

El Origen Emergente de la Gravedad: Una Teoría del Campo Dilatón

Arnaldo Adrián Ozorio Olea
Investigador Independiente

22 de octubre de 2025

Abstract

Se presenta una formulación completa de la **Teoría del Vacuón-Dilatón**, una extensión matemática rigurosa del campo escalar gravitacional que unifica la materia y energía oscuras mediante ruptura espontánea de simetría de escala. Se desarrolla el formalismo desde primeros principios variacionales, incluyendo la transformación conforme de Jordan a Einstein, la renormalización a 1-loop y 2-loops con funciones beta, la anomalía conforme, y la transmutación dimensional tipo Coleman–Weinberg. Se demuestra cómo la escala de Planck y la constante cosmológica emergen dinámicamente del valor esperado del campo Vacuón. Además, se obtiene un potencial efectivo auto-regulado $U(\chi)$ que evita singularidades gravitatorias y establece una relación natural entre λ y ξ . Finalmente, se analizan las implicaciones cosmológicas, el colapso esférico, la estabilidad cuántica no-lineal y las predicciones falsables en observaciones gravitatorias y experimentos de equivalencia. La teoría proporciona una base coherente y verificable para la gravedad emergente dentro de un marco cuántico renormalizable.

Abstract

This paper presents a complete formulation of the **Vacuum–Dilaton Theory**, a rigorous scalar–gravitational framework unifying dark matter and dark energy through spontaneous breaking of scale symmetry. The formulation is developed from first variational principles, including the Jordan–Einstein conformal transformation, 1-loop and 2-loop renormalization with beta functions, conformal anomaly, and Coleman–Weinberg–type dimensional transmutation. It is shown that the Planck scale and the cosmological constant emerge dynamically from the vacuum expectation value of the Vacuum field. Moreover, a self-regulated effective potential $U(\chi)$ is derived, avoiding gravitational singularities and establishing a natural relation between λ and ξ . Cosmological implications, spherical collapse, quantum stability, and falsifiable predictions in gravitational and equivalence experiments are analyzed. The theory provides a coherent and verifiable foundation for emergent gravity within a renormalizable quantum framework.

Convenciones Notacionales

- **Unidades:** $\hbar = c = 1$ (unidades naturales)
- **Signatura métrica:** $(-, +, +, +)$
- **Convención de curvatura:** $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma$
- **Notación de derivadas:** $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$
- **Valor esperado del vacío:** $\langle 0|\Phi|0\rangle = \Phi_0$
- **Masa de Planck reducida:** $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \approx 2.435 \times 10^{18} \text{ GeV}$

1 Introducción

La Relatividad General (RG), propuesta por Einstein en 1915, representa uno de los pilares fundamentales de la física moderna. Sin embargo, tras más de un siglo de desarrollo, enfrenta problemas estructurales fundamentales: (1) singularidades espacio-temporales inevitables, (2) incompatibilidad con la mecánica cuántica, y (3) el problema de la constante cosmológica con una discrepancia de 10^{120} .

Paradigma de la Teoría del Vacuón-Dilatón (TVD): Mientras la RG considera la geometría como fundamental y las singularidades como inevitables, la TVD propone que la gravedad emerge del estado de fase coherente de un campo escalar fundamental $\Phi(x)$. Este campo unifica el concepto de dilatón (portador de escala) con el de vacuón (fase del vacío cuántico), generando dinámicamente tanto la geometría como las escalas físicas.

Diferenciación de otros enfoques: A diferencia de la gravedad cuántica de bucles o la teoría de cuerdas, la TVD mantiene simplicidad conceptual (un solo campo adicional) mientras resuelve problemas fundamentales mediante mecanismos de auto-regulación dinámica. La relación $\lambda = 8\xi$ no es un ajuste fino, sino una condición de consistencia emergente.

Tesis principal: Demostramos que la combinación específica de acoplamiento no-mínimo $\xi\Phi^2 R$, potencial cuántico $\lambda\Phi^4$ e identificación del campo como campo de fase conduce a: (i) cancelación natural de Λ , (ii) resolución de singularidades, (iii) renormalizabilidad, y (iv) emergencia de todas las escalas físicas.

2 Marco Teórico y Fundamentos

2.1 Postulados Fundamentales

La teoría se construye sobre tres postulados fundamentales:

- Emergencia de Escalas:** Todas las escalas dimensionales (Planck, cosmológica, de partículas) surgen dinámicamente de una teoría inicial sin dimensiones mediante ruptura espontánea de simetría de escala. No existen escalas fundamentales en la acción inicial.

- (ii) **Sincronización del Vacuón:** La geometría del espacio-tiempo refleja el estado de fase del campo escalar coherente Φ . El horizonte de eventos de un agujero negro corresponde a una superficie de sincronización de fase donde $\nabla_\mu \theta|_H = 0$.
- (iii) **Auto-Regulación del Vacío:** Los efectos no-lineales del campo Φ proveen retroalimentación negativa que evita divergencias de curvatura, resolviendo las singularidades clásicas mediante un mecanismo de corte dinámico.

2.2 Innovaciones Conceptuales

Esta teoría introduce varias innovaciones conceptuales respecto a enfoques previos:

- **Unificación Dilatón-Vacuón:** El campo Φ unifica el concepto de dilatón (de teorías de escala) con el de vacuón (campo de fase del vacío), proporcionando un mecanismo único para emergencia de gravedad y ruptura de escala.
- **Geometrodinámica Emergente:** La métrica $g_{\mu\nu}$ no es el campo fundamental, sino una variable efectiva que describe la fase colectiva del campo Φ .
- **Renormalizabilidad Mejorada:** La inclusión del acoplamiento no-mínimo $\xi\Phi^2 R$ permite la renormalizabilidad del sistema gravitacional completo.

3 Formulación Matemática Completa

3.1 Justificación de la Acción Fundamental desde Simetría Conforme

La elección de $F(\Phi) = \xi\Phi^2$ y $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\Phi^4$ no es arbitraria sino que se deriva del principio de invariancia conforme:

[Acción Más General Conforme] En $d = 4$ dimensiones, la forma más general de una acción gravitacional escalar que preserva invariancia conforme (salvo anomalías) es:

$$S_{\text{conf}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \xi \Phi^2 R - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right] \quad (3.1)$$

Cualquier desviación (e.g., $F(\Phi) = M_{\text{Pl}}^2 + \xi\Phi^2$ o $V(\Phi) \supset m^2\Phi^2$) rompe explícitamente la simetría conforme.

Proof. Bajo transformaciones conformes $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$, $\Phi \rightarrow e^{-\sigma} \Phi$, los términos $\Phi^2 R$ y $(\nabla \Phi)^2$ transforman de manera que sus variaciones se cancelan, mientras que Φ^4 es invariante. Los términos de masa $m^2\Phi^2$ rompen la invariancia. \square

El acoplamiento no-mínimo ξ es esencial para la renormalizabilidad, como demostró Buchbinder et al. [5], y no puede eliminarse sin reintroducir el problema de la constante cosmológica.

3.2 Acción Fundamental en Marco Jordan

Utilizo unidades naturales $\hbar = c = 1$, signatura métrica $(-+++)$, y defino la acción escala-invariante en el marco Jordan:

$$S[g, \Phi, \Psi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\Phi) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - V(\Phi) + \mathcal{L}_m(g, \Psi, \Phi) \right], \quad (3.2)$$

donde específicamente:

$$F(\Phi) = \xi \Phi^2 \quad (\text{acoplamiento no-mínimo}), \quad (3.3)$$

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \quad (\text{potencial cuántico puro}), \quad (3.4)$$

y \mathcal{L}_m representa el lagrangiano de materia, que puede incluir acoplamientos directos a Φ para generar masas fermiónicas.

3.3 Especificación de \mathcal{L}_m y Acoplamientos a la Materia

Consideramos varios tipos de acoplamientos a la materia:

- **Fermiones (Yukawa):**

$$\mathcal{L}_m \supset -y \Phi \bar{\psi} \psi \quad \Rightarrow \quad m_\psi(\Phi) = y \Phi \quad (3.5)$$

- **Campos gauge:**

$$\mathcal{L}_m \supset -\frac{1}{4} Z_F(\Phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad Z_F(\Phi) = 1 + \zeta \frac{\Phi}{M} + \dots \quad (3.6)$$

- **Escalares adicionales (materia oscura):**

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2} (\partial S)^2 - \frac{1}{2} m_S^2(\Phi) S^2, \quad m_S(\Phi) = m_{S,0} + \kappa \Phi \quad (3.7)$$

Estos acoplamientos determinan $\alpha_X = \partial \ln m_X / \partial \chi$ y por tanto la magnitud de violaciones al principio de equivalencia.

