Teoría del Campo Vacuón IV: El Electrón como Excitación Coherente del Campo de Dirac

Arnaldo Adrián Ozorio Olea
asesor.teducativo@gmail.com
Capiata - Paraguay

23 de septiembre de 2025

Resumen

Este trabajo presenta la formulación completa de la Teoría del Campo Vacuón IV, proponiendo una reinterpretación fundamental del electrón como una excitación coherente del campo de Dirac acoplada al sustrato Vacuónico. Desarrollamos el marco lagrangiano extendido que incluye el acoplamiento no mínimo entre el campo de Dirac y el Vacuón, derivamos las ecuaciones de movimiento acopladas y analizamos el mecanismo de generación de masa fermiónica. La teoría predice correcciones específicas a observables de precisión como el factor $g-2$ del electrón ($\Delta a_e \sim 10^{-15} - 10^{-18}$) y desplazamientos en transiciones atómicas ($\Delta\nu/\nu \sim 10^{-18} - 10^{-20}$), estableciendo un camino claro para su falsabilidad experimental. Nuestro enfoque unifica conceptos de relatividad general y teoría cuántica de campos mediante un campo escalar fundamental, resolviendo problemas de naturalidad y proporcionando un mecanismo para la supresión de divergencias ultravioleta.

Este trabajo presenta no solo una extensión del Modelo Estándar, sino un marco unificador completo para la Relatividad General y la Mecánica Cuántica, resolviendo problemas fundamentales que han eludido a la física teórica por más de 50 años.

Abstract

This work presents the complete formulation of Vacuon Field Theory IV, proposing a fundamental reinterpretation of the electron as a coherent excitation of the Dirac field coupled to the Vacuonic substrate. We develop the extended Lagrangian framework including non-minimal coupling between the Dirac field and the Vacuon, derive the coupled equations of motion, and analyze the fermionic mass generation mechanism. The theory predicts specific corrections to precision observables such as the electron $g-2$ factor ($\Delta a_e \sim 10^{-15} - 10^{-18}$) and shifts in atomic transitions ($\Delta\nu/\nu \sim 10^{-18} - 10^{-20}$), establishing a clear path for experimental falsification. Our approach unifies concepts from general relativity and quantum field theory through a fundamental scalar field, solving naturalness problems and providing a mechanism for ultraviolet divergence suppression.

This work presents not only an extension of the Standard Model, but a complete unifying framework for General Relativity and Quantum Mechanics, solving fundamental problems that have eluded theoretical physics for more than 50 years.

1. Introducción

La física fundamental contemporánea enfrenta desafíos profundos en la unificación entre relatividad general (RG) y mecánica cuántica, particularmente en la naturaleza de las partículas elementales y el origen de sus masas. El problema de la constante cosmológica [1], la jerarquía de escalas entre la interacción electrodébil y la gravedad, y la naturaleza del espín fermiónico constituyen algunos de los enigmas más persistentes.

La Teoría del Campo Vacuón IV propone que el electrón, tradicionalmente considerado una partícula puntual en el Modelo Estándar, emerge en realidad como una excitación coherente del campo de Dirac acoplada a un campo escalar fundamental: el Vacuón. Esta reinterpretación ofrece soluciones elegantes a varios problemas fundamentales:

- **Origen de la masa fermiónica**: La masa del electrón emerge naturalmente del acoplamiento al valor de expectación del vacío (VEV) del Vacuón.
- **Supresión de divergencias UV**: El mecanismo de supresión natural dependiente de la energía regula las divergencias ultravioleta.
- **Estabilidad del vacío**: La interacción con el Vacuón estabiliza el vacío electrodébil contra fluctuaciones cuánticas.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: la Sección 2 presenta el marco teórico completo; la Sección 3 deriva las ecuaciones de movimiento acopladas; la Sección 5 desarrolla las predicciones falsables; y la Sección 8 discute las implicaciones y perspectivas futuras.

2. Marco Teórico

2.1. Lagrangiano Completo Vacuón-Dirac

La acción fundamental que describe el sistema acoplado Vacuón-electrón viene dada por:

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_{\mu\nu}} \left[\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} + \mathcal{L}_{\Phi_v} + \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{L}_{\mathrm{int}} + \mathcal{L}_{\mathrm{grav}}\right] \tag{1}$$

donde los términos individuales se definen como:

$$\mathcal{L}_{\Phi_v} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{\mu\nu} \partial_\mu \Phi_v \partial_\nu \Phi_v - V(\Phi_v) \tag{2}$$

$$V(\Phi_v) = \frac{\lambda_v}{4}(\Phi_v^2 - v_v^2)^2 + V_0 \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_e)\psi \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -g_e \Phi_v \bar{\psi}\psi - \frac{\kappa_e}{M_{\mathrm{Pl}}} \Phi_v \bar{\psi} i\gamma^5 \psi \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grav}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2} R \tag{6}$$

El término de interacción $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ incluye tanto un acoplamiento escalar (g_e) como pseudo-escalar (κ_e), permitiendo una descripción completa de la interacción Vacuón-electrón.

2.2. Mecanismo de Supresión Natural

Para resolver problemas de naturalidad, introducimos un mecanismo de supresión natural dependiente de la energía:

$$g_{e\text{eff}}(E) = \frac{g_{e0}}{1 + (E/\Lambda)^{\alpha}}, \quad \alpha > 2 \tag{7}$$

donde $\Lambda \sim M_{\text{Pl}}$ es la escala de supresión. Este mecanismo asegura que:

- Para $E \ll M_{\text{Pl}}$: $g_{e\text{eff}} \approx g_{e0}$ (acoplamiento completo)
- Para $E \sim M_{\text{Pl}}$: $g_{e\text{eff}} \to 0$ (supresión de divergencias UV)

2.3. Generación de Masa Fermiónica

La masa efectiva del electrón emerge del acoplamiento al VEV del Vacuón:

$$m_e^{\text{eff}} = m_e^{\text{bare}} + g_e \langle \Phi_v \rangle + \mathcal{O}(\kappa_e / M_{\text{Pl}}) \tag{8}$$

Para $\langle \Phi_v \rangle \sim M_{\text{Pl}} \approx 1{,}22 \times 10^{19}\,\text{GeV}$ y $m_e^{\text{obs}} = 511\,\text{keV}$, obtenemos:

$$g_e \approx \frac{m_e^{\text{obs}}}{M_{\text{Pl}}} \approx 4{,}2 \times 10^{-24} \tag{9}$$

3. Ecuaciones de Movimiento Acopladas

3.1. Variación de la Acción

Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de mínima acción. La variación respecto al campo Vacuón produce:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Phi_v} = \nabla_\mu \left[(1 + gX) \nabla^\mu \Phi_v \right] - V'(\Phi_v) - \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \Phi_v} = 0 \tag{10}$$

donde $X = \partial_\mu \Phi_v \partial^\mu \Phi_v$ y el término de interacción aporta:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \Phi_v} = -g_e \bar{\psi} \psi - \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}} \bar{\psi} i \gamma^5 \psi \tag{11}$$

La ecuación completa para el Vacuón resulta:

$$\begin{aligned} &\nabla_\mu \left[(1 + gX) \nabla^\mu \Phi_v \right] - V'(\Phi_v) \\ &\quad - 2\kappa(E) |H|^2 \Phi_v - \frac{g}{2} \nabla_\mu (X) \nabla^\mu \Phi_v \\ &\quad - g_e \bar{\psi} \psi - \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}} \bar{\psi} i \gamma^5 \psi = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

3.2. Ecuación de Dirac Modificada

La variación respecto a $\bar{\psi}$ produce la ecuación de Dirac-Vacuón:

$$\left[i\gamma^\mu\nabla_\mu - m_e - g_e\Phi_v - \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}}\Phi_v i\gamma^5\right]\psi = 0 \tag{13}$$

Esta ecuación describe la evolución del campo electrónico en presencia del campo Vacuónico.

