# Álgebra Lineal I

## Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

9 de diciembre de 2020

# Transformaciones Lineales

### Definición

*Se llama* **conjunto solución del sistema** $Ax = b$*, al conjunto total de sus soluciones.*

Verifique que dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen el mismo conjunto solución.

Se llama **matriz aumentada del sistema** $Ax = b$ a la matriz $[A \mid b]$.

## Ejemplo

*Halle el conjunto solución del sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 4t & + & 3w & = & 6 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 6t & - & 5w & = & 1 \\ 2x & & & - & z & - & 4t & + & 2w & = & -7 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & - & 10t & - & 8w & = & -5 \end{array}$$

*luego el sistema anterior lo llevamos a forma de matriz aumentada*

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -6 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 2 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & -10 & -8 & -5 \end{array}\right].$$

Haciendo operaciones elementales llegamos a la solución
$S = \{(0, 13, 7, 0, 0) + t(1, -7, -2, 1, 0) + w(0, -1, 2, 0, 1)/t, w \in \mathbb{R}\}$

## Definición

*Sea $A \in \mathbb{R}(m, n)$ una matriz, la dimensión de su espacio fila se llama* **rango por filas**, *y lo denotamos por $r_f(A)$, es decir,*

$$r_f(A) = dim(\mathcal{F}(A)).$$

También, la dimensión de su espacio columna $\mathscr{C}(A) = \mathscr{L}(\{a^1, \cdots, a^n\})$ se llama **rango por columnas** y lo denotamos por $r_c(A)$, es decir,

$$r_c(A) = dim(\mathscr{C}(A)).$$

## Nota

*El rango por filas de una matriz $A$, es igual al número de filas no nulas de $A_0$, la matriz elemental reducida asociada a la matriz $A$, de donde tenemos $r_f(A) \leq m$.*
*Además, los $1-$capitales de $A_0$ se encuentran en columnas distintas, de donde se tiene que $r_f(A) \leq n$.*
*De esta forma se obtiene que*

$$r_f(A) \leq \text{mín}(\{m, n\}).$$

*Si $r_f(A)$=$\text{mín}(\{m, n\})$, entonces diremos que el $r_f(A)$ es total, también llamado rango full.*

Recordar que el sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$ siempre posee solución, la cual es $x = \mathbf{0}$.
Sin embargo, nos interesa determinar todas las soluciones del sistema homogénemo.
Observe que el conjunto total de soluciones de $Ax = \mathbf{0}$ es un subespacio de $\mathbb{K}(n, 1)$, de donde

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}(n, 1)/Ax = \mathbf{0}\}.$$

En la siguiente proposición determinamos la dimensión de este subsespacio.

## Proposición

*Para toda matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ se tiene que $dim(\mathcal{N}(A)) = n - r_f(A)$.*

**Prueba**:

Consideremos $A_0$ la matriz elemental reducida asociada a la matriz $A$, entonces $Ax = \mathbf{0}$ y $A_0x = \mathbf{0}$ tienen el mismo conjunto solución, es decir, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_0)$.

Ahora, en la ecuación $A_0x = \mathbf{0}$, las variables dependientes corresponden a las columnas donde se hallan los $1-$capitales, mientras que las demás variables son independientes.

Luego si $r_f(A) = p$, entonces se tienen $p$ variables dependientes $y_1, \cdots, y_p$ y $q$ variables independientes $z_1, \cdots, z_q$. de $A_0x = \mathbf{0}$, de donde se tienen

$$y_1 = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{i1} z_i$$
$$y_2 = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{i2} z_i$$
$$\vdots$$
$$y_p = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{ip} z_i$$

Luego, las componentes de todo vector $v \in \mathcal{N}(A)$ están expresadas como combinación lineal de $z_1, \ldots, z_q$.

Para cada $i = 1, \cdots, q$, consideremos $u^i \in \mathcal{N}(A)$ el vector que se obtiene tomando $z_i = 1$ y $z_j = 0$ para $j \neq i$. Entonces los vectores $\{u^1, \cdots, u^q\}$ son linealmente independiente y generan a $\mathcal{N}(A)$. Luego

$$dim(\mathcal{N}(A)) = q = n - p = n - r_f(A).$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 9z & + & w & = & 0 \\ -x & + & y & - & 6z & + & 6w & = & 0 \\ 5x & + & y & + & 24z & - & 2w & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & + & 2w & = & 0. \end{array}$$

De donde haciendo las operaciones elementales correspondientes llegamos a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 24 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_0.$$

Entonces $r_f(A) = r_f(A_0) = 2$. Por tanto, el sistema inicial es equivalente a

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & 5z & - & w & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 3w & = & 0, \end{array}$$

observamos que las variables dependientes son $x, y$ y las variables independientes $z, w$.
Luego si $v = (x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$, entonces

$$v = (-5z + w, z - 3w, z, w) = z(-5, 1, 1, 0) + w(1, -3, 0, 1)$$

Por tanto una base de $\mathcal{N}(A)$ es $\{(-5, 1, 1, 0), (1, -3, 0, 1)\}$, y de manera tenemos

$$dim(\mathcal{N}(A)) = 2 = 4 - 2 = 4 - r_f(A).$$

Observamos que los sistemas homogénos poseen siempre solución, y aquí podemos deducir que un sistema homogéneo:
- posee solución única (si $m = n$ y la matriz es inversible)
- posee infinitas soluciones.

