



Universidad de Valladolid

E.T.S Ingeniería Informática

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Informática,
mención en Computación

Algoritmos para Big Data

Autor:

Sergio García Prado



Universidad de Valladolid

E.T.S Ingeniería Informática

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Informática,
mención en Computación

Algoritmos para Big Data

Autor:

Sergio García Prado

Tutor:

Manuel Barrio Solórzano

Prefacio

Para entender el contenido de este documento así como la metodología seguida para su elaboración, se han de tener en cuenta diversos factores, entre los que se encuentran el contexto académico en que ha sido redactado, así como el tecnológico y social. Es por ello que a continuación se expone una breve descripción acerca de los mismo, para tratar de facilitar la comprensión sobre el alcance de este texto.

Lo primero que se debe tener en cuenta es el contexto académico en que se ha llevado a cabo. Este documento se ha redactado para la asignatura de **Trabajo de Fin de Grado (mención en Computación)** para el *Grado de Ingeniería Informática*, impartido en la *E.T.S de Ingeniería Informática* de la *Universidad de Valladolid*. Dicha asignatura se caracteriza por ser necesaria la superación del resto de las asignaturas que componen los estudios del grado para su evaluación. Su carga de trabajo es de **12 créditos ECTS**, cuyo equivalente temporal es de *300 horas* de trabajo del alumno, que se han llevado a cabo en un periodo de 4 meses.

La temática escogida para realizar dicho trabajo es **Algoritmos para Big Data**. El Big Data es la disciplina que se encarga de “todas las actividades relacionadas con los sistemas que manipulan grandes conjuntos de datos. Las dificultades más habituales vinculadas a la gestión de estas cantidades de datos se centran en la recolección y el almacenamiento, búsqueda, compartición, análisis, y visualización. La tendencia a manipular enormes cantidades de datos se debe a la necesidad en muchos casos de incluir dicha información para la creación de informes estadísticos y modelos predictivos utilizados en diversas materias.” [Wik17a]

Uno de los puntos más importantes para entender la motivación por la cual se ha escogido dicha temática es el contexto tecnológico en que nos encontramos. Debido a la importante evolución que están sufriendo otras disciplinas dentro del mundo de la informática y las nuevas tecnologías, cada vez es más sencillo y económico recoger gran cantidad de información de cualquier proceso que se dé en la vida real. Esto se debe a una gran cantidad de factores, entre los que se destacan los siguientes:

- **Reducción de costes derivados de la recolección de información:** Debido a la constante evolución tecnológica cada vez es más barato disponer de mecanismos (tanto a nivel de hardware como de software), a partir de los cuales se puede recabar datos sobre un determinado suceso.
- **Mayor capacidad de cómputo y almacenamiento:** La recolección y manipulación de grandes cantidades de datos que se recogen a partir de sensores u otros métodos requieren por tanto

del apoyo de altas capacidades de cómputo y almacenamiento. Las tendencias actuales se están apoyando en técnicas de virtualización que permiten gestionar sistemas de gran tamaño ubicados en distintas zonas geográficas como una unidad, lo cual proporciona grandes ventajas en cuanto a reducción de complejidad algorítmica a nivel de aplicación.

- **Mejora de las telecomunicaciones:** Uno de los factores que ha permitido una gran disminución de la problemática relacionada con la virtualización y su capacidad de respuesta ha sido el gran avance a nivel global que han sufrido las telecomunicaciones en los últimos años, permitiendo disminuir las barreras geográficas entre sistemas tecnológicos dispersos.

Gracias a este conjunto de mejoras se ha llegado al punto en que existe la oportunidad de poder utilizar una gran cantidad de conocimiento, que individualmente o sin un apropiado procesamiento, carece de valor a nivel de información.

El tercer factor que es necesario tener en cuenta es la tendencia social actual, que cada vez más, está concienciada con el valor que tiene la información. Esto se ve reflejado en un amplio abanico de aspectos relacionados con el comportamiento de la población:

- **Monitorización de procesos laborales:** Muchas empresas están teniendo en cuenta la mejora de la productividad de sus empleados y máquinas. Por tanto, buscan nuevas técnicas que les permitan llevar a cabo dicha tarea. En los últimos años se ha dedicado mucho esfuerzo en implementar sistemas de monitorización que permitan obtener información para después procesarla y obtener resultados valiosos para dichas organizaciones.
- **Crecimiento exponencial de las plataformas de redes sociales:** La inherente naturaleza social del ser humano hace necesaria la expresión pública de sus sentimientos y acciones, lo cual, en el mundo de la tecnología se ha visto reflejado en un gran crecimiento de las plataformas de compartición de información así como de las de comunicación.
- **Iniciativas de datos abiertos por parte de las administraciones públicas:** Muchas insituciones públicas están dedicando grandes esfuerzos en hacer visible la información que poseen, lo que conlleva una mejora social aumentando el grado de transparencia de las mismas, así como el nivel de conocimiento colectivo, que puede ser beneficioso tanto para ciudadanos como para empresas.

Como consecuencia de este cambio social, posiblemente propiciado por el avance tecnológico anteriormente citado, la población tiene un mayor grado de curiosidad por aspectos que antes no tenía la capacidad de entender, debido al nivel de complejidad derivado del tamaño de los conjuntos de muestra necesarios para obtener resultados fiables.

En este documento no se pretenden abordar temas relacionados con las técnicas utilizadas para recabar nuevos datos a partir de los ya existentes. A pesar de ello se realizará una breve introducción

sobre dicho conjunto de estrategias, entre las que se encuentran: *Heurísticas*, *Regresión Lineal*, *Árboles de decisión*, *Máquinas de Vector Soporte (SVM)* o *Redes Neuronales Artificiales*.

Por contra, se pretende realizar un análisis acerca de los diferentes algoritmos necesarios para manejar dichas cantidades ingentes de información, en especial de su manipulación a nivel de operaciones básicas, como operaciones aritméticas, búsqueda o tratamiento de campos ausentes. Para ello, se tratará de acometer dicha problemática teniendo en cuenta estrategias de paralelización, que permitan aprovechar en mayor medida las capacidades de cómputo existentes en la actualidad.

Otro de los aspectos importantes en que se quiere orientar este trabajo es el factor dinámico necesario para entender la información, lo cual conlleva la búsqueda de nuevas estrategias algorítmicas de procesamiento en tiempo real. Por lo tanto, se pretende ilustrar un análisis acerca de las soluciones existentes en cada caso con respecto a la solución estática indicando las ventajas e inconvenientes de la versión dinámica según corresponda.

Índice general

Prefacio	1
1. Introducción	7
2. Algoritmos para Streaming	9
2.1. Introducción	9
2.2. Modelo en Streaming	12
2.3. Estructura básica	15
2.4. Medidas de Análisis y Conceptos Matemáticos	16
2.5. Algoritmo de Morris	23
2.6. Algoritmo de Flajolet-Martin	25
2.7. Aproximación a los Momentos de Frecuencia	27
2.8. Conclusiones	28
3. Estrategias de Sumarización	31
3.1. Introducción	31
3.2. Tipos de Estrategias de Sumarización	32
3.3. Bloom Filter	43
3.4. Count-Min Sketch	45
3.5. Count Sketch	48
3.6. HyperLogLog	50
3.7. Conclusiones	51
4. Algoritmos aplicados a Grafos	53
4.1. Introducción	53
4.2. Definición Formal	53
4.3. Modelo en Semi-Streaming	57
4.4. Spanners y Sparsifiers	57
4.5. Problemas sobre Grafos	57
4.6. Conclusiones	58
5. Algoritmo PageRank	59
5.1. Introducción	59

5.2. Conclusiones	59
6. Paralelización a Gran Escala	61
6.1. Introducción	61
6.2. Sistemas de Ficheros Distribuidos	61
6.3. Modelo de acceso a Memoria	61
6.4. Complejidad de la Comunicación	61
6.5. MapReduce	61
6.6. Pregel	61
6.7. Conclusiones	61
7. Detalles de Implementación y Resultados	63
7.1. Introducción	63
7.2. Conclusiones	63
A. Metodología de Trabajo	65
B. ¿Cómo ha sido generado este documento?	67
Bibliografía	68

Capítulo 1

Introducción

[TODO]

Capítulo 2

Algoritmos para Streaming

2.1. Introducción

Los *algoritmos para streaming* son una estrategia de diseño algorítmica basada en el procesamiento secuencial de la entrada, lo cual encaja en marcos en los cuales los datos tienen una componente dinámica. Además, este contexto se amolda perfectamente en los casos en que el tamaño de los mismos es tan elevado que no es posible mantenerlos de manera completa en la memoria del sistema. Dicha problemática es precisamente la que surge con el denominado *Big Data*, que al trabajar con conjuntos masivos de datos en el orden de gigabytes, terabytes o incluso petabytes, no se pueden procesar utilizando estrategias clásicas que presuponen que se dispone de todos los datos de manera directa e inmediata.

Por tanto, en dicho contexto se presupone un espacio de almacenamiento en disco de tamaño infinito, mientras que se restringe el espacio de trabajo o memoria a un tamaño limitado y mucho menor que el del conjunto de datos con el que se trabaja. Mediante estas presuposiciones fijadas a priori cobra especial importancia el diseño de algoritmos en el modelo en streaming, que tratan de reducir el número de peticiones al espacio de almacenamiento o disco, lo cual genera una gran reducción en el tiempo de procesamiento.

Además, bajo este modelo es trivial realizar una extensión de los algoritmos y técnicas para su uso en entornos dinámicos en los cuales el conjunto de datos varía con respecto del tiempo, añadiendo y eliminando nuevos datos. Debido a estas características la investigación en el campo de los *algoritmos para streaming* a cobrado una gran importancia. En este capítulo se pretende realizar una introducción conceptual acerca de los mismos, además de realizar una exposición acerca de los algoritmos más relevantes en dicha área.

2.1.1. Computación en Tiempo Real

El primer concepto del que hablaremos es **Computación en Tiempo Real**, que tal y cómo describen Shin y Ramanathan [SR94] se caracteriza por tres términos que se exponen a continuación:

- **Tiempo**(*time*): En la disciplina de *Computación en Tiempo Real* el tiempo de ejecución de una determinada tarea es especialmente crucial para garantizar el correcto desarrollo del cómputo, debido a que se asume un plazo de ejecución permitido, a partir del cual la solución del problema deja de tener validez. Shin y Ramanathan[SR94] diferencian entre tres categorías dentro de dicha restricción, a las cuales denominan *hard*, *firm* y *soft*, dependiendo del grado de relajación de la misma.
- **Confiabilidad**(*correctness*): Otro de los puntos cruciales en un sistema de *Cómputación en Tiempo Real* es la determinación de una unidad de medida o indicador acerca de las garantías de una determinada solución algorítmica para cumplir lo que promete de manera correcta en el tiempo esperado.
- **Entorno**(*environment*): El último factor que indican Shin y Ramanathan[SR94] para describir un sistema de *Computación en Tiempo Real* es el entorno del mismo, debido a que este condiciona el conjunto de tareas y la periodicidad en que se deben llevar a cabo. Por esta razón, realizan una diferenciación entre: *a)* tareas periódicas *periodic tasks* las cuales se realizan secuencialmente a partir de la finalización de una ventana de tiempo, y *b)* tareas no periódicas *periodic tasks* que se llevan a cabo debido al suceso de un determinado evento externo.

2.1.2. Problemas Dinámicos

Una vez completada la descripción acerca de lo que se puede definir como *Computación en Tiempo Real*, conviene realizar una descripción desde el punto de vista de la *teoría de complejidad computacional*. Para definir este tipo de problemas, se utiliza el término *problemas dinámicos*, los cuales consisten en aquellos en los cuales es necesario recalcular su solución conforme el tiempo avanza debido a variaciones en los parámetros de entrada del problema (Nótese que dicho término no debe confundirse con la estrategia de *programación dinámica* para el diseño de algoritmos).

Existen distintas vertientes dependiendo del punto de vista desde el que se estudien, tanto de la naturaleza del problema (soluciones dependientes temporalmente unas de otras o soluciones aisladas) como de los parámetros de entrada (entrada completa en cada nueva ejecución o variación respecto de la anterior). Los *Algoritmos para Streaming* están diseñados para resolver *problemas dinámicos*, por lo que en la sección 2.2, se describe en profundidad el modelo en que se enmarcan.

A continuación se indican los principales indicadores utilizados para describir la complejidad de una determinada solución algorítmica destinada a resolver un problema de dicha naturaleza:

- Espacio: Cantidad de espacio utilizado en memoria durante la ejecución del algoritmo.
- Inicialización: Tiempo necesario para la inicialización del algoritmo.
- Procesado: Tiempo necesario para procesar una determinada entrada.
- Consulta: Tiempo necesario para procesar la solución a partir de los datos de entrada procesados hasta el momento.

2.1.3. Algoritmos Online vs Algoritmos Offline

Una vez descrita la problemática de *Computación en Tiempo Real* en la sección 2.1.1 y la categoría de *Problemas Dinámicos* en la sección 2.1.2, en esta sección se pretende ilustrar la diferencia entre los *Algoritmos Online* y los *Algoritmos Offline*. Para ello, se ha seguido la diferenciación propuesta por Karp [Kar92], en la cual se plantea el problema de la siguiente manera (Se utilizará la misma notación que sigue Muthukrishnan[Mut05] para tratar mantener la consistencia durante todo el documento): Sea A el conjunto de datos o eventos de entrada, siendo cada $A[i]$ el elemento i -ésimo del conjunto, y que en el caso de los *Algoritmos Online* supondremos que es el elemento recibido en el instante i . A continuación se muestran las características de cada subgrupo:

- **Algoritmos Offline:** Esta categoría contiene todos los algoritmos que realizan el cómputo suponiendo el acceso a cualquier elemento del conjunto de datos A durante cualquier momento de su ejecución. Además, en esta categoría se impone la restricción de que el A debe ser invariante respecto del tiempo, lo que conlleva que para la adaptación del resultado a cambios en la entrada, este tenga que realizar una nueva ejecución desde su estado inicial. Nótese por tanto, que dentro de este grupo se engloba la mayoría de algoritmos utilizados comunmente.
- **Algoritmos Online:** Son aquellos que calculan el resultado a partir de una secuencia de sucesos $A[i]$, los cuales generan un resultado dependiente de la entrada actual, y posiblemente de las anteriores. A partir de dicha estrategia, se añade una componente dinámica, la cual permite que el tamaño del conjunto de datos de entrada A no tenga impuesta una restricción acerca de su longitud *a-priori*. Por contra, en este modelo no se permite conocer el suceso $A[i + 1]$ en el momento i . Esto encaja perfectamente en el modelo que se describirá en la sección 2.2.

Según la diferenciación que se acaba de indicar, estas dos estrategias de diseño de algoritmos encajan en disciplinas distintas, teniendo una gran ventaja a nivel de eficiencia en el caso estático los *Algoritmos Offline*, pero quedando prácticamente inutilizables cuando la computación es en tiempo real, donde es mucho más apropiado el uso de estrategias de diseño de *Algoritmos Online*.

Como medida de eficiencia para los *Algoritmos Online*, Karp [Kar92] propone el **Ratio Competitivo**, el cual se define como la cota inferior del coste de cualquier nueva entrada con respecto de la que tiene menor coste. Sin embargo, dicha medida de eficiencia no es comúnmente utilizada en el caso de los *Algoritmos para Streaming* por la componente estocástica de los mismos, para los cuales son más apropiadas medidas probabilistas. A continuación se describen las ventajas de estos respecto de su vertiente determinista.

2.1.4. Algoritmos Probabilistas

Los *Algoritmos Probabilistas* son una estrategia de diseño que emplea en un cierto grado de aleatoriedad en alguna parte de su lógica. Estos utilizan distribuciones uniformes de probabilidad para tratar de conseguir un incremento del rendimiento en su caso promedio. A continuación se describen los dos tipos de algoritmos probabilísticos según la clasificación realizada por Babai [Bab79]:

- **Algoritmos Las Vegas:** Devuelven un resultado incorrecto con una determinada probabilidad, pero avisan del resultado incorrecto cuando esto sucede. Para contrarrestar este suceso basta con llevar a cabo una nueva ejecución del algoritmo, lo cual tras un número indeterminado de ejecuciones produce un resultado válido.
- **Algoritmos Monte Carlo:** Fallan con un cierto grado de probabilidad, pero en este caso no avisan del resultado incorrecto. Por lo tanto, lo único que se puede obtener al respecto es un indicador de la estimación del resultado correcto hacia la que converge tras varias ejecuciones. Además, se asegura una determinada cota del error ϵ , que se cumple con probabilidad δ .

La razón anecdótica por la cual Babai [Bab79] decidió denominar dichas categorías de algoritmos de esta manera se debe a lo siguiente (teniendo en cuenta el contexto de lengua inglesa): cuando se va a un casino en *Las Vegas* y se realiza una apuesta el *croupier* puede decir si se ha ganado o perdido porque habla el mismo idioma. Sin embargo, si sucede la misma situación en *Monte Carlo*, tan solo se puede conocer una medida de probabilidad debido a que en este caso el *croupier* no puede comunicarlo por la diferencia dialéctica.

2.1.5. Algoritmos Online Probabilistas vs Deterministas

La idea subyacente acerca del diseño de los *Algoritmos Online* es la mejora de eficiencia con respecto de sus homónimos estáticos cuando el conjunto de valores de entrada es dependiente de los resultados anteriores. Sin embargo, existen casos en que la frecuencia de ejecución del algoritmo, debido a una alta tasa de llegada de valores en la entrada, las soluciones deterministas se convierten en alternativas poco escalables.

Dicha problemática se ha incrementado de manera exponencial debido al avance tecnológico y la gran cantidad de información que se genera en la actualidad, que sigue creciendo a un ritmo desorbitado. Este fenómeno ha convertido en algo necesario el diseño de estrategias basadas en técnicas probabilísticas que reduzcan en gran medida el coste computacional que como consecuencia eliminan el determinismo de la solución.

2.2. Modelo en Streaming

En esta sección se describen los aspectos formales del *Modelo en Streaming*. Para ello se ha seguido la representación definida por Muthukrishnan [Mut05]. Lo primero por tanto, es definir un flujo de datos o *Data Stream* como una “secuencia de señales digitalmente codificadas utilizadas para representar una transmisión de información” [Ins17]. Muthukrishnan [Mut05] hace una aclaración sobre dicha definición y añade la objeción de que los datos de entrada deben tener un ritmo elevado de llegada. Debido a esta razón existe complejidad a tres niveles:

- **Transmisión:** Ya que debido a la alta tasa de llegada es necesario diseñar un sistema de interconexiones que permita que no se produzcan congestiones debido a la obtención de los

datos de entrada.