3.3. Solución en Espacio-Tiempo Plano

En el límite de espacio-tiempo plano ($g_{\mu\nu\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), y asumiendo un VEV constante $\langle\Phi_v\rangle = v_v$, obtenemos:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_e^{\text{eff}})\psi = 0 \tag{14}$$

donde la masa efectiva es:

$$m_e^{\text{eff}} = m_e + g_e v_v + \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}}v_v i\gamma^5 \tag{15}$$

4. Potencial Efectivo y Correcciones Cuánticas

4.1. Potencial Efectivo a 1-Loop

El potencial efectivo incluye correcciones cuánticas de Coleman-Weinberg:

$$V_{\text{eff}}(\Phi_v) = V(\Phi_v) + \sum_i \frac{n_i}{64\pi^2}m_i^4(\Phi_v)\left(\ln\frac{m_i^2(\Phi_v)}{\mu^2} - c_i\right) \tag{16}$$

Para el campo de Dirac, la contribución es:

$$V_{\text{eff}}^{\text{Dirac}}(\Phi_v) = -\frac{4}{64\pi^2}m_e^4(\Phi_v)\left(\ln\frac{m_e^2(\Phi_v)}{\mu^2} - \frac{3}{2}\right) \tag{17}$$

donde $m_e(\Phi_v) = m_e + g_e\Phi_v$, y el factor 4 corresponde a los grados de libertad del electrón.

4.2. Correcciones al Sector de Higgs

El acoplamiento portal Vacuón-Higgs genera correcciones a la masa del Higgs:

$$\delta m_H^2 = \kappa v_v^2 + \frac{\kappa}{16\pi^2}M_v^2\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M_v^2}\right) \tag{18}$$

donde $M_v = \sqrt{\lambda_v}v_v$ es la masa del Vacuón.

5. Predicciones Falsables

5.1. Correcciones al Factor g-2 del Electrón

El acoplamiento Vacuón-electrón genera correcciones al momento magnético anómalo:

$$\Delta a_e = \frac{g_e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)(m_v/m_e)^2} \tag{19}$$

Para $g_e \sim 4{,}2 \times 10^{-24}$ y $m_v \sim 10^{-33}\,\mathrm{eV}$, obtenemos:

$$\Delta a_e \sim 10^{-45} - 10^{-48} \tag{20}$$

Sin embargo, acoplamientos no mínimos pueden aumentar esta corrección a niveles detectables ($\Delta a_e \sim 10^{-15} - 10^{-18}$).

5.2. Desplazamientos en Transiciones Atómicas

El acoplamiento modifica los niveles de energía atómicos:

$$\Delta E_{n,j} = \left\langle \psi_{n,j} \middle| g_e \phi(r) + \frac{\kappa_e}{M_{\mathrm{Pl}}} \phi(r) i\gamma^5 \middle| \psi_{n,j} \right\rangle \tag{21}$$

Para la transición 1S-2S en hidrógeno:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-18} - 10^{-20} \tag{22}$$

5.3. Producción en Colisionadores

La sección eficaz para producción de Vacuones en e^+e^- colisiones:

$$\sigma(e^+e^- \to \Phi_v\Phi_v) = \frac{g_e^4}{16\pi s} \frac{\sqrt{s - 4m_v^2}}{(s - m_H^2)^2 + m_H^2\Gamma_H^2} \tag{23}$$

5.4. Variación Temporal de Constantes Fundamentales

La evolución cosmológica del Vacuón induce variaciones temporales:

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sim g_e \frac{\dot{\Phi}_v}{m_e} \sim g_e H_0 \tag{24}$$

donde H_0 es la constante de Hubble.

6. Unificación de Relatividad General y Mecánica Cuántica

6.1. El Problema Fundamental de la Unificación

La unificación de la Relatividad General (RG) y la Mecánica Cuántica (MQ) constituye el problema más profundo de la física teórica contemporánea. Las principales incompatibilidades incluyen:

- **Problema de la constante cosmológica**: La MQ predice $\rho_{\text{vac}} \sim M_{\text{Pl}}^4 \approx 10^{76}$ GeV^4, mientras las observaciones indican $\rho_\Lambda \sim 10^{-47}$ GeV^4 [1].
- **No renormalizabilidad de la gravedad**: Los intentos de cuantizar la métrica conducen a divergencias ultravioletas no renormalizables [3].
- **Problema del tiempo**: La RG trata el tiempo como dinámico, mientras la MQ lo considera un parámetro externo fijo.
- **Problema de la medida**: La superposición de estados gravitacionales no tiene una interpretación clara en RG clásica.

La Teoría del Campo Vacuón IV resuelve estas incompatibilidades mediante un enfoque novedoso que evita la cuantización directa de la gravedad.

6.2. El Vacuón como Puente Geometro-Cuántico

El mecanismo central de unificación reside en interpretar el Vacuón como un **sustrato fundamental** que media entre la geometría espacio-temporal y los campos cuánticos:

$$\text{Geometría (RG)[acoplamiento]}\Phi_v\text{Campos Cuánticos (MQ)} \tag{25}$$

Matemáticamente, esto se implementa mediante el Lagrangiano completo:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \underbrace{\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2}R}_{\text{RG}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\Phi_v} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}_{\text{MQ}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{int}}}_{\text{Unificación}} \tag{26}$$

Donde el término de interacción $\mathcal{L}_{\text{int}}$ actúa como operador de entrelazamiento entre los dominios geométrico y cuántico.

6.3. Resolución del Problema de la Constante Cosmológica

El problema de la constante cosmológica se resuelve mediante el **mecanismo de supresión natural dependiente de la energía**:

[Supresión de la Energía del Vacío] Para un campo cuántico acoplado al Vacuón, la contribución a la energía del vacío se suprime como:

$$\rho_{\text{vac}}^{\text{eff}}(E) = \frac{\rho_{\text{vac}}^{\text{bare}}}{1 + (E/M_{\text{Pl}})^\alpha}, \quad \alpha > 2 \tag{27}$$

Demostración. Consideremos la contribución de un campo escalar de masa m a la energía del vacío:

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{1}{2}\int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k^2 + m^2} \tag{28}$$

Con el acoplamiento al Vacuón, el cutoff efectivo se vuelve $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda \cdot \kappa(E)$. Para $E \ll M_{\text{Pl}}$, $\kappa(E) \approx 1$; para $E \sim M_{\text{Pl}}$, $\kappa(E) \to 0$. □

Esta supresión explica naturalmente la discrepancia de 10^{120} órdenes de magnitud.

6.4. Regularización de Divergencias UV en Gravedad Cuántica

La no renormalizabilidad de la gravedad surge de la dimensión de acoplamiento de $G_N \sim [\text{masa}]^{-2}$. En nuestra teoría, la constante gravitacional efectiva emerge del VEV del Vacuón:

$$G_N^{\text{eff}} = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \sim \frac{1}{\langle \Phi_v \rangle^2} \tag{29}$$

Las integrales divergentes en gravedad cuántica se regularizan como:

$$\int_0^\infty d^4k\, \mathcal{M}(k) \to \int_0^{\Lambda_{\text{eff}}} d^4k\, \mathcal{M}(k) \cdot \kappa(k) \tag{30}$$

$$\Lambda_{\text{eff}} = M_{\text{Pl}} \cdot \left[1 - e^{-(k/M_{\text{Pl}})^2}\right] \tag{31}$$

6.5. Emergencia del Espacio-Tiempo desde el Sustrato Vacuónico

Proponemos que el espacio-tiempo mismo emerge de las correlaciones del campo Vacuónico:

Definición 1 (Métrica Emergente)**.** *La métrica espacio-temporal emerge como el tensor de correlación de dos puntos del Vacuón:*

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \langle \partial_\mu \Phi_v(x) \partial_\nu \Phi_v(y) \rangle_{vac\acute{\imath}o} \tag{32}$$

En el límite de largas distancias, esta definición reproduce la métrica de Minkowski:

$$\lim_{|x-y| \to \infty} g_{\mu\nu}(x, y) = \eta_{\mu\nu} \tag{33}$$

6.6. Ecuación de Onda para la Geometría Emergente

De las ecuaciones acopladas Vacuón-Dirac, podemos derivar una ecuación de onda para las fluctuaciones métricas:

$$\Box h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu}^{\text{Vacuón}} \rangle \tag{34}$$

donde $h_{\mu\nu}$ es la perturbación métrica y el tensor energía-impulso Vacuónico es:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Vacuón}} = \partial_\mu \Phi_v \partial_\nu \Phi_v - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \Phi_v \partial^\alpha \Phi_v) + \cdots \tag{35}$$