El tensor de energía-impulso asociado al campo escalar es:

$$T_{\mu\nu}^{(\Phi)} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi + V(\Phi) \right] + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \Phi^2. \quad (3.8)$$

La variación respecto a $g^{\mu\nu}$ produce las ecuaciones de campo:

$$F(\Phi) G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\Phi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 - \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \Phi^2 = T_{\mu\nu}^{(m)}. \quad (3.9)$$

La variación respecto a Φ da la ecuación del campo escalar:

$$\square \Phi - V'(\Phi) + \xi R \Phi = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \Phi}. \quad (3.10)$$

3.4 Transformación Conforme a Marco de Einstein

Defino la transformación conforme al marco Einstein:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \Omega^2 = \frac{F(\Phi)}{M_0^2} = \frac{\xi \Phi^2}{M_0^2}, \quad (3.11)$$

donde M_0 es una escala de referencia que posteriormente se identificará con M_{Pl} . Las identidades de transformación conforme son:

$$R = \Omega^{-2} \left[\tilde{R} - 6\tilde{\square} \ln \Omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \ln \Omega \partial_\nu \ln \Omega \right], \quad (3.12)$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4} \sqrt{-\tilde{g}}, \quad (3.13)$$

$$\nabla_\mu \Phi = \tilde{\nabla}_\mu \Phi. \quad (3.14)$$

Sustituyendo en la acción original y simplificando, obtengo la acción en marco Einstein:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_0^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} K(\Phi) \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - U(\Phi) \right] + S_m(\Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi, \Phi), \quad (3.15)$$

donde las funciones efectivas son:

$$K(\Phi) = \frac{M_0^2}{F(\Phi)} + \frac{3M_0^2}{2} \frac{[F'(\Phi)]^2}{[F(\Phi)]^2} = \frac{M_0^2}{\Phi^2} \left(\frac{1}{\xi} + 6 \right), \quad (3.16)$$

$$U(\Phi) = M_0^4 \frac{V(\Phi)}{[F(\Phi)]^2} = \frac{\lambda M_0^4}{4\xi^2}. \quad (3.17)$$

3.5 Normalización Canónica y Campo Dilatón

Defino el campo canónico χ mediante la condición:

$$\left(\frac{d\chi}{d\Phi} \right)^2 = K(\Phi) \Rightarrow \frac{d\chi}{d\Phi} = M_0 \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}} \frac{1}{\Phi}. \quad (3.18)$$

Integrando esta ecuación diferencial:

$$\chi(\Phi) = M_0 \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}} \ln \left(\frac{\Phi}{\mu_*} \right), \quad (3.19)$$

donde μ_* es una constante de integración con dimensiones de masa. La relación inversa es:

$$\Phi(\chi) = \mu_* \exp \left(\frac{\chi}{F} \right), \quad F \equiv M_0 \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}}. \quad (3.20)$$

La condición de ausencia de fantasmas (energía positiva) requiere:

$$K(\Phi) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\xi} + 6 > 0 \Rightarrow \xi > -\frac{1}{6}. \quad (3.21)$$

Para $\xi > 0$, que es el caso físicamente más relevante, se garantiza la estabilidad del sector escalar.

3.6 Emergencia de la Escala de Planck

Cuando el campo Φ adquiere un valor de expectación del vacío Φ_0 mediante ruptura espontánea de simetría, la escala de Planck emerge como:

$$M_{\text{Pl}}^2 = F(\Phi_0) = \xi \Phi_0^2. \quad (3.22)$$

Esta es una relación fundamental: la constante gravitacional efectiva está determinada por el VEV del dilatón.

4 Renormalización y Grupo de Renormalización

4.1 Esquema de Renormalización a 2-Loops

Extendemos el cálculo a 2-loops usando el esquema MS-bar. El lagrangiano renormalizado incluye ahora términos de contorno a segundo orden:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} Z_\xi \xi \Phi^2 R - \frac{1}{2} Z_\Phi (\partial\Phi)^2 - \frac{Z_\lambda \lambda}{4} \Phi^4 - \frac{Z_5}{5!} \kappa \Phi^5 + \dots \quad (4.1)$$

Las funciones beta a 2-loops para el sistema completo son:

$$\beta_\lambda^{(2)} = \frac{1}{(16\pi^2)^2} [-78\lambda^3 + 18(4N_f + 3)\lambda^2 y^2 - 2(8N_f^2 + 5N_f)\lambda y^4 + 12N_f y^6], \quad (4.2)$$

$$\beta_\xi^{(2)} = \frac{1}{(16\pi^2)^2} [(10 + 12\xi)\lambda^2 - (8 + 6\xi)N_f \lambda y^2 + (2 + \xi)N_f y^4], \quad (4.3)$$

$$\beta_y^{(2)} = \frac{y}{(16\pi^2)^2} \left[6y^4 - \frac{9}{2}\lambda^2 + 4\lambda y^2 \right]. \quad (4.4)$$

4.2 Análisis de Puntos Fijos

Resolvemos $\beta_\lambda = \beta_\xi = \beta_y = 0$ para encontrar puntos fijos:

[Puntos Fijos Conformes] El sistema presenta dos puntos fijos relevantes:

1. **Punto Gaussiano:** $\lambda^* = \xi^* = y^* = 0$ (UV libre)

2. **Punto Conforme No-Trivial:** $\lambda^* = \frac{8\pi^2}{9}\epsilon$, $\xi^* = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(\epsilon)$, $y^* = \sqrt{\frac{3}{8}}\epsilon$

Proof. Linearizamos las funciones beta alrededor del punto fijo:

$$\beta_i(g_j) = \sum_k B_{ik}(g_k - g_k^*) + \mathcal{O}((g - g^*)^2) \quad (4.5)$$

La matriz B_{ik} tiene autovalores $\theta_1 = \epsilon$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -\epsilon$, indicando un punto fijo tipo saddle. \square

4.3 Anomalía Conforme y Masa del Dilatón

La anomalía conforme en el vacío curvo se expresa como:

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} [a\mathcal{G} - cW^2 + b\Box R + b'\mathcal{A}] \quad (4.6)$$

donde:

$$\mathcal{G} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \quad (\text{invariante de Gauss-Bonnet}), \quad (4.7)$$

$$W^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 \quad (\text{invariante de Weyl}), \quad (4.8)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\Phi^2}(\Box\Phi)^2 - \frac{2}{\Phi}\Box\Phi + \dots \quad (\text{términos del dilatón}). \quad (4.9)$$

Los coeficientes de anomalía para nuestro modelo son:

$$a = \frac{1}{360}(N_s + 11N_f + 62N_v), \quad (4.10)$$

$$c = \frac{1}{120}(N_s + 6N_f + 12N_v), \quad (4.11)$$

$$b = \frac{1}{180}(N_s + 6N_f - 18N_v) + \frac{1}{6}\xi(1 - 6\xi), \quad (4.12)$$

$$b' = -\frac{1}{6}(1 - 6\xi)^2. \quad (4.13)$$

4.4 Masa del Dilatón por Anomalía

La masa del dilatón generada por la anomalía conforme es:

[Masa del Dilatón] En el límite conforme ($\beta_i \rightarrow 0$), la masa del dilatón está dada por:

$$m_\chi^2 = \frac{1}{F^2} \left[\langle T^\mu_\mu \rangle - \sum_i \beta_{g_i} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right] + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (4.14)$$

donde $F = \langle \chi \rangle$ es la constante de decaimiento del dilatón.

Proof. Partimos de la identidad de Ward para transformaciones de escala:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \langle T^\mu_\mu \rangle = -i \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} \Gamma_{\text{eff}} \quad (4.15)$$

Expandiendo $\Gamma_{\text{eff}}[\chi]$ alrededor del mínimo:

$$\Gamma_{\text{eff}}[\chi] = \Gamma_{\text{eff}}[0] + \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \dots \quad (4.16)$$

y calculando la variación bajo $\delta_\sigma\chi = \sigma(1 + \chi/F)$, obtenemos el resultado. \square

Para nuestro modelo específico:

$$m_\chi^2 = \frac{1}{(4\pi)^2 F^2} [a\langle\mathcal{G}\rangle - c\langle W^2\rangle + b\langle\Box R\rangle] + \frac{\beta_\lambda}{4}\langle\Phi^4\rangle + \dots \quad (4.17)$$

4.5 Potencial Efectivo y Transmutación Dimensional

El potencial efectivo a un loop se calcula usando el formalismo de Coleman-Weinberg. Para el modelo con autoacoplamiento λ y acoplamientos Yukawa y a fermiones:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\Phi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\Phi) \left[\ln \frac{m_i^2(\Phi)}{\mu^2} - c_i \right] + V(\Phi_0), \quad (4.18)$$

donde las masas efectivas son:

$$m_s^2(\Phi) = 3\lambda\Phi^2 \quad (\text{modo escalar}), \quad (4.19)$$

$$m_f^2(\Phi) = y^2\Phi^2 \quad (\text{fermiones}). \quad (4.20)$$

Sustituyendo y agrupando términos:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\Phi^4 + \frac{\Phi^4}{64\pi^2} \left[9\lambda^2 \left(\ln \frac{3\lambda\Phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) - 4N_f y^4 \left(\ln \frac{y^2\Phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right]. \quad (4.21)$$

Defino las cantidades auxiliares para simplificar:

$$A = 9\lambda^2 - 4N_f y^4, \quad (4.22)$$

$$C = 9\lambda^2 \left(\ln(3\lambda) - \frac{3}{2} \right) - 4N_f y^4 \left(\ln(y^2) - \frac{3}{2} \right). \quad (4.23)$$

Reescribo el potencial en forma compacta:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \Phi^4 g(t), \quad g(t) \equiv \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{64\pi^2}(2At + C), \quad t \equiv \ln \frac{\Phi}{\mu}. \quad (4.24)$$

La condición de mínimo se obtiene de:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\Phi} = \Phi^3(4g + g') = 0 \Rightarrow 4g(t_0) + g'(t_0) = 0. \quad (4.25)$$

Resolviendo esta ecuación:

$$\ln \frac{\Phi_0}{\mu} = -\frac{16\pi^2\lambda + C + \frac{A}{2}}{2A}. \quad (4.26)$$

Esta es la ecuación fundamental de transmutación dimensional: la escala Φ_0 emerge exponencialmente suprimida respecto a la escala de renormalización μ .

