Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

14 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, entonces la aplicación $\varphi : \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathbb{K}(m, n)$, definida por

$$\varphi(T) = A_T,$$

establece un isomorfismo entre $\mathbb{K}-$espacios vectoriales.

Prueba:

Verifique que

1. φ es una transformación lineal.
2. $dim(\mathscr{L}(V, W)) = dim(\mathbb{K}(m, n)) = mn$

Veamos que φ es inyectiva

• Sea $T \in \mathbb{N}(\varphi)$, entonces $\varphi(T) = A_T = [ai_{ij}] = 0$.
Luego $T(v^j) = 0$ para $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces T se anula en una base, por tanto
$(\forall v \in V)(T(v) = 0)$, entonces $T = 0$.
Por tanto $\mathbb{N}(\varphi) = \{0\}$, entonces φ es inyectiva.

• Ejercicio φ es sobreyectiva.

Proposición

Sean U, V, W espacios vectoriales, $T_1 : U \longrightarrow V$, $T_2 : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales, entonces $T = T_2 \circ T_1 : U \longrightarrow W$ es una tansformación que a través de φ (definida en la proposición anterior) satisface la siguiente propiedad

$$\varphi(T_2 \circ T_1) = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$$

Prueba:

Sean $u^1, \cdots, u^p$, $v^1, \cdots, v^n$ y $w^1, \cdots, w^m$ bases de U, V y W respectivamente, entonces tenemos:

$$T_1(u^k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v^j, \text{ para } k = 1, \cdots, p$$

$$T_2(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \text{ para } j = 1, \cdots, n.$$

$$
\begin{aligned}
T_2 \circ \Big(T_1(u^k)\Big) = T_2\Big(T_1(u^k)\Big) &= T_2\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} T_2(v^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w^i, \quad k = 1, \cdots, p.
\end{aligned}
$$

También tenemos,

$$
T_2 \circ \Big(T_1(u^k)\Big) = T_2\Big(T_1(u^k)\Big) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w^i, \quad k = 1, \cdots, p.
$$

Dado que $\{w^1, \cdots, w^m\}$ es una base de W, entonces tenemos

$$
c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \Big(A_{T_2} A_{T_1}\Big)_{ik}
$$

Por tanto $A_{T_2 \circ T_1} = [c_{ik}] = A_{T_2} A_{T_1} \Longrightarrow \varphi(T_2 \circ T_1) = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$. ∎

Nota

Si $V = W$, entonces la matriz asociada a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ la calculamos de la siguiente forma

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$.
En este caso, el isomorfismo

$$\varphi : \mathscr{L}(V, V) \longrightarrow \mathbb{K}(n, n).$$

satisface la proposición anterior.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, $T \in \mathscr{L}(V, V)$, y A_T la matriz asociada a T en alguna base.
Entonces T es un isomorfismo ai, y solo si A_T es inversible.

Prueba

Supongamos que T es isomorfismo, entonces existe $L \in \mathscr{L}(V, V)$ tal que

$$L \circ T = \mathrm{I} = T \circ L.$$

Aplicando φ, entonces tenemos

$$A_L A_T = \mathrm{I} = A_T A_L, \quad (A_{\mathrm{I}} = \mathrm{I}).$$

por tanto A_T es invertible.

Recíprocamente, supongamos que A_T sea no singular, entonces existe una transfomación $L \in \mathscr{L}(V, V)$ tal que

$$\varphi(L) = A_T^{-1}, \quad \text{es decir,} \;\; A_T^{-1} = A_L.$$

Luego

$$\varphi(L \circ T) = \varphi(L)\varphi(T) = A_T^{-1}A_T = \mathrm{I},$$

y dado que φ es inyectiva, tenemos

$$L \circ T = \mathrm{I}.$$

De manera similar, se tiene que $T \circ L = \mathrm{I}$.
Por tanto T es inversible, y de esta manera tenemos que T es un isomorfismo.

■

Ahora veamos la relación que existe entre las matrices asociadas a una transformación lineal T y a su transformación lineal transpuesta T^{∇}. Consideremos los espacios vectoriales V, W y sus correspondientes base $\{v^1, \cdots, v^n\}$, $\{w^1, \cdots, w^m\}$ y $\{v_*^1, \cdots, v_*^n\}$, $\{w_*^1, \cdots, w_*^m\}$ sus respectivas bases duales.
Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $T^{\nabla} : W^* \longrightarrow V^*$ la transformación lineal transpuesta, entonces

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad i = 1, \cdots, n, \quad A_T = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m, n)$$

$$T^{\nabla}(w_*^i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_*^j, \quad i = 1, \cdots, m, \quad A_{T^{\nabla}} = [b_{ji}] \in \mathbb{K}(n, m).$$

Ahora determinemos la relación entre A_T y A_{T^∇}, para ello calculamos como sigue

$$\begin{aligned}\left[T^\nabla(w_*^i)\right](v^t) &= (w_*^i \circ T)(v^t) = w_*^i\Big(T(v^t)\Big)\\ &= w_*^i\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kt} w^t\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kt} w_*^i(w^k) = a_{it}.\end{aligned}$$

También lo podemos calcular

$$\left[T^\nabla(w_*^i)\right](v^t) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_*^j\right)(v^t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_*^j(v^t) = b_{it}.$$

