Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

23 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Definición

Sean V, W *espacios vectoriales sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ *una función tal que para todo* $u, v \in V$ *y todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *se tiene*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Esta función T *es llamada* **transformación lineal**.

Ejemplo

1. *La función* $0 : V \longrightarrow W$ *nula, es una transformación lineal.*
2. *La función* $I : V \longrightarrow W$ *identidad, es una transformación lineal.*
3. *Sean* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial con producto interno,* $u \in V$ *fijo y* $T : V \longrightarrow V$ *una función definida por*
$$(\text{para cada } v \in V)(T(u, v) = \langle u, v \rangle)$$
es una transformación lineal.
4. *La función* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *definida*
$$T(x) = y,$$
donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, *y para* $k = 1, 2, \cdots, n$, $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_k$; *los* a_{jk} *son constantes.*

Ejemplo (continuación)

5. **Proyección sobre un subespacio** *Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un subespacio y consideremos otro subespacio $W \subset V$, tal que $V = S \oplus W$. la proyección de V sobre S a lo largo de W, $P : V \longrightarrow S$ está definida*

$$P(v) = s, \quad \textit{donde} \quad v = s + w \in S \oplus W.$$

   También es una transformación lineal.

6. **Rotación en el plano** *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un ángulo, una rotación (en el sentido antihorario), de magnitud θ, alrededor del origen del sistema de coordenadas, es decir, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, lleva un vector v, a un nuevo vector v' la cual es denotada por $R_\theta(v) = v'$.*

Consideremos $v = (v_1, v_2)$ *y* $v' = (v_1', v_2')$, *formando los ángulos* φ *y* $\theta + \varphi$ *con el eje* X *respectivamente, entonces tenemos* $\|v'\| = \|v\|$ *y*

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \|v\| cos(\varphi), & v_2 &= \|v\| sen(\varphi), \\
v_1' &= \|v'\| cos(\theta + \varphi) & &= \|v\|(cos(\theta)(cos(\varphi) - sin(\theta)(sin(\varphi)) \\
& & &= v_1 cos(\theta) - v_2 sen(\theta), \\
v_2' &= \|v'\| sen(\theta + \varphi) & &= \|v\|(sen(\theta)(cos(\varphi) + cos(\theta)(sin(\varphi)) \\
& & &= v_1 sen(\theta) + v_2 cos(\theta).
\end{aligned}
$$

Luego se obtiene

$$R_\theta(v) = (v_1 cos(\theta) - v_2 sen(\theta), v_1 sen(\theta) + v_2 cos(\theta)),$$

y en su forma matricial se titene

$$R_\theta(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, entonces en toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $(\forall v \in V)\Big(T(-v) = -T(v)\Big)$.
3. $(\forall v, w \in V)\Big(T(v - w) = T(v) - T(w)\Big)$.
4. $(\forall v^j \in V, \alpha_j \in \mathbb{K}, j = 1, \cdots, n,\ y\ n \in \mathbb{N})$
$$\left(T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v^j)\right).$$

Prueba:

1. $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lo demás queda como ejercicio.

Definición (Núcleo e Imagen)

Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces definimos los conjuntos

1. $\mathcal{N}(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\}$.
2. $Im(T) = \{w \in W / w = T(v),$ *para algún* $v \in V\}$,

que son llamados **núcleo** *de T e* **imagen** *de T respectivamente.*

Nota

Observamos que $\mathcal{N}(T) \subset V$ e $Im(T) \subset W$ son subespacios.

Definición

Sean V, W *espacios vectoriales, y* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal, entonces se tiene*

1. T *es un* **sobreyectiva** *(también llamado* **epimorfismo***) si* $T(V) = W$.
2. T *es un* **inyectiva** *(también llamado* **monomorfismo***) si* T *es una función inyectiva.*
3. T *es un* **isomorfismo** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva si, y solo si $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Prueba:

$\Longrightarrow$) Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$, como T es inyectiva, entonces se tiene que $v = \mathbf{0}$.
Luego $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

$\Longleftarrow$) Sean $v, w \in V$ tales que $T(v) = T(w)$, como T es lineal tenemos $T(v - w) = \mathbf{0}$, entonces $v - w \in \mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.
De donde $v = w$, por tanto T es inyectiva.

$\blacksquare$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ y $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ bases de V y W respectivamente, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $(\text{para cada } j = 1, 2, \cdots, k)(T(v^j) = w^j)$.

Prueba:

Como $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ es una base, entonces cada $w \in W$ puede ser expresado de manera única

$$w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j,$$

donde $(\text{para cada } j = 1, 2, \cdots, k)(\alpha_j \in \mathcal{K})$. Definamos la aplicación $T : V \longrightarrow W$ mediante

$$T(v) = w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j,$$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ generadores de V (no necesariamente una base) y $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ una colección, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $(\text{para cada } j = 1, 2, \cdots, k)(T(v^j) = w^j)$ si, y solo si

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = \mathbf{0} \ \textit{implica} \ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j = \mathbf{0},$$

donde $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para cada $j = 1, \cdots, k$.

