Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

30 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $T(v^j) = \alpha_j v^j$, $j = 1, \cdots, n$ en cierta base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de V, donde $\alpha_j \neq \alpha_i$ para $j \neq i$. Supongamos, además, que existe una transformación lineal $L : V \longrightarrow V$ que conmuta con T, es decir, $T \circ L = L \circ T$.

Entonces, L es de la forma

$$L(v^j) = \beta_j v^j, \quad \text{para } j = 1, \cdots, n$$

Prueba:
Siendo $\{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de V, luego cada $L(v^j)$ para $j = 1, \cdots, n$, se puede escribir de la forma

$$L(v^j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k,$$

por hipótesis tenemos

$$T \circ L(v^j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} T(v^k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \alpha_k v^k,$$

además tenemos

$$T \circ L(v^j) = L \circ T(v^j) = L(T(v^j)) = L(\alpha_j v^j) = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k.$$

De las dos últimas igualdades se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\alpha_k v^k = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k,$$

luego para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj}(\alpha_k - \alpha_j) v^k = \mathbf{0},$$

siendo $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son l.i., también para $j \neq k$, $\alpha_k \neq \alpha_j$, entonces $b_{jk} = 0$ para $j \neq k$.
Por tanto,

$$L(v^j) = b_{jj} v^j = \beta_j v^j, \text{ para } j = 1, 2, \cdots, n.$$

Proyecciones:

Definición

Sean V un espacio vectorial, y dos subespacios $W, S \subset V$ tales que $V = W \oplus S$, entonces existen dos transformaciones lineales $P : V \longrightarrow V$, $Q : V \longrightarrow V$ definidas mediante

$$P(w+s) = w, \quad Q(w+s) = s, \quad w \in W, s \in S.$$

El subespacio W es el espacio fijo de P. La transformación lineal P es la **proyección** *de V sobre W, similar para Q.*

Proposición

Las proyecciones P y Q satisfacen

1. $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, *donde* $P^2 = P \circ P$.
2. $P \circ Q = Q \circ P = 0$.
3. $P + Q = \mathrm{I}$.

Prueba:

Para cada $w \in W$, $s \in S$ tenemos

1. $P^2(w+s) = P(P(w+s)) = P(w) = w = P(w+s)$. Similar para Q.
2. $(P \circ Q)(w+s) = P(Q(w+s)) = P(s) = \mathbf{0}$. Similar $Q \circ P$.
3. $(P+Q)(w+s) = P(w+s) + Q(w+s) = w + s = \mathrm{I}(w+s)$, por tanto $P + Q = \mathrm{I}$.

∎

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $P : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces P es una proyección si, y solo si $P^2 = P$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Si P es una proyección, entonces por proposicón anterior se tiene que $P^2 = P$.

$\Leftarrow$) Sea $P^2 = P$, entonces definamos

$$W = \{w \in V / P(w) = w\}, \quad S = \{s \in V / P(s) = \mathbf{0}\}.$$

Notamos que $W, S \subset V$ son subespacios y además $W \cap S = \{\mathbf{0}\}$. Ahora consideremos $v \in V$, y definamos $s = v - P(v)$, entonces $P(s) = P(v - P(v)) = P(v) - P(P(v)) = P(v) - P(v) = \mathbf{0}$. Por tanto, $s \in S$.

Notamos que

$$\begin{aligned} v = P(v) + (v - P(v)) = w + s \Rightarrow P(v) &= P(w+s) \\ &= P(w) + P(s) \\ &= P(w) \end{aligned}$$

donde $w = P(v) \in W$, $s \in S$. Por tanto $V = W \oplus S$.
Por tanto P es una proyección V sobre W.

$\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $P_1, P_2 : V \longrightarrow V$ proyecciones. Entonces $P_1 + P_2$ es una proyección si, y solo si $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Veamos que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 P$, siendo $P_1 + P_2$ una proyeccción:

$$\begin{aligned}(P_1 + P_2)^2 &= P_1^2 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 + P_2^2 \\ &= (P_1 + P_2) + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1,\end{aligned}$$

entonces $P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0 \Rightarrow P_1 \circ P_2 - P_2 \circ P_1 = 0$.
Por tanto $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$, y definamos para $j = 1; 2$

$$W_j = \{w \in W / P_j(w) = w\}, \quad S_j = \{w \in W / P_j(w) = \mathbf{0}\}$$

Pruebe que $P_1 + P_2$ tiene como subespacio a $(W_1 + S_1) + (W_2 + S_2)$ y luego use la proposición anterior para mostrar que $P_1 + P_2$ es una proyección.