Luego llegamos a la siguiente

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

$$A_{T^\nabla} = A_T^t.$$

Proposición

Sean $\{v^1, \cdots, v^n\} \subset V$ *y* $\{w^1, \cdots, w^m\} \subset W$ *las bases de dichos espacios vectoriales. Además* $\{e^1, \cdots, e^n\}$ *y* $\{f^1, \cdots, f^m\}$ *las bases de* $\mathbb{K}(n,1)$ *y* $\mathbb{K}(m,1)$ *respectivamente. Si la transformación* $T : V \longrightarrow W$ *lineal posee una matriz asociada* A_T *en las bases dadas, entonces*

1. *El diagrama de espacios vectoriales y transformaciones lineales*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathbb{K}(n,1) \arrow[r, "L_{A_T}"'] & \mathbb{K}(m,1) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \varphi(v^j) &= e^j, \quad \text{para}, \quad j = 1, \cdots, n \\ \varphi(w^i) &= f^i, \quad \text{para}, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

es conmutativo.

2. $r_c\big(A_T\big) = dim\big(T(V)\big).$

Prueba:

1. Veamos que φ y φ' son isomorfos:
   Sabemos que cualquier elemento $v \in V$ y $w \in W$ pueden ser expresados como una combinación lineal de los elementos de las bases $\{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\{w^1, \cdots, w^m\}$ respectivamente, es decir, existen escalares $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_m$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad w = \sum_{j=1}^{m} y_j w^j,$$

   por tanto

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j, \quad \varphi'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i w^i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i f^i.$$

   También, tenemos que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, \cdots, n$$

por tanto esta igualdad define la matriz $A_T = [a_{ij}]$. Luego con las notaciones dadas, tenemos

$$\varphi' \circ T(v^j) = \varphi'\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^i,$$

$$L_{A_T} \circ \varphi(v^j) = A_T(e^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^i.$$

Por tanto, $\varphi' \circ T(v^j) = L_{A_T} \circ \varphi(v^j)$, para $j = 1, \cdots, n$. Entonces $\varphi' \circ T = L_{A_T} \circ \varphi$, es decir, el diagrama conmuta.

2. De las igualdades

$$\varphi'\Big(T(v^j)\Big) = A_T(e^j), \quad \text{para} \quad j = 1, \cdots, n,$$

nos inidcan que $\varphi' : T(V) \longrightarrow A_T(\mathbb{K}(n,1))$ es epiyectiva, por tanto un ismorfismo, de donde

$$dim\Big(T(V)\Big) = dim\Big(A_T(\mathbb{K}(n,1))\Big) = r_c(A_T).$$

Definición

Sean $A, B \in \mathbb{K}(n,n)$ *matrices, decimos que ellas son*

1. **equivalentes** *si existen matrices* $P, Q \in \mathbb{K}(n,n)$ *no singulares tales que*
$$B = QAP$$
2. **semejantes** *se existe una matriz* $P \in \mathbb{K}(n,n)$ *no singular tal que*
$$B = P^{-1}AP.$$
3. **congruentes** *si existe una matriz* $P \in \mathbb{K}(n,n)$ *no singular tal que*
$$B = P^{t}AP.$$

El estudio de equivalencia y semejanza de matrices se presentan en los casos de matrices asociadas a una transformación lineal, mientras que la congruencia aparece cuando se estudian las matrices asociadas a aplicaciones bilineales y formas cuadráticas.
Consideremos las bases $\Gamma = \{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\Omega = \{w^1, \cdots, w^n\}$ de un espacio vectorial V, entonces lass relaciones

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$
$$w^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} w^i, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

determinan las matrices

$$P = [\alpha_{ij}] \quad \text{y} \quad Q = [\beta_{ik}].$$

Donde la matriz P se llama **matriz cambio de base** de Γ en Ω, y la matriz Q se llama **matriz cambio de base** de Ω en Γ.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^2$*, y las bases* $\{w^1 = (2,1), w^2 = (3,2)\}$ *y* $\{e^1, e^2\}$ *canónica de* V*, la matrices cambio de base para* P *y* Q *se obtienen*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} e^1 = (1,0) = & 2w^1 & - & w^2 \\ e^2 = (0,1) = & -3w^1 & + & 2w^2 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} w^1 = (2,1) = & 2e^1 & + & e^2 \\ w^2 = (3,2) = & 3e^1 & + & 2e^2 \end{array} \right.$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nota

Consideremos $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, *entonces podemos escribir de dos maneras*

$$v = ae^1 + be^2$$
$$v = (2a - 3b)w^1 + (-a + 2b)w^2,$$

luego tenemos $x_v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *es el vector de componentes de* v *respecto a* $\{e^1, e^2\}$, *mientras que* $y_v = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ -a + 2b \end{bmatrix}$ *es el vector de componentes de* v *respecto a* $\{w^1, w^2\}$.
Observe que $Px_v = y_v$ *y* $Qy_v = x_v$

En general tenemos, sea $v \in V$ cualquiera, entonces podemos escribir en función de las bases Γ y Ω como sigue

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j w^j$$

que determinan los vectores

$$x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t, \qquad \text{y} \qquad y_v = (y_1, \cdots, y_n)^t.$$