Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

6 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Matrices Especiales Una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ es llamada

- Diagonal, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Triángular superior, si $a_{ij} = 0$ para $j < i$.
- Triángular inferior, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- simétrica, si ${}^tA = [a_{ji}] = A = [a_{ij}]$, y $m = n$.
- anti-simétrica, si ${}^tA = [a_{ji}] = -A = -[a_{ij}]$, y $m = n$.
- Hermitiana, si $A^* = [\overline{a_{ji}}] = A = [a_{ij}]$, y $m = n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- anti-Hermitiana, si $A^* = [\overline{a_{ji}}] = -A = -[a_{ij}]$, y $m = n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Matrices Especiales

- Ortogonal, si ${}^tAA = \mathrm{I}$ de orden n.
- Unitaria, si $A^*A = \mathrm{I}$ de orden n, y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Normal, si $A^*A = AA^*$, $m = n$, y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Idemponte, si $A^2 = A$, $m = n$.
- Nilponte, si $A^r = 0$ para algún y $r \in \mathbb{N}$, $m = n$.
- Definida Positiva (respec. Definida Negativa), si ${}^txAx > 0$ (respec. ${}^txAx < 0$), para todo $x \in \mathbb{K}(n,1)$ no nulo y $m = n$.
- Semi-definida Positiva (respec. Semi-definida negativa), si ${}^txAx \geq 0$ (respec. ${}^txAx \leq 0$), para todo $x \in \mathbb{K}(n,1)$ y $m = n$.

De aquí en adelante denotaremos A^t en lugar de t^A.

Existen operaciones elementales sobre filas y columnas que son muy importantes y permiten ciertas operaciones con cierta facilidad, estas son llamadas **operaciones elementales**.
Veamos las operaciones elementales en $\mathbb{K}(n, n)$ por fila

1. $E_i(\lambda)$ es una matriz obtenida de la matriz identidad I, multiplicando la $i-$ésima fila por $\lambda \in \mathbb{K}$ no-nulo. Por ejemplo

$$n = 2 : E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$n = 3 : E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2. $E_{ij}(\lambda)$ es una matriz obtenida de la matriz identidad I, sumando a la $i-$ésima fila, la $j-$ésima fila multiplicada por λ, con $i \neq j$. Por ejemplo

$$n = 2 : E_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=3 : E_{12}(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{13}(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

similar la las matrices $E_{23}(\lambda)$, $E_{31}(\lambda)$ y $E_{32}(\lambda)$.

3. E_{ij} es una matriz obtenida de la matriz I, intercambiando la $i-$ésima fila con la $j-$ésima fila con $i \neq j$. Por ejemplo

$$n = 2 : E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{21}$$

$$n = 3 : E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{31},$$

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{32}.$$

Proposición

Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m,n)$, y consideremos $a^1, a^2, \cdots, a^m$ los vectores filas de A, y las matrices elementales $E_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda), E_{ij}$ de orden $m \times m$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo. Entonces

1. $E_i(\lambda)A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ \lambda a^j \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$ es la matriz obtenida de A multiplicando la $j-$ésima por λ.

2. $E_{ji}(\lambda)A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j + \lambda a^i \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$ es la matriz obtenida de A sumando la $j-$ésima fila, la $i-$ésima multiplicada por λ

3. $E_{ij}A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow i \\ \\ \rightarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$ es la matriz obtenida de A intercambiando $i-$ésima con la $j-$ésima.

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición

Toda matriz elemental es inversible y su inversa es matriz elemental del mismo tipo, donde se verifica

1. $\left[E_i(\lambda)\right]^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, *con* $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. $\left[E_{ij}(\lambda)\right]^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, *con* $\lambda \neq 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$, *e* $i \neq j$.
3. $\left[E_{ij}\right]^{-1} = E_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$, *e* $i \neq j$.

Prueba:

1. Una forma de probar es la siguiente forma:
   En particular para $n = 2$ se tiene
   consideremos $E_1(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ y matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

entonces

$$E_1(\lambda)B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde $a = \lambda^{-1}$, $b = 0 = c$, $d = 1$. Por tanto

$$\begin{bmatrix} \lambda^{=1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1(\lambda^{-1}) = \left[E_1(\lambda)\right]^{-1}.$$

También pruebe probarlo usando la proposición anterior.