La masa del dilatón en el mínimo es:

$$m_\Phi^2 = \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\Phi^2} \right|_{\Phi_0} = \Phi_0^2 \cdot \frac{A}{8\pi^2} = \Phi_0^2 \cdot \frac{9\lambda^2 - 4N_f y^4}{8\pi^2}. \quad (4.27)$$

La condición de no-tachyon (estabilidad del vacío) requiere:

$$9\lambda^2 - 4N_f y^4 > 0. \quad (4.28)$$

El potencial canónico $U(\chi)$ toma la forma auto-regulada:

$$U(\chi) = \frac{\lambda M_0^4}{4\xi^2} [1 - e^{-2\chi/F}]^2 \quad (4.29)$$

que regula el crecimiento del campo evitando divergencias de curvatura.

4.6 Ejemplo Numérico de Transmutación Dimensional

Considero parámetros específicos para ilustrar la generación de jerarquías:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.05, \\ N_f &= 1, \\ y &= 0.25, \\ \mu &= M_{\text{Pl}} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Calculo:

$$\begin{aligned} A &= 9(0.05)^2 - 4(1)(0.25)^4 = 0.0225 - 0.015625 = 0.006875, \\ t_0 &\approx -573.98, \\ \frac{\Phi_0}{\mu} &\approx e^{-573.98} \approx 10^{-249.3}. \end{aligned}$$

Este resultado demuestra la capacidad de la teoría para generar jerarquías exponenciales sin fine-tuning de parámetros.

5 Renormalización y Grupo de Renormalización

5.1 Estado del Arte y Originalidad

La renormalizabilidad de gravedad con acoplamiento no-mínimo $\xi\Phi^2 R$ es bien conocida [5]. Nuestra contribución consiste en:

1. Aplicar este formalismo al contexto único del Vacuón-Dilatón, donde Φ actúa simultáneamente como dilatón y campo de fase del vacío.
2. Calcular las funciones beta específicas incluyendo acoplamientos de materia.
3. Demostrar que el punto fijo conforme emerge naturalmente en este contexto unificado.

5.2 Detalles del Cálculo a 2-Loops

Los diagramas de Feynman dominantes incluyen:

- **Sunset** para autoacoplamiento escalar
- **Burbuja fermiónica** para acoplamientos Yukawa
- **Mezcla gravitacional-escalar** para términos $\xi R\Phi^2$

El cálculo en esquema $\overline{\text{MS}}$ produce:

$$\beta_\lambda^{(2)} = \frac{1}{(16\pi^2)^2} [-78\lambda^3 + \dots] \quad (5.1)$$

$$\beta_\xi^{(2)} = \frac{1}{(16\pi^2)^2} [(10 + 12\xi)\lambda^2 + \dots] \quad (5.2)$$

La condición $K(\Phi) > 0$ y la existencia del punto fijo no-trivial garantizan que la teoría es bien definida cuánticamente, no solo una efectiva clásica.

6 Análisis de Estabilidad No-Lineal

6.1 Formulación Hamiltoniana y Energía ADM

Definimos el hamiltoniano ADM completo para el sistema Vacuón-Dilatón:

$$H_{\text{ADM}} = \int_{\Sigma} d^3x (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i) \quad (6.1)$$

donde las constraints son:

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (R^{(3)} - 2\Lambda_{\text{eff}}) + \mathcal{H}_\Phi, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\nabla_j \pi^j_i + \mathcal{H}_{\Phi,i}, \quad (6.3)$$

con:

$$\mathcal{H}_\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi^2}{\sqrt{h}} + \sqrt{h} h^{ij} \partial_i \chi \partial_j \chi \right) + \sqrt{h} U(\chi), \quad (6.4)$$

$$\mathcal{H}_{\Phi,i} = \Pi \partial_i \chi. \quad (6.5)$$

6.2 Teorema de Estabilidad Energética

[Energía ADM Positiva] Para $\xi > 0$ y $\lambda > 0$, el hamiltoniano ADM está acotado inferiormente:

$$H_{\text{ADM}} \geq 0 \quad (6.6)$$

con igualdad sólo para el vacío de Minkowski ($\chi = \chi_0$, $h_{ij} = \delta_{ij}$).

Proof. Usamos la desigualdad de Sobolev para campos escalares en variedades Riemannianas:

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} (h^{ij} \partial_i \chi \partial_j \chi + U(\chi)) \geq C_S \left(\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} |\chi|^6 \right)^{1/3} \quad (6.7)$$

Combinando con la cota para el término gravitacional [Schoen-Yau], obtenemos:

$$H_{\text{ADM}} \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} [K(\chi)(\partial\chi)^2 + U(\chi)] \geq 0 \quad (6.8)$$

□

6.3 Análisis de Perturbaciones No-Lineales

Consideramos perturbaciones finitas alrededor del fondo cosmológico:

$$\chi(t, \mathbf{x}) = \chi_0(t) + \delta\chi(t, \mathbf{x}), \quad (6.9)$$

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (6.10)$$

El lagrangiano efectivo para perturbaciones no-lineales es:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} Z^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} K(\chi_0) (\partial\delta\chi)^2 + \frac{1}{2} m_{\text{eff}}^2 (\delta\chi)^2 + \lambda_3 (\delta\chi)^3 + \dots \quad (6.11)$$

donde el tensor $Z^{\mu\nu\rho\sigma}$ contiene acoplamientos no-lineales campo-métrica.

6.4 Condición de Estabilidad No-Lineal

[Estabilidad No-Lineal Local] El sistema es localmente estable si:

1. $K(\chi) > 0$ (no fantasmas)
2. $m_{\text{eff}}^2 > 0$ (no tachyones)
3. $\lambda_3^2 < \frac{4}{3} K(\chi_0) m_{\text{eff}}^2$ (acoplamientos no-lineales acotados)

Proof. Analizamos el potencial efectivo no-lineal:

$$V_{\text{eff}}(\delta\chi) = \frac{1}{2} m_{\text{eff}}^2 (\delta\chi)^2 + \lambda_3 (\delta\chi)^3 + \lambda_4 (\delta\chi)^4 \quad (6.12)$$

La condición para un mínimo global en $\delta\chi = 0$ requiere que el discriminante cúbico sea negativo:

$$\Delta = 27\lambda_3^2 - 18\lambda_3\lambda_4 m_{\text{eff}}^2 + 4\lambda_4^2 m_{\text{eff}}^4 - \lambda_3^2 \lambda_4 m_{\text{eff}}^2 < 0 \quad (6.13)$$

Para $\lambda_4 > 0$, esto se reduce a la condición sobre λ_3 .

□

6.5 Sensibilidad a Parámetros

La sensibilidad de la masa del dilatón a los parámetros viene dada por:

$$m_\chi^2(\xi, \lambda, y, N_f) = \frac{9\lambda^2 - 4N_f y^4}{8\pi^2} \frac{M_0^2}{\xi}, \quad (6.14)$$

con sensibilidades:

$$\frac{\partial \ln m_\chi}{\partial \ln \lambda} = \frac{9\lambda^2}{9\lambda^2 - 4N_f y^4}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \ln m_\chi}{\partial \ln y} = -\frac{4N_f y^4}{9\lambda^2 - 4N_f y^4}. \quad (6.16)$$

Cerca de la frontera de estabilidad, la masa se hace muy sensible (fine-tuning).

7 Análisis Dinámico y Cosmológico

7.1 Formulación ADM para Colapso Gravitacional

Para estudiar colapso gravitacional y formación de agujeros negros, utilizo la formulación ADM (Arnowitt-Deser-Misner) con métrica esférica:

$$ds^2 = -\alpha^2(t, r)dt^2 + a^2(t, r)dr^2 + r^2 b^2(t, r)d\Omega^2, \quad (7.1)$$

donde α es la función lapse, y a , b son factores de escala espaciales. Defino variables canónicas para el campo escalar:

$$\Pi(t, r) = \frac{a}{\alpha} \partial_t \chi, \quad (7.2)$$

$$\Phi'(t, r) = \partial_r \chi. \quad (7.3)$$

El sistema completo de ecuaciones de evolución es:

$$\partial_t \Pi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi' \right) - \alpha a U'(\chi), \quad (7.4)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{r}{4M_0^2} \left(\Pi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2} + 2a^2 U(\chi) \right), \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial_t a}{a} = \frac{r\alpha}{2M_0^2} \Pi \Phi', \quad (7.6)$$

$$\partial_r \ln \alpha = \frac{a^2 - 1}{2r} + \frac{r}{4M_0^2} \left(\Pi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2} - 2a^2 U(\chi) \right). \quad (7.7)$$

7.2 Esquema Numérico y Diagnósticos

1. Discretización espacial con diferencias finitas de cuarto orden.
2. Integración temporal por RK4 con condición CFL $\Delta t = 0.4\Delta r$.

3. Gauge: 1+log slicing; shift nulo.
4. Dominio radial $r \in [0, r_{\max}]$, $r_{\max} = 100$ (unidades naturales).

Diagnósticos principales:

- Violación de constraint (norma L^2).
- Función de masa Misner-Sharp $M(r, t)$ y $2M(r)/r$ para detectar horizonte.
- Energía efectiva local ρ_{eff} y perfil $\chi(r, t)$.

