Optimizarea funcțiilor de pierdere. Algoritmul coborârii pe gradient.

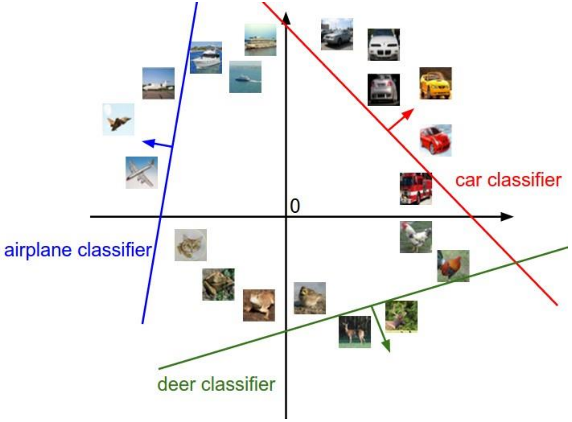
Prof. Dr. Radu Ionescu
raducu.ionescu@gmail.com
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Clasificator liniar pentru mai multe clase

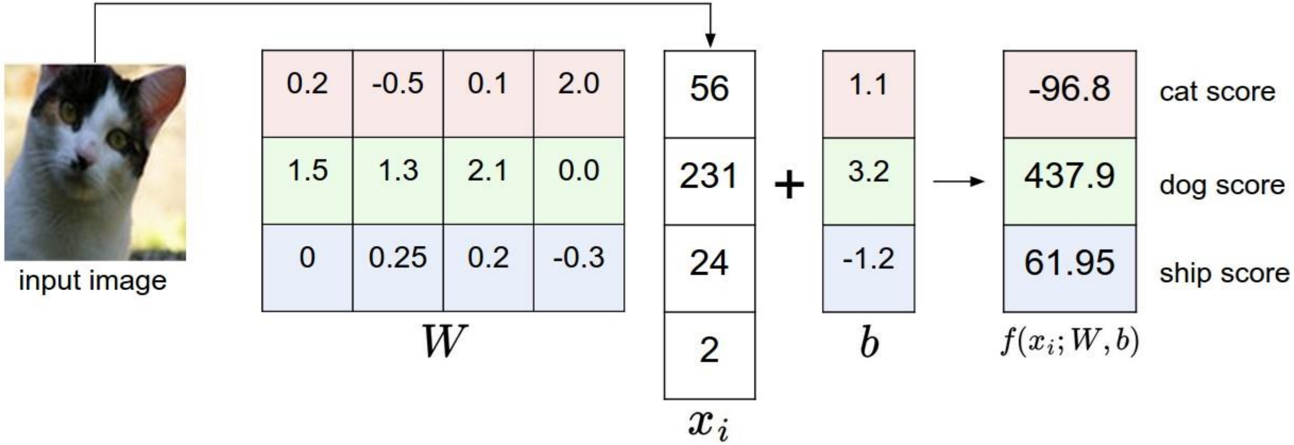
trăsături parametri

$f(\mathbf{x},\mathbf{W})$

N numere ce indică scorurile pentru fiecare clasă



Vector de trăsături



Pentru 3 exemple de antrenare, 3 clase, și ponderile W, obținem scorurile: $f(x, W) = Wx$

			
pisică	**3.2**	1.3	2.2
mașină	5.1	**4.9**	2.5
broască	-1.7	2.0	**-3.1**

Funcția de pierdere pentru SVM multi-clasă:

Fiind dat un exemplu (x_i, y_i) unde x_i este vectorul de trăsături și y_i este eticheta asociată (întreg),
notând vectorul de scoruri cu:
$s = f(x_i, W)$
funcția de pierdere a clasificatorului SVM are forma:

$$\boxed{L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)}$$

Pentru 3 exemple de antrenare, 3 clase, și ponderile W, obținem scorurile: $f(x,W) = Wx$

pisică	**3.2**	1.3	2.2
mașină	5.1	**4.9**	2.5
broască	-1.7	2.0	**-3.1**
Pierderile:	2.9		

Funcția de pierdere pentru SVM multi-clasă:

Fiind dat un exemplu (x_i, y_i) unde x_i este vectorul de trăsături și y_i este eticheta asociată (întreg),

notând vectorul de scoruri cu:

$s = f(x_i, W)$

funcția de pierdere a clasificatorului SVM are forma:

$$\boxed{L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)}$$

= max(0, 5.1 - 3.2 + 1)
+max(0, -1.7 - 3.2 + 1)
= max(0, 2.9) + max(0, -3.9)
= 2.9 + 0
= 2.9

Pentru 3 exemple de antrenare, 3 clase, și ponderile W, obținem scorurile: $f(x,W) = Wx$



pisică	**3.2**	1.3	2.2
mașină	5.1	**4.9**	2.5
broască	-1.7	2.0	**-3.1**
Pierderile:	2.9	0	

Funcția de pierdere pentru SVM multi-clasă:

Fiind dat un exemplu (x_i, y_i) unde x_i este vectorul de trăsături și y_i este eticheta asociată (întreg), notând vectorul de scoruri cu:

$s = f(x_i, W)$

funcția de pierdere a clasificatorului SVM are forma:

$$\boxed{L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)}$$

= max(0, 1.3 - 4.9 + 1)
+max(0, 2.0 - 4.9 + 1)
= max(0, -2.6) + max(0, -1.9)
= 0 + 0
= 0

Pentru 3 exemple de antrenare, 3 clase, și ponderile W, obținem scorurile: $f(x, W) = Wx$



pisică	**3.2**	1.3	2.2
mașină	5.1	**4.9**	2.5
broască	-1.7	2.0	**-3.1**
Pierderile:	2.9	0	10.9

Funcția de pierdere pentru SVM multi-clasă:

Fiind dat un exemplu (x_i, y_i) unde x_i este vectorul de trăsături și y_i este eticheta asociată (întreg),

notând vectorul de scoruri cu:

$s = f(x_i, W)$

funcția de pierdere a clasificatorului SVM are forma:

$$\boxed{L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)}$$

= max(0, 2.2 - (-3.1) + 1)
+max(0, 2.5 - (-3.1) + 1)
= max(0, 5.3) + max(0, 5.6)
= 5.3 + 5.6
= 10.9

Pentru 3 exemple de antrenare, 3 clase, și ponderile W, obținem scorurile: $f(x, W) = Wx$

pisică	**3.2**	1.3	2.2
mașină	5.1	**4.9**	2.5
broască	-1.7	2.0	**-3.1**
Pierderile:	2.9	0	10.9

Funcția de pierdere pentru SVM multi-clasă:

Fiind dat un exemplu (x_i, y_i) unde x_i este vectorul de trăsături și y_i este eticheta asociată (întreg),

notând vectorul de scoruri cu:

$s = f(x_i, W)$

funcția de pierdere a clasificatorului SVM are forma:

$$\boxed{L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)}$$

L = (2.9 + 0 + 10.9)/3

= **4.6**

Clasificatorul Softmax (Regresia Logistică Multinomială)

pisică	**3.2**
mașină	5.1
broască	-1.7

scoruri = log-probabilitățile nenormalizate ale claselor

$$P(Y=k|X=x_i) = \boxed{\frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}}$$ unde $$s = f(x_i; W)$$

Funcția softmax

Vrem să maximizăm the log-probabilitatea, sau (pentru o funcție de pierdere) să minimizăm log-probabilitatea negativă a clasei corecte:

$$L_i = -\log P(Y=y_i|X=x_i)$$

În concluzie: $$L_i = -\log\left(\frac{e^{s_{y_i}}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

Clasificatorul Softmax (Regresia Logistică Multinomială)

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{s_{y_i}}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

probabilități nenormalizate

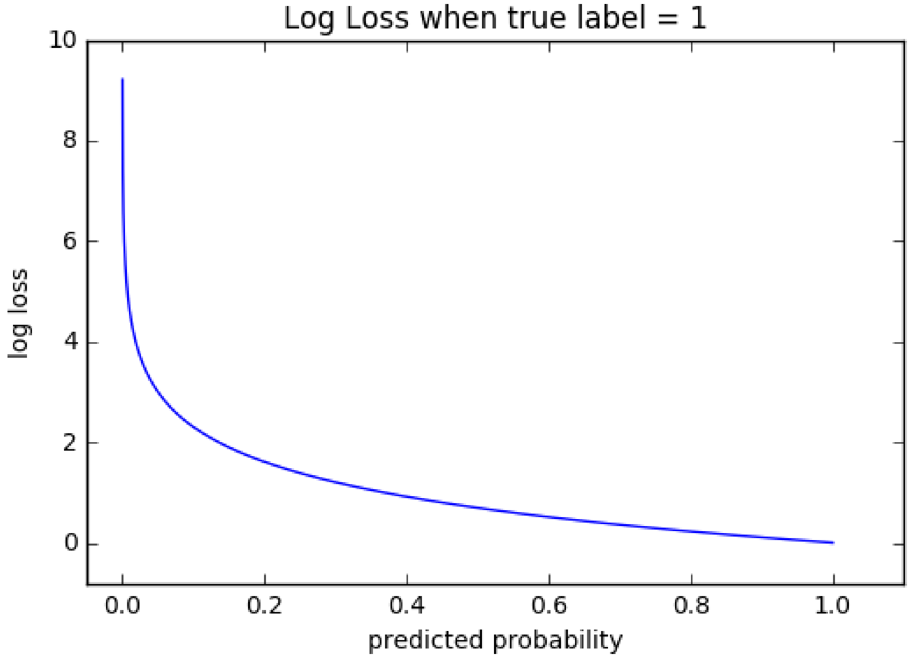
Q: Care sunt valorile minime/maxime pe care le poate avea funcție de pierdere L_i?

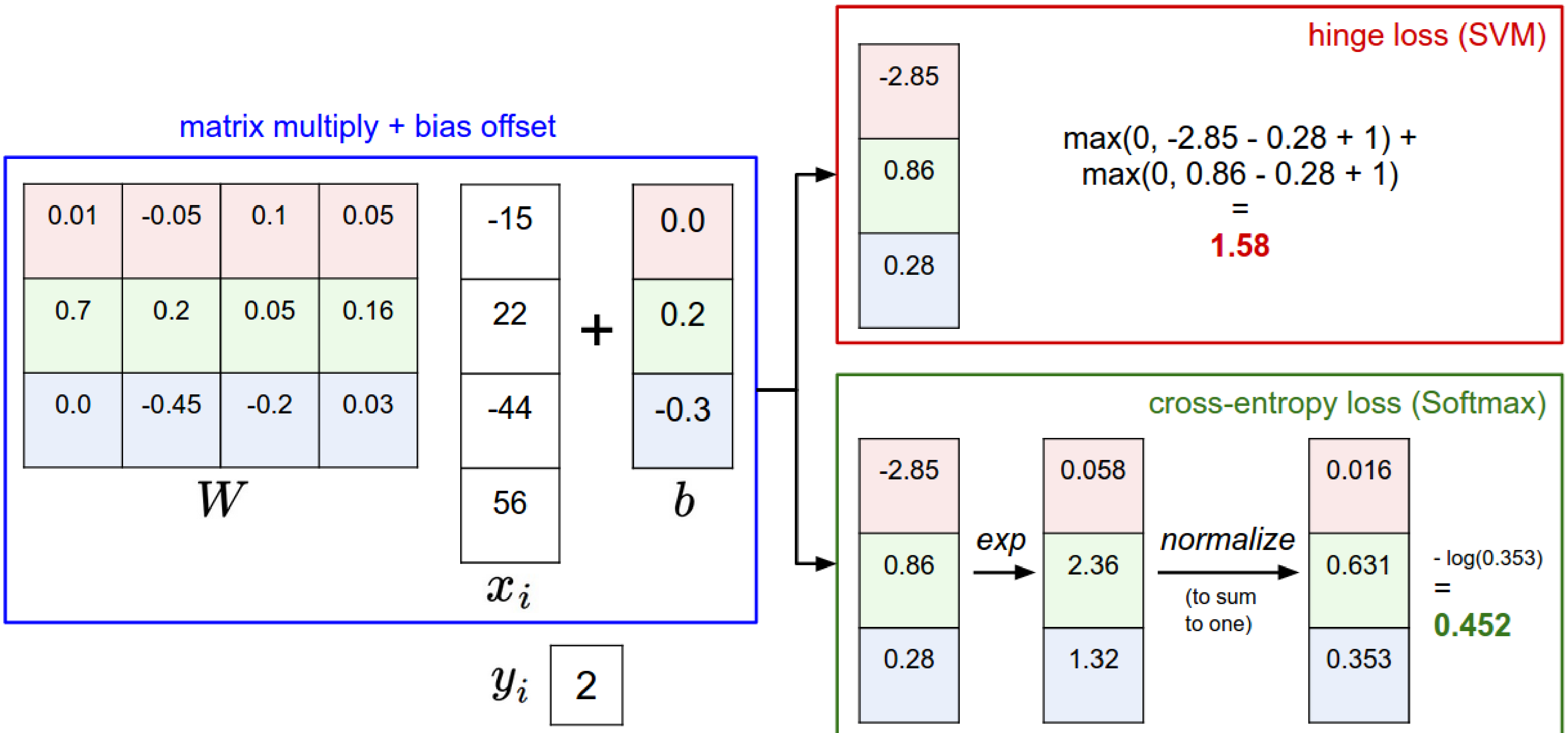
	log-probabilități nenormalizate	exp	probabilități nenormalizate	normalizare	probabilități
pisică	**3.2**	→	**24.5**	→	**0.13**
mașină	5.1	→	164.0	→	0.87
broască	-1.7	→	0.18	→	0.00

→ $L_i = -\log(0.13)$
$= \mathbf{0.89}$

Clasificatorul Softmax (Regresia Logistică Multinomială)

$$\mathcal{L}_i = -log\left(\frac{e^{s_{y_i}}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$





matrix multiply + bias offset
0.01 -0.05 0.1 0.05
0.7 0.2 0.05 0.16
0.0 -0.45 -0.2 0.03
W
-15
22
-44
56
x_i
+
0.0
0.2
-0.3
b
y_i 2
hinge loss (SVM)
-2.85
0.86
0.28
max(0, -2.85 - 0.28 + 1) +
max(0, 0.86 - 0.28 + 1)
=
1.58
cross-entropy loss (Softmax)
-2.85
0.86
0.28
exp
0.058
2.36
1.32
normalize
(to sum
to one)
0.016
0.631
0.353
- log(0.353)
=
0.452

Softmax vs. SVM

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{s_{y_i}}}{\sum_j e^{s_j}}\right) \qquad\qquad L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Presupunem scorurile:
[10, -2, 3]
[10, 9, 9]
[10, -100, -100]
și $\boxed{y_i = 0}$

Q: Dacă perturbăm vectorul de trăsături cu valori mici (schimbând scorurile rezultate), ce se întâmplă cu funcția de pierdere în cele două cazuri?

