (y_B - y_A)\cdot\vec{j}}$$

$$\boxed{|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB = d(A,B)\cdot 1\,u.m.}$$

Ex. fie $A(-1, 2)$; $B(3, -4)$

Scrieți $\vec{AB}$ și calculați lungimea sa

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\cdot\vec{j} =$$

$$= [3-(-1)]\vec{i} + (-4-2)\cdot\vec{j} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2} = \sqrt{4^2+(-6)^2} = \sqrt{16+36}$$

$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

52	2
26	2
13	13
1	

$\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u}, \vec{v}$ au aceeași direcție $\overset{Teorema}{\Leftrightarrow}$

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$

fie $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$; $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\vec{u}, \vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow$ sau paralele $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$

$\vec{u}, \vec{v}$ opuse $\Leftrightarrow \vec{u} = -\vec{v}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$

1) Se dau vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - (m-1)\vec{j}$; $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

a) Calc. $|\vec{v}|$

b) Găsiți $m \in \mathbb{R}$ a.î. vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ să fie coliniari

a) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

b) $\vec{u}, \vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{-(m-1)}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(m-1) = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow -4m+4 = 10 \Leftrightarrow -4m = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{6}{-4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

2) Găsiți a, b pt. care vectorii $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{v} = 3\vec{i} + (b+1)\vec{j}$

să fie

a) egali b) opuși

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (a-1)\cdot\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{i} + (b+1)\cdot\vec{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-1 = 3 \Leftrightarrow a = 4$

$b+1 = 2 \Leftrightarrow b = 1$

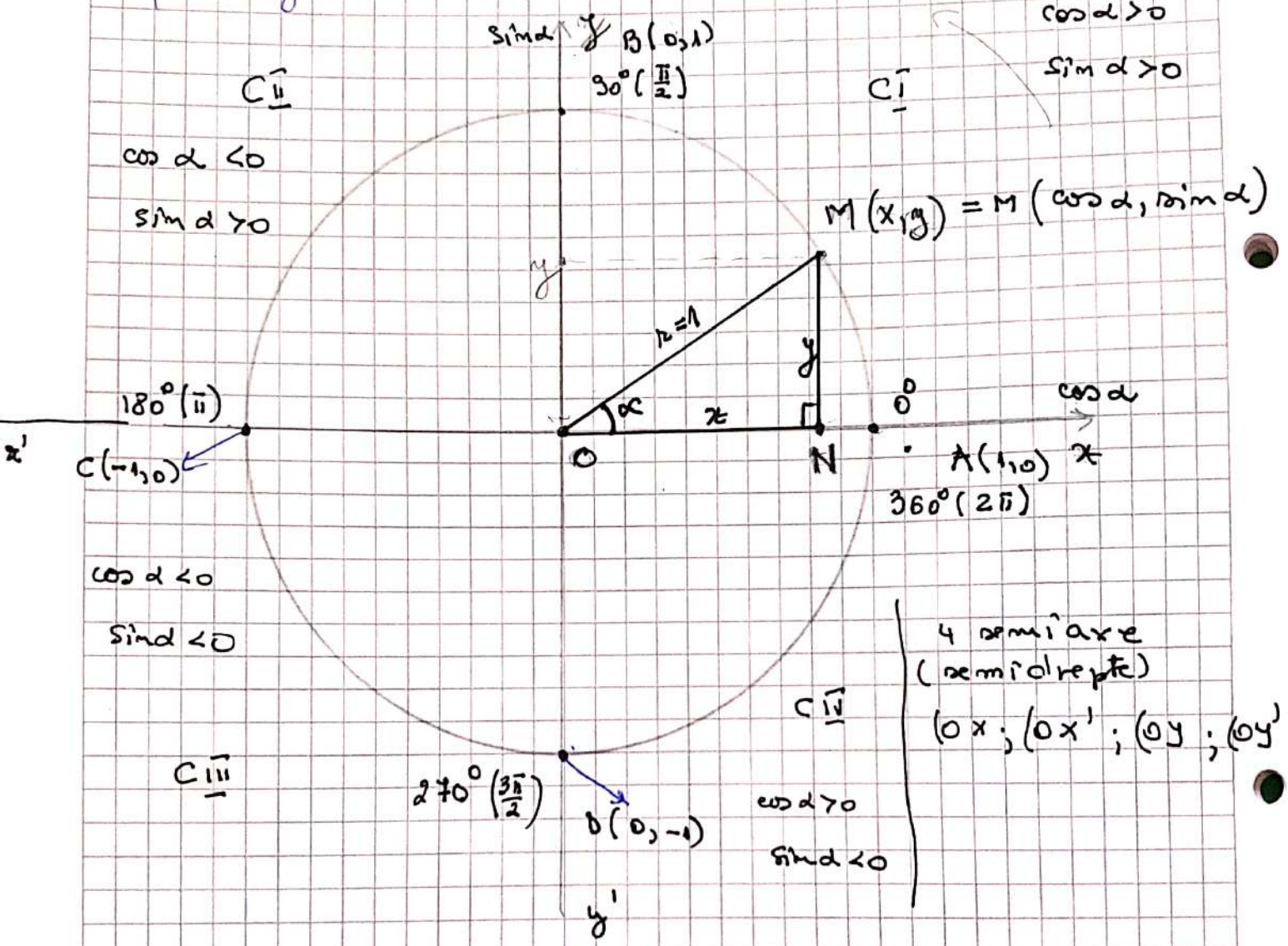
b) $\vec{u}, \vec{v}$ opuși $\Leftrightarrow \vec{u} = -\vec{v} \Leftrightarrow (a-1)\vec{i} + 2\vec{j} = -3\vec{i} - (b+1)\vec{j}$

$\Leftrightarrow a-1 = -3 \Leftrightarrow a = -2$

$-(b+1) = 2 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} b+1 = -2 \Leftrightarrow b = -3$

Cercul trigonometric

Este un cerc cu centrul în originea unui sistem de axe xOy care are raza egală cu 1 și îl parcurgem invers acelor de ceasornic.



4 semiaxe (semidrepte)
$(Ox$; $(Ox'$; $(Oy$; $(Oy'$

$\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$

T. P. în $O\hat{N}M$, $m(\hat{N}) = 90°$:

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ formula fundamentală a trigonometriei.

$$\boxed{tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}} \; ; \; \boxed{ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\boxed{tg\, x \cdot ctg\, x = 1 \quad \nearrow tg\, x = \frac{1}{ctg\, x} \quad \searrow ctg\, x = \frac{1}{tg\, x}}$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \Leftrightarrow \boxed{\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \Rightarrow \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow \boxed{\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

Ex. 1 Se dă $\sin x = -\frac{3}{5}$; $x \in \left(\pi ; \frac{3\pi}{2}\right)$

Calc. $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} \\ x \in \left(\pi ; \frac{3\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{\overset{25}{1} - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\, x = \frac{1}{tg\, x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

(2) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$; $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Calc. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

(VI) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow 4 \sin x = -3 \cdot \cos x \overset{|^2}{\Rightarrow}$

$$\Leftrightarrow (4 \sin x)^2 = (-3 \cos x)^2 \Leftrightarrow 16 \sin^2 x = 9 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^2 x - 9 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 16 \sin^2 x - 9(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$16 \sin^2 x - 9 + 9 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 25 \sin^2 x = 9$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \\ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$$

$$-3 \cos x = 4 \sin x \Leftrightarrow -3 \cos x = 4 \cdot \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \cos x = \frac{12}{5} \quad |\cdot(-1) \Leftrightarrow 3 \cos x = -\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{12}{5} : \frac{3}{1} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\cancel{12}^{4}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_{1}} = -\frac{4}{5}$$

V2 $\quad tg\, x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{-3} = \frac{\cos x}{4} = k$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{-3} = k \Leftrightarrow \sin x = -3k$$

$$\frac{\cos x}{4} = k \Leftrightarrow \cos x = 4k$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow (-3k)^2 + (4k)^2 = 1$$

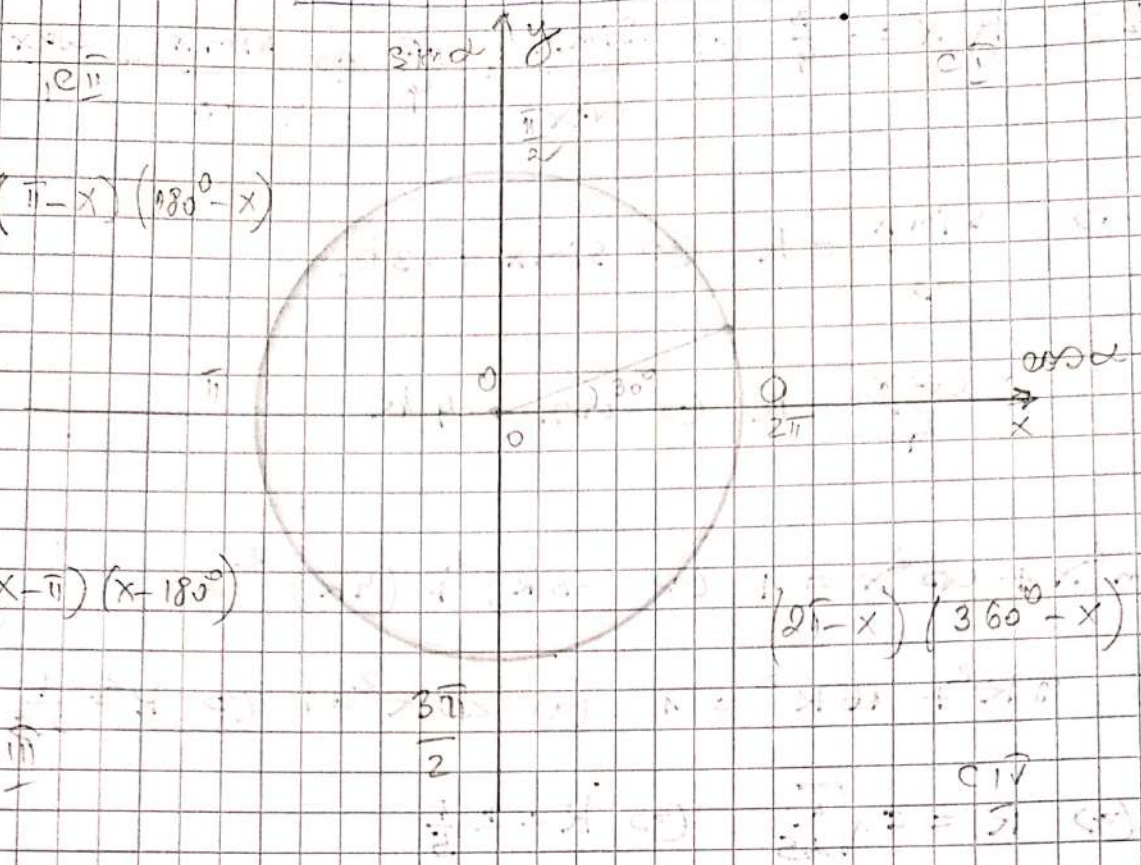
$$\Leftrightarrow 9k^2 + 16k^2 = 1 \Leftrightarrow 25k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = -3 \cdot k \\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x = -3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 4k \\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Reducerea la I cadran



1) $c\,II \to c\,I$; $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sin(\pi - x) \\ \cos x &= -\cos(\pi - x) \\ tg\, x &= -tg(\pi - x) \\ ctg\, x &= -ctg(\pi - x) \end{aligned}}$$

2) $c\,III \to c\,I$; $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= -\sin(\cancel{\pi}\, x - 180^\circ) \\ \cos x &= -\cos(x - 180^\circ) \\ tg\, x &= tg(x - 180^\circ) \\ ctg\, x &= ctg(x - 180^\circ) \end{aligned}}$$

$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

3) $C_{IV} \to C_I$; $x \in (270^\circ, 360^\circ)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= -\sin(360^\circ - x) \\ \cos x &= \cos(360^\circ - x) \\ tg\, x &= -tg(360^\circ - x) \\ ctg\, x &= -ctg(360^\circ - x) \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{r|l} 61 & 4 \\ \hline 4 & 15 \\ \hline 21 & \\ 20 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

EX. $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\overset{3}{\pi} - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\, 210^\circ = tg(210^\circ - 180^\circ) = tg\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(\overset{6}{2\pi} - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Periodicitatea $\sin x, \cos x$

$\sin x, \cos x$ sunt periodice de perioadă $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Perioada principală este $T^* = 2\pi$

$\sin 390^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 7200^\circ = \sin(0 + 20 \cdot 360^\circ) = \sin 0 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 7200 & 360 \\ \hline 720 & 20 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\cos \frac{61\pi}{4} = \cos \frac{(4 \cdot 15 + 1) \cdot \pi}{4} =$

$= \cos \frac{4 \cdot 15\pi + \pi}{4} = \cos\left(\frac{4 \cdot 15\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(15\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\overset{4}{\frac{\pi}{4}} + \overset{4}{\pi} + 14\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 7 \cdot 2\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{4} = -\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \overset{4}{\pi}\right) =$

$= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 0^\circ = 0$ $\qquad$ $\cos 0^\circ = 1$

$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 90^\circ = 0$

$\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$tg\, 0^\circ = 0$ $\qquad$ $ctg\, 0^\circ = \nexists$

$tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

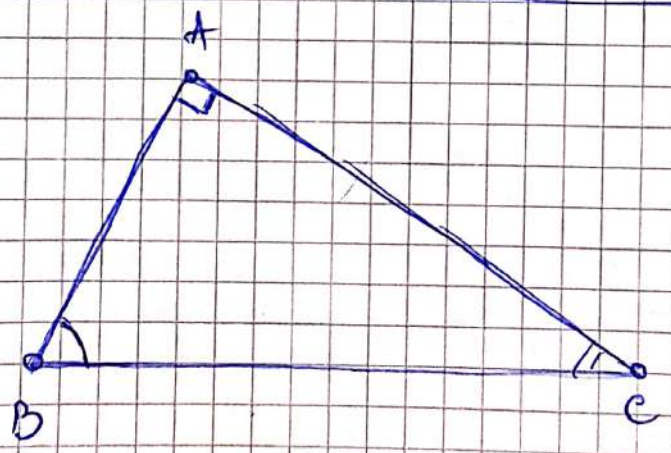
$tg\frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad$ $ctg\frac{\pi}{4} = 1$

$tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg\, 90^\circ = \nexists$ $\qquad$ $ctg\, 90^\circ = 0$

$$tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$



$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$

$m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^\circ$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \frac{AC}{BC} \\ \cos C &= \frac{AC}{BC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin B = \cos C \Leftrightarrow \sin B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos(90^\circ - B)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{ctg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

<u>Sinusul și cosinusul sumei și diferenței de 2</u>

1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

Aplicații:

a) $\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin 0 \cos x - \sin x \cos 0$

$= 0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1 = -\sin x$

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$

$= 2 \sin x \cos x$

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$$

c) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $2\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = \sin 2 \cdot (22^\circ 30') =$

$= \sin 44^\circ 60' = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8} = \frac{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{8}}{2} =$

$= \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

f) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \cos 80^\circ = \sin(80^\circ - 20^\circ)$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Aplicații

a) $\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x =$

$= \cos x$

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$$

$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

c) $\cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ = \cos 2 \cdot 90^\circ = \cos 180^\circ = -1$

d) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \cos(40^\circ + 20^\circ) =$

$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$; $\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$ctg \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ $\quad tg \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$; $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Produse $\xrightarrow{I}$ sume și Sume $\xrightarrow{II}$ produse

I

1. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

2. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

3. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

4. $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

II

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

Cardinalul unei mulțimi

Cardinalul unei mulțimi finite A, reprezintă numărul elementelor mulțimii A. Se notează

card A sau |A|

Ex. $A = \{1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \pi\} \Rightarrow \text{card} A = 3$

$B = \emptyset \Rightarrow \text{card} B = 0$

Nr. submulțimilor unei mulțimi finite A este $2^{\text{card} A}$

Barem de corectare probabilități

Un punct

(1p) pentru justificarea cazurilor posibile

(1p) pentru justificarea cazurilor favorabile

(1p) pentru scrierea formulei

$$P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}$$

(2p) pentru înlocuirea în formulă și aducerea raportului obținut la o formă ireductibilă

Ex:

1) Se aruncă un zar cu fețele numerotate de la 1 la 6 o singură dată. Care este probabilitatea să iasă

a) fața cu nr. 5

b) o față pară

c) orice față

d) fața cu nr. 7

Deoarece zarul are 6 fețe numerotate de la 1 la 6 =>
=> 6 cazuri posibile

a) Deoarece zarul are o singură față numerotată cu 5 => 1 caz favorabil

$$P = \frac{n.c.f.}{n.c.p} = \frac{1}{6}$$

b) Deoarece zarul are 3 fețe nr pare: 2, 4, 6 =>

=> 3 cazuri favorabile

$$P = \frac{3}{6} \overset{|3}{=} \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) Zarul are 6 fețe => 6 cazuri favorabile

$$P = \frac{6}{6} = 1$$

d) Deoarece zarul nu are cifra 7 => 0 cazuri favorabile

$$P = \frac{0}{6} = 0$$

2) Care este probabilitatea ca alegând un nr. din mulțimea nr. nat. de 2 cifre, acesta să fie pătrat perfect.

Mulțimea nr. nat. de 2 cifre este

$A = \{10, 11, \ldots, 99\} \Rightarrow \text{card } A = 99 - 9 = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 90 cazuri posibile

Mulțimea nr. pătrate perfect din A este

$B = \{16; 25; 36; 49; 64; 81\} \Rightarrow \text{card } B = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile

$$p = \frac{n.c.f.}{n.c.p} = \frac{6^{\,|6}}{90} = \frac{1}{15}$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 6 \\ \underline{6} & 15 \\ =30 & \\ \underline{30} & \\ = & \end{array}$$

Def. a) Un nr. natural se numește pătrat perfect dacă poate fi exprimat ca un alt nr natural la a 2-a

Ex. $25 = 5^2$; $169 = 13^2$

b) Un nr. nat. se numește cub perfect dacă poate fi exprimat ca un alt nr. nat la a 3-a

Ex: $8 = 2^3$; $0 = 0^3$; $1 = 1^3$

3) Se dă mulțimea $A = \{0, 1, 2 \dots 80\}$. Care este probabilitatea ca alegând un nr din această mulțime, acesta să fie divizibil cu 3.

card $A = \{81\} \Rightarrow$ 81 cazuri posibile

Mulțimea nr. din A div. cu 3 este:

$B = \{0, 3, 6, \dots 78\}$

Putem număra elementele acestei mulțimi în 3 moduri:

a) dacă mi mă duce capul, le scriem pe toate și le numărăm

b) dacă mă duce capul:

V1 Observăm că termenii mulțimii sunt termeni unei progresii aritmetice de rație $r = 3 - 0 = 3 \Rightarrow$ card $B = \frac{78 - 0}{3} + 1$

$= \frac{78}{3} + 1 = 26 + 1 = 27$

$$\begin{array}{r|l} 78 & 3 \\ \underline{6} & 26 \\ =18 & \\ \underline{18} & \\ =0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 3 \\ \underline{6} & 26 \\ =20 & \\ \underline{18} & \\ =1 & \end{array}$$

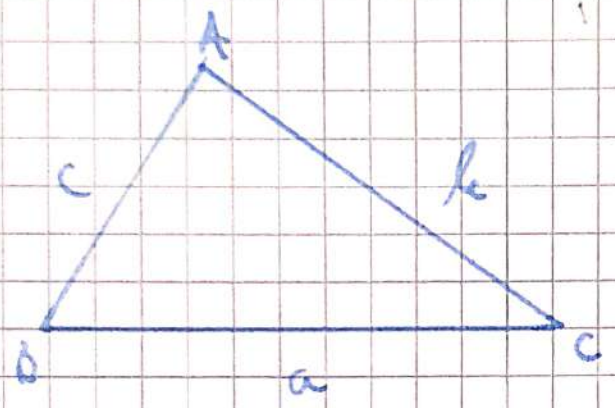
V2 Rescriem $B = \{\underline{0} \cdot 3; \underline{1} \cdot 3; \underline{2} \cdot 3, \dots; \underline{26} \cdot 3\}$

$\Rightarrow$ card $B = 27 \Rightarrow 27$ cazuri fav.

$$P = \frac{n.c.f.}{n.c.p} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

Teorema cosinusului

• Are loc în orice triunghi:



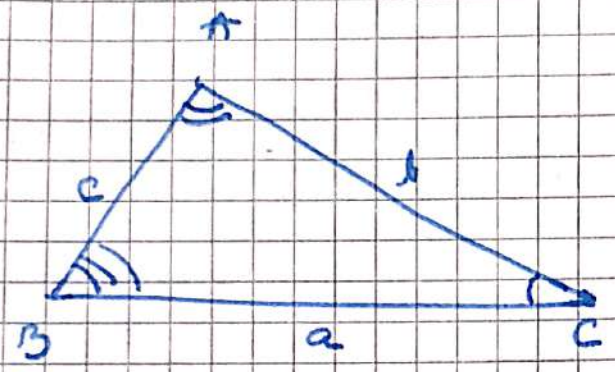
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$\cos B < 0 \Rightarrow B$ obtuz ; $m(\hat{B}) \in (90^\circ, 180^\circ)$

$\cos B > 0 \Rightarrow B$ ascuțit ; $m(\hat{B}) \in (0^\circ, 90^\circ)$

Teorema sinusurilor

- Are loc în orice triunghi:



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$$

sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- R reprezintă raza cercului circumscris ΔABC

Raționalizarea numitorilor

Formule utilizate

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

...

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ $\quad a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$

pt n impar

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b^2+\dots(-1)^{n-1}b^{n-1})$$

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

1) Numitorul este un singur radical: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ $\quad \sqrt[n]{a^{n-k}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ $\quad \sqrt{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ $\quad \sqrt[3]{2^2}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\overset{\sqrt[3]{2}}{\cancel{1}}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{\overset{\sqrt[5]{2^2}}{\cancel{1}}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{4}}{2}$

2) Numitorul este de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ și $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ s.n. expresii conjugate

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\overset{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\cancel{1}}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{6-3} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\overset{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\cancel{1}}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

3) Numitorul este de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$

În această situație, procedeul de raționalizare va fi aplicat de două ori.

a) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}}{} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}\right]\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}\right]} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-7} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2+2\sqrt{6}+3-7}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}-2} \cdot \frac{2\sqrt{6}+2}{} = \frac{(2\sqrt{6}+2)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{6}+2)(2\sqrt{6}-2)} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{6}+2)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{6})^2-2^2} = \frac{2(\sqrt{6}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{20}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{10}$$

b) $$\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}}{}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]\left[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{2}+2-3} = -\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{4}$$

4) a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{2+3} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2+3} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5}$$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} \cdot \dfrac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} = \dfrac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}} = \dfrac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{3^2-(\sqrt{8})^2}}$

$$= \frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{9-8}} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Logaritmi

1) $a^x = y \iff x = \log_a y \Rightarrow a^{\log_a y} = y$

2) $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$

3) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

4) a) $\log_a x^n = n \log_a x$

b) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

5) Schimbarea bazei

a) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

b) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

6) $\lg x = \log_{10} x$

$\ln x = \log_e x$; $e \simeq 2,71$

7) $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$

Ex. $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$; $\log_2 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 2}$

$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$; $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

C.E.

