Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

4 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Definición (Combinación Lineal)

Sean V un espacio vectorial y los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$, entonces estos vectores son llamados **combinación lineal** *a toda expresión de la forma*

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_r v^r,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.
El conjunto $A \subset V$ se llama combinación lineal de elementos de A a toda combinación lineal de un número finito de elementos de A.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto no-vacío, y $\mathscr{F} = \{W \supset A / W$ es un subespacio de $V\}$, entonces

$$\bigcap_{W \in \mathscr{F}} W \in \mathscr{F}$$

Prueba:

Sean $u, v \in \bigcap_{W \in \mathscr{F}} W$, entonces $u, v \in W$ para todo $W \in \mathscr{F}$, pero $W \subset V$ es un subespacio, luego $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\alpha u + \beta v \in W)$ por tanto $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{W \in \mathscr{F}} W$, es decir,

$\bigcap_{W \in \mathscr{F}} W$ es un subespacio de V que contiene a A. ■

Denotemos $\mathscr{L}(A) = \bigcap_{W \in \mathscr{F}} W$, es decir, es el subespacio más pequeño de V que contiene a A y $\mathscr{L}(A) \subset W$ para todo $W \in \mathscr{F}$.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto no-vacío, entonces $\mathscr{L}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de A.

Prueba: ejercicio.

Nota

Esta proposición nos indica que $\mathscr{L}(A)$ puede ser obtenido a partir de los elementos de A.

Nota

Si $A = \emptyset$, entonces $\mathscr{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Definición

Sean V un espacio vectorial y $A \subset V$ un conjunto. Si $\mathscr{L}(A) = V$, entonces decimos que A es un conjunto de **generadores** *de V.*

Ejemplo

1. *Sean* $V = \mathbb{R}^2$ *y* $\mathscr{L}(A) = \{(0;1),(1;0)\} \subset V$, *entonces* $\mathscr{L}(A) = V$. *En efecto:*
   Basta elegir cualquier $v = (v_1, v_2) \in V$ *el cual puede ser expresado*
   $v = (v_1, v_2) = v_1(1;0) + v_2(0;1)$.
2. $\{(1-x)^2, (1+x)^2, x+x^2\}$ *genera a*
   $F = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] / grad(f) \leq 2\}$.
   En efecto: Ejercicio

Si R, S son subespacios de V, entonces definimos la suma de estos subespacios por

$$R + S = \{u + v / u \in R,\ v \in S\}.$$

Nota

$R + S$ es un subespacio de V.
En efecto:
Sean $x, y \in R + S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ arbitrarios,
entonces existen $u^1, u^2 \in R$, $v^1, v^2 \in S$ tales que:
$x = u^1 + v^1$ e $y = u^2 + v^2$.
Dado que R, S son subespacios de V, entonces
$\alpha u^1 + \beta u^2 \in R$ y $\alpha v^1 + \beta v^2 \in S$, de donde se tiene
$\alpha x+\beta y = \alpha(u^1+v^1)+\beta(u^2+v^2) = (\alpha u^1+\beta u^2)+(\alpha v^1+\beta v^2) \in R+S.$
Así $R + S$ es un subespacio de V. $\square$

Si R, S son subespacios de V, entonces definimos la **suma directa** de estos subespacios por

$$R + S = \{u + v/u \in R,\ v \in S\}, \quad \text{y} \quad R \cap S = \{\mathbf{0}\},$$

y lo denotamos por $R + S = R \oplus S$

Ejemplo

Consideremos $V = \mathbb{R}^3$, *y los subespacios*

1. $R = \{(x, y, z) \in V / x + y + z = 0\}$ *y*
   $S = \{(x, y, z) \in V / -x + y - z = 0\}$
   Veamos $R \cap S$*:*

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y, z) \in V / x + y + z = 0, \ -x + y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in V / y = 0, \ x = -z\} \\ &= \{(-z, 0, z) \in V / z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 0, 1) / z \in \mathbb{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Por tanto, la suma $R + S$ *no es suma directa.*

2. $R = \{\alpha(1,-1,2)/\alpha \in \mathbb{R}\}$ *y* $S = \{(x,y,z) \in V/x+y+z=0\}$
   Veamos $R \cap S$*:*

$$
\begin{aligned}
R \cap S &= \{(x,y,z) \in V/(x,y,z) = \alpha(1,-1,2),\ x+y+z=0\} \\
&= \{\mathbf{0}\}, \qquad \textit{esto es debido a que } \alpha = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, la suma $R+S$ *es suma directa, es decir,*

$$R + S = R \oplus S.$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $R, S \subset V$ subespacios. Entonces la suma $R+S$ directa si, y solo si todo elemento $u \in R+S$ debe escribirse de manera única

$$u = v + w, \qquad \textit{donde} \quad v \in R, w \in S.$$

Prueba:

$\Longrightarrow$) Supongamos que $R \cap S = \{\mathbf{0}\}$, y $u \in R+S$ arbitrarios. Consideremos que existen $v, v' \in R$, $w, w' \in S$ tales que

$$u = v + w = v' + w',$$

de donde

$$v - v' = w' - w \in R \cap S.$$

Como $R \cap S = \{\mathbf{0}\}$, entonces $v' = v$ y $w' = w$.

