Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

20 de enero del 2021

Ejemplo

Halle la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A está dado por

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2.$$

Observamos que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ son los valores propios de A de multiplicidad dos cada uno de ellos.

Ahora vamos a calcular los vectores propios correspondientes

- $\lambda_1 = 2$, *debemos resolver la ecuación*

$$Av^1 = \lambda_1 v^1 \equiv (A - \lambda_1 \mathrm{I})v^1 = (A - 2\mathrm{I})v^1 = \mathbf{0},$$

obteniéndose el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -3v_1 & + & 3v_2 & + & 4v_3 & & & = & 0 \\ -v_1 & + & v_2 & + & v_3 & & & = & 0 \\ -2v_1 & + & 2v_2 & + & 3v_3 & & & = & 0 \\ -v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + & v_4 & = & 0 \end{array}$$

el cual nos proporciona el vector propio $v^1 = (1,1,0,0)^t$ *de* A *asociado a* $\lambda_1 = 2$.

el segundo vector propio w^1 correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 2$, lo determinamos de la ecuación

$$(A - \lambda_1)w^1 = v^1,$$

de dónde $w^1 = (-1, 2, -2, -1)^t$

- $\lambda_2 = 3$, *como antes resolvemos el sistema* $(A - \lambda_2 \mathrm{I})v^3 = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -4v_1 & + & 3v_2 & + & 4v_3 & = & 0 \\ -v_1 & + & & + & v_3 & = & 0 \\ -2v_1 & + & 2v_2 & + & 2v_3 & = & 0 \\ -v_1 & + & v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array}$$

observe que $v_3 = v_1$, *por tanto* $v_2 = 0$ *y* $v_4 \in \mathbb{R}$.
Luego
$v^3 = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t = (v_1, 0, v_1, v_4)^t = v_1(1, 0, 1, 0)^t + v_4(0, 0, 0, 1)^t$,
de donde los vectores $w^3 = (1, 0, 1, 0)^t$, $w^4 = (0, 0, 0, 1)^t$ *son l. i.*

Luego la matriz P de cambio de base es

$$P = \left[v^1 \; w^1 \; w^3 \; w^4\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y esta transforma a A es su forma canónica,

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = J(A)$$

Proposición

Para toda matriz $A \in \mathbb{C}(n,n)$, las matrices A y A^t son semejantes.

Prueba

Consideremos la forma canónica de Jordan de A

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_1(A) & \cdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \cdots & J_r(A) \end{bmatrix}$$

Ahora analicemos cada submatriz $J_i(A)$. Por ejemplo, supongamos que

$$J_1(A) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matriz anterior proviene de una base del tipo $\{v^1, v^2, v^3, w^1, w^2\}$, en la que

$$\begin{array}{rlllll}
T(v^1) & = \lambda v^1 & & & & \\
T(v^2) & = v^1 & +\lambda v^2 & & & \\
T(v^3) & = & v^2 & +\lambda v^3 & & \\
T(w^1) & = & & & \lambda w^1 & \\
T(w^2) & = & & & w^1 & + \ \lambda w^2
\end{array}$$

Si reordenamos el orden en la base, por ejemplo $\{v^3, v^2, v^1, w^2, w^1\}$, entonces las relaciones anteriores tienen la forma

$$\begin{array}{rcllllll}
T(v^3) & = \lambda v^3 & +v^2 & & & \\
T(v^2) & = & \lambda v^2 & +v^1 & & \\
T(v^3) & = & & \lambda v^1 & & \\
T(w^1) & = & & & \lambda w^2 & + \ w^1 \\
T(w^2) & = & & & & \lambda w^1
\end{array}$$

Luego la matriz asociada a T en este caso es

$$B_T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Luego, por un lado B_T es la transpuesta de $J_1(A)$ y notamos que $J_1(A)$ y B son semejantes por ser matrices asociadas a una misma transformación lineal T. Este razonamiento es completamente general, nos conduce a decir que $J_1(A)$ y $J_1(A)^t$ son semejantes.
Por tanto, tenemos que

$$J(A)^t = \begin{bmatrix} J_1(A)^t & \cdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \cdots & J_r(A)^t \end{bmatrix}$$

es semejante a $J(A)$, por tanto A y A^t son semejantes.

$\blacksquare$

Ejemplo

1. *Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transfomación lineal, y sea $v \in V$ tal que $T^k(v) = \mathbf{0}$ y $T^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$. Entonces pruebe que*

   a) *El conjunto $S = \{v, T(v), \cdots, T^{k-1}(v)\}$ es l.i.*

   b) *El susbespacio W generado por S es invariante bajo T.*

   c) *La restricción $\widehat{T}$ de T a W es nilpotente de índice k.*

   d) *Respecto a la base $\{T^{k-1}(v), \cdots, T(v), v\}$ de W, la matriz de T es de la forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz anterior es nilpotente de índice k.

a) Supongamos

$$\alpha v + \alpha_1 T(v) + \alpha_2 T^2(v) + \cdots + \alpha_{k-1} T^{k-1}(v) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Aplicamos T^{k-1} a la eccuación (1) y como $T^k = \mathbf{0}$, entonces obtenemos que $\alpha = 0$ (usando $T^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$).
Ahora aplicamos T^{k-2} a la eccuación (1), de donde $\alpha_1 = 0$.
Repetimos este proceso de esta manera tenemos que

$$\alpha = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0.$$

Por tanto S es linealmente independiente.

b) Sea $v \in W$, entonces

$$v = \beta v + \beta_1 T(v) + \beta_2 T^2(v) + \cdots + \beta_{k-1} T^{k-1}(v)$$

aplicamos T a la expresión anterior

$$T(v) = \beta v + \beta_1 T(v) + \beta_2 T^2(v) + \cdots + \beta_{k-2} T^{k-2}(v) \in W$$

de donde W es invariante bajo T.

c) Sabemos que $T^k(v) = \mathbf{0}$, entonces para $i = 0, 1, \cdots, k-1$ se tiene

$$\widehat{T}^k\Big(T^i(v)\Big) = T^{k+i}(v) = \mathbf{0}.$$

Ahora aplicamos $\widehat{T}^k$ a cada generador de W, entonces obtenemos $\widehat{T}^k(v) = \mathbf{0}$, es decir que $\widehat{T}$ es nilpotente de índice k a lo sumo. Por otra parte, $\widehat{T}^{k-1}(v) = T^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$

d) Para la base $\{T^{k-1}(v), \cdots, T(v), v\}$ de W, se tiene

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{T}(T^{k-1}(v)) & = & T^{k}(v) = \mathbf{0} \\
\widehat{T}(T^{k-2}(v)) & = & \qquad\qquad T^{k-1}(v) \\
\widehat{T}(T^{k-3}(v)) & = & \qquad\qquad\qquad\qquad T^{k-2}(v) \\
\cdots & & \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
\widehat{T}(T(v)) & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T^{2}(v) \\
\widehat{T}(v) & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T(v)
\end{array}$$

Y de esta manera obtenemos la matriz de T en esta base

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entomces} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $A^3 = 0$, luego A es nilpotente de índice $k = 3$

Verifique que

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

1. *Halle la forma canónica de Jordan de las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   $\alpha \neq 0$.

2. *Halle el polinomio minimal de las matrices del item anterior.*