8) $\log_{f(x)} g(x)$

$f(x) > 0$

$f(x) \neq 1$

$g(x) > 0$

9) Scrieți ori nr. sub formă de logaritm

$5 = \log_6 6^5$

$7 = \log_2 2^7$

Mulțimea numerelor complexe

Def: se numește pereche ordonată (sau cuplu), formată din elementele a, b o ordine între a, b. Se notează (a, b) sau (b, a)

Egalitatea a 2 perechi ordonate

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$

Ex $\left(1, \frac{4}{2}\right) = (\sqrt{1}; 2)$ A

$(3; 4) = (4; 3)$ F

Produs cartezian

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ și $b \in B\}$

$\{1, 5\} \times \{2, 7\} = \{(1, 2); (1, 7); (5, 2); (5, 7)\}$

Obs. $|A \times B|$ le card A · card B

multimea nr. complexe

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } b \in \mathbb{R} \}$

pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim operațiile de adunare și înmulțire:

1) Adunarea - fie $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Definim suma dintre z_1 și z_2 prin:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) Produsul - fie $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Definim produsul dintre z_1 și z_2 prin:

- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Ex. Calc. $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ unde a) $z_1 = (-1, 2)$
$z_2 = (-3, -4)$

$z_1 + z_2 = (-1, 2) + (-3, -4) = (-4, -2)$

$z_1 \cdot z_2 = (-1, 2) \cdot (-3, -4) = ((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-4); (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot (-3))$

$= (3 + 8, 4 - 6) = (11, -2)$

b) $z_1 \cdot z_2$ unde $z_1 = \underline{(b, 0)}$; $z_2 = \underline{(0, 1)}$

$z_1 \cdot z_2 = (0, b)$

c) $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

Putem identifica $(a, 0) = a \in \mathbb{R}$

perechea $(0, 1)$ se va nota cu i

$(0, 1) = i$

i s.n. unitate imaginară

(imaginarius - latină)

Obs. $\boxed{i^2 = -1}$

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0) \cdot (0, 1)$

$= a + b \cdot i$

$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \}$

<u>Elementele lui z</u>:

1. partea reală z se notează $Re(z) = a$

real de z

2. Partea imaginară este bi

3. Coeficientul părții imaginare se

notează $Im(z) = b$

imaginar de z

Ex.

Identificați elementele z:

a) $z = 2 - 3i$

$Re(z) = 2$

$P.i. = -3i$

$Im(z) = -3$

b) $z = 1 - i$

$Re(z) = 1$

$P.i. = -1 \cdot i$

$Im(z) = -1$

c) $z = -2 = -2 + 0i$

$Re(z) = -2$

$P.i. = 0 \cdot i$

$Im(z) = 0$

d) $z = -3i = 0 - 3i$

$Re(z) = 0$

$P.i. = -3i$

$Im(z) = -3$

Egalitatea nr. complexe

fie $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$ $\quad Im(z_1) = Im(z_2)$

$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$

$(Re(z_1) = Re(z_2))$

Ex. Găsiți x și y a.î. nr

$z_1 = (-2 + x) - 3i$ și $z_2 = 4 + (2y - 5)i$

să fie egale

$z_1 = z_2 \iff -2 + x = 4 \iff x = 6$

$2y - 5 = -3 \iff 2y = 2 \iff y = 1$

Puterile lui i

(VI)

$$\left.\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}\right\}$$

Obs. că puterile lui i se repetă din 4 în 4 $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} i^5 = i \\ i^6 = -1 \end{array} \Rightarrow i^n = \begin{cases} i^{4c} = 1 \\ i^{4c+1} = i \\ i^{4c+2} = -1 \\ i^{4c+3} = -i \end{cases}, c \in \mathbb{N}$$

Ex. $i^{213} = i^{4\cdot 53+1} = i$

$$\begin{array}{r|l} 213 & 4 \\ \underline{20} & 53 \\ =13 & \\ \underline{12} & \\ =1 & \end{array}$$

$i^{358} = i^{4\cdot 89+2} = -1$

$$\begin{array}{r|l} 358 & 4 \\ \underline{32} & 89 \\ =30 & \\ \underline{36} & \\ =2 & \end{array}$$

T.I.R $\quad d = \hat{r}\cdot c + r, \quad 0 \le r < \hat{r}$

Imp. a la 4

T.I.R. $\quad a = 4\cdot c + r, \quad 0 \le r < 4 \Leftrightarrow r \in \{0, 1, 2, 3\}$

$r = 0 \Rightarrow a = 4c \in \{0, 4, 8, \dots\} = A$

$r = 1 \Rightarrow a = 4c+1 \in \{1, 5, 9, \dots\} = B$

$r = 2 \Rightarrow a = 4c+2 \in \{2, 6, 10, \dots\} = C$

$r = 3 \Rightarrow a = 4c+3 \in \{3, 7, 11, \dots\} = D$

$A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{N}$

Calc. $i^{3001} = i^{4\cdot 750+1} = i^{4\cdot 750}\cdot i^{1} = (i^4)^{750}\cdot i^1 = 1^{750}\cdot i = i$

obs. puterile lui i se repetă din 4 în 4

V2

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

...

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\begin{array}{r|l} 3001 & 4 \\ 28 & 750 \\ \hline =20 & \\ 20 & \\ \hline =1 & \\ 0 & \\ \hline =1 & \end{array}$$

Calc. $i^{20} = i^{4\cdot 5} = (i^4)^5 = 1^5 = 1$

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = i^{4\cdot 5}\cdot i^3 =$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ 20 & 5 \\ \hline =3 & \end{array}$$

$= (i^4)^5 \cdot i^3 = 1^5 \cdot (-i) = -i$

Proprietate

Suma oricăror 4 puteri consecutive ale lui i este 0

$$\left[\begin{array}{l} i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0 \\ 1 + i + i^2 + i^3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ 20 & 5 \\ \hline =3 & \end{array}$$

V1

Calc. $1 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{22} =$

$= (1+i+i^2+i^3) + (i^4+i^5+i^6+i^7) + \dots + (i^{16}+i^{17}+i^{18}+i^{19})$

$+ i^{20} + i^{21} + i^{22} + \cancel{i^{23}} = 1 + i + i^2 = \cancel{1} + i - \cancel{1} = i$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(V2) Obs. câte term. sumei sunt term. unei p. g. cu rația $q = \frac{i}{1} = i$

$$S_{23} = 1 \cdot \frac{i^{23} - 1}{i - 1} = \frac{-i-1}{i-1}$$

Inversul lui $z \in \mathbb{C}^*$ se not $z^{-1} = \frac{1}{z}$

Ex. Calc. inversele nr.

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

a) $z = 2 - 2i$

b) $z = 1 + 3i$

c) $z = -5i$

a) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{(2+2i)(2-2i)} =$

$$= \frac{2+2i}{2^2 - (2i)^2} = \frac{2+2i}{4 - 4i^2} = \frac{2+2i}{4+4} =$$

$$= \frac{2+2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$$

b) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1-3i}{1^2 - (3i)^2} =$

$$= \frac{1-3i}{1^2 - 9i^2} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} i$$

c) $z = -5i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-5i} = \frac{i}{-5i^2} = \frac{i}{5} = \frac{1}{5}i$$

d) Calc. $\frac{1-2i}{1+3i} = \frac{(1-3i)(1-2i)}{(1-3i)(1+3i)} =$

$$= \frac{1-2i-3i+6i^2}{1^2-(3i)^2} = \frac{1-5i-6}{1-9i^2} = \frac{-5-5i}{10}$$

$$= -\frac{5}{10} - \frac{5}{10}i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Conjugatul unui nr complex z

fie $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

Modulul unui nr. complex

fie $z = a+bi$

atunci $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Rădăcina pătrată a lui z

Calc. rădăcina pătrată a nr. $z = 21-20i$

fie $r = a+bi$ a.î. $r^2 = z \Leftrightarrow (a+bi)^2 = 21-20i$

$\Leftrightarrow a^2+2abi+b^2i^2 = 21-20i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 21-20i$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = 21$

$2ab = -20 \;|:2 \;\Leftrightarrow ab = -10 \;\Rightarrow b = -\frac{10}{a}$

$z^2 = z \;\Rightarrow |z^2| = |z| \;\Leftrightarrow |z|^2 = |21 - 20i| =$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{21^2 + (-20)^2}$

$a^2 + b^2 = \sqrt{841}$

$a^2 + b^2 = 29$

$\sqrt{8.41}$ | 29

4 | $2^2 = 4$

$= 441$ | $49 \cdot 9 = 441$

441

$= 0$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 21 \\ a^2 + b^2 = 29 \end{cases}$$

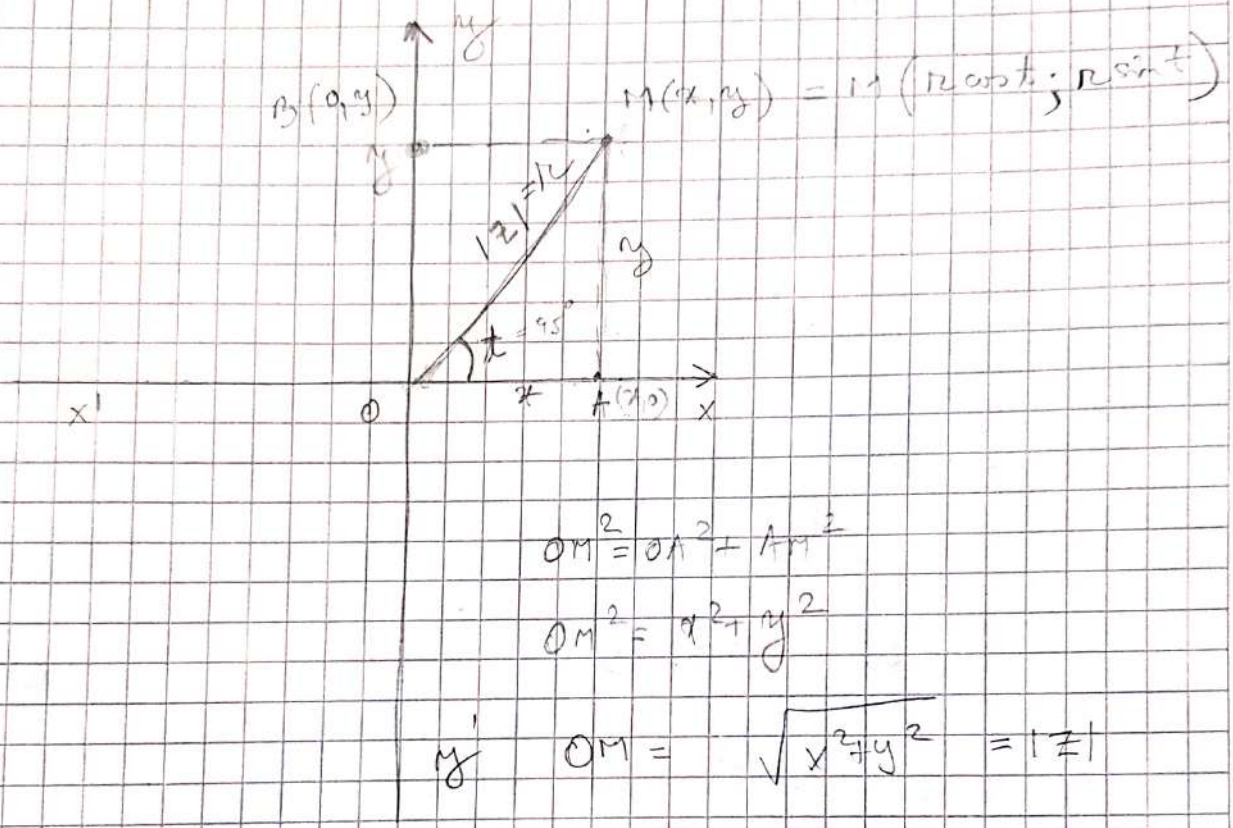
$2a^2 = 50 \;\Leftrightarrow a^2 = 25 \;\Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow z = 5 - 2i$

sau

$a = -5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow z = -5 + 2i$

Forma trigonometrică a unui nr. complex

Orice număr complex $z = x + yi$ i se asociază un unic punct în plan $M(x, y)$



$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$

$$OM^2 = x^2 + y^2$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\sin t = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \sin t$$

$$\cos t = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos t$$

r, t n.m. coordonate polare

$$\boxed{z = r\cos t + r\sin t \cdot i}$$ forma trigonometrică a lui z

$$\boxed{z = r(\cos t + i \sin t)}$$

$t \in [0, 2\pi)$

$t = \arg(z)$ n.m. argumentul redus al lui z

$\operatorname{Arg}(z) = \{ t + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Dacă M nu se găsește pe una din semiaxe $\Rightarrow$

$\Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$

Dacă $M \in C_{I}$ $\Rightarrow k = 0$

Dacă $M \in C_{II}, C_{III} \Rightarrow k = 1$

Dacă $M \in C_{IV} \Rightarrow k = 2$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}$$

Ex. Scrieți sub formă trigonometrică nr.

a) $z = -3 = -3 + 0i \Rightarrow M(-3, 0) \in Ox \Rightarrow t = \pi$

$r = |z| = |-3| = 3$

$z = r(\cos t + i \sin t) = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$

b) $z = 1 - i \Rightarrow M(1, -1) \in C_{IV}$

$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi \\ M \in C_{IV} \Rightarrow k = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} + 2\pi =$$

$= \operatorname{arctg}(-1) + 2\pi = -\operatorname{arctg} 1 + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$z = r(\cos t + i \sin t) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Compunerea funcțiilor

Def.: Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$

Atunci are sens $g \circ f : A \to C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

2) Dacă $f: A \to B$, $g: B \to A$

Are sens și $f \circ g$ și $g \circ f$

3) funcția $1_A : A \to A$; $1_A(x) = x$

este elementul neutru pt compunerea funcțiilor

$$f \circ 1_A = 1_A \circ f = f$$

Ex. 1) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2 + x$

a) Calc. $(f \circ g)(0)$ $(g \circ g)(-1)$

$(g \circ f)(1)$

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$g(0) = 0^2 + 0 = 0$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(0) = 0^2 + 0 = 0$

$g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$

b) Calc. ① $(f \circ 1_{\mathbb{R}})(x)$; $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

② $(1_{\mathbb{R}} \circ f)(x)$ $\quad 1_{\mathbb{R}}(x) = x$

① $(f \circ 1_{\mathbb{R}})(x) = f(1_{\mathbb{R}}(x)) = f(x) = 2x - 1$

② $(1_{\mathbb{R}} \circ f)(x) = 1_{\mathbb{R}}(f(x)) = 1_{\mathbb{R}}(2x-1) = 2x - 1 = f(x)$

V1 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x) =$

$= 2 \cdot (x^2 + x) - 1 = 2x^2 + 2x - 1$

V2 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x) - 1$

$= 2x^2 + 2x - 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + f(x) =$$

$$= (2x-1)^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 4x + \cancel{1} + 2x - \cancel{1}$$

$$= 4x^2 - 2x$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x) - 1 =$$

$$= 2(2x-1) - 1 = 4x - 2 - 1 = 4x - 3$$

---

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x & \text{dacă } x \le 1 \\ 2x+5 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4x + 2$

Calc. $(f \circ g)(x)$; $(g \circ f)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 3g(x) & \text{dacă } g(x) \le 1 \\ 2g(x) + 5 & \text{dacă } g(x) > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 \cdot (4x+2) & \text{dacă } 4x+2 \le 1 \\ 2 \cdot (4x+2) + 5 & \text{dacă } 4x+2 > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 12x + 6 ; & 4x \le -1 \\ 8x + 4 + 5 ; & 4x > -1 \end{cases} = \begin{cases} 12x + 6 ; & x \le -\frac{1}{4} \\ 8x + 9 ; & x > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4 \cdot f(x) + 2$$

$$= \begin{cases} 4 \cdot 3x + 2 & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4 \cdot (2x+5) + 2 & \text{dacă } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 12x + 2; & x \leq 1 \\ 8x + 22; & x > 1 \end{cases}$$

3) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1; & x > 1 \\ x+2; & x \leq 1 \end{cases}$

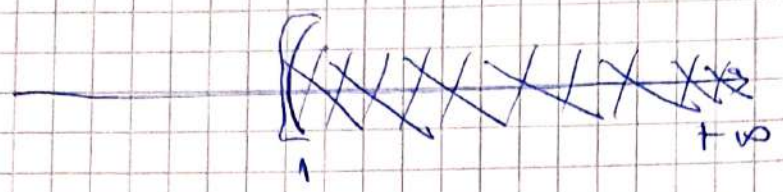
$$g(x) = \begin{cases} x-1; & x \geq 1 \\ 2x; & x < 1 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1; & g(x) > 0 \\ g(x)+2; & g(x) < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1; & x-1 > 0 \text{ și } x \geq 1 \\ 1; & 2x > 0 \text{ și } x < 1 \\ x-1+2; & x-1 < 1 \text{ și } x \geq 1 \\ 2x+2; & 2x < 1 \text{ și } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1; & x > 1 \text{ și } x \geq 1 \\ 1; & x > 0 \text{ și } x < 1 \\ x+1; & x < 2 \text{ și } x \geq 1 \\ 2x+2; & x < \frac{1}{2} \text{ și } x < 1 \end{cases}$$

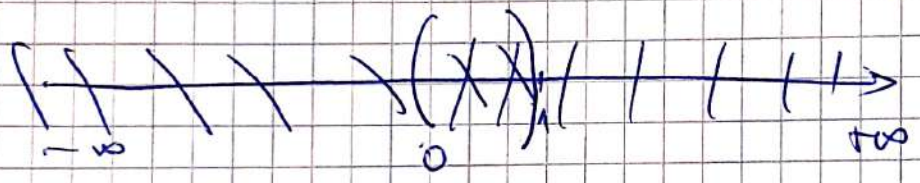
$x > 1$ si $x \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x > 1 \iff x \in (1; +\infty) \\ x \geq 1 \iff x \in [1, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (1, +\infty) \cap [1, +\infty) = (1, +\infty)$$



$x > 0$ si $x < 1$

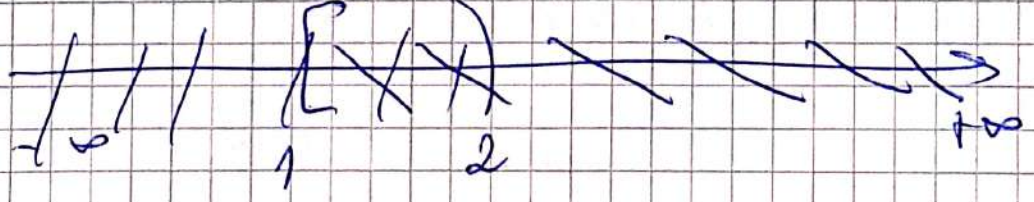
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \iff x \in (0, +\infty) \\ x < 1 \iff x \in (-\infty, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0, +\infty) \cap (-\infty, 1) = (0, 1)$$



$x < 2$ si $x \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x < 2 \iff x \in (-\infty, 2) \\ x \geq 1 \iff x \in [1, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cap [1, +\infty) = [1, 2)$$



$x < \frac{1}{2}$ si $x < 1$

$$\left.\begin{array}{l} x < \frac{1}{2} \iff x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \\ x < 1 \iff x \in (-\infty; 1) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap (-\infty, 1) = (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 1; & x \in (1, +\infty) \\ 1; & x \in (0, 1) \\ x+1; & x \in [1, 2) \\ 2x+2; & x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Nu există o astfel de funcție

Funcții inversabile

1. Def

fie $f: A \to B$, f s.n inversabilă

dacă $\exists\, g: B \to A$ a.î.

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

În acest caz g s.n. inversa f și se notă f^{-1}

2. Teoremă f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă

Ex. fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} x-3; & x \leq 4 \\ 2x-7; & x > 4 \end{cases}$

Ar. că f e inversabilă și calculați inversa sa

3. f bijectivă $\Leftrightarrow$ 1. f injectivă
2. f surjectivă

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3; & x \in (-\infty, 4] \\ 2x-7; & x \in (4, +\infty) \end{cases}$

1) Injectivitatea

a) fie $x_1, x_2 \in (-\infty, 4]$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow x_1 - \cancel{3} = x_2 - \cancel{3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

b) fie $x_1, x_2 \in (4, +\infty)$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow 2x_1 - \cancel{7} = 2x_2 - \cancel{7} \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \quad | : 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

c) fie $x_1 \in (-\infty, 4]$

$x_2 \in (4, +\infty)$

evident $x_1 \neq x_2$

$x_1 \in (-\infty, 4] \Leftrightarrow x_1 \leq 4 \quad | -3 \Leftrightarrow x_1 - 3 \leq 1$

$\Leftrightarrow f(x_1) \leq 1 \Leftrightarrow f(x_1) \in \underline{(-\infty, 1]}$ (1)

$x_2 \in (4, +\infty) \Leftrightarrow x_2 > 4 \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow 2x_2 > 8 \quad | -7$

$\Leftrightarrow 2x_2 - 7 > 1 \Leftrightarrow f(x_2) > 1 \Leftrightarrow \underline{f(x_2) \in (1, +\infty)}$ (2)

(1) și (2) $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Din a), b), c) $\Rightarrow f$ injectivă

2) Surjectivitatea

Def. $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

a) fie $y \in (-\infty, 1]$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 = y \Leftrightarrow x = y + 3$

b) fie $y \in (1, +\infty)$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 7 = y \Leftrightarrow 2x = y + 7 \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{2}$

Din a) și b) $\Rightarrow f$ surjectivă

Din 1) și 2) $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3 \ ; & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{x+7}{2} \ ; & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

4) $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$ 5) $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$; nr. termeni sumă

Progresii aritmetice

1. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este p. a. dacă fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel anterior sau, prin adunarea unui același număr, numit rația p. a. și notat de obicei cu r

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$2; 4; 6; 8; 10; \ldots \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$

$\ldots$

$a_{20} = a_1 + 19r$

$= 2 + 19 \cdot 2$

$= 2 + 38 = 40$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$

2. a_n e p. a. $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

În aplicații a, b, c sunt în p. a. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{2}}$

③ Suma termenilor extremi = suma termenilor egal depărtați de termenii extremi

$a_1, a_2, \dots, a_{20}$

$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = \dots = a_{9} + a_{12} = a_{10} + a_{11}$

Procente

① Un raport procentual este un raport de forma $\frac{p}{100} = p\%$ „p la sută"

„p procente"

Exprimați sub formă de procent numerele

a) $2 = \frac{\overset{100}{\cancel{2}}}{1} = \frac{200}{100} = 200\%$

b) $0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$

c) $0,3 = \frac{\overset{10}{\cancel{3}}}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$

d) $\frac{\overset{50}{\cancel{1}}}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$

e) $0,(3) = \frac{\overset{100}{\cancel{0,(3)}}}{1} = \frac{33,(3)}{100} = 33,(3)\%$

② Aflarea a $p\%$ din a

$p\\%$ din $a = \frac{p}{100} \cdot a$

Ex. 20% din $300 = \frac{20}{1\cancel{00}} \cdot 3\cancel{00} = 20 \cdot 3 = 60$

40% din $250 = \frac{4\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot 25\cancel{0} = 4 \cdot 25 = 100$

3. Găsirea unui nr. când știm p% din el.

20% dintr-un nr. reprezintă 8.