- **Computación:** Puesto que la tarea de procesar la gran cantidad de información que llega por unidad de tiempo produce cuellos de botella en el cálculo de la solución por lo que es necesario implementar técnicas algorítmicas con un reducido nivel de complejidad computacional para contrarrestar dicha problemática.
- **Almacenamiento:** Debido a la gran cantidad de datos que se presentan en la entrada, deben existir técnicas que permitan almacenar dicha información de manera eficiente. Esto puede ser visto desde dos puntos de vista diferentes: *a)* tanto desde el punto de vista del espacio, tratando de minimizar el tamaño de los datos almacenados, maximizando la cantidad de información que se puede recuperar de ellos, *b)* como desde el punto de vista del tiempo necesario para realizar operaciones de búsqueda, adición, eliminación o edición.. Además, se debe prestar especial atención en la información que se almacena, tratando de reducirla al máximo prescindiendo de datos redundantes o irrelevantes.

2.2.1. Formalismo para Streaming

Una vez descritos los niveles de complejidad a los que es necesario hacer frente para abordar problemas en el *Modelo en Streaming*, se realiza una descripción de los distintos modelos que propone Muthukrishnan [Mut05] en los apartados 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4. La especificación descrita en dichos apartados será seguida durante el resto del capítulo. Para ello nos basaremos en el siguiente formalismo:

Sea $a_1, a_2, \dots, a_t, \dots$ un flujo de datos de entrada (*Input Stream*), de tal manera que cada elemento debe presentar un orden de llegada secuencial respecto de $t \in \mathbb{M}$. Esto también se puede ver de la siguiente manera: el elemento siguiente a la llegada de a_{t-1} debe ser a_t y, por inducción, el próximo será a_{t+1} . Es necesario aclarar que t no se refiere a unidades propiamente temporales, sino a la posición en la entrada.

$$\mathbf{A}_t : [1 \dots N] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

El siguiente paso para describir el formalismo es añadir la función \mathbf{A}_t , cuyo dominio e imagen se muestran en la ecuación (2.1). Esta función tiene distintas interpretaciones dependientes del *Modelo en Streaming* bajo el cual se esté trabajando en cada caso, pero la idea subyacente puede resumirse asumiendo que la primera componente almacena el valor, mientras que la segunda almacena el número de ocurrencias de dicho valor. Algo común a todos ellos es la variable t , que se corresponde con resultado de la función en el instante de tiempo t . Por motivos de claridad, en los casos en que nos estemos refiriendo un único momento, dicha variable será obviada en la notación.

2.2.2. Modelo de Serie Temporal

El *Modelo de Serie Temporal* o *Time Series Model* se refiere, tal y como indica su nombre, a una serie temporal, es decir, modeliza los valores que toma la variable i respecto de t , codificados en el

modelo como $a_t = (i, 1)$. Nótese que se utiliza el valor 1 en la segunda componente de a_t , la razón de ello se debe a la definición de la imagen de \mathbf{A} en la ecuación (2.1). A pesar de ello, dicho campo es irrelevante en este modelo, por lo que se podría haber escogido cualquier otro arbitrariamente. La razón por la cual se ha utilizado el valor 1 ha sido el refuerzo de la idea de que en este caso, el valor que toma a_t en un determinado momento, no volverá a variar su valor, pero quedará obsoleto con la llegada de a_{t+1} .

El modelo se describe de manera matemática mediante la función \mathbf{A} , tal y como se ilustra en la ecuación (2.2). Textualmente, esto puede traducirse diciendo que la función \mathbf{A} representa una estructura de datos que almacena el valor de todos los elementos recibidos en la entrada hasta el instante de tiempo t , es decir, actúa como un historial. Un ejemplo de este modelo son los valores en bolsa que toma una determinada empresa a lo largo del tiempo.

$$\mathbf{A}(t) = a_t \quad (2.2)$$

2.2.3. Modelo de Caja Registradora

El *Modelo de Caja Registradora* o *Cash Register Model* consiste en la recepción de incrementos de un determinado valor i . El nombre del modelo hace referencia al funcionamiento de una caja registradora (suponiendo que el pago se realiza de manera exacta), que recibe billetes o monedas de tipos diferentes de manera secuencial.

Para describir dicho modelo, previamente hay que realizar una aclaración acerca del contenido del elemento $a_t = (i, I_t)$, de manera que i representa el valor recibido, mientras que $I_t \geq 0$ indica el incremento en el instante t . Una vez aclarada esta definición, la función \mathbf{A}_t , se construye tal y como se indica en la ecuación (2.3).

$$\mathbf{A}_t(i) = A_{t-1}(i) + I_t \quad (2.3)$$

El *Modelo de Caja Registradora* es ampliamente utilizado en la formalización de problemas reales debido a que muchos fenómenos siguen esta estructura. Un ejemplo de ello es el conteo de accesos a un determinado sitio web, los cuales se corresponden con incrementos I_t , en este caso de carácter unitario realizados por un determinado usuario i en el momento t .

2.2.4. Modelo de Molinete

El *Modelo de Molinete* o *Turnstile Model* se corresponde con el caso más general, en el cual no solo se permiten incrementos, sino que también se pueden realizar decrementos en la cuenta. El nombre que se le dió a este modelo se debe al funcionamiento de los molinetes que hay en las estaciones de metro para permitir el paso a los usuarios, que en la entrada incrementan la cuenta del número de personas, mientras que en la salida los decrementan. La relajación originada por la capacidad de decremento ofrece una mayor versatilidad, que permite la contextualización de un gran número de

problemas en este modelo. Por contra, añade un numerosas complicaciones a nivel computacional, tal y como se verá a lo largo del capítulo.

Al igual que ocurre en el caso anterior, para describir este modelo, lo primero es pensar en la estructura de los elementos en la entrada, que están formados por $a_t = (i, U_t)$, algo muy semejante a lo descrito en el *Modelo de Caja Registradora*. Sin embargo, en este caso U_t no tiene restricciones en su imagen, sino que puede tomar cualquier valor tanto positivo como negativo, lo cual añade el concepto de decremento. La construcción de la función \mathbf{A}_t se describe en la ecuación (2.4).

$$\mathbf{A}_t(i) = A_{t-1}(i) + U_t \quad (2.4)$$

Muthukrishnan [Mut05] hace una diferenciación dentro de este modelo dependiendo del nivel de exigencia que se le pide al modelo, se dice que es un *Modelo de Molinete estricto* cuando se añade la restricción $\forall i, \forall t \mathbf{A}_t(i) \geq 0$, mientras que se dice que es un *Modelo de Molinete relajado* cuando dicha restricción no se tiene en cuenta.

Un ejemplo de este modelo es el conteo del número de usuarios que están visitando un determinado sitio web, tomando U_t el valor 1 en el caso de una nueva conexión y -1 en el caso de de una desconexión. En este ejemplo el valor i representa una determinada página dentro del sitio web.

2.3. Estructura básica

Puesto que la naturaleza intrínseca de los *Algoritmos para Streaming* hace que procesen los elementos de entrada según van llegando, esto presenta peculiaridades con respecto de otras categorías algorítmicas más asentadas y utilizadas en la actualidad. Por tanto, primero se describirá la estructura básica que siguen los algoritmos más comunmente utilizados para después mostrar la estrategia seguida en el caso de Streaming.

Los algoritmos clásicamente estudiados para resolver la mayoría de problemas se basan la idea de funciones matemáticas. Es decir, se les presenta un conjunto de valores en la entrada, y a partir de ellos, realizan una determinada transformación sobre los datos, que genera como resultado una salida. Nótese que esta idea no impone ninguna restricción acerca de lo que puede suceder en dicho proceso, es decir, no se restringe el uso de estructuras de datos auxiliares o técnicas similares.

Esta visión no se enmarca correctamente en el contexto de los *Algoritmos para Streaming*. La razón se debe a que la entrada no es propiamente un conjunto de datos, sino que se refiere a un flujo en sí mismo. Esta característica tiene como consecuencia que en un gran número de ocasiones ya no sea necesario obtener los resultados tras cada llamada al algoritmo, ya que estos podrían carecer de interés o requerir un sobre coste innecesario. Por lo tanto, el concepto de función matemática pierde el sentido en este caso, ya que estas exigen la existencia de un valor como resultado.

Un concepto más acertado para modelizar un *Algoritmo para Streaming* podría ser lo que en los lenguajes de programación derivados de *Fortran* se denomina subrutina, es decir, una secuencia de instrucciones que realizan una tarea encapsulada como una unidad. Sin embargo, para poder describir correctamente la estructura de un *Algoritmo para Streaming* hace falta algo más. La razón de ello es que a partir de dicho modelo de diseño no sería posible realizar peticiones sobre el resultado calculado, es decir, sería una estrategia puramente procedural. Para corregir dicha problemática surge el concepto de consulta o *query*. A través de dicha idea se pretende representar la manera de obtener un resultado a partir del cómputo realizado hasta el momento actual.

En resumen, con dicha estrategia de diseño se consigue separar la parte de procesado de la entrada de la parte de consulta del resultado, lo cual proporciona amplias ventajas para el modelo seguido por los *Algoritmos para Streaming*. Sin embargo, dicha estrategia produce un sobre coste espacial con respecto del modelo de algoritmo clásico. Este se debe a la necesidad de mantener una estructura de datos en la cual se almacenen los resultados parciales referentes al flujo de entrada.

Los algoritmos *Algoritmos para Streaming* se componen por tanto de algoritmo de procesamiento del flujo de datos, una estructura de datos que almacena dichos resultados, y por último, un algoritmo de procesamiento de la consulta o *query* necesaria para obtener los resultados requeridos. a continuación se dividen las fases para el funcionamiento de un algoritmo de dichas características.

- **Inicialización:** En esta fase se llevan a cabo el conjunto de tareas necesarias para inicializar la estructura de datos que actuará como almacén de información durante el procesamiento del flujo de datos de entrada. Generalmente esto consiste en el proceso de reservar memoria, inicializar a un valor por defecto la estructura de datos, etc. Sin embargo, existen técnicas más sofisticadas que requieren de una mayor carga computacional en esta fase.
- **Procesado:** Se corresponde con el procesamiento del flujo de datos de manera secuencial. La idea subyacente en esta fase es la de realizar una determinada operación sobre la estructura de datos y el elemento de entrada actual, de manera que se lleve a cabo una actualización sobre la misma. Nótese en que la manera en que se manipula dicha estructura de datos condiciona en gran medida el conjunto de peticiones que se podrán realizar sobre ella.
- **Consulta:** La fase de consulta se diferencia con respecto de la anterior por ser de carácter consultivo. Con esto nos estamos refiriendo a que dicha tarea no modifica el estado actual de la estructura de datos, sino que recoge información de la misma, que posiblemente transforma mediante alguna operación, para después obtener un valor como resultado de dicha petición.

2.4. Medidas de Análisis y Conceptos Matemáticos

Los *Algoritmos para Streaming* se caracterizan por utilizar propiedades estadísticas en alguna parte (generalmente en el procesado) de su cómputo para obtener la solución con un menor coste computacional. En este caso, el coste que se pretende minimizar es el referido al espacio necesario para

almacenar la estructura de datos auxiliar. Tal y como se ha dicho anteriormente, la razón de ello es debida a que se presupone un conjunto masivo de datos en la entrada, por lo que se pretende que el orden de complejidad espacial respecto de la misma sea de carácter sublineal ($o(N)$).

El objetivo es encontrar soluciones con un intervalo de error acotado que permitan llegar a la solución en un orden espacial de complejidad logarítmica ($O(\log(N))$). Sin embargo, existen ocasiones en que no es posible llegar a una solución en dicho orden de complejidad, como es el caso de *Algoritmos para Streaming* aplicados a problemas de *Grafos*, en los cuales se relaja dicha restricción a un orden de complejidad *poli-logarítmico* ($O(\text{polylog}(N))$).

El órden de complejidad *poli-logarítmico* engloba el conjunto de funciones cuyo orden de complejidad presenta un crecimiento acorde a una función polinomial formada logaritmos. Matemáticamente esto se modeliza a través de la ecuación (2.5)

$$a_k \log^k(N) + \dots + a_1 \log(N) + a_0 = O(\text{polylog}(N)) \in o(N). \quad (2.5)$$

En esta sección se muestran distintas estrategias para poder llevar a cabo la demostración de pertenencia a un determinado orden de complejidad de un *Algoritmo para Streaming*. Debido a la elevada base estadística que requieren dichas demostraciones, a continuación se definen algunos conceptos básicos relacionadas con estimadores estadísticos, para después realizar una breve demostración acerca de distintas cotas de concentración de valores en una distribución en las subsecciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4. Las definiciones que se exponen a continuación han sido extraídas de los apuntes del curso sobre *Randomized Algorithms* [Asp16] impartido por Aspnes en la *Universidad de Yale* así como las de la asignatura de *Estadística*[SJNSB16] impartida en el Grado de Ingeniería Informática de la *Universidad de Valladolid*.

2.4.1. Conceptos básicos de Estadística

Denotaremos como x_1 a una observación cualquiera contenida en el espacio de todas los posibles. Al conjunto de todas las observaciones posibles lo denotaremos como Ω y lo denominaremos espacio muestral, por lo tanto, $x \in \Omega$. Este concepto se puede entender de manera más sencilla mediante el siguiente ejemplo. Supongamos el lanzamiento de una moneda, que como resultado puede tomar los valores cara o cruz. Definiremos entonces $x_1 = \text{cara}$ y $x_2 = \text{cruz}$ como los sucesos posibles de lanzar una moneda. Por tanto el espacio Ω se define como $\Omega = \{x_1, x_2\} = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$.

El siguiente paso es definir el concepto de **Variable Aleatoria**, que representa una función que mapea la realización de un determinado suceso sobre el espacio Ω . Dicha función se denota con letras mayúsculas y puesto que sus parámetros de entrada son desconocidos, estos se ignoran en la notación. Por tanto denotaremos las variables aleatorias como $(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \text{etc.})$. Para la variable aleatoria \mathbf{X} , sean $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ cada una de las observaciones posibles. Siguiendo el ejemplo anterior, se puede

modelizar el lanzamiento de una moneda como X . Nótese por tanto, que una variable aleatoria puede definirse de manera textual como la modelización del resultado de un suceso *a-priori* desconocido.

Definiremos probabilidad como la medida de certidumbre asociada a un suceso o evento futuro, expresada como un valor contenido en el intervalo $[0, 1]$, tomando el valor 0 un suceso imposible y 1 un suceso seguro. La notación seguida para representar esto será $Pr[\mathbf{X} = x_i]$. Suponiendo la equiprobabilidad en el ejemplo de la moneda, podemos definir sus valores de probabilidad como $Pr[\mathbf{X} = \text{cara}] = \frac{1}{2}$ y $Pr[\mathbf{X} = \text{cruz}] = \frac{1}{2}$

Una vez descritos estos conceptos simples, a continuación hablaremos sobre distintos conceptos estadísticos utilizados en el análisis de algoritmos probabilísticos tales como *Esperanza*, *Varianza*, *Variables Independientes* y *Probabilidad Condicionada*.

Denominaremos **Esperanza Matemática** al valor medio o más probable que se espera que tome una determinada variable aleatoria. La modelización matemática de dicho concepto se muestra en la ecuación (2.6). Además, la esperanza matemática es de carácter lineal, por lo que se cumplen las ecuaciones (2.7) y (2.8)

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot Pr[\mathbf{X} = x_i] \quad (2.6)$$

$$\mathbb{E}[c\mathbf{X}] = c\mathbb{E}[\mathbf{X}] \quad (2.7)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{X} + \mathbf{Y}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbb{E}[\mathbf{Y}] \quad (2.8)$$

La **Varianza** se define como una medida de dispersión de una variable aleatoria. Dicho estimador representa el error cuadrático respecto de la esperanza. Su modelización matemática se muestra en la ecuación (2.9). Aplicando propiedades algebraicas se puede demostrar la veracidad de las propiedades descritas en las ecuaciones (2.10) y (2.11).

$$Var[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2] \quad (2.9)$$

$$Var[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] - \mathbb{E}^2[\mathbf{X}] \quad (2.10)$$

$$Var[c\mathbf{X}] = c^2 Var[\mathbf{X}] \quad (2.11)$$

A continuación se describe el concepto de **Independencia** entre dos variables aleatorias \mathbf{X}, \mathbf{Y} . Se dice que dos variables son independientes cuando los sucesos de cada una de ellas no están condicionados por los de otras. Esto puede verse a como el cumplimiento de la igualdad de la ecuación (2.12).

$$Pr[\mathbf{X} = x \cap \mathbf{Y} = y] = Pr[\mathbf{X} = x] \cdot Pr[\mathbf{Y} = y] \quad (2.12)$$

Cuando nos referimos al concepto de independencia referido a un conjunto n variables aleatorias $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ lo denominaremos **Independencia Mutua**, que impone la restricción descrita en la ecuación (2.13).

$$Pr\left[\bigcap_{i=1}^n \mathbf{X}_i = x_i\right] = \prod_{i=1}^n Pr[\mathbf{X}_i = x_i] \quad (2.13)$$

También es de especial interés en el campo de los algoritmos probabilísticos el caso de la **k-independencia** sobre un conjunto de n variables aleatorias $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. Dicha idea se puede resumir como la independencia de todas las variables en grupos de k variables. Este concepto tiene mucha importancia en el ámbito de los *Sketches*, tal y como se verá en la sección 3.2.4. El caso más simple es para $k = 2$, el cual se denomina **independencia pareada**, cuya modelización matemática se muestra en la ecuación (2.14).

$$\forall i, \forall j \ Pr[\mathbf{X}_i = x_i \cap \mathbf{X}_j = x_j] = Pr[\mathbf{X}_i = x_i] \cdot Pr[\mathbf{X}_j = x_j] \quad (2.14)$$

Desde el punto de vista de conjuntos de n variables aleatorias $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, existen distintas propiedades de linealidad que se cumplen entre ellas a nivel del cálculo de la *Esperanza* y la *Varianza*. En el caso de la *Esperanza*, la linealidad respecto de la suma (ecuación (2.15)) se cumple para variables dependientes e independientes. Sin embargo, en el caso de la *Varianza*, la linealidad respecto de la suma (ecuación (2.16)) se cumple tan solo para variables **independientes pareadas**.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{X}_i] \quad (2.15)$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n Var[\mathbf{X}_i] \quad (2.16)$$

La **Probabilidad Condicionada** entre dos variables aleatorias \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 se puede definir como la medida de verosimilitud de la ocurrencia del suceso \mathbf{E}_1 sabiendo que ya ha ocurrido \mathbf{E}_2 . Esto se puede modelizar matemáticamente tal y como se muestra en la ecuación (2.17).

$$Pr[\mathbf{E}_1|\mathbf{E}_2] = \frac{Pr[\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2]}{Pr[\mathbf{E}_2]} \quad (2.17)$$

En el caso de la **Probabilidad Condicionada** sobre variables independientes, surge la propiedad descrita en la ecuación (2.18). Es fácil entender la razón, que se apoya en la idea de que si dos variables aleatorias no guardan relación, entonces la ocurrencia de una de ellas, no condicionará el resultado de la otra.

$$Pr[\mathbf{X}_1 = x_1 | \mathbf{X}_2 = x_2] = \frac{Pr[\mathbf{X}_1 = x_1 \cap \mathbf{X}_2 = x_2]}{Pr[\mathbf{X}_1 = x_1]} = \frac{Pr[\mathbf{X}_1 = x_1 \cdot \mathbf{X}_2 = x_2]}{Pr[\mathbf{X}_1 = x_1]} = Pr[\mathbf{X}_2 = x_2] \quad (2.18)$$

Una vez descritos los conceptos estadísticos básicos para el análisis de algoritmos probabilísticos, lo siguiente es realizar una exposición acerca de las distintas cotas de concentración de valores, lo cual permite obtener resultados aproximados acerca de los resultados esperados por dichos algoritmos, así como sus niveles de complejidad. Primero se describirá *Desigualdad de Boole*, para después tratar las desigualdades de *Markov*(2.4.2), *Chebyshev*(2.4.3) y *Chernoff*(2.4.4)

La **Desigualdad de Boole** consiste en una propiedad básica que indica que la probabilidad de que se cumpla la ocurrencia de un suceso es menor o igual que la suma de todas ellas. Esto se modeliza matemáticamente en la ecuación (2.19).

