Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

2 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Sean U, V espacios vectoriales, $T : U \longrightarrow V$ una transformación, entonces la transformación $T^{\nabla} : V^{*} \longrightarrow U^{*}$ definida por

$$T^{\nabla}(f) = f \circ T,$$

se verifica fácilmente que T^{∇} (también se le denota por T^{t}) es lineal, la cual es llamada la **transpuesta** de T.

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$

1. $(\lambda T)^{\nabla} = \lambda T^{\nabla}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. $(T_1 + T_2)^{\nabla} = T_1^{\nabla} + T_2^{\nabla}$.
3. $(T_1 \circ T_2)^{\nabla} = T_2^{\nabla} \circ T_1^{\nabla}$, donde
$$U \xrightarrow{T_2} V \xrightarrow{T_1} W$$
4. Si T es inversible, entonces $(T^{-1})^{\nabla} = (T^{\nabla})^{-1}$.
5. Si $\mathrm{I} : V \longrightarrow V$ es la identidad en V, entonces $\mathrm{I}^{\nabla} : V^* \longrightarrow V^*$ es ;a identidad en V^*.

En efecto:

1. Sea $f \in V^*$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos
$$(\lambda T)^{\nabla}(f) = f \circ (\lambda T) = \lambda(f \circ T) = \lambda T^{\nabla}.$$
2. Ejercicio.
3. Ejercicio.
4. Ejercicio.
5. Ejercicio.

Proposición

Sean U, V espacios vectoriales, $T \in \mathscr{L}(U, V)$ una transformación, entonces

1. $\big(T(U)\big)^{o} = \mathcal{N}(T^{\nabla})$.
2. $T^{\nabla}(V^{*}) \subset \big(\mathcal{N}(T)\big)^{o}$.
3. *Si U y V son de dimensión finita, entonces*
$$dim(T(U)) = dimt(T^{\nabla}(V^{*})).$$
4. *Con la hipótesis de (3), tenemos*
$$\big(\mathcal{N}(T)\big)^{o} = T^{\nabla}(V^{*}).$$

1. Ejercicio.
2. Sabemos que $T^{\nabla} \in \mathscr{L}(V^*, U^*)$.
   Si $f \in T^{\nabla}(V^*)$, entonces $(\exists g \in V^*)(f = T^{\nabla}(g))$.
   Luego,
   $$\Big(\forall u \in \mathcal{N}(T)\Big)\Big(f(u) = (g \circ T)(u) = g(T(u)) = g(\mathbf{0}) = 0\Big),$$
   entonces $f \in \Big(\mathcal{N}(T)\Big)^o$.
3. Como $T^{\nabla} \in \mathscr{L}(V^*, U^*)$, entonces
   $$\begin{aligned} dim(V^*) - dim(T^{\nabla}(V^*)) &= dim(\mathcal{N}(T^{\nabla})) \\ &= dim\Big((T(U))^o\Big) \\ &= dim(V) - dim(T(U)), \end{aligned}$$
   además, tenemos que $dim(V^*) = dim(V) < \infty$, luego
   $$dim(T^{\nabla}(V^*)) = dim(T(U)).$$
4. Ejercicio.

Ejemplo

Pruebe que

$$\mathcal{N}(T) = \left(T^{\nabla}(V^*)\right)^{o}.$$

Definición

Sean V, W $\mathbb{C}-$*espacios vectoriales, una aplicación* $T : V \longrightarrow W$ *se les llama* **transformación lineal conjugada** *si para todo* $u, v \in U$*, para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(\lambda u) = \overline{\lambda} T(u).$$

Además, si T *es biyectiva, entonces* T *se llama* **isomorfismo conjugado***.*

Sea $\left(V, \langle,\cdot,\rangle\right)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}ó\mathbb{C})$, con producto interno y $dim(V) < \infty$. Consideremos $u \in V$ y la función $f_u : V \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$f_u(v) = \langle v, u\rangle.$$

Observe que f_u es lineal, es decir, $f_u \in V^*$.
Ahora, definamos la aplicación $\psi : V \longrightarrow V^*$ mediante

$$\psi(u) = f_u.$$

Proposición

Con las notaciones anteriores

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces ψ es un isomorfismo.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces ψ es un isomorfismo conjugado.*