Definición

Sean V un espacio vectorial, $W \subset V$ un subespacio, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Decimos que W es **invariante bajo** *T si $T(W) \subset W$.*

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $W, S \subset V$ sub-espacios con $W \cap S = \{\mathbf{0}\}$, $P : V \longrightarrow V$ una proyección sobre W, y además $T : V \longrightarrow V$ una transfomación lineal. Entonces W es invariante bajo T si, y solo si $P \circ T = T \circ P$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Como W es invariante bajo T, entonces, entonces
$(\forall w \in W)\Big((P \circ T)(w) = P(T(w)) = T(w) == T(P(w))\Big)$,
luego $P \circ T = T \circ P$.

$\Leftarrow$) Sea $w \in T(W)$, entonces $(\exists \widehat{w} \in W)(w = T(\widehat{w}))$, luego

$$P(T(\widehat{w})) = T(P(\widehat{w})) = T(\widehat{w}) = w \in W.$$

Por tanto $T(W) \subset W$, es decir, W es invariante bajo T.

$\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $T^2 = \mathrm{I}$, es decir T es una **involución**, *entonces existe una proyección $P : V \longrightarrow V$ tal que $T = 2P - \mathrm{I}$.*

Prueba:

Definamos $P = \dfrac{1}{2}(T + \mathrm{I})$, entonces

$$P^2 = \frac{1}{2}(T+\mathrm{I})\circ\frac{1}{2}(T+\mathrm{I}) = \frac{1}{4}\left(T^2+T\circ\mathrm{I}+\mathrm{I}\circ T+\mathrm{I}^2\right) = \frac{1}{2}(T+\mathrm{I}) = P.$$

Por tanto P es una proyección y así, $T = 2P - \mathrm{I}$.

$\blacksquare$

Recordar que un espacio vectorial V es de dimensión finita, entonces $dim(V) = dim(V^*)$, este hecho falla para el caso cuando $dim(V) = \infty$.

Definición

Una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *es llamada* **casi siempre nula**, *denotada* **csn**, *si*

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\alpha_j = 0,\ \textit{para todo } j \geq m)$$

Ejercicio

Pruebe que $V = \{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} / \alpha_j \in \mathbb{R},\ \textit{para todo } j \in \mathbb{N} \textit{ y es } \textbf{csn}\}$ *es un espacio vectorial con las operaciones usuales en* $\mathbb{R}$ *y* $\{e^1, e^2, \cdots\}$ *es una base de* V*, donde* $e^k = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k-1 \textit{ ceros}}, 1, 0, \cdots)$.

Esta base es **numerable**.

Sea V un espacio vectorial, y V^* su dual, entonces para cada $f \in V^*$ definamos la sucesión

$$\alpha_j = f(e^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Rrecíprocamente, toda sucesión $\{\beta_j\}$ de números reales determina una única función lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(e^j) = \beta_j, \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Luego el conjunto

$$V^* = \{\{\alpha_n\}/\alpha_j \in \mathbb{R}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$$

es un espacio vectorial real.

Proposición

Sea V un espacio vectorial real de dimensión infinita, entonces V y V^* no son isomorfos.

Sea V un espacio vectorial, entonces para cada $v \in V$ definamos la función $\varphi_v : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\varphi_v(f) = f(v)$$

la cual es una transformación lineal (ejercicio). Por tanto $\varphi_v \in V^{**}$, entonces podemos definir la función $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ mediante

$$\varphi(v) = \varphi_v.$$

Proposición

La función φ definida antes es una transformación lineal inyectiva.

Prueba:

Veamos que φ es lineal:

- Sean $v, w \in V$, entonces para cada $f \in V^*$ tenemos

$$\varphi_{v+w}(f) = f(v+w) = f(v) + f(w) = \varphi_v(f) + \varphi_w(f) = (\varphi_v + \varphi_w)(f)$$

Luego $\varphi_{v+w} = \varphi_v + \varphi_w$, es decir, $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.
Sea $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para cada $f \in V^*$ tenemos

$$\varphi_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f),$$

luego $\varphi_{\lambda v} = \lambda \varphi_v$, es decir, $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.
Por tanto, φ es lineal.

• Veamos que φ es inyectiva:
Sea $v \in \mathcal{N}(\varphi)$, entonces $\varphi(v) = 0$, luego $\varphi_v \equiv 0$, es decir, $(\forall f \in V^*)(f(v) = 0)$, -0r tanto $v = \mathbf{0}$.
Por tanto $\mathcal{N}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$, entonces φ es inyectiva.