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^n \mathbf{E}_i\right] \leq \sum_{i=1}^n Pr[\mathbf{E}_i] \quad (2.19)$$

2.4.2. Desigualdad de Markov

La *Desigualdad de Markov* es la técnica base que utilizan otras desigualdades más sofisticadas para tratar de acotar la *Esperanza* de una determinada *Variable Aleatoria*. Proporciona una cota superior de probabilidad respecto de la *Esperanza* tal y como se muestra en la ecuación (2.20). Tal y como se puede intuir, dicha cota es muy poco ajustada, sin embargo, presenta una propiedad muy interesante como estructura base. Sea $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función positiva, entonces también se cumple la desigualdad de la ecuación (2.21). El punto interesante surge cuando se escoge la función f de tal manera que sea estrictamente creciente, entonces se cumple la propiedad descrita en la ecuación (2.22), a través de la cual podemos obtener cotas mucho más ajustadas. Dicha idea se apoya en la *Desigualdad de Jensen*.

$$\forall \lambda \geq 0, Pr[\mathbf{X} \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}[\mathbf{X}]}{\lambda} \quad (2.20)$$

$$\forall \lambda \geq 0, Pr[f(\mathbf{X}) \geq f(\lambda)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{X})]}{f(\lambda)} \quad (2.21)$$

$$\forall \lambda \geq 0, Pr[\mathbf{X} \geq \lambda] = Pr[f(\mathbf{X}) \geq f(\lambda)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{X})]}{f(\lambda)} \quad (2.22)$$

2.4.3. Desigualdad de Chebyshev

La *Desigualdad de Chebyshev* utiliza la técnica descrita en la subsección anterior apoyandose en la idea de la función f para obtener una cota de concentración mucho más ajustada basandose en la *Varianza*. Dicha propiedad se muestra en la ecuación (2.23). En este caso se utiliza $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2$, que es estrictamente creciente en el dominio de aplicación de \mathbf{X} . Además, se selecciona como

variable aleatoria $|\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]|$, es decir, el error absoluto de una \mathbf{X} respecto de su valor esperado. La demostración de esta idea se muestra en la ecuación (2.24).

$$\forall \lambda \geq 0, \Pr[|\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]| \geq \lambda] \leq \frac{\text{Var}[\mathbf{X}]}{\lambda^2} \quad (2.23)$$

$$\forall \lambda \geq 0, \Pr[|\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]| \geq \lambda] = \Pr[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2 \geq \lambda^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2]}{\lambda^2} = \frac{\text{Var}[\mathbf{X}]}{\lambda^2} \quad (2.24)$$

2.4.4. Desigualdad de Chernoff

En este apartado se realiza una descripción acerca de la *Desigualdad de Chernoff*. Dicha descripción ha sido extraída de los apuntes de la asignatura de Algoritmos Probabilísticos (*Randomized Algorithms*) [Cha04] impartida por Shuchi Chawla en la *Carnegie Mellon University* de Pennsylvania.

La *Desigualdad de Chernoff* proporciona cotas mucho más ajustadas que por contra, exigen unas presunciones más restrictivas para poder ser utilizada. La variable aleatoria en este caso debe ser de la forma $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$ donde cada \mathbf{X}_i es una variable aleatoria uniformemente distribuida e independiente del resto. También describiremos la esperanza de cada una de las variables \mathbf{X}_i como $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = p_i$.

Denotaremos como μ a la esperanza de \mathbf{S} , tal y como se describe en la ecuación (2.25). También se define la función f como $f(\mathbf{S}) = e^{t\mathbf{S}}$.

$$\mu = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{X}_i] = \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.25)$$

El siguiente paso es utilizar la ecuación (2.22) de la *Desigualdad de Markov* con la función f , que en este caso es posible puesto que es estrictamente creciente. En este caso en lugar de utilizar λ como constante, se prefiere $\delta \in [0, 1]$, que se relaciona con la anterior de la siguiente manera: $\lambda = (1 + \delta)$. Entonces la ecuación (2.26) muestra el paso inicial para llegar a la *Desigualdad de Chernoff*.

$$\Pr[\mathbf{X} > (1 + \delta)\mu] = \Pr[e^{t\mathbf{X}} > e^{(1+\delta)t\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{t\mathbf{X}}]}{e^{(1+\delta)t\mu}} \quad (2.26)$$

Aplicando operaciones aritméticas y otras propiedades estadísticas, se puede demostrar la veracidad de las ecuaciones (2.27) y (2.28), que proporcionan cotas mucho más ajustadas de concentración de la distribución de una *variable aleatoria* formada por la suma de n variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas.

$$\forall \delta \geq 0, \Pr[\mathbf{X} \geq (1 + \delta)\mu] \leq e^{-\frac{\lambda^2 \mu}{2 + \lambda}} \quad (2.27)$$

$$\forall \delta \geq 0, \Pr[\mathbf{X} \leq (1 - \delta)\mu] \leq e^{-\frac{\lambda^2 \mu}{2 + \lambda}} \quad (2.28)$$

2.4.5. Funciones Hash

Las funciones hash son transformaciones matemáticas basadas en la idea de trasladar un valor en un espacio discreto con n posibles valores a otro de m valores de tamaño menor tratando de evitar que se produzcan colisiones en la imagen. Por tanto son funciones que tratan de ser inyectivas en un subespacio de destino menor que el de partida. Sin embargo, tal y como se puede comprender de manera intuitiva es una propiedad imposible de cumplir debido a los tamaños del espacio de partida y de destino.

Las familias de funciones hash universales se refieren a distintas categorías en las cuales se pueden agrupar las funciones hash según el nivel de propiedades que cumplen. Las categorías en las que se agrupan se denominan *funciones hash k -universales*, de tal manera que el valor k indican la dificultad de aparición de colisiones. Las funciones *2-universales* se refieren a aquellas en las cuales se cumple que $Pr[h(x) = h(y)] \leq 1/m$ siendo h la función hash, x e y dos posibles entradas tales que $x \neq y$ y m el cardinal del conjunto de todas las posibles claves. Se dice que una función hash es *fuertemente 2-universal* (*strongly 2-universal*) si cumple que $Pr[h(x) = h(y)] \leq 1/m^2$ y genéricamente se dice que una función es *k -universal* si cumple que $Pr[h(x) = h(y)] \leq 1/m^{-k}$. A continuación se describen dos estrategias básicas de diseño de funciones hash. Posteriormente se realiza una descripción acerca de las funciones hash sensibles a la localización.

Hash basado en Congruencias

Las funciones hash basadas en congruencias poseen la propiedad de ser *2-universales*. Se basan en la idea de utilizar como espacio de destino aquel formado por \mathbb{Z}_p , es decir, todos los enteros que son congruentes con p siendo $p \geq m$ un número primo. Además, se utilizan los enteros $a, b \in \mathbb{Z}_p$ con $a \neq 0$. La función hash entonces se describe tal y como se indica en la ecuación (2.29).

$$h_{ab}(x) = (ax + b) \bmod p \quad (2.29)$$

Hash basado en Tabulación

El hash basado en tabulación consiste en un método de generación de valores hash que restringe su dominio de entrada a cadenas de texto de tamaño fijo (u otras entradas que puedan codificarse de dicha forma). Denominaremos c al tamaño fijo y $T_i, i \in [1, c]$ a vectores que mapean el carácter i -ésimo de manera aleatoria. Entonces la función hash realiza una operación *or-exclusiva* sobre los $T_i[x_i]$ valores tal y como se indica en la ecuación (2.30). Las funciones hash que se construyen siguiendo esta estrategia poseen la propiedad pertenecer a la categoría de las *3-universales*.

$$h(x) = T_1[x_1] \oplus T_2[x_2] \oplus \dots \oplus T_c[x_c] \quad (2.30)$$

Funciones Hash sensibles a la localización

Una categoría a destacar son las *funciones hash sensibles a la localización*. Estas poseen la propiedad de distribuir los valores cercanos en el espacio de destino tratando mantener las propiedades de cercanía entre los valores. El primer artículo en que se habla de ellas es *Approximate Nearest Neighbor: Towards Removing the Curse of Dimensionality* ?? de *Indyk* y *Motwani* inicialmente para resolver el problema de la *búsqueda del vecino más cercano* (*Nearest Neighbor Search*). Se trata de funciones hash multidimensionales, es decir, en la entrada están compuestas por más de un elemento. Estas funciones han cobrado especial importancia en los últimos años por su uso en problemas de dimensión muy elevada, ya que sirven como estrategia de reducción de la dimensionalidad del conjunto de datos, que como consecuencia reduce el coste computacional del problema.

Indyk indica que para que una función hash sea sensible a la localización o (r_1, r_2, p_1, p_2) -sensible, para cualquier par de puntos de entrada p, q y la función de distancia d se cumpla la ecuación (2.31). Las funciones hash que cumplen esta propiedad son interesantes cuando $p_1 > p_2$ y $r_1 < r_2$, de tal forma que para puntos cercanos en el espacio, el valor hash obtenido es el mismo, por lo que se asume que dichos puntos se encuentran cercanos en el espacio de partida.

$$\text{if } d(p, q) \leq r_1, \text{ then } \Pr[h(x) = h(y)] \geq p_1 \quad (2.31)$$

$$\text{if } d(p, q) \geq r_2, \text{ then } \Pr[h(x) = h(y)] \leq p_2 \quad (2.32)$$

Una vez descritos los conceptos básicos acerca de lo que son los *Algoritmos para Streaming* y las bases estadísticas necesarias para poder entender el funcionamiento de los mismo y sus niveles de complejidad así como de precisión, en las siguientes secciones se realiza una descripción sobre algunos de los algoritmos más relevantes en este área. En especial se explica el algoritmo de *Morris* en la sección 2.5, el de *Flajolet-Martin* en la 2.5 y por último se hablará de la *Estimación de Momentos de Frecuencia* en el modelo en streaming en la sección 2.7.

2.5. Algoritmo de Morris

El *Algoritmo de Morris* fue presentado por primera vez en el artículo *Counting Large Numbers of Events in Small Registers* [Mor78] redactado por *Robert Morris*. En dicho documento se trata de encontrar una solución al problema de conteo de ocurrencias de un determinado suceso teniendo en cuenta las restricciones de espacio debido a la elevada tasa de ocurrencias que se da en muchos fenómenos. El problema del conteo (**Count Problem**) de ocurrencias también se denomina el momento de frecuencia F_1 tal y como se verá en la sección 2.7.

Por tanto, *Morris* propone realizar una estimación de dicha tasa para reducir el espacio necesario para almacenar el valor. Intuitivamente, a partir de dicha restricción se consigue un orden de complejidad espacial sublineal ($o(N)$) con respecto del número de ocurrencias. Se puede decir que el artículo

publicado por *Morris* marcó el punto de comienzo de este área de investigación. El conteo probabilista es algo trivial si se restringe a la condición de incrementar el conteo de ocurrencias siguiendo una distribución de *Bernoulli* con un parámetro p prefijado previamente. Con esto se consigue un error absoluto relativamente pequeño con respecto al valor p escogido. Sin embargo, el error relativo que se obtiene cuando el número de ocurrencias es pequeño es muy elevado, lo cual lo convierte en una solución impracticable.

Para solucionar dicha problemática y conseguir una cota del error relativo reducida, la solución propuesta por *Morris* se basa en la selección del parámetro p variable con respecto del número de ocurrencias, con lo cual se consigue que la decisión de incrementar el contador sea muy probable en los primeros casos, lo cual elimina el problema del error relativo. *Morris* propone aumentar el contador X con probabilidad $\frac{1}{2^X}$. Tras n ocurrencias, el resultado que devuelve dicho algoritmo es $\tilde{n} = 2^X - 1$. El pseudocódigo se muestra en el algoritmo 1.

Algorithm 1: Morris-Algorithm

Result: $\tilde{n} = 2^X - 1$
 $X \leftarrow 0$;
for *cada evento* **do**
 $X \leftarrow X + 1$ con probabilidad $\frac{1}{2^X}$;
end

A continuación se realiza un análisis de la solución. Esta ha sido extraída de los apuntes de la asignatura *Algorithms for Big Data* [Nel15] impartida por *Jelani Nelson* en la *Universidad de Harvard*. Denotaremos por X_n el valor del contador X tras n ocurrencias. Entonces se cumplen las igualdades descritas en las ecuaciones (2.33) y (2.34). Esto se puede demostrar mediante técnicas inductivas sobre n .

$$\mathbb{E}[2^{X_n}] = n + 1 \quad (2.33)$$

$$\mathbb{E}[2^{2X_n}] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \quad (2.34)$$

Por la *Desigualdad de Chebyshev* podemos acotar el error cometido tras n repeticiones, dicha formulación se muestra en la ecuación (2.35).

$$Pr[|\tilde{n} - n| > \epsilon n] < \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \cdot \mathbb{E}[\tilde{n} - n]^2 = \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \cdot \mathbb{E}[2^X - 1 - n]^2 \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \cdot \frac{n^2}{2} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2\epsilon^2} \quad (2.37)$$

La ventaja de esta estrategia algorítmica con respecto de la trivial es la cota del error relativo producido en cada iteración del algoritmo, lo cual aporta una mayor genericidad debido a que esta se mantiene constante con respecto del número de ocurrencias. Sin embargo, se han propuesto otras soluciones para tratar de reducir en mayor medida dicha cota de error. El algoritmo *Morris+* se basa en el mantenimiento de s copias independientes de *Morris* para después devolver la media del resultado de cada una de ellas. A partir de esta estrategia se consiguen las tasas de error que se indican en la ecuación (2.38).

$$Pr[|\tilde{n} - n| > \epsilon n] < \frac{1}{2s\epsilon^2} \quad s > \frac{3}{2\epsilon^2} \quad (2.38)$$

2.6. Algoritmo de Flajolet-Martin

En esta sección se describe el *Algoritmo de Flajolet-Martin*, cuya descripción aparece en el artículo *Probabilistic Counting Algorithms for Data Base Applications* [FM85] redactado por *Philippe Flajolet* y *G. Nigel Martin*. En este caso, la problemática que se pretende resolver no es el número de ocurrencias de un determinado suceso, sino el número de sucesos distintos (**Count Distinct Problem**) en la entrada. Este problema también se conoce como el cálculo del momento de frecuencia F_0 tal y como se verá en la sección 2.7. Al igual que en el caso del algoritmo de *Morris*, se apoya en estrategias probabilistas para ajustarse a un orden de complejidad espacial de carácter sublineal ($o(N)$) manteniendo una cota de error ajustada.

La intuición en la cual se basa el *Algoritmo de Flajolet-Martin*, es la transformación de los elementos de entrada sobre una *función Hash* universal binaria con distribución uniforme e independiente de probabilidad. La propiedad de distribución uniforme permite entonces prever que la mitad de los elementos tendrán un 1 en el bit menos significativo, que una cuarta parte de los elementos tendrán un 1 en el segundo bit menos significativo y así sucesivamente. Por tanto, a partir de esta idea se puede realizar una aproximación probabilista del número de elementos distintos que han sido presentados en la entrada. Requiere de L bits de espacio para el almacenamiento del número de elementos distintos. Por la notación descrita en anteriores secciones $L = \log(n)$, donde n es el número máximo de elementos distintos en la entrada. A continuación se explica esta estrategia, para ello nos apoyaremos en las siguientes funciones:

- *hash*(x) Es la función hash con distribución uniforme e independiente de probabilidad que

mapea una entrada cualquiera a un valor entero en el rango $[0, \dots, 2^L - 1]$.

- $bit(y, k)$ Esta función devuelve el bit k -ésimo de la representación binaria de y , de tal manera que se cumple que $y = \sum_{k \geq 0} bit(y, k) 2^k$
- $\rho(y)$ La función ρ devuelve la posición en la cual se encuentra el bit con valor 1 empezando a contar a partir del menos significativo. Por convenio, devuelve el valor L si y no contiene ningún 1 en su representación binaria, es decir, si $y = 0$. Esto se modeliza matemáticamente en la ecuación (2.39).

$$\rho(y) = \begin{cases} \min_{k \geq 0} bit(y, k) \neq 0 & y \geq 0 \\ L & y = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Flajolet y Martin se apoyan en una estructura de datos indexada a la cual denominan **BITMAP**, de tamaño $[0 \dots L - 1]$ la cual almacena valores binarios $\{0, 1\}$ y se inicializa con todos los valores a 0. Nótese por tanto, que esta estructura de datos puede ser codificada como un string binario de longitud L . La idea del algoritmo es marcar con un 1 la posición **BITMAP** $[\rho(hash(x))]$. Seguidamente, queda definir el resultado de la consulta sobre cuántos elementos distintos han aparecido en el flujo de datos de entrada. Para ello se calcula $2^{\rho(\text{BITMAP})}$. El pseudocódigo se muestra en el algoritmo 2.