$\Longleftarrow$) Ejercicio. $\blacksquare$

Ejercicio

Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial y los subespacios $S^k \subset V$, $k = 1, 2 \cdots, n$. Generalice el resultado anterior.

Veremos como determinar un mínimo de generadores de un espacio vectorial.
Consideremos $k \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial y un conjunto de vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependiente**, simplemente lo denotamos por **l.d.**, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k = \mathbf{0}$$

Ejemplo

Los vectores $(2, -3), (-4, 6)$ *son l.d. en* $\mathbb{R}^2$*, en efecto:*

$$2(2, -3) + (-4, 6) = (0, 0).$$

Definición (Linealmente Independiente)

Sean V un espacio vectorial, decimos que los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^k$ de V son **linealmente independientes**, *y lo denotamos por* **l.i.**, *si la ecuación*

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k = \mathbf{0}$$

tiene como única solución a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Ejercicio

1. *Pruebe que si $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ son l.i., entonces estos vectores son no-nulos.*
2. *Cualquier vector $v \neq \mathbf{0}$, es l.i.*
3. *si conjunto de vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ es l.i., entonces el conjunto $\{v^1, v^2, \cdots, v^k, \mathbf{0}\}$ es l.d.*

Definición

Sean V un espacio vectorial y $A \subset V$ un conjunto no-vacío, decimos que A es **linealmente independiente***si toda colección finita de elementos de A es l.i.*

Definición

Sea V un espacio vectorial, un conjunto $A \subset V$ es una base si

1. *$V = \mathscr{L}(A)$, es decir, A genera a V.*
2. *A es linealmente independiente.*

Nota

Si A es un conjunto finito, digamos $A = \{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$, y además una base para el espacio vectorial V, entonces se tiene

1. *Cada elemento $u \in V$ se expresa de la forma*

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j,$$

   donde $\alpha_j \in \mathbb{F}$.

2. *Los vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ son l.i.*

Proposición

Sean V *un espacio vectorial y* $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ *un conjunto de generadores de* V. *Supongamos que* $u = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k$, *con* $\alpha_1 \neq 0$. *entonces* $\{u, v^2, \cdots, v^k\}$ *genera a* V.

Prueba: *Dado que $\alpha_1 \neq 0$, entonces tenemos*

$$v^1 = \beta_1 u + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_k v^k,$$

donde $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}$, y $\beta_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$, $j = 2, 3, \cdots, k$. Sea $w \in V$ cualquiera y como $v^1, v^2, \cdots, v^k$ genera a V, entonces escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ tales que

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_k v^k \\ &= \lambda_1(\beta_1 u + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_k v^k) + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_k v^k \\ &= \lambda_1 \beta_1 u + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2) v^2 + \cdots + (\lambda_1 \beta_k + \lambda_k) v^k. \end{aligned}$$

Por tanto $\{u, v^2, \cdots, v^k\}$ genera a V. $\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ genera a V y $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\} \subset V$ una colección arbitraria de vectores, con $k < r$, entonces $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ son l.d.

Prueba:
Probaremos está proposición por el absurdo, es decir, supongamos que $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ son l.i.
Por hipótesis tenemos que $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ generan a V, entonces, tenemos

$$u^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k,$$

donde algún $\alpha_j \neq 0$, dado que $u^1 \neq \mathbf{0}$.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$.

Entonces, por la proposición anterior tenemos que los vectores $\{u^1, v^2, \cdots, v^k\}$ generan a V.
En forma inductiva, podemos asumir que hemos conseguido que los vectores $\{u^1, u^2, \cdots, u^j, v^{j+1}, \cdots, v^k\}$ sean generadores de V.
Así podemos escribir

$$u^{j+1} = \sum_{l=1}^{j} \beta_j u^j + \sum_{i=j+1}^{k} \gamma_i v^i.$$

Como $u^{j+1} \neq \mathbf{0}$, para algún $\gamma_i \neq 0$, (si todos los $\gamma_i = 0$ entonces los u^i serían l.d. contradice la hipótesis auxiliar).
Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $\gamma_{j+1} \neq 0$, entonces por la proposición anterior se tiene

$$\{u^1, u^2, \cdots, u^j, u^{j+1}, v^{j+2}, \cdots, v^k\}$$

generan a V.

Luego por el Principio de Inducción Matemática, se logró reemplazar todos los vectores v^i por los u^i, obteniéndose que

$$\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$$

generan a V.
Pero $r > k$, entonces existe u^{k+1} tal que

$$u^{k+1} = \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \cdots + \beta_k u^k,$$

lo cual es una contradicción a la independencia lineal de $\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$.
Por tanto, $\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$ son l.d. ■

Proposición (Teorema de la Dimensión)

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo cardinal.

Proposición (Existencia de Bases)

De cualquier conjunto generador de un espacio vectorial V se puede extraer una base.