■

Proposición

Sea V un espacio vectorial tal que $dim(V) < \infty$, entonces la función φ definida antes es un isomorfismo.

Prueba:
Ejercicio. (use la proposición anterior para probar que es inyectiva, y luego use este hecho para mostrar que es sobreyectiva).

■

Si $dim(V) < \infty$, entonces identificamos V con V^{**} vía el isomorfismo φ, es decir, se identifica todo $v \in V$ con $\varphi \equiv \varphi_v$, de modo que

$$v(f) = f(v), \quad \text{para cada } V \in V = V^{**}, f \in V^{*}.$$

Definición

*Un espacio $\mathbb{K}-$vectorial V es **reflexivo** si $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ es un isomorfismo.*

Sean V un $\mathbb{K}-$vectorial V con $dim(V) = \infty$, $S \subset V$ una base, con $dim(S) = \infty$. Dado $w \in S$, entonces definimos para $v \in S$

$$f_w(v) = \begin{cases} 1, & v = w \\ 0, & v \neq w \end{cases}$$

y extendemos por linealidad a todo V, y así obtenemos $f_w \in V^*$, y definamos la transformación lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$g(v) = 1, \text{ si } v \in S.$$

Proposición

Con las consideraciones dadas antes, se tiene que $\{f_w / w \in S\} \cup \{g\}$ *es linealmente independiente.*

Prueba:

Ejercicio (Suponga que (existen $\lambda, \lambda_1, \lambda_m \in \mathbb{K})(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k + \lambda g = 0)$, luego use el hecho de que si $S \subsetneq V$ y $dim(S) = \infty$). ■

Proposición

Si $dim(V) = \infty$, entonces φ no es un epimorfismo (es decir, no es sobreyectiva).

Prueba: Ejercicio. ■

Corolario

Si V es reflexivo, entonces $dim(V) < \infty$.

Prueba: Ejercicio (use la proposición anterior). ■

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto arbitrario, definimos

$$A^o = \{f \in V^*/f(v) = 0, \text{ para todo } v \in A\},$$

este conjunto es llamado **anulador** de A.

Nota

1. *A^o es un sub-espacio de V^*.*
2. *$V^o = \{0\}$.*
3. *$\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$.*
4. *Si $A \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$, entonces $A^o \neq V^*$.*
5. *Si $A \subset B \subset V$, entonces $A^o \supset B^o$.*

Ejercicio pruebe esta nota.

Proposición

Sean V un $\mathbb{K}-$espacio, $S \subset V$, con $dim(V) < \infty$. Entonces

1. $\dfrac{V^*}{S^o} \approx S^*$.
2. $dim(v) = dim(S) + dim(S^o)$

Prueba:

1. Sea $f \in V^*$, entonces definamos función $f' : S \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$f'(v) = f(v), \text{ para cada } v \in S,$$

esta función es la restricción al sub-espacio S.
Observamos que f' es lineal, es decir, $f' \in S^*$. Luego definamos $phi : V^* \longrightarrow S^*$ mediante

$$\phi(f) = f'$$

Ejercicio pruebe que ϕ es sobreyectiva y $\mathcal{N}(\phi) = S^o$; y con ello obtenga el item 1.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un sub-espacio, con $dim(V) < \infty$, entonces $S^{oo} = S$.

Prueba:
Como $dim(V) < \infty$, entonces en virtud de la identificación $V = V^{**}$ y $S = S^{**}$, de esta forma consideramos a S y S^{oo} como subconjuntos de V, entonces

$$\begin{aligned} S^{oo} &= \{\varphi_v / \varphi_v(f) = 0, \text{ para todo } f \in S^o\} \\ &= \{v \in V / f(v) = 0, \text{ para todo } f \in S^o\}. \end{aligned}$$

Además, para todo $v \in S$ se tiene que $f(v) = 0$, para cada $f \in S^o$, de donde $v \in S^{oo}$, es decir $S \subset S^{oo}$.
Lo demás queda como ejercicio. ∎

Sean U, V espacios vectoriales, $T : U \longrightarrow V$ una transformación, entonces la transformación $T^{\nabla} : V^* \longrightarrow U^*$ definida por

$$T^{\nabla}(f) = f \circ T,$$

se verifica fácilmente que T^{∇} es lineal, la cual es llamada la **transpuesta** de T.

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$