Optimizarea funcțiilor de pierdere

Până acum avem:

- O mulțime de perechi (x,y)
- O funcție de atribuire a scorului: $s = f(x; W) \overset{\text{e.g.}}{=} Wx$
- O funcție de pierdere:

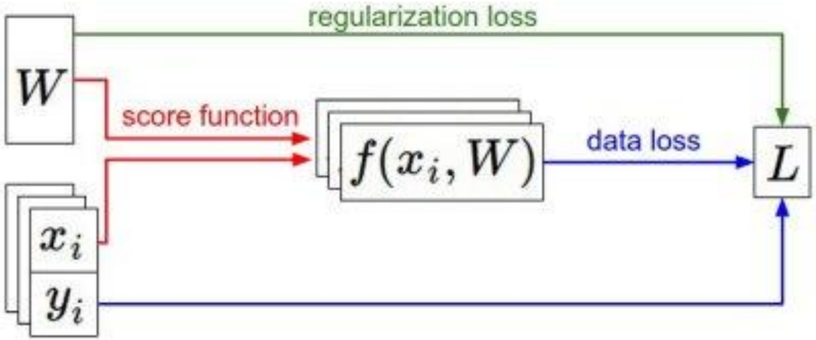
Softmax

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{s_{y_i}}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

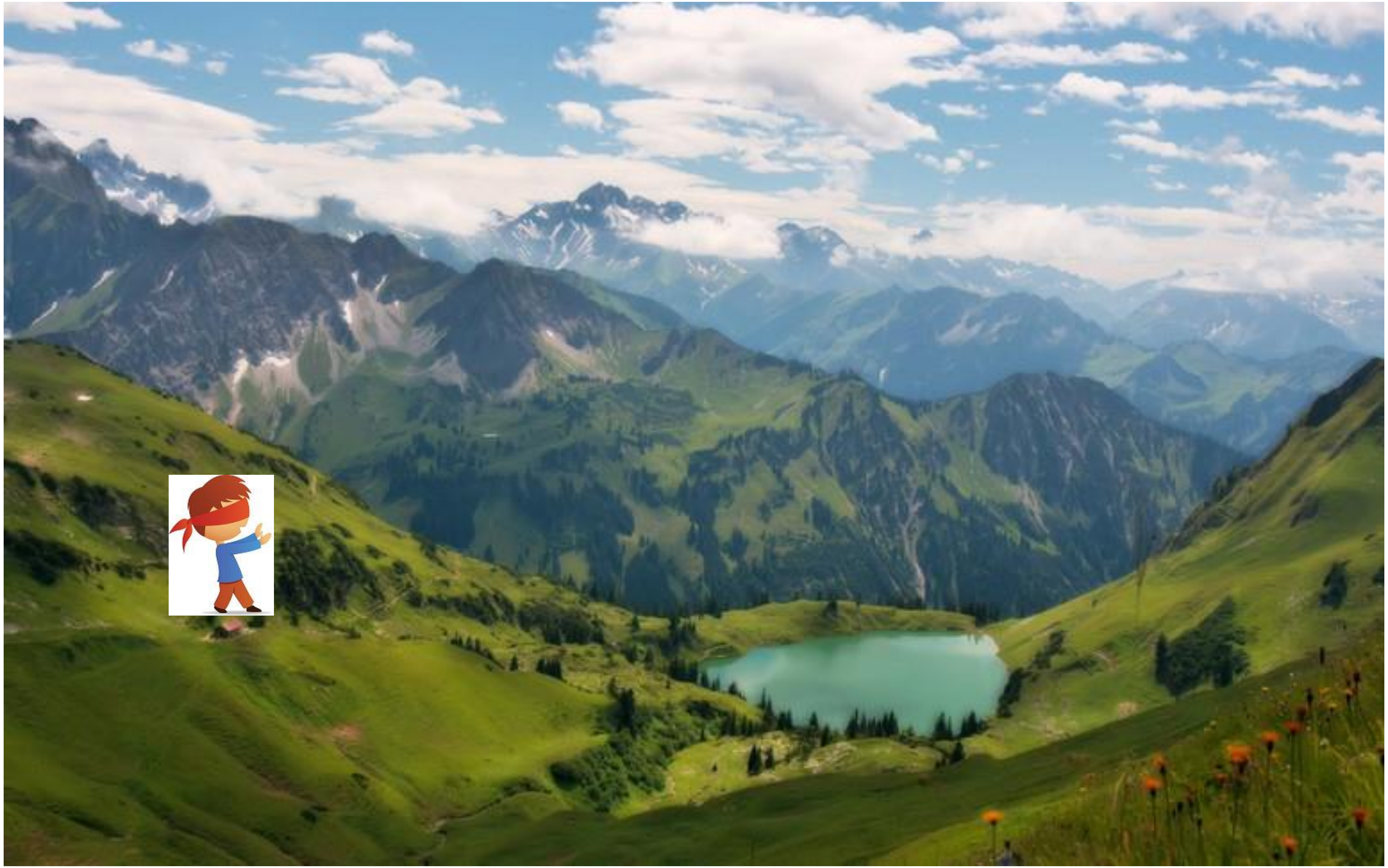
SVM

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i + R(W)$$ Cu regularizare



Algoritm: Coborârea pe gradient



Algoritm: Coborârea pe gradient

Într-o singură dimensiune, derivata unei funcții este:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

În mai multe dimensiuni, **gradientul** este un vector cu derivate parțiale.

W actual:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (dim 1)**:**

[0.34 + **0.0001**,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25322

gradientul dW:

[?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,…]

W actual:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (dim 1)**:**

[0.34 + **0.0001**,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25322

gradientul dW:

[**-2.5**,
?,
?,

(1.25322 - 1.25347)/0.0001
= -2.5

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

?,
?,…]

W actual:	**W + h** (dim 2)**:**	**gradientul dW:**
[0.34,	[0.34,	[-2.5,
-1.11,	-1.11 + **0.0001**,	?,
0.78,	0.78,	?,
0.12,	0.12,	?,
0.55,	0.55,	?,
2.81,	2.81,	?,
-3.1,	-3.1,	?,
-1.5,	-1.5,	?,
0.33,…]	0.33,…]	?,…]
loss 1.25347	**loss 1.25353**	

W actual:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (dim 2)**:**

[0.34,
-1.11 + **0.0001**,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25353

gradientul dW:

[-2.5,
0.6,
?,
?,

(1.25353 - 1.25347)/0.0001
= 0.6

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

?,…]

Evaluarea gradientului

1) Metoda numerică
Alegem un h pozitiv aproape de 0 și folosim formula:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Obținem o valoare aproximativă
- Foarte încet de calculat

2) Metoda analitică
Folosim analiza numerică pentru a determina formula gradientului în funcție X și W

Evaluarea gradientului (Python)

```
def f(x):
    y = 0.5 * (x**4) - 2 * (x**2) + x + 5
    return y
# 1) Metoda numerică
h = 0.001
gradient = (f(x + h) - f(x)) / h
# 2) Metoda analitică
def f_prime(x):
    y_prime = 2 * (x**3) - 4 * x + 1
    return y_prime
gradient = f_prime(x)
```

W actual:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]
loss 1.25347

dW = ...
(o funcție de x și W)

gradientul dW:

[-2.5,
0.6,
0,
0.2,
0.7,
-0.5,
1.1,
1.3,
-2.1,…]

În concluzie:

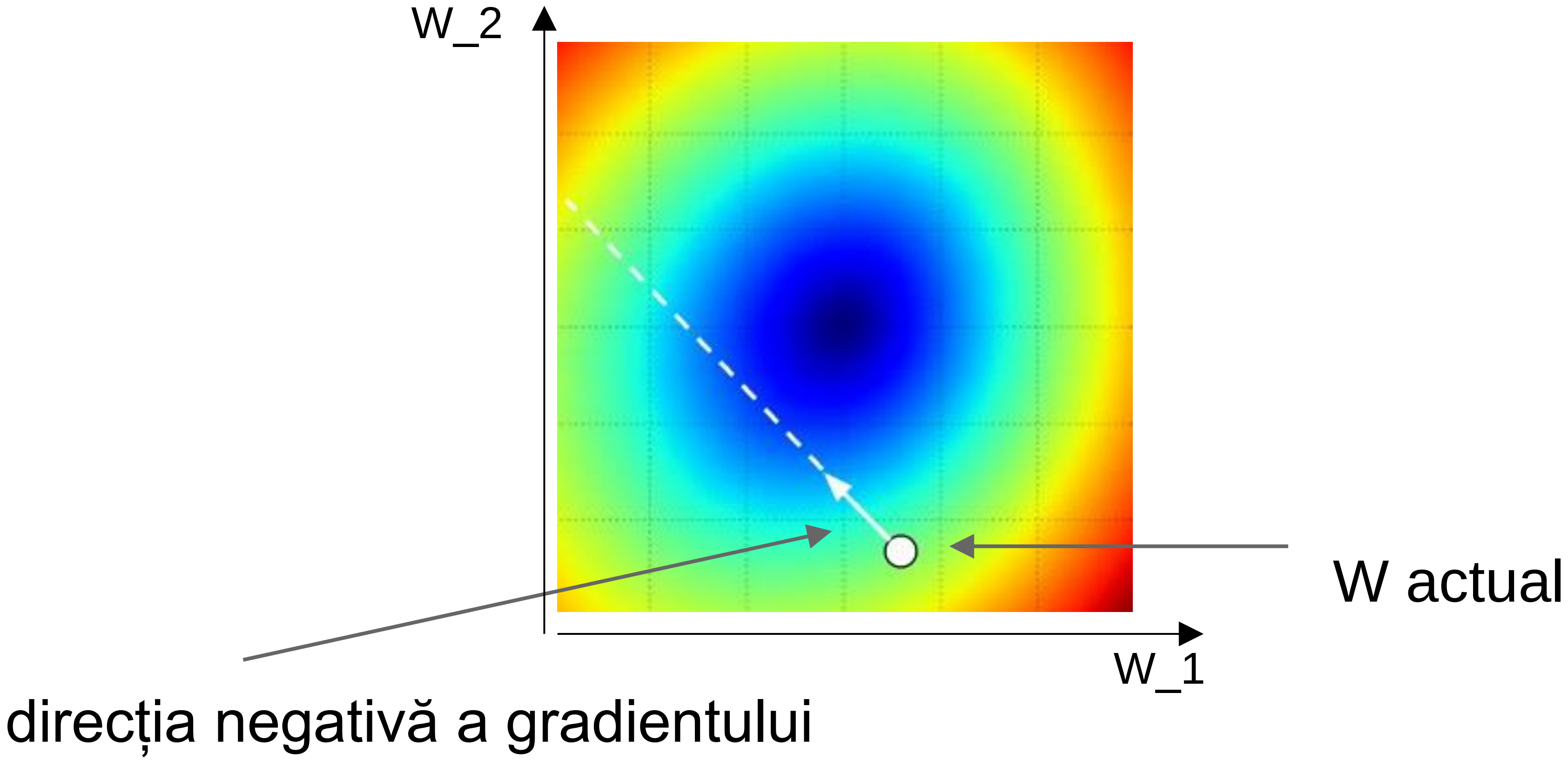
- Gradientul numeric: aproximativ, încet, ușor de scris
- Gradientul analitic: exact, rapid, înclinat spre greșeli

=>

<u>În practică:</u> Folosim întotdeauna gradientul analitic, dar verificăm implementarea cu gradientul numeric. Acest proces se numește **verificarea gradientului (gradient checking)**

Algorimtul coborârii pe gradient (Python)

```
def GD(W0, X, goal, learningRate):
    perfGoalNotMet = true
    W = W0

    while perfGoalNotMet:
        gradient = eval_gradient(X, W)
        W_old = W
        W = W - learningRate * gradient
        perfGoalNotMet = sum(abs(W - W_old)) > goal
```

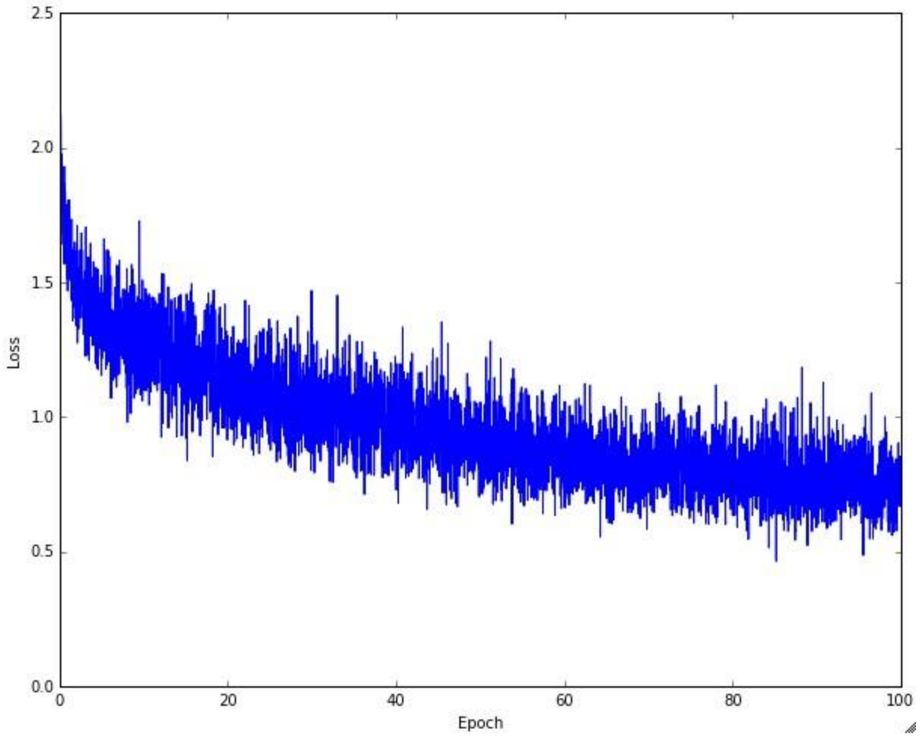

W_2
W_1
W actual
direcția negativă a gradientului

Coborârea pe gradient cu mini-batch

Utilizăm doar o mică parte a mulțimii de antrenare pentru a calcula gradientul:

```
. . .
while perfGoalNotMet:

      X_batch = select_random_subsample(X)
      gradient = eval_gradient(@loss, X_batch, W)
      . . .
```