Algorithm 2: FM-Algorithm

Result: $2^{\rho(\text{BITMAP})}$
for $i \in [0, \dots, L - 1]$ **do**
 | **BITMAP** $[i] \leftarrow 0$;
end
for *cada evento* **do**
 | **if** **BITMAP** $[\rho(hash(x))]$ **=** 0 **then**
 | | **BITMAP** $[\rho(hash(x))]$ \leftarrow 1;
 | **end**
end

El análisis de esta solución ha sido extraído de los apuntes del libro *Mining of massive datasets* [LRU14] de la *Universidad de Cambridge*. En este caso lo representa teniendo en cuenta el número de 0's seguidos en la parte menos significativa de la representación binaria de $h(x)$. Nótese que esto es equivalente al valor de la función $\rho(h(x))$, por tanto, adaptaremos dicho análisis a la solución inicial propuesta por *Flajolet y Martin*. La probabilidad de que se cumpla $\rho(h(x)) = r$ es 2^{-r} . Supongamos que el número de elementos distintos en el stream es m . Entonces la probabilidad de que ninguno de ellos cumpla $\rho(h(x)) = r$ es al menos $(1 - 2^{-r})^m$ lo cual puede ser reescrito como $((1 - 2^{-r})^{2^r})^{m2^{-r}}$. Para valores suficientemente grandes r se puede asumir que dicho valor es de la forma $(1 - \epsilon)^{1/\epsilon} \approx 1/\epsilon$.

Entonces la probabilidad de que no se cumpla que $\rho(h(x)) = r$ cuando han aparecido m elementos distintos en el stream es de $e^{-m2^{-r}}$

La problemática de este algoritmo deriva de la suposición de la capacidad de generación de claves Hash totalmente aleatorias, lo cual no se ha conseguido en la actualidad. Por lo tanto posteriormente, Flajolet ha seguido trabajando el problema de conteo de elementos distintos en *Loglog counting of large cardinalities* [DF03] y *Hyperloglog: the analysis of a near-optimal cardinality estimation algorithm* [FFGM07] para tratar de mejorar el grado de precisión de su estrategia de conteo. En el artículo *An optimal algorithm for the distinct elements problem* [KNW10] Daniel Kane y otros muestran un algoritmo óptimo para el problema. Los resultados de dichos trabajos se discuten en la sección 3.6 por su cercana relación con las *estructuras de datos de resumen*.

2.7. Aproximación a los Momentos de Frecuencia

La siguiente idea de la que es interesante hablar para terminar la introducción a los *Algoritmos para Streaming* son los *Momentos de Frecuencia*. Una generalización de los conceptos del número de elementos distintos (F_0) y el conteo de elementos (F_1) que se puede extender a cualquier F_k para $k \geq 0$. La definición matemática del momento de frecuencia k -ésimo se muestra en la ecuación (2.40). Nótese el caso especial de F_∞ que se muestra en la ecuación (2.41) y se corresponde con el elemento más veces común en el *Stream*. Estas ideas han sido extraídas del documento *Frequency Moments* [Woo09] redactado por David Woodruff.

$$F_k = \sum_{i=1}^n m_i^k \quad (2.40)$$

$$F_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} m_i \quad (2.41)$$

El resto de la sección trata sobre la exposición de los algoritmos para el cálculo de los momentos de frecuencia descritos en el artículo *The space complexity of approximating the frequency moments* [AMS96] redactado por Noga Alon, Yossi Matias y Mario Szegedy, por el cual fueron galardonados con el premio Gödel en el año 2005. En dicho trabajo además de presentar *Algoritmos para Streaming* para el cálculo de F_k (cabe destacar su solución para F_2), también presentan cotas inferiores para el problema de los *Momentos de Frecuencia*. Posteriormente Piotr Indyk y David Woodruff encontraron un algoritmo óptimo para el problema de los *Momentos de Frecuencia* tal y como exponen en *Optimal Approximations of the Frequency Moments of Data Streams* [IW05]. A continuación se discuten los resultados de dichos trabajos.

Para el cálculo de F_k para $k \geq 0$ Alon, Matias y Szegedy proponen un enfoque similar a los propuestos en algoritmos anteriores (la definición de una variable aleatoria X tal que $\mathbb{E}[X] = F_k$). Sin embargo, la novedad en este caso es que su algoritmo no está restringido a un k concreto, sino

que en su caso es generalizable para cualquier entero positivo, sin embargo, en este caso la exposición es a nivel teórico. La definición del algoritmo a nivel práctico se describe en la sección ??.

Definiremos las constantes $S_1 = O(n^{1-1/k}/\lambda^2)$ y $S_2 = O(\log(1/\varepsilon))$. El algoritmo utiliza S_2 variables aleatorias denominadas Y_1, Y_2, \dots, Y_{S_2} y devuelve la mediana de estas denominandola Y . Cada una de estas variables Y_i está formada por la media de X_{ij} variables aleatorias tales que $1 \leq j \leq S_1$. La forma en que se actualiza el estado del algoritmo tras cada nueva llegada se apoya en el uso de S_2 funciones hash uniformemente distribuidas e independientes entre si que mapean cada símbolo a un determinado índice j .

Para el análisis del algoritmos supondremos que el tamaño n del *Stream* es conocido *a-priori*. La demostración se apoya en una variable aleatoria X construida de la siguiente manera:

- Seleccionaremos de manera aleatoria el elemento $a_{p \in (1, 2, \dots, m)}$ del Stream, siendo $a_p = l \in (1, 2, \dots, n)$. Es decir, el elemento procesado en el momento p representa la llegada del símbolo l .
- Definiremos $r = |\{q : q \geq p, a_q = l\}|$ como el número de ocurrencias del símbolo l hasta el momento p .
- La variable aleatoria X se define como $X = m(r^k - (r - 1)^k)$

Desarrollando la Esperanza Matemática de la variable aleatoria X se puede demostrar que esta tiende al momento de frecuencia k tal y como se muestra en la ecuación (2.42).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (j^k - (j-1)^k) \\
&= \frac{m}{m} [(1^k + (2^k - 1^k) + \dots + (m_1^k - (m_1 - 1)^k)) \\
&\quad + (1^k + (2^k - 1^k) + \dots + (m_2^k - (m_2 - 1)^k)) + \dots \\
&\quad + (1^k + (2^k - 1^k) + \dots + (m_n^k - (m_n - 1)^k))] \\
&= \sum_{i=1}^n m_i^k = F_k
\end{aligned} \tag{2.42}$$

En cuanto al coste espacial del algoritmo, se puede demostrar tal y como indican *Alon, Matias* y *Szedgedy* en su artículo original [AMS96] que este sigue el orden descrito en la ecuación (2.43) puesto que es necesario almacenar a_p y r lo cual requiere de $\log(n) + \log(m)$ bits de memoria, además de $S_1 \times S_2$ variables aleatorias para mantener X .

$$O\left(\frac{k \log \frac{1}{\varepsilon}}{\lambda^2} n^{1-\frac{1}{k}} (\log n + \log m)\right) \tag{2.43}$$

2.8. Conclusiones

Tal y como se ha ilustrado a lo largo del capítulo, los *algoritmos para streaming* son una solución adecuada tanto a nivel conceptual como práctica para problemas en los cuales el tamaño del conjunto de datos de entrada es tan elevado que no se puede hacer frente mediante estrategias clásicas. Por

contra, estas soluciones presentan dificultades debido al elevado peso de la componente matemática y estadística que presentan. Además, la imprecisión en sus resultados restringe su uso en casos en los cuales la precisión es un requisito imprescindible por lo que tan solo deben ser utilizados en casos en los cuales no existan otras soluciones que calculen una solución con las restricciones de tiempo y espacio impuestas.

En este capítulo se ha realizado una introducción superficial acerca de este modelo, sin embargo las implementaciones y descripciones que se muestran tan solo gozan de importancia a nivel teórico y conceptual. Por lo tanto, en el capítulo 3 se continua la exposición de técnicas de tratamiento de grandes cantidades de datos desde una perspectiva más práctica hablando de las *estructuras de datos de resumen*. Se describen en especial detalle las estructuras basadas en *sketches*, que internamente utilizan *algoritmos para streaming*.

Capítulo 3

Estrategias de Sumarización

3.1. Introducción

El gran crecimiento tecnológico que se está llevando a cabo en la actualidad a todos los niveles está propiciando además un aumento exponencial en cuanto a la cantidad de información que se genera. La reducción de costes en cuanto a la instalación de sensores que permiten recoger información de muchos procesos productivos, así como la obtención de metadatos a partir del uso de internet y las redes sociales por parte de los usuarios hace que el ritmo de crecimiento en cuanto a cantidad información generada por unidad de tiempo haya crecido a un ritmo frenético.

Una de las razones que han facilitado dicha tendencia es la disminución de costes de almacenamiento de información, a la vez que han aumentado las capacidades de cómputo necesarias para procesarla. Sin embargo, debido al crecimiento exponencial de los conjuntos de datos, es necesario investigar nuevas técnicas y estrategias que permitan obtener respuestas satisfactorias basadas en la gran cantidad de información de la que se dispone en un tiempo razonable.

Tradicionalmente, la investigación en el campo de las *bases de datos* se ha centrado en obtener respuestas exactas a distintas consultas, tratando de hacerlo de la manera más eficiente posible, así como de tratar de reducir el espacio necesario para almacenar la información. *Acharya y otros* proponen en el artículo *Join synopses for approximate query answering* [AGPR99] el concepto de *Approximate Query Processing*. Dicha idea se expone en la subsección 3.1.1.

3.1.1. Approximate Query Processing

El *procesamiento de consultas aproximado*, (*Approximate Query Processing* o **AQP**) se presenta como una estrategia de resolución de consultas basada en conceptos y propiedades estadísticas que permiten una gran reducción en la complejidad computacional y espacial necesaria para la resolución de las mismas por una base de datos. Por contra, dicha reducción a tiene como consecuencia la adicción de un determinado nivel de imprecisión en los resultados a la cual se denomina error. Se pretende que dicho error pueda ser acotada en un intervalo centrado en el valor verdadero con una

desviación máxima determinada por ϵ , y que la pertenencia de la solución a este intervalo se cumpla con una probabilidad δ . Al igual que en el anterior capítulo, en este caso también se presta especial importancia a la minimización del error relativo, lo cual consigue que las soluciones mediante el *procesamiento de consultas aproximado* sean válidas tanto para consultas de tamaño reducido como de gran tamaño.

Durante el resto del capítulo se describen y analizan distintas estrategias que permiten llevar a cabo implementaciones basadas en *procesamiento de consultas aproximado* centrando especial atención en los *Sketches* por su cercanía respecto del *Modelo en Streaming* descrito en el capítulo 2. En la sección 3.2 se realiza una descripción a partir de la cual se pretende aclarar las diferencias entre las distintas estrategias de sumarización de grandes conjuntos de datos. Las estrategias que se describen son *muestreo probabilístico*, mantenimiento de un *histograma*, utilización de *wavelets* y por último se describen en profundidad conceptos referidos a *Sketches*. En las secciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 se habla del *Bloom-Filter Count-Min Sketch*, *Count Sketch* y *HyperLogLog* respectivamente.

3.2. Tipos de Estrategias de Sumarización

Para el diseño de soluciones basadas en *procesamiento de consultas aproximado* existen distintas estrategias, cada una de las cuales presentan ventajas e inconvenientes por lo que cada una de ellas es más conveniente para una determinada tarea, sin embargo en ocasiones surgen solapamientos entre ellas tal y como se pretende mostrar en esta sección. Dichas descripciones han sido extraídas del libro *Synopses for massive data* [CGHJ12] redactado por *Cormode y otros*. En las secciones 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4 se habla de *Sampling*, *Histogram*, *Wavelet* y *Sketches* respectivamente.

3.2.1. Sampling

El *Sampling* o *muestreo probabilístico* es la estrategia más consolidada de entre las que se presentan. Las razones se deben a su simplicidad conceptual así como su extendido uso en el mundo de la estadística. Uno de los primeros artículos en que se trata el muestreo aplicado a bases de datos es *Accurate estimation of the number of tuples satisfying a condition* [PSC84] redactado por *Piatetsky-Shapiro y Connell*. La intuición en que se basa esta solución es la selección de un subconjunto de elementos denominado *muestra* extraída del conjunto global al cual se denomina *población*. Una vez obtenida la *muestra* del conjunto de datos global, cuyo tamaño es significativamente menor respecto del global (lo cual reduce drásticamente el coste computacional), se realizan los cálculos que se pretendía realizar sobre toda la *población* para después obtener un estimador del valor real que habría sido calculado al realizar los cálculos sobre el conjunto de datos global.

Para que las estrategias de sumarización de información obtengan resultados válidos o significativos respecto del conjunto de datos, es necesario que se escojan adecuadamente las instancias de la *muestra*, de manera que se maximice la similitud del resultado respecto del que se habría obtenido sobre toda la población. Para llevar a cabo dicha labor existen distintas estrategias, desde las más simples

basadas en la selección aleatoria sin reemplazamiento como otras mucho más sofisticadas basadas en el mantenimiento de *muestras* estratificadas. Sea R la población y $|R|$ el tamaño de la misma. Denominaremos t_j al valor j -ésimo de la población y X_j al número de ocurrencias del mismo en la *muestra*. A continuación se describen distintas técnicas de muestreo:

- **Selección Aleatoria Sin Reemplazamiento:** Consiste en la estrategia más simple de generación de *muestras*. Se basa en la selección aleatoria de un valor entero r en el rango $[1, |R|]$ para después añadir el elemento localizado en la posición r de la *población* al subconjunto de la *muestra*. Este proceso se repite durante n veces para generar una *muestra* de tamaño n . A modo de ejemplo se muestra el estimador para la operación *SUMA* en la ecuación (3.1), además se muestra la fórmula de la desviación para dicho estimador en la ecuación (3.2).

$$Y = \frac{|R|}{n} \sum_j X_j t_j \quad (3.1)$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{|R|^2 \sigma^2(R)}{n} \quad (3.2)$$

- **Selección Aleatoria Con Reemplazamiento:** En este caso se supone que la selección de una instancia de la población tan solo se puede llevar a cabo una única vez, por lo tanto se cumple que $\forall X_j \in 0, 1$. La selección se lleva a cabo de la siguiente manera: se genera de manera aleatoria un valor entero r en el rango $[1, |R|]$ para después añadir el elemento localizado en la posición r de la *población* al subconjunto de *muestra* si este no ha sido añadido ya, sino volver a generar otro valor r . Después repetir dicha secuencia durante n veces para generar una *muestra* de tamaño n . Al igual que en la estrategia anterior, en este caso también se muestra el estimador para la operación *SUMA* en la ecuación (3.3). Nótese que el cálculo es el mismo que en el caso de la estrategia sin reemplazamiento. Sin embargo, la varianza obtenida a partir de dicha estrategia es menor tal y como se muestra en la ecuación (3.4).

$$Y = \frac{|R|}{n} \sum_j X_j t_j \quad (3.3)$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{|R|(|R| - n) \sigma^2(R)}{n} \quad (3.4)$$

- **Bernoulli y Poisson:** Mediante esta alternativa de muestreo se sigue una estrategia completamente distinta a las anteriores. En lugar de seleccionar la siguiente instancia aleatoriamente de entre todas las posibles, se decide generar $|R|$ valores aleatorios r_j independientes en el intervalo $[0, 1]$ de tal manera que si r_j es menor que un valor p_j fijado a priori, la instancia se añade al conjunto de *muestra*. Cuando se cumple que $\forall i, j p_i = p_j$ se dice que es un muestreo de *Bernoulli*, mientras que cuando no se cumple dicha condición se habla de muestreo de *Poisson*. El cálculo del estimador para la *SUMA* en este caso es muy diferente de los ilustrados anteriormente tal y como se muestra en la ecuación (3.5). La desviación de este estimador se muestra en la ecuación (3.6), que en general presenta peores resultados (mayor desviación) que mediante otras alternativas, sin embargo, esta posee la cualidad de poder aplicar distintos pesos a cada

instancia de la población, lo que puede traducirse en que una selección adecuada de los valores p_j , lo cual puede mejorar significativamente la precisión de los resultados si estos se escogen de manera adecuada.

$$Y = \sum_{i \in \text{muestra}} \frac{t_i}{p_i} \quad (3.5)$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_i \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) t_i^2 \quad (3.6)$$

- **Muestreo Estratificado:** El muestreo estratificado trata de minimizar al máximo las diferencias entre la distribución del conjunto de datos de la *población* respecto de la *muestra* que se pretende generar. Para ello existen distintas alternativas entre las que se encuentra una selección que actualiza los pesos p_j tras cada iteración, lo que reduce drásticamente la desviación de la *muestra*, sin embargo produce un elevado coste computacional para su generación. Por tanto, existen otras estrategia más intuitivas basada en la partición del conjunto de datos de la *población* en subconjuntos disjuntos que poseen la cualidad de tener varianza mínima a los cuales se denomina *estratos*. Posteriormente, se selecciona mediante cualquiera de los métodos descritos anteriormente una *muestra* para cada *estrato*, lo cual reduce en gran medida la desviación típica global del estimador.

La estrategia de sumariación de información mediante *muestreo* tiene como ventajas la independencia de la complejidad con respecto a la dimensionalidad de los datos (algo que como se ilustrará con en posteriores secciones no sucede con el resto de alternativas) además de su simplicidad conceptual. También existen cotas de error para las consultas, para las cuales no ofrece restricciones en cuanto al tipo de consulta (debido a que se realizan sobre un subconjunto con la misma estructura que el global). El muestre es apropiado para conocer información general acerca del conjunto de datos. Además, presenta la cualidad de permitir su modificación y adaptación en tiempo real, es decir, se pueden añadir o eliminar nuevas instancias de la muestra conforme se añaden o eliminan del conjunto de datos global.