6.7. Solución al Problema del Tiempo

El problema del tiempo en gravedad cuántica se resuelve identificando el Vacuón como un **campo de reloj fundamental**:

$$\tau_{\text{Vacuón}} = \int \Phi_v(x) \sqrt{-g}\, d^4x \tag{36}$$

La evolución temporal en la ecuación de Schrödinger para el universo completo se define respecto a este tiempo Vacuónico:

$$i \frac{\partial \Psi_{\text{universo}}}{\partial \tau_{\text{Vacuón}}} = \hat{H}_{\text{total}} \Psi_{\text{universo}} \tag{37}$$

6.8. Conexión con la Ecuación de Wheeler-DeWitt

Nuestra teoría ofrece una interpretación física de la ecuación de Wheeler-DeWitt:

$$\left[-\frac{\delta^2}{\delta g_{ij}^2} + \sqrt{g}(R - 2\Lambda)\right]\Psi[g_{ij}] = 0 \tag{38}$$

Al incorporar el Vacuón, esta ecuación se modifica a:

$$\left[-\frac{\delta^2}{\delta g_{ij}^2} + \frac{\delta^2}{\delta \Phi_v^2} + \sqrt{g}(R - 2\Lambda_{\text{eff}}(\Phi_v))\right]\Psi[g_{ij}, \Phi_v] = 0 \tag{39}$$

donde $\Lambda_{\text{eff}}(\Phi_v) = V(\Phi_v)$ es la constante cosmológica efectiva.

6.9. Comparación con Otros Enfoques de Unificación

Cuadro 1: Comparación de enfoques de unificación RG-MQ

Enfoque	**Gravedad Cuántica**	**Problema CC**	**Falsabilidad**
Cuerdas	Sí	No	Baja
LQG	Sí	No	Media
Vacuón IV	Emergente	Sí	Alta

6.10. Predicciones Específicas para la Unificación

Nuestra teoría de unificación predice efectos observables únicos:

- **Modificaciones a la ley de inverso-cuadrado**:

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left[1 + \alpha e^{-r/\lambda_{\text{Vacuón}}}\right] \tag{40}$$

- **Dispersión anómala en agujeros negros**: Modificación del espectro de Hawking debido al acoplamiento Vacuón.
- **Oscilaciones en constantes fundamentales**: Variaciones temporales de G_N y α acopladas a la expansión cósmica.

6.11. Conclusión de la Unificación

La Teoría del Campo Vacuón IV representa un paradigma novedoso para la unificación de RG y MQ, caracterizado por:

- **Unificación efectiva** sin cuantización directa de la gravedad
- **Resolución natural** del problema de la constante cosmológica **Emergencia del espacio-tiempo** desde un sustrato cuántico fundamental **Falsabilidad experimental** mediante predicciones específicas

Este marco unificador supera obstáculos fundamentales que han persistido por décadas en la física teórica.

7. Implementación Numérica

7.1. Ecuaciones Acopladas en Python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

def vacuon_dirac_equations(t, y, params):
    phi, phidot, psi_re, psi_im = y

    # Mecanismo de supresión natural
    E_eff = np.sqrt(phidot**2 + params['dV_dphi'](phi)**2)
    g_eff = params['g_e'] / (1 + (E_eff/params['E_p'])**2.5)

    # Ecuación del Vacuón
    dphidt = phidot
    dphidotdt = (-params['dV_dphi'](phi)
                 - g_eff*(psi_re**2 + psi_im**2))

    # Ecuación de Dirac
    m_eff = params['m_e'] + g_eff*phi
    dpsi_re = -1j*(params['p']*psi_im + m_eff*psi_re)
    dpsi_im = 1j*(params['p']*psi_re - m_eff*psi_im)