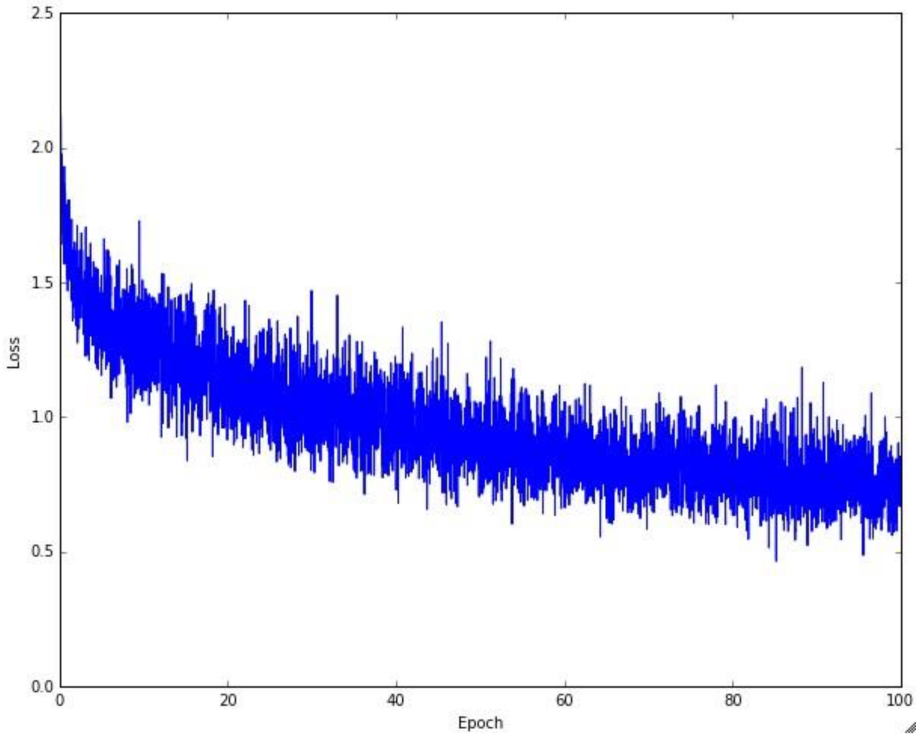
Mărimea mini-batch-ului este de obicei formată din 64/128/256 exemple
e.g. AlexNet (Krizhevsky ILSVRC ConvNet) folosește 256 exemple

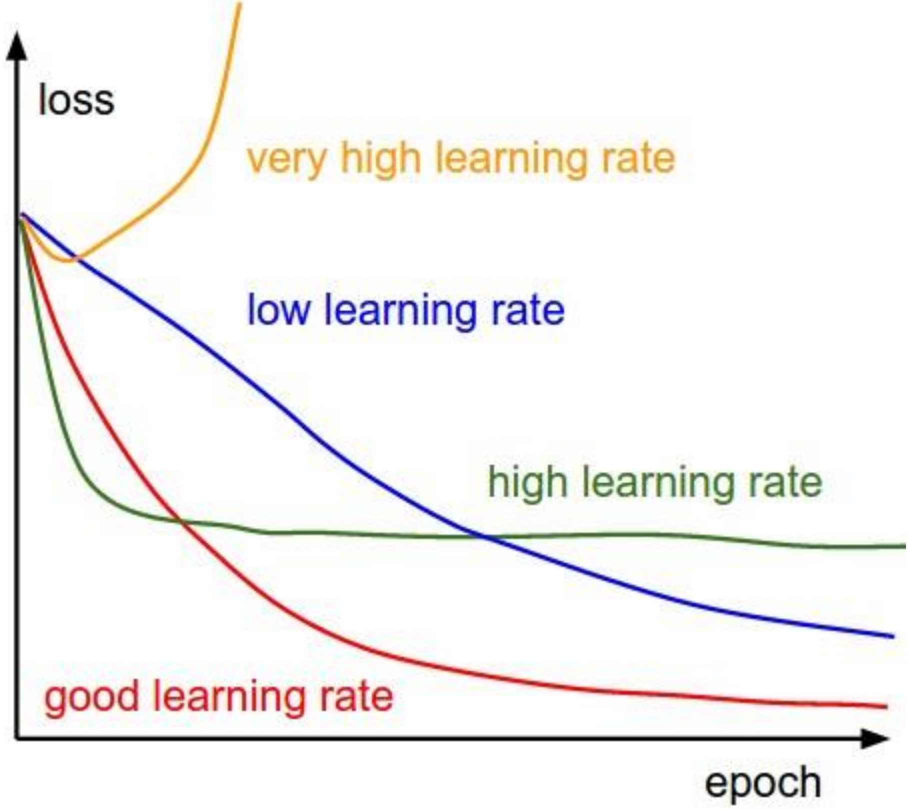


Exemplu de progres al optimizării în timpul antrenării unei rețele neuronale.

(Funcția de pierdere calculată pe mini-batch-uri scade în timp)

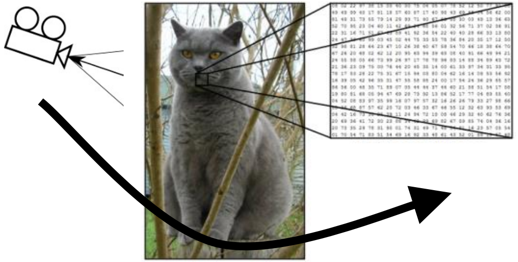
Efectele ratei de învățare





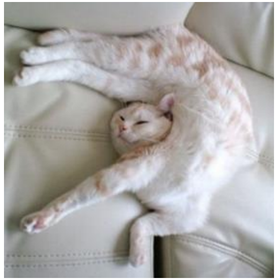
Varietatea intra-clasă

Poziția camerei



Iluminare

Deformare



Ocluzie

Background confuz

Variație intra-clasă

Similaritatea inter-clasă

De la extragere “manuală” către învățare

vector ce descrie statistici despre imagine, e.g. bag of visual words

[32x32x3]

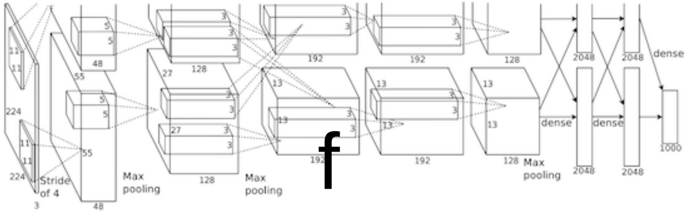
Extragere de trăsături

f

N numere ce indică scorurile pentru fiecare clasă

învățare

[32x32x3]

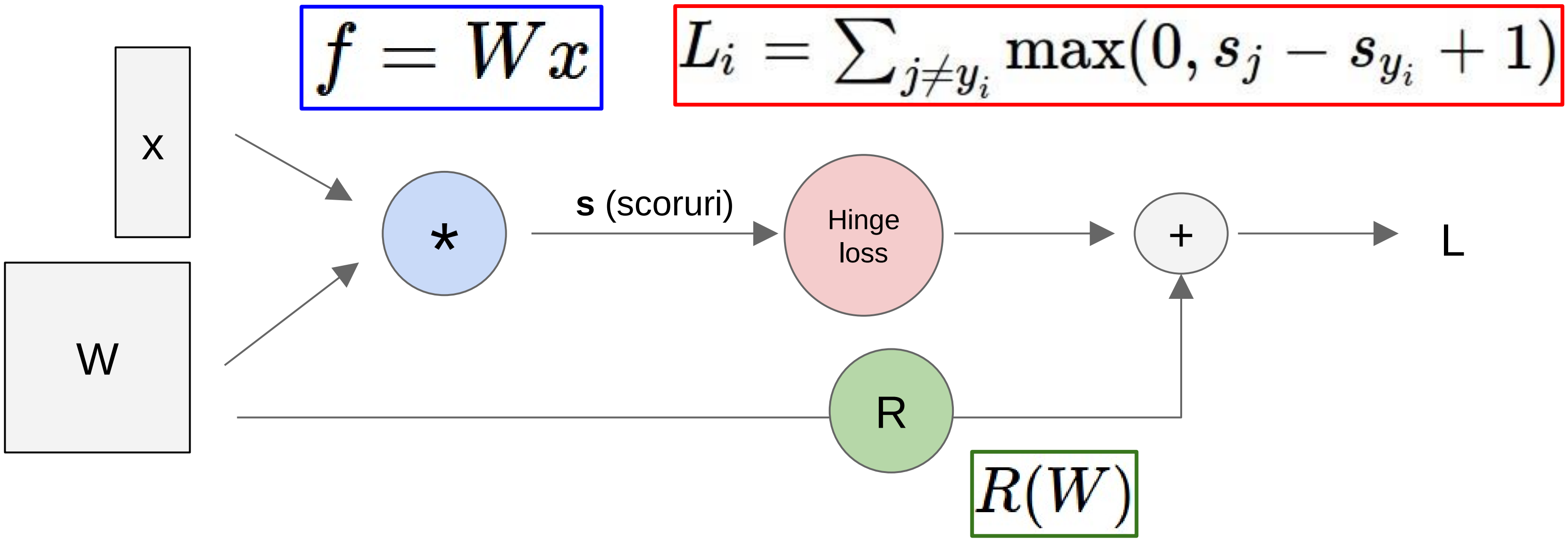


f

N numere ce indică scorurile pentru fiecare clasă

învățare “end-to-end”

Privim algoritmul ca un graf computațional

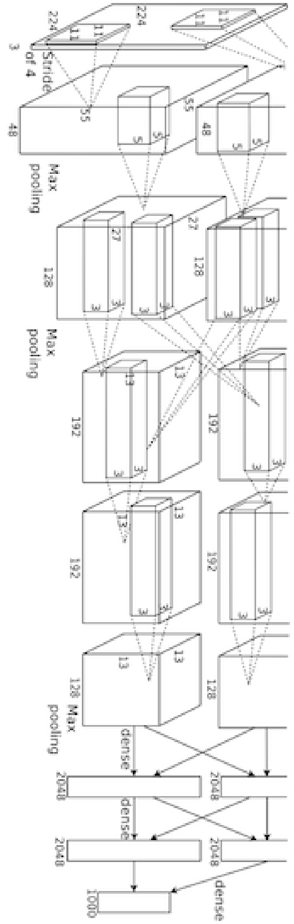


Rețea convoluțională (AlexNet)

imagine de input

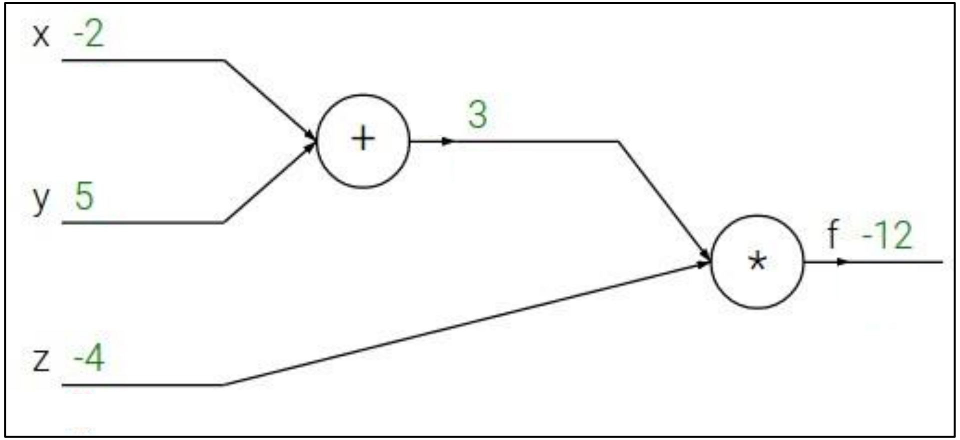
ponderi

funcție de pierdere



$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4



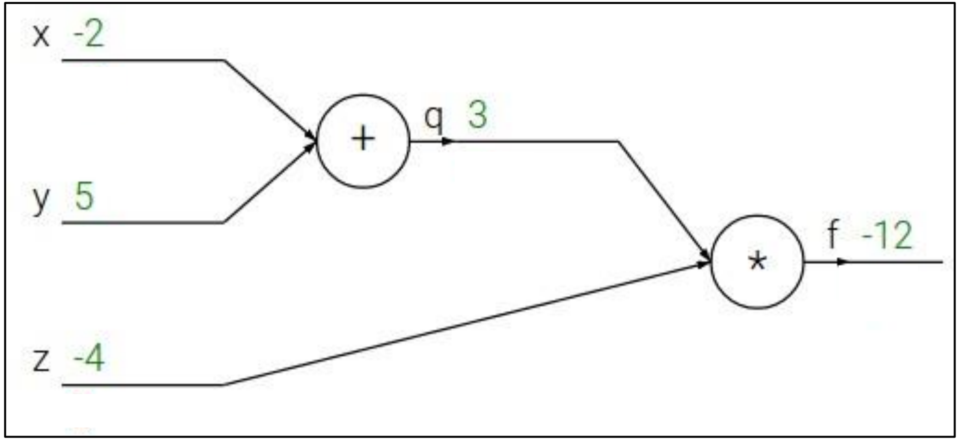
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



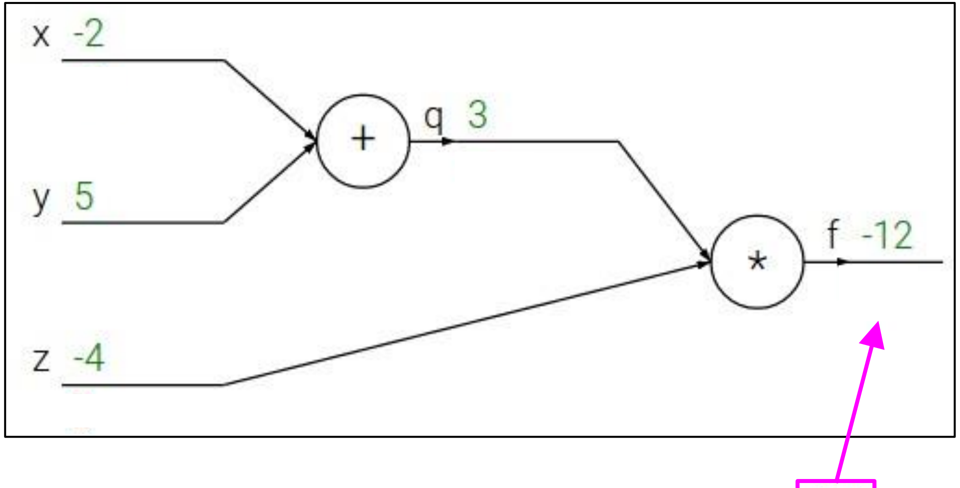
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$\boxed{q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1}$$

$$\boxed{f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q}$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial f}}$$