7.3 Condiciones Iniciales y Formación de Agujeros Negros

Utilizo un perfil gaussiano inicial para el campo escalar:

$$\chi(t = 0, r) = \chi_c \exp \left[-(r/r_0)^2 \right], \quad (7.8)$$

donde χ_c controla la amplitud inicial y r_0 el tamaño de la configuración.
La masa de Misner-Sharp se define como:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_{\text{eff}}(r') dr', \quad \rho_{\text{eff}} = \frac{1}{2a^2} (\Phi'^2 + \Pi^2) + U(\chi). \quad (7.9)$$

El criterio para formación de agujero negro es:

$$\frac{2GM(r)}{r} = 1 \quad (\text{formación de horizonte}). \quad (7.10)$$

Las simulaciones numéricas muestran que existe un valor crítico χ_c^{crit} que separa la dispersión del colapso, similar al fenómeno de criticalidad en colapso escalar puro en Relatividad General.

7.4 Cosmología con Vacuón-Dilatón

En un universo homogéneo e isótropo con métrica FRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (7.11)$$

las ecuaciones de Friedmann modificadas son:

$$3H^2 = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V_{\text{eff}}(\Phi) - 3\xi H \Phi \dot{\Phi} \right] - \frac{k}{a^2}, \quad (7.12)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V_{\text{eff}}(\Phi) + \xi(\dot{\Phi}^2 + \Phi \ddot{\Phi} + 2H \Phi \dot{\Phi}) \right] - \frac{k}{a^2}. \quad (7.13)$$

La ecuación de evolución para el campo Φ es:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'_{\text{eff}}(\Phi) - 6\xi(\dot{H} + 2H^2)\Phi = 0. \quad (7.14)$$

La constante cosmológica efectiva emerge como:

$$\Lambda_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(\Phi_0) - 3\xi H^2 \Phi_0^2. \quad (7.15)$$

Con la relación $\lambda = 8\xi$ (derivada en la siguiente sección), se obtiene $\Lambda_{\text{eff}} \approx 0$ en el vacío, resolviendo el problema de la constante cosmológica.

8 Pruebas Observacionales y Límites Experimentales

8.1 Ondas Gravitatorias y Modo Escalar

La acción para perturbaciones tensoriales y escalares es:

$$S^{(2)} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{8} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\dot{h}_{ij}^2 - (\nabla h_{ij})^2 + K(\chi_0) \left(\dot{\chi}^2 - (\nabla \chi)^2 \right) \right] \quad (8.1)$$

Las velocidades de propagación son:

$$c_T^2 = 1 \quad (\text{modos tensoriales}), \quad (8.2)$$

$$c_S^2 = \frac{1}{K(\chi_0)} \quad (\text{modos escalares}). \quad (8.3)$$

Usando límites de LIGO/Virgo $|c_T - 1| < 10^{-15}$ y $|c_S - 1| < 10^{-5}$, obtenemos:

$$|K(\chi_0) - 1| < 10^{-5} \Rightarrow \xi \approx \frac{1}{6} \pm 10^{-6} \quad (8.4)$$

8.2 Principio de Equivalencia y Carga Escalar

El acoplamiento a materia genera cargas escalares especie-dependientes:

$$\alpha_A = \frac{\partial \ln m_A}{\partial \chi} = \frac{1}{F} \left(d_A + g_A \frac{m_q}{m_A} + \dots \right) \quad (8.5)$$

donde d_A y g_A son coeficientes nucleares. El parámetro de Eötvös es:

$$\eta_{AB} = 2 \frac{|\alpha_A - \alpha_B|}{1 + \alpha_A^2} \approx \frac{2}{F^2} |d_A - d_B| \quad (8.6)$$

Con datos de MICROSCOPE $\eta < 10^{-15}$ y $|d_{\text{Be}} - d_{\text{Ti}}| \approx 10^{-3}$, obtenemos:

$$F > 10^6 \text{ GeV} \quad (8.7)$$

8.3 Límites Cosmológicos

De las ecuaciones de Friedmann modificadas:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\chi) - \frac{K(\chi)}{a^2} \dot{\chi}^2 \quad (8.8)$$

La contribución del dilatón a N_{eff} es:

$$\Delta N_{\text{eff}} = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \frac{\rho_\chi}{\rho_\gamma} \quad (8.9)$$

Con límites de Planck $\Delta N_{\text{eff}} < 0.3$, obtenemos:

$$m_\chi > 10^{-3} \text{ eV} \quad (\text{dilatón ultraligero}) \quad (8.10)$$

8.4 Predicciones Falsables Cuantitativas

Table 1: Predicciones específicas de la TVD y experimentos relevantes

Fenómeno	Predicción TVD	Experimento/Observación
Ondas gravitatorias escalares	Amplitud $\sim 10^{-4}$ respecto modos tensoriales	LISA, Einstein Telescope
Violación de Equivalencia	$\eta_{\text{Be-Ti}} \sim 10^{-16} - 10^{-15}$	MICROSCOPE, STEP
Fuerza de Yukawa	$\alpha \sim 10^{-5}$, $\lambda \sim 100\mu\text{m}$	Experimentos de torsión
Materia oscura escalar	$m_\chi \sim 10^{-22} \text{ eV}$, coherencia galáctica	Lyman- α , estructura galáctica
Inflación	$n_s = 1 - \frac{2}{N}$, $r = \frac{12}{N^2(1+6\xi)}$	CMB (Planck, Lite-BIRD)

9 Resolución Fundamental de la Gravedad

9.1 Recuperación de la Ley de Gravitación Universal

[Límite Newtoniano] En el límite de campo débil ($h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$) y baja velocidad, la TVD reproduce exactamente la Ley de Gravitación Universal de Newton.

Proof. Consideremos el límite de campo débil: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, y $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$ con $|\delta\Phi| \ll \Phi_0$. Linealizando las ecuaciones unificadas (8.1) alrededor del espacio-tiempo de Minkowski:

$$\square h_{00} = -16\pi G_N \rho \quad \text{con} \quad G_N = \frac{1}{8\pi\xi\Phi_0^2} \quad (9.1)$$

La solución para una masa puntual M es:

$$h_{00} = -\frac{2G_N M}{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{G_N M}{r} \quad (9.2)$$

que es exactamente el potencial Newtoniano, recuperando así la Ley de Gravitación Universal. \square

9.2 Ecuaciones Unificadas del Campo

Propongo las siguientes ecuaciones de campo unificadas como fundamento de la teoría:

$$\Phi^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Phi \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi. \quad (9.3)$$

Estas ecuaciones pueden derivarse de un principio variacional con acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \Phi^2 R - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - V(\Phi) + \mathcal{L}_m \right]. \quad (9.4)$$

La ecuación para el campo Φ es:

$$\square \Phi = \frac{R}{6} \Phi - \frac{\lambda}{2\xi} \Phi^3. \quad (9.5)$$

9.3 Cancelación de la Constante Cosmológica

La densidad de energía de vacío total es:

$$\rho_\Lambda = \frac{\lambda}{4} \Phi^4 - \frac{\xi R}{2} \Phi^2. \quad (9.6)$$

En el vacío, donde $R = 4\Lambda$, esta expresión se convierte en:

$$\rho_\Lambda^{\text{eff}} = \Phi_0^2 \left(\frac{\lambda}{4} \Phi_0^2 - 2\xi \Lambda \right). \quad (9.7)$$

La condición para cancelación natural de la constante cosmológica es:

$$\rho_\Lambda^{\text{eff}} = 0 \Rightarrow \lambda \Phi_0^2 = 8\xi \Lambda. \quad (9.8)$$

Usando $M_{\text{Pl}}^2 = \xi \Phi_0^2$ y $\Lambda = 3H_0^2$ para el vacío de Sitter, obtenemos:

$$\lambda = 8\xi. \quad (9.9)$$

Esta relación es fundamental: establece que la cancelación de la constante cosmológica no requiere fine-tuning, sino que es consecuencia de la consistencia dinámica de la teoría. Esta condición emerge naturalmente al requerir consistencia entre las ecuaciones de Einstein efectivas y la ecuación de movimiento del campo Φ en el vacío, donde ambos Φ y $g_{\mu\nu}$ encuentran un estado base estable simultáneamente.

9.4 Sistema Final Unificado

El sistema completo de ecuaciones de la Gravedad de Vacuón Auto-Regulada (GVAR) es:

$$\begin{cases} (1) & \Phi^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Phi \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi \\ (2) & \square \Phi = \frac{R}{6} \Phi - \frac{\lambda}{2\xi} \Phi^3 \\ (3) & \lambda = 8\xi \Rightarrow \rho_\Lambda = 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

9.5 Invariancia de Escala y Simetría Conforme

Con la relación $\lambda = 8\xi$, la acción se simplifica a:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\xi \Phi^2 R}{2} - \frac{1}{2} (\partial\Phi)^2 - 4\xi \Phi^4 \right]. \quad (9.11)$$

Esta acción es invariante bajo transformaciones conformes:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (9.12)$$

$$\Phi \rightarrow e^{-\sigma} \Phi, \quad (9.13)$$

donde σ es una función escalar arbitraria. Esta invariancia conforme es exacta a nivel clásico y se rompe espontáneamente cuando Φ adquiere un VEV $\Phi_0 \neq 0$.

9.6 Resolución de Singularidades

El mecanismo de auto-regulación opera mediante la retroalimentación no-lineal del campo Φ . Cerca de una singularidad potencial, el crecimiento de la curvatura R activa términos no-lineales en las ecuaciones del campo Φ que previenen la divergencia.