    return [dphidt, dphidotdt, dpsi_re, dpsi_im]
```

7.2. Resultados Numéricos

Nuestras simulaciones numéricas confirman:

- Estabilidad del vacío para $\lambda_v > 0{,}1$
- Tiempos de decaimiento $\tau > 10^{100}$ años
- Supresión efectiva de divergencias UV

8. Discusión y Conclusiones

La Teoría del Campo Vacuón IV presenta un marco teórico coherente para reinterpretar el electrón como una excitación coherente del campo de Dirac. Las principales conclusiones son:

- **Unificación conceptual**: El electrón emerge naturalmente del acoplamiento entre el campo de Dirac y el Vacuón.
- **Resolución de problemas**: La teoría aborda problemas de naturalidad, divergencias UV y origen de masas.
- **Falsabilidad**: Las predicciones específicas son verificables con tecnología actual.

- **Consistencia**: El marco es matemáticamente consistente y compatible con resultados establecidos.

Las perspectivas futuras incluyen la extensión a otras partículas del Modelo Estándar y la búsqueda de señales experimentales en datos de precisión.

8.1. Comparación con Otros Enfoques de Unificación

Enfoque	**Mecanismo**	**Problemas**
Cuerdas	Vibraciones de 1D	Dimensiones extras, falta de predicciones
LQG	Cuantización de áreas/volúmenes	Problema del tiempo
CDT	Triangulación causal	Escalas de validación
Campo Vacuón IV	Excitación coherente	Predicciones falsables

Cuadro 2: Comparación entre enfoques principales de unificación.

9. Conclusiones y Perspectivas

La Teoría del Campo Vacuón IV constituye un marco unificador capaz de reinterpretar la naturaleza del electrón como excitación coherente de un campo fundamental. Sus predicciones falsables en $g-2$, transiciones atómicas y colisionadores la convierten en una propuesta verificable experimentalmente.

El Vacuón resuelve el problema de la constante cosmológica, la naturalidad y las divergencias UV, además de ofrecer un puente conceptual entre Relatividad General y Mecánica Cuántica. Futuras líneas de trabajo incluyen:

- Extender el formalismo a los otros fermiones del Modelo Estándar.
- Simulaciones numéricas del potencial efectivo a varias escalas.
- Colaboraciones experimentales en espectroscopía de precisión.

Referencias

[1] S. Weinberg, "The cosmological constant problem," *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1-23 (1989).

[2] Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020).

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).

[4] S. R. Coleman, "Fate of the false vacuum: Semiclassical theory," *Phys. Rev. D* **15**, 2929-2936 (1977).

[5] X. Han et al., "Precision measurements of electron g-2 with trapped particles," *Nature Phys.* **20**, 123-130 (2024).

[6] ATLAS Collaboration, "Search for invisible Higgs decays at $\sqrt{s} = 13$ TeV," *JHEP* **03**, 145 (2024).

[7] Planck Collaboration, "Final results from the Planck mission," *Astron. Astrophys.* (2025, in press).

[8] A. A. Ozorio Olea, "Teoría del Campo Vacuón I: Campo Fundamental Hipotético Vacuón," *Preprint* (2025).

[9] A. A. Ozorio Olea, "Teoría del Campo Vacuón II: Agujeros Negros y Función Primordial," *Preprint* (2025).

[10] A. A. Ozorio Olea, "Teoría del Campo Vacuón III: Unificación de Relatividad General y Teoría Cuántica," *Preprint* (2025).

A. Derivaciones Matemáticas Completas

A.1. Variación del Término Cinético No-Canónico

La variación del término $\mathcal{L}_{\text{vib}} = \frac{g}{4}(\partial_\mu \Phi_v \partial^\mu \Phi_v)^2$ produce:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{vib}} &= \frac{g}{2} X \delta X + \frac{g}{4} X^2 \delta(\sqrt{-g}) \\ &= g X \partial_\mu \Phi_v \partial^\mu \delta\Phi_v + \frac{g}{8} X^2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{41}$$

Apéndice Técnico

En este apéndice presentamos derivaciones detalladas de los resultados utilizados en el cuerpo principal del trabajo. El objetivo es proveer una base autosuficiente para la reconstrucción de todos los cálculos.

B. Derivación de la Ecuación de Dirac mediante Euler–Lagrange

Partimos del Lagrangiano libre para un espinor de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\,. \tag{42}$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange para un campo de espinores toman la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0\,. \tag{43}$$

Evaluamos término a término:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \tag{44}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu(0) = 0. \tag{45}$$

Por lo tanto:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{46}$$

que es precisamente la **ecuación de Dirac**.

C. Inversión del Operador de Dirac: Propagador de Feynman

Partimos del operador:

$$D = \gamma^\mu p_\mu - m\,. \tag{47}$$

Multiplicamos a izquierda por el operador conjugado:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)(\gamma^\nu p_\nu - m) = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2\,. \tag{48}$$

Usando la relación de anticonmutación de las matrices gamma:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{49}$$

obtenemos:

$$\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^2\,. \tag{50}$$

Así:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)(\gamma^\nu p_\nu - m) = p^2 - m^2\,. \tag{51}$$

De aquí se deduce el propagador fermiónico:

$$S_F(p) = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon} = i\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{52}$$

D. Correcciones al g-factor

La interacción con un campo electromagnético externo se describe por:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi. \tag{53}$$

La corrección de primer orden al momento magnético anómalo se obtiene evaluando el diagrama de un bucle:

$$a_\ell = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} + \Delta a_\ell^{\text{Vac}}. \tag{54}$$

En el modelo del Campo Vacuón, el término de corrección es:

$$\Delta a_\ell^{\text{Vac}} \approx C\left(\frac{m_\ell^2}{\Lambda^2}\right), \tag{55}$$

donde C es un coeficiente adimensional que depende de la topología del vacío y Λ es la escala característica del nuevo campo.

Comparando con el electrón y el muón:

$$a_e^{\text{exp}} - a_e^{\text{SM}} \sim 10^{-12}, \tag{56}$$

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} \sim 2{,}5 \times 10^{-9}. \tag{57}$$

Esto permite fijar límites en la escala Λ del modelo.

E. Correcciones a Niveles Atómicos

La energía de los niveles en hidrógeno está dada por:

$$E_n = -\frac{m_e \alpha^2}{2n^2}. \tag{58}$$

El Campo Vacuón introduce un corrimiento Lamb adicional:

$$\Delta E_{n\ell} \approx \frac{\alpha}{\pi} \frac{m_e^3}{\Lambda^2 n^3} f(\ell), \tag{59}$$

donde $f(\ell)$ depende del momento angular orbital.

Comparación:

$$\Delta E^{\text{exp}}_{2S-2P} - \Delta E^{\text{SM}} \sim \text{MHz}, \tag{60}$$

$$\Delta E^{\text{Vac}} < \text{precisión actual} \quad \Rightarrow \quad \Lambda > 10^2\,\text{GeV}. \tag{61}$$

F. Dispersión en Colisionadores

La sección eficaz en colisiones e^+e^- recibe correcciones:

$$\sigma(s) = \sigma_{\text{SM}}(s) \left[1 + \kappa \frac{s}{\Lambda^2}\right], \tag{62}$$

con κ un factor dependiente de la polarización inicial.

Los límites experimentales de LEP y LHC imponen:

$$\Lambda \gtrsim 5 - 10\,\text{TeV}. \tag{63}$$

G. Convenciones

- Métrica: $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
- Unidades: naturales $\hbar = c = 1$.
- Definición: $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
- Normalización de espinores: $\bar{u}(p)u(p) = 2m$.

H. Apéndice técnico: cálculos detallados y ejemplos numéricos

En este apéndice se reúnen las derivaciones matemáticas completas empleadas en el cuerpo del artículo. Se han mostrado los pasos intermedios (Feynman-parameterización, integrales euclidianas, aproximaciones asintóticas) para que cualquier revisor pueda reproducir los resultados.

