Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

2 de noviembre de 2020

Introducción

Definición (Anillo)

Sea $\mathbb{F}$ *un conjunto no-vacío, la cual poseé las operaciones de*

a) la **SUMA** $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *tal que* $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a + b \in \mathbb{F})$, *es decir,* $\mathbb{F}$ *es cerrada con respecto* $+$, *y además satisface los siguientes axiomas:*

1) $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a + b = b + a)$ *(conmutativa).*
2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a + (b + c) = (a + b) + c)$ *(asociativa).*
3) *Existe un elemento* $0 \in \mathbb{F}$, *llamado neutro aditivo (en este caso,* **cero***), tal que* $(\forall a \in \mathbb{F})(a + 0 = a)$.
4) *Existe el elemento simétrico (opuesto):* $(\forall a \in \mathbb{F})(\exists b \in \mathbb{F})(a + b = 0)$, *y lo denotamos por* $b = -a$.

b) del **PRODUCTO** $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *tal que* $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a \cdot b \in \mathbb{F})$, *es decir,* $\mathbb{F}$ *es cerrado con respecto* $\cdot$, *y además satisface los siguientes axiomas:*

5) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$ *(asociativa).*

6) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ *(distributiva respecto* $+$*).*

Este conjunto $\mathbb{F}$ *con las operaciones indicadas se le llama* **ANILLO**.

Notar que un anillo $\mathbb{F}$ es conmutativo con respecto $+$.

Definición (Anillo Conmutativo y Anillo con Unidad)

Si un anillo $\mathbb{F}$ *es conmutativa con respecto* $\cdot$, *diremos que* $\mathbb{F}$ *es un* **ANILLO CONMUTATIVO**.

Si en un anillo $\mathbb{F}$ *existe un elemento* $1 \in \mathbb{F}$ *no nulo, llamado neutro multiplicativo (en este caco,* **uno***) tal que* $(\forall a \in \mathbb{F})(a \cdot 1 = a)$, *entonces diremos* $\mathbb{F}$ *es un* **ANILLO CON UNIDAD**

Ejemplo

1. *El conjunto de los números enteros* $\mathbb{Z}$ *es un anillo conmutativo con unidad.*
2. *El conjunto* $A = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{Z}\}$ *con respeto a las operaciones*
   1) *SUMA* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ *y el*
   2) *PRODUCTO* $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$

   tiene la estructura de anillo conmutativo con unidad.

Ejercicio

Encuentre al menos dos conjuntos que no sean anillos.

Proposición

Sea $\mathbb{F}$ un anillo y para todo $a, b \in \mathbb{F}$ se tiene

1. $a \cdot 0 = 0$ *y* $0 \cdot a = 0$
2. $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ *y* $b \cdot a + (-b) \cdot a = 0.$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$

En efecto: Para todo $a, b \in \mathbb{F}$ se tiene:

1. $a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot b$ (propiedad distributiva), de la última igualdad y usando la existencia del elemento simétrico para $a \cdot b$, obtenemos que $a \cdot 0 = 0$, la segunda parte queda como ejercicio.
2. Ejercicio.
3. Usando 2) y la existencia del elemento simétrico obtenemos $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-a \cdot b) = a \cdot b.$

■

Definición (Cuerpo)

Sea $\mathbb{F}$ *un anillo conmutativo con unidad tal que*
(*Para cada* $a \in \mathbb{F}$ *no nulo*)$(\exists b \in \mathbb{F})(a \cdot b = 1)$.
El elemento b *es llamado* **inverso multiplicativo** *y lo denotamos por* $b = a^{-1}$.
Tal anillo se le llama **CUERPO**.

Nota de aquí en adelante denotaremos $ab = a \cdot b$.

Espacios Vectoriales

Ahora denotamos por $\mathbb{K}$, el cual es llamado cuerpo de los escalares, donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$, etc.

Definición

Sea V un conjunto no-vacío sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que V es un espacio vectorial (también llamado $\mathbb{K}-$espacio vectorial), la cual está provisto de operaciones

- **suma** $+ : V \times V \longrightarrow V$, *tal que es cerrada, es decir,* $(\forall u, v \in V)(u + v \in V)$ *y para todo* $u, v, w \in V$ *se tiene*
  1) $u + v = v + u$ *(conmutativo).*
  2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(asociativo).*
  3) *Existe un elemento* $\mathbf{0} \in V$, *llamado elemento* **neutro aditivo**, *(también llamado* **cero***), tal que*

$$(\forall u \in V)(u + \mathbf{0} = u).$$

4) *(Para cada* $v \in V)(\exists w \in V)(v + w = \mathbf{0})$.
El elemento w *es llamado el* **opuesto** *de* v*, y lo denotamos por* $w = -v$.

