# Álgebra Lineal I

## Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

30 de diciembre de 2020

# Espacios Vectoriales (continuación)

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interno. definamos la función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \tag{1}$$

esta función es una norma.
En efecto:

1. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, entonces
   - $(\forall v \in V)(\langle v, v \rangle \geq 0)$, entonces $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$.
   - $\langle v, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = \mathbf{0}$, entonces $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = \mathbf{0}$.

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$, tenemos $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|$.
3. Para todo $v, w \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle w, v\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle w, v\rangle| + \|w\|^2 \qquad (*) \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|w\|\|v\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

   Es decir,

$$(\forall v, w \in V)(\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|).$$

Por tanto (1) es una norma en $V$. ■

Para verificar $(*)$ nos basamos en la siguiente

## Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

*Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio vectorial real con producto interno, luego para todo* $v, w \in V$ *se tiene*

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$$

**Prueba**:
Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle|\alpha|v-|\beta|w, |\alpha|v-|\beta|w\rangle =& |\alpha|^2\langle v, v\rangle - |\alpha||\beta|\langle v, w\rangle - |\beta||\alpha|\langle w, v\rangle + \\ & |\beta|^2\langle w, w\rangle \\ =& |\alpha|^2\langle v, v\rangle - 2|\alpha||\beta|\langle v, w\rangle + |\beta|^2\langle w, w\rangle \geq 0\end{aligned}$$

En particular escojamos $\alpha = \langle v, w\rangle$, $\beta = \langle v, v\rangle$. Sustituyendo en la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned} &|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle - 2|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle + |\langle v, v\rangle|^2\langle w, w\rangle = \\ &= -\,|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle + |\langle v, v\rangle|^2\langle w, w\rangle \geq 0, \end{aligned}$$

de donde para todo $v, w \in V$ se tiene

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle = \|v\|^2\|w\|^2.$$

■

Esta demostración también es válida si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial complejo.

## Proposición (Proceso de Gram-Schmidt)

*Sean* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial, y* $\mathcal{B} = \{v^1, \cdots, v^k\}$ *un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces los vectores* $w^1, \cdots, w^k$ *definidos mediante*

$$\begin{cases} w^1 & = & v^1 \\ w^j & = & v^j - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} proy_{w^i}(v^k), \quad para \;\; j = 2, \cdots, k, \end{cases}$$

*son ortogonales, donde* $proy_u(v) = \dfrac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$

**Prueba**:

$\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$(\forall j = 1, 2, \cdots, k)(v^j \neq \mathbf{0}).$$

Usaremos inducción matemática sobre $k$

- Definamos $w^1 = v^1 = v^1 - \sum_{i=1}^{1-1} proy_{w^i}(v^1) \neq \mathbf{0}$.

$$w^2 = v^2 - \alpha w^1 \Longrightarrow 0 = \langle w^1, w^2 \rangle = \langle w^1, v^2 \rangle - \alpha \langle w^1, w^1 \rangle,$$

entonces

$$\alpha = \frac{\langle w^1, v^2 \rangle}{\langle w^1, w^1 \rangle} \Longrightarrow w^2 = v^2 - \frac{\langle w^1, v^2 \rangle}{\langle w^1, w^1 \rangle} w^1 = v^2 - proy_{w^1}(v^2)$$

luego $\quad w^2 = v^2 - \sum_{i=1}^{2-1} proy_{w^i}(v^2) \neq \mathbf{0}$.

En caso contrario
si $w^2 = \mathbf{0}$, entonces $v^2 /\!\!/ w^1$, es decir, $v^2 /\!\!/ v^1$ esto contradice el hecho de que $v^1, v^2$ son l.i., por tanto $w^2 \neq \mathbf{0}$.