Găsiți nr.

Fie x nr. căutat

$$\frac{20}{100} \cdot x = 8 \Rightarrow x = 8 \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 40$$

4. Găsirea a p procente.

Cât la sută din 250 reprezintă 75

Fie p procentul căutat

$$\frac{p}{100} \cdot 250 = 75$$

$$p = \overset{3}{\cancel{75}} \cdot \frac{\cancel{100}}{\underset{1}{\cancel{250}}} \Rightarrow p = 30 \Rightarrow p\% = 30\%$$

5. a) Prețul unui produs este 100 lei

Știind că se reduce cu 10% calc. cât devine.

Scumpirea este: $\frac{10}{100} \cdot 100 = 10$

Preț după scumpire: $100 + 10 = 110$

b) După o scumpire de 10% prețul unui produs devine 110 lei. Calc. prețul inițial.

Fie x prețul inițial

Scumpirea este: $\frac{10}{100} \cdot x = \frac{x}{10}$

Preț după scumpire: $\overset{10}{x} + \frac{x}{10} = \overset{10}{110}$

$\Leftrightarrow 10x + x = 1100 \Leftrightarrow 11x = 1100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1100}{11} \Leftrightarrow x = 100$

6. a) Prețul unui produs este 1200 lei. Știind că se ieftinește cu 10% iar apoi se scumpește cu 10% calc. cât devine

Ieftinirea: $\frac{10}{100} \cdot 1200 = 120$

Preț după ieftinire $1200 - 120 = 1080$

Scumpirea: $\frac{10}{100} \cdot 1080 = 108$

Preț după scumpire: $1080 + 108 = 1188$

b) După o ieftinire de 10% urmată de o scumpire de 10% prețul unui produs devine 1188 lei. prețul inițial.

Fie x prețul inițial.

Ieftinirea: $\frac{10}{100} \cdot x = \frac{x}{10}$

Preț după ieftinire: $x - \frac{x}{10} = \frac{10x - x}{10} = \frac{9x}{10}$

Scumpirea $\frac{10}{100} \cdot \frac{9x}{10} = \frac{9x}{100}$

Preț după scumpire: $\frac{9x}{10} + \frac{9x}{100} = 1188$ | $\cdot 100$

$90x + 9x = 118800 \Leftrightarrow 99x = 118800 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{118800}{99} \Leftrightarrow x = 1200$

Determinarea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a 2 funcții

Ex.

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -3x + 2$

fie $A(a, b) \in G_f \cap G_g \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(a,b) \in G_f \\ A(a,b) \in G_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = b \\ g(a) = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = b \\ -3a + 2 = b \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 = -3a + 2 \Leftrightarrow$$

$$2a + 3a = 2 + 1$$

$$5a = 3$$

$$a = \frac{3}{5}$$

$$b = 2a - 1 \Leftrightarrow b = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 \Leftrightarrow b = \frac{6}{5} - \overset{5}{1}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{6}{5} - \frac{5}{5} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$G_f \cap G_g = \left\{ A\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \right\}$$

Proprietăți puteri

I. Înmulțirea și împărțirea a două puteri cu aceeași bază

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

II. Înmulțirea și împărțirea puterilor de același exponent

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

III. Ridicarea unei puteri la exponent

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

IV. Negativ

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ex: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2$

V. Radical

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exemple:

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

VI. Nul

$a^0 = 1$

Def Un număr natural ≥ 2 s.n. număr prim dacă admite ca unici divizori pe 1 și pe el însuși

Ex. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

În cor contrar se numesc neprime sau compuse

Ex. 10, 14, 20...

Ecuații exponențiale

Ecuațiile exponențiale sunt ecuațiile în care necunoscuta apare scrisă la exponent.

Ideea de rezolvare ale acestor ecuații este următoarea: dacă puteri de aceeași bază au exponenții egali.

• Tipuri de ecuații:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$4^x = 128 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^7 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow S = \{\frac{7}{2}\}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = 3 \overset{|\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} x = -3 \Rightarrow S = \{-3\}$

2. $\boxed{a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b}$

$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3 \Rightarrow S = \{\log_2 3\}$

$3^{2x-1} = 7 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_3 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \log_3 7 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\log_3 7 + 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \left\{\frac{\log_3 7 + 1}{2}\right\}$

3. Ec. cu factor comun

$$3^{x-3} + 9^{\frac{x-2}{2}} + 3^{x} = 31$$

$$3^{x-3} + (3^2)^{\frac{x-2}{2}} + 3^{x} = 31$$

$$3^{x-3} + 3^{\frac{\cancel{2}^{1} \cdot (x-2)}{\cancel{2}_{1}}} + 3^{x} = 31$$

$$3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x} = 31$$

$$3^{x-3} \cdot (1 + 3 + 3^{3}) = 31$$

$$3^{x-3} \cdot 31 = 31 \quad | : 31$$

$$3^{x-3} = 1$$

$$3^{x-3} = 3^{0}$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$$

$$\frac{3^{x-2}}{3^{x-3}} = 3^{x-2-(x-3)}$$

$$= 3^{\cancel{x}-2-\cancel{x}+3} = 3^{1} = 3$$

4. Ec. prin substituție:

a) $5^{x} + 5^{-x} = 2 \Leftrightarrow 5^{x} + \frac{1}{5^{x}} = 2$

$$5^{x} = t > 0$$

$$\cancel{t} \cdot t + \frac{1}{t} = 2 \cdot \cancel{t}$$

$$t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 > 0$$

pt $t = 1 \Rightarrow 5^{x} = 1 \Leftrightarrow 5^{x} = 5^{0} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

b) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

$3^{2x} \cdot 3 - 10 \cdot 3^{x} \cdot 3 + 27 = 0$

$3 \cdot (3^{x})^{2} - 30 \cdot 3^{x} + 27 = 0$

$3^{x} = t > 0$

$3 \cdot t^{2} - 30t + 27 = 0$

$a = 3,\ b = -30,\ c = 27$

$\Delta = b^{2} - 4ac = (-30)^{2} - 4 \cdot 3 \cdot 27 =$

$= 900 - 324 = 576$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 + 24}{6} = \frac{54}{6} = 9 > 0$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 - 24}{6} = \frac{6}{6} = 1 > 0$$

$t = 1 \Rightarrow 3^{x} = 1 \Leftrightarrow 3^{x} = 3^{0} \Leftrightarrow x = 0$

$t = 9 \Rightarrow 3^{x} = 9 \Leftrightarrow 3^{x} = 3^{2} \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{0, 2\}$

$\sqrt{576}$ | 24

4 | $2^2 = 4$

$= 176$ | $4 \cdot 4 = 176$

176

$= 0$

Progresii geometrice

1) $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5$

$\Rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \qquad q(\text{rația}) = \frac{4}{2} = 2$

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$

$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$

$\ldots$

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

2) pt $\forall (b_n)_{n \geq 1}$; $b_n > 0 \ \forall n \geq 1$ are loc

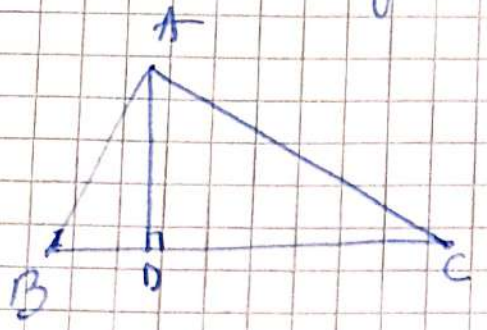
b_n este p.g. $\Leftrightarrow \quad b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \Rightarrow b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$

Ex. pt. a, b, c p.g $\Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$ sau $b^2 = a \cdot c$

3) $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Ex. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 1 \cdot \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

Triunghiul oarecare



1) $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$

2) $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{BC \cdot AC \cdot \sin C}{2}$

3) <u>Heron</u> $A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$

$$p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{P_{\Delta ABC}}{2}$$

p semiperimetrul ΔABC

4) $r = \dfrac{A_{\Delta ABC}}{p}$; $R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 A_{\Delta ABC}}$

r = raza cercului înscris ΔABC

R = raza cercului circumscris ΔABC

Semnul funcției de gradul al II-lea

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$

se nez ec. $ax^2 + bx + c = 0$

a) $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semn a	0	semn contrar „a"	0	semn a	

b) $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		semn a	0	semn a	

c) $\Delta < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		semn a	

$x^2 - 5x + 6 > 0$

Rez. ec. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Din tabel $\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Ecuații trigonometrice fundamentale

1) $\sin x = a$

a) $|a| > 1 \Rightarrow S = \emptyset$

b) $|a| \leq 1 \Rightarrow S = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

2) $\cos x = a$

a) $|a| > 1 \Rightarrow S = \emptyset$

b) $|a| \leq 1 \Rightarrow S = \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

3) $\operatorname{tg} x = a$

$S = \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

4) $\operatorname{ctg} x = a$

$S = \{\operatorname{arcctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Tipuri simple de ec. trigonometrice

1) Ecuații care conțin funcții de același nume.

(I) $\sin \alpha x = \sin \beta x$

$\alpha x = (-1)^k \beta x + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

(II) $\cos \alpha x = \cos \beta x$

$\alpha x = \pm \beta x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

(III) $tg\, \alpha x = tg\, \beta x$; $\cos \alpha x \neq 0$ și $\cos \beta x \neq 0$

$\alpha x = \beta x + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

(IV) $ctg\, \alpha x = ctg\, \beta x$; $\sin \alpha x \neq 0$ și $\sin \beta x \neq 0$

$\alpha x = \beta x + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

2) Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații algebrice.

$f(\sin \alpha x) = 0$; $f(\cos \alpha x) = 0$;

$f(tg\, \alpha x) = 0$; $f(ctg\, \alpha x) = 0$.

• Se notează (substituție) $t = \sin \alpha x$ ($t = \cos \alpha x$, $t = tg\, \alpha x$, $t = ctg\, \alpha x$) și se obține o ec. algebrică în t care prin rezolvare dă sol. t_1, t_2.

Se revine la substituție și se rez. ec. trigonometrice simple $\sin \alpha x = t_1$, $\sin \alpha x = t_2$ ($\cos \alpha x = t_1$, $\cos \alpha x = t_2$, $tg\, \alpha x = t_1$ ...).

Reunind sol. ec. obținem mulțimea de soluții a ecuației date.

3) Ecuația liniară în $\sin x$ și $\cos x$:

Forma: $a \sin x + b \sin x = c$;

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$.

• Se împarte ec. prin a și se obț. ec:

$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$

$\exists\, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a.î. $\frac{b}{a} = tg\, \alpha$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Determinați mulțimile

(1) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\} = \{1, 3\}$

$\frac{5}{2x-1} \in \mathbb{N} \iff 2x-1 \mid 5 \iff 2x-1 \in D_5(\mathbb{N}) = \{1, 5\}$

$2x-1 = 1 \iff 2x = 2 \iff x = 1 \in \mathbb{N}$

$2x-1 = 5 \iff 2x = 5+1 \iff 2x = 6 \iff x = 3 \in \mathbb{N}$

(2) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{2, 3, 4, -1\}$

$\frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z} \iff x-3 \mid 2 \iff x-3 \in D_2(\mathbb{Z}) = \{\pm 1, \pm 2\}$

$x-3 = -1 \iff x = 2 \in \mathbb{Z}$ $\quad x-1 = 2 \iff x = 3 \in \mathbb{Z}$

$x-3 = 1 \iff x = 4 \in \mathbb{Z}$

$x-1 = -2 \iff x = -1 \in \mathbb{Z}$

2) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{3x+1}{2x-3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{2, -1, 7, -4\}$

$$\frac{3x+1}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-3 \mid 3x+1 \\ 2x-3 \mid 2x-3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3 \mid 2(3x+1) \\ 2x-3 \mid 3(2x-3) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x-3 \mid 6x+2 \\ 2x-3 \mid 6x-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-3 \mid 6x+2-(6x-9) \Leftrightarrow 2x-3 \mid \cancel{6x}+2-\cancel{6x}+9$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 \mid 11 \Leftrightarrow 2x-3 \in D_{11} = \{\pm 1, \pm 11\}$$

$2x-3 = 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \in \mathbb{Z}$

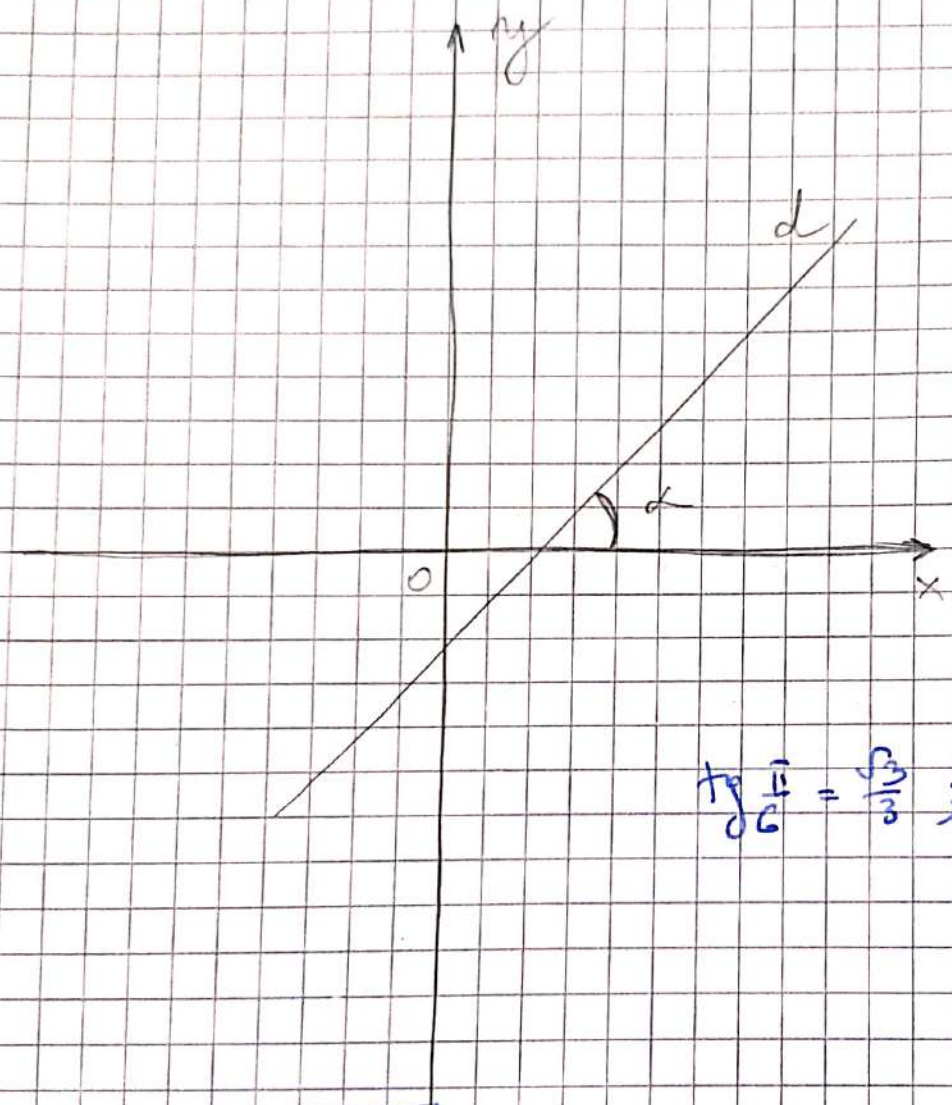
$2x-3 = -1 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \in \mathbb{Z}$

$2x-3 = 11 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7 \in \mathbb{Z}$

$2x-3 = -11 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4 \in \mathbb{Z}$

Panta unei drepte

1) Panta unei drepte d este tangenta unghiului pe care-l face d cu axa Ox, măsurat în sens trigonometric.



$tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tg\frac{\pi}{4} = 1$; $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\boxed{m_d = tg\,\alpha}$$

Dacă $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = -tg(\pi - \alpha)}$

Ex $tg\,120^\circ = -tg(180^\circ - 120^\circ) = -tg\,60^\circ = -\sqrt{3}$

2) Panta dreptei care trece prin $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Ex. $A(\overset{x_A}{1}, \overset{y_A}{2})$ $B(\overset{x}{2}, \overset{y}{3})$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2-1} = 1$$

3) Ecuația unei drepte se prezintă sub una din formele:

a) $d: ax + by + c = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b}$

b) $d: y = mx + n \Rightarrow m_d = m$

Calculați panta dreptei d în cazurile:

a) $d: -2x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$

$a = -2, b = 3$

b) $d: y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \Rightarrow m_d = -\frac{1}{2}$

---

* Ecuația axei Ox este: $Ox: y = 0$

Ecuația axei Oy este: $Oy: x = 0$

Coordonatele mijlocului unui segment

fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$

Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul $[AB]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Ex.

Calc. coord. mijlocului $[AB]$ unde $A(-1,3)$; $B(0,5)$

Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul $[AB]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

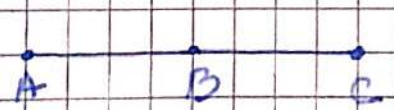
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Am obținut $M\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

Simetricul unui punct față de alt punct

fie $A(0,1)$, $B(-2,3)$ Calc. coord. simetricului punctului A față de B

fie $C(x_C, y_C) = \text{sim}_B A$ $\Rightarrow$



B mijlocul $[AC]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow -2 = \dfrac{0 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = -4$

$y_B = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{1 + y_C}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_C + 1 = 6 \Leftrightarrow y_C = 5$

Am obt. $C(-4; 5)$

<u>Coordonatele centrului de greutate al unui Δ</u>

fie $G(x_G, y_G)$ centru de greutate al ΔABC

$\Rightarrow \quad x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Ex Se dau $A(1,-2)$; $B(0,3)$; $C(-2,-1)$

Găsiți coord. centrului de greutate al ΔABC

fie $G(x_G, y_G)$ centru de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+0+(-2)}{3} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2+3+(-1)}{3} =$$

$$= \frac{1-1}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Am obținut $G\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$

<u>Ecuația unei drepte d care trece prin $A(x_A, y_A)$ și este de pantă m_d</u>

$$\boxed{d: y - y_A = m_d (x - x_A)}$$

Ex. Scrieți ec. dreptei care trece prin $M(1, -2)$ și are panta $\frac{3}{2}$

$d: y - y_M = m_d (x - x_M)$ $\quad$ $d: y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 2$

$d: y - (-2) = \frac{3}{2}(x - 1)$ $\quad$ $d: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

$d: y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Ec. unei drepte care trece prin $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$

$$\boxed{AB: \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$$

Ex. Scrieți ec. dreptei care trece prin $A(1, 2)$; $B(-2, 5)$

$$AB: \frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{-2-1}$$

$$AB: \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{-3} \quad \Big| \cdot 3$$

$$AB: y - 2 = -x + 1$$

$$AB: x + y - 2 - 1 = 0$$

$$AB: x + y - 5 = 0$$

Distanta dintre 2 puncte A, B

$$\boxed{d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Calc. lungimea segmentului MN unde

$M(1,2)$; $N(-3,4)$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-2)^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2 \cdot 5$$

Condiția de paralelism a 2 drepte

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}}$$

Condiția de perpendicularitate a 2 drepte

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1}$$

Ex.

1) Scrieți ec. unei drepte care trece prin $A(1,2)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație

$2x-3y+1=0$

$d_2: 2x-3y+1=0$

$a=2;\ b=-3 \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

fie d_1 ec. dreptei cerută

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2} = \frac{2}{3}$

$d_2: y - y_A = m_{d_2}(x - x_A)$

$d_2: y - 2 = \frac{2}{3}(x-1)$

$d_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \overset{\frac{3}{}}{2}$

$d_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

2) Se dau $A(1,3)$; $B(-1,2)$; $C(0,1)$

Scrieți ec. unei drepte care trece prin B și perpendiculară pe AC

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-3}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

fie d ec. dreptei cerute

$$d \perp AC \Leftrightarrow m_d \cdot m_{AC} = -1 \Leftrightarrow m_d \cdot 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow m_d = -\frac{1}{2}$$

$$d: \; y - y_B = m_d (x - x_A)$$

$$d: \; y - 2 = -\frac{1}{2}[x - (-1)]$$

$$d: \; y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2$$

$$d: \; y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Distanta de la un punct

$A(x_A, y_A)$ la o dreaptă de ecuație $d: ax+by+c=0$

$$\boxed{d(A; d) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Ex. Calc. distanța de la $A(2, 3)$ la dreapta

$d: y = -2x+1$

$d: 2x+y-1=0 \Rightarrow a=2, b=1, c=-1$

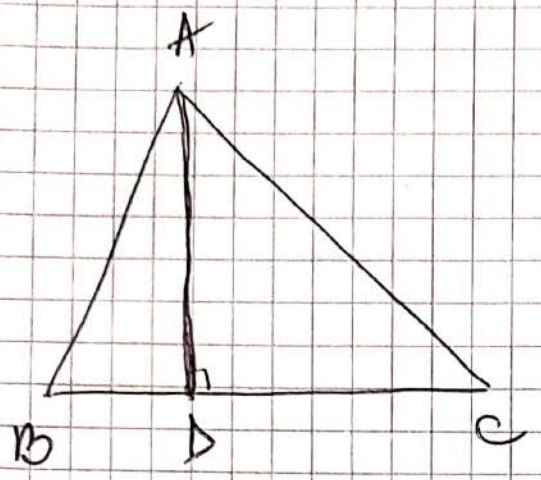
$$d(A; d) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2\cdot 2+3-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Obs: În cadrul unui Δ, distanța de la un punct la o dreaptă reprezintă de fapt, lungimea înălțimii dusă dintr-un vârf al Δ pe dreaptă.