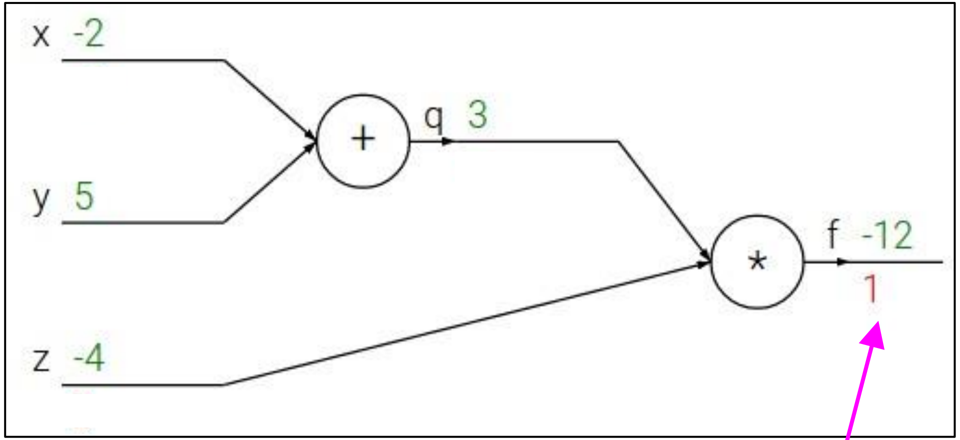
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

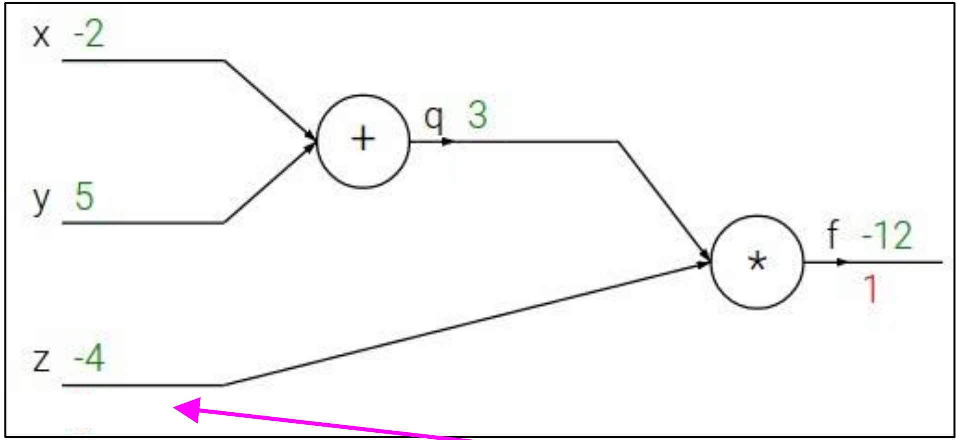
vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial f}$$

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4



$$\boxed{q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1}$$

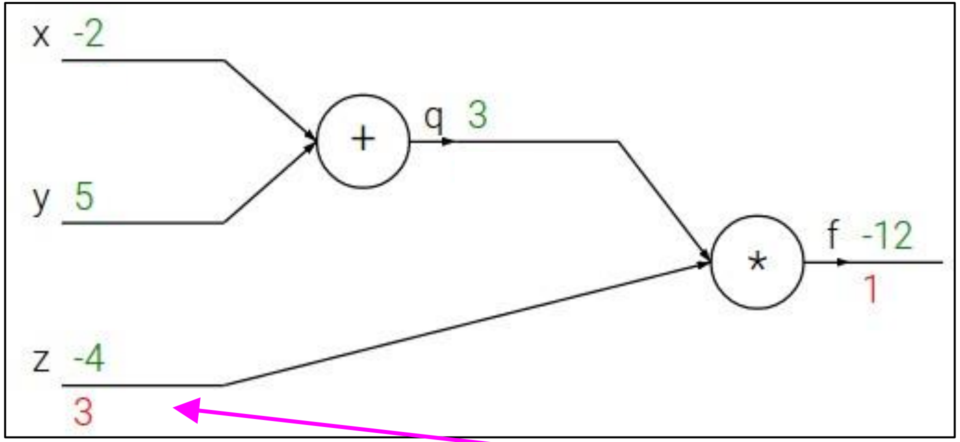
$$\boxed{f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

vrem: $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$

$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\boxed{q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1}$$

$$\boxed{f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q}$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

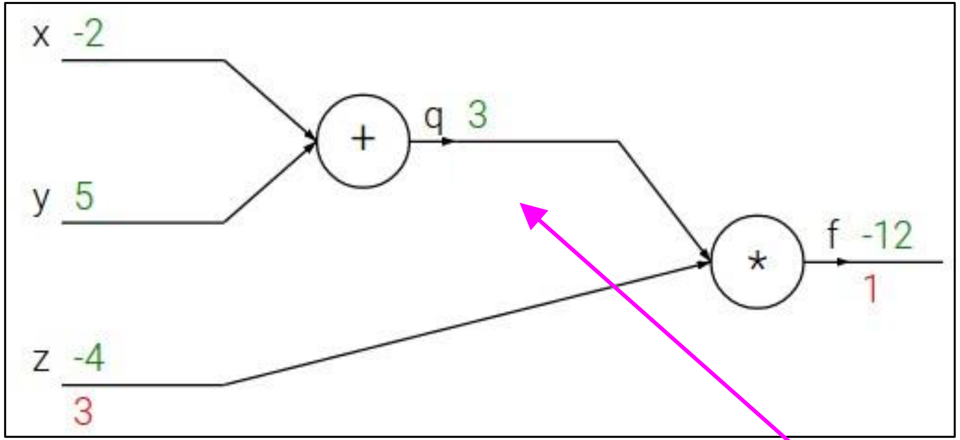
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

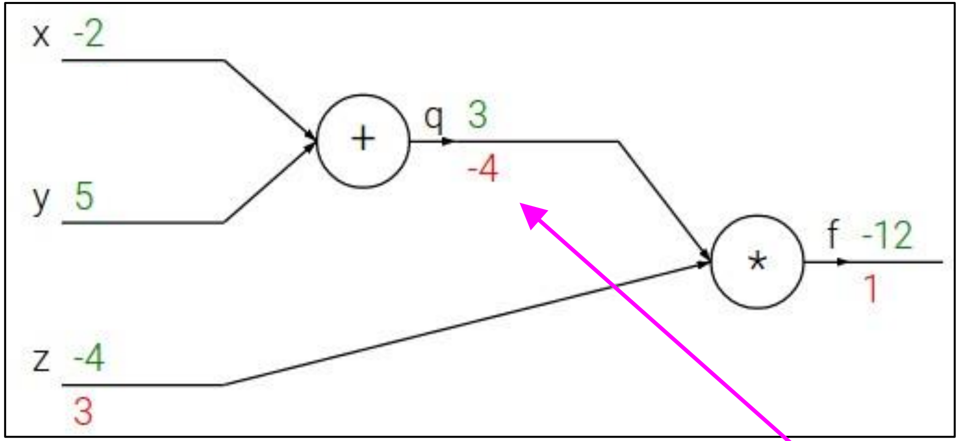
vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4



$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial q}}$$

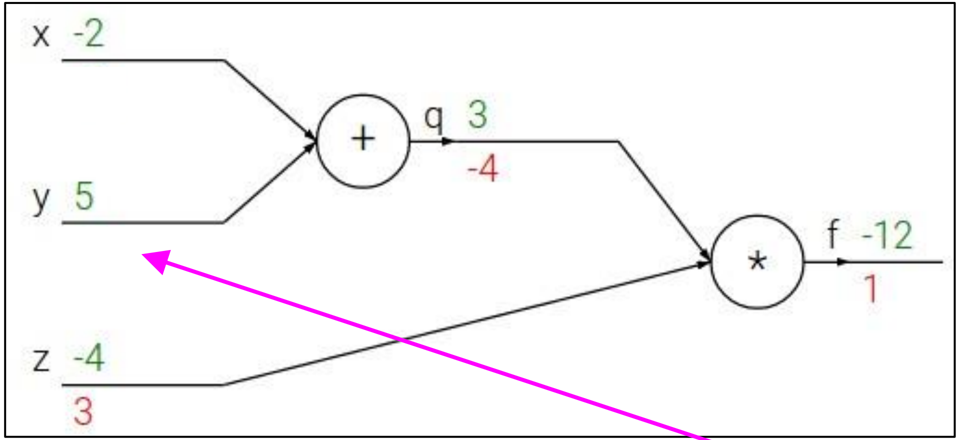
vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

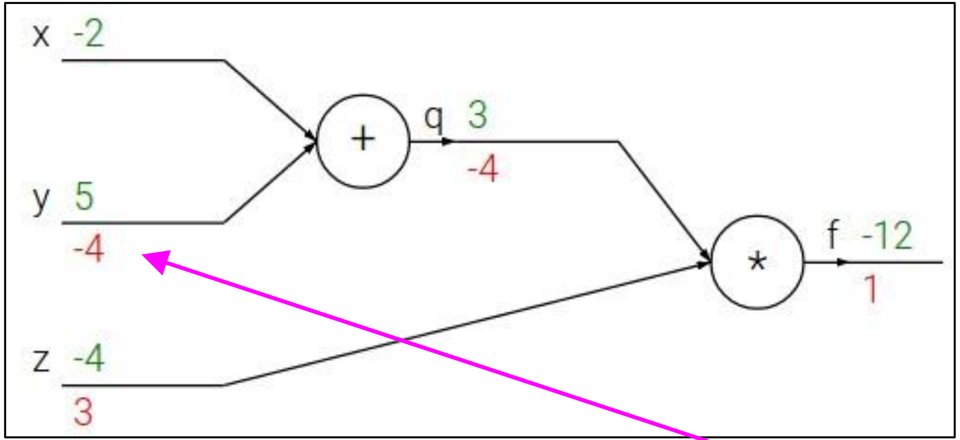
$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Regula de înlănțuire:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y}}$$

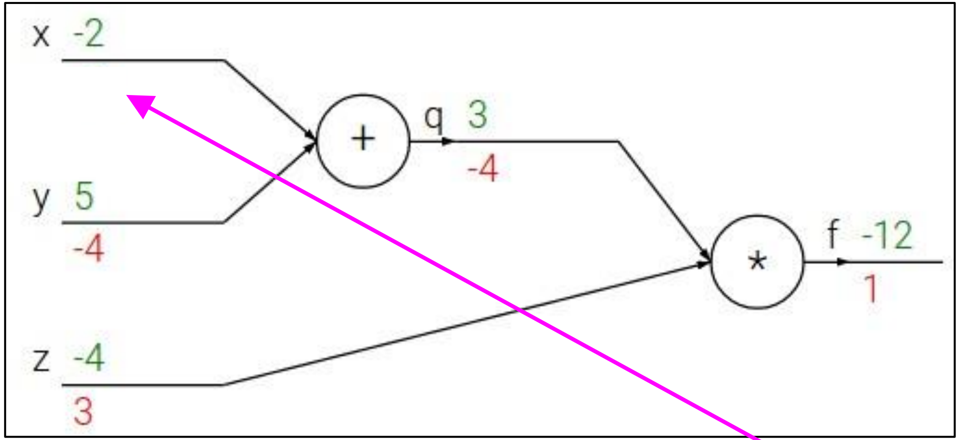
$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

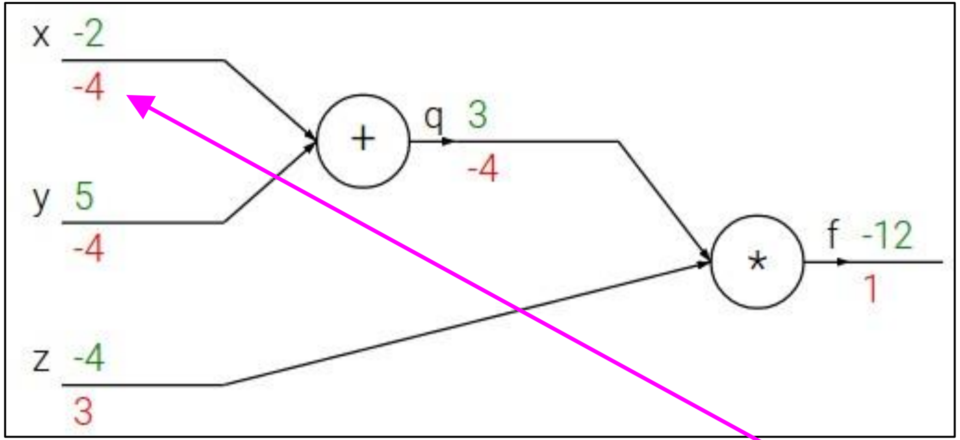
$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