Sin embargo, en entornos donde el ratio de adiciones/eliminaciones es muy elevado el coste computacional derivado del mantenimiento de la muestra puede hacerse poco escalable. El *muestreo* es una buena alternativa para conjuntos de datos homogéneos, en los cuales la presencia de valores atípicos es irrelevante. Tampoco obtiene buenos resultados en consultas relacionadas con el conteo de elementos distintos. En las siguientes secciones se describen alternativas que resuelven de manera más satisfactoria estas dificultades y limitaciones.

3.2.2. Histogram

Los *histogramas* son estructuras de datos utilizadas para sumarizar grandes conjuntos de datos mediante el mantenimiento de tablas de frecuencias, por lo que tienen un enfoque completamente diferente al que siguen las estrategias de *muestreo* de la sección anterior. En este caso, el concepto

es similar a la visión estadística de los histogramas. Consiste en dividir el dominio de valores que pueden tomar las instancias del conjunto de datos en intervalos o contenedores disjuntos entre si de tal manera que se mantiene un conteo del número de instancias pertenecientes a cada partición.

Durante el resto de la sección se describen de manera resumida distintas estrategias de estimación del valor de las particiones, así como las distintas estrategias de particionamiento del conjunto de datos. Para llevar a cabo dicha tarea, a continuación se describe la notación que se ha seguido en esta sección: Sea D el conjunto de datos e $i \in [1, M]$ cada una de las categorías que se presentan en el mismo. Denotaremos por $g(i)$ al número de ocurrencias de la categoría i . Para referirnos a cada uno de las particiones utilizaremos la notación S_j para $j \in [1, B]$. Nótese por tanto que M representa el cardinal de categorías distintas mientras que B representa el cardinal de particiones utilizadas para “comprimir” los datos. La mejora de eficiencia en cuanto a espacio se consigue debido a la elección de $B \ll M$

Cuando se hablamos de *esquemas de estimación* nos estamos refiriendo a la manera en que se almacena o trata el contenido de cada una de las particiones S_j del histograma. La razón por la cual este es un factor importante a la hora de caracterizar un histograma es debida a que está altamente ligada a la precisión del mismo.

- **Esquema Uniforme:** Los esquemas que presuponen una distribución uniforme de las instancias dentro del contenedor se subdividen en dos categorías: a) *continous-value asumption* que presupone que todas las categorías i contenidas en la partición S_j presentan el mismo valor para la función $g(i)$ y b) *uniform-spread asumption* que presupone que el número de ocurrencias de la partición S_j se localiza distribuido uniformemente al igual que en el caso anterior, pero en este caso entre los elementos de un subconjunto P_j generado iterando con un determinado desplazamiento k sobre las categorías i contenidas en S_j . El segundo enfoque presenta mejores resultados en el caso de consultas de cuantiles que se distribuyen sobre más de una partición S_j
- **Esquema Basado en Splines:** En la estrategia basada en splines se presupone que los valores se distribuyen conforme una determinada función lineal de la forma $y_j = a_j x_j + b_j$ en cada partición S_j de tal manera que el conjunto total de datos D puede verse como una función lineal a trozos y continua, es decir, los extremos de la función en cada partición coinciden con el anterior y el siguiente. Nótese que en este caso se ha descrito la estrategia suponiendo el uso de una función lineal, sin embargo esta puede extenderse a funciones no lineales.
- **Esquema Basado en Árboles:** Consiste en el almacenamiento de las frecuencias de cada partición S_j en forma de árbol binario, lo cual permite seleccionar de manera apropiada el nivel del árbol que reduzca el número de operaciones necesarias para obtener la estimación del conteo de ocurrencias según el la amplitud del rango de valores de la consulta. La razón por la cual se elige un árbol binario es debida a que se puede reducir en un orden de 2 el espacio necesario para almacenar dichos valores manteniendo únicamente los de una de las ramas de cada sub-árbol. La razón de ello es debida a que se puede recalcular el valor de la otra mediante una resta sobre el valor almacenado en el nodo padre y la rama que si contiene el valor.

- **Esquema Heterogéneo:** El esquema heterogéneo se basa en la intuición de que la distribución de frecuencias de cada una de las particiones S_j no es uniforme y tiene peculiaridades propias, por lo tanto sigue un enfoque diferente en cada una de ellas tratando de minimizar al máximo la tasa de error producida. Para ello existen distintas heurísticas basadas en distancias o teoría de la información entre otros.

Una vez descritas distintas estrategias de estimación del valor de frecuencias de una determinada partición S_j , el siguiente paso para describir un *histograma* es realizar una descripción acerca de las distintas formas de generación de las particiones o contenedores. Para tratar de ajustarse de manera más adecuada a la distribución de los datos se puede realizar un *muestreo* a partir del cual se generan las particiones. A continuación se describen las técnicas más comunes para la elaboración de dicha tarea:

- **Particionamiento Heurístico:** Las estrategias de particionamiento heurístico se basan en el apoyo sobre distintas presuposiciones que en la práctica han demostrado comportamientos aceptables en cuanto al nivel de precisión que se obtiene en los resultados, sin embargo, no proporcionan ninguna garantía desde el punto de vista de la optimalidad. Su uso está ampliamente extendido debido al reducido coste computacional. Dentro de esta categoría las heurísticas más populares son las siguientes:
 - **Equi-Width:** Consiste en la división del dominio de categorías $[1, M]$ en particiones equiespaciadas unas de otras. Para dicha estrategia tan solo es necesario conocer *a-priori* el rango del posible conjunto de valores. Es la solución con menor coste computacional, a pesar de ello sus resultados desde el punto de vista práctico son similares a otras estrategias más sofisticadas cuando la distribución de frecuencias es uniforme.
 - **Equi-Depth:** Esta estrategia de particionamiento requiere conocer la distribución de frecuencias *a-priori* (o una aproximación que puede ser obtenida mediante alguna estrategia como el muestreo). Se basa en la división del dominio de valores de tal manera que las particiones tengan la misma frecuencia. Para ello se crean particiones de tamaños diferentes.
 - **Singleton-Bucket:** Para tratar de mejorar la precisión esta estrategia de particionamiento se basa en la utilización de dos particiones especiales, las cuales contienen las categorías de mayor y menor frecuencia respectivamente para después cubrir el resto de categorías restante mediante otra estrategia (generalmente *equi-depth*) lo cual se basa en la idea de que estas particiones especiales contendrán los valores atípicos y el resto de la muestra será más uniforme.
 - **Maxdiff:** En este caso, el método de particionamiento se basa en la idea de utilizar los puntos de mayor variación de frecuencias mediante la medida $|g(i+1) - g(i)|$, para dividir el conjunto de categorías en sus respectivas particiones, de tal manera que las frecuencias contenidas en cada partición sean lo más homogéneas posibles entre sí.
- **Particionamiento con Garantías de Optimalidad:** En esta categoría se enmarcan las estrategias de generación de particiones que ofrecen garantías de optimalidad a nivel de la

precisión de resultados en las consultas. Para ello se utilizan técnicas de *Programación Dinámica* (DP), de tal manera que la selección de las particiones se presenta como un problema de *Optimización*. Sin embargo, dichas estrategias conllevan un elevado coste computacional que muchas veces no es admisible debido al gran tamaño del conjunto de datos que se pretende sumarizar. Como solución ante dicha problemática se han propuesto distintas estrategias que se basan en la resolución del problema de optimización, pero sobre una *muestra* del conjunto de datos global, lo cual anula las garantías de optimalidad pero puede ser una buena aproximación si la muestra seleccionada es altamente representativa respecto de la población.

- **Particionamiento Jerárquico:** Las estrategias de particionamiento jerárquico se basan en la utilización de particiones siguiendo la idea de utilizar un árbol binario. Por lo tanto, las particiones no son disjuntas entre ellas, sino que se contienen unas a otras. Esto sigue la misma idea que se describió en el apartado de *Esquemas de estimación Basados en Árboles*. Apoyandose en esta estrategia de particionamiento se consigue que las consultas de rangos de frecuencias tengan un coste computacional menor en promedio (aún en el casos en que el rango sea muy amplio). En esta categoría destacan los histogramas *nLT* (n-level Tree) y *Lattice Histograms*. Estos últimos tratan de aprovechar las ventajas a nivel de flexibilidad y precisión que presentan los histogramas, además de las estrategias jerárquicas de sumarización en que se apoyan las *Wavelets* tal y como se describe en la siguiente sección.

Las ideas descritas en esta sección sobre los *histogramas* son extrapolables conforme se incrementa la dimensionalidad de los datos. En el caso de los esquemas de estimación, esto sucede de manera directa. Sin embargo, en el caso de los esquemas de particionamiento surgen distintos problemas debido al crecimiento exponencial tanto a nivel de espacio como de tiempo conforme aumenta el número de dimensiones de los datos por lo cual se convierten en soluciones impracticables para conjuntos de datos con elevada dimensionalidad

Los *Histogramas* representan una estrategia sencilla, tanto a nivel de construcción como de consulta, la cual ofrece buenos resultados en un gran número de casos. Dichas estructuras han sido ampliamente probadas para aproximación de consultas relacionadas con suma de rangos o frecuencias puntuales. Tal y como se ha dicho previamente, su comportamiento en el caso unidimensional ha sido ampliamente estudiado, sin embargo, debido al crecimiento exponencial a nivel de complejidad conforme las dimensiones del conjunto de datos aumentan estas estrategias son descartadas en muchas ocasiones. Los *Histogramas* requieren de un conjunto de parámetros fijados *a-priori*, los cuales afectan en gran medida al grado de precisión de los resultados (pero cuando se seleccionan de manera adecuada esta solución goza de una gran cercanía al punto de optimalidad), por tanto, en casos en que la estimación de dichos valores necesarios *a-priori* se convierte en una labor complicada, existen otras técnicas que ofrecen mejores resultados.

3.2.3. Wavelet

Las estructuras de sumalización denominadas *Wavelets*, a diferencia de las anteriores, han comenzado a utilizarse en el campo del *procesamiento de consultas aproximado* desde hace relativamente poco tiempo, por lo que su uso no está completamente asentado en soluciones comerciales sino que todavía están en fase de descubrimiento e investigación. Las *Wavelets* (u *ondículas*) se apoyan en la idea de representar la tabla de frecuencias del conjunto de datos como una función de ondas discreta. Para ello, se almacenan distintos valores (dependiendo del tipo de *Wavelet*) que permiten reconstruir la tabla de frecuencias tal y como se describirá a continuación cuando se hable de la *transformada de Haar*, la mejora de eficiencia en cuanto a espacio a partir de esta estructura de sumalización se basa en el mantenimiento aproximado de los valores que permiten reconstruir el conjunto de datos.

A continuación se describe la *transformada de Haar*, a partir de la cual se presentan las distintas ideas en que se apoyan este tipo de estructuras de sumalización. En los últimos años se ha trabajado en estrategias más complejas como la *Daubechies Wavelet* [AH01] de *Akansu y otros* o la *transformada de Wavelet basada en árboles duales completos* [SBK05] de *Selesnick y otros*.

Haar Wavelet Transform

La *Haar Wavelet Transform* (**HWT**) consiste en una construcción de carácter jerárquico que colapsa las frecuencias de las distintas categorías de manera pareada recursivamente hasta llegar a un único elemento. Por tanto, la idea es la similar a la creación de un árbol binario desde las hojas hasta la raíz. Esta estrategia es similar a la que siguen los *Histogramas jerárquicos* de la sección anterior. Además, se aprovecha de manera equivalente al caso de los histogramas jerárquicos para optimizar el espacio, consistente en almacenar únicamente la variación de uno de los nodos hoja con respecto del padre, lo cual permite reconstruir el árbol completo mediante una simple operación.

Para simplificar el entendimiento de la construcción de la *transformada de Haar* se describe un ejemplo extraído del libro *Synopses for massive data* [CGHJ12] de *Cormode y otros*. Supongamos los valores de frecuencias recogidos en $A = [2, 2, 0, 2, 3, 5, 4, 4]$. Para construir la transformada realizaremos la media de los elementos contiguos dos a dos recursivamente, de tal manera que para los distintos niveles obtenemos los resultados de la tabla 3.1. Además, se muestran los coeficientes de detalle, los cuales se obtienen tras calcular la diferencia entre el primer y segundo elemento contiguos del nivel anterior.

Nivel	Medias	Coeficientes de Detalle
3	$[2, 2, 0, 2, 3, 5, 4, 4]$	—
2	$[2, 1, 4, 4]$	$[0, -1, -1, 0]$
1	$[3/2, 4]$	$[1/2, 0]$
0	$[11/4]$	$[-5/4]$

Tabla 3.1: Ejemplo de construcción de *Haar Wavelet Transform*

Nótese que a partir de la media de nivel 0 que denominaremos $c_0 = 11/4$ así como el conjunto de coeficientes de detalle, que denotaremos por $c_1 = -5/4, c_2 = 1/2, \dots, c_7 = 0$ y los coeficientes de detalle es posible reconstruir la tabla de frecuencias A .

Una vez entendida la estrategia de construcción en que se apoya la *transformada de Haar*, se puede apreciar que esta no ofrece ventajas a nivel de coste de almacenamiento respecto del conjunto de frecuencias respecto del cual ha sido construida. Sin embargo, posee la siguiente cualidad, sobre la cual se apoya esta estrategia de sumariación: *Para las categorías contiguas en que la variación de frecuencias es muy reducida, los coeficientes de detalle tienden a aproximarse a 0.*

Por la razón descrita en el parrafo anterior, se intuye que dichos coeficientes de detalle pueden ser obviados, de tal manera que el espacio utilizado para el almacenamiento de la *Wavelet* se convierte en sublineal ($o(N)$), en lugar de lineal ($O(N)$) respecto del espacio del conjunto de datos. Para elegir qué coeficientes de detalle se pueden utilizar estrategias que tratan de minimizar el error. Comúnmente, las *Wavelets* han sido construidas a partir del *error cuadrático medio* o *norma- L_2* , la cual se describe en la ecuación (3.7). Sin embargo, distintos estudios como el realizado en el artículo *Probabilistic wavelet synopses* [GG04] de *Garofalakis y otros* muestran como esta medida del error obtiene malos resultados cuando se aplica a la sumariación de datos mediante *Wavelets*.

Por tanto, se proponen otras medidas de error como la minimización del máximo error absoluto o relativo, que se ilustran en las ecuaciones (3.8) y (3.9). También se propone como alternativa la minimización de la *norma- L_p* que se muestra en la ecuación (3.10). Dicha medida de error es una generalización del *error cuadrático medio* (caso $p = 2$) a cualquier valor de $p \geq 0$. Por último se muestra en la ecuación (3.11) el caso del cálculo del error mediante la *norma- L_p* con pesos o ponderada, lo cual permite fijar el grado de importancia para cada categoría en la representación mediante *Wavelets* permitiendo aumentar la precisión de las categorías más significativas.

$$\|A - \tilde{A}\|_2 = \sqrt{\sum_i (A[i] - \tilde{A}[i])^2} \quad (3.7)$$

$$\max_i \{absErr_i\} = \max_i \{|A[i] - \tilde{A}[i]|\} \quad (3.8)$$

$$\max_i \{relErr_i\} = \max_i \left\{ \frac{|A[i] - \tilde{A}[i]|}{|A[i]|} \right\} \quad (3.9)$$

$$\|A - \tilde{A}\|_p = \left(\sum_i (A[i] - \tilde{A}[i])^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.10)$$

$$\|A - \tilde{A}\|_{p,w} = \left(\sum_i w_i \cdot (A[i] - \tilde{A}[i])^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.11)$$

Al igual que en el caso de los *Histogramas*, las *Wavelets* presentan problemas de eficiencia cuando se usan en entornos en los cuales el conjunto de datos está compuesto por una gran número de atributos. Por tanto, se dice que sufren la *Maldición de la dimensionalidad* (*Curse of Dimensionality*), que provoca un crecimiento de orden exponencial en el coste tanto en espacio como en tiempo.

Tal y como se puede apreciar, esta estrategia es muy similar a la basada en *Histogramas*, dado que ambas se apoyan en el almacenamiento de valores que tratan de describir o resumir la tabla de frecuencias de los datos de manera similar. Sin embargo, mientras que en el caso de los *Histogramas* estos destacan cuando se pretende conocer la estructura general de los datos, las *Wavelets* ofrecen muy buenos resultados cuando se pretenden conocer valores atípico o extremos (a los cuales se denomina *Heavy Hitters*).

Por su estrategia de construcción, las *Wavelets* permiten sumarizar una mayor cantidad de información utilizando un espacio reducido. Además, en el caso de la *transformada de Haar*, que posee la característica de linealidad, se puede adaptar de manera sencilla al *modelo en Streaming*. Tal y como se ha dicho en el párrafo anterior, las desventajas de esta alternativa derivan en gran medida de los problemas relacionados con el incremento de la dimensionalidad de los datos.

3.2.4. Sketch

Las estructuras de sumarización conocidas como *Sketches* son las que menos tiempo de vida tienen de entre las descritas, por lo tanto, aún están en una fase muy temprana por lo que su uso en sistemas reales todavía es anecdótico. Sin embargo poseen distintas características por las que se piensa que en el futuro las convertirán en estrategias muy importantes en el ámbito del *procesamiento aproximado de consultas*. Los *Sketches* se amoldan perfectamente al modelo en streaming del cual se habla en el capítulo anterior en la sección 2.2. Este modelo se amolde perfectamente a muchos sucesos cambiantes que se dan en la actualidad y que requieren de la obtención de analíticas. Un ejemplo de ello es un sistema de transacciones financieras, que suceden con una frecuencia elevada y para las cuales sería apropiado obtener métricas en tiempo real para la mejora de la toma de decisiones. También encajan de manera apropiada en el modelo de transacciones de una base de datos, la cual es modificada constantemente mediante insercciones, modificaciones y eliminaciones.

Los *Sketches* se corresponden con estructuras de datos que funcionan manteniendo estimadores sobre cada una de las instancias que han sido procesadas hasta el momento, es decir, realizan una modificación interna por cada entrada. Esto se opone a las estrategias descritas en anteriores secciones, que procesan una parte del conjunto de datos o requieren que el mismo tenga un carácter estático. Estas modificaciones pueden enmarcarse bajo distintas especificaciones del modelo en streaming tal (serie temporal, modelo de caja registradora o modelo de molinete) teniendo que realizar pequeñas adaptaciones en algunos algunos *Sketches*, pero siendo muy poco escalable la implementación del modelo de molinete (que permite eliminaciones) en otros.