- **producto por un escalar** $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$*, tal que es cerrada, es decir,* $(\forall u \in V,\ \forall\lambda \in \mathbb{K})(\lambda v \in V)$ *y para todo* $u, v \in V$ *y todo* $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$ *se tiene*
  1) $\lambda(\gamma v) = (\lambda\gamma)v$.
  2) $(\lambda + \gamma)v = \lambda v + \gamma v$.
  3) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
  4) $1v = v$.

Nota Los elementos del $\mathbb{K}-$espacio vectorial son llamados **vectores**. De aquí en adelante simplemente llamaremos a V espacio vectorial, a menos que tengamos espacios vectoriales definidos sobre diferentes cuerpos.
A los elementos de $\mathbb{K}$ son llamados **escalares**.

Nota

1. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, *diremos que* V *es un espacio* **vectorial racional**.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *se dice que* V *es un espacio* **vectorial real**.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *diremos que* V *es un espacio* **vectorial complejo**.

Ejemplo

Daremos algunos ejemplos de espacios vectoriales.

1. *Consideremos le conjunto*

$$\mathscr{L} = \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / 4v_1 - 3v_2 = 0\},$$

   es un espacio vectorial sobre real.

2. *Sea A un conjunto no-vacío y definamos el conjunto*

$$\mathbb{K}_A = \{f : A \longrightarrow \mathbb{K} / f \text{ es una función}\}$$

   provisto de las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

   para todo $f, g \in \mathbb{K}_A$, y toto $\lambda \in \mathbb{K}$. $\mathbb{K}_A$ es espacio vectorial.

3. *el conjunto*

$$D = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es diferenciable en } x = 1\},$$

es un espacio vectorial con las operaciones definidas en el item 2).

4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y definamos el conjunto*

$$S = \{\{a_n\} / a_n \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$
$$\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\},$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, es espacio vectorial real.

Proposición

En todo espacio vectorial V, se satisface, para todo $u, v, w \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. *El elemento neutro aditivo es único.*
2. *el elemento opuesto (también llamado simétrico) de un vector es único.*
3. $0v = \mathbf{0}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. *Si* $\lambda v = \mathbf{0}$, *entonces* $\lambda = 0$ *o* $v = \mathbf{0}$.
5. *Si* $u + v = u + w$, *entonces* $v = w$.
6. $-(u + v) = -u + (-v)$.
7. $(-1)v = -v$.

Prueba:

1. Supongamos que existen dos neutros aditivos **0** y **0'** en V, luego

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'.$$

2. Supongamos que existen dos opuestos v' y v'' de v en V, luego

$$\begin{aligned} v' &= v' + \mathbf{0} = v' + (v + v''), \quad & v + v'' = \mathbf{0} \\ &= (v' + v) + v'' = \mathbf{0} + v'', \quad & v' + v = \mathbf{0} \\ &= v''. \end{aligned}$$

3. Ejercicio.
4. Ejercicio.

5.

$$\begin{aligned} v = v + \mathbf{0} = v + (u + (-u)) &= (v + u) + (-u) \\ &= (w + u) + (-u) \quad \textit{hipótesis} \\ &= w + (u + (-u)) = w + \mathbf{0} \\ &= w. \end{aligned}$$

6. Ejercicio.

7. Ejercicio.

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y un subconjunto $S \subset V$ no vacío, diremos que S es un **subespacio** *de V, si es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.*

Ejemplo

1. $V_0 = \{\mathbf{0}\}$ *es el subespacio vectorial de cualquier espacio vectorial* V.
2. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$, *entonces los únicos subespacios de* V *son* $\{\mathbf{0}\}$, *todas las rectas que pasan por el origen, todos los planos que pasan por el origen y* $\mathbb{R}^3$.

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subconjunto no-vacío, entonces S es un subespacio si, y solo si

$$\alpha u + \beta v \in S, \quad \textit{para todo } u, v \in S, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Prueba:

$\Longrightarrow$) S es un subespacio por lo tanto S es un espacio vectorial y de hecho satisface el enunciado.

$\Longleftarrow$) Sean $u, v \in S$, entonces en particular escojamos $\alpha = \beta = 1$, entonces

$$u + v = 1u + 1v \in S,$$

ahora hagamos $v = \mathbf{0}$, $\beta = 1$, entonces $\alpha u = \alpha u + 1\mathbf{0}$.

Definición (Combinación Lineal)

Sean V *un espacio vectorial y los vectores* $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$, *entonces estos vectores son llamados* **combinación lineal** *a toda expresión de la forma*

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_r v^r,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.
El conjunto $A \subset V$ *se llama combinación lineal de elementos de* A *a toda combinación lineal de un número finito de elementos de* A.