Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

28 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Corolario

Sea $A, B \in \mathbb{R}(n, n)$ *matrices, tales que* $A = B^2$*, entonces* $det(A) \geq 0$.

Prueba:

Basta usar la proposición (Propiedad Multiplicativa), es decir,

$$det(A) = det(B^2) = det(BB) = det(B)det(B) = \left(det(B)\right)^2 \geq 0$$

$\blacksquare$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}(n,n)$ una matriz. Entonces A es no-singular si, y solo si $det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible, entonces existe A^{-1}, es decir, $AA^{-1} = \mathrm{I}$, por tanto

$$det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(\mathrm{I}) = 1,$$

entonces $det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $det(A) \neq 0$. Luego, consideremos una base $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset \mathbb{R}(n,1)$, y definamos una transformación lineal $T : \mathbb{R}(n,1) \longrightarrow \mathbb{R}(n,1)$, mediante $T(x) = Ax$, entonces

$$det\Big([Av^1 \ Av^2 \cdots Av^n]\Big) = det(A)det\Big([v^1 \ v^2 \cdots v^n]\Big),$$

luego $det\Big([v^1 \ v^2 \cdots v^n]\Big) \neq 0$ por ser $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base, entonces $det\Big([Av^1 \ Av^2 \cdots Av^n]\Big) \neq 0$, luego $\{Av^1, Av^2, \cdots, Av^n\}$

Corolario

El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$*, con* $A \in \mathbb{R}(n, n)$ *y* $b \in \mathbb{R}(n, 1)$*, posee solución única si, y solo si* $det(A) \neq 0$*.*

1. Sean $v^1, v^2 \in \mathbb{R}(2,1)$ dos vectores no colineales, definamos

$$A\left(v^1, v^2\right) = \left|det\left(\begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}\right)\right|,$$

el cual representa el **área de un paralelogramo**.

2. Sean $v^1, v^2, v^3 \in \mathbb{R}(3,1)$ tres vectores no coplanares, definamos

$$Vol\left(v^1, v^2, v^3\right) = \left|det\left(\begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix}\right)\right|,$$

el cual representa el **volumen de un paralelepípedo**.

3. Generalizando, consideremos $v^1, \cdots, v^n \in \mathbb{R}(n,1)$, con $n \geq 4$, vectores linealmente independientes, definamos

$$Vol\left(v^1, \cdots, v^n\right) = \left|det\left(\begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{bmatrix}\right)\right|,$$

el cual representa el **volumen de un hiperparalelepípedo**.

Hasta ahora, para determinar la inversa de una matriz, tenemos dos métodos:

- usando sistemas de ecuaciones lineales, y
- por operaciones elementales.

En este caso proporcionaremos una fórmula explícita para obtener la inversa de una matriz no singular.

Dada la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(n, n)$, y sea $A_{ij} \in \mathbb{K}(n-1, n-1)$ la matriz obtenida eliminando la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna de A, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, entonces

1. $\Big(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\Big)\Big(c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})\Big)$.
   El número c_{ij} es llamado **cofactor** de a_{ij}.
2. la matriz $[c_{ij}]$ es llamada **matriz de cofactores** de A.
3. $Adj(A) = [c_{ij}]^t$ es llamada la **adjunta** de A.

Proposición (Fórmula de la Inversa)

Con las notaciones dadas anteriormente, se tiene

$$A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot \mathrm{I}.$$

Prueba:

$$A \cdot Adj(A) = [a_{ij}][c_{ij}]^t = [d_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{jk}\right],$$

de donde

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) \end{aligned}$$

Ahora determinemos d_{ij}, $i \neq j$.
Consideremos la matriz B, la cual es la matriz A salvo que la fila j es idéntica a la fila i. Por tanto

$$
\begin{aligned}
0 = det(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} det(A_{jk}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{jk} \\
&= d_{ij}, \qquad \text{para todo} \quad i \neq j.
\end{aligned}
$$

En cualquier caso tenemos,

$$A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot \mathrm{I}.$$

En el caso de que A sea no singular, entonces tenemos

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)},$$

dado que $det(A) \neq 0$.

También podemos determinar el rango de una matriz usando determinantes, antes necesitamos las siguientes.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}(m, n)$ *una matriz, llamaremos* **menor de orden** p $(1 \leq p \leq \text{mín}(\{m, n\}))$ *al determinante de cualquier submatriz de* A *de orden* $p \times p$.

Definición

Se llama **rango por menores** *de una matriz* A*, denotado por* $r_m(A)$*, al orden de la mayor submatriz cuadrada cuyo determinantes sea no nulo.*

Nota

De acuerdo a las definiciones anteriores, tenemos que $r_m(A) = p$.

Proposición

Para toda matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$, tenemos que $r_m(A) = r(A)$.

Prueba:
Supongamos que $r_m(A) = p$ y $r(A) = q$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que submatriz de orden $p \times p$, está conformada por las primera p filas y las primeras p columnas de A, denotada por S_p, esto es debido a que el intercambio de filas y el intercambio de columnas no modifica $r_m(A)$ ni $r(A)$.
Observar que $det(S_p) \neq 0$, entonces la filas, así como las columnas de S_p son linealmente independientes, estas p filas son las primeras p filas de A, entonces

$$r_m(A) = p \leq r(A) = q.$$

El recíproco, queda como ejercicio.

La regla de Cramer, es debido al matemático suizo Gabriel Cramer (31/07/1704–04/01/1752).
Consideremos un sistema de la forma $Ax = b$, donde $b \in \mathbb{K}(n,1)$ y $A = [a^1 \cdots a^n] \in \mathbb{K}(n,n)$, por tanto este sistema se puede expresar de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = b,$$

con $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{K}(n,1)$.

