Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

7 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Cálculo de la inversa mediante operaciones elementales Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ una matriz inversible y deseamos encontrar su inversa, Para ello consideremos la matriz de orden $n \times 2n$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I} \end{array}\right],$$

donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$.
Luego procedemos a multiplicar, por la izquierda, por matrices elementales $E_1, E_2, \cdots, E_k$, tales que

$$\left[\begin{array}{c|c} E_k E_{k-1} \cdots E_1 A & E_k E_{k-1} \cdots E_1 \end{array}\right],$$

nos produzca $E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = \mathrm{I}$, y por tanto

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1.$$

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

halle su inversa. Para ello procedamos como sigue:

$$\left[\, A \,\middle|\, \mathrm{I} \,\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicamos la primera fila por -2 y luego la sumamos a la segunda

$$\xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

ahora, multiplicamos la segunda fila por 2 y luego la sumamos a la primera.

$$\xrightarrow{E_{12}(2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

ahora, multiplicamos la primera fila por 1 y luego la sumamos a la segunda.

$$\xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

Finalmente, multiplicamos por $-0,5$ la segunda fila

$$\xrightarrow{E_{2}(-0{,}5)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right].$$

De donde la inversa de la matriz A, resulta

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Proposición

Una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si sus vectores columnas son linealmente independientes

Prueba:
Sean $a^1, \cdots, a^n$ los vectores columnas de A, $L_A : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$ la transformación lineal definida

$$L_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$$

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible, y que existe $x \in \mathbb{K}(n,1)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = \mathbf{0}, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t,$$

entonces $L_A(x) = \mathbf{0}$, esto implica que $Ax = \mathbf{0}$, luego

$$x = \mathrm{I}x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de donde $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Por tanto $a^1, a^2, \cdots, a^n$ son linealmente independientes.

$\Leftarrow$) Si $L_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j = \mathbf{0}$, y como los vectores columnas de A son linealmente independientes, entonces $x = \mathbf{0}$.
Por tanto L_A es inyectiva y por el primer corolario de la proposcicón se tiene que A es inversible.

$\blacksquare$

Proposición

Una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si los vectores fila son linealmente independientes.

Prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible.
Sean $a^1, \cdots, a^n$ los vectores columnas de A y

$$\mathcal{F}(A) = \mathscr{L}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\})$$

es espacio de filas de A.

Note que las operaciones elementales fila sobre A, produce una de los siguientes efectos:
a^i es cambiado

1) por λa^i, con $\lambda \neq 0$, ó
2) por $a^i + \lambda a^j$ con $j \neq i$, ó
3) por intercambio con a^j, donde $j \neq i$.

Esto significa, el espacio fila $\mathcal{F}(A)$ no es modificado por ninguna de las operaciones elementales, es decir

$$\text{(para toda matriz elemental } E)\Big(E\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A)\Big). \tag{1}$$

Dado que A es inversible, existen matrices elementales E_j tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = \mathrm{I}.$$

Aplicamos en forma sucesiva (1) obteniéndose

$$\mathcal{F}(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_1 \mathscr{L}(A) = \mathcal{F}(\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}) = \mathbb{K}(1, n),$$

donde $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ es la base canónica de $\mathbb{F}(1, n)$, con ello tenemos que las filas $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ de A generan $\mathbb{F}(1, n)$ y por tanto es una base, es decir, que estos vectores son linealmente independientes.

$\Leftarrow$) Supongamos que los vectores fila $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ de A son linealmente independientes.
Luego estos vectores constituyen una base para $\mathbb{K}(1, n)$, entonces podemos expresar los vectores canónicos j, $j = 1, \cdots, n$ como

$$e^j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} a^k, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Definamos la matriz $B = [\beta_{ij}]$, de donde $BA = \mathrm{I}$, es decir, A es inversible.

Estas matrices tienen la facilidad de transformar una matriz para su mayor facilidad de operar.

Definición

Una matriz de orden $m \times n$ es **escalonada reducida** *si*

1. *El primer* **elemento no nulo** *de un fila no nula es* 1*. Este se denomina* $1-$**capital**.
2. *Toda fila cuyas componentes son todos ceros está por debajo de aquellas filas no nulas.*
3. *En cada columna donde aparece el* $1-$*capital, sus demás componentes son ceros.*
4. *Si son r filas no nulas, y si el $1-$capital de la $i-$ésima fila está en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

Proposición

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$, existen matrices elementales $E_j \in \mathbb{K}(m,m)$ tales que

$$E_r E_{r-1} \cdots E_1 A = A_0$$

es una matriz escalonada reducida

Prueba:
Usaremos inducción sobre m.
• $m = 1$, en este caso se tiene que $A \in \mathbb{K}(1,n)$ posee una única fila, entonces

1. todos sus elementos son ceros, ó
2. sea $c \neq 0$ el primer elemento no nulo, entonces $E_1(c^{-1})A$.