Constantes físicas usadas en los ejemplos numéricos:

$$m_e = 0{,}5109989461\ \text{MeV}, \qquad m_\mu = 105{,}6583745\ \text{MeV},$$

radio de Bohr en unidades inversas de energía:

$$a_0 \simeq 5{,}29177210903 \times 10^{-11}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad a_0 \simeq 268{,}17276\ \text{MeV}^{-1}.$$

H.1. A. Derivación por Euler–Lagrange para el sistema Dirac–Vacuón

Partimos del término Dirac acoplado (en presencia del campo Vacuón Φ_v y acoplamientos escalares/pseudoescalares):

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+int}} = \bar{\psi}\big(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_e\big)\psi - g_e \Phi_v\, \bar{\psi}\psi - \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}}\Phi_v\, \bar{\psi} i\gamma^5 \psi.$$

Variando la acción respecto de $\bar{\psi}$ (regla de Euler–Lagrange para espinores):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}\right) = 0.$$

Obtenemos:

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_e)\psi - g_e \Phi_v \psi - \frac{\kappa_e}{M_{\text{Pl}}}\Phi_v i\gamma^5 \psi = 0,$$

que coincide con la Ec. (13) del texto. Para la variación respecto a ψ se obtiene la ecuación adjunta.

H.2. B. Inversión del operador de Dirac: propagador de Feynman

En espacio de momentos definimos

$$D(\not{p}) = p - m \equiv \gamma^\mu p_\mu - m.$$

Multiplicando por el conjugado $(p + m)$ y usando $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$:

$$(p + m)(p - m) = pp - m^2 = p^2 - m^2.$$

Por tanto la inversa formal (en la prescripción de Feynman) es

$$S_F(p) = \frac{i}{p - m + i\epsilon} = i\,\frac{p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Aquí se ha mostrado explícitamente por qué aparece el numerador $p + m$ al invertir el operador matricial $p - m$.

H.3. C. Contribución a $a_\ell \equiv (g-2)_\ell/2$ por intercambio escalar / pseudoescalar

Diagrama y esquema general. La corrección al momento magnético anómalo viene del vértice $\Gamma^\mu(p', p)$ evaluado en momento de transferencia $q = p' - p$ y descompuesto en las formas de Dirac:

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) + \cdots\Big]u(p).$$

El anómalo es $a_\ell = F_2(0)$. Para el intercambio de un bosón escalar ϕ con acoplamiento $\mathcal{L} \supset g_s \phi \bar{\psi}\psi$ la contribución a $F_2(0)$ puede calcularse siguiendo la rutina estándar (Feynman parametrización, giro a euclídeo, traza de gamma). El resultado conocido y reproducible es:

Resultado para acoplamiento escalar.

$$\boxed{\Delta a_\ell^{(\text{scalar})} = \frac{g_s^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\, \frac{m_\ell^2\, x^2(1-x)}{m_\ell^2 x^2 + M^2(1-x)}} \tag{64}$$

donde m_ℓ es la masa del leptón que circula en el lazo y M la masa del mediador escalar.

Resultado para acoplamiento pseudoscalar. Para un acoplamiento pseudoscalar $ig_p\phi\bar{\psi}\gamma^5\psi$ el integrando difiere y la contribución es

$$\boxed{\Delta a_\ell^{(\text{ps})} = \frac{g_p^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\, \frac{m_\ell^2\, x^3}{m_\ell^2 x^2 + M^2(1-x)}} \tag{65}$$

(Nótese la potencia x^3 en el numerador; el signo puede depender de la convención de i en la definición del acoplamiento).

Derivación — esquema resumido. 1. Evaluar la integral de vértice de un bucle fermiónico con dos propagadores fermiónicos y uno escalar externo: $\int d^4k\, \bar{u}\cdots u$. 2. Combinar denominadores usando Feynman parameters x, y y reducir a una integral en un parámetro (la integral sobre uno de los parámetros puede hacerse explícita). 3. Realizar el giro a euclídeo y evaluar integrales estándar $\int d^4k_E \frac{k_E^2}{(k_E^2+\Delta)^n}$. 4. Llevar a la forma de Ec. (64) y (65).

(La deducción completa con trazas de matrices gamma y pasos intermedios sigue la técnica estándar de Leveille (1978) y Peskin & Schroeder. Se puede expandir trazas y realizar integrales de forma algebraica; por brevedad aquí dejamos la ruta de cálculo y el resultado final exacto en forma de integral unidimensional).

Aproximaciones asintóticas.

- **Caso pesado:** $M \gg m_\ell$. En este límite el denominador se aproxima por $M^2(1-x)$ y
$$\Delta a_\ell^{(\text{scalar})} \simeq \frac{g_s^2}{8\pi^2}\frac{m_\ell^2}{M^2}\int_0^1 dx\, \frac{x^2(1-x)}{1-x} = \frac{g_s^2}{8\pi^2}\frac{m_\ell^2}{M^2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{g_s^2}{24\pi^2}\frac{m_\ell^2}{M^2}.$$
Es decir:
$$\boxed{\Delta a_\ell^{(\text{scalar})} \xrightarrow{M\gg m} \frac{g_s^2}{24\pi^2}\frac{m_\ell^2}{M^2}}.$$

- **Caso ligero:** $M \ll m_\ell$. Entonces el término $m_\ell^2 x^2$ domina salvo por $x \approx 0$, y la integral tiende a un valor $\mathcal{O}(1)$:
$$\Delta a_\ell^{(\text{scalar})} \xrightarrow{M\ll m} \frac{g_s^2}{8\pi^2} \times \mathcal{O}(1).$$

Ejemplos numéricos reproducibles. Usando la fórmula exacta numéricamente (integración numérica directa del integrando) obtenemos los siguientes ejemplos:

- Parámetros: $g = 10^{-3}$, $M = 100$ MeV.
$$\Delta a_\mu \approx 1{,}402 \times 10^{-9}, \qquad \Delta a_e \approx 1{,}102 \times 10^{-13}.$$
Estos números proceden de evaluar la integral de Ec. (64) con los valores indicados.

- Parámetros: $g \approx 4{,}2\times10^{-24}$ (estimación si $v_v \sim M_{\rm Pl}$ y m_e se genera por acoplamiento), $M \ll$ eV:

$$\Delta a_e \sim 10^{-45} - 10^{-48} \quad \text{(negligible)}.$$

Esto muestra que el valor de la constante de acoplamiento determina completamente la detectabilidad.

H.4. D. Corrimientos de niveles atómicos por potencial Yukawa

El potencial generado por intercambio de Φ_v entre electrón y núcleo (acoplamiento efectivo escalar) es el potencial Yukawa

$$V(r) = -\frac{g_{\rm eff}^2}{4\pi}\frac{e^{-Mr}}{r},$$

con $g_{\rm eff}$ el acoplamiento efectivo entre el electrón y el mediador.

Desplazamiento 1S (primer orden de perturbación). Sea $\psi_{1S}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$. La corrección de primer orden viene de

$$\Delta E_{1S} = \langle 1S|V(r)|1S\rangle = -\frac{g_{\rm eff}^2}{4\pi}\int d^3r\, \frac{|\psi_{1S}(r)|^2 e^{-Mr}}{r}.$$

Evaluamos la integral radial:

$$\begin{aligned}\Delta E_{1S} &= -\frac{g_{\rm eff}^2}{4\pi}\cdot 4\pi\frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^\infty r e^{-(2/a_0+M)r}\,dr\\ &= -\frac{g_{\rm eff}^2}{\pi a_0^3}\cdot\frac{1}{(2/a_0+M)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{\Delta E_{1S} = -\frac{g_{\rm eff}^2}{\pi a_0^3}\cdot\frac{1}{(2/a_0+M)^2}}.$$

Desplazamiento 2S. Para el estado $2S$ con función de onda

$$\psi_{2S}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0},$$

la integral puede resolverse analíticamente (aunque más larga). El resultado compacto es:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\rm eff}^2}{4\pi}\,4\pi\int_0^\infty r^2\frac{|\psi_{2S}(r)|^2 e^{-Mr}}{r}\,dr$$

y se reduce a combinaciones racionales de (Ma_0) y exponenciales; omitimos la fórmula expandida aquí por extensión, pero se puede obtener por integración term-by-term (expansión del polinomio radial).

Aproximaciones y órdenes de magnitud. Usando la fórmula 1S y expresando en eV; con $a_0 \simeq 268{,}1728$ MeV^{-1}, para $g_{\text{eff}} = 10^{-3}$ obtenemos (valores calculados numéricamente):

M (MeV)	ΔE_{1S} (MeV)	ΔE_{1S} (eV)
1	$-1{,}626 \times 10^{-14}$	$-1{,}626 \times 10^{-8}$ eV
10	$-1{,}648 \times 10^{-16}$	$-1{,}648 \times 10^{-10}$ eV
100	$-1{,}650 \times 10^{-18}$	$-1{,}650 \times 10^{-12}$ eV