Proposición (Regla de Cramer)

Con las notaciones dadas anteriormente, tenemos

$$\Big(\forall j = 1, \cdots, n\Big)\Big(x_j det(A) = det([a^1 \cdots a^{j-1} \ b \ a^{j+1} \cdots a^n])\Big)$$

Prueba: De

$$\begin{aligned} det([a^1 \cdots a^{j-1} \ b \ a^{j+1} \cdots a^n]) &= det([a^1 \cdots a^{j-1} \ \sum_{i=1}^{n} x_i a^i \ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i det([a^1 \cdots a^{j-1} \ a^i \ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= x_j det([a^1 \cdots a^{j-1} \ a^j \ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= x_j det(A), \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \cdots, n$. Los otros sumandos se anulan por tener dos columnas iguales.

Nota

Si A es una matriz no singular, entonces $det(A) \neq 0$, por tanto

$$x_j = \frac{det([a^1 \cdots a^{j-1} \; b \; a^{j+1} \cdots a^n])}{det(A)},$$

para todo $j = 1, \cdots, n$.

Sea V es espacio vectorial, con $dim(V) = n$, ahora debemos calcular la base dual de la base $\mathcal{W} = \{w^1, \cdots, w^n\} \subset V$, entonces debemos resolver n sistemas de ecuaciones lineales $n \times n$.
Sea $\mathcal{V} = \{v^1, \cdots, v^n\}$ su base dual de $\mathcal{W}$ tales que

$$v^J = x_{1j}w^1 + \cdots + x_{nj}w^n, \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$\langle w^i, v^j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

de donde obtenemos

Por facilidad tomemos el caso $j = 1$, entonces tenemos el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc}
\|w^1\|^2 x_1 & + & \langle w^1, w^2\rangle x_2 & + & \cdots & + & \langle w^1, w^n\rangle x_n & = & 1 \\
\langle w^2, w^1\rangle x_1 & + & \|w^2\|^2 x_2 & + & \cdots & + & \langle w^2, w^n\rangle x_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
\langle w^n, w^1\rangle x_1 & + & \langle w^n, w^2\rangle x_2 & + & \cdots & + & \|w^n\|^2 x_n & = & 0
\end{array}$$

de donde la solución del sistema depende del valor del determinante de la matriz de sus coeficientes

$$det([\langle w^i, w^j\rangle]).$$

Entonces por la Regla de Cramer el sistema anterior tiene solución única si, y solo si $det([\langle w^i, w^j\rangle]) \neq 0$. El determinante $det([\langle w^i, w^j\rangle])$ se le llama **gramiano** de los vectores $w^1, \cdots, w^n$.

Definición

Se llama **gramiano** *de los* $v^1, \cdots, v^r \in V$, *al determinante*

$$det([\langle v^i, v^j \rangle])$$

y lo denotamos por $G(v^1, \cdots, v^r)$.

Si $r = 1$, entonces $G(v) = det([\langle v, v \rangle]) = \|v\|^2 > 0$ si, y solo si $v \neq \mathbf{0}$.
Si $r = 2$, entonces

$$G(v, w) = \begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \|w\|^2 \end{vmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle w, v \rangle|^2 \geq 0$$

(desigualdad de Schwartz) y $G(v, w) > 0$ si, y solo si v, w son l.i.

En general tenemos la siguiente

Proposición

Sean $v^1, \cdots, v^r \in V$. *Entonces*

$$G(v^1, \cdots, v^r) \neq 0 \quad \textit{si, y solo si} \quad v^1, \cdots, v^r \quad \textit{son l.i.}$$

Prueba:
Ejercicio. (sug. pruebe que $G(v^1, \cdots, v^r) = 0$ si, y solo si $v^1, \cdots, v^r$ son l.d.).

∎

1. $G(v) = \|v\|^2$, para todo $v \in V$, representa el cuadrado de la longitud del vector v.
2. Sea $v, w \in V$ y θ el ángulo entre dichos vectores, entonces

$$\begin{aligned} G(v,w) &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2(cos(\theta))^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2(1-(cos(\theta))^2) \\ &= \Big(\|v\|\|w\|sen(\theta)\Big)^2, \end{aligned}$$

es el cuadrado del área del paralelogramo de lados v, w.

3. Sean los vectores $u, v, w \in V$ no coplanares (es decir, l.i.), sea $S = \mathscr{L}(\{u, v\})$ el plano generado por los vectores u y v, entonces

$$V = S \oplus S^{\perp},$$

como $w \in V$, entonces

$$w = z + w', \quad \text{donde} \quad z = xu + yv \in S, \quad w' \in S^{\perp}.$$

Además, tenemos

$$\langle w, w' \rangle = \|w'\|^2 \quad \text{y} \quad \|w'\| = \|w - z\| = dist(w, S),$$

donde $dist(w, S)$ es la distancia de w a S. Luego tenemos

$$
\begin{aligned}
G(w,u,v) &= \begin{bmatrix} \langle w,w\rangle & \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle \\ \langle u,w\rangle & \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,w\rangle & \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{bmatrix} \\
&= |dist(w,S)|^2 G(u,v),
\end{aligned}
$$

Observamos que $G(w,u,v)$ es el cuadrado del volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes u, v y w, donde hemos tomado por base al paralelogramo de lados u y v, y por altura

$$\|w'\| = \|w - z\| = dist(w,S)$$

En general tenemos la siguiente

Proposición

Sean los vectores $v^1, \cdots, v^r \in V$ *linealmente independientes,* $S = \mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^r\})$ *y* $w \in V \backslash S$*, entonces*

$$G(w, v^1, \cdots, v^r) = |dist(w, S)|^2 G(v^1, \cdots, v^r).$$

Prueba: Ejercicio. ■