

Исследование точности алгоритма преобразования Фурье при обработке информационных сигналов ограниченной протяженности

Цель работы

Изучение влияния ограниченной протяженности реальных последовательностей данных, представляющих информационные сигналы, на результаты преобразования Фурье.

Теоретические основы

Последовательность $\xi(k)$, $k=0, \dots, K-1$ формируют в виде K отсчетов известной (заданной) функции $g(x)$, представляющей исходный сигнал, с учетом влияния апертурной функции элемента дискретизации $h(x)$ в соответствии с формулой

$$\xi(k) = A \sum_{l=1}^{2b} g(x_k - l\Delta x) h(l\Delta x), \quad (1)$$

где $A = \left[\sum_{l=1}^{2b} h(l\Delta x) \right]^{-1}$ – нормирующий множитель, Δx – шаг дискретизации, $x_k = k\Delta x$, $2b$ – протяженность апертурной функции элемента дискретизации.

Формула (1) выражает операцию дискретной свертки: для каждого значения x_k вычисляется сумма значений функции $g(x)$ в окрестности точки x_k в пределах интервала $2b$ отсчетов, $l = 1, \dots, 2b$, "взвешенных" в соответствии с апертурной функцией элемента дискретизации $h(l\Delta x)$.

В случае апертурной функции $h(l\Delta x)$ прямоугольной формы, когда ее значения постоянны на интервале $2b$, свертка в (1) представляет собой "скользящее" среднее арифметическое значение в окрестности точек x_k .

Конкретный вид функций $g(x)$ и $h(x)$ определяется индивидуальным заданием.

В результате выполнения операции ДПФ $F\{\xi(k)\} = S_c(f) - jS_s(f)$, $f=0, \dots, K-1$, получают два массива данных спектра $S_c(f)$ и $S_s(f)$, соответствующих его действительной и мнимой частям. Эти массивы являются исходными данными для исследования точности ДПФ.

Методика оценивания погрешностей алгоритма ДПФ состоит в выявлении разностей значений массивов $S_c(f)$, $S_s(f)$,
 $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$, получаемых для

последовательностей *реальных* $\xi(k)$ и *идеализированных* $s(k)$ исходных данных, где $s(k) = g(x_k) = g(k\Delta x)$.

Оценивание погрешностей алгоритма ДПФ

Оценивание погрешностей алгоритма ДПФ производится для случаев, указанных ниже.

Источник погрешностей 1: Влияние апертурной функции $h(x)$.

Идеализированный сигнал

$$s(k) = g(x_k) = g(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (2)$$

Реальный сигнал определяется формулой (1):

$$\xi(k) = A \sum_{l=1}^{2b} g(x_k - l\Delta x) h(l\Delta x). \quad (3)$$

Нужно сравнить результаты ДПФ (при сопоставлении построенных графиков) $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$, полученные для последовательности (2) и последовательности (3).

Источник погрешностей 2: Ограниченное число отсчетов в выборке данных.

Идеализированный сигнал

$$s(k) = g(x_k) = g(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (4)$$

Реальный сигнал имеет ограниченную протяженность L :

$$\xi(k) = \begin{cases} s(k) = g(k\Delta x) & \text{при } (K-L)/2 \leq k \leq (K+L)/2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Значение L определяется условием $L \ll K$, например, $L = K/2$, после чего нужно сравнить результаты ДПФ (при сопоставлении построенных графиков) $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$ для последовательности (4) и последовательности (5).

Порядок выполнения работы

1. Смоделировать сигнал согласно выданному индивидуальному заданию, соответствующий выражению (2).
2. Вычислить спектральные характеристики сигнала (2): $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$ и построить их графики.
3. Смоделировать реальный сигнал согласно выражению (3).
4. Вычислить спектральные характеристики сигнала (3): $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$ и построить их графики.

5. Сопоставить графики по пп. 2 и 4 и оценить их отличия.
6. Повторить пункты (2 – 5) при различной протяженности апертурной функции.
7. Смоделировать реальный сигнал согласно выражению (5).
8. Вычислить спектральные характеристики сигнала (5): $S_c(f)$, $S_s(f)$,
 $|S(f)|^2 = S_c^2(f) + S_s^2(f)$, $\varphi(f) = \text{Im}[\ln S(f)]$ и построить их графики.
9. Сопоставить графики по пп. 2 и 7 и оценить их отличия.
10. Повторить пункты (7 – 9) при различной протяженности реального сигнала.
11. Проанализировать результаты, сформулировать выводы, составить отчёт по работе.