En cualquier caso tenemos una matriz escalonada reducida

- Supongamos que hasta m el enunciado es válido (**H I**)
- Veamos para $m+1$:

Sea c el primer elemento no nulo del primer vector columna de A, que se encuentra en la fila j.
Luego c estará en la primera fila si $E_1A = E_{j1}A$, de donde al multiplicar por $E_2 = E_1(c^{-1})$ se tiene

$$E_2E_1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & * & & & * \end{bmatrix},$$

donde $*$ representa cualquier elemento de $\mathbb{K}$.

En forma sucesiva multiplicamos las matrices $E_{j1}(*)$ se convierten en cero los elementos debajo del primer $1-$capital y con ello tenemos

$$E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}, \text{ con } C \in \mathbb{K}(m.n-1).$$

Por hipótesis de inducción, existen matrices elementales F_j de orden m tales que

$$F_sF_{s-1}\cdots F_1C = C_0$$

es una matriz escalonada reducida. Las matrices elementales

$$E_j^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & F_j & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad j = 1, \cdots, s$$

son tales que

$$E_s^{'} \cdots E_1^{'} E_k \cdots E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C_0 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Finalmente, mediante operaciones elementales adecuadas, se anulan los elementos de la primera fila que se hallan en las columnas de los $1-$capital de C_0.
Por tanto la proposición es válida.

■

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n, n)$ es inversible, entonces A_0, la matriz elemental reducida a A, obtenida en la proposición anterior, es la matriz identidad I.

Prueba:

Como A es inversible, entonces $E_r E_{r-1} \cdots E_1 A = A_0$ también lo es.
Luego las n filas de A_0 son linealmente independiente, esto es cierto, debido a que solo existen n $1-$capitales, uno en cada fila.
Por tanto $A_0 = \mathrm{I}$.

$\blacksquare$

Definición

Dos matrices $A, B \in \mathbb{K}(m, n)$ *son* **equivalentes por filas**, *si existe una matriz inversible* $P \in \mathbb{K}(m, m)$ *tal que*

$$B = PA$$

En el corolario anterior, hacemos $P = E_r E_{r-1} \cdots E_1$ *el cual es una matriz inversible, y* $B = \mathrm{I}$, *entonces* A *e* I *son equivalentes por filas.*
La equivalencia por filas es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{K}(m, m)$.

La penúltima proposición nos indica que toda matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ es equivalente por filas a la matriz elemental reducida A_0.
Probaremos que A_0 no depende de A, sino de la clase de equivalencia a la que pertenece A. Además, probaremos que A_0 es la única matriz elemental reducida que existe en dicha clase. Dada $A \in \mathbb{K}(n,n)$, sean $a^1, a^2, \cdots, a^n$ los vectores filas de A y

$$\mathcal{F}(A) = \mathscr{F}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\})$$

su espacio de filas.
Entonces, tenemos uno de los tres casos.

1. $E(a^i) = a^j$, $E(a^j) = a^i$, $E(a^l) = a^l$ para $l \neq i, j$
2. $E(a^i) = a^i + \lambda a^j$, $E(a^l) = A^l$ para $l \neq i$.
3. $E(a^i) = \lambda a^i$, $E(a^j) = a^j$ para $j \neq i$, $\lambda \neq 0$.

Notamos que el espacio de filas A y EA son iguales, para toda matriz elemental E.
Al repetir este proceso un número finito de veces, se tiene que A y $E_k \cdots, E_1 A = A_0$ poseen el espacio de filas.

Proposición

Si $A, B \in \mathbb{K}(m, n)$ son equivalentes por filas, entonces $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$.

En particular $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A_0)$, además las filas no nulas forman una base de $\mathcal{F}(A)$.

Proposición

La matriz escalonada reducida, equivalente por filas a una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ es única.

Prueba:
Sean A_0 y B_0 dos matrices escalonadas reducidas asociadas a la matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$.
Sabemos que ls filas no nulas de A_0 y B_0 forman una base de $\mathcal{F}(A)$, entonces esta matrices tienen el mismo número de filas no nulas.
Sean $v^1, \cdots, v^r$ y $w^1, \cdots, w^r$ las filas no nulas de A_0 y B_0 respectivamente.
Además, supongamos que los $1-$capitales de A_0 están en las columnas $h_1, \cdots, h_r$, y los de B_0 en las columnas. $k_1, \cdots, k_r$

Veamos que $v^j = w^j$, para $j = 1, \cdots, r$ lo cual implica que $A_0 = B_0$:
Usaremos inducción sobre r.

- $r = 1$, entonces en este caso tenemos $\{v^1\}$, $\{w^1\}$, luego

$$v^1 = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1,}_{k_1} *, \cdots), \quad w^1 = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1,}_{h_1} *, \cdots),$$

como las filas no nulas de A_0, respectivamente las de B_0 forman una base para $\mathcal{F}(A)$, entonces se tiene que $v^1 = \lambda w^1$, de donde $\lambda = 1$ y $k_1 = h_1$.
Por tanto $v^1 = w^1$.

- Supongamos ahora $r > 1$.