Prueba:

1. Como $dim(V) < \infty$, entonces V y V^* son isomorfos.

Veamos que ψ es lineal:
Como f_u es lineal, es decir,
$(\forall u^1, u^2 \in V)(f_{u^1+u^2} = f_{u^1} + f_{u^2})$ y $(\forall \lambda, \forall u \in V)(f_{\lambda u} = \lambda f_u)$,
entonces ψ es una transformación lineal, es decir, $\psi \in \mathscr{L}(V, V^*)$.
Veamos $\mathcal{N}(\psi) = \{0\}$:
Sea $v \in \mathcal{N}(\psi)$, luego $\psi(v) = 0$, es decir, $(\forall v \in V)(\langle v, u\rangle = 0)$.
Entonces $v = \mathbf{0}$, por tanto $\mathcal{N}(\psi) = \{0\}$ si, solo si ψ es inyectiva.
Compruebe que ψ es sobreyectiva, y así φ es un isomorfismo.

2. Ejercicio

■

Nota

El isomorfismo de ψ no indica que para cada $f \in V^*$, existe un único $u \in V$ tal que

$$\Big(\forall v \in V\Big)\Big(f(v) = \langle v, u\rangle\Big)$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{K} = \big(\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}\big)$.
Toda aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ *es de la forma*

$$f(x, y) = ax + by = \Big\langle (a, b), (x, y) \Big\rangle,$$

para todo $a, b, x, y \in \mathbb{K}$, *con* a, b *fijos*

Ejercicio

Pruebe que toda aplicación lineal $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *es de la forma*

$$\psi(v^0) = h, \;\; \text{con } v^0 \in \mathbb{C}^2.$$

Debido a la proposición anterior, para cada aplicación lineal $f \in V^*$, existe un único $v \in V$ tal que

$$(\forall u \in V)(f(u) = \langle u, v \rangle.$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $\{v^1, \cdots, v^n\} \subset V$, y $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset V^*$ una base (llamada la **correspondiente base dual** *de V) tales que*

$$(\forall u \in V)\left(f_j(u) = \left\langle u, v^j \right\rangle\right),\ j = 1, \cdots, n$$

Entonces $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base de V.

Prueba:
Veamos $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son linealmente independiente:
sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$(\forall u \in V)\left(\sum_{j=1}^{n}\left\langle u, \alpha_j v^j\right\rangle = 0 = \sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}\left\langle u, v^j\right\rangle\right),$$

de donde

$$(\forall u \in V)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j} f_j(u) = 0\right), \text{ esto implica } \sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j} f_j = 0,$$

como $\{f_1, \cdots, f_n\}$ es una base de V^*, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Por tanto $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son linealmente independientes.
Ejercicio, pruebe que para cada $v \in V$ existen $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_n v^n.$$

Luego $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base de V. ■

Consideremos $\{w^1, \cdots, w^n\}$ una base de V y su correspondiente base dual $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset V^*$ tales que

$$f_i(w^j) = \langle w^j, v^i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

en este caso, decimos que $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es la base dual de $\{w^1, \cdots, w^n\}$. como $\langle w^j, v^i \rangle = \delta_{ij}$ es simétrica, entonces decimos que las bases $\{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\{w^1, \cdots, w^n\}$ son **bases duales**.

Observación

La base dual de una base ortonormal $\{e^1, \cdots, e^n\}$ *es ella misma.*

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

nos conduce a un reordenamiento de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

llamada **matriz** de orden 2×2.

En general, una matriz de orden $m \times n$ (m filas y n columnas), es un ordenamiento de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

donde a_{ij} son escalares (únicos). Denotemos dicho reordenamiento por $A = [a_{ij}]$.
Denotemos por $\mathbb{K}^{m\times n}$ (ó también $\mathbb{K}(m, n)$) al conjunto de matrices de orden $m \times n$.

El conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ (ó también $\mathbb{K}(m,n)$) está provisto de la operaciones de suma y producto por un escalar de forma análoga a $\mathbb{K}$, es decir, sean $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{K}$

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$
$$\lambda A=[\lambda a_{ij}].$$

Coon estas operaciones $\mathbb{K}(m,n)$ es un espacio vectorial.

Además, podemos definir, otra operación, producto de matrices de la siguiente forma:
Sean las matrices $A \in \mathbb{K}(m,n)$ y $B \in \mathbb{K}(n,p)$, entonces definimos la matriz $C = AB = [c_{ik}] \in \mathbb{K}(m,p)$, donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ para } i = 1, \cdots, m, \; k = 1, \cdots, p,$$

El producto de matrices, presenta las siguientes propiedades:

1. $\Big(\forall A \in \mathbb{K}(m,n), B \in \mathbb{K}(n,p), C \in \mathbb{K}(p,q)\Big)\Big(A(BC) = (AB)C\Big)$.
2. $\Big(\forall A \in \mathbb{K}(m,n), B, C \in \mathbb{K}(n,p)\Big)\Big(A(B+C) = AB + AC\Big)$ y $\Big(\forall A, B \in \mathbb{K}(m,n), C \in \mathbb{K}(n,p)\Big)\Big((A+B)C) = AC + BC\Big)$.
3. En general se tiene $AB \neq BA$ para $A \in \mathbb{K}(m,n), B \in \mathbb{K}(n,p)$.

Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Nota el conjunto de matrices en $\mathbb{K}(n, n)$, diremos sue son **matrices cuadradas** de orden $n \times n$, y lo denotamos por $\mathbb{K}(n) = \mathbb{K}(n, n)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, matrices $\mathrm{I} \in \mathbb{K}(n, n)$ definidas por

$$\mathrm{I} = [\delta_{ij}]$$

son llamadas **matrices identidad** de orden $n \times n$ o simplemente de orden n, donde δ_{ij} es el δ **de Kronecker**.

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es llamada **inversible**, *si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = \mathrm{I}$, y lo denotamos por $B = A^{-1}$, esta matriz A también es llamada* **no singular** *y B es llamada la* **inversa** *de A.*

Consideremos la matriz de orden $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

los vectores $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ son llamados **vectores filas** de A para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, el cual también es una matriz de orden $1 \times n$; y las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

son llamados vectores columnas de A de orden $m \times 1$.

Para la determinar la inversa de una matriz cuadrada, si existe, lo podemos hacer por operaciones elementales, sistemas de ecuaciones lineales, entre otras técnicas.

Los vectores filas los vectores $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i = 1, 2, \cdots, m$ de una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ puede escribirse de la forma

$$a^i = a_{i1}e^1 + a_{i2}e^2 + \cdots + a_{in}e^n, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

donde $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ es una base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Supongamos que $m = n$ y que A es inversible. Entonces para cada a^j $j = 1, 2, \cdots, n$ debemos encontrar escalares b_{jk} $k = 1, 2, \cdots, n$ (si existen de forma única) tales que

$$e^j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}a^k, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

Entonces definimos la matriz inversa de A por $B = [b_{ij}]$, en este caso los vectores filas de $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ son linealmente independientes.

Por ejemplo, sea la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

en este caso tenemos $a^1 = (5;6)$, $a^2 = (4;5)$, entonces

$$\begin{aligned} a^1 &= 5e^1 + 6e^2 \\ a^2 &= 4e^1 + 5e^2, \end{aligned}$$

de donde, aplicando la teécnica anterior tenemos

$$\begin{aligned} e^1 &= \quad 5a^1 - 6a^2 \\ e^2 &= -4a^1 + 5a^2, \end{aligned}$$

luego la inversa de A es la matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Matrices Especiales

Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$ es llamada

- Diagonal, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Triángular superior, si $a_{ij} = 0$ para $j < i$.
- Triángular inferior, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- simétrica, si ${}^tA = A$.
- anti-simétrica, si ${}^tA = -A$.
- Hermitiana, si $A^* = A$, aquí $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- anti-Hermitiana, si $A^* = -A$,
- Ortogonal, si ${}^tAA = \mathrm{I}$.