Los *Sketches Lineales* son un subconjunto de *Sketches* que pueden ser vistos como una transformación lineal de la estructura de sumarización, la cual puede ser interpretada como un vector de longitud $1 * n$ al cual denominaremos S . Para generar dicho vector es nos apoyamos en la matriz de tamaño $n * m$ a la cual denominaremos A y que representa la transformación lineal del conjunto de



Figura 3.1: Abstracción del *Sketch Linear*. (Extraída de [CGHJ12])

datos, el cual puede ser codificado como un vector al cual denominaremos D de tamaño $1 \times m$. Dicha transformación lineal se representa en la ecuación (3.12) y de manera gráfica en la figura 3.1.

$$A * D = S \quad (3.12)$$

Puesto que la transformación que se muestra es de carácter lineal, entonces posee la propiedad de que siendo S_1 y S_2 dos *Sketches* lineales, entonces se cumple la propiedad de que $S_1 + S_2 = S_{sum}$, lo que puede entenderse como la combinación de los estimadores de los dos *Sketches*. Por tanto, se puede decir que el cada actualización se procesa como una transformación de la nueva instancia codificada en el vector D para después combinar el *Sketch* resultante con el generado anteriormente.

Por motivos de eficiencia a nivel de espacio, la matriz de transformación A no se utiliza de manera explícita, sino que por contra, en muchos casos se utilizan distintas *funciones hash* (las cuales se describen en la sección ??), que realizan la transformación de la misma forma que la matriz A , solo que el coste computacional para utilizarlas es significativamente menor que el coste necesario para el almacenamiento y multiplicación de una matriz de tal tamaño.

Tal y como se puede apreciar en la figura 3.1 la ventaja de sumarización de esta estrategia se obtiene en la reducción de tamaño obtenida en la transformación lineal. Posteriormente, cada estructura de *Sketch* tiene asociadas un conjunto de *consultas o queries* para las cuales extraer la información valiosa contenida en ellas. Puesto que la forma en que se llevan a cabo dichas consultas varía según la alternativa a la que nos estamos refiriendo, estas técnicas se expondrán en profundidad en sus correspondientes secciones.

Siguiendo con las restricciones descritas anteriormente, existe una implementación trivial de las estructuras de *Sketch* consistente en mantener una tabla de frecuencias sobre cada posible instancia de entrada de tal manera que a partir de esta pueden resolver consultas como sumas de frecuencias, conteo de elementos distintos, búsqueda del máximo o mínimo, media o varianza del conjunto de datos. Sin embargo, esta solución no proporciona ninguna ventaja a nivel de espacio, por tanto, la tarea es

encontrar técnicas que permitan “colapsar” dicha tabla de frecuencias para tratar de minimizar dicho coste asumiendo un cierto grado de imprecisión.

Existen dos categorías principales según la naturaleza de las consultas que el *Sketch* puede responder. Dichas categorías se describen a continuación:

- **Estimación de Frecuencias:** Los *Sketches* basados en estimación de frecuencias se corresponden con aquellos que tratan de recoger estimadores que se aproximen a la frecuencia de cada elemento $f(i)$. En esta categoría se enmarcan el *Count-Min Sketch* y *Count Sketch*.
- **Elementos Distintos:** Los *Sketches* basados en el conteo de elementos distintos (y que también pueden responder consultas referidas a la presencia de un determinado elemento) se basan en el mantenimiento de distintos indicadores que permiten aproximar dichos valores. Entre los más destacados en esta categoría se encuentran el *Bloom Filter* y el *HyperLogLog*.

A pesar de que todos los *Sketches* siguen una estructura básica similar, existen distintos parámetros diferenciadores que caracterizan unas alternativas frente a otras entre las que destacan las consultas soportadas, el tamaño de los mismos (algunos necesitan menor espacio para obtener un grado de precisión similar a otros), el tiempo de procesamiento de cada nueva actualización (el cual se pretende que sea muy reducido debido al modelo en streaming), el tiempo de resolución de consultas o la estrategia de inicialización del mismo.

La extensión de los *Sketches* sobre conjuntos de datos de carácter multidimensional puede resolverse utilizando funciones hash que mapeen una entrada multidimensional sobre un espacio unidimensional para después utilizarlos de la manera que para los casos de una dimensión. Esta solución no presenta problemas en la estimación de frecuencias puntuales o búsqueda de máximos o mínimos, sin embargo, no es factible para consultas de sumas de rangos utilizando *sketches* multidimensionales o asumiendo la independencia entre dimensiones y manteniendo una estructura de *sketch* por cada dimensión.

Los *Sketches* presentan un gran nivel de simplicidad en sus implementaciones, lo que les hace muy eficientes y válidos para modelos que requieren de actualizaciones constantes como el descrito en el modelo en streaming. La dificultad de los mismos se basa en los conceptos matemáticos subyacentes, que complica en gran medida la demostración de sus características de convergencia hacia el valor real que estiman. Generalmente para reducir su espacio se apoyan en la utilización de funciones hash con distintas propiedades, pero que también se pueden calcular eficientemente. La mayor limitación se refiere al rango de consultas que cada tipo de *Sketch* puede resolver de manera eficiente, estando especialmente limitados en el ámbito de múltiples consultas anidadas.

Los *Sketches* son un ámbito interesante dentro del mundo de la investigación, con una visión de futuro muy prometedora que les coloca como la mejor solución a medio-largo plazo para la tarea del *procesamiento de consultas aproximadas* por su reducido coste computacional, tanto a nivel de espacio como de tiempo de procesamiento. Actualmente universidades prestigiosas como la *Universidad*

de California, Berkeley o el MIT están trabajando en el diseño de bases de datos que se apoyan fuertemente en el uso de estas estructuras. Dicha universidad está trabajando en una base de datos a la cual denominan *BlinkDB* y la cual describen en el artículo *BlinkDB: queries with bounded errors and bounded response times on very large data* [AMP⁺13]

En las siguientes secciones se describen en profundidad distintas estructuras de datos basadas en *Sketches* tratando de prestar especial importancia en una visión conceptual de la misma pero sin dejar de lado la parte práctica de las mismas. Además, se trata de incluir demostraciones acerca de la precisión de las mismas respecto del espacio utilizado para su almacenamiento respecto del tamaño del conjunto de datos global.

3.3. Bloom Filter

El *Bloom-Filter* se corresponde con la primera estructura de datos basada en la idea de *Sketch* por procesar cada nueva entrada de la misma forma y tener un coste a nivel de espacio sublineal ($o(N)$) respecto del cardinal de posibles valores que pueden ser procesados. Esta estructura de datos fue diseñada inicialmente por *Burton Howard Bloom* la cual describe en el artículo *Space/time trade-offs in hash coding with allowable errors* [Blo70] publicado en 1970.

La funcionalidad que suministra dicha estructura de datos es la consulta acerca de presencia de un determinado elemento. Para la implementación descrita en el artículo inicial no se permiten incrementos ni eliminaciones, tan solo la existencia o inexistencia del elemento, por tanto esta estructura de datos se enmarca en el marco de *serie temporal* del *modelo en streaming*. El *Bloom-Filter* asegura la inexistencia de falsos negativos (elementos que se presupone que no han sido introducidos cuando en realidad si que lo fueron) pero por contra, se admite una determinada tasa de falsos positivos (elementos que se presupone que han sido introducidos cuando en realidad no lo fueron).

Debido al tiempo de vida de dicha estrategia, su uso está muy asentado y se utiliza en distintos sistemas para tareas en las cuales se pretende optimizar el tiempo, pero sin embargo son admisibles fallos. Es comúnmente utilizado en bases de datos comerciales para limitar el número de accesos al disco durante búsquedas de elementos. Esto se lleva a cabo manteniendo un *Bloom-Filter* al cual se consulta sobre la presencia del elemento a buscar y en el caso de que la respuesta sea negativa, entonces se prescinde de dicho acceso a la unidad de almacenamiento. Mientras que si es positiva se realiza el acceso a disco. Nótese por tanto que en algunos ocasiones dicho acceso será innecesario, sin embargo las consecuencias de dicha tarea tan solo tienen consecuencias negativas a nivel de eficiencia y no de resultados.

Una vez descrita la funcionalidad que proporciona el *Bloom-Filter* así como un caso práctico de uso del mismo ya se tiene una idea a grandes rasgos acerca del mismo. Por tanto, lo siguiente es describir su composición. La estructura de datos se basa en el mantenimiento de un *mapa de bits* S de longitud n ($|S| = n$) de tal manera que se cumpla que $n \ll m$ siendo m el cardinal de elementos

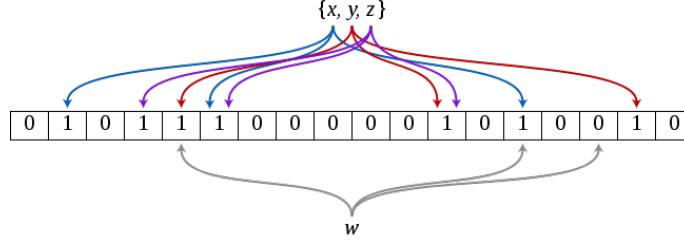


Figura 3.2: Modo de funcionamiento del *Bloom Filter*, que inserta los valores $\{x, y, z\}$ y comprueba la existencia de w . La imagen ha sido extraída de [Wik17b].

distintos que se pueden presentar en la entrada. Además, se utilizan k funciones hash denominadas $h_1, h_2, \dots, h_j, \dots, h_k$ que distribuyen de manera independiente el elemento i -ésimo en S . El mapa de bits S se inicializa con todas sus posiciones tomando el valor 0.

El modo de funcionamiento del *Bloom-Filter* se lleva a cabo de la siguiente manera: Cada vez que se presenta un nuevo elemento en la entrada (al cual denominaremos $i \in [1, m]$) se tomarán los k valores de las funciones hash indicadas anteriormente y se asignará el valor 1 a dichas posiciones del mapa de bits S . Es decir, se realiza la operación descrita en la ecuación (3.13). La consulta acerca de la presencia del elemento i -ésimo se realiza por tanto, consultando dichas posiciones, de tal manera que si $\forall j \in [1, k]$, $S[h_j(i)]$ toma el valor 1 se dice que el elemento ha aparecido en la entrada mientras que si alguna posición es distinta de 1 (toma el valor 0) se dice que el elemento no ha sido introducido.

$$S[h_j(i)] = 1 \quad \forall j \in [1, k] \quad (3.13)$$

Nótese que la restricción acerca de la presencia de un determinado elemento es mucho más débil que la de no existencia. La razón de ello se debe a que pueden existir colisiones entre las distintas funciones hash que conviertan dicho resultado en erróneo. Sin embargo, tal y como se ha indicado anteriormente, en caso de que el *Bloom-Filter* indique la no presencia del elemento dicha respuesta será válida. A continuación se realiza un análisis acerca del índice de error para el caso de los falsos positivos la cual se basa en el artículo *Network applications of bloom filters: A survey* [BM04] de Broder y Mitzenmacher. Nótese que dicho análisis depende de 3 parámetros: el tamaño n del mapa de bits, el cardinal m del conjunto de posibles elementos en la entrada y el número k de funciones hash utilizadas.

Para el análisis se presupone que las funciones hash h_j son totalmente aleatorias, es decir, distribuyen los valores de manera totalmente uniforme en el intervalo $[1, n]$ y son totalmente independientes entre sí. La probabilidad p' de que cualquier posición de S siga siendo igual a cero después de la aparición de l elementos distintos se muestra en la ecuación (3.14) siendo la base del lado derecho de la igualdad la probabilidad de que cada función hash mantenga con el valor 0 una posición.

$$p' = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kl} \quad (3.14)$$

La probabilidad de que un elemento no introducido en la entrada tome todas sus correspondientes posiciones de S con el valor 1 se da con probabilidad $(1 - p)^k$ y dado que p' es un buen estimador para p , entonces podemos aproximar la tasa de falsos positivos. Tras desarrollar dicha expresión se puede llegar a la ecuación (3.15), que aproxima de manera apropiada la tasa de falsos positivos.

$$f = (1 - e^{-kn/m})^k \quad (3.15)$$

El *Bloom-Filter* es una buena aproximación para los casos en que es necesario reducir el sobre coste de comprobación de accesos a medios costosos, sin embargo, su utilización puede utilizarse en filtros anti-spam u otros entornos en que una determinada tasa de error sea admisible. Nótese que este tipo de *Sketches* no puede agruparse en el subconjunto de *Sketches Lineales* puesto que la operación de asignar el valor 1 no es lineal.

3.4. Count-Min Sketch

El *Count-Min Sketch* es otra estructura de datos con la característica de presentar un coste espacial de carácter sublineal ($o(N)$) respecto del cardinal de posibles elementos de entrada. El *Count-Min Sketch* (en adelante *CM Sketch* por abreviación) fue descrito por primera vez por *Cormode* y *Muthukrishnan* en el artículo *An improved data stream summary: the count-min sketch and its applications* [CM05] publicado en 2005. Nótese por tanto que el tiempo de vida de dicha estructura de datos es muy corto.

El propósito del *CM Sketch* es la estimación de frecuencias para el rango de posibles valores que se presentan en la entrada. En la formulación inicial se enmarcaba modelo de caja registradora, que tan solo permite adicciones, sin embargo posteriormente se han propuesto mejoras para ampliar su uso en entornos en que también se permitan eliminaciones (modelo en molinete). Tal y como se verá a continuación, el nombre de este *Sketch* se refiere a las operaciones de operaciones que utiliza durante su funcionamiento, es decir, el conteo o suma y la búsqueda del mínimo.

La estimación de frecuencias del *CM Sketch*, tal y como se puede apreciar debido al carácter sublineal del mismo, no garantiza la exactitud en de los mismos, sino que al igual que en el caso del *Bloom-Filter* devuelve como resultado una aproximación. En este caso dicha aproximación garantiza que el resultado estimado siempre será mayor o igual que el verdadero, es decir, realiza una sobre-estimación del valor real. La razón por la cual el *CM Sketch* utiliza la operación de búsqueda del mínimo es para tratar de reducir dicho efecto en la medida de lo posible.

Debido al corto periodo de vida su uso todavía no está asentado en sistemas reales, sin embargo existen una gran variedad de situaciones que se enmarcan sobre el modelo en streaming en las cuales la precisión de frecuencias no tienen grandes efectos perjudiciales. Un ejemplo de ello podría ser el conteo de visitas a un determinado sitio web formado por distintas páginas. La estimación sobre el número de visitas para cada una de estas páginas podría llevarse a cabo utilizando esta estructura de datos, ya que es una tarea que puede admitir una determinada tasa de error y requiere de actualizaciones constantes.

Una vez descrita la funcionalidad que suministra el *CM Sketch* se describirá la estructura interna del mismo: Esta estructura de datos está formada por una matriz S de estructura bidimensional con w columnas y d filas, de tal manera que se mantienen $w * d$ contadores. Cada una de las d filas tiene asociada una función hash h_j que distribuye elementos pertenecientes al dominio $[1, m]$ (siendo m el cardinal de elementos distintos) sobre la fila de dicha matriz, es decir, sobre $[1, w]$. Para que las estimaciones acerca de la precisión del *CM Sketch* sean correctas cada función hash h_j debe cumplir la propiedad de ser independiente del resto además de seguir una distribución uniforme. En cuanto a la inicialización de la estructura de datos, todas las posiciones toman el valor cero, esto se muestra en la ecuación (3.16).

$$S[k, j] = 0 \quad \forall k \in [1, w], \forall j \in [1, d] \quad (3.16)$$

En cuanto al modo de funcionamiento del *CM Sketch*, tal y como se ha indicado anteriormente, se enmarca en el modelo de caja registradora, es decir, cada actualización se corresponde con una tupla formada por el identificador del elemento al que se refiere y un determinado valor positivo que indica el incremento c al cual se refiere la actualización. El funcionamiento es similar al del *Bloom-Filter* en el sentido de que por cada nueva entrada se realizan d actualizaciones (una para cada fila). La operación de conteo se refiere a dicha actualización, que se ilustra de manera matemática en la ecuación (3.17). Una representación gráfica de dicha operación se muestra en la figura 3.3. Nótese por tanto que el coste de actualización es de $O(d)$. Nótese que esta operación es de carácter lineal por lo que el *CM Sketch* se agrupa en el subconjunto de *Sketches Lineales*.

$$S[j, h_j(i)] = S[j, h_j(i)] + c \quad \forall j \in [1, d] \quad (3.17)$$

En cuanto al proceso de consulta sobre la frecuencia del elemento i -ésimo, esto se lleva a cabo recogiendo el valor almacenado en cada fila y devolviendo el menor, de tal manera que se pretende reducir el efecto de las colisiones generados sobre las funciones hash al distribuir elementos sobre un espacio de menor tamaño, ya que se presupone que $w * d \ll m$ para que la ventaja a nivel de espacio se produzca. Dicha operación se muestra en la ecuación (3.18)

$$\tilde{f}(i) = \min_{j \in [1, d]} \{S[j, h_j(i)]\} \quad (3.18)$$



Figura 3.3: Modo de funcionamiento del *Count-Min Sketch* durante el proceso de inserción de un nuevo elemento. La imagen ha sido extraída de [CM05].

A nivel de análisis sobre el coste espacial necesario para almacenar en memoria el *CM Sketch*, este es dependiente del grado de precisión que se pretenda asegurar mediante el uso del mismo. Sin embargo, el análisis no se realiza sobre el cardinal de posibles elementos que pueden aparecer en la entrada, sino que depende del sumatorio del conteo de estos. Este valor se denomina F_1 (o primer momento de frecuencia), que se define tal y como se indica en la ecuación (3.19).

$$F_1 = \sum_{i=1}^m f(i) \quad (3.19)$$

Por tanto, la precisión de esta estructura de datos probabilística se indica diciendo que $\tilde{f}(i)$ tendrá un error máximo de ϵN que el cual se cumplirá con probabilidad $1 - \delta$. Estos parámetros se fijan en el momento de la inicialización del *CM Sketch* fijando el número de filas y columnas de tal manera que $d = \log(1/\delta)$ y $w = 2/\epsilon$. La demostración acerca de la elección de estos valores puede encontrarse en el artículo original [CM05].

