Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

14 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

En general tenemos, sea $v \in V$ cualquiera, entonces podemos escribir en función de las bases Γ y Ω como sigue

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j w^j$$

que determinan los vectores

$$x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t, \qquad \text{y} \qquad y_v = (y_1, \cdots, y_n)^t.$$

Proposición

Con las notaciones anteriores,se tiene

1. $PQ = \mathrm{I}.$
2. $Px_v = y_v \quad y \quad Qy_v = x_v.$

Prueba:

1. Note que

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\sum_{t=1}^{n} \beta_{ti} v^t \right) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ij} \beta_{ti} \right) v^t.$$

   Como los vectores v^j son linealmente independiente, entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{ti} = \delta_{tj},$$

   donde δ_{tj} es el delta de Kronecker.

Además tenemos,

$$(QP)_{tj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ti}.$$

Por tanto se tiene $QP = \mathrm{I}$.

2. Se tiene que $v = \sum_{j=1}^{n} y_j w^j$, y

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v^i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} w^j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i \right) w^j.$$

De las dos últimas relaciones tenemos

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = (Px_v)_j, \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Luego $y_v = Px_v$ y por el item (1) se obtiene que $Qy_v = x_v$.

Consideremos V y W espacios vectoriales, y las bases $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ y $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ para V, y $\{w^1, w^2, \cdots, w^m\}$ y $\{f^1, f^2, \cdots, f^m\}$ para W. Entonces

$$v^j = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} e^t, \quad w^t = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kt} f^k,$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$ y $t = 1, 2, \cdots, m$, entonces estas expresiones determinan las matrices de cambio de base

$$P = [\alpha_{tj}] \in \mathbb{K}(n, n), \quad Q = [\beta_{kt}] \in \mathbb{K}(m, m).$$

Además, dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$, se tiene

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$T(e^t) = \sum_{k=1}^{m} b_{kt} f^k, \quad t = 1, 2, \cdots, n,$$

determinan las matrices asociadas a T, $A_T = [a_{ij}]$, $B_T = [b_{kt}]$.

Proposición

Con las notaciones dadas se tiene

$$A_T = Q^{-1} B_T P$$

. **Prueba**:

Notamos

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ki} f^k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} a_{ij} \right) f^k$$

$$T(v^j) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} T(e^t) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{kt} f^k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{n} b_{kt} \alpha_{tj} \right) f^k.$$

Como $\{f^1, f^2, \cdots, f^m\}$ *es una base, y de la igualdad anterior tenemos*

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} a_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{kt} \alpha_{tj}, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Por tanto, $(QA_T)_{kj} = (B_T P)_{kj}, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

Entonces $QA_T = B_T P$. ■

Observación

La proposición anterior no indica que dos matrices asociadas a una transformación lineal son equivalentes, luego podemos escribir

$$A_T = Q^{-1} B_T P.$$

Para un caso particular $W = V$ *se tiene, para dos bases* $\{v^1, \cdots, v^n\}$ *y* $\{w^1, \cdots, w^n\}$ *de* V*, obtenemos*

$$v^j = \sum_{t=1}^{j} \alpha_{tj} w^t, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Si $P = [\alpha_{ij}]$ *y* $T : V \longrightarrow V$ *una transformación lineal, entonces tenemos*

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$T(w^t) = \sum_{k=1}^{n} b_{kt} w^k, \quad t = 1, 2, \cdots, n,$$

estas relaciones nos proporciona las matrices $A_T = [a_{ij}]$, $B_T = [b_{kt}]$ asociadas a T.
Por tanto las notaciones anteriores nos conduce a la siguiente

Proposición

$A_T = P^{-1} B_T P.$

Prueba: Ejercicio. ∎

Esta proposición nos indica que dos matrices asociadas a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ son semejantes.

Recordemos que dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$, denotamos por $\mathcal{F}(A)$, $\mathscr{C}(A)$ los espacios generado por los vectores fila y columna de A respectivamente, también $r_f(A) = dim(\mathcal{F}(A))$ y $r_c(A) = dim(\mathscr{C}(A))$ el rango de A por filas y por columnas de A respectivamente.

Teorema (Teorema del Rango)

Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$, entonces

$$r_f(A) = r_c(A).$$

Denotemos por $r(A) = r_f(A) = r_c(A)$, el **rango** *de A.*

Proposición

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ *y*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}(n,1) / Ax = \mathbf{0}\}.$$

Entonces

$$n = dim\Big(\mathcal{N}(A)\Big) + r_c(A).$$

Prueba:
Sea la transformación lineal $L_A : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(m,1)$ definida por

$$L_A(x) = Ax,$$

consideremos $A = [a^1 a^2 \cdots a^n]$ (vectores columnas de A), entonces

$$L_A(x) = Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j,$$

entonces tenemos

$$Im(L_A) = \mathscr{L}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}),$$

y por tanto

$$r_c(A) = dim(Im(L_A)).$$

Luego tenemos

$$n = dim(\mathcal{N}(L_A)) + dim(Im(L_A)) = dim(\mathcal{N}(L_A)) + r_c(A).$$

$\blacksquare$

Ahora veamos una de las demostraciones del teorema del rango

Prueba:

Consideremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A) &= \{x \in \mathbb{K}(n,1)/Ax = 0\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1,2,\cdots,m\Big\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/ \langle a^i, x\rangle = 0,\ i = 1,2,\cdots,m\Big\}, \quad a^i \text{ vectores filas} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/ \langle y, x\rangle = 0,\ \text{para todo } y \in \mathcal{F}(A)\Big\} \\
&= \Big[\mathcal{F}(A)\Big]^{\perp}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$n = dim(\mathcal{F}(A)) + dim\left(\Big[\mathcal{F}(A)\Big]^{\perp}\right) = r_f(A) + dim(\mathcal{N}(A)).$$

Por la proposición anterior tenemos que $r_f(A) = r_c(A)$. ∎

Proposición

Dadas $A, B \in \mathbb{K}(m, n)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *A y B son equivalentes.*
2. *A y B son asociados a una misma transformación lineal.*
3. *$r(A) = r(B)$.*

Prueba: Ejercicio. ■

Empezaremos el estudio con las formas bilineales y luego lo generalizaremos

Definición

Sea V, W espacios vectoriales, una **forma bilineal** $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación que es lineal en cada una de sus componentes, es decir, para todo $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w); \quad b(\alpha v, w) = \alpha b(v, w)$.
2. $b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w'); \quad b(v, \alpha w) = \alpha b(v, w)$.

Definamos el connjunto

$$\mathcal{B}(V \times W) = \{b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R} / b \text{ es bilineal}\}$$

con las operaciones dadas antes este conjunto es un espacio vectorial.

Consideremos $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ bases de V y W respectivamente, entonces sea $b_{ij} = b(v^i, w^j)$ define una matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}(m,n)$, la cual es llamada **matriz de la forma bilineal** b relativamente a las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$.
Si tenemos las base de $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ V y W respectivamente, entonces podemos definir la matriz $B = [b_{ij}]$ de la siguiente forma

$$b_{ij} = b(v^i, w^j),$$

entonces una forma bilineal $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ queda determinada, esto es posible, dado que $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i \in V$ y $w = \sum_{j=1}^{n} y_j w^j \in W$, entonces

$$b(v,w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(v^i, w^j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b_{ij}.$$