Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

08 de febrero del 2021

Coordenadas Homogéneas.

Ahora veamos la

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS CÓNICAS

Al cortar una superficie cónica de revolución por un plano que no pase por el vértice del cono se obtienen diferentes secciones (que pueden ser secciones cónicas o simplemente cónicas), dependiendo la naturaleza que estas de la posición de dicho plano.

Consideremos α el ángulo que forma el eje del cono con las generatrices y β el que forma el plano secante con dicho eje.

Entonces tenemos tres casos:

1. Si $\beta > \alpha$, la sección se dice que es **elipse** (no tiene puntos en el infinito).
2. Si $\beta < \alpha$, la sección se dice que es **hipérbola** (tiene dos puntos en el infinito).
3. Si $\beta = \alpha$, la sección se dice que es **parábola** (tiene un punto en el infinito).

Si el plano pasa por el vértice V del cono, es inmediato ver que la sección sería

1. Si $\beta > \alpha$, entonces es un punto.
2. Si $\beta < \alpha$, entonces tenemos dos rectas diferentes que se cortan en el punto V.
3. Si $\beta = \alpha$, entonces una recta (doble).

Esto nos muestra la simetría que presentan la elipse e hipérbola respecto del punto C y las rectas e_1 y e_2.

POLAR DE UN PUNTO Y POLO DE UNA RECTA

Definición

Se llama **polar** *de un punto* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *respecto de la cónica* $[x_i]^t A[x_i] = 0$ *al lugar geométrico de los puntos* (x_1, x_2, x_3) *conjugados de* P *respecto de dicha cónica.*

De dónde tenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \end{bmatrix} = 0$$

Haciendo

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 &= a \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 &= b \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= c \end{aligned} \tag{1}$$

y denotando por p la polar del punto P tenemos

$$p \equiv [x_i]^t A[p_i] = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

la cual es una recta.
Al punto P anterior se le llama **polo de la recta** p.
Notar que dada la recta $p = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, para hallar su polo $P = (p_1, p_2, p_3)$ antes se debe resolver (1).
Veamos que si un punto P pertenece a una recta q, su polar p contiene al polo de q.
En efecto:
Como la ecuación de p es $[x_i]^t A[p_i] = 0$, ahora veamos que $Q \in p$, es decir, $[q_i]^t A[p_i] = 0$:
Como $P \in q \equiv [x_i]^t A[q_i] = 0$, entonces $[p_i]^t A[q_i] = 0$ y como $A = A^t$, se tiene que

$$[p_i]^t A[q_i] = [q_i]^t A[p_i] = 0$$

Con estas consideraciones tenemos el siguiente

Teorema

Los polares de todos los puntos de una recta pasan por el polo de dicha recta.

INTERSECCIÓN DE UNA CÓNICA CON UNA RECTA

Sea la recta $r \equiv [x_i] = \lambda[p_i] + \mu[q_i]$ definida por los puntos P y Q, y la cónica $C \equiv [x_i]^t A[x_i] = 0$. Entonces la intersección pedida se obtendrá resolviendo el sistema

$$\begin{cases} [x_i] = \lambda[p_i] + \mu[q_i] \\ [x_i]^t A[x_i] = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

de dónde tenemos

$$\left(\lambda[p_i] + \mu[q_i]\right)^t A\left(\lambda[p_i] + \mu[q_i]\right) = 0$$

Por tanto, obtenemos

$$\lambda^2 [p_i]^t A[p_i] + 2\lambda\mu [p_i]^t A[q_i] + \mu^2 [q_i]^t A[q_i] = 0, \tag{3}$$

la cual es una ecuación de segundo grado homogénea con respecto a λ y μ, con dos soluciones (reales distintas ó una real doble ó dos imaginarias conjugadas), que al sustituirlas en la recta dan lugar a los puntos de corte.

Ejemplo

Halle la intersección de la cónica $x_1^2 + x_2^2 - 25x_3^2 = 0$, con la recta que pasa por los puntos $P = (0,0)$ y $Q = (8,6)$.