Aria unui triunghi

ABC



Ducem $AD \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ înălțime

$AD = d(A; BC)$

$\cancel{A_{\Delta ABC} = AD \cdot}$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$$

Ex. Se consideră ΔABC, cu $A(-1,-2)$, $B(-4,2)$, $C(5,6)$. Determinați $A_{\Delta ABC}$.

Ducem $AD \perp BC \Rightarrow [AD]$ înălțime

$AD = d(A; BC)$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6-2}{5-(-4)} = \frac{4}{9}$$

$BC: y - y_B = m_{BC}(x - x_B)$

$BC: y - 2 = \frac{4}{9}(x+4) \quad | \cdot 9$

$BC: 9y - 18 = 4x + 16$

$BC: 4x - 9y + 16 + 18 = 0$

$BC: 4x - 9y + 34 = 0 \Rightarrow a = 4, b = -9, c = 34$

$$d(A; BC) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot (-1) - 9 \cdot (-2) + 34|}{\sqrt{4^2 + (-9)^2}}$$

$$= \frac{|-4 + 18 + 34|}{\sqrt{16 + 81}} = \frac{|48|}{\sqrt{97}} = \frac{48}{\sqrt{97}}$$

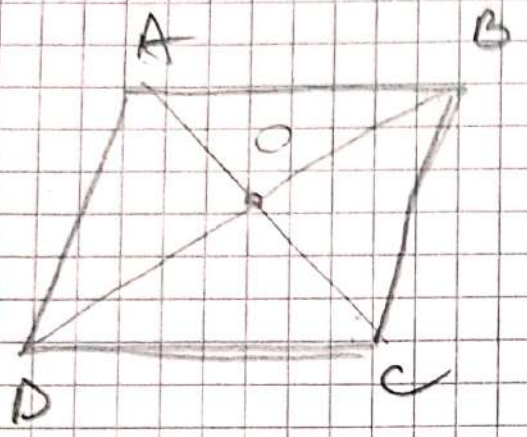
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5+4)^2 + (6-2)^2}$$

$$= \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{\frac{48}{\sqrt{97}} \cdot \sqrt{97}}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Paralelogram

Def. Este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele



$AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$

Proprietăți:

1) Laturile opuse au lungimile egale

$AB = DC$ și $AD = BC$

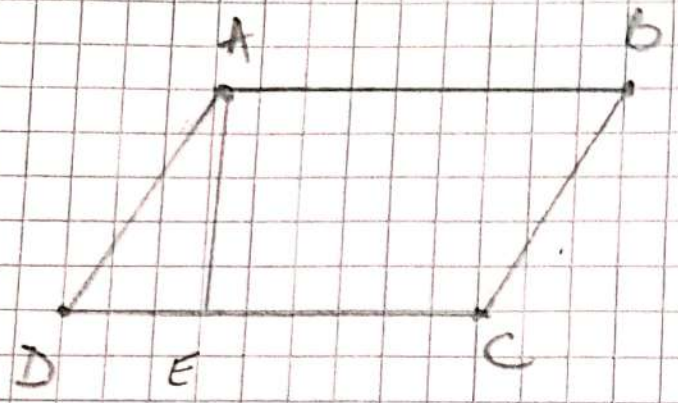
2) a) Unghiurile opuse sunt congruente

$\hat{A} \equiv \hat{C}$ și $\hat{D} \equiv \hat{B}$

b) Orice 2 unghiuri consecutive (alăturate) sunt suplementare.

-> Două unghiuri sunt suplementare dacă suma măsurilor lor este 180°

3) Diagonalele se înjumătățesc



$P_{ABCD} = 2AB + 2BC$

Aria)

1) $A_{ABCD} = AE \cdot CD$

2) Produsul oricăror 2 laturi consecutive și a sinusului unghiului dintre ele

$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin B$

$= BC \cdot CD \cdot \sin C$

Ecuații iraționale

Def: Ec. irațională e o ecuație în care necunoscuta figurează sub unul sau mai mulți radicali.

<u>Etape în rezolvare:</u>

1. Se localizează radicalul într-o parte.

2. Condiții de existență:

a) Dacă în ecuație sunt doi radicali de ordin par care conțin necunoscuta, atunci expresia de sub radical trebuie să fie ≥ 0. Uneori prin simpla rezolvare a condițiilor se poate stabili dacă ec. nu are soluții. Dacă rez. condițiilor e complicată, atunci nu se rezolvă.

b) Dacă în ecuație sunt radicali de ordin impar, nu se pune nicio condiție.

3. Rezolvarea ecuațiilor: Se ridică amândi membrii ai ec. la puteri convenabile (date de ordinele radicalilor).

4. Verificarea soluțiilor și în condiții dar și în ec. inițială.

Mulțimi de numere

① Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$$

② Mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$$

③ Mulțimea numerelor raționale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Ex: $\frac{2}{3}$; $\frac{-1}{-2}$; $\frac{8}{-3}$ $\in \mathbb{Q}$

$5 \in \mathbb{N} \in \mathbb{Z} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \dots \in \mathbb{Q}$

$-5 \in \mathbb{Z} = \frac{-5}{1} \in \mathbb{Q}$

Concluzii: Orice număr natural și întreg este număr rațional.

· Putem scrie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$A \subseteq B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Fracții zecimale neperiodice:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 = \frac{5}{10} \\ 12,231 = \frac{12231}{1000} \end{array} \right. \in \mathbb{Q}$$

· Fracții zecimale periodice simple:

→ Perioada începe imediat după virgulă

$$0,(21) = \frac{21}{99} \in \mathbb{Q}$$

$$12,(145) = \frac{12145 - 12}{999} = \frac{12133}{99} \in \mathbb{Q}$$

$$5,(2) = \frac{52 - 5}{9} = \frac{47}{9} \in \mathbb{Q}$$

· Fracții zecimale periodice mixte:

→ Perioada nu începe imediat după virgulă

$$0,2(3) = \frac{23 - 2}{90} = \frac{21}{90} \in \mathbb{Q}$$

$$0,31(567) = \frac{31567 - 31}{99900} = \frac{31536}{99900} \in \mathbb{Q}$$

$$12,345(1) = \frac{12345 - 12345}{9000} = \frac{11106}{9000} \in \mathbb{Q}$$

④ Mulțimea numerelor iraționale

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Un număr este irațional dacă nu este rațional.

Un număr irațional este o fracție zecimală, infinită, neperiodică.

0,123...

0,4544555444555...

Radicalii care nu se extrag exact sunt numere iraționale:

$\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$; $\pi \simeq 3,14$; $e \simeq 2,71$

⑤ Mulțimea numerelor reale

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

⑥ Mulțimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

1) Určete 315-a desetinného rozvoje zlomku
0,(1472).

$$\begin{array}{r|l} 315 & 4 \\ \underline{28} & \overline{78} \\ =35 & \\ \underline{32} & \\ =3 & \end{array}$$

$315 = 4 \cdot 78 + 3 \Rightarrow$ u 315-a desetinného je 7

2) Určete 415-a desetinného rozvoje zlomku
2,231(2875)

$415 - 3 = 411$

$$\begin{array}{r|l} 411 & 4 \\ \underline{4} & \overline{} \\ =1 & \\ \underline{0} & \\ =11 & \\ \underline{8} & \\ =3 & \end{array}$$

R: 7

Sume - p.a.

(A) Calculați: $5 + 7 + 9 + \dots + 35$

Observăm că termenii sumei sunt termeni unei p.a. de rație $r = 7 - 5 = 2$

Număr termeni sumă: $\dfrac{\text{ultimul termen} - \text{primul termen}}{r} + 1$

$$= \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{35 - 5}{2} + 1 = \frac{30}{2} + 1 = 15 + 1 = 16$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$\downarrow$

* Suma primilor „n" termeni ai unei p.a.

$$5 + 7 + 9 + \dots + 35 = S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2}$$

$$= \frac{(5 + 35) \cdot 16}{2} = \frac{\overset{20}{\cancel{40}} \cdot 16}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 320$$

(B) Calculați: $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$

Observăm că termenii sumei sunt termenii unei p.a. de rație $q = \frac{2^2}{2} = 2$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$\downarrow$

* Suma primilor „n" termeni ai unei p.g.

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^{30} = S_{30} = b_1 \frac{q^{30} - 1}{q - 1}$$

$$= 2 \cdot \frac{2^{30} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (2^{30} - 1) = 2^{31} - 2$$

(C) Calculați: a) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$

$$= \frac{4 - 3}{3 \cdot 4} + \frac{5 - 4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{100 - 99}{99 \cdot 100} =$$

* $\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$

$$= \frac{\cancel{4}^{1}}{3 \cdot \cancel{4}_{1}} - \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1} \cdot 4} + \frac{\cancel{5}^{1}}{4 \cdot \cancel{5}_{1}} - \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{4}_{1} \cdot 5} + \dots + \frac{\cancel{100}^{1}}{99 \cdot \cancel{100}_{1}} - \frac{\cancel{99}^{1}}{\cancel{99}_{1} \cdot 100} =$$

$$= \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\dots} - \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{99}} - \frac{1}{100} =$$

$$= \frac{\cancel{100}^{1}}{\cancel{3}_{1}} - \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{100}_{1}} = \frac{100 - 3}{300} = \frac{97}{300}$$

b) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \dots + \frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\right) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{1\cdot \cancel{3}_{1}} - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{\cancel{5}^{1}}{3\cdot \cancel{5}_{1}} - \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}\cdot 5} + \dots + \frac{\cancel{2n+1}^{1}}{(2n-1)\cancel{(2n+1)}_{1}} - \right.$

$\left. - \frac{\cancel{2n-1}^{1}}{\cancel{(2n-1)}_{1}(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{2}^{n+1}}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+\cancel{1}-\cancel{1}}{2n+1} =$

$= \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{n}^{1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$

Simbolurile rezultă și echivalent

„ $\Rightarrow$ " - citim rezultă sau implică sau implicație directă

„ $\Leftrightarrow$ " - citim echivalent sau dublă implicație sau dacă și numai dacă

Se folosesc între propoziții matematice în scopul transformărilor în alte propoziții matematice.

$P_1 \Rightarrow P_2$ (dacă P_1 atunci P_2)

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \begin{cases} \nearrow P_1 \Rightarrow P_2 \\ \searrow P_2 \Rightarrow P_1 \end{cases}$$

Semnul funcției de gradul II

fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Rezolvăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$

1) Dacă $\Delta > 0$, ecuația are 2 soluții reale și diferite

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		semn a	0	semn contrar a	0	semn a	

2) Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
ax^2+bx+c		semn a	0	semn a	

3) Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		semn a	

Semnul funcției de gradul II ne ajută la rezolvarea inecuațiilor de gradul II :

· Exemple :

a) $x^2 + 3x + 2 < 0$

Rez. ec. $x^2 + 3x + 2 = 0$

$a_1 = 1, b = 3, c = -2$

$x_1 = -1 ; x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Din tabel $\Rightarrow x \in (-2, -1)$

b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

$a = 1, b = 2, c = 1$

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+1	$+$	$+$	0	$+$	$+$

Din tabel $\Rightarrow x = -1$

c) $-x^2 - x - 1 > 0$

$-x^2 - x - 1 = 0$

$a = -1$; $b = -1$; $c = -1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$

x	$-\infty$					$+\infty$
$-x^2-x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Din Tabel $\Rightarrow x \in \emptyset$

Reguli de derivare

1. $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$

3. $(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Exerciții:

1) $c' = 0$

Ex. $3' = 0$; $(\ln 3)' = 0$ $(\sqrt[3]{5})' = 0$

2) a) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

b) $x' = 1$

Ex.

$(x^2)' = 2 \cdot x$ $(7x^3)' = 7 \cdot (x^3)' =$
$= 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$

$(x^3)' = 3x^2$ $(4x^5)' = 4 \cdot (x^5)'$
$= 4 \cdot 5x^4 = 20x^4$

2)

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Concluzie $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$(\sqrt[3]{x^2}) = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3} - \frac{3}{1}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$(\sqrt[5]{x^4}) = (x^{\frac{4}{5}})' = \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{4}{5} - \frac{5}{1}} =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

$$\left(\frac{3}{4x}\right)' = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{4x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1' \cdot x^3 - 1 \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{0 - 3x^2}{x^6} =$$

$$= -\frac{3x^{2\,(x^2}}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} =$$

$$= -3 \cdot x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\left(\frac{1}{x^6}\right) = (x^{-6})' = -6 \cdot x^{-7} = -6 \cdot \frac{1}{x^7} = -\frac{6}{x^7}$$

$$\left(\frac{1}{x^6}\right)' = \frac{1' \cdot x^6 - 1 \cdot (x^6)'}{(x^6)^2} = \frac{0 - 6 \cdot x^5}{x^{12}} =$$

$$= -\frac{6x^{5\,(x^5}}{x^{12}} = -\frac{6}{x^7}$$

* Ecuația tangentei la Gf în punctul x_0 este:

$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Panta acestei tangente este $m_t = f'(x_0)$

Exerciții:

1. Fie $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$

Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x_0 = 2$

$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2}$

$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$t: y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 2)$

$t: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}_2} \cdot \cancel{2}^1 + \sqrt{2}$

$t: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$

$t: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se consideră funcția $f:(2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-2}$

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x=3$ situat pe graficul funcției

a) $f'(x)=\left[\frac{(x-1)^2}{x-2}\right]'=\left(\frac{x^2-2x+1}{x-2}\right)'=$

$=\frac{(x^2-2x+1)'\cdot(x-2)-(x^2-2x+1)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+1)}{(x-2)^2}=$

$=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2}=$

$=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-3x-x+3}{(x-2)^2}=$

$=\frac{x(x-3)-(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$; $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$; $x_0 = 3$

$$f(x_0) = f(3) = \frac{(3-1)^2}{3-2} = \frac{2^2}{1} = 4$$

$$f'(x_0) = f'(3) = \frac{(3-1)(3-3)}{(3-2)^2} = \frac{2 \cdot 0}{1^2} = 0$$

Ecuația tangentei la Gf în punctul $x_0 = 3$:

$$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$t: \; y - 4 = 0(x-3)$$

$$t: \; y = 4$$

Derivatele funcțiilor compuse

$u = f(x)$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

Ex.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = (x^2 - 2x)^7$

$f'(x) = \left[(\underbrace{x^2 - 2x}_{u})^7\right]' = 7 \cdot (x^2 - 2x)^6 \cdot (x^2 - 2x)' =$

$= 7 \cdot (x^2 - 2x)^6 \cdot (2x - 2) =$

$= 7 \cdot 2 (x^2 - 2x)^6 \cdot (x - 1) =$

$= 14 (x^2 - 2x)(x - 1)$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = (x^2 + 3x + 2)^3$

$f'(x) = \left[(x^2 + 3x + 2)^3\right]' =$

$= 3 \cdot (x^2 + 3x + 2)^2 \cdot (x^2 + 3x + 2)'$

$= 3 (x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 3)$

II $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{u})' =$

$= \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

Ex:

a) $\left[\sqrt{\underbrace{x^2-1}_{u}}\right]' = \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\sqrt{\underbrace{x^2+3x-2}_{u}} = \frac{(x^2+3x-2)'}{2\sqrt{x^2+3x-2}} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-2}}$

III a) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{u} \cdot u'$

$\left[\ln \underbrace{(x^2+1)}_{u}\right]' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

b) $\ln\left(\frac{1}{x}+2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{x}+2\right)' =$

$= \frac{1}{\frac{2x+1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cancel{x}\,1}{2x+1} \cdot \frac{1}{x^{\cancel{2}}}$

$= -\frac{1}{x(2x+1)}$

IV) 1. $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$

Ex. a)

a) $(e^{\overbrace{x^2+1}^{u}})' = e^{x^2+1} \cdot (x^2+1)' =$

$= 2x \cdot e^{x^2+1}$

b) $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' =$

$= a^u \cdot \ln a \cdot u'$

Ex.

a) $(2^{\overbrace{x^2-3x+2}^{u}})' = 2^{x^2-3x+2} \cdot \ln 2 \cdot (x^2-3x+2)' =$

$= 2^{x^2-3x+2} \cdot \ln 2 \cdot (2x-3)$

V) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{u'}{u^2}$

Ex.

$$\left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2-3x+1}\right)' = -\frac{(x^2-3x+1)'}{(x^2-3x+1)^2} = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+1)}$$

VI 1. $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin u)' = \cos u \cdot u'$

Ex.

a) $(\sin \underbrace{2x}_{u})' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$

b) $\left[\sin \underbrace{(x^2 + 3x - 5)}_{u}\right] = \cos(x^2+3x-5) \cdot (x^2+3x-5)' =$

$= \cos(x^2+3x-5) \cdot (2x+3)$

2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

Ex.

Ex. a) $\left[\cos(\underbrace{-x}_{u})\right]' = -\sin(-x) \cdot (-x)' =$

$= -\sin x$

b) $\left[\cos(x^2+1)\right]' = -\sin(x^2+1) \cdot$

$\cdot (x^2+1)' = -2x \cdot \sin(x^2+1)$

VII 1. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (tg\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

Ex.

$tg(\underbrace{3x+1}_{u}) = \frac{(3x+1)'}{\cos^2(3x+1)} = \frac{3}{\cos^2(3x+1)}$

2. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow (\operatorname{ctg} u)' =$

$= -\frac{u'}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Ex.

$\operatorname{ctg}(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{u}) = -\frac{(x^2+2x+1)}{\sin^2(x^2-2x+1)} =$

$= -\frac{2x+2}{\sin^2(x^2-2x+1)}$

VIII 1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Ex.

$\arcsin \underbrace{2x}_{u} = \frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

IX 1. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{u^2+1}$

Ex.

$\left[\operatorname{arctg}(\underbrace{x+1}_{u})\right]' = \frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{x^2+2x+1+1} =$

$= \frac{1}{x^2+2x+2}$

2. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{u^2+1}$

* Exemple :

1) $f(x) = \sin^6 x$

$f'(x) = (\sin^6 x)' = [(\sin x)^6]' =$

$= 6 \sin^5 x \cdot (\sin x)' =$

$= 6 \sin^5 x \cdot \cos x$

2) $f(x) = \cos^3 x$

$f'(x) = (\cos^3 x)' = [(\cos x)^3]' =$

$= 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)' =$

$= -3 \cos^2 x \cdot \sin x$

3) $f(x) = \ln^7 x$

$f'(x) = (\ln^7 x)' = [(\ln x)^7]' =$

$= 7 \ln^6 x \cdot (\ln x)' =$

$= 7 \ln^6 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{7 \ln^6 x}{x}$

4) $f(x) = \ln^2 x$

$f'(x) = (\ln^2 x)' = [(\ln x)^2]' =$

$= 2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x}$

Teorema lui Rolle

Fie o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Dacă:

1. f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;
2. f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);
3. f are valori egale la capetele intervalului, $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a, b), $c \in (a, b)$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$

Corolar

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b) = 0$ (a, b sunt rădăcini pentru f).

Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$

Să se arate că funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)$ verifică condițiile teoremei lui Rolle și nu se aplică efectiv.

1. f continuă pe $[1,2]$ ca funcție elementară

2. f derivabilă pe $(1,2)$ ca funcție elementară

3. $\left.\begin{array}{l} f(1)=(1-1)(1-2)=0\cdot(-1)=0 \\ f(2)=(2-1)(2-2)=1\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\to f(1)=f(2)=0$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow$ f este funcție Rolle $\to$

$\to \exists$ cel puțin $c\in(1,2)$ a.î. $f'(c)=0$

$$f'(x)=\left[(x-1)(x-2)\right]'=(x-1)'(x-2)+(x-1)(x-2)'=$$

$$=x-2+x-1=2x-3$$

sau $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-2x-x+2=x^2-3x+2$

$$f'(x)=(x^2-3x+2)'=(x^2)'-(3x)'+2'=2x-3$$

$f'(c)=0 \iff 2c-3=0 \iff 2c=3 \iff c=\frac{3}{2}\in(1,2)$

Se consideră funcția $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1,0] \\ px^2 + 4x + 4, & x \in (0,1] \end{cases}, \quad m, n, p \in \mathbb{R}$$

Să se determine parametrii reali m, n, p astfel încât f să satisfacă condițiile de aplicabilitate ale teoremei lui Rolle pe $[-1,1]$. Pentru m, n, p astfel determinați să se aplice efectiv proprietatea.

1) Continuitatea: f continuă pe $[-1,1]$

f continuă pe $[-1,1] - \{0\}$ ca funcții elementare

Punem condiția f continuă în „0" $\Rightarrow$

$\Rightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ (a)

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (x^2 + mx + n) =$$

$$= 0^2 + m \cdot 0 + n = n$$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (px^2 + 4x + 4) =$$

$$= p \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(0) = 0^2 + m \cdot 0 + n = n$$

Din (a) $\Rightarrow m = 4$

b) Derivabilitatea: f derivabilă pe $(-1,1)$

f derivabilă pe $(-1,1)\setminus\{0\}$ ca funcție elementară.

Punem condiția f derivabilă în „0"

$\Rightarrow f'_s(0) = f'_d(0)$ (b)

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2+mx+4-4}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2+mx}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{ned}}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x(x+m)}{x}^{(x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x+m) = 0+m = m$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{px^2+4x+4-4}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{px^2+4x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{ned}}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x(px+4)}{x}^{(x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (px+4)$$

$= p\cdot 0 + 4 = 4$

Din b) $\Rightarrow m = 4$

3) $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1)^2 + m \cdot (-1) + n = p \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 4 + 4 = p + 4 + 4 \Leftrightarrow p + 8 = 1$

$\Leftrightarrow p = 1 - 8 \Leftrightarrow p = -7$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow m = n = 4;\ p = -7$

Șirul lui Rolle

Reprezintă o modalitate cu ajutorul căreia se poate determina nr. rădăcinilor reale ale unei ecuații precum și intervalele în care se găsesc acestea.

• Etape în formarea șirului Rolle:

1. Se precizează domeniul de definiție al ecuației $f(x) = 0$, funcția $f: D \to \mathbb{R}$ fiind presupusă derivabilă.

2. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și se așează în ordine crescătoare rădăcinile date.

3. Se calculează valorile funcției în zerourile derivate precum și limitele în capetele domeniului D (la stânga și la dreapta intervalului).

4. Se realizează un tabel de forma

x	Domeniu de def + zerourile derivatei
$f(x)$	semnele limitelor în capetele D precum și semnele zerourilor derivatei

5. Interpretarea tabelului

a) Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate identice atunci în acel interval nu există rădăcini reale ale ecuației $f(x) = 0$.

b) Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite atunci ecuația $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în acel interval.

c) Dacă în șirul lui Rolle apare 0, atunci x'_k este rădăcină multiplă a ecuației $f(x)=0$, iar în intervalele (x'_{k-1}, x'_k), (x'_k, x'_{k+1}) ecuația nu mai are rădăcini.