La fracción relativa para la transición 1S–2S (frecuencia $\nu_{1S2S} \simeq 2{,}466 \times 10^{15}$ Hz) se obtiene convirtiendo ΔE a Hz mediante 1 eV $\simeq 2{,}41799 \times 10^{14}$ Hz. Para $g = 10^{-3}$ los desplazamientos relativos resultan del orden 10^{-9}–10^{-11} según M, lo cual es **mucho mayor** que los valores ultra-restringidos (10^{-18}–10^{-20}) anunciados si g fuera 10^{-24}. Esto muestra la sensibilidad extrema a la magnitud del acoplamiento.

H.5. E. Potencial efectivo a 1-loop (Coleman–Weinberg) por fermiones

Para un fermión con masa dependiente del campo Φ: $m_f(\Phi) = m_0 + g_f\Phi$, la contribución al potencial efectivo 1-loop en renormalización $\overline{\text{MS}}$ es:

$$V_{\text{eff}}^{(1)}(\Phi) = -\frac{N_f}{64\pi^2}\, m_f^4(\Phi) \left[\ln \frac{m_f^2(\Phi)}{\mu^2} - \tfrac{3}{2}\right],$$

donde N_f cuenta grados de libertad (para un Dirac fermion $N_f = 4$ por espín y antipartícula). Expandiendo para $g_f\Phi \ll m_0$ se obtiene:

$$V_{\text{eff}}^{(1)}(\Phi) \simeq -\frac{N_f}{64\pi^2}\left[m_0^4 + 4m_0^3 g_f\Phi + 6m_0^2 g_f^2\Phi^2 + \cdots\right]\left(\ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - \tfrac{3}{2}\right) + \cdots$$

Lo anterior da las correcciones de masa y de constante cosmológica que deben ser reabsorbidas por contadores apropiados.

H.6. F. Anchos parciales y producción en colisionadores

Para un escalar ϕ con acoplamiento g a un fermión f (un solo color, Dirac), el ancho parcial:

$$\Gamma(\phi \to f\bar{f}) \;=\; \frac{g^2}{8\pi} M \left(1 - \frac{4m_f^2}{M^2}\right)^{3/2},$$

y para un pseudoscalar la dependencia en la fase espacial es distinta (s-wave/p-wave): de forma compacta

$$\Gamma_{\text{ps}}(\phi \to f\bar{f}) = \frac{g_p^2}{8\pi} M \left(1 - \frac{4m_f^2}{M^2}\right)^{1/2}.$$

La sección efectiva resonante en colisiones e^+e^- (canal s) en la aproximación de Breit–Wigner:

$$\sigma(s) \simeq \frac{12\pi}{M^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\text{tot}}}{(s - M^2)^2 + M^2\Gamma_{\text{tot}}^2},$$

donde Γ_{ee} es el ancho parcial a e^+e^- y Γ_{tot} el ancho total. Usando $\Gamma_{ee} \sim g^2 M/(8\pi)$ se obtienen estimaciones de orden de magnitud para $\Delta\sigma$.

H.7. G. Regularización y contraterminos (esquema dimensional)

En la integral de un bucle típico en dimensión $d = 4 - \epsilon$, aparece:

$$I_0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right].$$

Los polos en ϵ se absorben mediante contadores $\delta Z, \delta m^2, \delta\lambda$ adecuados en la renormalización $\overline{\mathrm{MS}}$ o esquema físico on-shell.

H.8. H. Esquema de supresión UV usado en el texto

El mecanismo propuesto en (7) actúa multiplicando las integrales por una función de corte suave $\kappa(k)$; en práctica de cálculo la substitución formal es:

$$\int_0^\Lambda d^4k\, \mathcal{M}(k) \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty d^4k\, \mathcal{M}(k)\, \kappa(k),$$

con $\kappa(k) \to 1$ para $k \ll \Lambda$ y $\kappa(k) \to 0$ para $k \gg \Lambda$. Un ejemplo concreto (suave) es $\kappa(k) = 1/[1 + (k/\Lambda)^\alpha]$ con $\alpha > 2$ para garantizar convergencia rápida.

H.9. I. Tabla resumen: ejemplos numéricos comparativos

Cuadro 3: Ejemplos numéricos (valores ilustrativos) para $g = 10^{-3}$.

Observables	Parámetros	Resultado
Δa_μ (scalar)	$g = 10^{-3}$, $M = 100\,\mathrm{MeV}$	$1{,}402 \times 10^{-9}$
Δa_e (scalar)	$g = 10^{-3}$, $M = 100\,\mathrm{MeV}$	$1{,}102 \times 10^{-13}$
ΔE_{1S} (hidrógeno)	$g = 10^{-3}$, $M = 10\,\mathrm{MeV}$	$-1{,}648 \times 10^{-10}$ eV
ΔE_{1S} (hidrógeno)	$g = 10^{-3}$, $M = 100\,\mathrm{MeV}$	$-1{,}650 \times 10^{-12}$ eV

H.10. J. Observaciones finales del apéndice

- Todos los resultados cerrados que requieren integrales de lazo pueden re-producirse numéricamente (integración de la integral en $x \in [0, 1]$) con alta precisión; en este apéndice hemos dado la forma canónica que debe evaluarse numéricamente si se pretende ajustar parámetros a datos.
- Las extrapolaciones asintóticas (casos $M \gg m$ y $M \ll m$) permiten entender la dependencia paramétrica y fijar límites experimentales.

I. Derivación completa de la contribución al vértice: cálculo de $F_2(0)$ (g-2)

En esta sección derivamos de forma explícita la contribución al factor anómalo $a_\ell = F_2(0)$ debida al intercambio de un mediador escalar (y mostramos las diferencias esenciales para el caso pseudoscalar). Seguimos la convención de la métrica $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ y unidades naturales $\hbar = c = 1$.

I.1. Expresión del vértice a un bucle

Consideramos un fermión (masa m) con acoplamiento escalar $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s\phi\bar{\psi}\psi$. La corrección de vértice (a primer orden en g_s^2) viene de la integral de Feynman (diagrama con un fermión interno y un mediador escalar):

$$-ie\,\Gamma^\mu(p',p) \;=\; (-ig_s)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{(-ie)\,N^\mu(k,p,p')}{\big[(k+p')^2-m^2+i\epsilon\big]\big[(k+p)^2-m^2+i\epsilon\big]\big[k^2-M^2+i\epsilon\big]},$$

donde el numerador matricial es

$$N^\mu(k,p,p') = \big(k+p'+m\big)\gamma^\mu\big(k+p+m\big).$$

Hemos extraído el factor de carga $-ie$ explícitamente; a la hora de buscar $F_2(0)$ trabajaremos con Γ^μ independiente de ese prefactor.

I.2. Combinación de denominadores: parámetros de Feynman

Aplicamos la parametrización de Feynman para combinar los tres denominadores (variables x, y, z con $x+y+z=1$). Una convenientemente reducida parametrización a dos variables es:

$$\frac{1}{ABC} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\; \frac{1}{\big[xA+yB+(1-x-y)C\big]^3}.$$

Definimos

$$A = (k+p')^2 - m^2, \quad B = (k+p)^2 - m^2, \quad C = k^2 - M^2.$$

Tras combinar denominadores y completar cuadrados, el desplazamiento de momento interno es

$$k \mapsto \ell - xp' - yp,$$

y el denominador se vuelve $(\ell^2 - \Delta + i\epsilon)^3$, con

$$\Delta = x(p')^2 + yp^2 + (1-x-y)(-M^2) - (xp'+yp)^2 + m^2(x+y).$$

Para la evaluación de $F_2(0)$ trabajamos en la coyuntura $q = p' - p$ y tomamos el límite $q \to 0$ al final; además imponemos las condiciones on-shell $p^2 = p'^2 = m^2$.

Bajo estas condiciones el desplazamiento simplifica y $\Delta = m^2xy + M^2(1-x-y) - m^2(x+y-(x+y)^2)$. Con $p^2 = m^2$ y $p'^2 = m^2$ se puede simplificar más; para los propósitos de la integral final usaremos la forma estándar que conduce a la integral unidimensional en x mostrada en el cuerpo.

I.3. Trazas y reducción del numerador

Tras el desplazamiento $k \to \ell$ el numerador puede expandirse en potencias de ℓ y términos independientes de ℓ. Las integrales impares en ℓ se anulan por simetría; por tanto sólo contribuyen potencias pares ℓ^2 y términos independientes. El término relevante para F_2 es el que produce la estructura $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ cuando se proyecta entre espinores externos on-shell.

Expandimos explicitamente N^μ:

$$\begin{aligned}N^\mu &= (\ell + a + m)\gamma^\mu(\ell + b + m)\\ &= \ell\gamma^\mu\ell + \ell\gamma^\mu(b+m) + (a+m)\gamma^\mu\ell + (a+m)\gamma^\mu(b+m),\end{aligned}$$

donde $a = p' - xp' - yp$ y $b = p - xp' - yp$ (constantes respecto a ℓ). Al integrar sobre ℓ los términos con $\ell\gamma^\mu\ell$ generan contribuciones proporcionales a γ^μ y a $\sigma^{\mu\nu}$ mediante la identidad

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^\alpha\ell^\beta}{(\ell^2-\Delta)^3} \propto \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^2}{(\ell^2-\Delta)^3}.$$

Para extraer $F_2(0)$ aplicamos la proyección canónica:

$$F_2(0) = \frac{1}{4m}\mathrm{Tr}\left[(p+m)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2}(p+m)\Gamma_\mu\right]\Big|_{q\to 0}$$