En cuanto a la estimación de frecuencias obtenida por el *CM Sketch*, en sentido estricto se dice que esta es sesgada respecto de su valor real. La razón se debe a que siempre se produce una sobreestimación, a pesar de tratar de reducir los efectos negativos de la misma tratando de seleccionar el mínimo de las estimaciones siempre será mayor o igual (nunca menor). Para tratar de solventar esta problemática se han propuesto distintas heurísticas que tratan de contrarrestar esta problemática en el modelo de caja de registradora (tan solo se permiten inserciones).

Sin embargo, dicho problema no sucede en el caso del modelo general o de molinete, sobre el cual si que están permitidas las eliminaciones. En este caso es más apropiado utilizar como estimación la mediana de los valores almacenados en cada columna, puesto que se escoge el mínimo para un elemento que tan solo ha recibido actualizaciones negativas probablemente este será muy diferente del valor real. La razón por la cual se escoge la mediana y no la media es por sus propiedades de resistencia ante valor atípicos u *outliers*. En este caso la demostración se puede llevar a cabo apoyandose en la desigualdad de Chernoff descrita en la sección 2.4.4. Esta demostración se puede encontrar en el artículo *Selection and sorting with limited storage* [MP80] de Munro y Paterson.



Figura 3.4: Modo de funcionamiento del *Count Sketch* durante el proceso de inserción de un nuevo elemento. La imagen ha sido extraída de [CGHJ12].

El *Count-Min Sketch* consiste en una estrategia apropiada para el conteo de ocurrencias en un espacio de orden sublineal. Además, la implementación del mismo es simple en contraposición con otras estrategias más sofisticadas. En posteriores secciones se hablará del *Count Sketch*, que proporcionan valores de precisión equivalentes en espacios de menor tamaño añadiendo una mayor complejidad conceptual.

3.5. Count Sketch

El *Count Sketch* se refiere a una estructura muy similar al *Count-Min Sketch* ya que sigue la misma estructura e ideas muy similares en para la actualización y consulta de valores, sin embargo proporciona ventajas a nivel de coste espacial respecto del anterior reduciendo en un orden de dos el espacio necesario para mantener la estructura de datos. La definición acerca del *Count Sketch* se indicó por primera vez en el trabajo *Finding frequent items in data streams* [CCFC02] desarrollado por Charikar y otros. Nótese que este trabajo fue llevado a cabo en el año 2002, es decir, es anterior a la publicación del referido al *Count-Min Sketch* (2005). La razón por la cual se ha seguido este orden y no el temporal se debe a que el *Count Sketch* puede ser visto como una mejora sobre el descrito en la sección anterior, lo que simplifica el entendimiento de los mismos.

El *Count Sketch* se basa en los mismos elementos para su funcionamiento que su homónimo más simple, por lo tanto se utilizará la definición utilizada previamente de la matriz S compuesta por w columnas y d filas además de las funciones hash $h_1, h_2, \dots, h_j, \dots, h_d$ independientes entre si, y cuya distribución es uniforme. La variación surge a nivel de las operaciones que se realizan en el proceso de actualización y consulta sobre la estructura de datos. El funcionamiento del *Count Sketch* puede ser visto de varias formas, primero describiremos la versión extendida del mismo para después describir una versión que resuce a la mitar el espacio necesario para su mantenimiento en memoria.

$$h'_j(i) = \begin{cases} h_j(i) - 1, & h_j(i) \bmod 2 = 0 \\ h_j(i) + 1, & h_j(i) \bmod 2 = 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

A continuación se describe la versión extendida, que se apoya en la utilización de la función hash $h'_j(i)$, la cual se define en la ecuación (3.20), que consiste en una variación sobre la función hash base

$h_j(i)$. Esta función se utiliza únicamente en el momento de la estimación, es decir, no se utiliza para la actualización tras la llegada de elementos. La intuición en la que se basa su utilización es la reducción del sesgo producido por las colisiones de otros elementos en cada fila, que siempre sobre-estima los resultados (en promedio la sobre-estimación de cada fila es de $\frac{\sum_{k=1}^w S[j,k]}{w}$). De esta manera se pretende contrarrestar dicho efecto por lo que ya no es apropiada la utilización de la búsqueda del mínimo, sino que se puede llevar a cabo la estimación mediante el uso de la mediana, tal y como se indica en la ecuación (3.21).

$$\tilde{f}(i) = \text{median}_{j \in [1,d]} \{S[j, h_j(i)] - S[j, h'_j(i)]\} \quad (3.21)$$

La versión reducida de esta alternativa se apoya en la utilización de d funciones hash uniformes e independientes entre sí con dominio de entrada $[1, m]$ e imagen en el subconjunto $\{-1, 1\}$. Si se sustituye el método de actualización de elementos por el descrito en la ecuación (3.22) donde i identifica el i -ésimo elemento y c la variación del mismo correspondiente a dicha actualización, entonces para conseguir la misma precisión que en el caso anterior se requiere de la mitad de espacio. Puesto que esto es equivalente a mantener $S[j, h_j(i)] - S[j, h'_j(i)]$ en una única posición de S , entonces la estimación de la frecuencia se sustituye por la ecuación (3.23).

$$S[j, h_j(i)] = S[j, h_j(i)] + g_j(i)c \quad (3.22)$$

$$\tilde{f}(i) = \text{median}_{j \in [1,d]} \{S[j, h_j(i)]\} \quad (3.23)$$

Para el análisis sobre la precisión del *Count Sketch*, se utiliza un enfoque similar al del *CM Sketch*. Sin embargo, en este caso el valor ϵ se escoge teniendo en cuente el segundo momento de frecuencias, es decir, $F_2 = \sum_{i=1}^m f(i)^2$, de tal manera que para estimación obtenida sobre cada fila, esta se encuentra en el intervalo $[f(i) - \sqrt{F_2/w}, f(i) + \sqrt{F_2/w}]$. La estimación global por tanto tiene un error máximo de $\epsilon\sqrt{F_2}$ con probabilidad $1 - \delta$.

Para que se cumpla dicha estimación del error el tamaño de la matriz S debe escogerse de tal forma que el número de columnas sea $w = O(1/\epsilon^2)$ y el número de filas sea $d = O(\log(1/\delta))$. La demostración completa acerca de la elección puede encontrarse en el artículo original [CCFC02]. Nótese la diferencia en cuanto a la estimación del error del *Count Sketch* con respecto del *CM Sketch*, se debe a que en el primer caso se utiliza el segundo momento de frecuencias (F_2) mientras que en el *CM Sketch* la estimación de la tasa de error se apoya en el primer momento de frecuencias (F_1).

En esta implementación del *Count Sketch* tan solo se ha impuesto la restricción a nivel de funciones hash de que estas sean de carácter *2-universales*, lo cual es una condición suficiente para estimar frecuencias puntuales. Sin embargo, esta estructura de datos se puede extender para la estimación del segundo momento de frecuencias (F_2) mediante la técnica descrita en la sección 2.7 extraída del artículo de *Alon y otros* [AMS96]. Para la estimación de F_2 basta con calcular la mediana de las

sumas de los elementos de cada fila al cuadrado. Esto se indica en la ecuación (3.24). Sin embargo, para que esta solución sea correcta desde el punto de vista de la varianza del estimador es necesario que las funciones hash utilizadas sean *4-universales* (la razón se debe al cálculo de las potencias de grado 2). Cuando se cumple esta propiedad entonces la técnica se denomina **AMS Sketch**.

$$\tilde{F}_2 = \text{median}_{j \in [1, d]} \left\{ \sum_{k=1}^w S[j, k]^2 \right\} \quad (3.24)$$

A nivel práctico estas dos alternativas ofrecen resultados muy similares cuando se imponen las mismas restricciones a nivel de espacio. Sin embargo, ambos poseen una característica destacada: En muchos casos, la estimación obtenida es mucho más precisa puesto que muchas distribuciones de probabilidad tienen formas asimétricas, es decir, algunos elementos presentan una frecuencia de aparición elevada mientras que otros aparecen en contadas ocasiones, lo cual mejora la precisión de los estimadores obtenidos por estos *sketches*.

3.6. HyperLogLog

En esta sección se habla del *Sketch HyperLogLog*, que en este caso tiene tanto un enfoque como una utilidad distintas a las alternativas descritas en secciones anteriores. El *HyperLogLog* se utiliza para tratar de estimar de manera precisa el número de elementos distintos que han aparecido sobre un stream de elementos. Esta estructura de datos es una evolución de la versión básica de la cual se cual se habló en el capítulo de *Algoritmos para Streaming* en la sección 2.6.

Esta versión fue ampliada posteriormente en *Loglog counting of large cardinalities* [DF03] y para finalmente en 2007 se presentar el *HyperLogLog*. La descripción del *HyperLogLog* se indica en el trabajo *Hyperloglog: the analysis of a near-optimal cardinality estimation algorithm* [FFGM07] llevado a cabo por Flajolet. Para las explicaciones indicadas en esta secciones se ha seguido el artículo *HyperLogLog in practice: algorithmic engineering of a state of the art cardinality estimation algorithm* [HMH13] en el cual se exponen distintas mejoras sobre el *HyperLogLog* que se describirán posteriormente.

Al igual que se indicó en la descripción del *Algoritmo de Flajolet-Martin* (Sección 2.6), la tarea que el *HyperLogLog* pretende resolver es el conteo de elementos distintos o cardinalidad de un conjunto de elementos. Para ello, esta estrategia se apoya en la idea de mapear cada elemento que se presente en la entrada sobre una función hash binaria que cumpla una distribución uniforme de probabilidad. Bajo estas condiciones, la intuición en que se basa el *HyperLogLog* es que en el subespacio de destino de la función hash, el 50 % de los elementos se codificarán de tal manera que el bit menos significativo sea un 0, el 25 % se codificarán de tal manera que los dos bits más significativos sean 00 y así sucesivamente, de tal manera que $1/2^k$ tendrán k ceros como bits más significativos.

Por tanto, el *HyperLogLog* se basa en la utilización de la función $\rho(x)$, que indica el número de ceros contiguos más significativos mas uno de en la representación binaria generada por la función

hash. Hasta este punto, la estrategia es equivalente al *Algoritmo de Flajolet-Martin*, sin embargo, a continuación se indica una alternativa a esta a partir de la cual se obtiene una estimación con varianza mucho más reducida. Para ello en lugar de tratar el stream de elementos S de manera conjunta, se divide dicho stream en m sub-streams de tal manera que todos tengan longitudes similares a los cuales denotaremos por S_i con $i \in [1, m]$.

$$M[i] = \max_{x \in S_i} \rho(x) \quad (3.25)$$

Para mantener la cuenta de cada estimador se utiliza un vector M que almacena dicho valor. La estrategia de construcción del mismo se muestra en la ecuación (3.25). En cuanto a la estimación de resultados, se utiliza la estrategia que se describe en la ecuación (3.26), que se apoya en el término α_m descrito en la ecuación (3.27). Nótese que el último término se corresponde con una media armónica de la cada contador. La elección de dichos operadores así como el término α_m se describe en el artículo original [FFGM07] y la razón por la cual se escogen de dicha manera es la de tratar la varianza de la estimación y, por tanto, mejorar su precisión.

$$\text{card}(S) = \alpha_m \cdot m^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^m 2^{-M[j]} \right) \quad (3.26)$$

$$\alpha_m = \left(m \cdot \int_0^\infty \left(\log_2 \left(\frac{2+u}{1+u} \right) \right)^m du \right)^{-1} \quad (3.27)$$

En cuanto a las mejoras propuestas en [HNN13] sobre el *HyperLogLog* original, estas se basan en la utilización de una función hash de *64 bits* (en lugar de 32 como la propuesta original), la utilización de un estimador diferente cuando se cumple que $\text{card}(S) < \frac{5}{2}m$ y una estrategia de representación dispersa que trata de aprovechar en mayor medida el espacio en memoria.

3.7. Conclusiones

En este capítulo se han descrito distintas estrategias y técnicas para tratar de estimar indicadores estadísticos que ayuden a entender y comprender mejor conjuntos de datos de tamaño masivo. Estos estimadores tratan de agilizar la obtención de métricas sobre el conjunto de datos que debido a gran tamaño, muchas veces hace impracticable su obtención de manera determinística por el coste en complejidad tanto espacial como temporal. Para ello, se han descrito distintas soluciones, desde la extracción de muestras, así como histogramas o wavelets, hasta técnicas más novedosas y que encajan de manera más apropiada en el entorno cambiante sobre el que en muchas ocasiones se trabaja.

Por contra, las soluciones basadas en *Sketches* tienen un escaso tiempo de vida, por lo que todavía se encuentran en fase de investigación. A pesar de ello existen soluciones para la comprobación de la aparición de elementos mediante el *Bloom Filter*, la estimación de frecuencias mediante el *Count-Min Sketch* o el *Count Sketch*, y el conteo de elementos distintos a partir del *HyperLogLog*.

Se cree que el conjunto de estructuras de datos probabilísticas basadas en *Sketches* aumentará conforme el paso del tiempo y en el futuro se diseñarán alternativas más sofisticadas que permitan estimar un gran número de parámetros.

Capítulo 4

Algoritmos aplicados a Grafos

4.1. Introducción

[TODO]

4.2. Definición Formal

En esta sección se describen los conceptos básicos necesarios para entender el estudio de problemas basados en *Grafos*. Para la descripción formal sobre dichas estructuras se han utilizado las notas de clase de la asignatura de *Matemática Discreta* [LMPMSB14] impartida en la *Universidad de Valladolid* así como las de la asignatura equivalente (*Discrete Mathematics CS 202* [Asp13]) impartida por *Aspnes* en la *Universidad de Yale*.

La **Teoría de Grafos** (*Graph Theory*) es la disciplina encargada del estudio de estructuras compuestas por vértices y aristas desde una perspectiva matemática. Los vértices representan objetos mientras que las aristas se corresponden con la modelación de las relaciones entre estos. Un grafo G se define por tanto como la tupla del conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y las aristas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, de tal manera que $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ representa el arista que conecta el vértice v_{i_1} con v_{i_2} . Nótese por tanto que el grafo está compuesto por n vértices y m aristas. El grafo G se puede modelizar por tanto como $G = (V, E)$. En la figura 4.1 se muestra una representación gráfica de un determinado grafo no dirigido compuesto por 6 vértices y 7 aristas.

Aquellos grafos para los cuales la arista e_j representa los dos sentidos de la relación, es decir, v_{i_1} está relacionado con v_{i_2} y v_{i_2} está relacionado con v_{i_1} se denominan *Grafos no dirigidos*, mientras que en los casos en que esta relación no es recíproca se habla de *Grafos dirigidos*. Cuando cada arista e_j tiene asociado un determinado peso $w_j \in W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ se dice entonces que G es un *grafo ponderado* mientras que cuando se presupone que todas las aristas tienen el mismo peso se omite dicha notación.

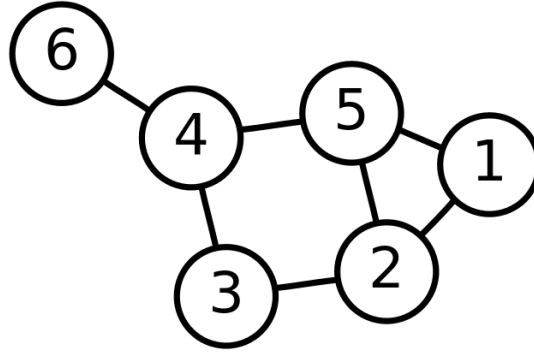


Figura 4.1: Ejemplo de *Grafo No Dirigido*. (Extraido de [Wik17c])

Cuando un vértice denominado $v_{i_1} \in V$ está directamente relacionado con otro denominado $v_{i_2} \in V$, es decir, existe una arista $e_j \in E$ que los conecta ($e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$) se dice que son e_j es *incidente* de dichos vértices. De la misma manera se dice que v_{i_1} y v_{i_2} son *adyacentes* entre sí.

Respecto del número de aristas incidentes sobre cada vértice, se denomina *grado* al cardinal de estas, diferenciando en los grafos no dirigidos entre *in-grado* a las de destino y *out-grado* a las de salida. Se utiliza la notación $d(v_i)$ para referirse al grado del vértice i -ésimo, $d^+(v_i)$ al *in-grado* y $d^-(v_i)$ al *out-grado* de dicho vértice. Nótese que se cumple la siguiente propiedad: $d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$.

Un *camino* es un conjunto de aristas $P_p = \{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}\}$ tales que la arista k -ésima tiene como vértice de destino el mismo que utiliza la $k + 1$ como vértice origen. Nótese que el valor p indica la *longitud* del camino. Cuando el vértice de destino de la arista e_{k_p} es el mismo que el de origen de e_{k_1} se denomina *ciclo* y se denomina C_p .

Se denomina K_n al grafo compuesto por n vértices y $n * (n - 1)$ aristas, de tal manera que estas conectan cada vértice con todos los demás. Nótese que este número se reduce a la mitad en el caso de los grafos no dirigidos.

Cuando en un grafo al estudiar la estructura de un grafo, se comprueba que el conjunto de vértices puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de tal manera que para todas las aristas $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ el vértice v_{i_1} se encuentra en el subconjunto V_1 y el vértice v_{i_2} se encuentra en el subconjunto V_2 , entonces se habla de un *Grafo Bipartito*. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figura 4.2. Nótese que el concepto de grafo bipartito puede extenderse fácilmente a más de dos subconjuntos, denominándose entonces *Grafo k -partito*. Estos grafos tienen son de gran utilidad para modelizar algunos problemas tales como *Netflix* para los cuales V_1 puede estar formado por el conjunto de usuarios mientras que V_2 representa el contenido multimendia. Por tanto, cada arista representa las visualizaciones de los usuarios.

Un *subgrafo* H es el grafo compuesto por un subconjunto de vectores y aristas del grafo G . Nótese que en el caso de que eliminen vértices, es necesario eliminar también todas sus aristas incidentes.

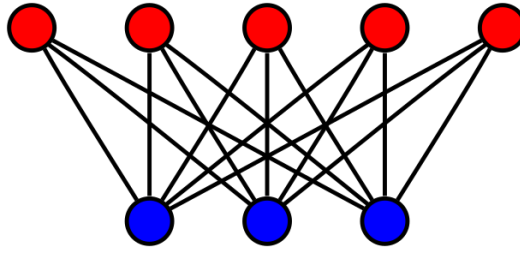


Figura 4.2: Ejemplo de *Grafo Bipartito*. (Extraído de [Wik17c])

Esto se puede indicar de manera matemática de la siguiente forma: $H \subseteq G$ por lo que $H_V \subseteq G_V$ y $H_E \subseteq G_E$.