e.g. x = -2, y = 5, z = -4

$$q = x + y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

$$f = qz \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

vrem: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

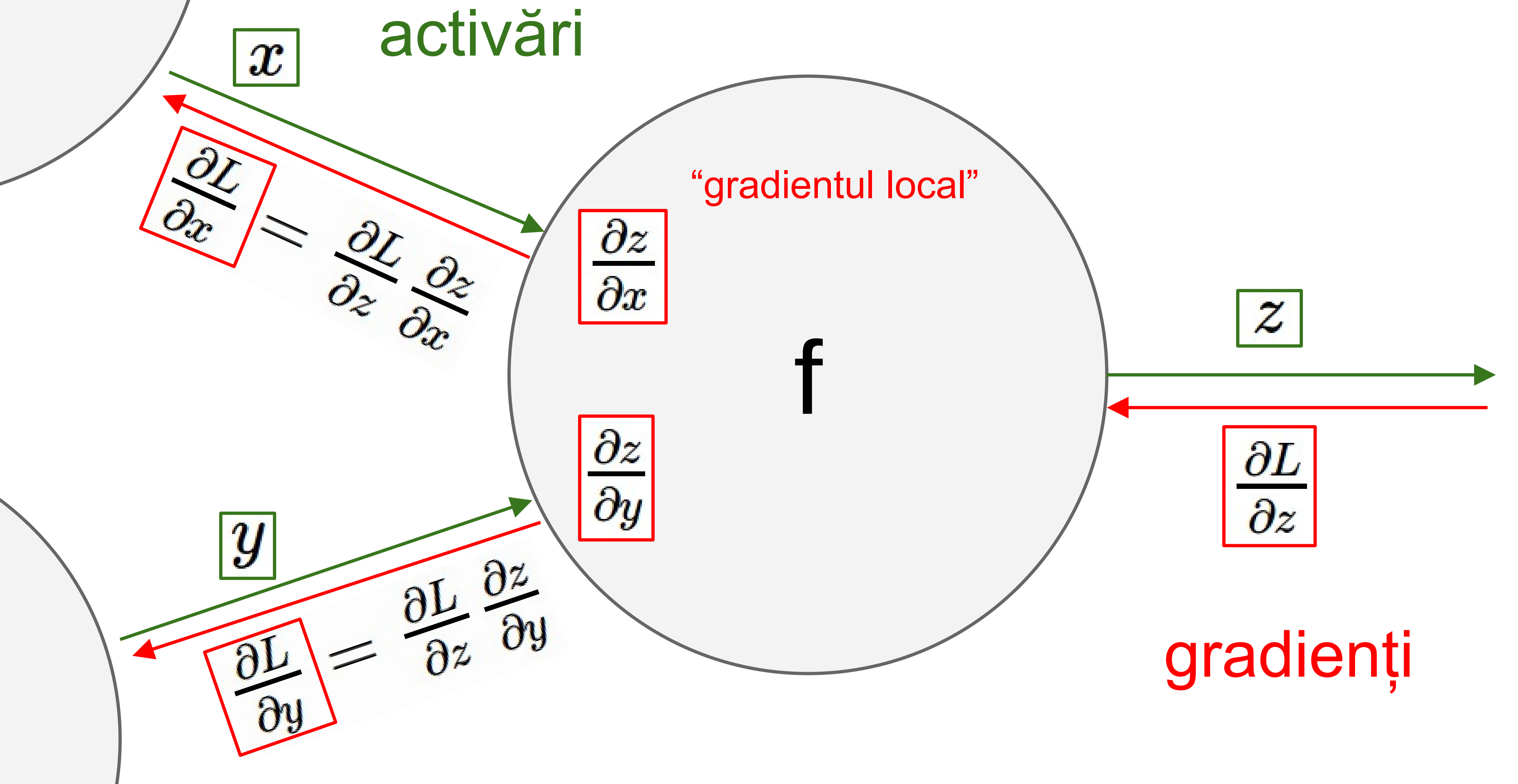


$\frac{\partial f}{\partial x}$

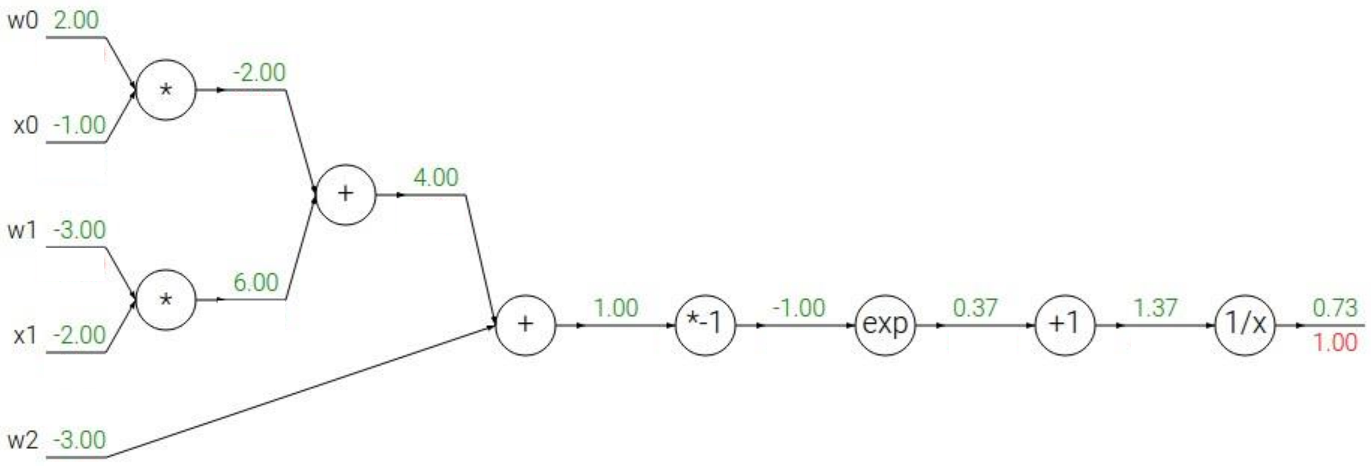
Regula de înlănțuire:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

Propagarea gradientului prin regula de înlănțuire



Un alt exemplu: $$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$

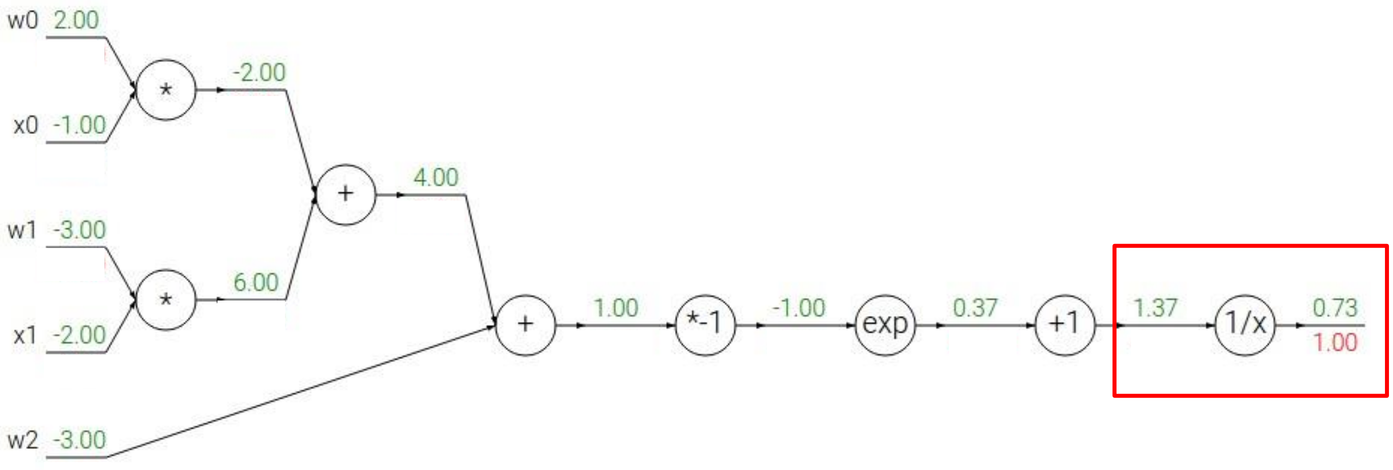


$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a \qquad\qquad f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

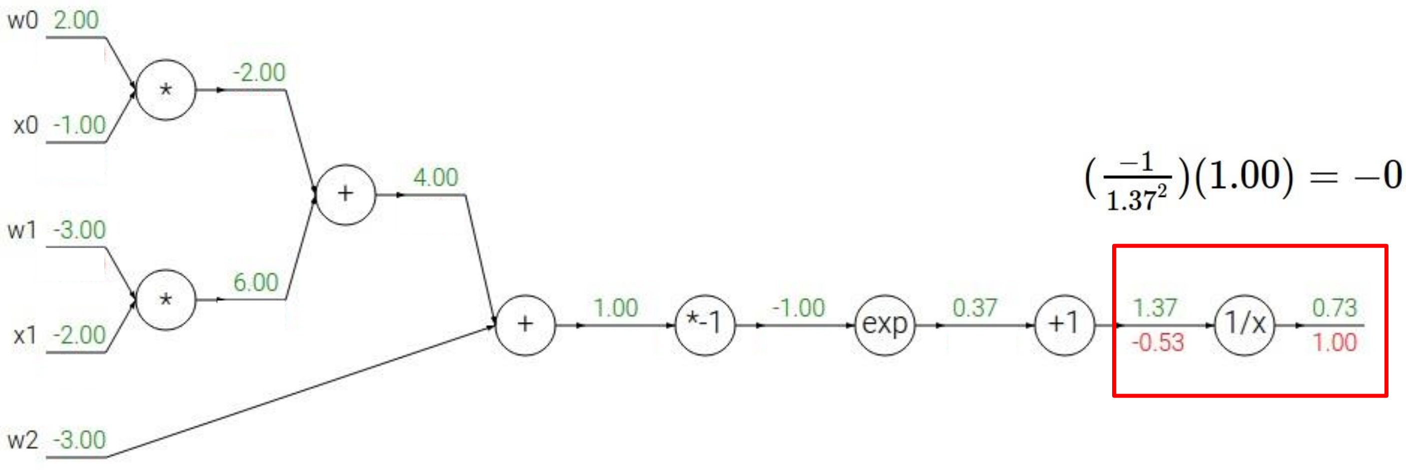
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2}$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$

$$\left(\frac{-1}{1.37^2}\right)(1.00) = -0.53$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

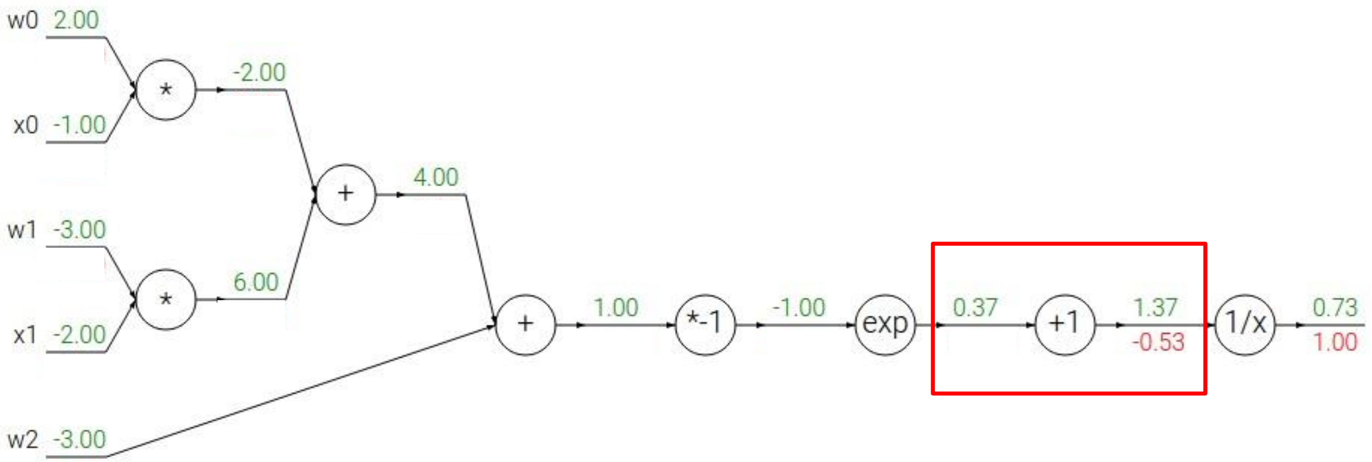
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2}$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

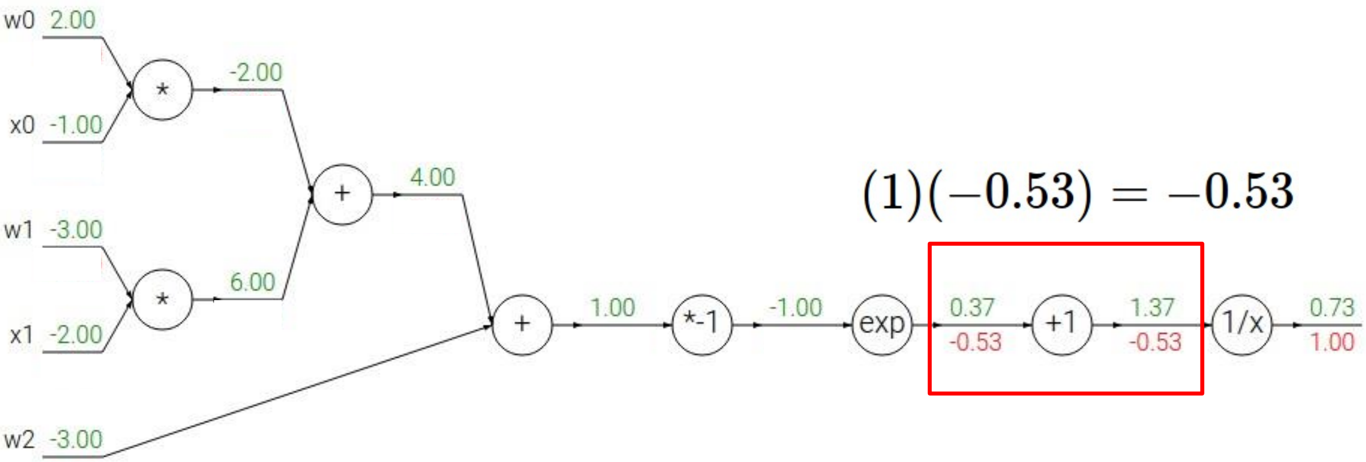
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$\boxed{f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1}$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



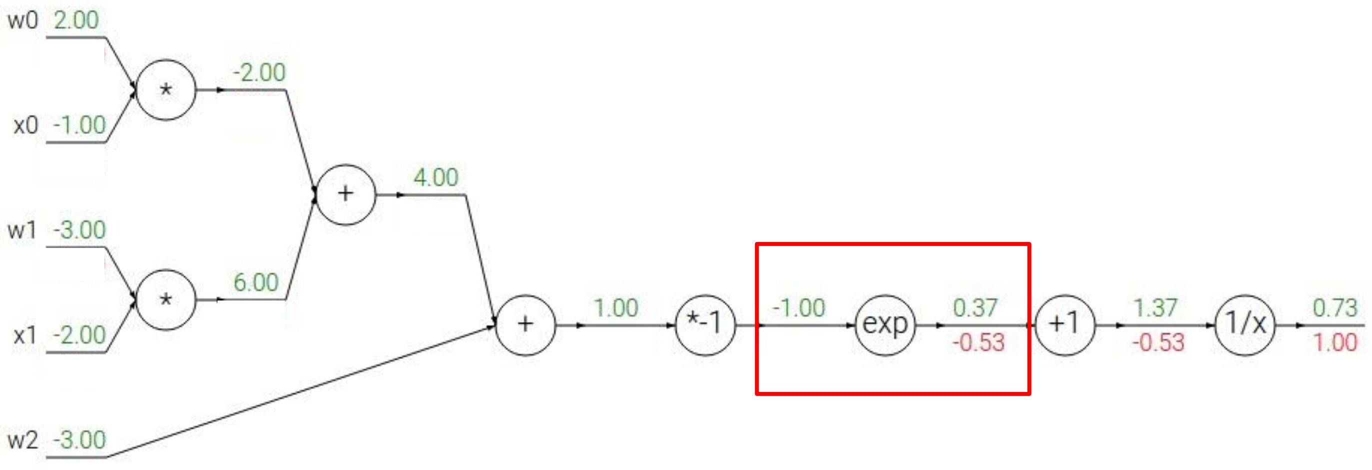
$$(1)(-0.53) = -0.53$$

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a \qquad\qquad \boxed{f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1}$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$\boxed{f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x}$$

