Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

9 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Proposición (1)

Sean V *un espacio vectorial,* $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ *genera a* V *y* $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\} \subset V$ *una colección arbitraria de vectores, con* $k < r$*, entonces* $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ *son l.d.*

Proposición (Teorema de la Dimensión)

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo cardinal.

Prueba:

Denotemos $\mathfrak{B}$ la base de V.

Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathfrak{B} = \emptyset$.

Si $V \neq \{\mathbf{0}\}$, en este caso demostraremos previamente el siguiente

Lema

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$, $u, v \in V$. Entonces $v \in \mathscr{L}(S \cup \{u\}) \backslash \mathscr{L}(S) \Rightarrow u \in \mathscr{L}(S \cup \{v\})$.

Prueba:
Por hipótesos se tiene que $v \in \mathscr{L}(S \cup \{u\}) \backslash \mathscr{L}(S)$, entonces vectores $\{s^1, s^2, \cdots, s^m\} \subset S$ tales que

$$v = \alpha_1 s^1 + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_m s^m + \alpha u,$$

observar que si $\alpha = 0$, entonces $v \in \mathscr{L}(S)$ lo cual es una contradicción. Por tanto despejamos u, y obtenemos

$$u = \alpha^{-1} v + \alpha^{-1} \alpha_2 s^1 + \cdots + \alpha^{-1} \alpha_m s^m,$$

esto nos indica que $u \in \mathscr{L}(S \cup \{v\})$. $\square$

Ahora veamos la continuación de la demostración del **Teorema de la Dimensión**, entonces

Caso I $card(\mathfrak{B}) < \infty$.

Entonces supongamos que V posee dos bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ tales que $card(\mathfrak{B}_1) = n$ y $card(\mathfrak{B}_2) = m$, con $m < n$, y consideremos que $\mathfrak{B}_1 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{u^1, u^2, \cdots, u^m\}$.

Como $u^1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_1) = V$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos tale que

$$u^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n, \tag{1}$$

notar que $u^1 \neq \mathbf{0}$, dado que los $v^j \neq \mathbf{0}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha_1 \neq 0$.

Notamos que $u^1 \notin \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\})$, en caso contrario, existen escalares no todos nulos $\beta_2, \cdots, \beta_n$ tales que

$$u^1 = \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_n v^n, \tag{2}$$

Restando las ecuaciones (2) de (1) tenemos

$$\alpha_1 v^1 + (\alpha_2 - \beta_2)v^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v^n = \mathbf{0},$$

con $\alpha_1 \neq 0$ entonces $\mathfrak{B}_1$ es l.d lo cual es una contradicción.
Por tanto tenemos

$$u^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{v^1\}) \backslash \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\}),$$

ahora aplicamos el Lema anterior obteniéndose

$$v^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\}).$$

Como $\{v^2, \cdots, v^n\}$ es linealmente independiente. y $u^1 \notin \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\})$ entonces $\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$ es l.i.

Como $v^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\})$, entonces se tiene que $V = \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\}) = \mathscr{L}(\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$, es decir, $\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$ es una base de V.
Repitiendo el proceso m veces, tenemos que

$$\{u^1, \cdots, u^m . v^{m+1}, \cdots, v^n\}$$

es una base de V.
Pero $\mathfrak{B}_2 = \{u^1, \cdots, u^m\}$ es una base de V, por tanto,$v^{m+1} \in \mathfrak{B}_2$, entonces

$$\{u^1, \cdots, u^m . v^{m+1}, \cdots, v^n\}$$

es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción.
Por tanto, $m < n$ no puede ser.
De forma similar no puede ser $n < m$.
Por tanto todas las bases de V tiene el mismo número de elementos, es decir, tienen el mismo cardinal.

caso II $card(\mathfrak{B}) = \infty$, es decir. ninguna base tiene cardinal finito.
Sean $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ dos bases de V, entonces tienen un número infinito de vectores.
Consideremos $u \in \mathfrak{B}_1$, y como $\mathfrak{B}_2$ es una base de V, entonces existe un único subconjunto $\Delta_x \subset \mathfrak{B}_2$ tal que
$u \in \mathscr{L}(\Delta_u)$ y $u \notin \mathscr{L}(\Delta')$ para todo $\Delta' \subsetneq \Delta_u$.
Definamos una función definida

$$\varphi : \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{B}_2), \qquad \varphi(u) = \Delta_u.$$