(dividiendo por factores convencionales). En la práctica se evalúa la traza de productos de γ-matrices; las identidades útiles son:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4\eta^{\alpha\beta}, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta) = 4(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}).$$

Tras realizar la traza completa (pasos algebraicos estándar, ver por ejemplo Peskin & Schroeder, Apéndice) y simplificar, el resultado para el acoplamiento escalar se reduce a la integral unidimensional en un parámetro x indicada en la Ec. (64) del apéndice principal:

$$\Delta a_\ell^{(\mathrm{scalar})} = \frac{g_s^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\,\frac{m_\ell^2x^2(1-x)}{m_\ell^2x^2 + M^2(1-x)}.$$

A modo de transparencia mostramos el paso clave: tras la Feynman-parameterización y giro a espacio euclidiano, la integral típica a evaluar es

$$I^\mu \propto \int_0^1 dx\int\frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\big[(p+m)\Gamma^\mu_{\mathrm{num}}\big]}{(\ell_E^2+\Delta)^3},$$

y aislando la parte proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ y evaluando la integral de ℓ_E se obtiene la forma en un parámetro arriba.

I.4. Resultado para pseudoscalar

Si el acoplamiento es pseudoscalar $ig_p\phi\bar\psi\gamma^5\psi$, la estructura de trazas cambia por la presencia de γ^5. Tras realizar la traza la contribución al anómalo es

$$\Delta a_\ell^{(\mathrm{ps})} = \frac{g_p^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\,\frac{m_\ell^2x^3}{m_\ell^2x^2 + M^2(1-x)},$$

que coincide con la Ec. (65) del apéndice. Observa la diferencia en la dependencia en x que implica numericamente distinta sensibilidad respecto a M.

I.5. Comentarios sobre limitas y renormalización

Los resultados arriba son finitos y bien definidos tras la combinación de denominadores y la factorización de la divergencia (no aparece divergencia UV en esta corrección particular a F_2 porque la integral está regulada por M y m). En casos de acoplamientos más complicados o múltiples bucles deben incluirse contadores y se pueden emplear esquemas $\overline{\mathrm{MS}}$ u on-shell.

J. Integral analítica completa para el corrimiento ΔE_{2S} con potencial Yukawa

Aquí derivamos analíticamente la corrección de primer orden a la energía del estado $2S$ debida a un potencial Yukawa

$$V(r) = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4\pi}\frac{e^{-Mr}}{r},$$

donde g_{eff} es el acoplamiento efectivo electrón–mediador y M la masa del mediador.

J.1. Forma de la integral

La corrección de primer orden en teoría de perturbaciones no degenerada es

$$\Delta E_{2S} = \langle 2S|V|2S\rangle = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4\pi}\int d^3r\, \frac{|\psi_{2S}(r)|^2 e^{-Mr}}{r}.$$

La función radial del estado $2S$ del hidrógeno es

$$\psi_{2S}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/(2a_0)},$$

por lo que la densidad radial es

$$|\psi_{2S}(r)|^2 = \frac{1}{32\pi a_0^3}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}.$$

Sustituyendo en la integral:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4\pi}\, 4\pi \cdot \frac{1}{32\pi a_0^3}\int_0^\infty r\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-(1/a_0 + M)r}\, dr.$$

Simplificando factores numéricos:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0^3}\, I, \qquad I \equiv \int_0^\infty r\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\beta r}\, dr,$$

donde definimos $\beta \equiv \dfrac{1}{a_0} + M$.

J.2. Evaluación analítica de I

Expandimos el cuadrado:

$$\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 = 4 - \frac{4r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2}.$$

Entonces

$$I = 4\int_0^\infty r e^{-\beta r} dr - \frac{4}{a_0}\int_0^\infty r^2 e^{-\beta r} dr + \frac{1}{a_0^2}\int_0^\infty r^3 e^{-\beta r} dr.$$

Usamos las identidades integrales:

$$\int_0^\infty r^n e^{-\beta r} dr = \frac{n!}{\beta^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto:

$$\int_0^\infty r e^{-\beta r} dr = \frac{1}{\beta^2},$$
$$\int_0^\infty r^2 e^{-\beta r} dr = \frac{2}{\beta^3},$$
$$\int_0^\infty r^3 e^{-\beta r} dr = \frac{6}{\beta^4}.$$

Sustituyendo:

$$I = \frac{4}{\beta^2} - \frac{8}{a_0 \beta^3} + \frac{6}{a_0^2 \beta^4}.$$

J.3. Expresión final

Por tanto la corrección analítica es

$$\boxed{\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0^3} \left(\frac{4}{\beta^2} - \frac{8}{a_0 \beta^3} + \frac{6}{a_0^2 \beta^4} \right)}$$

con $\beta = \dfrac{1}{a_0} + M$.

Podemos factorizar potencias de a_0 para expresar el resultado en unidades naturales de energía; por ejemplo escribiendo $\beta = a_0^{-1}(1 + Ma_0)$ se obtiene una forma alternativa conveniente para estudiar límites:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0^3} \frac{1}{a_0^{-2}} \left[\frac{4}{(1+Ma_0)^2} - \frac{8}{(1+Ma_0)^3} + \frac{6}{(1+Ma_0)^4} \right].$$

Simplificando:

$$\boxed{\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0} \left[\frac{4}{(1+Ma_0)^2} - \frac{8}{(1+Ma_0)^3} + \frac{6}{(1+Ma_0)^4} \right].}$$

J.4. Límites útiles

- **Límite de mediador ligero** $Ma_0 \ll 1$ (comportamiento casi Coulombiano): expandiendo en Ma_0 obtenemos

  $$\Delta E_{2S} \simeq -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0} (4 - 8 + 6) + \mathcal{O}(Ma_0) = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0} \cdot 2 = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4a_0}.$$

  (Este límite indica divergencia infra-roja si el mediador es verdaderamente *massless* y refleja el hecho de que la interacción de largo alcance modifica fuertemente las energías atómicas).

- **Límite de mediador pesado** $Ma_0 \gg 1$: entonces $(1 + Ma_0) \approx Ma_0$ y

  $$\Delta E_{2S} \simeq -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0} \left(\frac{4}{M^2 a_0^2} - \frac{8}{M^3 a_0^3} + \frac{6}{M^4 a_0^4} \right) \sim -\frac{g_{\text{eff}}^2}{2a_0^3} \frac{1}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^3} \right),$$

  recuperando el decaimiento rápido con $1/M^2$ esperado por intercambio de un mediador pesado (potencial de rango corto).

J.5. Conversión a unidades prácticas

Para obtener ΔE_{2S} en eV, sustituir a_0 en unidades eV^{-1} (o usar a_0 en metros y convertir con $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$). Los números de la tabla del apéndice se obtienen evaluando la expresión anterior numéricamente.

K. Derivación explícita de la corrección al vértice y $F_2(0)$ con trazas paso a paso

K.1. Estructura del numerador

Recordemos:

$$N^\mu(k,p,p') = (k + p' + m)\,\gamma^\mu\,(k + p + m).$$

Expandimos en cuatro bloques:

$$\begin{aligned} N^\mu = {} & k\gamma^\mu k + k\gamma^\mu p + k\gamma^\mu m + p'\gamma^\mu k \\ & + p'\gamma^\mu p + p'\gamma^\mu m + m\gamma^\mu k + m\gamma^\mu p + m\gamma^\mu m. \end{aligned}$$

K.2. Términos al proyectar en $F_2(0)$

El factor anómalo se extrae con

$$F_2(0) \;=\; \frac{1}{4m}\,\mathrm{Tr}\big[(p+m)\,i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\,(p+m)\,\Gamma_\mu\big]_{q\to 0}\,.$$

Necesitamos entonces seleccionar en N^μ aquellas estructuras que, al contraerse, produzcan $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. En la práctica: - Términos proporcionales a $\gamma^\mu \Rightarrow$ contribuyen a F_1. - Términos $\sim \sigma^{\mu\nu}q_\nu \Rightarrow$ contribuyen a F_2.

K.3. Evaluación de las trazas básicas

Caso 1: $k\gamma^\mu k$.

$$\mathrm{Tr}\big[(p+m)\,i\sigma^{\rho\nu}q_\nu(p+m)\,k\gamma_\rho k\big].$$

Expandimos $k\gamma_\rho k = k_\alpha k_\beta \gamma^\alpha\gamma_\rho\gamma^\beta$. Usamos la identidad de 3 gamma:

$$\gamma^\alpha\gamma_\rho\gamma^\beta = \eta^{\alpha\rho}\gamma^\beta - \eta^{\alpha\beta}\gamma_\rho + \eta^{\rho\beta}\gamma^\alpha + i\epsilon^{\alpha\rho\beta\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5.$$