Afirmamos que $h_r = k_r$ y $v^r = w^r$

En efecto: supongamos que $h_r < k_r$, entonces

$$v^r = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^r, \tag{2}$$

luego las componentes de v^r son ceros en las posiciones $h_1, h_2, \cdots, h_r$, y en el segundo miembro se tiene $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ en tales posiciones.

Entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, lo cual implica que $v^r = \mathbf{0}$ y esto es una contradicción, dado que $v^r \neq \mathbf{0}$, entonces $h_r < k_r$ no puede ser.

De manera similar $k_r < h_r$ también no es posible.

Entonces tenemos que $h_r = k_r$.

De la expresión (2) se tiene que las componentes de v^r en las posiciones $h_1, \cdots, h_{r-1}$ son cero, dado que $h_r = k_r$, y en el segundo miembro se tiene que $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1}$ como dichas componentes también son cero, por tanto

$$v^r = \lambda_r w^r$$

Luego v^r y w^r tienen $1-$capital en la posición $h_r = k_r$, de donde $\lambda_r = 1$, entonces $v^r = w^r$.
Ahora veamos que

$$\mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^{r-1}\}) = \mathscr{L}(\{w^1, \cdots, w^{r-1}\}) \tag{3}$$

En la expresióm

$$v^j = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^r, \quad j = 1, \cdots, r$$

observamos que v^j tiene componentes en la posición k_r, mientras que en el segundo miembro tiene componente λ_r (esto es debido a que $h_r = k_r$), entonces $\lambda_r = 0$'

Por tanto

$$v^j = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^{r-1}, \quad j = 1, \cdots, r-1,$$

de donde la relación (3) se satisface.
Por hipótesis inductiva aplicada a (3), se tiene

$$v^j = w^j \quad \text{para} \;\; j = 1, 2, \cdots, r-1.$$

Por tanto la proposición es válida. ■

Corolario

Sean $A, B \in \mathbb{K}(m, n)$ tales que $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$, entonces A y B son equivalentes por filas.

Prueba: Ejercicio. ■

Ejemplo

Halle la matriz escalonada reducida asociada a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y la base asociada de su espacio fila.

Aplicamos matrices elementales para transforma A a su forma reducida

$$A \to \begin{array}{c} \xrightarrow{E_{13}(2)} \\ \xrightarrow{E_{23}(1)} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que la última matriz es la forma reducida, y por tanto tenemos $\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es la base del espacio fila de A

Base Canónica

Todo subespacio $V \subset \mathbb{K}^n$ está determinado por una o más ecuaciones lineales homogéneas, o simplemente está generado por un conjunto finito de vectores.

En cualquier caso tenemos que $dim(V) = r \leq n$. Supongamos que $\{v^1, \cdots, v^r\}$ es una base de V, luego

$$A = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^r \end{bmatrix}$$

es la matriz fila, en este caso todas las filas son no nulas y por tanto la matriz elemental reducida A_0 asociada de A, conforman una base canónica para el espacio fila.

Como historia tenemos que el estudio de el sistema de ecuaciones lineales da lugar a uno de los principales temas del **Álgebra Lineal**.
Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas dada de por

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{4}$$

donde a_{ij}, b_i son datos, mientras que los x_j son las **incógnitas**.
Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema (4) es llamado **homogéneo**, caso contrario se llama **no homogéneo**.
La matriz $A=[a_{ij}]\in\mathbb{K}(m,n)$ se llama **matriz asociada** al sistema (4).
Consideremos $b = [b_1 \cdots b_m]^t$, $x = [x_1 \cdots x_n]^t$

Entonces el sistema (4) puede escribirse de la forma

$$Ax = b. \tag{5}$$

Note que (4) y (5) representan el mismo problema.

Definición

Una n–ada ordenada de números $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ *se llama* **solución del sistema** *(4) si*

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \cdots + a_{in}\lambda_n = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Una forma de resolver un sistema de la forma (5), es usando matrices elementales sobre las filas de A.
Esto significa,

$$E(Ax) = (EA)(x), \quad \text{para toda matriz} \quad E \in \mathbb{K}(m, m),$$

luego EA es el resultado de una operación elemental sobre las filas de A, y de esta forma, tenemos $(EA)x = Eb$.
Aplicando un número finito de operaciones elementales obtenemos

$$A_0 x = b_0, \tag{6}$$

donde A_0 es la matriz elemental reducida asociada a la matriz A.
Observar que toda solución del sistema (5) es solución del sistema (6).

Definición

Dos sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad A'x = b', \quad \textit{donde } A, A' \in \mathbb{K}(m,n), \; b, b' \in \mathbb{K}(n,1)$$

son **equivalentes** *si existe una matriz inversible* $P \in \mathbb{K}(m,m)$ *tal que* $A' = PA$ *y* $b' = Pb$.

Note que de acuerdo a la última definición, los sistemas (5) y (6) son sistemas equivalentes.

Definición

Se llama **conjunto solución del sistema** $Ax = b$*, al conjunto total de sus soluciones.*

Verifique que dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen el mismo conjunto solución.
Se llama **matriz aumentada del sistema** $Ax = b$ a la matriz $[A \mid b]$.