Luego tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}, \ [p_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t \quad \text{y} \quad [q_i] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}^t,$$

de dónde

$$[p_i]^t A\,[p_i] = -25, \quad [p_i]^t A\,[q_i] = -25, \quad [q_i]^t A\,[q_i] = 75,$$

Luego, sustituyendo estos valores en la ecuacón (3), tenemos que

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu - 3\mu^2 = 0.$$

De la ecuación anterior tenemos que $\lambda = \mu$ y $\lambda = -3\mu$, entonces

- Para $\lambda = \mu$ se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\mu & 6\mu & 2\mu \end{bmatrix},$$

  que corresponde al punto $(4, 3, 1) \equiv (4, 3)$.

- Para $\lambda = -3\mu$ se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = -3\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\mu & 6\mu & -2\mu \end{bmatrix},$$

  que corresponde al punto $(-4, -3, 1) \equiv (-4, -3)$.

Ahora veamos

PUNTOS SINGULARES DE UNA CÓNICA: CÓNICAS DEGENERADAS

De la cónica C de la ecuación

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

o en su forma abreviada $[x_i]^t A[x_i] = 0$, extraemos el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

o abreviadamente $A[x_i] = [0]$.

Definición

Diremos que un punto P es un **punto singular de la cónica** *C si $P \neq (0,0,0)$ y es solución del sistema (4).*

Observar que si P verifica el sistema $A[x_i] = [0]$, entonces P pertenece a la cónica C, es decir, P satisface $[x_i]^t A[x_i] = 0$.
Para que exista solución distinta de $(0,0,0)$ en (4) se debe tener en cuenta que $det(A) = 0$, en este caso tenemos dos casos

1. $rango(A) = 2$, entonces el sistema (4) tiene dos ecuaciones independientes, digamos, las dos primeras, de dónde

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= -a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= -a_{23}x_3 \end{cases}$$

luego tenemos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{31}(=A_{13})}{A_{33}}x_3 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{A_{32}(=A_{23})}{A_{33}}x_3.$$

El cual es un punto singular H de coordenadas reales

$$(A_{31}, A_{32}, A_{33}) \equiv (A_{13}, A_{23}, A_{33}).$$

2. *rango*$(A) = 1$, en este cado el sistema (4) tiene una sola ecuación independiente (recta) en la cónica, por tanto, infinitos puntos singulares (todos los de dicha recta).

En el caso de que $det(A) \neq 0$, entonces el sistema $A[x_i] = [0]$ no posee ninguna solución distinta de $(0, 0, 0)$, en este caso no exsiten puntos singulares en la cónica, entonces diremos que todos los puntos de la cónica son **ordinarios**.

Lo anterior nos conduce a la siguiente

Definición

Diremos que una cónica $[x_i]^t A[x_i] = 0$ *es* **degenerada** *si tiene algún punto singular, es decir, el discriminante de la forma cuadrática correspondiente* $det(A) = 0$. *En caso contrario diremos que la cónica no tiene ningún punto singular, es decir,* $det(A) \neq 0$ *en este caso se llamará* **no degenerada**.

Ahora veamos

COMPOSICIÓN DE LAS CÓNICAS DEGENERADAS ($det(A){=}0$)

tenemos dos casos

a) $rango(A) = 2$.

Como antes el sistema (4) $A[x_i] = [0]$ tiene dos ecuaciones independientes, es decir, dos rectas cuya intersección es el punto $H = (h_1(A_{31}), h_2(A_{32}), h_3(A_{33}))$.

En este caso la cónica $C \equiv [x_i]^t A[x_i] = 0$ se compone de dos rectas r y s que satisfacen su ecuación y además se contar en punto H, es decir,

$$C \equiv [x_i]^t A[x_i] = r \cdot s = 0.$$

Bastará demostrar para ello

1) Por todo punto $P \in C$ y por H pasa una recta r totalmente incluida en C, es decir, que la cónica está formada por rectas que pasan por H.

2) Por todo par de puntos P y Qde C, no alineados simultáneamente, pasa la recta t que únicamente corta a la cónica en