Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

03 de febrero del 2021

Coordenadas Homogéneas.

Consideremos el plano euclídeano y un sistema de referencia (O, i, j), en la cual todo par de rectas diferentes se cortan en un punto, excepto cuando ellas son paralelas, para evitar esta excepción, diremos que dos rectas en el plano siempre se cortan. Ahora tenemos dos casos

- si no son paralelas, entonces se cortan en un punto finito, llamado **punto propio**.
- si son paralelas, entonces se cortan en un punto del infinito, llamado **punto impropio**.

Todas las rectas paralelas entre sí se cortan en el mismo punto de infinito.
Notar que estos puntos del infinito, no tienen significado alguno en el sistema de referencia anterior, por ejemplos los pares $(1, \infty)$, $(-\infty, -2)$, $(-\infty, \infty)$.

Definición

Sea un punto P cuyas coordenadas cartesianas en el plano son (x, y), denotada por $P = (x, y)$, se llama **coordenadas homogéneas** *de dicho punto a toda terna (x_1, x_2, x_3), tal que $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$.*

Por ejemplo,el punto $P = (2, -3)$ es expresado como coordenadas homogéneas por cualquiera de la infinitas ternas $(2, -3, 1)$, $(4, -6, 2)$, $(8, -12, 4)$, $(-8, 12, -4)$, $\cdots$ y en general, $P = (2, -3) \equiv (2k, -3k, k)$ con $k \neq 0$.
Para $O = (0, 0) \equiv (0, 0, 1)$.
Evidentemente, todos los puntos de la forma $(x_1, x_2, 0)$, excepto $(0, 0, 0)$, son puntos del infinito, estos nos indicarán las diferentes direcciones.
Por ejemplo,la recta $y = 2x + 5$ tiene como vector dirección $(1, 2)$, el punto impropio $(1, 2, 0)$ señala la dirección de todas las rectas paralelas a ella, siendo el punto $(1, 2, 0)$ donde todas se cortan.

Los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ indican las direcciones de los ejes Ox y Oy respectivamente.

ECUACIONES DE LA RECTA EN COORDENADAS HOMOGÉNEAS

Dada la ecuación de la recta en coordenadas cartesianas $ax+by+c=0$, entonces al sustituir (x, y) por $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$, tenemos $a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$, lo cual nos conduce a la ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

que es la ecuación de la recta en coordenadas homogéneas.

Sea la recta r definida por $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$.
Dado que estos puntos deben satisfacer la ecuación de la recta r, entonces tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0 \\ aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

La relación anterior nos conduce a lo siguiente

$$\alpha_1(x_1, x_2, x_3) + \alpha_2(p_1, p_2, p_3) + \alpha_3(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{0},$$

donde $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$.

Ahora,dividimos por α_1 (si $\alpha_1 \neq 0$, en caso contrario P y Q tendrían coordenadas proporcionales y,po consiguiente $P = Q$).

$$\begin{cases} x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y Q.
Por tanto, la ecuación matricial $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$, o su forma abreviada

$$[x_i] = \lambda[p_i] + \mu[q_i], \quad i = 1, 2, 3,$$

representa la recta que pasa por los puntos P y Q.

Notar que toda recta que para por los puntos $(a_1, a_2, 0)$ y $(b_1, b_2, 0)$ tienen por ecuación

$$x_3 = 0,$$

esta recta está formada por los puntos $(x_1, x_2, 0)$ del infinito, la cual es llamada **recta del infinito del plano**, y a dicho plano, que se adjunta la recta del infinito, se llama **plano completado**.

DEFINICIÓN DE CÓNICA Y SU ECUACIÓN GENERAL

Consideremos en el plano completado un sistema de referencia ortonormado (O, i, j), un punto $F = (\alpha, \beta)$ que llamaremos **foco** y una recta $d = ax + by + c = 0$ que denominaremos **directriz**.

Definimos como **cónica** el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ reales o imaginarios tales que la razón de sus distancias al foco y a la directriz es una constante real (llamada **excentricidad**) y representada por e.

Según el valor de la constante tendremos las siguientes cónicas

- Constante menor a 1, es una elipse.
- Constante mayor a 1, es una hipérbola.
- Constante igual a 1, es una parábola.

De la definición anterior,tenemos

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}}{\dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}},$$

donde A es un punto de la recta d.

La expresión se convierte en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\frac{e^2}{a^2+b^2}(ax+by+c)^2=0,$$

donde notamos que esta ecuación depende de los parámetros α,β, a, b, c y e, por tanto la ecuación anterior se expresa

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,\ \ a_{ij}\in\mathbb{R}$$

que es llamada la **ecuación general de la cónica**.
De eta manera, una cónica está formada por el conjunto de puntos $P=(x,y)$ reales o imaginarios que satisfacen la ecuación de segundo grado anterior.

En forma matricial está dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \equiv \begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix}^t A \begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

la cual es una forma cuadrática de tercen orden.

Definición

Sean $A \in \mathbb{K}(n, n)$ *una matriz,* $u, v \in \mathbb{K}(n, 1)$ *vectores, diremos que estos vectores son* A *conjugados si* $u^t A v = 0$*, de esta manera también podemos definir una cónica como el lugar geométrico de los puntos* $P = (x_1, x_2, x_3)$ *que son conjugados de si mismos (es decir, autoconjugados).*

Veamos una forma de expresar la ecuación general de la cónica

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

y como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\
\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)
\end{aligned}
$$

por tanto tendremos

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde la expresión

$$\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)(x_1,x_2,x_3)=0$$

es otra forma de expresar la ecuación general de la cónica.

Ejemplo

Halle la ecuación de la cónica cuya excentricidad es $e=\dfrac{1}{2}$, *que tiene el foco en el punto* $(1,0)$ *y por directriz la recta* $x=4$

de acuerdo a la definición de e tenemos

$$e^2=\frac{1}{4}=\frac{(x-1)^2+y^2}{(4-x)^2}$$

de dónde se tiene

$$4(x^2 - 2x + 1 + y^2) - (16 - 8x + x^2) = 0,$$

por tanto la cónica es

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

como, en este caso, $e < 1$, entonces la cónica es una elipse.