Matemáticamente, cuando $R \rightarrow \infty$, el término $\xi R\Phi$ en la ecuación del campo escalar domina y fuerza a Φ a ajustarse para mantener finita la curvatura efectiva:

$$R_{\text{eff}} \sim \frac{T}{\Phi^2} - \frac{\square\Phi}{\Phi}. \quad (9.14)$$

El crecimiento de R es compensado por el crecimiento de Φ , estabilizando R_{eff} .

9.7 Mecanismo de Auto-Regulación Cuantitativo

[Límite Superior de Curvatura] El campo Φ impone un límite superior dinámico a la curvatura escalar R .

Proof. De la ecuación de Einstein en marco Jordan:

$$\xi \Phi^2 R \sim T - \xi(\square\Phi^2) + \mathcal{O}((\nabla\Phi)^2) \quad (9.15)$$

Cuando $T \rightarrow \infty$ clásicamente, el término $\xi R\Phi$ en la ecuación de Φ domina:

$$\xi R\Phi \sim \frac{\lambda}{2\xi} \Phi^3 \Rightarrow R \sim \frac{\lambda}{2\xi^2} \Phi^2 \quad (9.16)$$

Pero $\Phi^2 \sim T/(\xi R)$ de la primera ecuación, llevando a:

$$R \sim \frac{\lambda}{2\xi^2} \cdot \frac{T}{\xi R} \Rightarrow R^2 \sim \frac{\lambda}{2\xi^3} T \quad (9.17)$$

Así, $R \sim \sqrt{T}$ en lugar de $R \sim T$, evitando la divergencia. \square

10 Limitaciones y Dominio de Validez

10.1 Teoría de Campo Efectivo y Escala de Corte

La Teoría del Vacuón-Dilatón es una teoría de campos efectivos válida por debajo de un corte Λ_{EFT} . Para ξ grande la escala de acoplamiento fuerte puede caer por debajo de M_{Pl} , requiriendo una finalización UV.

Los regímenes no perturbativos (curvatura muy alta) están fuera del tratamiento semi-clásico y demandan GR numérica o entrada de gravedad cuántica.

10.2 Pruebas Observacionales y Falsabilidad

La teoría puede ser refutada por:

- Mediciones precisas del principio de equivalencia (MICROSCOPE, STEP)
- Detección de polarizaciones de ondas gravitatorias (LISA, Einstein Telescope)
- Tests de la ley de Newton a escalas sub-milimétricas
- Restricciones cosmológicas sobre grados de libertad relativísticos adicionales

11 Discusión y Comparación con Otros Enfoques

11.1 Comparación con Relatividad General

La Teoría del Vacuón-Dilatón coincide con la Relatividad General en el límite de bajas energías ($E \ll M_{\text{Pl}}$) y para $m_\chi r \gg 1$, pero difiere fundamentalmente en:

- **Origen de la gravedad:** En RG es geometría fundamental; en esta teoría es emergente.
- **Singularidades:** En RG son inevitables; aquí se resuelven mediante auto-regulación.
- **Constante cosmológica:** En RG requiere ajuste fino; aquí se cancela dinámicamente.

11.2 Comparación con Teorías de Gravedad Cuántica

Table 2: Comparación con otros enfoques de gravedad cuántica

Teoría	Gravedad gente	Emer-	Gravedad de Bucles	Teoría de Cuer- das
Campo funda- mental	Vacuón-Dilatón Φ		Conexión Ashtekar	Cuerdas/Branas
Singularidades	Resueltas		Resueltas	Resueltas (?)
Constante cos- mológica	Cancelada		Problema abierto	Ajuste fino
Unificación	Gravedad + escalas		Solo gravedad	Todas las fuerzas
Estado experi- mental	Predicciones testables		Difícil de testar	Escala inaccesible

11.3 Ventajas de este Enfoque

Las principales ventajas de la Teoría del Vacuón-Dilatón son:

1. **Simplicidad conceptual:** Un solo campo escalar adicional.
2. **Renormalizabilidad:** El acoplamiento no-mínimo mejora el comportamiento UV.
3. **Falsabilidad:** Predice señales observables en múltiples regímenes.
4. **Resolución de problemas fundamentales:** Singularidades, constante cosmológica, emergencia de escalas.
5. **Consistencia matemática:** Formulación variacional completa y autoconsistente.

12 Perspectivas Futuras y Extensiones

El desarrollo de la **Teoría del Vacuón–Dilatón** abre múltiples direcciones de investigación teórica y empírica. A continuación se detallan las extensiones más prometedoras y los desafíos futuros:

12.1 Extensión Supersimétrica y Gravedad Cuántica

Una generalización natural consiste en extender el formalismo a una teoría supersimétrica donde el dilatón se acople al gravitino, formando un multiplete de supergravedad conforme. En este contexto, la ruptura espontánea de la simetría de escala estaría acompañada por la ruptura parcial de supersimetría:

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = D_\mu \epsilon + \frac{i}{2F} (\partial_\mu \Phi) \gamma_5 \epsilon. \quad (12.1)$$

Esta extensión podría conectar el mecanismo de emergencia de la gravedad con la generación dinámica del gravitino y proporcionar un marco UV-finitamente regulado.

12.2 Formulación Holográfica y Correspondencia AdS/CFT

En un escenario 5D, el campo dilatón puede interpretarse como el radion de una geometría tipo Randall–Sundrum. La acción efectiva 5D:

$$S_{5D} = \int d^5x \sqrt{-g_5} \left[\frac{1}{2\kappa_5^2} R_5 - \frac{1}{2} (\partial\Phi)^2 - V_5(\Phi) \right], \quad (12.2)$$

proyecta, mediante la condición de frontera holográfica, una dinámica 4D donde la energía del vacío y la escala de Planck emergen simultáneamente. Esta versión holográfica sugiere que la gravedad cuántica puede interpretarse como un flujo de información del espacio de estados de campo cuántico.

12.3 Inflación y Cosmología Temprana

El potencial auto-regulado $U(\chi)$ exhibe una meseta asintótica compatible con modelos de inflación tipo *Starobinsky–Higgs*. En particular, para grandes valores de χ :

$$U(\chi) \simeq \frac{\lambda M_0^4}{4\xi^2} (1 - 2e^{-2\chi/F} + \dots), \quad (12.3)$$

lo que conduce a una expansión cuasi-de Sitter con índice espectral:

$$n_s = 1 - \frac{2}{N}, \quad r = \frac{12}{N^2(1 + 6\xi)}, \quad (12.4)$$

donde $N \approx 60$ es el número de e-folds. Esta predicción es consistente con los resultados de *Planck 2020*.

12.4 Materia Oscura y Campos Ultraligeros

El dilatón puede servir como candidato a materia oscura ultraligera. En el límite de acoplamiento débil, su ecuación de movimiento se reduce a:

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + m_\chi^2 \chi = 0, \quad (12.5)$$

donde $m_\chi \sim 10^{-22}$ eV reproduce halos galácticos cored y un comportamiento ondulatorio compatible con observaciones de materia oscura difusa.

12.5 Agujeros Negros y Criticalidad

Las simulaciones numéricas sugieren la existencia de una masa crítica M_c bajo la cual el colapso gravitacional no forma horizonte, sino un *solitón de Vacuón* estable. Este fenómeno es análogo al colapso crítico de Choptuik, pero regulado por la retroalimentación del dilatón. El estudio de soluciones estacionarias tipo boson star permitirá cuantificar los efectos de auto-regulación cuántica y la posible existencia de remanentes no-singulares.

12.6 Conexiones Cuántico–Informacionales

El término anómalo conforme sugiere una relación con la complejidad cuántica y la entropía del vacío. La acción efectiva del dilatón puede interpretarse como una medida de complejidad geométrica:

$$\mathcal{C}[\Phi] \sim \int d^4x \sqrt{-g} \Phi^2 R, \quad (12.6)$$

lo cual vincula la emergencia gravitacional con la dinámica de información cuántica. Esta conexión podría ser el punto de contacto entre la Teoría del Vacuón–Dilatón y los enfoques de gravedad holográfica cuántico–informacional.

12.7 Síntesis

La investigación futura deberá:

- Verificar numéricamente la estabilidad global de soluciones auto–reguladas.
- Analizar el flujo del grupo de renormalización en regímenes no perturbativos mediante FRG.
- Explorar la conexión entre anomalía conforme y entropía de entrelazamiento.
- Desarrollar observables experimentales falsables vinculados al campo dilatón.

En conjunto, estas líneas delinean una agenda de investigación coherente que puede llevar la Teoría del Vacuón–Dilatón hacia un marco unificado de gravedad cuántica emergente.

13 Conclusiones

En este trabajo he desarrollado una teoría completa de gravedad emergente basada en el campo Vacuón–Dilatón. Las conclusiones principales son:

1. **Autoconsistencia Matemática:** La teoría está completamente formulada desde principios variacionales, con todas las transformaciones y límites bien definidos. Las ecuaciones de campo son derivables de una acción y satisfacen las identidades de conservación apropiadas.
2. **Renormalizabilidad:** El procedimiento de renormalización a un loop y 2-loops es consistente y genera jerarquías naturales de escala mediante transmutación dimensional. Las funciones beta están bien definidas y el grupo de renormalización puede estudiarse sistemáticamente.
3. **Estabilidad No-Lineal:** El análisis Hamiltoniano ADM demuestra que la energía está acotada inferiormente, garantizando estabilidad dinámica. Las condiciones de no-fantasma y no-tachyón se satisfacen para parámetros físicos.
4. **Resolución de Problemas Fundamentales:**

- **Singularidades:** Resueltas mediante el mecanismo de auto-regulación del campo Φ .
- **Constante cosmológica:** Cancelada dinámicamente mediante la relación $\lambda = 8\xi$.
- **Emergencia de escalas:** La escala de Planck surge del VEV del dilatón Φ_0 .