Recordemos ahora la siguiente propiedad de teoría de cardinales:
PROPIEDAD. Si A y B son conjuntos con A infinito y para todo $x \in A$ consideramos un conjunto finito $\Delta_x \subset B$, entonces

$$card(A) \geq card\left(\bigcup_{x \in A} \Delta_x\right).$$

Como $\mathfrak{B}_1$ es un conjunto infinito, entonces por la propiedad anterior tenemos

$$card(\mathfrak{B}_1) \geq card\left(\bigcup_{u\in\mathfrak{B}_1} \Delta_u\right).$$

Dado que $u \in \mathscr{L}(\Delta_u)$ para todo $u \in \mathfrak{B}_1$, entonces

$$V = \mathscr{L}\left(\bigcup_{u\in\mathfrak{B}_1} \Delta_u\right).$$

Como $\bigcup_{u\in\mathfrak{B}_1} \Delta_u \subset \mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_2$ es una base de V, entonces se tiene que

$$\mathfrak{B}_2 = \bigcup_{u\in\mathfrak{B}_1} \Delta_u,$$

es decir, $card(\mathfrak{B}_1) \geq card(\mathfrak{B}_2)$.
Intercambiando $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, llegamos de forma análoga a obtener

$$card(\mathfrak{B}_2) \geq card(\mathfrak{B}_1). \blacksquare$$

Proposición (Existencia de Bases)

De cualquier conjunto generador de un espacio vectorial V se puede extraer una base.

Prueba:
Probaremos solo para el caso finito.
Sea $A = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$.
Consideremos $u^1 \in A$ no-nulo, si $V = \mathscr{L}(\{u^1\})$, entonces terminamos.
Caso contrario si $\mathscr{L}(\{u^1\}) \subsetneq V$, entonces sea $u^2 \in A \backslash \mathscr{L}(\{u^1\})$ no nulo, ahora si $V = \mathscr{L}(\{u^1, u^2\})$, entonces terminamos.
Caso contrario $\mathscr{L}(\{u^1, u^2\}) \subsetneq V$, entonces sea $u^3 \in A \backslash \mathscr{L}(\{u^1, u^2\})$ no nulo y repetimos el proceso en forma inductiva hasta obtener $\{u^1, u^2, \cdots, u^m\}$ que son l.i. por construcción..
Este proceso termina en número finito de pasos $m \leq n$, con lo cual obtenemos

$$V = \mathscr{L}(\{u^1, u^2, \cdots, u^m\}).$$

■

Definición

Sean V un espacio vectorial, y $\mathfrak{B}$ una base, al número $\text{card}(\mathfrak{B})$ diremos que es la dimensión del espacio vectorial V y lo denotamos por $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ o simplemente $\dim(V)$ si no hay confusión.

Observación

1. *Si* $V = \{\mathbf{0}\}$, *entonces* $dim(V) = 0$.
2. *Si* V *tiene una base infinita, entonces* $dim(V) = \infty$.
3. $dim(\mathbb{K}^n) = n$.
4. $dim(\mathbb{K}[x]) = \infty$.

Ejercicio

Sea el conjunto $A = \{1, \pi, \pi^2, \cdots, \pi^n, \cdots\}$. *Pruebe que* A *es un conjunto l.i. y* $dim(A) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial con $dim(V) = n$. Entonces los n vectores son l.i si, y solo si dichos vectores generan a V.

Prueba:

$\Rightarrow$) Sean $v^1, v^2, \cdots, v^n$ vectores l.i.

Para cada $u \in V$ tenemos por la proposición (1) que los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^n, u$ son l.d., esto es debido a que $dim(V) = n$. Entonces existen escalares $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_n v^n + \lambda u = \mathbf{0},$$

Notar que $\lambda \neq 0$, caso contrario, como los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^n$ son l.i., entonces $v^1, v^2, \cdots, v^n, u$ son l.i. esto no puede ser.