Desde el punto de vista de las transformaciones que se pueden realizar sobre grafos, se denomina *isomorfismo* a una transformación biyectiva sobre el grafo $G = (V_G, E_G)$ al grafo $H = (V_H, E_H)$ que se realiza sobre los vértices de manera que $f : V_G \rightarrow V_H$ y por cada arista $(e_1, e_2) \in E_G$, entonces $(f(e_1), f(e_2)) \in E_H$ de tal manera que la estructura de G se conserva en H . Entonces se dice que G y H son isomorfos entre si. Si se modifica la condición de biyectividad del *isomorfismo* y tan solo se requiere la propiedad de inyectividad entonces se habla de *homomorfismo*. Por tanto, esto puede ser visto como una transformación en la cual no se mantiene completamente la estructura, entonces H ya no es equivalente a G , sino que es un *subgrafo* de este.

Las transformaciones *homomorfas* son interesantes desde el punto de vista del tratamiento de grafos de tamaño masivo, dado que a partir de estas se trata de reducir la complejidad cuando el tamaño de estos los hace intratables. Por lo tanto, interesa conseguir *homomorfismos* que reduzcan el tamaño del grafo, pero que traten de mantener su estructura lo más semejante posible. Destacan transformaciones conocidas como *Spanners* (Sección 4.4.1) y *Sparsifiers* (Sección 4.4.2).

4.2.1. Métodos de Representación

Existen diversas alternativas de representación de grafos, las cuales presentan ventajas e inconvenientes tanto a nivel de espacio como de tiempo de acceso. Dichas estrategias se escogen teniendo en cuenta la estructura del grafo. En esta sección se habla de matrices de adyacencia y de listas de adyacencia.

Matriz de Adyacencia

Se denomina matriz de adyacencia A del grafo $G = (V, E)$ compuesto por $n = |V|$ vértices, $m = |E|$ aristas y $w_k \in W$ el peso de la arista e_k , a una matriz de tamaño $n * n$ construida tal y como se indica en la ecuación (4.1). Nótese que esta definición es válida tanto para grafos ponderados como para no ponderados suponiendo que $w_k = 1, k \in [1, m]$.

$$A_{i,j} = \begin{cases} w_k, & (v_i, v_j) = e_k \in E \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

Esta estrategia de representación es apropiada cuando se trabaja sobre grafos altamente conexos (con un gran número de aristas), ya que el número de posiciones nulas en la matriz es reducido y la estructura indexada matricial proporciona un tiempo de acceso de $O(1)$. Sin embargo se requiere de $O(n^2)$ para almacenar dicha matriz, algo admisible cuando $n^2 \approx m$ para los cuales esta representación se acerca al óptimo a nivel de espacio.

Lista de Adyacencia

La alternativa a la codificación del grafo como una matriz de adyacencia se conoce como *lista de aristas*. En este caso se mantiene una lista (posiblemente ordenada u otras estrategias más estructuradas como listas enlazadas para reducir los tiempos de acceso) compuesta por el conjunto de aristas E . Nótese por tanto que en este caso la codificación es óptima a nivel de espacio $O(m)$, no existiendo una estrategia de representación exacta que pueda almacenar la estructura del mismo utilizando un tamaño menor. Sin embargo, tal y como se puede intuir, el tiempo de acceso es de $O(m)$ en el peor caso, para lo cual se puede tratar de mejorar el caso promedio manteniendo una lista ordenada. Esta solución es apropiada para grafos dispersos (aquellos en que $n \ll m$).

En la práctica, cuando se trabaja con grafos de tamaño masivo, es muy común que estos sean muy dispersos. Algunos ejemplos de ellos son el *grafo de la web* (grafo dirigido), en el cual cada vértice representa sitio web y cada arista un enlace hacia otro sitio web. Es fácil comprobar que este grafo es altamente disperso ya que es muy poco probable que un sitio web contenga enlaces al resto de sitios de la red cuando se habla de millones de vértices. Algo similar ocurre en el caso de redes sociales como *Facebook* (grafo no dirigido debido a relaciones de amistad) o *Twitter* (grafo dirigido debido a relaciones seguimiento). Por tanto, la representación mediante listas de adyacencia es una herramienta útil a nivel conceptual pero en la práctica se utilizan otras alternativas por la inviabilidad derivada del gran coste espacial en la representación.

4.2.2. Caminos Aleatorios

[TODO]

Matriz Laplaciana

La *matriz laplaciana* consiste en una estrategia de representación de grafos que cumple importantes propiedades a partir de las cuales se facilita en gran medida la resolución de un gran número de problemas sobre grafos. [TODO]

4.3. Modelo en Semi-Streaming

[TODO]

4.4. Spanners y Sparsifiers

[TODO]

4.4.1. Spanners

4.4.2. Sparsifiers

4.5. Problemas sobre Grafos

[TODO]

4.5.1. Matching

[TODO]

4.5.2. Arbol Recubridor Mínimo

[TODO]

4.5.3. Problemas de Rutado

[TODO]

4.5.4. Problemas de Cubrimiento

[TODO]

4.5.5. Análisis de Redes

[TODO]

4.6. Conclusiones

[TODO]

Capítulo 5

Algoritmo PageRank

5.1. Introducción

[TODO]

5.2. Conclusiones

[TODO]

Capítulo 6

Paralelización a Gran Escala

6.1. Introducción

[TODO]

6.2. Sistemas de Ficheros Distribuidos

[TODO]

6.3. Modelo de acceso a Memoria

[TODO]

6.4. Complejidad de la Comunicación

[TODO]

6.5. MapReduce

[TODO]

6.6. Pregel

[TODO]

6.7. Conclusiones

[TODO]

Capítulo 7

Detalles de Implementación y Resultados

7.1. Introducción

[TODO]

7.2. Conclusiones

[TODO]

Apéndice A

Metodología de Trabajo

Apéndice B

¿Cómo ha sido generado este documento?

En este apéndice se describen tanto la estructura como las tecnologías utilizadas para redactar este documento. El estilo visual que se ha aplicado al documento se ha tratado de almoldar lo máximo posible a las especificaciones suministradas en la *guía docente* de la asignatura *Trabajo de Fin de Grado* [uva17].

Este documento ha sido redactado utilizando la herramienta de generación de documentos \LaTeX [toog], en concreto se ha utilizado la distribución para sistemas *OS X* denominada *MacTeX* [tooh] desarrollada por la organización *TeX User Group*. Mediante esta estrategia todas las labores de compilación y generación de documentos *PDF* (tal y como se especifica en la guía docente) se realizan de manera local. Se ha preferido esta alternativa frente a otras como la utilización de plataformas online de redacción de documentos \LaTeX como *ShareLateX* [tooj] u *Overleaf* [tooi] por razones de flexibilidad permitiendo trabajar en lugares en que la conexión a internet no esté disponible. Sin embargo, dichos servicios ofrecen son una buena alternativa para redactar documentos sin tener que preocuparse por todos aquellos aspectos referidos con la instalación de la distribución u otros aspectos como un editor de texto. Además garantizan un alto grado de confiabilidad respecto de pérdidas inesperadas.

Junto con la distribución \LaTeX se han utilizado una gran cantidad de paquetes que extienden y simplifican el proceso de redactar documentos. Sin embargo, debido al tamaño de la lista de paquetes, esta será obviada en este apartado, pero puede ser consultada visualizando el correspondiente fichero `thestyle.sty` del documento.

Puesto que la alternativa escogida ha sido la de generar el documento mediante herramientas locales es necesario utilizar un editor de texto así como un visualizador de resultados. En este caso se ha utilizado *Atom* [tooa], un editor de texto de propósito general que destaca sobre el resto por ser desarrollado mediante licencia de software libre (*MIT License*) y estar mantenido por una amplia comunidad de desarrolladores además de una extensa cantidad de paquetes con los cuales se puede extender su funcionalidad. En este caso, para adaptar el comportamiento de *Atom* a las necesidades de escritura de texto con latex se han utilizados los siguientes paquetes: *latex* [tooc], *language-latex* [toob], *pdf-view* [tood] encargados de añadir la capacidad de compilar ficheros latex, añadir la sintaxis

y permitir visualizar los resultados respectivamente.

Puesto que el *Trabajo de Fin de Grado* se refiere a algo que requiere de un periodo de tiempo de elaboración largo, que además sufrirá una gran cantidad de cambios, se ha creído conveniente la utilización de una herramienta de control de versiones que permita realizar un seguimiento de los cambios de manera organizada. Para ello se ha utilizado la tecnología *Git* [tooe] desarrollada originalmente por *Linus Torvalds*. En este caso en lugar de confiar en el entorno local u otro servidor propio se ha preferido utilizar la plataforma *GitHub* [toof], la cual ofrece un alto grado de confiabilidad respecto de posibles pérdidas además de alojar un gran número de proyectos de software libre. A pesar de ofrecer licencias para estudiantes que permiten mantener el repositorio oculto al público, no se ha creído necesario en este caso, por lo cual se puede acceder al través de la siguiente url: <https://github.com/garciparedes/tfg-big-data-algorithms> [GP17]

Una vez descritas las distintas tecnologías y herramientas utilizadas para la elaboración de este trabajo, lo siguiente es hablar sobre la organización de ficheros. Todos los ficheros utilizados para este documento (obviando las referencias bibliográficas) han sido incluidos en el repositorio indicado anteriormente [GP17].

Para el documento, principal alojado en el directorio `/document/` se ha seguido una estructura modular, dividiendo los capítulos, apéndices y partes destacadas como portada, bibliografía o prefacio entre otros en distintos ficheros, lo cual permite un acceso sencillo a los mismos. Los apéndices y capítulos se han añadido en los subdirectorios separados. Para la labor de combinar el conjunto de ficheros en un único documento se ha utilizado el paquete *subfiles*. El fichero raíz a partir del cual se compila el documento es `document.tex`. La importación de los distintos paquetes así como la adaptación del estulo del documento a los requisitos impuestos se ha realizado en `thestyle.sty` mientras que el conjunto de variables necesarias como el nombre de los autores, del trabajo, etc. se han incluido en `thevars.sty`.

En cuanto al documento de resumen, en el cual se presenta una vista panorámica acerca de las distintas disciplinas de estudio relacionadas con el *Big Data* se ha preferido mantener un único fichero debido a la corta longitud del mismo. Este se encuentra en el directorio `/summary/`.

Por último se ha decidido añadir otro directorio denominado `/notes/` en el cual se han añadido distintas ideas de manera informal, así como enlaces a distintos cursos, artículos y sitios web en que se ha basado la base bibliográfica del trabajo. En la figura B.1 se muestra la estructura del repositorio en forma de árbol.


```

.
+-- document
|   +-- bib
|       |   +-- article.bib
|       |   +-- ...
|   +-- img
|       |   +-- logo_uva.eps
|       |   +-- ...
|   +-- tex
|       |   +-- appendices
|       |       |   +-- how_it_was_build.tex
|       |       |   +-- ...
|       |   +-- chapters
|       |       |   +-- introduction.tex
|       |       |   +-- ...
|       |   +-- bibliography.tex
|       |   +-- ...
|   +-- document.tex
|   +-- ...
+-- notes
|   +-- readme.md
|   +-- ...
+-- summary
|   +-- summary.tex
|   +-- ...
+-- README.md
+-- ...

```

Figura B.1: Árbol de directorios del repositorio

Bibliografía

- [AGPR99] Swarup Acharya, Phillip B Gibbons, Viswanath Poosala, and Sridhar Ramaswamy. Join synopses for approximate query answering. In *ACM SIGMOD Record*, volume 28, pages 275–286. ACM, 1999.
- [AH01] Ali N Akansu and Richard A Haddad. *Multiresolution signal decomposition: transforms, subbands, and wavelets*. Academic Press, 2001.
- [AMP⁺13] Sameer Agarwal, Barzan Mozafari, Aurojit Panda, Henry Milner, Samuel Madden, and Ion Stoica. Blinkdb: queries with bounded errors and bounded response times on very large data. In *Proceedings of the 8th ACM European Conference on Computer Systems*, pages 29–42. ACM, 2013.
- [AMS96] Noga Alon, Yossi Matias, and Mario Szegedy. The space complexity of approximating the frequency moments. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 20–29. ACM, 1996.
- [Asp13] James Aspnes. Notes on discrete mathematics cs 202: Fall 2013. 2013.
- [Asp16] James Aspnes. Notes on randomized algorithms cpsc 469/569. Fall 2016.
- [Bab79] László Babai. Monte-carlo algorithms in graph isomorphism testing, 1979.
- [Blo70] Burton H Bloom. Space/time trade-offs in hash coding with allowable errors. *Communications of the ACM*, 13(7):422–426, 1970.
- [BM04] Andrei Broder and Michael Mitzenmacher. Network applications of bloom filters: A survey. *Internet mathematics*, 1(4):485–509, 2004.
- [CCFC02] Moses Charikar, Kevin Chen, and Martin Farach-Colton. Finding frequent items in data streams. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 693–703. Springer, 2002.
- [CGHJ12] Graham Cormode, Minos Garofalakis, Peter J Haas, and Chris Jermaine. Synopses for massive data: Samples, histograms, wavelets, sketches. *Foundations and Trends in Databases*, 4(1–3):1–294, 2012.
- [Cha04] Shuchi Chawla. Notes on randomized algorithms: Chernoff bounds. October 2004.

- [CM05] Graham Cormode and Shan Muthukrishnan. An improved data stream summary: the count-min sketch and its applications. *Journal of Algorithms*, 55(1):58–75, 2005.
- [DF03] Marianne Durand and Philippe Flajolet. Loglog counting of large cardinalities. In *European Symposium on Algorithms*, pages 605–617. Springer, 2003.
- [FFGM07] Philippe Flajolet, Éric Fusy, Olivier Gandouet, and Frédéric Meunier. Hyperloglog: the analysis of a near-optimal cardinality estimation algorithm. In *Analysis of Algorithms 2007 (AofA07)*, pages 127–146, 2007.
- [FM85] Philippe Flajolet and G Nigel Martin. Probabilistic counting algorithms for data base applications. *Journal of computer and system sciences*, 31(2):182–209, 1985.
- [GG04] Minos Garofalakis and Phillip B Gibbons. Probabilistic wavelet synopses. *ACM Transactions on Database Systems (TODS)*, 29(1):43–90, 2004.
- [GP17] Sergio García Prado. Trabajo de Fin de Grado: Algoritmos para Big Data, 2017. <https://github.com/garciparedes/tfg-big-data-algorithms>.
- [HNH13] Stefan Heule, Marc Nunkesser, and Alexander Hall. Hyperloglog in practice: algorithmic engineering of a state of the art cardinality estimation algorithm. In *Proceedings of the 16th International Conference on Extending Database Technology*, pages 683–692. ACM, 2013.
- [Ins17] Institute for Telecommunication Sciences. Definitions: Data stream, March 2017. https://www.its.bldrdoc.gov/fs-1037/dir-010/_1451.htm.
- [IW05] Piotr Indyk and David Woodruff. Optimal approximations of the frequency moments of data streams. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 202–208. ACM, 2005.
- [Kar92] Richard M. Karp. On-line algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future? pages 416–429, 1992.
- [KNW10] Daniel M Kane, Jelani Nelson, and David P Woodruff. An optimal algorithm for the distinct elements problem. In *Proceedings of the twenty-ninth ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART symposium on Principles of database systems*, pages 41–52. ACM, 2010.
- [LMPMSB14] Esperanza Larrinaga Miner, María Felisa Pérez Martínez, and Araceli Suárez Barrio. Grado en ingeniería informática, uva: Matemática discreta. 2014.
- [LRU14] Jure Leskovec, Anand Rajaraman, and Jeffrey David Ullman. *Mining of massive datasets*. Cambridge University Press, 2014.
- [Mor78] Robert Morris. Counting large numbers of events in small registers. *Communications of the ACM*, 21(10):840–842, 1978.

- [MP80] J Ian Munro and Mike S Paterson. Selection and sorting with limited storage. *Theoretical computer science*, 12(3):315–323, 1980.
- [Mut05] S. Muthukrishnan. Data streams: Algorithms and applications. *Found. Trends Theor. Comput. Sci.*, 1(2):117–236, August 2005.
- [Nel15] Jelani Nelson. Algorithms for big data. Fall 2015.
- [PSC84] Gregory Piatetsky-Shapiro and Charles Connell. Accurate estimation of the number of tuples satisfying a condition. *ACM Sigmod Record*, 14(2):256–276, 1984.
- [SBK05] Ivan W Selesnick, Richard G Baraniuk, and Nick C Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE signal processing magazine*, 22(6):123–151, 2005.
- [SJNSB16] Luis Augusto San José Nieto and Araceli Suárez Barrio. Grado en ingeniería informática, uva: Estadística. 2016.
- [SR94] K. G. Shin and P. Ramanathan. Real-time computing: a new discipline of computer science and engineering. *Proceedings of the IEEE*, 82(1):6–24, Jan 1994.
- [tooa] Atom. <https://atom.io>.
- [toob] Atom Package: Language LaTeX. <https://atom.io/packages/language-latex>.
- [tooc] Atom Package: LaTeX. <https://atom.io/packages/latex>.
- [tood] Atom Package: PDF View. <https://atom.io/packages/pdf-view>.
- [tooe] Git. <https://www.git-scm.com>.
- [toof] GitHub. <https://github.com>.
- [toog] LaTeX. <https://www.latex-project.org>.
- [tooh] MacTex. <http://www.tug.org/mactex>.
- [tooi] Overleaf. <https://www.overleaf.com>.
- [tooj] ShareLaTeX. <https://www.sharelatex.com>.
- [uva17] Trabajo de Fin de Grado (Mención en Computación), 2016/17. <https://www.inf.uva.es/wp-content/uploads/2016/06/G46978.pdf>.
- [Wik17a] Wikipedia. Big data — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big%20data&oldid=782715255>, 2017. [Online; accessed February-2017].
- [Wik17b] Wikipedia. Bloom filter — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bloom%20filter&oldid=776072844>, 2017. [Online; accessed 03-June-2017].

- [Wik17c] Wikipedia. Graph (discrete mathematics) — Wikipedia, the free encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Graph%20\(discrete%20mathematics\)&oldid=779199071](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Graph%20(discrete%20mathematics)&oldid=779199071), 2017. [Online; accessed 07-June-2017].
- [Woo09] David Woodruff. Frequency moments. *Encyclopedia of Database Systems*, pages 1169–1170, 2009.