- Supongamos que hasta $k$–1 se satisface el enunciado de la proposición (**H.I.**).
- Veamos que el enunciado de la proposición se satisface para $k$:

Expresaremos los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^k$ en función de los vectores $w^1, w^2, \cdots, w^k$ como sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\langle w^1, v^2\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\langle w^1, v^k\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle} & \frac{\langle w^2, v^k\rangle}{\langle w^2, w^2\rangle} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 & w^2 & \cdots & w^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^k \end{bmatrix},$$

de donde

$$w^k = v^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{(k)(j)} v^j \neq \mathbf{0}.$$

Queda como ejercicio justificar este resultado. ∎

## Corolario

*Los conjuntos* $\mathcal{B} = \{v^1, \cdots, v^k\}$ *y* $\mathcal{E} = \{w^1, \cdots, w^k\}$ *generan el mismo subespacio vectorial.*

## Corolario

*Del conjunto* $\mathcal{E} = \{w^1, \cdots, w^k\}$ *podemos obtener* $\mathcal{E}'$ *normalizado.*

**Prueba**:

Basta definir $w_*^k = \dfrac{w^k}{\sqrt{\langle w^k, w^k \rangle}} = \dfrac{w^k}{\|w^k\|}$, y así obtenemos $\mathcal{E}'$

## Definición

*Sean* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *espacios vectoriales,* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación. Diremos que* $T$ *es una* **isometría lineal** *si*

1. $T$ *es lineal y*
2. $\Big(\forall v^1, v^2 \in V\Big)\Big(\langle T(v^1), T(v^2)\rangle_W = \langle v^1, v^2\rangle_V\Big)$

## Nota

- *De la definición anterior tenemos que si* $T$ *es una isometría lineal, entonces se tiene*

$$\Big(\forall v \in V\Big)\Big(\|T(v)\|_W = \|v\|_V\Big).$$

- *Si* $dim(V) = dim(W) < \infty$, *entonces* $T$ *es un isomorfismo.*

## Proposición

*Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$ espacios vectoriales y una trasformación lineal $T : V \longrightarrow W$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$T$ preserva el producto interno, es decir,*
$$\Big(\forall v^1, v^2 \in V\Big)\Big(\langle T(v^1), T(v^2)\rangle_w = \langle v^1, v^2\rangle_v\Big).$$
2. *$T$ preserva la norma, es decir,*
$$\Big(\forall v \in V\Big)\Big(\|T(v)\|_w = \|v\|_v\Big).$$

**Prueba**:

1)⇒2) Inmediato, usando el primer item de la nota anterior.

2)⇒1) Ejercicio, use el hecho de que $\langle T(v^1 + v^2), T(v^1 + v^2)\rangle_w = \|T(v^1 + v^2)\|_w^2 = \|v^1 + v^2\|_v^2 = \langle v^1 + v^2, v^1 + v^2\rangle_v$, etc. ■

## Nota

*Sean* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$ *espacios vectoriales y una trasformación lineal* $T : V \longrightarrow W$, *entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $T$ *es una isometría.*
2. $d_w(T(v^1), T(v^2)) = d_v(v^1, v^2)$, *para todo* $v^1, v^2 \in V$.

*Donde* $d_v(v^1, v^2) = \|v^1 - v^2\|_v$, *similar para* $d_w$.

La prueba es inmediata. ■

## Proposición

*Sean* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ *espacios vectoriales y una aplicación* $T : V \longrightarrow W$, *entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$T$ preserva el producto interno.*
2. *$T$ es lineal y preserva el producto interno.*
3. *$T$ es lineal y preserva la norma.*

**Prueba**: Ejercicio. ■

## Proposición

*Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una isometría lineal, entonces $T$ es inyectiva.*

**Prueba**:

Veamos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}_{\mathbf{v}}$:

Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0}_W$, dado que $T$ es una isometría lineal, entonces

$$0 = \|\mathbf{0}\|_W = \|T(v)\|_W = \|v\|_V, \text{ entonces } v = \mathbf{0}_V,$$

por tanto $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}_{\mathbf{v}}$, es decir, $T$ es inyectiva.

■

## Proposición

*Sean* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ *espacios vectoriales de dimensión finita y* $T : V \longrightarrow W$ *una isometría lineal, entonces* $T$ *es sobreyectiva si, y solo si* $dim(V) = dim(W)$.

**Prueba**: Ejercicio. ■

## Proposición

*Sean* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *espacios vectoriales de dimensión finita y* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. $T$ *es un isometría lineal sobreyectiva.*
2. *Para toda base ortonormal* $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$, *se tiene que el conjunto*

$$T(\mathcal{B}) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$

   *es una base.*

3. *Existe una base ortonormal* $\mathcal{B}_0 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ *tal que*

$$T(\mathcal{B}_0) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$

   *es una base.*