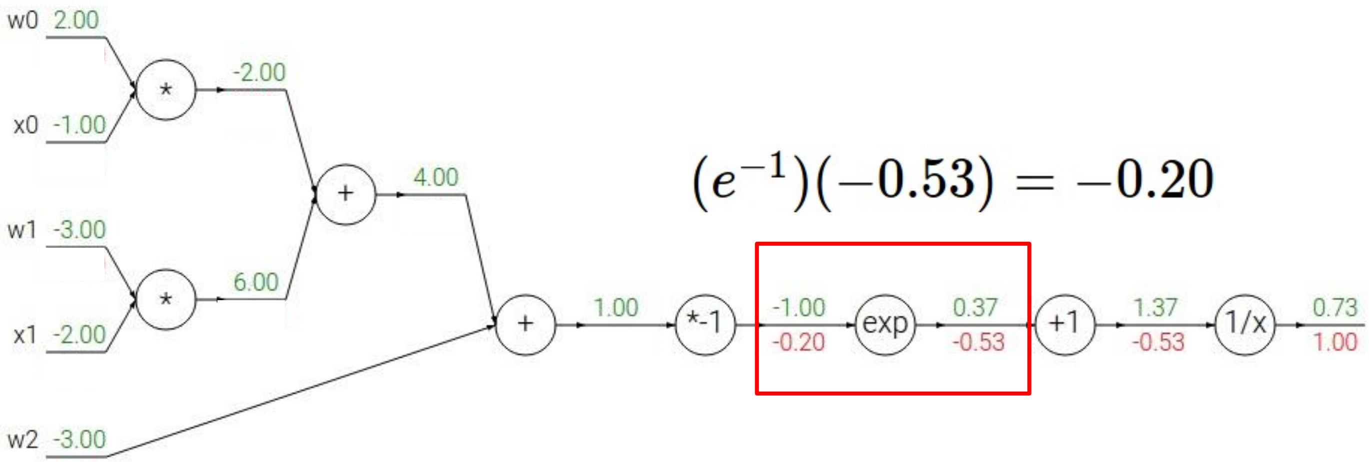
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$(e^{-1})(-0.53) = -0.20$$

$$\boxed{f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x}$$

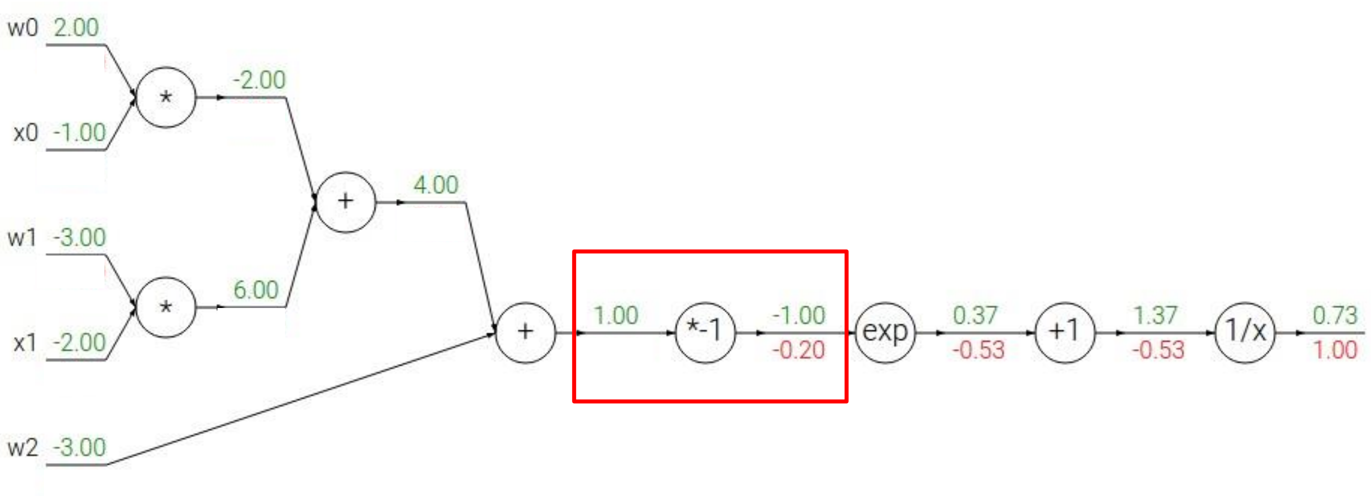
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

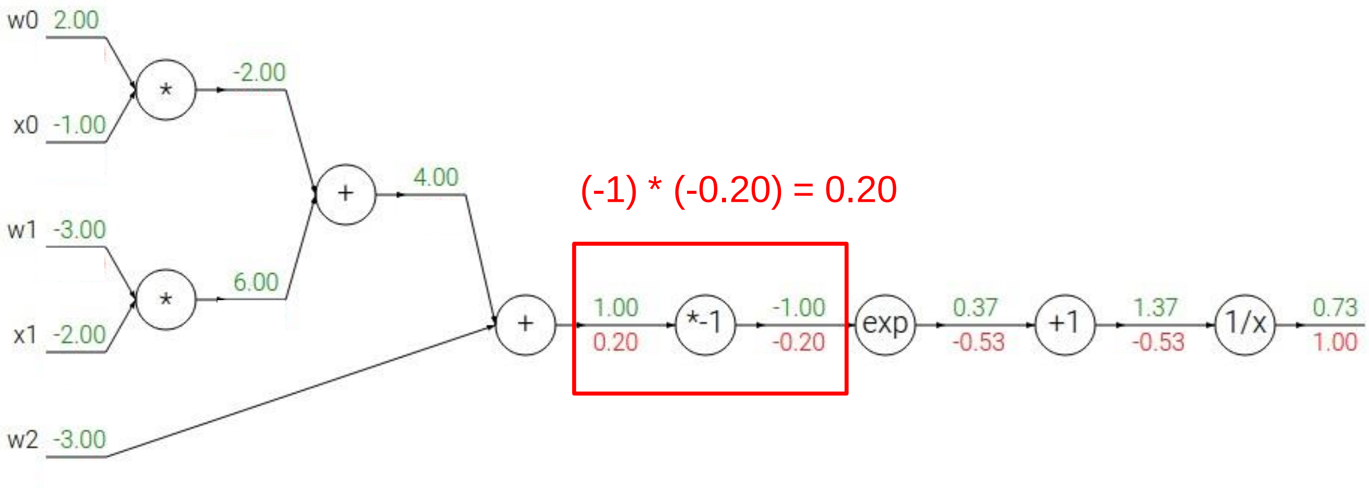
$$\boxed{f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

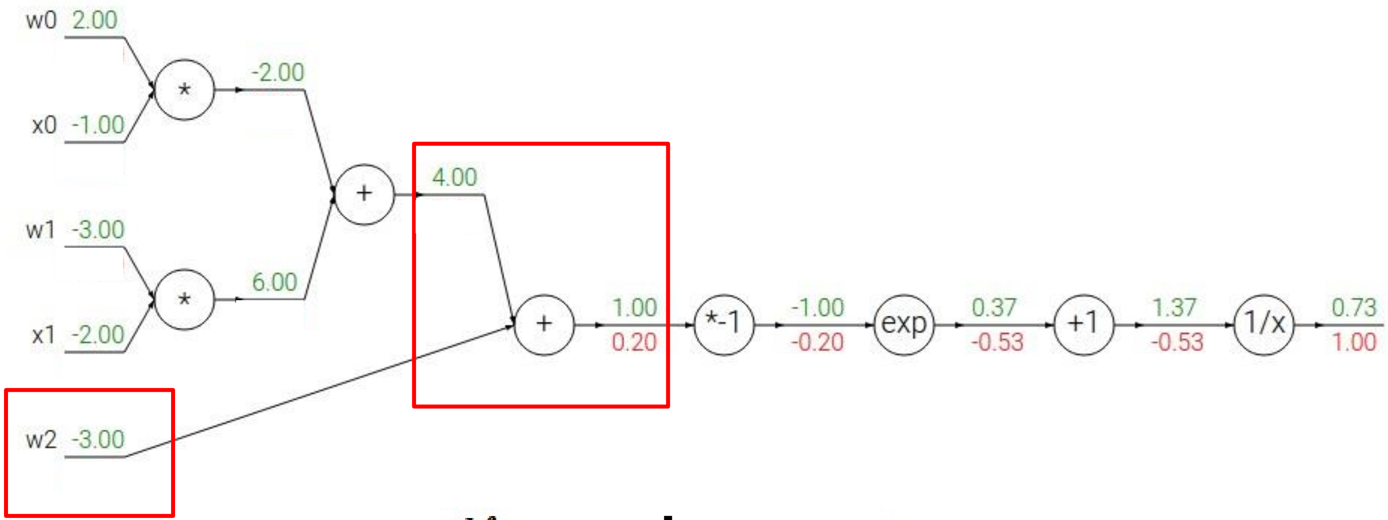
$$\boxed{f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$

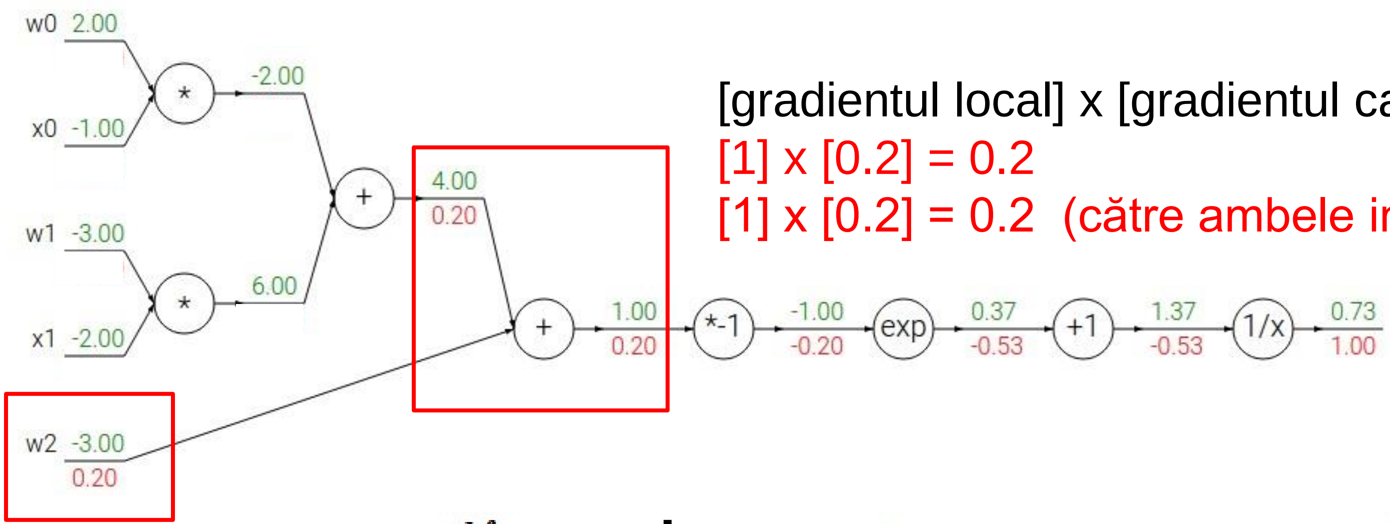


$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a \qquad\qquad f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



[gradientul local] x [gradientul calculat]

[1] x [0.2] = 0.2

[1] x [0.2] = 0.2 (către ambele intrări)

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

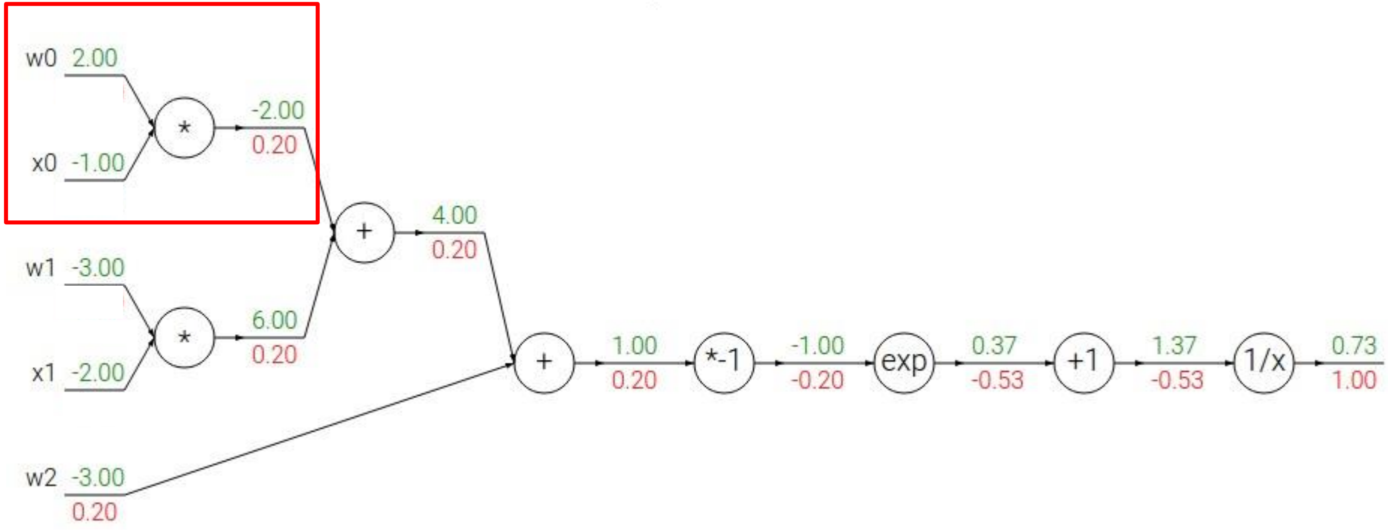
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