2. Pruebe probarlo usando la proposición anterior.
3. Pruebe probarlo usando la proposición anterior.

$\blacksquare$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ *una matriz tal que* $L_A : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$ *es una aplicación inyectiva, entonces existen matrices* E_j *tales que*

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I.$$

Prueba:

La prueba la haremos por inducción sobre n.

• *Si* $n = 1$, *entonces, entonces la matriz de orden* 1×1 *tiene la forma* $A = [\lambda]$, *con* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y definamos la aplicación*
$L_A(x) = Ax = \lambda x$, $\lambda \neq 0$.
Como deseamos que L_A *sea inyectiva, entonces*
sean $x, y \in \mathbb{K}(n,1)$ *tales que* $L_A(x) = L_A(y)$, *entonces*
$\lambda x = \lambda y$, *esto implica que* $x = y$.
Luego hacemos $E_1 = [\lambda^{-1}]$, *de donde* $E_1 A = AE_1 = \mathrm{I} = [1]$.

• Supongamos que el enunciado es válido para matriz hasta de orden $n = k$.

• Ahora veamos que el enunciado es válido para $n = k + 1$.

Consideremos la matriz $A \in \mathbb{K}(k+1, k+1)$.

Notamos que algún elemento de la primera columna de A debe ser diferente de cero, caso contrario tendremos

$$Ae^1 = [a^1 a^2 \cdots a^{k+1}]e^1 = Ae^1 = [\mathbf{0} a^2 \cdots a^{k+1}]e^1 = \mathbf{0},$$

de donde L_A no es inyectiva, lo cual es una contradicción. Por tanto, la columna a^1 (primera) de A posee algún elemento no nulo, entonces tenemos

Si $a_{j1} \neq 0$, entonces matriz $E_{1j}A = [a_{ij}]$ se tiene que $a_{11} \neq 0$.

Luego, multiplicamos por $E_2 = E_2(a_{11}^{-1})$ obtenemos

$$E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ a_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{21} & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Queda como ejercicio los siguientes pasos. ■

Corolario

Con las hipótesis de la proposición anterior, la matriz A es inversible.

Prueba:
De la identidad

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = \mathrm{I},$$

obtenida de la proposición anterior, multiplicamos en forma sucesiva por la izquierda las matrices $E_k^{-1}, E_{k-1}^{-1}, \cdots, E_1^{-1}$, obteniéndose

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Luego multiplicamos sucesivamente por la derecha las matrices $E_k, \cdots, E_1$ de donde

$$A E_k E_{k-1} \cdots E_1 = \mathrm{I}.$$

Por tanto la matriz $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ es la inversa de A. ■

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n, n)$ posee inversa a la izquierda, entonces A es inversible.

Prueba:
Por hipótesis, existe la inversa por la izquierda, sea $B \in \mathbb{K}(n, n)$ tal que $BA = \mathrm{I}$.
Supongamos que $Ax = \mathbf{0}$, entonces

$$x = \mathrm{I}x = B(Ax) = B\mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow x = \mathbf{0},$$

luego$\mathcal{N}(L_A) = \{\mathbf{0}\}$, por tanto L_A inyectiva, es decir, A es inversible. ∎

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n,n)$ posee inversa a la derecha, entonces A es inversible.

Por hipótesis, A posee inversa por la derecha, entonces existe $B \in \mathbb{K}(n,n)$ tal que $AB = \mathrm{I}$ y por el corolario anterior, tenemos que B es inversible. Entonces

$$A = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = \mathrm{I}B^{-1} = B^{-1}.$$

Por tanto A es inversible. ■

Corolario

Si la matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si L_A es inyectiva.

Prueba:Ejercicio. ■

Corolario

Toda matriz inversible es producto de un número finito de matrices elementales.

Prueba:
Si $A \in \mathbb{K}(n, n)$ es inversible, entonces L_A es inyectiva, luego por el primer corolario de la proposición anterior tenemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1},$$

y como la inversa de una matriz elemental también es una matriz elemental, por tanto, el corolario es verdadero. ■