Prueba

$\Longrightarrow$) Como T es lineal,y sean $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para cada $j = 1, \cdots, k$ tal que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = \mathbf{0}$ entonces

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) = T\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j T\left(v^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j.$$

$\Longleftarrow$) Como $\mathcal{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}) = V$, entonces para cada $v \in V$, existen escalares $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, k$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j.$$

Definamos la función $T : V \longrightarrow W$ mediante

$$T(v) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j.$$

Veamos que T está bien definida: supongamos que existen escalares $\beta_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, k$ tal que

$$v = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j - \beta_j)v^j = \mathbf{0} \overset{\text{hipótesis}}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{k}(\alpha_j - \beta_j)w^j = \mathbf{0},$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j w^j = \sum_{j=1}^{k}\beta_j w^j,$$

por tanto T está bien definida.
Veamos que T es lineal:
Sean $u, v \in V$, entonces existen escalares $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, k$ tales que

$$u = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j v^j, \quad v = \sum_{j=1}^{k}\beta_j v^j \quad \text{entonces} \quad u + v = \sum_{j=1}^{k}(\alpha_j + \beta_j)v^j$$

luego

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \sum_{j=1}^{k}(\alpha_j+\beta_j)w^j \\ &= \sum_{j=1}^{k}\alpha_j w^j + \sum_{j=1}^{k}\beta_j w^j \\ &= T(u)+T(v). \end{aligned}$$

Similar para $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ (ejercicio)
Por tanto T es lineal.

∎

Corolario

Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ no nulo, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces existe una transformación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \alpha$.
En particular si $v \neq \mathbf{0}$, entonces existe una transformación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(v) \neq 0$.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales. Una transformación lineal, entonces $T : V \longrightarrow W$ es inyectiva si, y solo si, lleva vectores l.i en vectores l.i.

Prueba:

$\Longrightarrow$) Sean $v^1, v^1, \cdots, v^m \in V$ vectores l.i. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 T(v^1) + \cdots + \alpha_m T(v^m) = \mathbf{0},$$

como T es lineal tenemos

$$T(\alpha_1 v^1 + \cdots + \alpha_m v^m) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

dado que T es inyectiva, se tiene

$$\alpha_1 v^1 + \cdots + \alpha_m v^m = \mathbf{0},$$

por hipótesis los vectores $v^1, \cdots, v^m$ son l.i., entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, es decir $T(v^1), \cdots, T(v^m)$ son l.i.

$\Longleftarrow$) Ejercicio

$\blacksquare$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, de dimensión finita, $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal. Si T es un isomorfismo, entonces $dim(V) = dim(W)$.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, con $dim(V) = n$, $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal. Entonces

$$dim(V) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)).$$

Prueba:
Sea $u^1, \cdots, u^r$ una base $\mathcal{N}(T) \subset V$, entonces por el teorema de completación, existen $v^1, \cdots, v^t \in V$ tales que

$$u^1, \cdots, u^r, v^1, \cdots, v^t$$

es una base de V.
Por tanto $T(u^1), \cdots, T(u^r), T(v^1), \cdots, T(v^t)$ son l.i.
Ahora sea $w \in T(V) = Im(T)$, entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Luego existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_t \in \mathbb{K}$ tal que

$$v = \alpha_1 u^1 + \cdots + \alpha_r u^r + \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_t v^t,$$

de donde

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\alpha_1 u^1 + \cdots + \alpha_r u^r + \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_t v^t) \\ &= \alpha_1 T(u^1) + \cdots + \alpha_r T(u^r) + \beta_1 T(v^1) + \cdots + \beta_t T(v^t) \end{aligned}$$

por tanto $T(u^1), \cdots, T(u^r), T(v^1), \cdots, T(v^t)$ es una base de W. Por tanto

$$n = dim(V) = r + t = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)).$$

$\blacksquare$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, con $dim(V) = dim(W) < \infty$, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si, y solo si T es sobreyectiva.

Prueba:

$\Longrightarrow$) Notar que si T es inyectiva si, y solo si $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, por tanto $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$.
Además tenemos

$$\begin{aligned} dim(V) &= dim(\mathcal{N}(T)) + dim(T(V)) \\ &= dim(T(V)) \overset{\text{hipótesis}}{=} dim(W) < \infty, \end{aligned}$$

como $T(V) \subset W$ y por una proposición del capítulo anterior tenemos

$$T(V) = W.$$

$\Longleftarrow$) Ejercicio

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y una aplicación de paso cociente $\pi : V \longrightarrow \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$, entonces existe una transformación lineal $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow W$ definida por

$$\widehat{T}(v + \mathcal{N}(T)) = T(v),$$

tal que

$$T = \widehat{T} \circ \pi$$

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

1. $T = \widehat{T} \circ \pi$.
2. $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow Im(T)$.

Prueba:

Veamos que $\widehat{T}$ esté bien definida:

Sean $u, v \in V$ tales que $\{u\} + \mathcal{N}(T) = \{v\} + \mathcal{N}(T)$, entonces $u - v \in \mathcal{N}(T)$, por tanto $T(u-v) = \{\mathbf{0}\}$, de donde $T(u) = T(v)$. Entonces

$$\widehat{T}(\{u\} + \mathcal{N}(T)) = T(u) = T(v) = \widehat{T}(\{v\} + \mathcal{N}(T)).$$

Luego $\widehat{T}$ está bien definida.

Lo demás queda como ejercicio. ■