Sustituimos y al integrar sobre k (simétricamente) los términos $\propto k_\alpha k_\beta \to \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}k^2$. Resultado parcial: proporción a $k^2\gamma_\rho$. Éste contribuye a F_1, no a F_2.

Caso 2: $k\gamma^\mu p$. Similar a caso 1, pero ahora queda $k_\alpha p_\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta$. Tras integración, términos lineales en k desaparecen; sólo queda mezcla $\propto (k\cdot p)\gamma^\mu$, que va a F_1.

Caso 3: términos con m. Ejemplo:

$$\mathrm{Tr}\big[(p+m)\,i\sigma^{\rho\nu}q_\nu(p+m)\,m\gamma_\rho p\big].$$

Estos términos, después de expandir, generan trazas con 4 gamma y un $\sigma^{\rho\nu}$. Recordemos:

$$\sigma^{\rho\nu} = \tfrac{i}{2}[\gamma^\rho,\gamma^\nu].$$

Entonces el producto típico es

$$\gamma^\alpha\sigma^{\rho\nu}\gamma^\beta\gamma_\rho.$$

Usando

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\sigma^{\rho\nu}\gamma^\beta\gamma_\rho) = 4i(\eta^{\alpha\nu}\eta^\beta{}_\rho - \eta^\alpha{}_\rho\eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\nu}),$$

y contrayendo índices, emergen términos proporcionales a $m\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, los que aportan a F_2.

K.4. Resultado simplificado

Luego de agrupar todos los términos, el integrando reduce efectivamente a:

$$\propto m\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu \cdot \frac{x^2(1-x)}{m^2x^2+M^2(1-x)},$$

con x el parámetro de Feynman. Finalmente, tras normalización y factores numéricos, llegamos a:

$$\Delta a_\ell^{(\mathrm{scalar})} = \frac{g_s^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\ \frac{m_\ell^2x^2(1-x)}{m_\ell^2x^2+M^2(1-x)}.$$

Comentario. El desglose muestra explícitamente que sólo los términos proporcionales a $m\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ sobreviven en F_2, como dicta la estructura de Lorentz.

L. Derivación detallada y evaluación numérica de ΔE_{2S} (estado 2S, potencial Yukawa)

Aquí se muestra la integral del corrimiento de primer orden para el estado $2S$ con todo el álgebra paso a paso.

L.1. Planteo inicial

Partimos del potencial Yukawa (acoplamiento efectivo g_{eff}):

$$V(r) = -\frac{g_{\mathrm{eff}}^2}{4\pi}\,\frac{e^{-Mr}}{r}.$$

La corrección de primer orden (teoría de perturbaciones no degenerada) es

$$\Delta E_{2S} = \langle 2S|V|2S\rangle = -\frac{g_{\mathrm{eff}}^2}{4\pi}\int d^3r\ \frac{|\psi_{2S}(r)|^2e^{-Mr}}{r}.$$

La función de onda radial del estado $2S$ del átomo de hidrógeno (normalización estándar) es

$$\psi_{2S}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/(2a_0)},$$

entonces

$$|\psi_{2S}(r)|^2 = \frac{1}{32\pi a_0^3}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}.$$

Sustituyendo y cancelando factores angulares:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4\pi}\cdot 4\pi \cdot \frac{1}{32\pi a_0^3}\int_0^\infty r\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-(1/a_0+M)r}\, dr.$$

Simplificando factores numéricos:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0^3}\, I, \qquad I \equiv \int_0^\infty r\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\beta r}\, dr,$$

donde definimos

$$\beta \equiv \frac{1}{a_0} + M.$$

L.2. Desarrollo del integrando y evaluación término a término

Expandimos el cuadrado:

$$\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 = 4 - \frac{4r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2}.$$

De modo que

$$I = 4\int_0^\infty re^{-\beta r}dr - \frac{4}{a_0}\int_0^\infty r^2 e^{-\beta r}dr + \frac{1}{a_0^2}\int_0^\infty r^3 e^{-\beta r}dr.$$

Usamos la identidad general (para $\mathrm{Re}(\beta) > 0$)

$$\int_0^\infty r^n e^{-\beta r}dr = \frac{n!}{\beta^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando para cada término:

$$\int_0^\infty re^{-\beta r}dr = \frac{1}{\beta^2}, \qquad \int_0^\infty r^2 e^{-\beta r}dr = \frac{2}{\beta^3}, \qquad \int_0^\infty r^3 e^{-\beta r}dr = \frac{6}{\beta^4}.$$

Sustituyendo en I:

$$I = \frac{4}{\beta^2} - \frac{8}{a_0\beta^3} + \frac{6}{a_0^2\beta^4}.$$

L.3. Expresión cerrada final

Reemplazando en ΔE_{2S} obtenemos:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0^3}\left(\frac{4}{\beta^2} - \frac{8}{a_0\beta^3} + \frac{6}{a_0^2\beta^4}\right),$$

con $\beta = \dfrac{1}{a_0} + M$.

Para manipular la expresión de forma más intuitiva, factoricemos a_0^{-1}:

$$\beta = a_0^{-1}(1 + Ma_0),$$

por tanto

$$\frac{1}{\beta^n} = a_0^n\,(1 + Ma_0)^{-n}.$$

Sustituyendo:

$$\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0}\left[\frac{4}{(1+Ma_0)^2} - \frac{8}{(1+Ma_0)^3} + \frac{6}{(1+Ma_0)^4}\right].$$

Esta expresión es algebraicamente equivalente a la anterior pero deja explícita la dependencia en el producto adimensional Ma_0.

Caja — fórmula útil:

$$\boxed{\Delta E_{2S} = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0}\left[\frac{4}{(1+Ma_0)^2} - \frac{8}{(1+Ma_0)^3} + \frac{6}{(1+Ma_0)^4}\right].}$$

L.4. Límites asintóticos

- **Mediador ligero:** $Ma_0 \ll 1$. Expandiendo en series:

$$\begin{aligned}\Delta E_{2S} &\simeq -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0}\left[4 - 8 + 6 + \mathcal{O}(Ma_0)\right] \\ &= -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0}\cdot 2 + \mathcal{O}(Ma_0) = -\frac{g_{\text{eff}}^2}{4a_0} + \mathcal{O}(Ma_0).\end{aligned}$$

  (Nota: el límite $M \to 0$ requiere cuidado físico por efectos de largo alcance y posible divergencia IR si no existen mecanismos que atenúen la interacción).

- **Mediador pesado:** $Ma_0 \gg 1$. Aproximando $(1 + Ma_0) \simeq Ma_0$,

$$\Delta E_{2S} \simeq -\frac{g_{\text{eff}}^2}{8a_0}\left(\frac{4}{M^2a_0^2} - \frac{8}{M^3a_0^3} + \frac{6}{M^4a_0^4}\right) \sim -\frac{g_{\text{eff}}^2}{2a_0^3}\frac{1}{M^2} + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{M^3}\right),$$

  lo cual exhibe la supresión esperada como $1/M^2$ para un mediador de rango corto.

L.5. Conversión a unidades prácticas y ejemplos numéricos

Para obtener valores numéricos es conveniente trabajar en unidades naturales con a_0 expresado en MeV^{-1}. Usamos los valores:

$$a_0 \simeq 268{,}17276\ \text{MeV}^{-1}, \quad m_e \simeq 0{,}5109989461\ \text{MeV}.$$

Evaluemos ΔE_{2S} en MeV para $g_{\text{eff}} = 10^{-3}$ y tres valores de M:

$$M = 1\ \text{MeV}, \quad M = 10\ \text{MeV}, \quad M = 100\ \text{MeV}.$$

Los resultados (evaluación numérica directa de la expresión cerrada anterior) son:

- $M = 1$ MeV:

$$\Delta E_{2S} \approx -2{,}554249134860824 \times 10^{-14}\ \text{MeV} \approx -2{,}554 \times 10^{-8}\ \text{eV}.$$

- $M = 10$ MeV:

$$\Delta E_{2S} \approx -2{,}58868011073858 \times 10^{-16}\ \text{MeV} \approx -2{,}589 \times 10^{-10}\ \text{eV}.$$

- $M = 100$ MeV:

$$\Delta E_{2S} \approx -2{,}592156643742449 \times 10^{-18}\ \text{MeV} \approx -2{,}592 \times 10^{-12}\ \text{eV}.$$

(La conversión a eV usa 1 MeV $= 10^6$ eV. Los valores numéricos anteriores fueron calculados con la expresión factorizada en función de Ma_0 y muestran la rápida caída de la influencia del mediador conforme M aumenta).

Interpretación: para $g_{\text{eff}} = 10^{-3}$ los corrimientos son extremadamente pequeños, pero si g_{eff} fuera mayor (por ejemplo, $\sim 10^{-2}$ o $\sim 10^{-1}$) las señales podrían acercarse a la sensibilidad de espectroscopía de alta precisión. Asimismo, si g_{eff} fuera del orden $\sim 10^{-24}$ (como en el escenario con $v_v \sim M_{\text{Pl}}$ con acoplamiento generador de masa), los corrimientos serían absolutamente indetectables.

L.6. Notas finales

- La integral para ΔE_{2S} se ha resuelto aquí de manera analítica completa y las expresiones son aptas para uso en ajuste de parámetros frente a datos experimentales.