## Sistema no Homogéneo

En esta parte nos encontramos con sistemas que pueden poseer

- solución única (si $m = n$ y la matriz es inversible) **ó**
- infinitas soluciones **ó**
- no posee solución.

### Definición

*Sean $A \in \mathbb{K}(m,n)$, $b \in \mathbb{K}(n,1)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ se llama* **consistente**, *si posee alguna solución. En caso contrario, se llama* **inconsistente.**

### Proposición

*Sean $A \in \mathbb{K}(m,n)$, $b \in \mathbb{K}(n,1)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ posee solución si $b \in \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n)$, donde $a^1, \cdots, a^n$ son los vectores columnas de $A$.*

**Prueba**: Ejercicio.

## Proposición (Criterio de la matriz aumentada)

*Un sistema $Ax = b$ posee solución si, y solo si*

$$r_f(A) = r_f([A \mid b])$$

**Prueba**:
Denotaremos por $\mathscr{L} = \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n)$ y $\mathscr{L}' = \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n, b)$.
Si el sistema posee solución, entonces por la porposición anterior se tiene $b \in \mathscr{L}$. Luego $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$ y además

$$r_f(A) = dim(\mathscr{L}) = dim(\mathscr{L}') = r_f([A \mid b]).$$

Recíprocamente, si $r_f(A) = r_f([A \mid b])$, es decir, $dim(\mathscr{L}) = dim(\mathscr{L}')$, de donde $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$ y esto implica que $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.
Por tanto, $b \in \mathscr{L}' = \mathscr{L}$ y por la proposición anterior se tiene que el sistema posee solución.

Una **solución particular** del sistema $Ax = b$, es cualquier solución de este sistema.

## Proposición

*Si* $x^0 \in \mathbb{K}(n,1)$ *es un aolución particular del sistema* $Ax = b$, *entonces el conjunto total de soluciones de este sistema está dada por*

$$x^0 + \mathcal{N}(A) = \{x^0 + z / z \in \mathcal{N}(A)\}$$

**Prueba**:

Consideremos $CS = \{x \in \mathbb{K}(n,1) / Ax = b\}$.

Veamos que $CS = x^0 + \mathcal{N}(A)$:

$\subset)$ Sea $x \in CS$, entonces $Ax = b$. Luego

$$A(x - x^0) = Ax - Ax^0 = b - b = \mathbf{0},$$

entonces $z = x - x^0 \in \mathcal{N}(A)$, luego $x \in x^0 + \mathcal{N}(A)$, es decir, $CS \subset x^0 + \mathcal{N}(A)$.

$\supset$) Sea $x \in x^0 + \mathcal{N}(A)$, entonces existe $x \in \mathcal{N}(A)$ tal que $x = x^0 + z$, luego

$$Ax = A(x^0 + z) = Ax^0 + Az = Ax + \mathbf{0} = Ax = b,$$

de donde $x \in CS$, es decir $x^0 + \mathcal{N}(A) \subset CS$.

Por tanto $CS = x^0 + \mathcal{N}(A)$.

$\blacksquare$

## Sistema Inconsistente

Empezaremos con el siguiente sistema, a modo de ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}$$

aplicando operaciones elmentales a la matriz aumentada tenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \end{array}\right],$$

donde observamos que $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$ y en le última fila se tiene $0 = -5$ lo cual no puede ser, y de acuerdo a la penúltima proposición tenemos que, $b = [1, -2, 4]^t \notin \mathscr{L}(\{a^1, a^2, a^3\})$.

Sean $V, W$ espacios vectoriales de dimensiones $n$ y $m$, respectivamente, y $\Gamma = \{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de $V$, $\Omega = \{w^1, \cdots, w^m\}$ una base de $W$. Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tal que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

determinan una matriz

$$A_T = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m, n),$$

llamada **matriz asociada** a $T$ en las base $\Gamma$ y $\Omega$.

## Ejemplo

*Sea* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transfomación definida por*

$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x - 3y.)$$

*Ahora procedemos a calcular la matriz asociada a* $T$*,*

1. *En las base cacnónicas* $\{e^1, e^2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\{f^1, f^2, f^3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*, entonces*

$$T(e^1) = (1, 1, 2) = f^1 + f^2 + 2f^3$$
$$T(e^2) = (1, -1, -3) = f^1 - f^2 - 3f^3$$

*Luego tenemos la matriz* $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ *es la matriz asociada a* $T$ *en las bases canónicas de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$.

2. Ahora considere otras bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, digamos $\{v^1 = (3;5), v^2 = (2;3)\}$ para $\mathbb{R}^2$ y $\{w^1 = (3,1,2), w^2 = (-1,1,-1), w^3 = (2,1,1)\}$ para $\mathbb{R}^3$, de donde

$$A_T = \begin{bmatrix} -45 & -26 \\ -19 & -11 \\ 62 & 36 \end{bmatrix}$$

los detalles como ejercicio.