Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

25 de enero del 2021

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine la forma canónica de Jordan de cada una de las matrices indicadas.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la forma canónica de Jordan.
Calculemos los valores propios de A, es decir hallemos las raíes del polinomio característico asociadao

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

cuyas las raíces son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (multiplicidad algebraica dos).

Ahora determinemos los vectores propios correspondientes a dichos valores propios

- $\lambda_1 = -1$, para ello debemos resolver el sistema $(A - \lambda_1 \mathrm{I})v^1 = \mathbf{0}$, entonces

$$(A + \mathrm{I})v^1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  donde se tiene que $v_2 = v_2$ y $v_3 = 0$, luego $v^1 = v_1(1,1,0)^t$ con $v_1 \neq 0$, entonces escogemos $v_1 = 1$.

- $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad dos), en este caso resolvamos el sistema $(A - \lambda_2 \mathrm{I})v^2 = \mathbf{0}$, luego

$$(A - 2\mathrm{I})v^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de dónde, se tiene $v_2 = 0$, y $v_3 = v_1$, por tanto tenemos el vector propio $v^2 = (1, 0, 1)^t$.
Ahora debemos encontrar otro vector w^2 no nulo tal que sea solución del sistema $(A - \lambda_2)w^2 = (A - 2\mathrm{I})w^2 = v^2$, entonces

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por tanto, nos esncontramos con $w_2 = 0$ y $-w_1 + w_3 = 1$, en este caso podemos elegir $w_1 = 0$ y así $w_3 = 1$, luego el vector $w^2 = (0, 0, 1)^t$ es lineamente indiependiente a $v^2 = (1, 0, 1)^t$, de esta manera tenemos

$$P = [v^1 \ v^2 \ w^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J(A) \end{aligned}$$

Halle la forma canónica de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero determinemos el polinomio característico

$$p_{_A} = (\lambda - 1)^4(\lambda - 2)$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad cuatro) y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_2 = 2$

Al resolver el sistema $(A - 2\mathrm{I})v^5 = \mathbf{0}$, con $v^5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^t$, nos encontramos con $v_1 = 14v_4$, $v_2 = 4v_4$, $v_3 = 2v_4$ con $v_4 \in \mathbb{R}$ no nulo, y $v_5 = 0$ entonces el vector propio $v^5 = (14, 4, 2, 1, 0)^t$ correspondiente. En este caso, debemos analizar $\mathcal{N}(E)$, donde $E = (A - 1\mathrm{I})^4$, y como $dim(E) \leq 4$, entonces debemos encontrar $v^4 \in \mathcal{N}(E)$ tal que v^4, en seguida debemos determinar los loss vectores v^3, v^2 y v^1 como sigue

$$v^3 = (A - \mathrm{I})v^4 \implies v^3 = (0, 0, 2, 0, 0)$$
$$v^2 = (A - \mathrm{I})^2 v^4 \implies v^2 = (6, 4, 0, 0, 0)$$
$$v^1 = (A - \mathrm{I})^3 v^4 \implies v^1 = (8, 0, 0, 0, 0)$$

por tanto

$$P = [v^1 \; v^2 \; v^3 \; v^4 \; v^5] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que si $A \in \mathbb{C}(n, n)$ es nilpotente de índice $k \in \mathbb{N}$, entonces $A^k = 0$y $A^{k-1} \neq 0$.
Recordar que $(1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \cdots) = 1$,
si $1 + a \neq 0$ entonces
$$(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \cdots .$$
Luego $(\mathrm{I} + A)^{-1} = \mathrm{I} - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \cdots + A^{k-1}$
Si hacemos $B = -A$, tenemos un resultado similar.

Ejercicio

1. *Sea la matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) *Pruebe que* $N = A - 2\mathrm{I}$ *es nilpotente*
   b) *Halle una base de Jordan de* N, *y luego de* A
2. *Sea la matriz* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   a) *Calcule el polinomio característico de* B.
   b) *¿ cuál es la dimendión de* $\mathcal{N}(A - 3\mathrm{I})$*? ¿ Qué puede decir de* $\mathcal{N}(A - 2\mathrm{I})^2$*?*