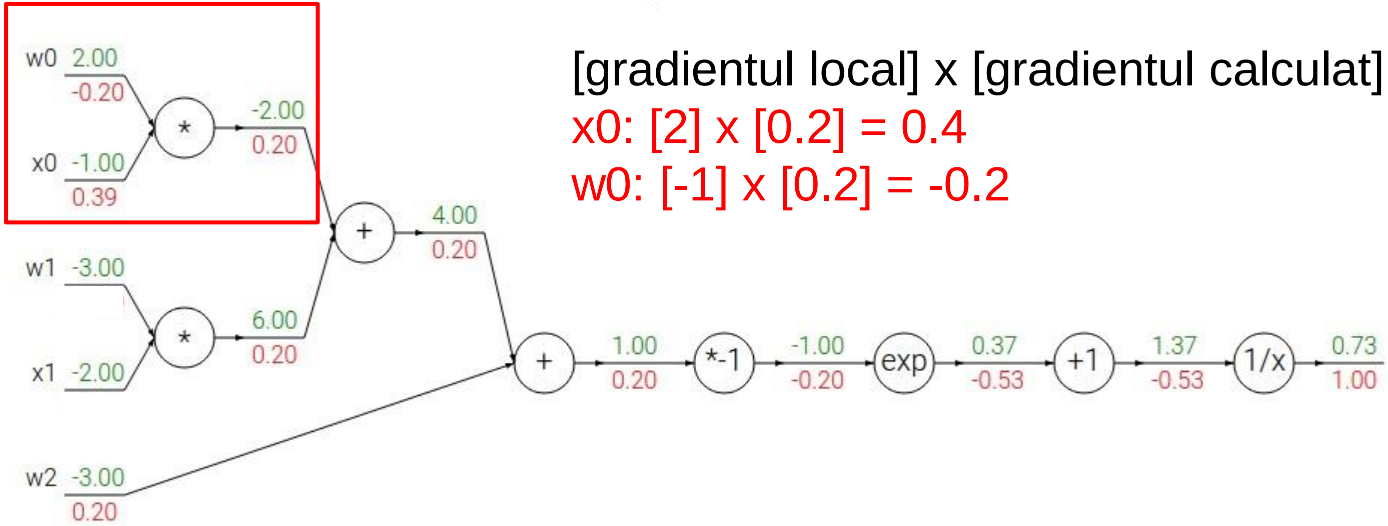
$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

Un alt exemplu:

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$



[gradientul local] x [gradientul calculat]

x0: [2] x [0.2] = 0.4

w0: [-1] x [0.2] = -0.2

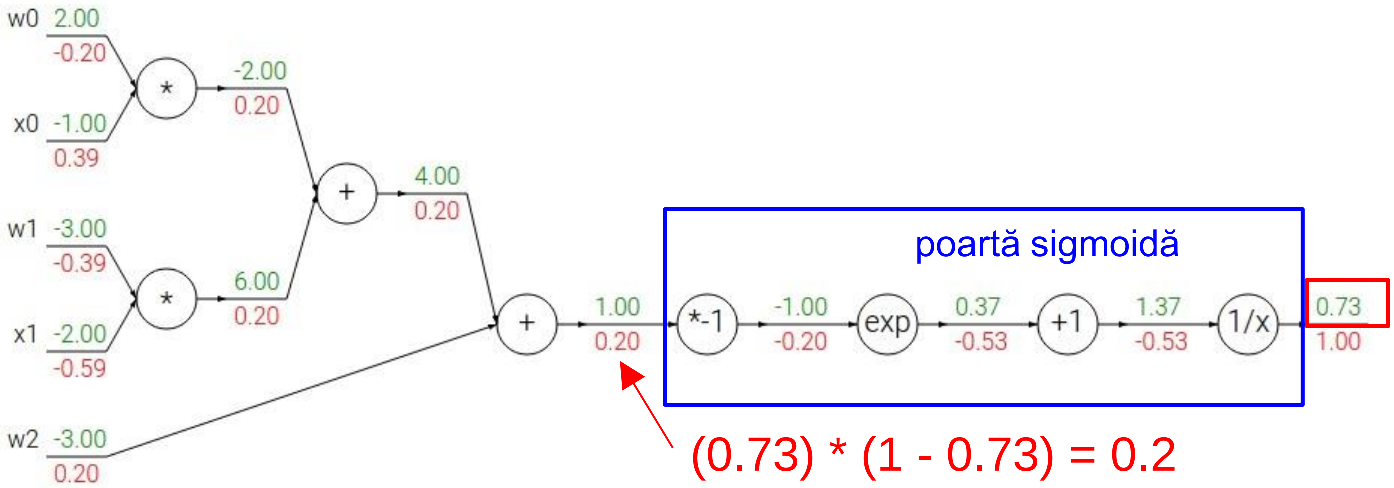
$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x \qquad\Bigg|\qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -1/x^2$$

$$f_a(x) = ax \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a \qquad\Bigg|\qquad f_c(x) = c + x \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1$$

$$f(w,x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0x_0+w_1x_1+w_2)}}$$

$$\boxed{\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}}$$ funcția sigmoidă

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \left(\frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}\right)\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = (1-\sigma(x))\,\sigma(x)$$

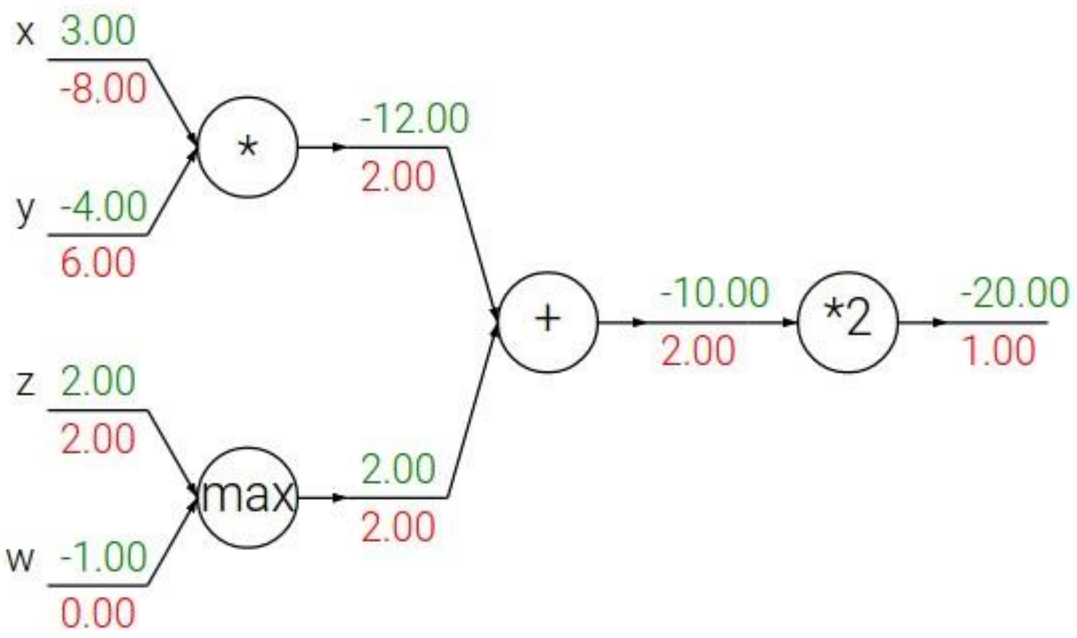


Tipare ce apar în propagarea înapoi a gradientului

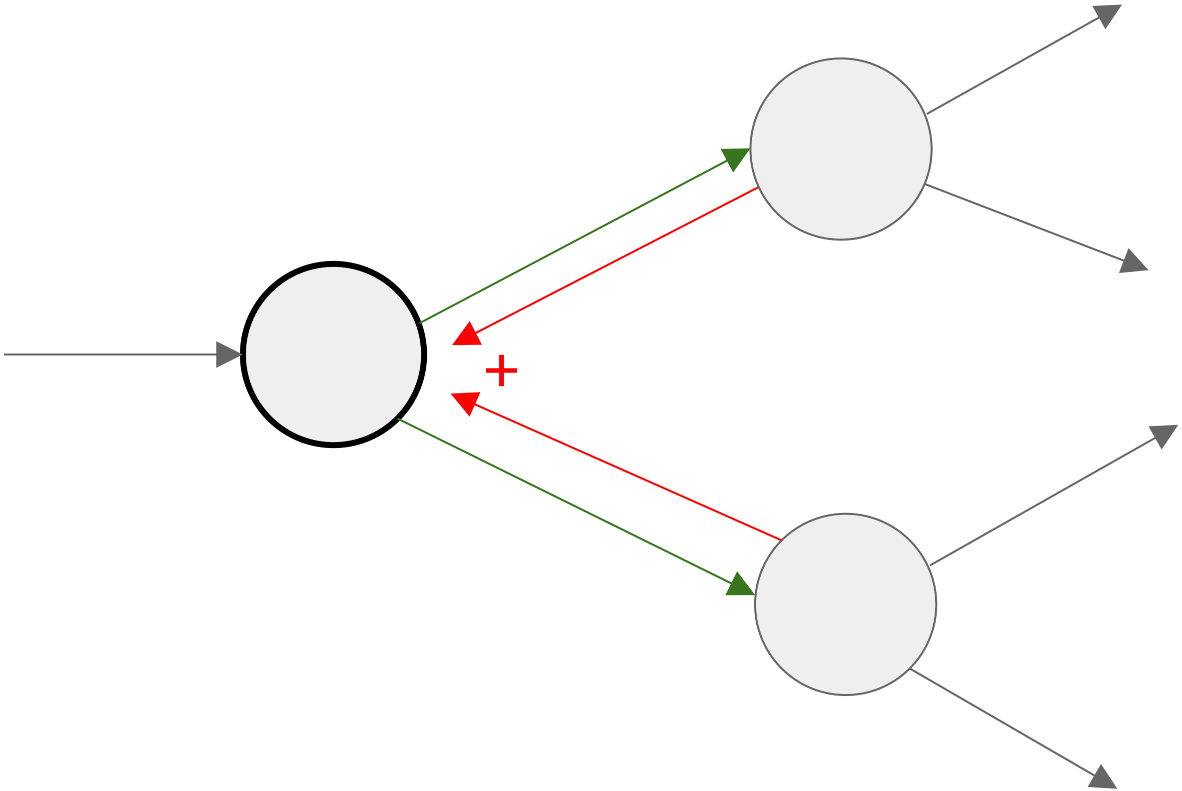
Poartă add: distribuie gradientul

Poartă max: rutează gradientul

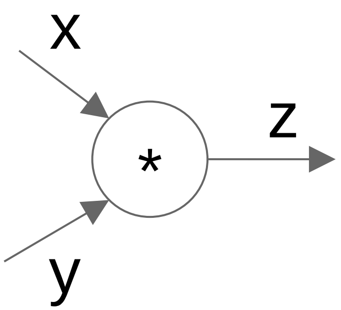
Poartă ori: comută gradientul



Atunci când se ramifică, gradienții se adună



Propagare înainte/înapoi pentru poarta ori (Python)



(x, y, z sunt scalari)

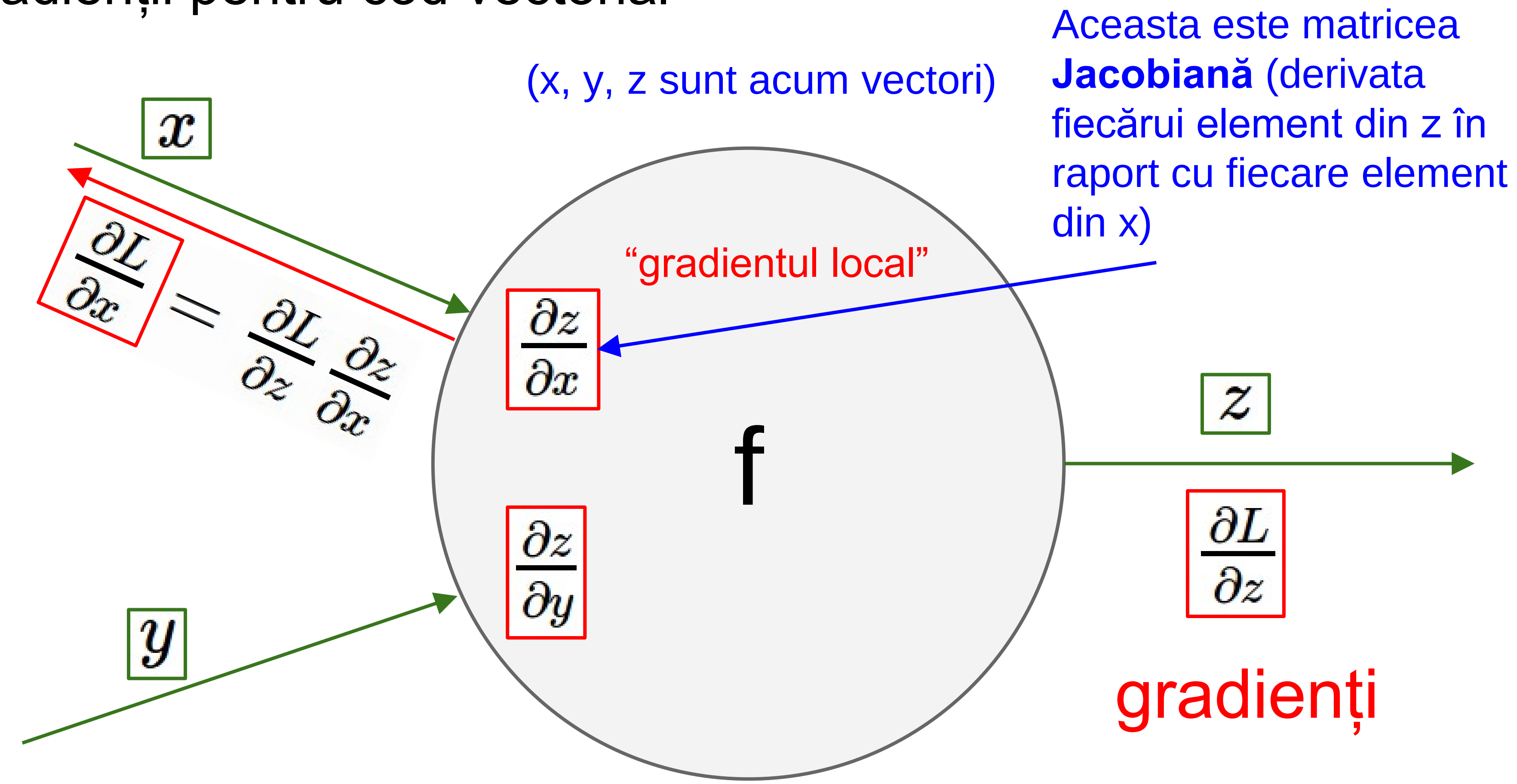
```
def forward(x,y):
    z = x * y
    layer.input = [x, y] # pt. backward
    return z
```

$$\frac{\partial L}{\partial z}$$

```
def backward(dz):
    dx = layer.input[1] * dz # dz/dx * dL/dz
    dy = layer.input[0] * dz # dz/dy * dL/dz
    return [dx, dy]
```