Exemple:

1) Să se determine nr. de rădăcini reale ale ecuației $3x^4-8x^3-6x^2+24x-10=0$.

fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-10$

f derivabilă ca funcție elementară (polinomială)

$$f'(x)=(3x^4-8x^3-6x^2+24x-10)'=$$

$$=(3x^4)'-(8x^3)'-(6x^2)'+(24x)'-10'=$$

$$=12x^3-24x^2-12x+24$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x^2-12x+24=0 \quad |:12$$

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 10)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) - 10 =$$

$$= -29$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 10 = 3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 10 =$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 10)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 3x^4 = +\infty$$

Situl lui Rolle

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

Din tabel $\Rightarrow$ 4 rădăcini reale:

$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (-1, 1)$; $x_3 \in (1, 2)$

$x_4 \in (2, +\infty)$

2) Să se discute după valorile parametrului real a numărul de rădăcini ale ecuației $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a = 0$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a$ derivabilă ca funcție elementară (polinomială);

$$f'(x) = (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a)' =$$

$$= (x^4)' - (4x^3)' - (2x^2)' + (12x)' + a' =$$

$$= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

Rez. ec. $f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0 \mid :4$

$\iff x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \iff x^2(x-3) - (x-3) = 0$

$\iff (x-3)(x^2-1) = 0 \iff x - 3 = 0 \iff \underline{x_1 = 3}$

sau

$x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff$

$\iff \underline{x_2 = 1}$

sau

$\underline{x_3 = -1}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 = (-\infty)^4 = +\infty$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 +$$
$$+ 12 \cdot (-1) + a = a - 9$$

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + a =$$
$$= a + 7$$

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + a = a - 9$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^4 = \infty^4 = +\infty$$

$a - 9 = 0 \iff a = 9$

$a + 7 = 0 \iff a = -7$

$-\infty \quad -7 \quad 9 \quad +\infty$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$a-9$	$a+7$	$a-9$	$+$	CONCLUZII
$a < -7$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (3, +\infty)$ $x_3, x_4 \in \mathbb{C}$
$a = -7$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 = x_3 = 1$ $x_4 \in (3, +\infty)$
$-7 < a < 9$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (-1, 1)$; $x_3 \in (1, 3)$; $x_4 \in (3, +\infty)$
$a = 9$	$+$	0	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = -1$ $x_3 = x_4 = 3$
$a > 9$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ $x_1 = \overline{x_2}$; $x_3 = \overline{x_4}$

• Mediana unui Δ este segmentul de dreaptă care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse al acestuia.

↳ Toate cele 3 mediane ale unui triunghi sunt concurente în același punct notat de obicei cu G și numit centrul de greutate al ΔABC. El este situat la $\frac{2}{3}$ față de vârf și $\frac{1}{3}$ față de latura opusă în lungimea fiecărei mediane în parte.

Rolul derivatei I pentru stabilirea monotoniei

Fie $f: E \to \mathbb{R}$, E interval, o funcție derivabilă.

1) Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este ~~descrescătoare~~ crescătoare pe E;

2) Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este descrescătoare pe E;

Dar

1') Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict crescătoare pe E;

2') Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict descrescătoare pe E.

Pentru stabilirea semnului unei funcții, este foarte utilă și teorema:

O funcție continuă care nu se anulează pe un interval, păstrează semn constant pe tot intervalul.

Semnul unei funcții este foarte util și în rezolvarea inecuațiilor.

Exemple:

1) $x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$ este continuă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară.

Rez. ec. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

<u>După rezolvare</u> soluțiile sunt:

$x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$;

Deoarece f este continuă și nu se anulează pe niciunul din intervalele:
$(-\infty; -4)$; $(-4, 2)$; $(2, 3)$; $(3; +\infty)$
atunci funcția are semn constant pe fiecare interval în parte.

Fie $x = -5 \in (-\infty, -4)$

$f(\cancel{x}5) = -56 < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in (-\infty, 4)$

Fie $x = 0 \in (-4, 2) \Rightarrow f(0) = 24 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in (-4, 2)$

Cum $-4, 2, 3$ sunt rădăcini simple, atunci:

$f(x) < 0, \forall x \in (2, 3)$;

$f(x) > 0, \forall x \in (3, +\infty)$;

Aceste rezultate le putem scrie sub forma unui tabel de semn al funcției:

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Din tabel $\Rightarrow f(x) < 0$

pt. $\forall x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$

2) Să se precizeze intervalele de monotonie pentru funcția:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 8x^2$,

f derivabilă ca funcție elementară

$f'(x) = (x^4 - 8x^2)' = (x^4)' - (8x^2)' =$

$= 4x^3 - 8 \cdot 2x = \underline{4x^3 - 16x}$

Rez. ec. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow$ $\quad 1:4$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

sau

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Cum $f'(x)$ e continuă pe $(-\infty, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$; $(2; +\infty)$ și soluțiile ec. $f'(x) = 0$ sunt simple atunci f păstrează semn constant pe fiecare din intervale. E suficient să calculăm pt. un interval și apoi alternăm semnele.

Fie $x = -1 \in (-2, 0)$

$f'(-1) = \cancel{(-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 = 1 - 8 = -7 < 0}$

$= 4 \cdot (-1)^3 - 16 \cdot (-1) = 4 + 16 = 20$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

Din tabel $\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pt.
$x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

f este strict ~~descrescătoare~~ crescătoare pt.
$x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

Demonstrarea unor inegalități
cu ajutorul derivatelor

Fie $f: A \to B$

I) Monotonia

a) f s.n. monotonă dacă este crescătoare sau descrescătoare.

b) f s.n. strict monotonă dacă este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

II

a) f s.n. cresc $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) f s.n. s.c. $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

III

a) f s.n. descr. $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

b) f s.n. strict descr. $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Semnul funcției de gradul I -

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Se rez. ec. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		semn contrar a	0	semn a	

Subject:

Să se demonstreze inegalitățile:

1) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 4 > 0, \forall x > 1$

$\Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

fie $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x + 4)' =$

$= (2x^3)' + (3x^2)' - (12x)' + 4' =$

$= 6x^2 + 6x - 12$

Am obținut $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Rez. ec. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad |:6$

$x^2 + x - 2 = 0$

$a = 1, \; b = 1, \; c = -2$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{-1 + 3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

x	1					$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7 = 2 + 3 - 12 + 7 = 0$

Din tabel $\Rightarrow$ f strict crescător

atunci pt $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0$

2) $\frac{x}{e} \geq \ln x$, $\forall x > 0$, $\Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

$\frac{x}{e} \geq \ln x \Leftrightarrow \frac{x}{e} - \ln x \geq 0$

fie $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \frac{x}{e} - \ln x$

$f'(x) = \left(\frac{x}{e} - \ln x\right)' = \left(\frac{x}{e}\right)' - (\ln x)' =$

$= \frac{1}{e} x' - \frac{1}{x} = \frac{x/1}{e} - \frac{e/1}{x} = \frac{x - e}{ex}$

Am obținut $f'(x) = \frac{x-e}{ex}$

$x > 0 \ / \cdot e \iff e \cdot x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Semnul $f'(x)$ depinde de „$x-e$"

Rez. ec. $f'(x) = 0 \iff \frac{x-e}{ex} = 0 \iff$

$\iff x - e = 0 \iff x = e$

x	0			e			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$f(e) = 0$		$\nearrow$	

$f(e) = \frac{e}{e} - \ln e = 1 - 1 = 0$

Din tabel $\Rightarrow x = e$ punct de minim absolut $\Rightarrow f(x) \geq f(e) \iff \frac{x}{e} - \ln x \geq 0 \iff \frac{x}{e} \geq \ln x$

• Arătați că $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$ este convexă, pentru $\forall\, x>0$.

$$f'(x)=(x\ln x)'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$$
$$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=(\ln x+1)'=$$

$$=(\ln x)'+1'=\frac{1}{x}$$

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$, $\forall\, x>0 \Rightarrow f$ convexă, $\forall\, x>0$

Asimptote

Calculați asimptotele funcției:

$f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$

1) Asimptote orizontale

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{x-2} \underset{\text{ned L'H}}{\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+3)'}{(x-2)'} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1} = -\infty \Rightarrow f \text{ nu are A.O. spre } -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x-2} \underset{\text{ned L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+3)'}{(x-2)'} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1} = +\infty \Rightarrow f \text{ nu are A.O. spre } +\infty$$

2) Asimptote oblice

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{x(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{x^2-2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{ned}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\to 0}}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-2} - \frac{x-2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{x-2} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{\underset{\text{ned}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)^{\to 0}}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)_{\to 0}} = 2 = n$$

Dreapta $y = mx + n \Leftrightarrow y = x+2$ este A.O. spre $-\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m \quad (\ldots)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx\right] = 2 = n \quad (\ldots)$$

Dreapta $y = mx + n \Leftrightarrow y = x+2$ este A.O. spre $+\infty$

3) Asimptote verticale

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x^2+3}{x-2} = \frac{7}{0_-} = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2$ este A.V. la stânga

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x^2+3}{x-2} = \frac{7}{0_+} = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2$ este A.V. la dreapta

Cazuri de nedeterminare care se reduc la L'H

1. Caz $0 \cdot (\pm\infty)$; vom folosi scrierea:

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{sau} \quad f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

Ex. $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x \underset{\text{ned.}}{\overset{0 \cdot (-\infty)}{=\!=}} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{ned L'H}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}}$

$$= \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{1} = -\lim_{x \searrow 0} x = 0$$

2. Caz $\infty - \infty$; vom folosi scrierea:

$$f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) \quad \text{sau} \quad f - g = g\left(\frac{f}{g} - 1\right)$$

Ex. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \ln x) \underset{\text{ned.}}{\overset{\infty - \infty}{=\!=}} \lim\limits_{x \to \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$

$= +\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{ned L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}} \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. Caz 0^0, ∞^0, 1^∞; vom folosi scrierea:

$$f^g = e^{g \ln f}$$

Ex. $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x \overset{0^0}{\underset{\text{ned.}}{=}} \lim\limits_{x \searrow 0} e^{x \ln x} =$

$= e^{\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$

Primitive

I Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x; & x \le 0 \\ \ln(x+1) + \sin x; & x > 0 \end{cases}$ admite primitive.

a) f cont. pe $(-\infty, 0)$ ca funcție elementară

b) f cont. pe $(0, +\infty)$ ca operații de funcții elementare

c) Studiem continuitatea în $x = 0$

$l_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} x = 0$

$l_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} [\ln(x+1) + \sin x] = 0 + 0 = 0$

$f(0) = 0$

$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f$ continuă în 0

Din a), b), c) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~f continuă~~ f admite primitive pe $\mathbb{R}$

II Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 3 - \frac{1}{x}$

Determinați primitiva $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 3$

Mulțimea primitivelor lui f este

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3 - \frac{1}{x})\,dx =$

$= \int 3\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = 3x - \ln|x| + C$

Am obținut: $F(x) = 3x - \ln|x| + C$

$F(1) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 1 - \ln|1| + C = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - \ln 1 + C = 3 \Leftrightarrow C + 3 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = 3x - \ln|x| + 0$

• Fie funcțiile $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-2x^2 - 1)e^{-2x}$:

III Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

F e o primitivă a f dacă

1) F derivabilă pe $\mathbb{R}$ (A) ca operații de funcții elementare

2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = \left[(x^2 + x + 1) \cdot e^{-2x}\right]' =$$

$$= (x^2 + x + 1)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + x + 1) \cdot (e^{-2x})' =$$

$$= (2x + 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2x)' =$$

$$= (2x + 1) \cdot e^{-2x} - 2(x^2 + x + 1) \cdot e^{-2x} =$$

$$= \left[2x + 1 - 2(x^2 + x + 1)\right] e^{-2x} =$$

$$= (\cancel{2x} + 1 - 2x^2 - \cancel{2x} - 2)\, e^{-2x} =$$

$$= (-2x^2 - 1) \cdot e^{-2x} = f(x)$$

IV Arătați că orice primitivă a funcției f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) = (-2x^2 - 1) \cdot e^{-2x} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$

$e^{-2x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Arăt $-2x^2 - 1 < 0$

V1 $-2x^2 - 1 = 0$

$a = -2, \ b = 0, \ c = -1$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) =$

$= -8 < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

x	$-\infty$				$+\infty$
$-2x^2-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Din tabel $\Rightarrow -2x^2 - 1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

V_2 $-2x^2-1 = -(2x^2+1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \overset{|\cdot 2}{\Rightarrow} 2x^2 \geq 0 \; |+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+1 \geq 0 \Rightarrow 2x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Am obținut:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-2x} > 0 \\ -2x^2-1 < 0 \end{array} \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow e^{-2x}(-2x^2-1) < 0$$

V_3 $-x^2 \leq 0 \; |\cdot 2 \Rightarrow -2x^2 \leq 0 \; |-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2-1 \leq -1 < 0 \Rightarrow -2x^2-1 < 0$

$\underline{V}$ Arătați că funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$

$F''(x) = (F'(x))' = (f(x))' =$

$= [(-2x^2-1)\cdot e^{-2x}]' = (-2x^2-1)'\cdot e^{-2x} +$

$+ (-2x^2-1)\cdot(e^{-2x})' =$

$= -4x\cdot e^{-2x} + (-2x^2-1)\cdot e^{-2x}\cdot(-2x)' =$

$= -4x\cdot e^{-2x} - 2(-2x^2-1)\cdot e^{-2x} =$

$= [-4x - 2(-2x^2-1)]\cdot e^{-2x} =$

$\cancel{= [-4x - 2(-2x^2-1)]\cdot e^{-2x} =}$

$\cancel{= [-4x - 2(-2x^2-1)]\cdot e^{-2x}}$

$= (-4x + 4x^2 + 2) \cdot e^{-2x} =$

$= (4x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-2x} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ convexă pe $\mathbb{R}$

$e^{-2x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

$4x^2 - 4x + 2 = 0 \quad | : 2$

$2x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 2, \ b = -2, \ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 < 0$

x	$-\infty$				$+\infty$
$4x^2-4x+2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Din tabel $\Rightarrow 4x^2 - 4x + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (2)$

Din $(1), (2) \Rightarrow e^{-2x}(4x^2 - 4x + 2) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Integrale

$$\cdot \int \frac{1}{x^2-25}\,dx = \int \frac{1}{x^2-5^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 5} \ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + c = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + c$$

$$\cdot \int \frac{1}{4x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{4\left(x^2-\frac{9}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\frac{9}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}} \ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} \ln\left|\frac{\frac{2x-3}{2}}{\frac{2x+3}{2}}\right| + c = \frac{1}{12} \ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + c$$

$$\cdot \int \frac{1}{x^2-5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-(\sqrt{5})^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c$$

$$\cdot \int \frac{x}{x^2+25}\,dx =$$

V_1 $$\left[\ln(x^2+25)\right]' = \frac{(x^2+25)'}{x^2+25} = \frac{2x}{x^2+25}$$

Am obținut $\left[\ln(x^2+25)\right]' = \frac{2x}{x^2+25} \xrightarrow[\text{integrare}]{\text{prin}}$

$$\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx = \int \left[\ln(x^2+25)\right]' dx$$

$$2\int \frac{x}{x^2+25}\,dx = \ln(x^2+25)$$

$$\int \frac{x}{x^2+25}\,dx = \frac{\ln(x^2+25)}{2} + C$$

— — —

$$\cdot \int \frac{x^2}{x^2+25}\,dx = \int \frac{x^2+25-25}{x^2+25}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^2+25}{x^2+25} - \frac{25}{x^2+25}\right) dx =$$

$$= \int 1\,dx - 25\int \frac{1}{x^2+5^2}\,dx =$$

$$= x - 25\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C =$$

$$= x - 5\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C$$

V2 $\quad J = \int \frac{x}{x^2+25}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx$

$x^2+25 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$J_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + c$

$J = \frac{1}{2}\ln|x^2+25| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+25) + c$

→ Formula de integrare prin părți:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Ecuația unei drepte care trece prin două puncte de coordonate date (A, B)

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

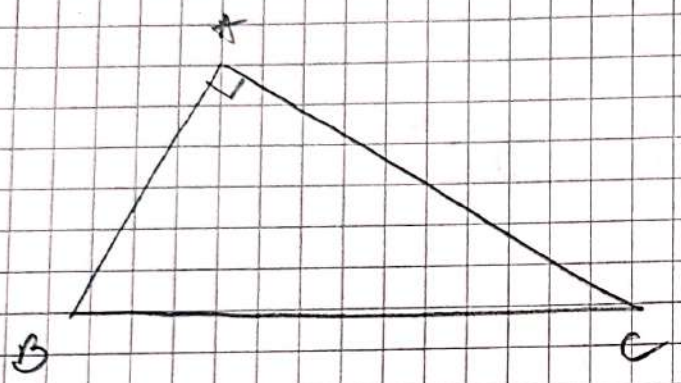
Aria unui ΔABC

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Triunghiul dreptunghic

Definiție: Triunghiul dreptunghic este triunghiul cu un unghi drept.



$m(\hat{A}) = 90^\circ$

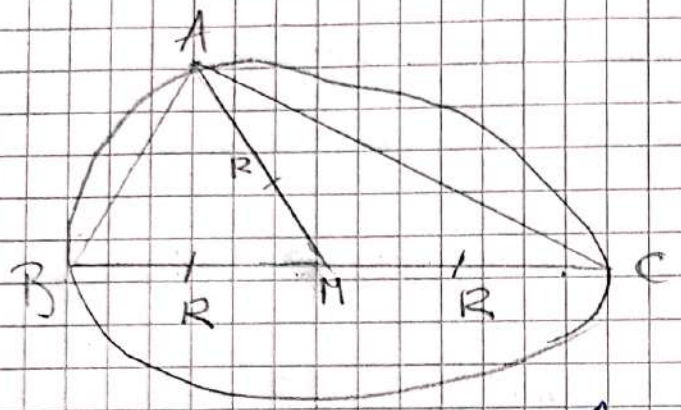
sau

$A = \frac{\pi}{2}$

→ Catetele sunt laturile care formează unghiul de 90°: [AB], [AC]

→ Ipotenuza este latura care se opune unghiului de 90°: [BC]

· Teoreme în triunghiul dreptunghic:



1) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90^\circ$

sau

$A + B = \frac{\pi}{2}$

2) Teorema lui Pitagora:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

3) Reciproca teoremei lui Pitagora:

- Dacă într-un Δ, suma lungimii pătratelor a două dintre laturi este egală cu lungimea pătratului celei de a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghi.

Exemplu:

Stabiliți natura $\triangle MNP$, dacă:

$MN = 3$, $NP = 4$, $MP = 5$

$$\left.\begin{array}{l} MN = 3 \Rightarrow MN^2 = 9 \\ NP = 4 \Rightarrow NP^2 = 16 \\ MP = 5 \Rightarrow MP^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow MN^2 + NP^2 = MN^2 + NP^2 = MP^2 \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{R.T. Pitagora}}$ $\triangle MNP$ dreptunghic, $m(\sphericalangle N) = 90°$

4) Teorema medianei

fie M mijlocul $[BC]$ $\Rightarrow$ $[AM]$ mediană

$\triangle ABC$ dreptunghic în A $\Rightarrow$

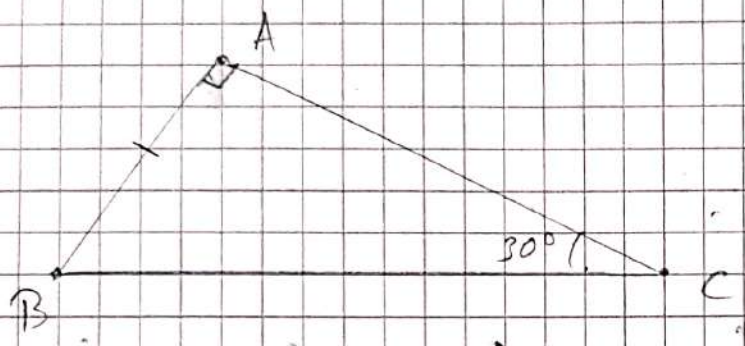
$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$

Obs. $AM = BM = MC = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = R$

(raza cercului circumscris $\triangle ABC$)

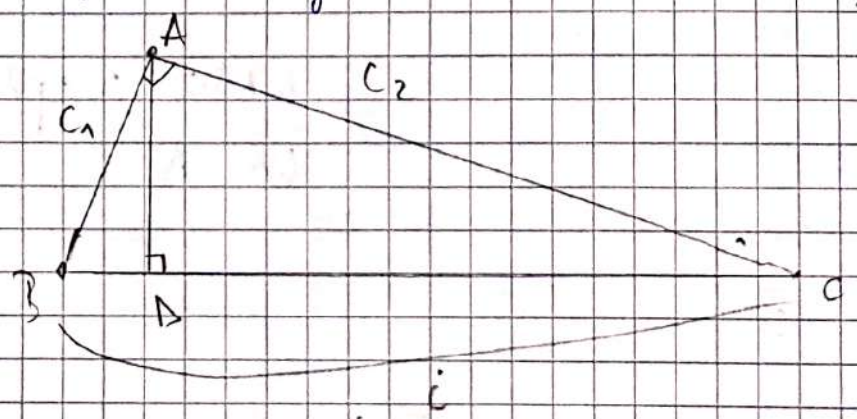
5) Teorema $\measuredangle 30^\circ$

Dacă într-un Δ dreptunghic, măsura unui unghi este de 30° atunci cateta care se opune $\measuredangle$ de 30° este jumătate din ipotenuză.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ dreptunghic în } A \\ m(\hat{C}) = 30^\circ\end{array}\right\} \overset{T\measuredangle 30^\circ}{\Longrightarrow} AB = \frac{BC}{2}$$

6) Formulă înălțimii dusă din vârful unghiului drept



$$\left.\begin{array}{l}\text{Ducem } AD \perp BC \Rightarrow [AD] \text{ înălțime} \\ \Delta ABC \text{ dr. în } A\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{i}$$

7) Aria Δ dreptunghic

Este semi-produsul catetelor:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

8) Funcțiile sin, cos, tg, ctg

$$\sin x = \frac{c.o.}{c}$$

$$\cos x = \frac{c.a.}{c}$$

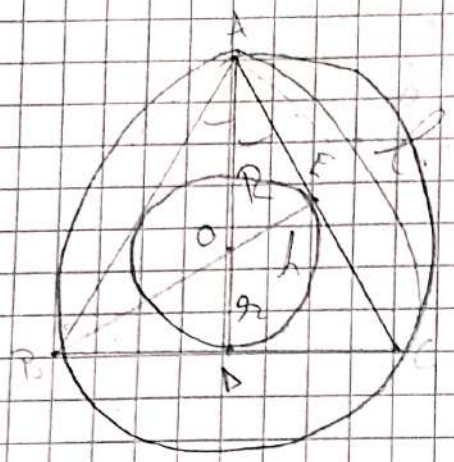
$$tg\ x = \frac{c.o.}{c.a.} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$ctg\ x = \frac{c.a.}{c.o.} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

c.o. = cateta opusă

c.a. = cateta alăturată

Triunghiul echilateral



1) $AD \perp BC \Rightarrow [AD]$ înălțime

$AD = h$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot h$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot h$$

Obs: La Δ echilateral, toate centrele coincid.

$$O = G = I = H$$

O se găsește la intersecția mediatoarelor și este centrul cercului circumscris ΔABC.