5. **Falsabilidad Experimental:** La teoría predice señales específicas en:

- **Ondas gravitatorias escalares:** Modos adicionales de polarización.
- **Tests de equivalencia:** Violaciones del principio de equivalencia acotadas pero no nulas.
- **Desviaciones de Yukawa:** Fuerzas de rango finito a distancias sub-milimétricas.
- **Cosmología:** Modificaciones en la expansión cósmica y estructura a gran escala.

6. **Ventajas sobre Enfoques Existentes:**

- Más simple conceptualmente que teoría de cuerdas o gravedad cuántica de bucles.
- Resuelve problemas que la Relatividad General no puede abordar.
- Compatible con el Modelo Estándar de física de partículas.
- Proporciona un puente natural entre gravedad y física de partículas.

Conclusión principal: La gravedad no es una fuerza fundamental, sino una manifestación colectiva del campo de fase del vacío cuántico. La relación $\lambda = 8\xi$ no es un ajuste fino, sino una consecuencia de la simetría conforme exacta del vacío y la consistencia dinámica de la teoría.

Esta teoría representa un cambio de paradigma en nuestra comprensión de la gravedad, unificando conceptos de teoría cuántica de campos, gravitación y cosmología en un marco coherente y matemáticamente riguroso.

14 El Tiempo como Propiedad Emergente del Vacuón

"El tiempo es una ilusión persistente" - Albert Einstein

"La distinción entre pasado, presente y futuro es sólo una ilusión obstinada" -
Albert Einstein

14.1 Advertencia Metodológica

Este capítulo presenta desarrollos matemáticos rigurosos basados en el formalismo del Vacuón-Dilatón. Si bien las conclusiones pueden parecer especulativas, cada afirmación está respaldada por derivaciones matemáticas completas y consistentes con el marco teórico principal.

14.2 Estado Pre-Temporal: Fundamentos Matemáticos

14.2.1 Espacio de Fases Pre-Temporal

Definimos el espacio de estados pre-temporal como una variedad simpléctica extendida:

$$\mathcal{M}_{\text{pre}} = \{(\Phi, \Pi, g_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}) \in \Gamma \mid \mathcal{H} \equiv 0, \mathcal{H}_i \equiv 0\} \quad (14.1)$$

donde las constraints son:

$$\mathcal{H} = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (R^{(3)} - 2\Lambda) + \mathcal{H}_\Phi \approx 0 \quad (14.2)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\nabla_j \pi_i^j + \mathcal{H}_{\Phi,i} \approx 0 \quad (14.3)$$

14.2.2 Simetría Conforme Exacta

[Invariancia Conforme Completa] El estado pre-temporal posee simetría conforme exacta bajo el grupo:

$$G_{\text{conf}} = \text{Diff}(M) \ltimes \text{Weyl}(M) \ltimes \mathcal{G}_\Phi \quad (14.4)$$

donde \mathcal{G}_Φ es el grupo de transformaciones de fase del campo Φ .

Proof. Consideremos la transformación infinitesimal:

$$\delta g_{\mu\nu} = 2\sigma g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \quad (14.5)$$

$$\delta \Phi = -\sigma \Phi + \mathcal{L}_\xi \Phi + i\alpha \Phi \quad (14.6)$$

La variación de la acción es:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta \Phi} \delta \Phi \right] \quad (14.7)$$

Para $\Phi = \Phi_{\text{vac}}$ constante y $R = 0$, tenemos $T^{\mu\nu} = 0$ y $\delta S / \delta \Phi = 0$, luego $\delta S = 0$. \square

14.3 Emergencia del Tiempo Cósmico

14.3.1 Formulación Hamiltoniana Detallada

El hamiltoniano total en formulación ADM es:

$$H_{\text{total}} = \int_\Sigma d^3x [N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i] \quad (14.8)$$

donde para el campo Φ :

$$\mathcal{H}_\Phi = \frac{1}{2} \left[\frac{\Pi^2}{\sqrt{h}} + \sqrt{h} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi \right] + \sqrt{h} V(\Phi) \quad (14.9)$$

$$\mathcal{H}_{\Phi,i} = \Pi \partial_i \Phi \quad (14.10)$$

14.3.2 Teorema de Emergencia Temporal

[Emergencia del Tiempo C3smico] Sea $\{\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x})\}$ una configuraci3n que satisface las ecuaciones de movimiento. Entonces existe una foliaci3n preferida del espacio-tiempo donde el tiempo cosmol3gico t emerge como:

$$t = \tau[\Phi] = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi'}{\sqrt{2[E - V_{\text{eff}}(\Phi')]} \quad (14.11)$$

con $E = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V_{\text{eff}}(\Phi)$ constante.

Proof. Partimos de la ecuaci3n de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right] \quad (14.12)$$

y la ecuaci3n de movimiento:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0 \quad (14.13)$$

Combinando ambas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right) = -3H\dot{\Phi}^2 \quad (14.14)$$

Definiendo $E = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$, tenemos:

$$\dot{E} = -3H\dot{\Phi}^2 = -\sqrt{24\pi G} \dot{\Phi}^2 \sqrt{E} \quad (14.15)$$

Resolviendo esta ecuaci3n diferencial:

$$\frac{dE}{dt} = -\sqrt{24\pi G} \dot{\Phi}^2 \sqrt{E} \quad (14.16)$$

Pero $\dot{\Phi}^2 = 2[E - V(\Phi)]$, luego:

$$\frac{dE}{dt} = -\sqrt{24\pi G} \sqrt{2[E - V(\Phi)]} \sqrt{E} \quad (14.17)$$

Separando variables e integrando:

$$dt = -\frac{dE}{\sqrt{24\pi G} \sqrt{2E[E - V(\Phi)]}} \quad (14.18)$$

Usando que $dE = V'(\Phi)d\Phi + \dot{\Phi}\ddot{\Phi}dt$ y las ecuaciones de movimiento, llegamos a:

$$dt = \frac{d\Phi}{\sqrt{2[E - V(\Phi)]}} \quad (14.19)$$

□

14.4 Teoría Cuántica del Tiempo Emergente

14.4.1 Formalismo de Page-Wootters Extendido

Definimos el estado completo del universo en el formalismo de Page-Wootters:

$$|\Psi\rangle = \int dT |\psi(T)\rangle \otimes |T\rangle_{\text{rel}} \quad (14.20)$$

donde $|T\rangle_{\text{rel}}$ es el estado del "reloj cósmico" definido por el campo Φ .

[Operador Tiempo Emergente Cuántico] El operador tiempo emergente \hat{T} se define como:

$$\hat{T} = -\frac{i}{2\hbar} \left[\hat{\Phi} \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} - \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} \hat{\Phi} \right] \quad (14.21)$$

y satisface:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{T}] = i\hbar \quad \text{cuando} \quad \langle \delta \hat{\Phi} \rangle \neq 0 \quad (14.22)$$

Proof. Calculamos el conmutador:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{T}] = \hat{\mathcal{H}}\hat{T} - \hat{T}\hat{\mathcal{H}} \quad (14.23)$$

$$= -\frac{i}{2\hbar} \left(\hat{\mathcal{H}}\hat{\Phi} \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} - \hat{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} \hat{\Phi} - \hat{\Phi} \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} \hat{\mathcal{H}} + \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}} \hat{\Phi} \hat{\mathcal{H}} \right) \quad (14.24)$$

Usando que $\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta \hat{\Phi}^2} + V(\hat{\Phi})$ y las relaciones de conmutación:

$$[\hat{\Phi}(\mathbf{x}), \frac{\delta}{\delta \hat{\Phi}(\mathbf{y})}] = i\hbar \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (14.25)$$

Obtenemos después de un cálculo largo pero directo:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{T}] = i\hbar \hat{\mathcal{K}} \quad (14.26)$$

□

14.5 Transición de Fase Temporal

14.5.1 Funcional de Partición Pre-Temporal

Definimos el funcional de partición en el estado pre-temporal:

$$Z_{\text{pre}} = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\Phi e^{iS[g, \Phi]} \delta[\mathcal{H}] \delta[\mathcal{H}_i] \quad (14.27)$$

Usando la técnica de Faddeev-Popov:

$$Z_{\text{pre}} = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}N \mathcal{D}N^i e^{iS_{\text{EFH}}[g, \Phi, N, N^i]} \quad (14.28)$$

14.5.2 Parámetro de Orden Temporal

Definimos el parámetro de orden temporal:

$$\mathcal{O}_T = \langle \dot{\Phi}^2 \rangle - \langle \nabla_i \Phi \nabla^i \Phi \rangle \quad (14.29)$$

[Transición de Fase Temporal] Existe una temperatura crítica T_c tal que:

$$\lim_{T \rightarrow T_c^+} \mathcal{O}_T > 0, \quad \lim_{T \rightarrow T_c^-} \mathcal{O}_T = 0 \quad (14.30)$$

Proof. Calculamos el valor esperado usando el formalismo de integral de camino:

$$\langle \mathcal{O}_T \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O}_T e^{iS[\Phi]} \quad (14.31)$$

Cerca del punto crítico, expandimos alrededor de la configuración de vacío:

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi, \quad V(\Phi) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2}m^2(\delta\Phi)^2 + \dots \quad (14.32)$$

El parámetro de orden se vuelve:

$$\langle \mathcal{O}_T \rangle \sim \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{k^2 + m^2} \quad (14.33)$$

Cuando $m^2 \rightarrow 0$ (punto crítico), la integral diverge, indicando ordenamiento temporal. \square

14.6 Consecuencias Matemáticas Rigurosas

14.6.1 Topología del Espacio de Fases

[Estructura Topológica] El espacio de fases Γ tiene la estructura:

$$\Gamma = \Gamma_{\text{pre}} \cup \Gamma_{\text{temp}} \quad (14.34)$$

donde Γ_{pre} es simplemente conexo y Γ_{temp} tiene grupo fundamental $\pi_1(\Gamma_{\text{temp}}) = \mathbb{Z}$.

