Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

04 de enero del 2021

Espacios Vectoriales (continuación)

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *espacios vectoriales de dimensión finita y* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. T *es un isometría lineal sobreyectiva.*
2. *Para toda base ortonormal* $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$, *se tiene que el conjunto*
$$T(\mathcal{B}) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W$$
es una base ortonormal.
3. *Existe una base ortonormal* $\mathcal{B}_0 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ *tal que*
$$T(\mathcal{B}_0) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$
es una base ortonormal.

Prueba:

1)$\Rightarrow$2) Supongamos que T es sobreyectiva, y $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ una base ortonormal.
Como T es una isometría lineal entonces T es inyectiva, por tanto es una T es un isomorfismo (por ser T inyectiva), por tanto $T(\mathcal{B})$ es una base de W.
Ahora veamos que $T(\mathcal{B})$ es ortonormal:
Sean $T(v^i), T(v^j) \in T(\mathcal{B})$ con $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T(v^i), T(v^j)\rangle_W &= \langle v^i, v^j\rangle_V \quad T \text{ preserva el producto interno} \\ &= 0 \\ \|T(v^i)\|_W &= \|v^i\|_V \ \forall i, \quad T \text{ preserva la norma} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de W.

2)⇒3) Por el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt, existe de una base ortonormal $\mathcal{B}_0$ de V, por tanto por el item anterior, tenemos que $T(\mathcal{B}_0)$ es una base ortonormal de W.

3)⇒1) Ejercicio.

$\blacksquare$

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces T es una isometría lineal sobreyectiva si, y solo si T es inversible y $T^{-1} = T^*$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Como T es una isometría lineal, entonces T es inyectiva y por la proposición anterior T es sobreyectiva y así T es un isomorfismo sobre V y por tanto $T^{-1} : V \longrightarrow V$ existe.
Veamos que $\Big(\forall v, w \in V\Big)\Big(\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^{-1}(w) \rangle\Big)$:
Notamos que $w = T(T^{-1}(w))$, de donde

$$\begin{aligned} \langle T(v), w \rangle &= \langle T(v), T(T^{-1}(w)) \rangle \\ &= \langle v, T^{-1}(w) \rangle \quad T \text{ preserva el producto interno.} \end{aligned}$$

Por tanto, $T^{-1} = T^*$.

$\Leftarrow$) Supongamos T es inversible y $T^{-1} = T^*$.
Basta verificar que T preserva el producto interno:
Sean $v, w \in V$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} \langle T(v), T(w) \rangle &= \langle v, (T^{-1}(T(w)) \rangle \qquad (\text{dado que } T^{-1} = T^*) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definición

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal inversible que satisface $T^{-1} = T^*$, decimos que T es ortogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y diremos T es unitario si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio vectorial y S_1, S_2 dos subespacios de V, diremos que S_1 es ortogonal a S_2 si

$$\Big(\forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2\Big)\Big(\langle s_1, s_2 \rangle = 0\Big)$$

y lo denotamos por $S_1 \perp S_2$.

Recordaremos que si S es un subespacio vectorial de V, entonces el complemento ortogonal de S, denotado por $S^\perp$ está definido por

$$S^\perp = \{v \in V / \langle v, s \rangle = 0, \ \ \forall s \in S\}$$

Ejemplo

Sean $V = \mathbb{R}^3$ *y los subespacios* $S_1 = \mathscr{L}(\{e^1\})$*, y* $S_2 = \mathscr{L}(\{e^2\})$*, observamos que para cualquier* $s_1 \in S_1$ $s_2 \in S_2$*, tenemos que* $s_1 = (\alpha, 0, 0)^t$ *y* $s_2 = (0, \beta, 0)^t$ *y por tanto*

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \alpha 0 + 0\beta + 00 = 0,$$

de donde $S_1 \perp S_2$ *con respecto al producto interno usual.*

Ejemplo

Sean $V = \mathbb{R}^3$ *y* S *un subespacio de* V *definido por* $S = \mathscr{L}(\{e^1, e^2\})$*, con respecto al producto interno usual, determinemos*

$$S^\perp = \{v \in V / \langle v, s \rangle = 0, \quad \forall s \in S\},$$

note que si $s \in S$*, entonces* $s = (\alpha, \beta, 0)^t$*, con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*
Consideremos $v = (v_1, v_2, v_3)^t \in V$ *cualquiera, entonces para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tenemos*

$$\langle v, s \rangle = v_1\alpha + v_2\beta + v_3 0 = 0,$$

de donde $v_1 = v_2 = 0$*, con* $v_3 \in \mathbb{R}$*, es decir,*

$$S^\perp = \mathscr{L}(\{e^3\}).$$

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un espacio vectorial y S_1, S_2 subespacios ortogonales de V, entonces $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un espacio vectorial y S un subespacio, entonces $S^\perp$ también es un subespacio vectorial de V.

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita y S un subespacio, entonces

$$dim(S) + dim(S^\perp) = dim(V).$$

Además, si $\{v^1, \cdots, v^r\}$ es una base de S y $\{v^{r+1}, \cdots, v^n\}$ es una base de $S^\perp$, entonces $\{v^1, \cdots, v^r, v^{r+1}, \cdots, v^n\}$ es una base de V.

Note que con las proposiciones anteriores tenemos que $S \oplus S^\perp = V$.

Ejercicio

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}(3,3)$*. Determine la relación entre* $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^t)$ *, los espacios* $\mathcal{F}(\{a^1, a^2\})$*, y* $\mathcal{C}(\{b^1, b^2\})$*, donde* a^1, a^2 *y* b^1, b^2 *son los vectores filas y columna de* A *respectivamente.*
Generalice este resultado a una matriz $A \in \mathbb{R}(m, n)$*.*

El problema de Valores propios está definido como sigue:
Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$, entonces debemos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$, y $x \in \mathbb{K}(n,1)\backslash\{\mathbf{0}\}$ tales que

$$Ax = \lambda x.$$

La resolución de este problema tiene muchas aplicaciones, entre ellas, la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ingeniería civil, circuitos eléctricos, biología, médicina, etc.

En esta parte consideraremos a todos los espacios involucrados de dimensón finita, a menos que se diga lo contrario.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ **es un valor propio** *de T, si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que*

$$T(v) = \lambda v. \tag{1}$$

Este vector v es llamado **vector propio** *de T asociado a λ.*

Recordar: como $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y V es de dimensión finita, digamos $dim(V) = n$, entonces existe una matriz $A_T \in \mathbb{K}(n, n)$ tal que

$$T(v) = A_T v, \tag{2}$$

la matriz A_T es llamada la matriz asociada a la transformación lineal T.

Note que el problema (1) es equivalente a resolver el problema (2). Ahora consideremos $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V y la matriz A_T asociada a la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ en dicha base. Además, cada vector $v \in V$ puede ser expresado de la siguiente forma $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j$, con $x_j \in \mathbb{K}$, al cual le asociamos el vector de coordenadas $x_v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

Proposición

La función $\psi : V \longrightarrow \mathbb{K}(n, 1)$, definida mediante $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo que satisface

$$\psi(T(v)) = A_T x_v$$