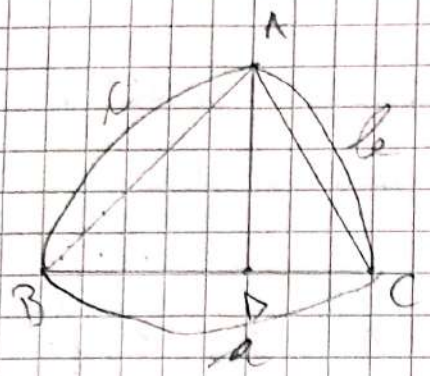
G se numește centru de greutate și se află la intersecția medianelor.

I se numește centrul cercului înscris ΔABC și se află la intersecția bisectoarelor.

H se numește ortocentru și se află la intersecția înălțimilor ΔABC.

2) $A_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Triunghiul oarecare



$AB \neq BC \neq AC \neq AB$

1) Formule pentru arie

a) Ducem $AD \perp BC \Rightarrow [AD]$ înălțime

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$$

b) $$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$$

c) Formula lui Heron

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$\downarrow$

semiperimetru

· Indicații:

Până să aplicăm formula lui Heron, verificăm dacă Δ e dreptunghic cu R.T.P.

· Exemplu:

-> Calculați aria ΔMNP dacă:

a) $MN = 3$, $NP = 4$, $MP = 5$

$$p = \frac{MN + NP + MP}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$p - MN = 6 - 3 = 3$$

$$p - MP = 6 - 5 = 1$$

$$p - NP = 6 - 4 = 2$$

Din Heron =>

$$\Rightarrow A_{\Delta MNP} = \sqrt{p(p-MN)(p-MP)(p-NP)} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$$

b) $MN = \sqrt{3}$, $MP = \sqrt{2}$, $NP = \sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l} MN = \sqrt{3} \Rightarrow MN^2 = 3 \\ MP = \sqrt{2} \Rightarrow MP^2 = 2 \\ NP = \sqrt{5} \Rightarrow NP^2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow MN^2 + MP^2 = NP^2 \Leftrightarrow$$

$\xrightarrow{R.T.P.}$ ΔMNP dreptunghic, $m(\hat{M}) = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\Delta MNP} = \frac{MN \cdot MP}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2) Formule pentru R, r

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A_{\Delta ABC}} \; ; \quad r = \frac{A_{\Delta ABC}}{p}$$

unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

- Completare - Vectori

1. Produsul scalar a 2 vectori

fie $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$

$\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Obs: Din egalitățile a), b) putem exprima $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

- Dacă $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) > 0 \Rightarrow \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ ascuțit
- Dacă $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 0 \Rightarrow \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ obtuz

2. Condiția de perpendicularitate a 2 vectori:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

3. Panta unui vector:

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow m_{\vec{u}} = \frac{y}{x}$

· Exemplu:

Fie $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$,

Stabiliți natura ∡ format între $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + \vec{j}) =$

$= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = \underline{\underline{1}}$ (1)

$|\vec{u}| = |2\vec{i} + 3\vec{j}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |-\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

$= \sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \underline{\underline{1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\overset{\sqrt{26}}{1}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ ascuțit

Continuitatea și derivabilitatea
(exerciții)

1. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x; & x \le 2 \\ 6x - 4; & x > 2 \end{cases}$$

· Continuitatea

pt. $x < 2 \Rightarrow f$ continuă ca funcție elementară (1)

pt. $x > 2 \Rightarrow f$ continuă ca funcție elementară (2)

Studiem continuitatea în $x = 2$

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x^2 + 2x) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$$

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (6x - 4) = 6 \cdot 2 - 4 = 12 - 4 = 8$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$$

$l_s(2) = l_d(2) = f(2) = 8 \Rightarrow f$ continuă în $x = 2$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$

· Derivabilitatea

pt. $x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = (x^2 + 2x)' =$
$= (x^2)' + (2x)' = 2x + 2$

pt. $x > 2 \Rightarrow f(x) = 6x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = (6x-4)' = (6x)' - 4' = 6$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 \; ; \; x \leq 2 \\ 0 \; ; \; x > 2 \end{cases}$$

pt. $x < 2 \Rightarrow f$ derivabilă ca funcție elementară (1)

pt. $x > 2 \Rightarrow f$ derivabilă ca funcție elementară (2)

Studiem derivabilitatea în $x = 2$

$f'_s(2) = \lim\limits_{x \nearrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 2} (2x+2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$f'_d(2) = \lim\limits_{x \searrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} 6 = 6$

$f'_s(2) = f'_d(2) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ derivabilă în $x = 2$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow f$ derivabilă pe $\mathbb{R}$

2. a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f:[-4;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+4}$ în punctul $M(0;2)$.

Ecuația tangentei la G_f în punctul $M(x_0; f(x_0))$ este:

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Din $M(0,2) \Rightarrow x_0 = 0$; $f(x_0) = f(0) = 2$

$$f'(x) = \left(\sqrt{\underbrace{x+4}_{u}}\right)' = \frac{(x+4)'}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$t: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 0)$$

$$t: y = \frac{1}{4}x + 2$$

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
Scrieți ecuația tangentei la G_f (funcției) f în punctul $x = 2$.

$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 0^3 + 0 = 0$

$f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

$f'(x_0) = f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$

Ecuația tangentei la G_f în punctul $x_0 = 0$ este:

$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$t: y - 0 = 1(x - 0)$

$t: y = x$

c) Pe parabola $f(x) = x^2 - 7x + 3$ să se determine un punct în care tangenta la parabolă să fie paralelă cu dreapta $y = -5x + 3$ și să se scrie ecuația tangentei.

fie $A(x_0, f(x_0))$ un astfel de punct

Panta tangentei în punctul A este:

$m_t = f'(x_0)$

$f'(x) = (x^2 - 7x + 3)' = 2x - 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 7 = m_t$

$d: y - 5x + 3 \Rightarrow m_d = -5$

$t \parallel d \Leftrightarrow m_t = m_d \Leftrightarrow 2x_0 - 7 = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) =$

$= f(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = 1 - 7 + 3 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(1, -3)$

Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

→ Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$:

· Punctul „a" este punct de minim relativ (local) dacă există o vecinătate „V" a lui „a" astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \geq f(a)$.

· Punctul „a" este punct de maxim relativ (local) dacă există o vecinătate „V" a lui „a" astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \leq f(a)$.

→ Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I:

T_1) $f'(x) > 0$ (sau $f'(x) \geq 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f (strict) crescătoare

T_2) $f'(x) < 0$ (sau $f'(x) \leq 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f (strict) descrescătoare

→ Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3) - (3x)' + 2' =$

$= 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0$ (soluțiile acestei ecuații sunt puncte critice și pot fi eventualele puncte de extrem) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \quad |:3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$

sau

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$

Optional:

$f: \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) =$

$= \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^3 - 3x + 2) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty^3 = +\infty$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)=4$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

funcție strict descrescătoare pentru $x \in [-1, 1]$

funcție strict crescătoare pentru $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

punctul de maxim relativ este $x_1 = -1$

punctul de minim relativ este $x_2 = 1$

le) $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \; ; \; f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \iff$$

$$\iff 1 - \ln x = 0 \iff -\ln x = -1 \quad | \cdot (-1) \iff$$

$$\iff \ln x = \ln e \iff x = e$$

$\cancel{\iff x < e}$

$x^2 > 0, \; \forall \; x \in (0; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Semnul derivatei $f'(x)$ depinde de „$1 - \ln x$"

$$1 - \ln x > 0 \iff -\ln x > -1 \quad | \cdot (-1) \iff$$

$$\iff \ln x < 1 \iff \ln x < \ln e \iff x < e$$

$$1 - \ln x < 0 \iff x > e$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \ln x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -\infty \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{med } L'H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$ $+$	0	$-$ $-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(e) = \frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

pentru $x \in (0; e) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ funcție strict crescătoare

pentru $x \in (e; +\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ funcție strict descrescătoare

$x = e$ este punct de maxim absolut

Observație: $f(e) = \frac{1}{e}$ este valoarea maximă a funcției $\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}$

Rolul derivatei a doua

Funcția derivabilă $f: I \to \mathbb{R}$ se numește convexă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub grafic și se numește concavă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află deasupra acestuia.

Teoremă:

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci:

1) f este convexă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

2) f este concavă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.

Pași de rezolvare:

a) se calculează derivata a doua (f'').

b) se rezolvă ecuația „$f''(x) = 0$".

c) se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn.

d) se stabilește dacă funcția e concavă sau convexă în funcție de semn

Obs! Dacă are semne diferite de o parte și de alta a unui punct x_0 din I și dacă f e continuă în x_0, atunci x_0 se numește punct de inflexiune.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \iff 6x - 6 = 0 \iff 6x = 6 \iff x = 1$

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\cap$		$f(1)$		$\cup$	

Din tabel $\Rightarrow$

(i) f concavă pentru $x \in (-\infty, 1]$

(ii) f convexă pentru $x \in [1, +\infty)$

$x = 1$ punct de inflexiune

Asimptote
- teorie -

Asimptotele sunt drepte care ne folosesc pentru studiul comportamentului ramurilor infinite ale graficelor funcțiilor. Aceste drepte numite asimptote, au proprietatea că ramurile infinite ale graficelor se apropie oricât de mult de ele.

Asimptotele pot fi împărțite în două clase: asimptote verticale (paralele cu axa Oy) și asimptote oblice (neparalele cu axa Oy). Dintre asimptotele oblice ne deosebim asimptotele orizontale (paralele cu axa Ox).

1. Asimptotele oblice

Fie funcția $f:(a;+\infty)\to\mathbb{R}$. Spunem că dreapta „d" de ecuație $y=mx-n$ e asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru graficul funcției f dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx-n)=0$.

Dacă $m\neq 0$, asimptota se numește oblică spre $+\infty$, iar dacă $m=0$, asimptota se numește asimptotă orizontală spre $+\infty$.

• Asimptota oblică și cea orizontală se exclud reciproc!

Analog se definește asimptota oblică și orizontală spre $-\infty$.

<u>Teoremă</u>

Dreapta d de ecuație $y = mx + n$ e asimptotă spre $+\infty$ pentru graficul funcției f dacă și numai și numai dacă

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ și } n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

Determinarea asimptotelor oblice:

a) Dacă $\lim_{x \to \infty} f(x) = n$, $n \in \mathbb{R}$ (finit), atunci dreapta $y = n$ e asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) Dacă $\lim_{x \to \infty} f(x)$ nu e finită, atunci:

-> dacă „m" și „n" există și sunt finite, atunci dreapta „y" e asimptotă oblică spre $+\infty$

-> dacă cel puțin una din limitele „m" și „n" este infinită sau nu există, atunci nu este asimptotă spre $+\infty$.

Analog se determină asimptotele spre $-\infty$.

2. Asimptotele verticale

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, un punct de acumulare pentru D.
Spunem că dreapta d de ecuație $x = a$ e asimptotă verticală la stânga (dreapta) la graficul funcției dacă

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$$

respectiv

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x) - x$

1. Asimptote orizontale

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [\ln(1+e^x) - x] = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} [\ln(1+e^x) - x] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} [\ln(1+e^x) - \ln e^x] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \ln \frac{1+e^x}{e^x} =$$

$$= \ln \lim_{x \to \infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \ln 1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ e asimptotă orizontală la $+\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+e^x}{e^x} \underset{\text{ned } L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

2. Asimptote oblice

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)-x}{x} =$$

$$\underset{\text{ned } L'H}{\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln(1+e^x)-x]'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - 1}{1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{1+e^x} - 1 \right) = -1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(1+e^x) - x + x] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln 1 = 0 = n$$

Dreapta $y = mx + n \Rightarrow y = -x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$

3. Asimptote verticale

f nu are asimptote verticale pentru că domeniul de definiție al funcției este $\mathbb{R}$.

Sisteme

$S \longrightarrow$ C compatibil (are soluții) $\nearrow$ D determinat (are o soluție)

$\searrow$ N nedeterminat (are o ∞ de soluții)

$\downarrow$ I incompatibil (nu are soluții)

Scriem matricea sistemului $A = \ldots$

A e pătratică:

→ Calculăm $\det(A)$

↳ $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ S.C.D și se rezolvă Cramer

↳ $\det(A) = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.C.N.

↓

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(\bar{A}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.I.

A nu e pătratică:

→ Calc. $\text{rang}(A)$ apoi $\text{rang}(\bar{A})$

↳ $\text{rang}(A) = \text{rang}\,\bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.C.N.

↳ $\text{rang}\,A \neq \text{rang}\,\bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.I.

Sistem omogen:

→ Observăm că sistemul e omogen deci admite soluția nulă (0,0); (0,0,0) ---

Căutăm și alte soluții:

• Calc. rang A = rang $\bar{A}$ ⇒

⇒ S.C.N. – matrici neptratice

• Matricea e pătratică și det (A) ≠ 0 ⇒ Soluția nulă e singura sol.

*: Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă det (A) ≠ 0.

Ecuații iraționale

- exemple -

1) $\sqrt{x-5} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 3$

C.E. $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [5; +\infty) = D$

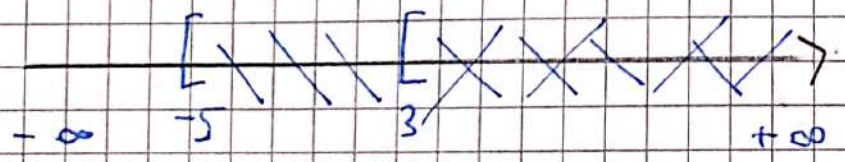
$\sqrt{x-5} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 5 = 9 \Leftrightarrow x = 14 \in D \Rightarrow S = \{14\}$

2) $\sqrt{x-3} = x + 5$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3; +\infty) = D_1 \\ x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5 \Leftrightarrow x \in [-5; +\infty) = D_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow x \in D_1 \cap D_2 = D_1$



$\sqrt{x-3} = x + 5 \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = (x+5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 28 = 0$

$a = 1$; $b = -9$; $c = 28$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = 81 - 112 = -31 < 0$

$\Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow S = \emptyset$

3) $\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x-3}$

V.

C.E.

$$x^2-4x+3 \geq 0$$

$$x-3 \geq 0 \iff x \geq 3 \iff$$

$$\iff x \in [3;+\infty) = D_2 \quad (2)$$

Rez. ec. $x^2-4x+3=0$

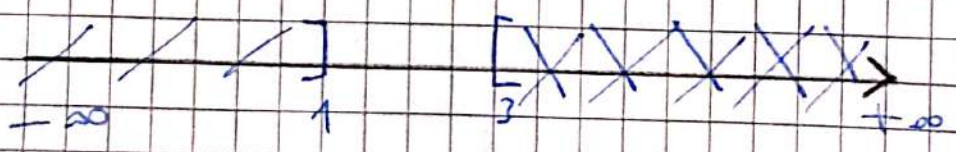
$$\Delta = 4$$

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 1$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Din tabel $\Rightarrow x \in (-\infty,1] \cup [3;+\infty) = D_1 \quad (1)$

Din (1), (2) $\Rightarrow x \in D_1 \cap D_2 = D_2$



$$\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3 = x-3 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Delta = 1$$

$x_1 = 2 \notin D_2$; non convient

$x_2 = 3 \in D_2$

$$S = \{3\}$$

V2 $\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x-3}$

C.E.

$x^2-4x+3 \geq 0$

$x-3 \geq 0$

$\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x-3}$ ... $x_1 = 2$

$x_2 = 3$

Verificare $x = 2$ în C.E.

$2 - 3 = -1 \geq 0$ F

Verificare $x = 3$ în C.E.

$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \geq 0$ A

$3 - 3 = 0 \geq 0$ A

$S = \{3\}$

4) $\sqrt[3]{x+1} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow S = \{7\}$

Ecuații Exponențiale
- continare -

Rezolvarea lor constă în a le aduce în aceeași bază ca apoi să le egalăm exponenții. De aceea, le vom aduce la aceeași bază prin descompunerea bazelor.

Modele

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow g(x)$

Ex. a) $2^x = 128 \Leftrightarrow 2^x = 2^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow S = \{7\}$

b) $9^{2x+1} = 81 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^2)^{2x+1} = 3^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2(2x+1)} = 3^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(2x+1) = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) a) $2^{3x} = 1 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

$c_2)$ $5^x = 2^x \,/ : 2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5^x}{2^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

d) $5^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \Leftrightarrow 5^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{2x} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-2/3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

e) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left(\dfrac{25}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left(\dfrac{5^2}{2^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right]^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}\right]^4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4\}$

2) - - -

3) Ecuații cu factor comun

Folosim formulele:

- $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
- $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

Exemple:

a) $2^x + 2^{x+3} = 36 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 8 = 36 \Leftrightarrow 2^x(1+8) = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot 9 = 36 \mid :9 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

b) $2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot 2 - 2^x + \frac{2^x}{2^2} - \frac{2^x}{2^3} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x\left(2 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = 9$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot \left(\frac{8}{1} + \frac{2}{4} - \frac{1}{8}\right) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{8+2-1}{8} = 9 \Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{9}{8} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 9 \cdot \frac{8}{9} \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

4) Ecuații prin substituție

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^{x} + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{x} \cdot 3^{x} + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \quad | : 3^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \cdot \frac{2^{x} \cdot 3^{x}}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \frac{2^{x}}{3^{x}} + 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^{2} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t > 0$$

$$3t^{2} - 5t + 2 = 0$$

$$a = 3 \; ; \; b = -5 \; ; \; c = 2$$

$$\Delta = b^{2} - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^{2} - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 > 0$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > 0$$

pt. $t = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x = 0$

pt. $t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$

$$S = \{0, 1\}$$

Legi de compoziție

→ Se dă $(G, \circ)$

1) Asociativitatea

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; $\forall x, y, z \in G$

2) Comutativitatea

$x \circ y = y \circ x \quad \forall \; x, y \in G$

3) Element neutru

$\exists \, e \in G$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$

4) Elemente simetrizabile

$x \in \mathbb{R}$ are simetric dacă
$\exists \; x' \in \mathbb{R}$ (simetricul x) a.î.
$x \circ x' = x' \circ x = e$

fie $f : (G, \circ) \to (G, *)$

① f se numește morfism dacă:

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G$$

② f se numește izomorfism dacă:

1) f e morfism

2) f e bijectivă

Ecuații logaritmice

C.E. $\log_{f(x)} g(x)$

$f(x) > 0$

$f(x) \neq 1$

$g(x) > 0$

Tipuri de ecuații:

I) $\log_a x = b \iff x = a^b$

Ex. (V1) $\log_2 x = 3 \iff x = 2^3 \iff x = 8 \in (0, +\infty) \Rightarrow S = \{8\}$

C.E. $x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$

(V2) $\log_2 x = 3 \iff \log_2 x = \log_2 2^3 \iff x = 2^3 \iff x = 8$

$\Downarrow$

C.E. $x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$ $\qquad S = \{8\}$

II) $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \iff$

$\iff f(x) = g(x)$;

... După impunerea C.E.

Ex.

$$\log_3 x + \log_3 (x+3) = \log_3 (x+24)$$

C.E. $x > 0 \iff x \in (0, +\infty) = D_1$ (1)

$x + 3 > 0 \iff x > -3 \iff x \in (-3; +\infty) = D_2$ (2)

$x + 24 > 0 \iff x > -24 \iff$

$\iff x \in (-24, +\infty) = D_3$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow x \in D_1 \cap D_2 \cap D_3 =$

$= (D_1 \cap D_2) \cap D_3 = D_1 \cap D_3 = D_1$

$\log_3 x + \log_3 (x+3) = \log_3 (x+24) \iff$

$\iff \log_3 x (x+3) = \log_3 (x+24) \iff$

$\iff x(x+3) = x + 24 \iff x^2 + 3x - x - 24 = 0 \iff$

$\iff x^2 + 2x - 24 = 0$

$\Delta = 4 + 96 = 100$

$x_1 = \frac{-2+10}{2} = 4 \in D_1$

$x_2 = \frac{-2-10}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \notin D_1$ nu convine

$S = \{4\}$

III Ecuații care se rezolvă prin substituție

$\lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0$

C.E. $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

$\lg x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = 1$

$t_1 = 2$

$t_2 = 1$

pt. $\begin{cases} t = 2 \Rightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Leftrightarrow x = 100 \in (0, +\infty) \\ t = 1 \Rightarrow \lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10 \in (0, +\infty) \end{cases}$ ($\log_{10} x$) -"-

$S = \{10, 100\}$

Inecuații exponențiale și logaritmice

- Inecuații exponențiale:

a) pt. $0 < a < 1$ avem:

$a^x \geq a^y \iff x \leq y$

b) pt. $a > 1$ avem

$a^x \geq a^y \iff x \geq y$

Ex.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{9} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff$

$\iff x \geq 2 \iff x \in [2, +\infty) \Rightarrow S = [2, +\infty)$

b) $7^{2x} > 43 \iff 7^{2x} > 7^2 \iff$

$\iff 2x > 2 \iff x > 1 \iff x \in (1, +\infty) \Rightarrow S = (1, +\infty)$

· Inecuații logaritmice

a) $0 < a < 1$

$\log_a x < \log_a y \iff x > y$

b) $a > 1$

$\log_a x < \log_a y \iff x < y$

$\log_{\frac{1}{2}} x > 2$

C.E. $x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff x < \frac{1}{4} \iff x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

$S = (0; +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$

Funcții

fie $f: A \to B$, o funcție

A se numește domeniul de definiție al funcției f (mulțime în care funcția ia valori)

B se numește codomeniul funcției f

① a) $G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}$

$\downarrow$

graficul funcției f

b) $\mathrm{Im} f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$; $\mathrm{Im} f \subseteq B$

$\downarrow$

imaginea funcției f

sau mulțimea valorilor f

Ex. Calc. $Im f$, G_f pt.