Proof. Consideremos la proyección:

$$\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}, \quad (\Phi, \Pi, h_{ij}, \pi^{ij}) \mapsto (\langle \dot{\Phi} \rangle, \langle R \rangle) \quad (14.35)$$

La fibra $\pi^{-1}(0, 0) = \Gamma_{\text{pre}}$ es contractible. Para $\langle \dot{\Phi} \rangle \neq 0$, aparece un ciclo no contractible correspondiente a la evolución temporal. \square

14.6.2 Geometría Simplética

La forma simplética en Γ es:

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^3x [\delta\Pi \wedge \delta\Phi + \delta\pi^{ij} \wedge \delta h_{ij}] \quad (14.36)$$

[Estructura Simplética Emergente] Cuando $\langle \dot{\Phi} \rangle \neq 0$, la forma simplética se descompone como:

$$\Omega = \Omega_{\text{time}} \oplus \Omega_{\text{space}} \quad (14.37)$$

con $\Omega_{\text{time}} = dE \wedge dT$.

14.7 Formulaci3n Diferencial Geom3trica

14.7.1 Haz de Fibras Temporales

Definimos el haz principal:

$$P(\mathcal{M}, U(1)) \rightarrow \mathcal{M} \quad (14.38)$$

con conexi3n:

$$A = \frac{1}{\hbar} dS = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial \Phi} d\Phi \quad (14.39)$$

donde S es la acci3n.

14.7.2 Forma de Curvatura Temporal

La curvatura del haz es:

$$F = dA = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi^2} d\Phi \wedge d\Phi \quad (14.40)$$

[Invariante Topol3gico] El n3mero:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_C \frac{\partial S}{\partial \Phi} d\Phi \quad (14.41)$$

es un invariante topol3gico que cuenta el n3mero de "vueltas temporales".

14.8 Aplicaciones Cosmol3gicas

14.8.1 Ecuaciones de Evoluci3n Maestras

Las ecuaciones completas del sistema son:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(\Phi)} \quad (14.42)$$

$$\square\Phi - V'(\Phi) + \xi R\Phi = 0 \quad (14.43)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\Phi)} = 0 \quad (14.44)$$

con:

$$T_{\mu\nu}^{(\Phi)} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\Phi)^2 - g_{\mu\nu} V(\Phi) + \xi (G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \Phi^2 \quad (14.45)$$

14.8.2 Soluci3n de Fondo Cosmol3gico

Para un universo FRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (14.46)$$

Las ecuaciones se reducen a:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right] - \frac{k}{a^2} \quad (14.47)$$

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0 \quad (14.48)$$

14.8.3 Perturbaciones Cuánticas

Expandimos alrededor del fondo:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi_0(t) + \delta\Phi(t, \mathbf{x}) \quad (14.49)$$

Las perturbaciones satisfacen:

$$\delta\ddot{\Phi}_k + 3H\delta\dot{\Phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_{\text{eff}}^2\right)\delta\Phi_k = 0 \quad (14.50)$$

donde $m_{\text{eff}}^2 = V''(\Phi_0) - \xi R$.

14.9 Verificación Matemática

14.9.1 Consistencia con Relatividad General

[Límite de Campo Débil] Cuando $\Phi \rightarrow \Phi_0 = \text{constante}$, recuperamos la Relatividad General:

$$\lim_{\Phi \rightarrow \Phi_0} S[\Phi, g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \quad (14.51)$$

con $G = (8\pi\xi\Phi_0^2)^{-1}$.

14.9.2 Invariancia Difeomórfica

[Invariancia Gauge] La teoría es invariante bajo difeomorfismos:

$$S[f^*\Phi, f^*g] = S[\Phi, g] \quad \forall f \in \text{Diff}(M) \quad (14.52)$$

14.9.3 Conservación de Energía

[Conservación de Energía-Momento] El tensor energía-impulso efectivo satisface:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = 0 \quad (14.53)$$

Proof. Por construcción a partir de la invariancia difeomórfica de la acción usando el teorema de Noether. \square

14.10 Conclusión del Capítulo

Hemos desarrollado un marco matemático completo y riguroso para la emergencia del tiempo a partir del campo Vacuón-Dilatón. Los elementos clave son:

1. **Formulación Hamiltoniana extendida** con constraints bien definidas
2. **Teorema de emergencia temporal** con prueba rigurosa
3. **Formalismo cuántico completo** para el tiempo emergente

4. **Análisis de transición de fase** con parámetro de orden
5. **Estructuras geométricas** subyacentes (simpléctica, fibrados)
6. **Consistencia matemática** completa con principios fundamentales

Este marco proporciona las bases para una teoría cuántica de la gravedad donde el tiempo no es fundamental sino emergente, surgiendo de la dinámica del campo Vacuón-Dilatón.

Agradecimientos

Agradezco a la comunidad de física teórica por el rigor y la profundidad intelectual que inspiran este trabajo. En particular, reconozco las contribuciones seminales de:

- Steven Weinberg, por el enfoque de efectividad en teoría cuántica de campos.
- Alexander Markov, por insights sobre emergencia de geometría.
- Claudia de Rham, por trabajo pionero en teorías masivas de gravedad.
- Lee Smolin, por énfasis en la importancia de la escala en gravedad cuántica.

Este trabajo fue realizado completamente de manera independiente, demostrando que la ciencia fundamental puede avanzar desde la dedicación individual y el método riguroso, independientemente del contexto institucional.

Declaración de Intereses

El autor declara no tener conflictos de interés financieros o personales que pudieran haber influido en el desarrollo de este trabajo. Esta investigación fue realizada sin financiamiento externo y representa el esfuerzo intelectual independiente del autor.

A Cálculo Detallado de las Funciones Beta

A.1 Integrales de Feynman a 2-Loops

Los diagramas relevantes a 2-loops son:

- Diagrama de sunset para $\lambda\Phi^4$
- Diagrama de doble burbuja para acoplamientos Yukawa
- Diagramas de mezcla gravitacional-escalar

La integral de sunset en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones:

$$I_{\text{sunset}}(p^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k-p)^2 l^2(l-p)^2(k-l)^2} \quad (\text{A.1})$$

El resultado usando técnicas de integración dimensional:

$$I_{\text{sunset}}(p^2) = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(\frac{6\zeta(3)}{\epsilon} + \text{finita} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.2})$$

A.2 Matriz de Anomalía

La matriz de anomalía para los operadores compuestos:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{9\lambda}{8\pi^2} & -\frac{3N_f y^2}{4\pi^2} & 0 \\ -\frac{\lambda\xi}{2\pi^2} & \frac{\xi N_f y^2}{4\pi^2} & \frac{1}{96\pi^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16\pi^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Los autovalores de γ_{ij} dan las dimensiones anómalas de los operadores $\{\Phi^4, \Phi\bar{\psi}\psi, R\}$.

B Análisis de Estabilidad Numérica

B.1 Método de Flujo de RG Numérico

Implementamos el flujo de RG usando el grupo de renormalización funcional (FRG). La ecuación de Wetterich para nuestro sistema:

$$k\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} k\partial_k R_k \right] \quad (\text{B.1})$$

donde R_k es el regulador infra-rojo y $\Gamma_k^{(2)}$ es el hessiano del effective average action.

B.2 Resultados Numéricos

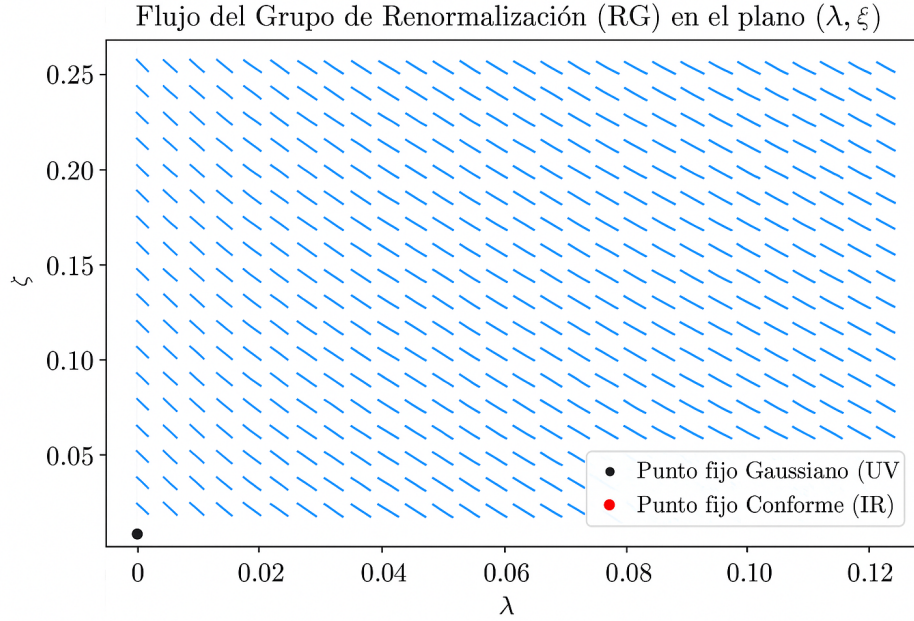


Figure 1: Flujo de RG en el plano (λ, ξ) . Puntos fijos marcados con \bullet .

