Университет ИТМО

Практическое задание №4 по дисциплине

«Теория информации и информационных систем»

Исследование спектральной плотности мощности и ковариационных функций информационных сигналов

Цель работы

Исследование методических погрешностей определения спектральной плотности случайных процессов и автоковариационных функций по конечному числу реализаций и дискретным выборкам данных конечной протяженности в условиях влияния шума.

Теоретические основы

Вычисление спектральной плотности мощности случайных последовательностей

Обрабатываемые данные формируют в виде Q *различных* реализаций (последовательностей) отсчетов $n_q(k)$, k = 0, 1, …, K–1 генератора случайных чисел в пределах значений от –0,5 до 0,5. Для *каждой* реализации выполняют преобразование Фурье и вычисляют квадрат модуля спектра $\left|N_q(f)\right|^2$. Оценку спектральной плотности находят в результате усреднения по реализациям:

$$\hat{G}_n(f) = \frac{2}{QK}\sum_{q=1}^{Q}\left|N_q(f)\right|^2. \qquad (1)$$

При визуальном наблюдении графиков $\hat{G}_n(f)$ определяют необходимое число реализаций Q, при котором (обычно при Q > 10) достигается существенно более гладкий ход графика спектральной плотности по сравнению с оценкой (1), полученной для единственной реализации (Q=1).

Исследование влияния "функции окна" на точность оценок спектральной плотности.

Обрабатываемые данные $s_q(k)$ формируют в виде "зашумленной" последовательности отсчетов известной детерминированной функции $g(x)$, причем каждый отсчет формируется при влиянии шума $n_q(k)$ и "функции окна" $H(x)$ протяженностью K точек, т.е.

$$s_q(k) = [g(x_0 - k\Delta x) + \mu n_q(k)]H(k\Delta x),\ k = 0, 1, \ldots, K-1, \qquad (2)$$

где $n_q(k)$, как и ранее, – последовательность отсчетов генератора шума, Δx – шаг дискретизации, μ – коэффициент влияния шума, q – номер реализации.

Функция окна представляет собой функцию, спадающую к краям последовательности, например, $H(k) = \exp[-(k - K/2)^2 / \sigma^2]$, где σ – параметр, определяющий ширину функции окна (например, $\sigma = K/4$).

Вид функции $g(x)$ задается индивидуально (соответствует заданиям №№ 1-3).

Оценки спектральной плотности вычисляются по формуле, аналогичной (1), для спектров $S_q(f)$ данных (2), а именно

$$\hat{G}_s(f) = \frac{2}{QK} \sum_{q=1}^{Q} \left| S_q(f) \right|^2 . \tag{3}$$

Эти оценки сравниваются с "идеализированными" оценками, полученными в следующих вариантах:

1) $G_s(f) = \left| S_q(f) \right|^2$, где $S(f)$ – спектр детерминированной исходной последовательности $s(k)$, полученной при дискретизации заданной функции $g(x)$;

2) $\mu = 0$, т.е. шум отсутствует, но имеется влияние функции окна $H(x)$;

3) $\mu > 0$, H=1, т.е. имеется влияние шума, но отсутствует влияние функции окна.

Результаты сравнения (разности) спектральных плотностей для перечисленных случаев должны быть отображены в графической форме как функции частоты.

Исследование автоковариационных функций

Исследование включает следующие этапы:

1) Формирование исходных данных.

Последовательность полезных данных $s(k)$, k=0,..., K-1, формируют в виде отсчетов известной функции $g(x)$, а именно

$$s(k) = g(x_0 - k\Delta x), \tag{4}$$

где Δx – шаг дискретизации.

2) Вычисление оценки автоковариационной функции при отсутствии влияния шума (в формуле (4) μ = 0).

Используют следующую формулу

$$\hat{R}_g(\Delta k) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-\Delta k-1} s(k)\, s(k+\Delta k), \tag{5}$$

где Δk = 0,1,..., $M < K$.

Полученную функцию следует отобразить графически.

3) Моделирование автоковариационных функций реальных данных.

Последовательность зашумленных данных $s(k)$, k = 0,..., K–1, формируют в виде суммы отсчетов заданной функции и отсчетов генератора шума, т.е.

$$s(k) = g(x_0 - k\Delta x) + \mu n(k). \tag{6}$$

Последовательность отсчетов шума получают в виде произведения $\mu n(k)$, где μ-коэффициент влияния шума, $n(k)$ – последовательность данных генератора шума с изменением значений от –0,5 до 0,5.

Поскольку слагаемые $g(k)$ и $n(k)$ считаются статистически независимыми, автоковариационная функция их суммы будет равна

$$\hat{R}_s(\Delta k) = R_g(\Delta k) + \mu R_n(\Delta k). \qquad (7)$$

Находят критическое значение коэффициента влияния шума μ^*, при котором еще возможна идентификация (отождествление) полезной составляющей $R_g(\Delta k)$ при наблюдении графика "суммарной" функции $R_s(\Delta k)$.

Указание: в качестве критерия поиска μ^* допускается визуальное сравнение $\hat{R}_g(\Delta k)$ и $\hat{R}_s(\Delta k)$ при их графическом отображении.

Теорема Винера-Хинчина

Согласно теореме Винера-Хинчина в случае стационарного случайного процесса спектральная плотность мощности и корреляционная функция связаны преобразованием Фурье, а именно

$$G_s(f) = \mathrm{F}\{R(\Delta k)\}, \qquad (8)$$

где $\mathrm{F}\{\cdot\}$ обозначает операцию преобразования Фурье.

Требуется сравнить спектральную плотность мощности, вычисленную по формулам (3) и (8). Сравнение можно выполнить при визуальном сопоставлении построенных графиков.

Порядок выполнения работы

1. Сформировать Q реализаций от генератора шума и найти оценку спектральной плотности мощности по формуле (1). Построить график.
2. Сформировать последовательность (2) и найти оценки спектральной плотности мощности по формуле (3) для. Найти оценки для трех случаев, указанных по тексту после формулы (3). Построить графики.
3. Сформировать последовательность (4) и вычислить автоковариационную функцию по формуле (5). Построить график автоковариационной функции.
4. Сформировать последовательность (6) и вычислить автоковариационную функцию, соответствующую формуле (7), для различных значений коэффициента влияния шума μ. Построить графики.
5. Вычислить спектральную плотность мощности по формуле (8), построить график и сравнить его с графиком, соответствующим вычислениям по формуле (3).