Университет ИТМО

Практическое задание №3 по дисциплине

«Теория информации и информационных систем»

Исследование особенностей дискретизации информационных сигналов

Цель работы

Изучение влияния выбора частоты дискретизации на спектр информационного сигнала.

Теоретические основы

Последовательность отсчетов сигнала $s(k) = g(x_k) = g(k\Delta x)$, k=0,..., K–1, формируют при дискретизации известной (заданной) функции $g(x)$, представляющей исходный сигнал в дискретных точках $x_k = k\Delta x$, где Δx – шаг дискретизации.

Конкретный вид функции $g(x)$ определяется индивидуальным заданием.

В соответствии с известной теоремой отсчетов во избежание искажений частота дискретизации $f_d = 1/\Delta x$ должна вдвое превышать максимальную частоту f_M в спектре сигнала, а именно, $f_d > 2 f_M$ (критерий Найквиста).

Можно показать, что при нарушении критерия Найквиста частотные составляющие исходного сигнала с высокой частотой $f > f_d / 2$ преобразуются в составляющие с частотой, попадающей в диапазон от 0 до $f_d / 2$, в соответствии с соотношением

$$0 < f - nf_d < f_d / 2, \qquad (1)$$

где n – целое положительное число. Данный эффект принято называть маскированием частот поскольку высокочастотные компоненты, не удовлетворяющие критерию Найквиста, воспринимаются как низкочастотные в указанном выше диапазоне согласно (1).

Замаскированные (ложные) компоненты накладываются на спектр полезного сигнала, что приводит к искажениям.

Для того, чтобы избежать искажений сигнала при дискретизации, необходимо заранее знать максимальную частоту f_M в спектре сигнала и выполнить критерий Найквиста. Если эта частота не известна, то используют два основных подхода:

выбирают частоту дискретизации заведомо значительно превышающую возможную максимальную частоту f_M;

осуществляют предварительную фильтрацию (т.е. ограничение ширины спектра) сигнала перед дискретизацией.

Поскольку первый подход повышает требования к информационной системе и является затратным, целесообразно использовать второй подход.

Фильтрацию исходного сигнала можно осуществить методом свертки в соответствии с формулой

$$\xi(k) = A\sum_{l=1}^{2b} g(x_k - l\Delta x)h(l\Delta x), \qquad (2)$$

где $A = \left[\sum_{l=1}^{2b} h(l\Delta x)\right]^{-1}$ – нормирующий множитель, $x_k = k\Delta x$, $2b$ – протяженность интервала, внутри которого происходит сглаживание исходного сигнала.

Формула (2) выражает операцию дискретной свертки: для каждого значения x_k вычисляется сумма значений функции $g(x)$ в окрестности точки x_k в пределах интервала $2b$ отсчетов, $l = 1,\ldots,2b$, «взвешенных» в соответствии со значениями функции $h(l\Delta x)$.

Для функции $h(l\Delta x)$ прямоугольной формы, когда ее значения постоянны на интервале $2b$, свертка в (2) представляет собой «скользящее» среднее арифметическое значение в окрестности точек x_k. При этом сглаживание сигнала приводит к ограничению ширины его спектра. Ширина спектра тем меньше, чем большей является протяженность $2b$ функции $h(l\Delta x)$.

Следует отметить, что в выражении (2) влияние функции $h(l\Delta x)$ подобно влиянию апертурной функции элемента дискретизации, рассматриваемой в Задании №2. Отличие состоит в том, апертурная функция элемента дискретизации учитывает особенности взятия дискретного отсчета, тогда как при фильтрации эта функция задается в известной степени произвольно в целях ограничения спектра сигнала перед дискретизацией.

Для исследования эффекта маскирования частот вначале следует сформировать сигнал, соответствующий заданной функции $g(x)$, при большом количестве отсчетов, когда заведомо выполняется критерий Найквиста, и последовательность представляет достаточно точную аппроксимацию исходной непрерывной функции.

Далее вычисляются преобразование Фурье и его модуль, что позволяет определить ширину спектра, т.е. максимальную частоту f_M в спектре сигнала.

Следующий шаг состоит в значительном уменьшении количества отсчетов сигнала. Когда величина Δx начинает превышать значение $1/(2f_M)$, вычисление модуля спектра покажет искажения спектра.

Выполнение обратного преобразования Фурье позволяет получить иллюстрацию искажений сигнала.

Порядок выполнения работы

1. Смоделировать сигнал согласно выданному индивидуальному заданию при большом количестве отсчетов (например, K = 2048).
2. Вычислить спектральные характеристики сигнала: $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)| = \sqrt{S_c^2(f) + S_s^2(f)}$ и построить их графики.
3. Определить максимальную частоту f_M в спектре сигнала.

Указание: максимальной можно считать частоту, выше которой значения модуля спектра пренебрежимо малы.

4. Уменьшить количество отсчетов исходной функции (например, в 8 раз до 256 отсчетов).
5. Вычислить спектральные характеристики сигнала: $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)| = \sqrt{S_c{}^2(f) + S_s{}^2(f)}$ и построить их графики.
6. Сопоставить графики по пп. 2 и 5 и оценить их отличия.
   Указание: поскольку количество частот в спектре соответствуют количеству дискретных отсчетов функции, сравнение можно осуществить при одинаковом размере графиков по горизонтальной оси. Точное сравнение возможно выполнить при прореживании спектра по п. 2 в число раз, соответствующее п. 4.
7. Смоделировать сигнал согласно выданному индивидуальному заданию при большом количестве отсчетов (например, K = 2048) и осуществить фильтрацию в соответствии с формулой (2).
8. Вычислить спектральные характеристики отфильтрованного сигнала: $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)| = \sqrt{S_c{}^2(f) + S_s{}^2(f)}$ и построить их графики. Убедиться, что значение f_M отфильтрованного сигнала стало меньшим, чем исходного сигнала в п. 3.
9. Уменьшить количество отсчетов отфильтрованного сигнала по п. 7 путем прореживания последовательности отсчетов (например, в 8 раз до 256 отсчетов).
10. Вычислить спектральные характеристики сигнала по п. 9: $S_c(f)$, $S_s(f)$, $|S(f)| = \sqrt{S_c{}^2(f) + S_s{}^2(f)}$ и построить их графики.
11. Сопоставить графики по п. 5 (для малого числа отсчетов без фильтрации) и п. 10 (для малого числа отсчетов после фильтрации) и оценить их отличия.
12. Проанализировать результаты, сформулировать выводы, составить отчёт по работе.