$f : \{-1, 0, 2\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x - 1$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$Im f = \{-3, -1, 3\}$;

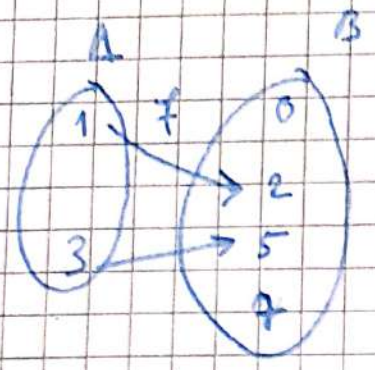
$G_f = \{(-1, -3); (0; -1); (2, 3)\}$

c) faptul că unui element $a \in A$ i se asociază sau îi corespunde un singur element $b \in B$ îl notăm cu $f(a) = b$

$f(a)$ se numește valoarea funcției f în a

b se numește imaginea lui a prin funcția lui f

Ex.



$f(1) = 2$

$f(3) = 5$

$f(1)$ se numește valoare funcției în 1

2 se numește imaginea lui 1 prin f

② $\boxed{A(a, b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b}$

$A(a, b)$ citim A de coordonate a și b

a se numește abscisa A

b se numește ordonata B

Ex a) Găsiți $m \in \mathbb{R}$ pt. care $A(1, m) \in G_f$ unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x + 5$

$A(1, m) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 \cdot 1 + 5 = m \Leftrightarrow m = 8$

b) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + 2$

Det. $a \in \mathbb{R}$ a.î. graficul funcției f să conțină punctul $A(2, 3)$

$A(2; 3) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a \cdot 2 + 3 = 3 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

c) Se dă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 5x - 2$
Det. un punct de pe graficul funcției f a cărui abscisă este egală cu ordonata sa.

Fie $A(a, a) \in G_f$ un astfel de punct $\Rightarrow f(a) = a \Leftrightarrow 5a - 2 = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

③ Compunere funcții

a) fie $f : A \to \underline{\underline{B}}$ și $g : \underline{\underline{B}} \to C$

În acest caz, are sens $(g \circ f)(x) =$
$= g(f(x))$

Gsn: $g \circ f : A \to C$

b) fie $f : A \to B$ și $g : B \to A$

Au sens compunerile:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ex.

Se dau funcțiile:

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - x$

$g(x) = 2x + 3$

a) Calc. $(f \circ g)(0)$; $(g \circ g)(1)$

b) Calc. $(g \circ f)(x)$; $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$

R:

a) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3) =$

$= 3^2 - 3 = 6$

$g(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) =$

$= 2 \cdot (x^2 - x) + 3 = 2x^2 - 2x + 3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) =$

$= (2x + 3)^2 - (2x + 3) =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - 2x - 3$

$= 4x^2 + 10x + 6$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - x) =$$
$$= (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) =$$
$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x =$$
$$= x^4 - 2x^3 + x$$

$\Rightarrow$ Funcție inversabilă

5) a) Funcția identică a unei mulțimi A este $1_A : A \to A$; $1_A(x) = x$
(elementul neutru pentru compunerea funcțiilor)

b) Funcția $f : \underline{A} \to \underline{B}$ este inversabilă dacă există o funcție
$g : \underline{\underline{B}} \to \underline{A}$ a.î. $g \circ f = 1_A$

$\to$ Nat. $g = f^{-1}$ (inversa f) $\quad \boxed{f \circ g = 1_B}$

$\to$ Inversa lui f se găsește din studiul surjectivității lui f

<u>Teoremă</u> f bijectivă $\Leftrightarrow$ f inversabilă

5) Funcții surjective, injective, bijective

a) Funcții injective

O funcție $f: A \to B$, este injectivă dacă are loc una din afirmațiile echivalente

1) Def. $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2) Din $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 = x_2$

Teoremă fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă. Atunci f e injectivă

b) Funcții surjective

1) Def. O funcție $f: A \to B$ este surjectivă $(\Rightarrow)$ $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$

2) Funcția $f: A \to B$ e surjectivă $(\Leftrightarrow)$

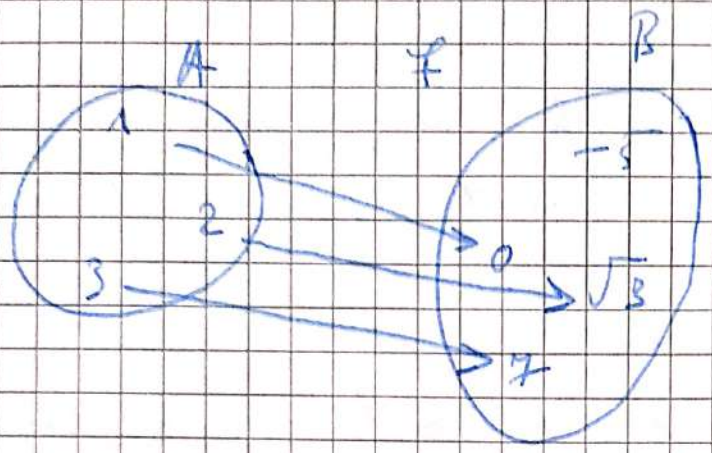
$$\boxed{\operatorname{Im} f = B}$$

c) Funcții bijective

O funcție e bijectivă dacă e injectivă și surjectivă

Ex. Stabiliți care dintre următoarele desene reprezintă funcții bijective

a)



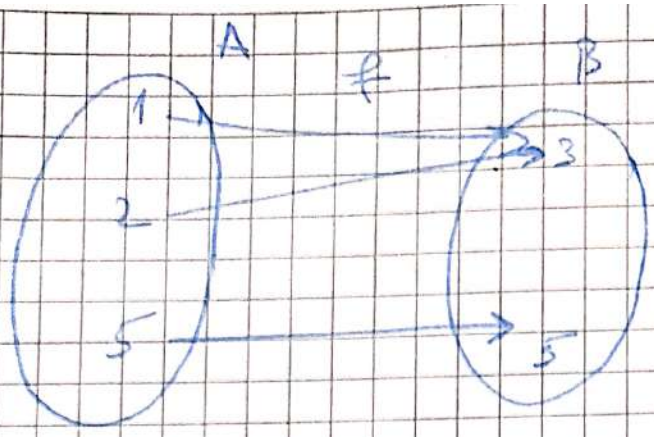
(f injectivă

$\forall y \in B \ \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$)

f nu e surjectivă pt. că $\exists y = -5 \in B$ a.î. $f(x) = -5 \ \forall x \in A$

f nu e bijectivă pentru că nu e surjectivă

b)



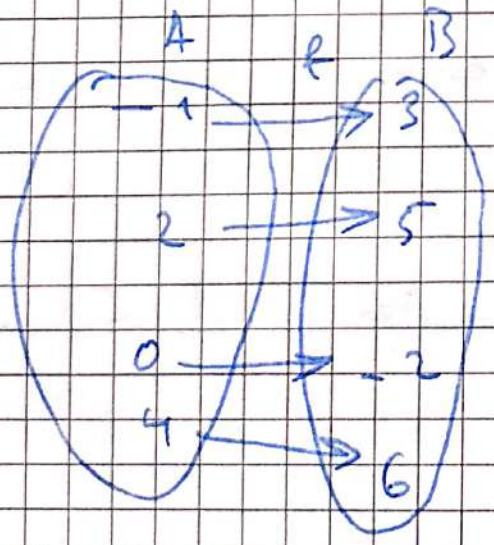
f nu e injectivă

$\exists \; x_1 \neq x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$1 \neq 2$ $\qquad f(1) = f(2) = 3$

f nu e bijectivă pentru că nu e injectivă

c)



f bijectivă

5) Monotonie funcții

Def

fie $f: A \to B$

1) a) f monotonă dacă f crescătoare sau f descrescătoare

b) f strict monotonă dacă f s.c. sau f s.d.

2) a) f c. $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) f s.c. $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3) a) f d $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

b) f n.d. $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Evident, monotonia o putem studia și cu ajutorul primei derivate:

$f' \geq 0 \Rightarrow f$ c.

$f' > 0 \Rightarrow f$ n.c.

$f' \leq 0 \Rightarrow f$ d.

$f' < 0 \Rightarrow f$ n.d.

6) Intersecția graficului unei funcții f cu axele Ox, Oy

$$\boxed{\begin{array}{l} G_f \cap Ox \Leftrightarrow f(x) = 0 \\ G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \end{array}}$$

Ex. det. care sunt punctele de intersecție cu axele Ox și Oy a funcției:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$G_f \cap Ox \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (\ldots)$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$G_f \cap Ox = \{(2;0); (3;0)\}$$

$$G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$$

$$G_f \cap Oy = \{(0;6)\}$$

7) Funcții pare, impare

Def.

1) O mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ se numește centrată în origine dacă pentru $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ex. $[-2, 2]$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}$

$(0, 1)$ - Nu e centrată în origine pentru că $0,6 \in (0,1)$ dar $-0,6 \in (0,1)$

$[-2, 2)$ - Nu e centrată în origine pentru că $-2 \in [-2, 2)$ dar $2 \notin [-2, 2)$

2) Fie D o mulțime centrată în origine. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ s.n. funcție pară dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

3) Fie D centrată în origine. $f: D \to \mathbb{R}$ s.n. o funcție

impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$

Ex.

Studiați paritatea (imparitatea) funcțiilor:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^4 - 3x^2$

$\mathbb{R}$ este centrată în origine

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 =$
$= f(x) \Rightarrow f$ pară

2. $f: (-2, -1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$(-2, -1]$ nu e centrată în origine pentru că $-1 \in (-2, -1]$ dar $1 \notin (-2, -1] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Nu se poate studia paritatea (imparitatea)

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$

$\mathbb{R}$ centrată în origine

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \\ -f(x) = -(x^3 + x) = -x^3 - x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ impară

4. $f(-1, 1) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x - 3$

$(-1, 1)$ centrată în origine

$f(-x) = 2 \cdot (-x) - 3 = -2x - 3$

$-f(x) = -(2x - 3) = -2x + 3$

Obținem că:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu e pară nici impară

8) ~~a)~~ Funcția de gradul I

a) Forma generală este:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

b) Graficul funcției de gradul I este o dreaptă.

c) Semnul f. de gradul I

Se rezolvă ec. $ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$	semn contrar „a"		0	semn „a"	

d) Monotonie

$a > 0 \Rightarrow f$ s.c.

$a < 0 \Rightarrow f$ s.d.

e) Orice funcție de gradul I este bijectivă.

Ex. Det. f. de gr. I al cărui grafic trece prin punctele $A(-1;2)$; $B(1;3)$

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$

$a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

$A(-1, 2) \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot (-1) + b = 2 \Leftrightarrow \underline{-a + b = 2}$

$B(1, 3) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot 1 + b = 3 \Leftrightarrow \underline{a + b = 3}$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

"+" $\Rightarrow 2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

"−" $\Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Am obținut $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{2}$,

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

• Studiați prin mai multe metode injectivitatea funcției:

a) $\underline{f(x) = 2x - 1}$

a) $x_1 \neq x_2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \mid -1$

$2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow f$ injectivă

b) fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \mid : 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ funcția injectivă

c) $a = 2 > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ injectivă

d) $f'(x) = (2x-1)' = 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ D.C. $\Rightarrow f$ injectivă

· Studiați surjectivitatea funcției

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; și găsiți $f(x) = 2x - 1$

și găsiți inversa ei.

Def. $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

fie $y \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow 2x = y + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$

f surjectivă pt. că $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$

$x = \frac{y+1}{2}$ a.î. $f(x) = y$

f inj și f surj $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ inversabilă $\Rightarrow \exists f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

• Ar. că $f:[-1,2] \to [-3,3]$, $f(x) = -2x+1$ e surjectivă.

Vom arăta acest lucru demonstrând că $\mathrm{Im} f = [-3,3]$.

(V1) $x \in [-1,2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \le x \le 2 \quad | \cdot (-2) \Leftrightarrow 2 \ge -2x \ge 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 \le -2x \le 2 \quad | +1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le -2x+1 \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le f(x) \le 3$

$f(x) \in [-3,3] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = [-3,3]$

(V2) $a = -2 < 0 \Rightarrow f$ n.d.

$f(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$

$f(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$

$x \in [-1,2] \Leftrightarrow -1 \le x \le 2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow}$

$f(-1) \ge f(x) \ge f(2) \Rightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le f(x) \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \in [-3,3] \Rightarrow \mathrm{Im} f = [-3,3]$

• Ar. că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$f(x) = x^{10} - 4x^8 + 2$ nu e injectivă

$x^{10} - 4x^8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^8(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^8(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^8 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Luăm $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

Evident $x_1 \neq x_2$ dar $f(x_1) = f(x_2) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ nu e inj.

9) Funcția de gradul II

a) Forma generală

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$
$a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

b) Monotonia funcției de gradul II

Se poate prezenta sub forma

Mini tabel :

Funksie se grafiek word 'n parabool.

Dat $a > 0$, parabool se kromme indrukke in ons ∪

Dat $a < 0$, parabool se kromme indrukke in ons ∩.

→ Tabel :

1) $a > 0$ (∪)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	

f n.d. pt $x \in \left(-\infty ; -\frac{b}{2a}\right]$

f n.c. pt. $x \in \left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right)$

Punt van min : $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

Waarde minimum a funksie : $-\frac{\Delta}{4a}$ ⇒

$\Rightarrow f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in \left[-\frac{\Delta}{4a} ; +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow D_m f = \left[-\frac{\Delta}{4a} ; +\infty\right)$

2) $a < 0$ (A)

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\Delta/4a$	$\searrow$	

$x_{max} = -\frac{b}{2a}$ = punct de minim

$f_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$ = valoare maximă

a funcției $\Rightarrow f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$

$\Rightarrow f(x) \in \left(-\infty ; -\frac{\Delta}{4a}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow D_m f = \left(-\infty ; -\frac{\Delta}{4a}\right]$

3) Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numește vârful parabolei.

Obs.

a) Parabola intersectează axa OX în 2 puncte?

$G_f \cap OX \Leftrightarrow f(x) = 0$;

Punem condiția $\Delta > 0$

b) Parabola intersectează axa OX într-un singur punct?

$G_f \cap OX \Leftrightarrow f(x) = 0$;

Punem condiția $\Delta = 0$

Se mai spune că parabola sau G_f este tangentă axei OX.

c) Parabola nu intersectează axa Ox?

$G_f \cap Ox = \emptyset \Leftrightarrow f(x) = 0$;

Punem condiția $\Delta < 0$

d) Ecuația axei de simetrie a parabolei este:

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Ex. Găsiți $m \in \mathbb{R}$ știind că axa de simetrie a parabolei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$ are axa de simetrie de ec. $x = 3$.

$a = 1$, $b = -m$, $c = 1$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2}$$

Ec. axei de simetrie a parabolei este

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{m}{2} \\ x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Leftrightarrow m = 6$$

· Forma canonică a f. de gradul al 2-lea

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Ex. Admite $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ la forma canonică

$a = 1$, $b = -2$, $c = 3$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

$$\frac{\Delta}{4a} = \frac{-8}{4} = -2$$

Forma canonică este: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

$f(x) = (x-1)^2 + 2$

1°) Determinarea coordonatelor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor

Ex. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor:

$f(x) = 2x - 1$;

$g(x) = x + 3$;

fie $A(a, b) \in G_f \cap G_g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(a, b) \in G_f \\ A(a, b) \in G_g \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = b \\ g(a) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = b \\ a + 3 = b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a - 1 = a + 3 \Leftrightarrow \underline{a = 4}$

$b = a + 3 \Leftrightarrow b = 4 + 3 \Leftrightarrow \underline{b = 7}$

Am obținut $G_f \cap G_g = \{A(4, 7)\}$

11) Formarea ecuației de grad al II-lea când cunoaștem soluțiile sale

$$\boxed{x^2 - Sx - P = 0} \qquad \left| \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{array} \right|$$

Ex. Scrieți ec. de gr. al II-lea cu coeficienți întregi ale cărei soluții sunt: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -3$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0;$$

$$a = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$b = 5 \in \mathbb{Z}$$

$$c = -3 \in \mathbb{Z}$$

Primitive

– teorie –

① Fie $f : I \to \mathbb{R}$; I interval

Spunem că f admite primitive pe I dacă există o altă funcție $F : I \to \mathbb{R}$ a.î.

a) F derivabilă pe I (se afirmă, nu se demonstrează – ca operații de funcții elementare)

b) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ (se arată)

② Mulțimea tuturor primitivelor funcției $f : I \to \mathbb{R}$ este
$F : I \to \mathbb{R}$; $f(x) = \int f(x)\,dx$

③ Orice funcție continuă pe un interval, admite primitive pe același interval.

Obs: a) $F' = f \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$
$F' = f \leq 0 \Rightarrow F \searrow$

b) $F'' = f' \geq 0 \Rightarrow F$ convexă
$F'' = f' \leq 0 \Rightarrow F$ concavă

Semnul funcțiilor

1) Funcția exponențială

$a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$a > 0 ; \quad a \neq 1$

Obs. $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ex. $\left.\begin{array}{l} 2^{-x+4} > 0 \\ e^{x^2 - x + 2} > 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > 0 \end{array}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f : D \to \mathbb{R} ; \quad D = (0, +\infty)$

$f(x) = \ln x - 2$

$\ln x - 2 > 0 \iff \ln x > 2 \iff$

$\iff \ln x > \ln e^2 \iff x > e^2$

$\ln x - 2 < 0 \iff x < e^2$

$\ln x - 2 = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$\ln x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

3) $f : D \to \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$x - 1 = 0 \iff x = 1$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x^2-5x+6}$	$-$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$+$

4) Dacă o funcție este continuă pe un interval și nu se anulează pe acel interval, ea va păstra semn constant pe acel interval.

$f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2x(x+1)\sqrt{x^2+x}}$$

$2x(x+1) \cdot \sqrt{x^2+x} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Semnul lui f depinde de

„ $2x+1-2\sqrt{x^2+x}$ "

Fie $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$;

$g(x) = 2x+1-2\sqrt{x^2+x}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 2\sqrt{x^2+x} \Rightarrow (2x+1)^2 = (2\sqrt{x^2+x})^2$

$\Leftrightarrow (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 2^2(\sqrt{x^2+x})^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1 = 4(x^2+x) \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 = 4x^2+4x$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ F $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} g(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, +\infty) \\ g(x) \text{ continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g$ păstrează semn constant pe $(0, +\infty)$

Luăm $1 \in (0, +\infty) \Rightarrow g(1) =$

$= 2 \cdot 1 + 1 - 2\sqrt{1^2+1} = 3 - 2\sqrt{2} =$

$= \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{9} - \sqrt{8} > 0$

5) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$

Demonstrați că $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)' =$

$= (\cos x)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' =$

$= -\sin x + \frac{2x}{2} = -\sin x + x$

$f'(x) = -\sin + x$

$f''(x) = (-\sin x + x)' = (-\sin x)' + x' =$

$= -\cos x + 1$

$f''(x) = -\cos x + 1$

Se știe că $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R},$

$\Rightarrow \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq -\cos x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$

Obs. că $f'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$

pt. $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$

pt. $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$f(0)=1$		$\nearrow$

Din tabel $\Rightarrow x = 0$ punct de minim absolut $\Rightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

Soluții ecuație
- Șir Rolle -

1) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - 3x + \ln x = 0$; $x > 0$

Fie $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 3x + \ln x$

$f'(x) = (x^2 - 3x + \ln x)' =$

$= 2x - 3 + \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = 0 \iff$

$\iff 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 - 3x + \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 3x + \ln x) \overset{\infty-\infty}{\underset{\text{ned}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{\ln x}{x^2}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{\text{ned } \frac{\infty}{\infty} \text{ L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 3\cdot 1 + \ln 1 = 1 - 3 + 0 = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \ln 2^{-1} = -\frac{5}{4} - \ln 2 < 0$$

$$\ln 2 > 0 \Leftrightarrow \ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	$+$

Dim tabel $\Rightarrow x_1 \in [1, +\infty)$

2) Să se discute numărul de soluții ale ecuației $f(x) = -m$ unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f(x) = -m \iff f(x) + m = 0 \iff x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$

$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad | :3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16$

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 = +\infty$$

$g(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + m =$

$= -1 - 3 + 9 + m = 5 + m$

$g(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + m = -27 + m$

$5 + m = 0 \iff m = -5$

$-27 + m = 0 \iff m = 27$

m	$-\infty$		-5		27		$+\infty$
$5+m$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$-27+m$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$y(x)$			$5+m$		$-27+m$		
$m<-5$	$-$		$-$		$-$		$+$
$m=-5$	$-$		0		$-$		$+$
$m\in(-5,27)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$m=27$	$-$		$+$		0		$+$
$m>27$	$-$		$+$		$+$		$+$

Conclusion :

$x_1 \in (3,+\infty)$
$x_2 = \overline{x_3} \in \mathbb{C}$

$x_1 = x_2 = -1$
$x_3 \in (3,+\infty)$

$x_1 \in (-\infty;-1)$
$x_2 \in (-1,3)$
$x_3 \in (3,+\infty)$

$x_1 \in (-\infty,-1)$
$x_2 = x_3 = 3$

$x_1 \in (-\infty;1)$
$x_2 = \overline{x_3} \in \mathbb{C}$

Unicitatea soluției unei ecuații

1) Se consideră $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$

a) Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$

$f'(x)=(e^x+\ln x+1)'=$

$=(e^x)'+(\ln x)'+1'=$

$=e^x+\frac{1}{x}+0=e^x+\frac{1}{x}$

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

Ecuația tangentei la GF în punctul de abscisă $x_0=1$ este

$t: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x_0)=f(1)=e^1+\ln 1+1$

$=e+1$

$f'(x_0) = f'(1) = e \cdot 1 + \frac{1}{1} = e + 1$

$t: \; y - (e+1) = (e+1)(x-1)$

$t: \; y - e - 1 = ex - e + x - 1$

$t: \; y = ex \cancel{-e} + x \cancel{-1} \cancel{+e} \cancel{+1}$

$t: \; y = ex + x$

$t: \; y = x(e+1)$

$t: \; y = (e+1)x$

c) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$

f continuă ca operații de funcții elementare (1)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^x + \ln x + 1) = -\infty$ (2)

$f(1) = e^1 + \ln 1 + 1 = e + 1 > 0$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \exists$ cel puțin un punct $c \in (0,1)$ a.î. $f(c) = 0$. (4)

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ strict crescătoare $\forall x \in (0, \infty)$ (5)

$\Rightarrow f$ strict crescătoare $\forall x \in (0,1)$

Din (4), (5) $\Rightarrow c$ este unică $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0$ are soluție unică $c \in (0,1)$