$$\frac{\partial L}{\partial x}$$

Gradienții pentru cod vectorial

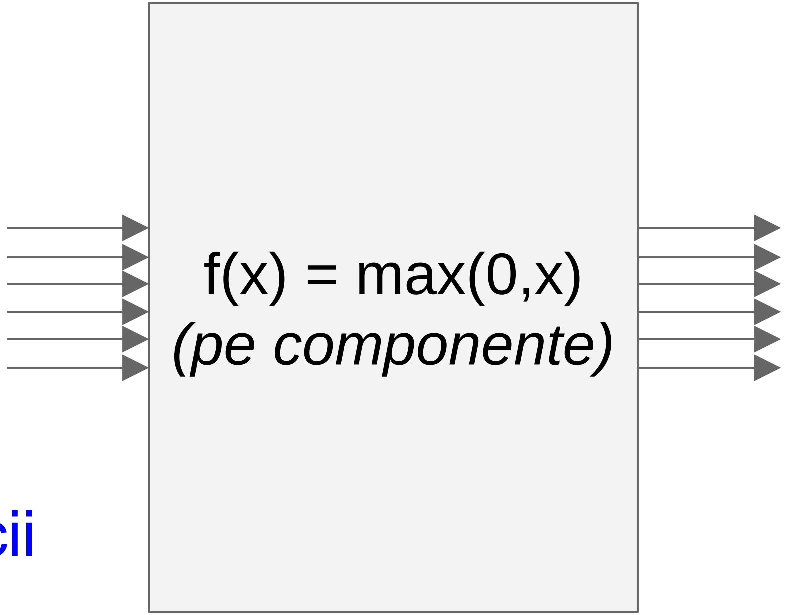


Operații vectoriale

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} \frac{\partial L}{\partial f}$$

matricea Jacobiană

Vector de input
4096-dimensional



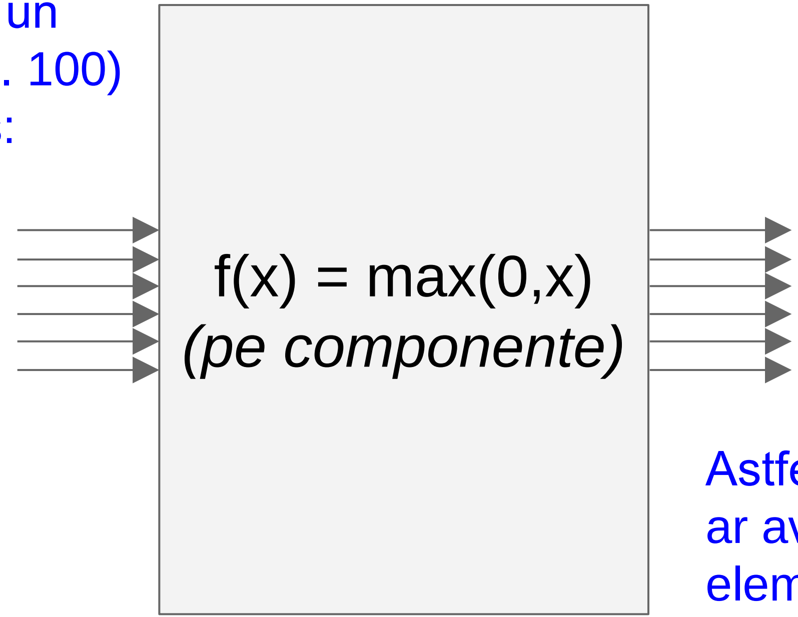
Vector de output
4096-dimensional

Q: care este mărimea matricii Jacobiene?
[4096 x 4096]

Operații vectoriale

În practică procesăm un întreg mini-batch (e.g. 100) de exemple la un pas:

Vector de input
4096-dimensional

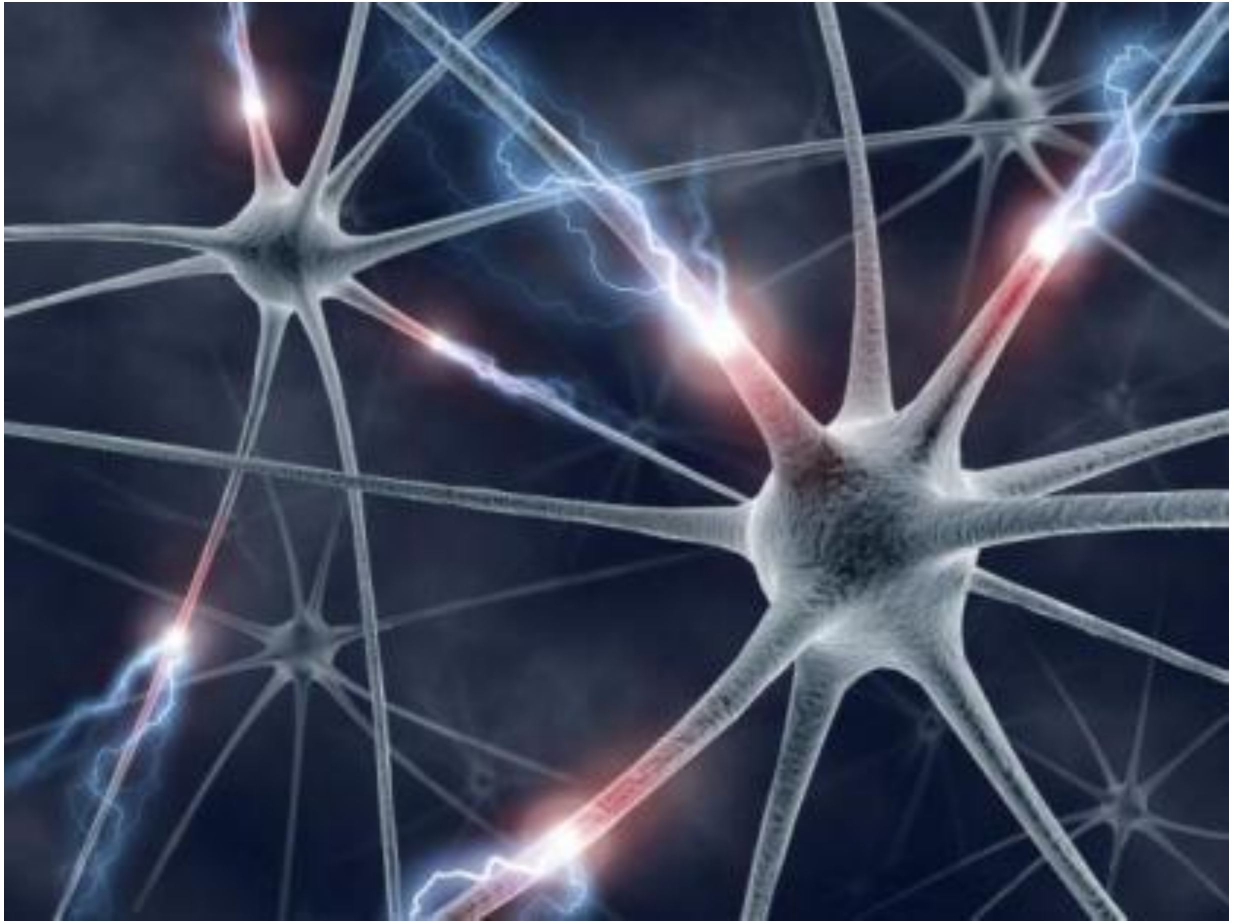


Vector de output
4096-dimensional

Astfel, matricea Jacobiană ar avea [409,600 x 409,600] elemente

Până acum…

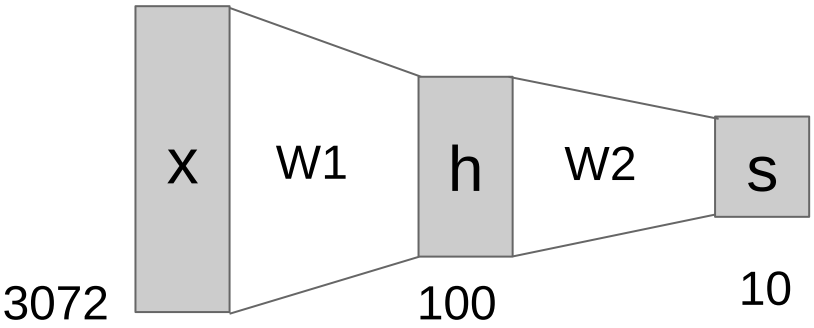
- Rețelele neuronale vor fi foarte mari: nici o speranță să scriem formula de mână pentru toți parameterii (folosim gradientul analitic)
- **Backpropagare** = aplicarea recursivă a regulii de înlănțuire (chain rule) de-a lungul unui graf computațional pentru calcularea gradienților parametrilor / intrărilor
- Implementările mențin o structură de graf în care nodurile implementează funcțiile **forward**() / **backward**()
- **forward**: calculează rezultatul unei operații și salvează în memorie intrările / rezultatele intermediare necesare la calcularea gradientului
- **backward**: aplicarea regulii de înlănțuire pentru calcularea gradientului funcției de pierdere în raport cu intrările



Rețele neuronale: fără paralela cu neurologia

(**Înainte**) Funcție liniară de scoring: $f = Wx$

(**Acum**) Rețea neuronală cu 2 nivele: $f = W_2 \max(0, W_1 x)$



Rețele neuronale: fără paralela cu neurologia

(**Înainte**) Funcție liniară de scoring: $f = Wx$

(**Acum**) Rețea neuronală cu 2 nivele: $f = W_2 \max(0, W_1 x)$

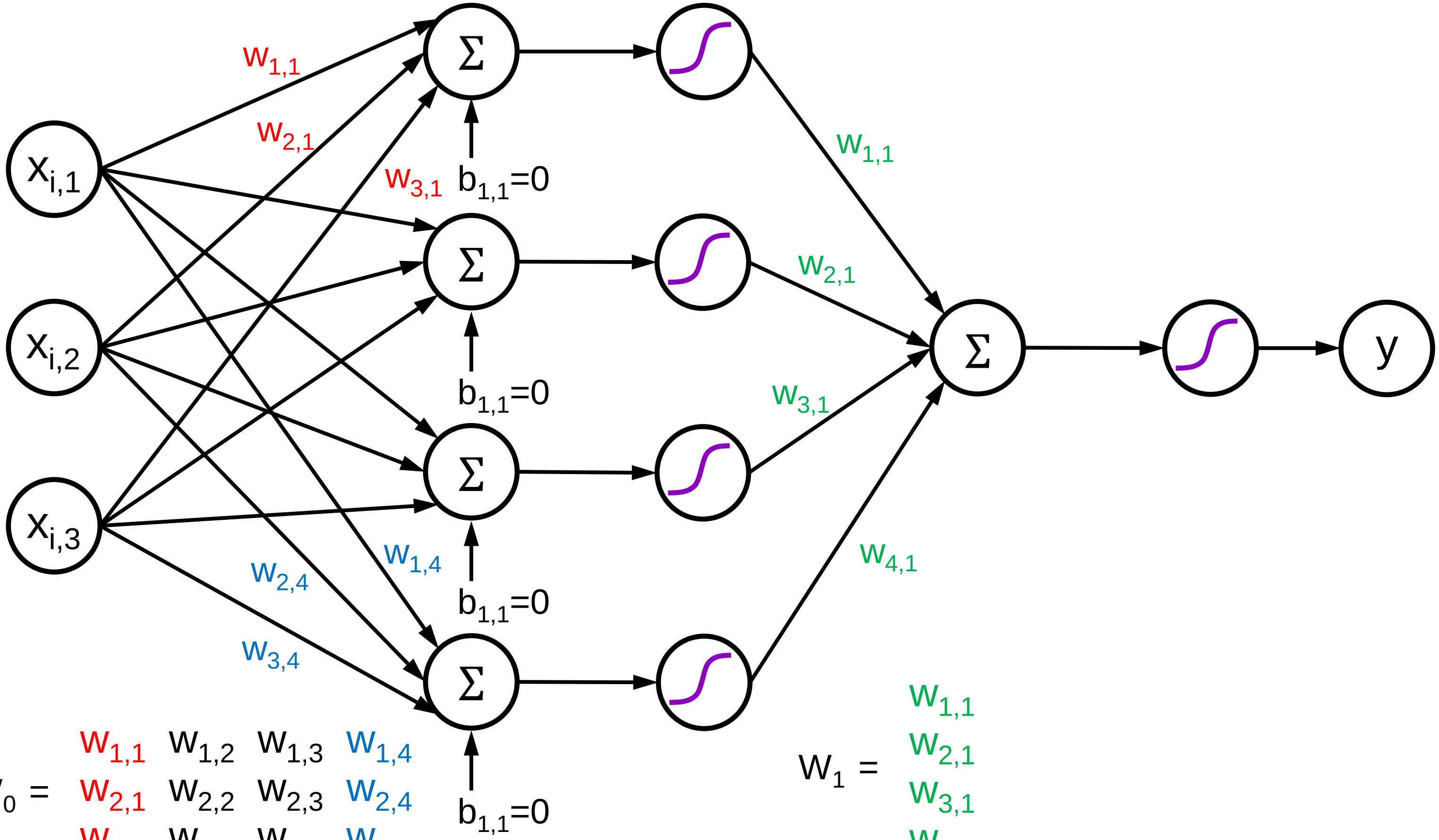
sau cu 3 nivele:

$$f = W_3 \max(0, W_2 \max(0, W_1 x))$$

Antrenarea unei rețele cu două niveluri necesită ~11 linii de cod (Python)

```python
X = np.array([[0,0,1],[0,1,1],[1,0,1],[1,1,1]])
Y = np.array([[0,1,1,0]]).T

W0 = 2 * np.random.random((3,4)) - 1
W1 = 2 * np.random.random((4,1)) - 1

for i in range(5000):

    # forward pass
    l1 = 1 / (1 + np.exp(-np.matmul(X, W0)))
    l2 = 1 / (1 + np.exp(-np.matmul(l1, W1)))

    # backward pass
    delta_l2 = (Y - l2) * (l2 * (1 - l2))
    delta_l1 = np.matmul(delta_l2, W1.T) * (l1 * (1 - l1))

    # gradient descent
    W1 = W1 + np.matmul(l1.T, delta_l2)
    W0 = W0 + np.matmul(X.T, delta_l1)
```

Arhitectura rețelei cu două niveluri implementată anterior



$$W_0 = \begin{matrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} & w_{1,4} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} & w_{2,4} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} & w_{3,4} \end{matrix}$$

$$W_1 = \begin{matrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{4,1} \end{matrix}$$