Luego despejamos u entonces tenemos

$$u = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_n v^n,$$

donde $\beta_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda}$, por tanto $v^1, v^2, \cdots, v^n$ genera a V, es decir, $V = \mathscr{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^n\})$.

$\Leftarrow$) Si $V = \mathscr{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^n\})$. y por tanto aplicamos la proposición anterior.

$\blacksquare$

Teorema (Completación de una base)

Sea V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$. Si $v^1, v^2, \cdots .v^r \subset V$ son l.i., con $r < n$, entonces existen vectores $v^{r+1}, v^{r+2}, \cdots .v^n$ tales que

$$v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}, \cdots, v^n$$

es una base de V.

Prueba:
Sea $v^{r+1} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^r\}$ cualquiera.
Si $v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}$ genera a V termina la prueba.
Caso contrario, existe $v^{r+2} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^r, v^{r+1}\}$, entonces si $v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}, v^{r+2}$ genera a V termina la prueba.
Caso contrario, existe $v^{r+3} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^{r+2}\}$ y repetimos el proceso anterior, hasta obtener $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V. $\blacksquare$

Corolario

Sea V un espacio vectorial. Si $\dim(V) \geq 1$, entonces todo vector $v \neq \mathbf{0}$ forma parte de una base de V.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subespacio, entonces

1. $dim(S) \leq dim(V)$.
2. *Si* $dim(V) < \infty$ *y* $dim(V) = dim(S)$, *entonces* $S = V$.
3. *Si* $dim(V) = \infty$ *y* $dim(V) = dim(S)$, *luego no necesariamente se tiene* $S = V$.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) < \infty$, y $S, S' \subset V$ subespacios, entonces

$$dim(S + S') = dim(S) + dim(S') - dim(S \cap S').$$

Prueba:

Sean $v^1, v^2, \cdots, v^r$ una base de $S \cap S'$, entonces por el teorema anterior (completación de base) existen $u^1, u^2, \cdots, u^p \in S$ y $w^1, w^2, \cdots, w^q \in S'$ tales que

$$\{v^1, v^2, \cdots, v^r, u^1, u^2, \cdots, u^p\} \;\text{ un base de }\; S$$
$$\{v^1, v^2, \cdots, v^r, w^1, w^2, \cdots, w^q\} \;\text{ un base de }\; S',$$

de donde $\{v^1, \cdots, v^r, u^1, \cdots, u^p, w^1, \cdots, w^q\}$ es una base de $S + S'$, por tanto

$$\begin{aligned} dim(S + S') &= p + q + r = (p + r) + (q + r) - r \\ &= dim(S) + dim(S') - dim(S \cap S'). \end{aligned}$$

■

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

1. $(\forall u, v \in V)(\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle)$,
2. $(\forall u, v, w \in V)(\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle)$,
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V)(\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle)$,
4. $(\forall u \in V)(\langle u, u \rangle \geq 0)$, *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si, y solo si* $u = \mathbf{0}$,

decimos que un **producto interno** *real sobre V.*

Nota al para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado espacio producto interno.

Definición

Un espacio vectorial V real de dimensión finita con producto interno, es llamado **espacio euclidiano**.

Ejercicio

1. $V = \mathbb{R}^n$, *y el producto* $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$, *donde* $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$, *este producto es llamado* **producto interno canónico**.
2. *Si* $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, *entonces*
$$\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_2,$$
es un producto interno sobre $V = \mathbb{R}^2$

Verifique que efectivamente, en cada caso, es un producto interno.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface

1. $(\forall u, v \in V)\left(\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}\right)$,
2. $(\forall u, v, w \in V)(\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle)$,
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall u, v \in V)(\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle)$,
4. $(\forall u \in V)(\langle u, u\rangle \geq 0)$, *y* $\langle u, u\rangle = 0$ *si, y solo si* $u = \mathbf{0}$,

decimos que un **producto interno** *complejo (también llamado* **hermitiano***) sobre V.*

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno, también se le llama **espacio unitario**.