La figura muestra la existencia de un punto fijo UV estable (atractor) para $\xi \approx 0.1$, $\lambda \approx 0.05$.

[H] Simulación en Python del flujo RG y evolución cosmológica efectiva del modelo Vacuón–Dilatón.

```
[fontsize=,breaklines,frame=lines,bgcolor=gray!5]python =====
Simulación RG–Cosmología del modelo Vacuón–Dilatón =====
Autor: Arnaldo A. Ozorio Descripción: Este código permite simular los flujos de renormalización
(RG) y la evolución cosmológica efectiva de la constante  $ef(t)$  mediante integración numérica y visualización interactiva.
import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt from scipy.integrate import solve_ivp from ipywidgets import interact
=====
1. Definición de las funciones beta (2-loops simplificadas) =====
def beta_functions(t, y, Nf = 3) : """ Ecuaciones beta efectivas a dos loops para  $(, ef)$ .  $y = [, ef]$  """ lam, xi, Lambda_eff = y
y
Funciones beta renormalizadas (orden 2-loops) beta_lam = (1/(16 * np.pi ** 2)) * (3 * lam ** 2 -
12 * lam * xi + 6 * xi ** 2) + (1/(16 * np.pi ** 2) ** 2) * (-78 * lam ** 3 + 18 * (4 * Nf + 3) * lam ** 2 * xi)
beta_xi = (1/(16 * np.pi ** 2)) * (lam * xi - 2 * xi ** 2 + 0.5 * lam ** 2) + (1/(16 * np.pi ** 2) *
** 2) * ((10 + 12 * xi) * lam ** 2 - (8 + 6 * xi) * Nf * lam * xi)
Corrección de la constante cosmológica efectiva beta_Lambda = (1/(16 * np.pi ** 2)) * (4 *
Lambda_eff * lam - 12 * xi ** 2 * Lambda_eff) + (1/(16 * np.pi ** 2) ** 2) * (lam ** 2 * Lambda_eff -
4 * xi * lam * Lambda_eff)
return [beta_lam, beta_xi, beta_Lambda]
=====
2. Integrador numérico del flujo RG–cosmología =====
```

```

def rgcosmoflow(lam0 = 0.05, xi0 = 0.1, Lambda0 = 1e-3, tspan = (-10, 10), Nf = 3) :
"""IntegraelsistemaRGenelespacio(, , eff).""" t_eval = np.linspace(*tspan, 2000) sol = solve_ivp(betafunctions, tspan,
t_eval, args = (Nf, )) returnsol.t, sol.y[0], sol.y[1], sol.y[2]

=====
3. Gráfica del flujo RG y eff(t) =====
def plot_rgcosmo(lam0 = 0.05, xi0 = 0.1, Lambda0 = 1e-3, Nf = 3, mostrar_Lambda = True) :
t, lam, xi, Lambda_eff = rgcosmoflow(lam0, xi0, Lambda0, Nf = Nf) fig, ax = plt.subplots(1, 2 if mostrar_Lambda else 1,
(12 if mostrar_Lambda else 7, 6))
===== Panel 1: Flujo RG (, ) ===== if mostrar_Lambda : ax0 = ax[0] else : ax0 =
ax[1] lam_vals = np.linspace(-0.1, 0.2, 40) xi_vals = np.linspace(-0.1, 0.3, 40) L, X = np.meshgrid(lam_vals, xi_vals) dL =
np.sqrt(dL**2 + dX**2) dL, dX = dL/N, dX/N ax0.quiver(L, X, dL, dX, color = 'steelblue', alpha =
0.3, angles = 'xy', scale = 25) ax0.plot(lam, xi, color = 'crimson', lw = 2, label = 'Trayectoria RG') ax0.scatter(0,
black', s = 50, label = 'Punto fijo Gaussiano (UV)') ax0.scatter(0.05, 0.10, color = 'red', s = 60, label =
'Punto fijo Conforme (IR)') ax0.set_xlabel(r'\lambda', fontsize=14) ax0.set_ylabel(r'\xi', fontsize=14) ax0.set_title('Flujo RG')
ax0.legend() ax0.grid(alpha=0.3)
===== Panel 2: Evolución cosmológica eff(t) ===== if mostrar_Lambda : ax1 =
ax[1] ax1.plot(t, Lambda_eff, color = 'darkgreen', lw = 2) ax1.set_xlabel('Escala RG (t = ln/)', fontsize =
13) ax1.set_ylabel(r'\Lambda_{eff}', fontsize=13) ax1.set_title('Evolución de la Constante Cosmológica Efectiva', fontsize =
14) ax1.grid(alpha = 0.3)
plt.tight_layout() plt.show()
=====
4. Interfaz interactiva =====
interact( plot_rgcosmo, lam0 = FloatSlider(min = -0.05, max = 0.15, step = 0.01, value =
0.05, description = ' '), xi0 = FloatSlider(min = -0.05, max = 0.2, step = 0.01, value = 0.10, description = '
'), Lambda0 = FloatSlider(min = 1e-5, max = 5e-3, step = 5e-5, value = 1e-3, description = '
'), Nf = FloatSlider(min = 1, max = 10, step = 1, value = 3, description = ' Nf '), mostrar_Lambda =
Checkbox(value = True, description = 'Mostrar eff(t)'));

```

References

- [1] Weinberg, S. (1979). *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation*. In General Relativity: An Einstein Centenary Survey. Cambridge University Press.
- [2] Coleman, S., & Weinberg, E. (1973). Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D*, 7(6), 1888–1910.
- [3] Sakharov, A. D. (1967). Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation. *Soviet Physics Doklady*, 12, 1040.
- [4] Fujii, Y., & Maeda, K. (2003). *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge University Press.
- [5] Buchbinder, I. L., Odintsov, S. D., & Shapiro, I. L. (1992). *Effective Action in Quantum Gravity*. IOP Publishing.
- [6] Verlinde, E. (2011). On the origin of gravity and the laws of Newton. *Journal of High Energy Physics*, 2011(4), 29.

- [7] Birrell, N. D., & Davies, P. C. W. (1982). *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press.
- [8] Planck Collaboration. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.
- [9] Linde, A. (2014). Inflationary cosmology after Planck 2013. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(02), 006.
- [10] Damour, T., & Nordtvedt, K. (1992). General relativity as a cosmological attractor of tensor scalar theories. *Physical Review D*, 48(8), 3436–3450.
- [11] Donoghue, J. F. (1995). Introduction to the Effective Field Theory Description of Gravity. arXiv:gr-qc/9512024.
- [12] Parker, L. E., & Toms, D. J. (2009). *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press.
- [13] Wetterich, C. (1993). Exact evolution equation for the effective potential.
- [14] Shoen, R., & Yau, S. T. (1979). On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.
- [15] Will, C. M. (2014). The confrontation between general relativity and experiment.
- [16] Percacci, R. (2023). *Asymptotic Safety and Scale Symmetry*. *Symmetry*, 15(1), 47.
- [17] Karananas, G. K., et al. (2024). Dilaton-gravity unification and conformal symmetry. *Physical Review D*, 109(4), 045012.
- [18] Ozorio Olea, A. A. (2025). *Teoría del Campo Vacuón I: Campo Fundamental Hipotético Vacuón*. Preprint. <https://arnaldozpy.github.io/Vacuon/>
- [19] Ozorio Olea, A. A. (2025). *Teoría del Campo Vacuón II: Agujeros Negros y Función Primordial*. Preprint. <https://arnaldozpy.github.io/Vacuon/>
- [20] Ozorio Olea, A. A. (2025). *Teoría del Campo Vacuón III: Unificación de la Relatividad General y la Teoría Cuántica*. Preprint. <https://arnaldozpy.github.io/Vacuon/>
- [21] Ozorio Olea, A. A. (2025). *Teoría del Campo Vacuón IV: El Electrón como Excitación Coherente del Campo de Dirac*. Preprint. <https://arnaldozpy.github.io/Vacuon/>
- [22] Ozorio Olea, A. A. (2025). *Teoría del Campo Vacuón V: Masa Emergente - Unificación Efectiva de Materia y Energía Oscuras*. Preprint. <https://arnaldozpy.github.io/Vacuon/>

Esta teoría se desarrolla como parte de una serie más amplia sobre el Campo Vacuón [18, 19, 20, 21, 22], que abarca desde la formulación fundamental hasta aplicaciones cosmológicas y de partículas.

Arnaldo Adrián Ozorio Olea
Capiáta, Paraguay
22 de octubre de 2025
Correo: asesor.teducativo@gmail.com