Metode de calcul ale integralelor definite

1) Metoda integrării directe (prin formule)

a) $\int_0^1 (2x + 3\sqrt{x})\,dx =$

$= \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3\sqrt{x}\,dx =$

$= 2\int_0^1 x\,dx + 3\int_0^1 \sqrt{x}\,dx =$

$= 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3\cdot\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$= x^2\Big|_0^1 + 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 =$

$= 1^2 - 0^2 + 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 1 + 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt[2]{x^3}\Big|_0^1 =$

$= 1 + 2\sqrt{x^3}\Big|_0^1 = 1 + 2\sqrt{1^3} - 2\sqrt{0^3} = 1 + 2 = 3$

b) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_e^{e^2} =$

$= \ln|e^2| - \ln|e| = \ln e^2 - \ln e =$

$= 2\ln e - 1 = 2 - 1 = 1$

c) $\int_0^1 \frac{1}{u^2+3}\,du = \int_0^1 \frac{1}{u^2+(\sqrt{3})^2}\,du =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} -$

$- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{0}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} 0 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

d) $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2} \ln|2\cdot 1+1| - \frac{1}{2}|2\cdot 0+1| =$

$= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$

e) $\int_0^1 \frac{2x}{x+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx =$

$= 2\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = 2\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

$= 2\int_0^1 1\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= 2x\Big|_0^1 - 2\ln|x+1|\Big|_0^1 =$

$= 2\cdot 1 - 2\cdot 0 - (2\ln|1+1| - 2\ln|0+1|) =$

$= 2 - 2\ln 2 + 2\ln 1 = 2 - 2\ln 2 =$

$= 2(1-\ln 2) = 2(\ln e - \ln 2) =$

$= 2\cdot \ln\frac{e}{2}$

f) $\int_2^3 \frac{x^2}{x-1} = \int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x-1}\,dx =$

$= \int_2^3 \left(\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\,dx +$

$+ \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_2^3 (x+1)\,dx + \ln|x-1|\Big|_2^3 =$

$= \int_2^3 x\,dx + \int_2^3 1\,dx + \ln|3-1| - \ln|2-1| =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + x\Big|_2^3 + \ln 2 - \ln 1 =$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} + 3 - 2 + \ln 2 =$$

$$= \frac{5}{2} + \overset{2}{\cancel{1}} + \ln 2 = \frac{7}{2} + \ln 2$$

g) $$\int_0^1 \frac{1}{4x^2 - 25}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2}}{x + \frac{5}{2}} \right| \Bigg|_0^1 = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2x-5}{2x+5} \right| \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2 \cdot 1 - 5}{2 \cdot 1 + 5} \right| - \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2 \cdot 0 - 5}{2 \cdot 0 + 5} \right| =$$

$$= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{-3}{7} \right| - \frac{1}{20} \ln \left| \frac{-5}{5} \right| =$$

$$= \frac{1}{20} \ln \frac{3}{7} - \frac{1}{20} \ln 1 = \frac{1}{20} \ln \frac{3}{7}$$

h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(0+\sqrt{0^2+\frac{1}{4}}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right) - \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1}{4}} =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

i) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= \ln|x| \Big|_1^2 - \ln|x+1| \Big|_1^2 =$

$= \ln|2| - \ln|1| - (\ln|2+1| - \ln|1+1|) =$

$= \ln 2 - \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 =$

$= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 2 - \ln 3 =$

$= \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$

j) $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{(x+1)(x+3)}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|x+3|\Big|_1^2 =$

$= \frac{1}{2}\ln|2+1| - \frac{1}{2}\ln|1+1| -$

$= \left(\frac{1}{2}\ln|2+3| - \frac{1}{2}\ln|1+3|\right) =$

$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 4 =$

$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4) =$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} =$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{5} = \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$

2) Integrarea prin părți

$$* \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

a) $\int_0^1 x \cdot e^x\, dx = \int_0^1 x \cdot (e^x)'\, dx =$

$= x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot e^x\, dx =$

$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^x\, dx = e - e^x \Big|_0^1 =$

$= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$

b) $\int_0^2 e^x (x-4)\, dx = \int_0^2 (x-4)(e^x)'\, dx =$

$= (x-4)\, e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 (x-4)' \cdot e^x\, dx =$

$= (2-4) \cdot e^2 - (0-4) \cdot e^0 - \int_0^2 e^x\, dx =$

$= -2e^2 + 4 \cdot 1 - e^x \Big|_0^2 =$

$= -2e^2 + 4 - (e^2 - e^0) =$

$= -2e^2 + 4 - e^2 + 1 = 5 - 3e^2$

c) $\int_1^2 x \ln x \, dx = \int_1^2 \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \int_1^2 (\ln x)' \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$

$= \ln 2 \cdot \frac{2^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x^2 \, dx =$

$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 =$

$= 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) =$

$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

d) $\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e \ln x \cdot 1 \, dx =$

$= \int_1^e \ln x \cdot x' \, dx =$

$= \ln x \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e (\ln x)' \cdot x \, dx =$

$= \ln e \cdot e - \ln 1 \cdot 1 - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$

$= e - \int_1^e 1 \, dx = e - x \Big|_1^e =$

$= e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$

e) V_1 $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$= \int_1^e \ln x (\ln x)'\,dx =$

$= \ln x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x\,dx =$

$= \ln e \cdot \ln e - \ln 1 \cdot \ln 1 - J = 1 - J$

Am obținut $J = 1 - J \Leftrightarrow 2J = 1 \Leftrightarrow J = \frac{1}{2}$

V_2 $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$= \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = dt$

$x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \ln 1 = 0$

$x_2 = e \Rightarrow t_2 = \ln e = 1$

f) $J = \int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx =$

$= \int \cos x \cdot (\sin x)' \, dx =$

$= \cos x \cdot \sin x - \int (\cos x)' \cdot \sin x \, dx =$

$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx =$

$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx =$

$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{J}$

$= \cos x \sin x + x - J$

Obținem: $J = \cos x \sin x + x - J$

$2J = \cos x \sin x + x$

$J = \dfrac{\cos x \sin x + x}{2}$

Subject : Date :...../...../.....

g) $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \right) dx =$

$= 2\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$

$= 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^2 - \int_0^1 x \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$

$= 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 \arcsin \frac{0}{\sqrt{2}} - \int_0^1 x \left(-\sqrt{2-x^2}\right)' dx =$

$= 2 \arcsin \sqrt{2} - \left(x \cdot \left(-\sqrt{2-x^2}\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \left(-\sqrt{2-x^2}\right) dx \right) =$

$= 2 \arcsin \sqrt{2} + x\sqrt{2-x^2} \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx}_{J}$

$= 2 \arcsin \sqrt{2} + 1\sqrt{2-1^2} - 0\sqrt{2-0^2} - J$

$= 2 \arcsin \sqrt{2} + 1 - J$

Obtinem: $J = 2 \arcsin \sqrt{2} + 1 - J$

$$J = \frac{2 \arcsin \sqrt{2} + 1}{2}$$

h) $\int_0^{\sqrt{3}} 2x \operatorname{arctg} x \, dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx =$

$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx =$

$= 2 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} x)' \cdot \frac{x^2}{2} dx =$

$= \operatorname{arctg} x \cdot x^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} \cdot x^2 dx =$

$= \operatorname{arctg} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^2 - \operatorname{arctg} 0 \cdot 0^2 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot 3 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$

$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$

$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} 1 \, dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx =$

$= \pi - x \Big|_0^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} =$

$= \pi - (\sqrt{3} - 0) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0$

$= \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3} + \pi}{3} =$

$= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

i) $I = \int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \operatorname{arctg} \cdot 1 \, dx =$

$= \int \operatorname{arctg} x \cdot x' \, dx = \operatorname{arctg} x \cdot x -$

$- \int (\operatorname{arctg} x)' \cdot x \, dx =$

$= \operatorname{arctg} x \cdot x - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} \, dx}_{I_1}$

$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$

$x^2+1 = t \Rightarrow 2x \, dx = dt$

$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{2} \ln |t|$

$I_1 = \frac{1}{2} \ln (x^2+1)$

$I = \operatorname{arctg} x \cdot x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C$

j) $\int_0^1 \arcsin x \, dx = \int_0^1 \arcsin x \cdot 1 \, dx =$

$= \int_0^1 \arcsin x \cdot x' \, dx =$

$= \arcsin x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 (\arcsin x)' \cdot x \, dx =$

$= \arcsin 1 \cdot 1 - \arcsin 0 \cdot 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$

$= \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-1^2} - \sqrt{1-0^2} =$

$= \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

3) Integrare prin substituție

a) $J = \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx =$

$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx$

$x^2 + 2x + 5 = t \Rightarrow (2x+2) dx = dt$

$2(x+1) dx = dt$

$x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 5 = 8$

$x_2 = 2 \Rightarrow t_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13$

$J = \frac{1}{2} \int_8^{13} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_8^{13} =$

$= \frac{1}{2} \ln|13| - \frac{1}{2} \ln|8| =$

$= \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 8) = \frac{1}{2} \ln \frac{13}{8}$

b) $J = \int_0^1 (2x+1)^4 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^4 \cdot 2 dx$

$2x+1 = t \Leftrightarrow 2dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$J = \frac{1}{2} \int_1^3 t^4 \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} \Big|_1^3 =$

$= \frac{t^5}{10} \Big|_1^3 = \frac{3^5}{10} - \frac{1^5}{10} = \frac{243 - 1}{10} =$

$= \frac{242^{(2}}{10} = \frac{121}{5}$

c) $J = \int_{-2}^{1} x(1-3x)^5 \, dx =$

$= -\frac{1}{3} \int_{-2}^{1} x(1-3x)^5 \cdot (-3) \, dx$

$1 - 3x = t \Rightarrow -3x \, dx = dt$

$\Updownarrow$

$-3x = t - 1 \overset{|\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 3x = -t + 1 \Leftrightarrow x = \frac{-t+1}{3}$

$x_1 = -2 \Rightarrow t_1 = 1 - 3 \cdot (-2) = 7$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

$J = -\frac{1}{3} \int_{7}^{-2} \frac{-t+1}{3} \cdot t^5 \, dt =$

$= \frac{1}{3} \int_{-2}^{7} \frac{-t^6 + t^5}{3} \, dt =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \int_{-2}^{7} (-t^6 + t^5) \, dt =$

$= \frac{1}{9} \int_{-2}^{7} (-t^6 + t^5) \, dt =$

$$= -\frac{1}{9}\int_{-2}^{1} t^6\,dt + \frac{1}{9}\int_{-2}^{7} t^5\,dt = \dots$$

d) $$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-3x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-3x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{-3}{1-3x}\,dx$$

$$1-3x = t \Rightarrow -3dx = dt$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow t_1 = 1-3\cdot(-1) = 1+3 = 4$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 1-3\cdot 0 = 1$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_{4}^{1} \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot \ln|t| \Big|_{1}^{4} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|4| - \ln|1|\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln 1\right) = \frac{1}{3}\cdot \ln 4$$

e) $J = \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx = 3\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$= \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$x^2+1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 2$

$J = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt =$

$= \frac{3}{2}\cdot \ln|t|\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\left(\ln|2| - \ln|1|\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{3}{2}\left(\ln 2 - 0\right) =$

$= \frac{3}{2}\cdot \ln 2$

f) $I = \int_0^1 \frac{2x^2\,dx}{3x^3+2} =$

$= 2\int_0^1 \frac{x^2}{3x^3+2}\,dx = \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9x^2}{3x^3+2}\,dx$

$3x^3+2 = t \Rightarrow 9x^2\,dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 3\cdot 0^3+2 = 2$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 3\cdot 1^3+2 = 5$

$I = \frac{2}{9}\int_2^5 \frac{1}{t}\,dt =$

$= \frac{2}{9}\cdot \ln|t| \Big|_2^5 =$

$= \frac{2}{9}\left(\ln|5| - \ln|2|\right) =$

$= \frac{2}{9}\left(\ln 5 - \ln 2\right) =$

$= \frac{2}{9}\ln\frac{5}{2}$

g) $J = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2)^2+1}\,dx$

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1$

$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

k) $J = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx =$

$= -\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\cdot(-1)\,dx$

$1-x = t \Rightarrow -dx = dt$

$1-x = t \Leftrightarrow -x = t-1 \quad | \cdot(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -t+1$

$x_1 = -1 \Rightarrow t_1 = 1-(-1) = 2$

$x_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 1$

$J = -\int_{2}^{1} (-t+1)\cdot\sqrt{t}\,dt =$

$= \int_{1}^{2} (-t+1)\cdot\sqrt{t}\,dt =$

$= \int_{1}^{2} (-t\cdot\sqrt{t} + \sqrt{t})\,dt =$

$= -\int_{1}^{2} t\cdot\sqrt{t}\,dt + \int_{1}^{2} \sqrt{t}\,dt = \ldots$

i) $J = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{e^{x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx =$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{2x}{e^{x^2}}\,dx$

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$x_1 = -1 \Rightarrow t_1 = (-1)^2 = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1^2 = 1$

$J = \frac{1}{2} \int_{1}^{1} \frac{1}{e^t}\,dt = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

j) $J = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx =$

$1 + e^x = t \Rightarrow e^x\,dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 + e^0 = 2$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 + e^1 = 1 + e$

$J = \int_2^{1+e} \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \Big|_2^{1+e} =$

$= \ln|1+e| - \ln|2| =$

$= \ln(1+e) - \ln 2 = \ln \frac{1+e}{2}$

b) $y = \int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$

$= 2 \int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

$x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{1} = 1$

$x_2 = 9 \Rightarrow t_2 = \sqrt{9} = 3$

$y = 2 \cdot \int_1^3 e^t dt =$

$= 2 \cdot e^t \Big|_1^3 = 2(e^3 - e^1)$

e) $J = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} \, dx$

$3 + \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$

$x_1 = e^{-2} \Rightarrow t_1 = 3 + \ln e^{-2} =$

$= 3 + (-2) \ln e = 3 - 2 = 1$

$x_2 = e \Rightarrow t_2 = 3 + \ln e =$

$= 3 + 1 = 4$

$J = \int_1^4 \frac{\sqrt{t}}{1} \, dt =$

$= \frac{2}{3} + \sqrt{t} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} \left(4\sqrt{4} - 1\sqrt{1} \right) =$

$= \frac{2}{3} \left(4 \cdot 2 - 1 \right) = \frac{2}{3} \cdot 7 =$

$= \frac{14}{3}$

m) $J = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x+1)} dx =$

$\operatorname{arctg} x + 1 = t \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} dx = dt$

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \operatorname{arctg} 0 + 1 = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = \operatorname{arctg} 1 + 1 = \frac{\pi}{4} + 1$

$J = \int_1^{\pi/4+1} \frac{1}{t} dt = \ln|t| \Big|_1^{\frac{\pi}{4}+1} =$

$\cancel{= \ln|1| - \ln|\frac{\pi}{4}+1| =}$

$= \ln|\frac{\pi}{4}+1| - \ln|1| =$

$= \ln(\frac{\pi}{4}+1) - \ln 1 =$

$= \ln\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$

· Inversa A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 3 =$$

$$= 1 + 12 = 13 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A inversabilă $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |1| = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |-2| = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |3| = -3; \quad A_{22} (-1)^{2+2} \cdot |1| = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

a) $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$

b) Arătați că $I_3 \in G$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Găsiți $A^{-1}(x)$

b) $I_3 \in G \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $A(x) = I_3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $1 = 1$ (A)

$x = 0$

$2x^2 + x = 0$, $x = 0$ verifică ecuația

pentru că $2 \cdot 0^2 + 0 = 0$

$0 = 0$ (A)

$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Obținem $I_3 = A(0) \in G$

$$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $A(x)$ e inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, A^{-1}(x) \overset{not}{=} A(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) = I_3$ (1)

Comutativitatea $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$,

$\forall\, x \in G \overset{a)}{\Leftrightarrow} A(x+y) = A(y+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y = y+x$ (A)

Conform comutativității, adunării în nr. reale

Din (1) $\Rightarrow A(x) \cdot A(y) = I_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x+y) = A(0) \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x \Rightarrow A(y) = A(-x) = A^{-1}(x)$

$$A^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 2x^2-x \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$

Ar. $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$

$x \circ y = \underline{\underline{x}}y + 4x + \underset{=}{4}y + 12 =$

$= \underline{\underline{x}}(y+4) + \underset{=}{4}(y+4) - \underset{\approx}{4} =$

$= (x+4)(y+4) - 4$

$\rightarrow \quad x \circ y = 4(x+y-3) - xy$

Ar. $x \circ y = 4 - (x-4)(y-4)$

$x \circ y = -xy + 4x + 4y - 12 =$

$= -x(y-4) + 4(y-4) + 4 =$

$= (y-4)(-x+4) + 4 = 4 - (x-4)(y-4)$

Fie $(G; *)$

Def) $\underline{H}$ s.n. parte stabilă a lui G în raport cu operația „$*$" dacă:

① $H \subseteq G$

② $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

1) <u>Asociativitatea</u>:

$$(x * y) * z = x * (y * z); \forall x, y, z \in G$$

2) <u>Comutativitatea</u>:

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G$$

3) <u>Element neutru</u>:

$\underline{\underline{\exists\, e \in G}}$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$

4) Elemente simetrizabile

$x \in G$ e simetrizabil dacă $\underline{\exists\, x' \in G}$ (simetricul lui x) a.î. $x * x' = x' * x = e$

---

a) $(M, *)$ care verifică A, E s.n. monoid (abelian)

$(M, *)$ care verifică A, E, C s.n. monoid comutativ

b) $(G; *)$ care verifică A, E, S s.n. grup

$(G; *)$ care verifică A, E, S, C s.n. grup abelian (comutativ)

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{7x+4}\,dx$$

a) $7I_{n+1} + 4I_n = \frac{1}{n+1}$

$$7I_{n+1} + 4I_n = 7 \cdot \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{7x+4}\,dx + 4\int_0^1 \frac{x^n}{7x+4}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{7x^{n+1}}{7x+4}\,dx + \int_0^1 \frac{4x^n}{7x+4}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^{n+1}}{7x+4} + \frac{4x^n}{7x+4} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{7x^{n+1} + 4 \cdot x^n}{7x+4}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(7x+4)}{7x+4}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

b) $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{I_{n+1} \leq I_n} \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{7x+4}\,dx -$$

$$- \int_0^1 \frac{x^n}{7x+4}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{7x+4}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\overset{+}{x^n}\overset{-}{(x-1)}}{\underset{+}{7x+4}}\,dx \leq 0$$

$x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq \boxed{x \leq 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0 \quad (1)$ $\quad \Downarrow$

$x - 1 \leq 0 \quad (2)$

$x \geq 0 \;|\cdot 7 \Leftrightarrow 7x \geq 0 \;|+4 \Leftrightarrow 7x+4 \geq 4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+4 > 0 \quad (3)$

Din (1), (2), (3). $\Rightarrow \dfrac{x^n(x+1)}{7x+4} \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{7x+4}\,dx \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow (I_n)$

c) I) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

II) $\lim_{n\to\infty} n I_n = \frac{1}{11}$

Din a) $\Rightarrow \frac{1}{n+1} = 7I_{n+1} + 4I_n \leq$

5) $I_n \searrow$

$\leq 7I_n + 4I_n = 11 I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 11 I_n \Leftrightarrow \frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \quad (1)$

$(n = n-1)$

$\frac{1}{n+1} = 7I_{n+1} + 4I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n} = 7I_n + 4I_{n-1} \geq$

$I_n \searrow$

$\geq 7I_n + 4I_n = 11 I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \geq 11 I_n \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{11n} \quad (2)$

Din (1),(2) $\Rightarrow \frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{11(n+1)} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{11n} = 0$

T. Cleștelui $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$

$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11n} \quad | \cdot n$

$\frac{n}{11n+11} \leq I_n \leq \frac{1}{11}$

$\frac{1}{11}$

$$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sin t^2 \, dt =$$

$(t = x)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2}{x^2} \underset{\text{med } l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x \sin t^2\right)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x^2)'}{2x} \underset{\text{med } l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2 \cdot (x^2)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \cos x^2 =$$

$$= \cos 0 = 1$$

$f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \cdot \int_0^x t^3 f(x) \, dt =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^3 f(x) \, dt}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^3 \cdot \sqrt{x^2+4}}{x^4} =$$

$$\underset{\text{med } l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x t^3 \cdot \sqrt{t^2+4}\right)'}{(x^4)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3} \sqrt{x^2+4}}{4\cancel{x^3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$I_n = \int_1^e \ln^n x\,dx, \quad I_n = e - n I_{n-1}$$

$$I_n = \int_1^e \ln^n x \cdot 1\,dx = \int_1^e \ln^n x \cdot x'\,dx =$$

$$= \ln^n x \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e (\ln^n x)' \cdot x\,dx =$$

$$= \ln^n e \cdot e - \ln^n 1 \cdot 1 - \int_1^e n \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot x\,dx =$$

$$= e - n \int_1^e \ln^{n-1} x\,dx = e - n I_{n-1}$$

$$(\ln^n x)' = [(\underbrace{\ln x}_{u})^n]' = n \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \ln^{n-1} x \cdot n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\ln^n e = (\ln e)^n = 1^n = 1$$

$$\ln^n 1 = (\ln 1)^n = 0^n = 0$$

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x}\, dx$$

Aa. $I_n = -\frac{1}{e} + n\, I_{n-1}$

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot (-e^{-x})'\, dx =$$

$$= x^n \cdot (-e^{-x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^n)' (-e^{-x})\, dx =$$

$$= -x^n e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x}\, dx =$$

$$= -(1^n \cdot e^{-1} - 0^n \cdot e^{-0}) + n \underbrace{\int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{-x}\, dx}_{I_{n-1}} =$$

$$= -\frac{1}{e} + n\, I_{n-1}$$

$f(x) = e^{x}(x^2 + 4x + 1)$

$f'(x) = e^{x}(x+5)(x+1)$

$f(x) = a$

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{6}{e^5}$	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

ou

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-5) = e^{-5}((-5)^2 + 4 \cdot (-5) + 1) =$

$= \frac{1}{e^5}(25 - 20 + 1) = \frac{6}{e^5}$

$f(-1) = e^{-1}((-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1) =$

$= \frac{1}{e}(1 - 4 + 1) = -\frac{2}{e}$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x (x^2+4x+1) \overset{0 \cdot 0}{\underset{\text{nedef}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x+1}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x+1}{e^{-x}} =$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{nedef}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+4x+1)'}{(e^{-x})'} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+4}{-e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} =$$

$$= \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ e A.O. spre $-\infty$

$$\lim_{x \to \infty} e^x (x^2+4x+1) = \infty$$

Cum f continuă din tabel $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left(0; \frac{6}{e^5}\right)$