Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

06 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$

El problema de Valores propios está definido como sigue:
Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$, entonces debemos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$, y $x \in \mathbb{K}(n, 1) \backslash \{\mathbf{0}\}$ tales que

$$Ax = \lambda x.$$

La resolución de este problema tiene muchas aplicaciones, entre ellas, la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ingeniería civil, circuitos eléctricos, biología, médicina, etc.

En esta parte consideraremos a todos los espacios involucrados de dimensón finita, a menos que se diga lo contrario.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ **es un valor propio** *de T, si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que*

$$T(v) = \lambda v. \tag{1}$$

Este vector v es llamado **vector propio** *de T asociado a λ.*

Recordar: como $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y V es de dimensión finita, digamos $dim(V) = n$, entonces existe una matriz $A_T \in \mathbb{K}(n, n)$ tal que

$$T(v) = A_T v, \tag{2}$$

la matriz A_T es llamada la matriz asociada a la transformación lineal T.

Note que el problema (1) es equivalente a resolver el problema (2). Ahora consideremos $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V y la matriz A_T asociada a la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ en dicha base. Además, cada vector $v \in V$ puede ser expresado de la siguiente forma $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j$, con $x_j \in \mathbb{K}$, al cual le asociamos el vector de coordenadas $x_v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

Proposición

La función $\psi : V \longrightarrow \mathbb{K}(n, 1)$, definida mediante $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo que satisface

$$\psi(T(v)) = A_T x_v$$

Prueba:
Observamos que ψ es una trasfomación lineal,
en efecto
Sean $v, w \in V$, entonces existen escalares $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j \quad \text{y} \quad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v^j,$$

luego $\psi(v) = x_v$ y $\psi(w) = y_w$, con $x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t$ e $y_w = (y_1, \cdots, y_n)^t$, de donde tenemos $z_{v+w} = x_v + y_w = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)^t$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(v + \alpha w) &= z_{v+\alpha w} = (x_1 + \alpha y_1, \cdots, x_n + \alpha y_n)^t = x_v + \alpha y_w \\ &= \psi(v) + \alpha \psi(w), \end{aligned}$$

por tanto ψ es una transformación lineal.

ψ es un isomorfismo, dado que lleva la base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de V en la base canónica $\{e^1, \cdots, e^n\}$ de $\mathbb{K}(n,1)$ (Ejercicio).
Además tenemos

$$\psi\Big(T(v^j)\Big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i\right) = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^t = A_{_T}(e^j),$$

de donde

$$\begin{aligned}\psi\Big(T(v)\Big) &= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j T(v^j)\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v^j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j A_{_T}(e^j) = A_{_T}(x_1, \cdots, x_n)^t\\ &= A_{_T}(x_v).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces T su matriz asociada A_T tienen los mismos valores propios.

Prueba:
Sea λ un valor propio de T y v el vector propio correspondiente a λ, entonces

$$\begin{aligned} A_T(x_v) &= \psi(T(v)) \qquad \text{(por la proposición anterior)} \\ &= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\ &= \lambda x_v, \end{aligned}$$

por tanto λ es un valor propio de A_T.

Recíprocamente, sea λ un valor propio de A_T y $x \in \mathbb{K}(n,1)$ su correspondiente vector propio. entonces existe $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$ (esto es debido a que ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned}\psi\big(T(v)\big) &= A_T x \qquad \text{(por la proposición anterior)}\\ &= \lambda x = \lambda\psi(v)\\ &= \psi(\lambda v).\end{aligned}$$

Como ψ es inyectiva, entonces tenemos que $T(v) = \lambda v$ y como $v \neq \mathbf{0}$, entonces λ es un valor propio de T. ■

Corolario

Si $A, P \in \mathbb{K}(n,n)$ son matrices con P no singular, entonces A y $P^{-1}AP$ son matrices que poseen los mismos valores propios.

Prueba:
definamos $B = P^{-1}AP$ entonces A y B son matrices semejantes y como estas matrices están asociadas a las mismas transformaciones lineales, el resto queda como ejercicio. $\blacksquare$

Ejemplo

La transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $T(x,y)=(-y,x)$, *no posee valores propios en* $\mathbb{R}$.

efecto:
supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T y $v = (v_1, v_2)$ no nulo es el correspondiente vector propio, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v_1, v_2) = (-v_2, v_1) \\ &= \lambda(v_1, v_2), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ -v_1 & + & \lambda v_2 & = & 0, \end{array}$$

resolviendo el sistema anterior, tenemos que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^2 + 1 = 0$.

Definición

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$, *el polinomio*

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I})$$

es llamado **polinomio característico** *de* A.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, *entonces*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 11 \end{aligned}$$

Definición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El **polinomio característico** *de T está definido como el polinomio caracterítico de la matriz asociada en cualquier base de V, es decir, A_T es la matriz asociada a T en alguna base de V, entonces el polinomio característico de T es*

$$p_T(\lambda) = det(A_T - \lambda \mathrm{I})$$

Nota

El polinomio dado, en la definición anterior, no depende de $A_{_T}$, es decir, si $B_{_T}$ es otra matriz asociada a T, entonces existe una matriz P no singular tal que

$$B_{_T} = P^{-1} A_{_T} P,$$

por tanto

$$B_{_T} - \lambda \mathrm{I} = P^{-1} A_{_T} P - \lambda \mathrm{I} = P^{-1} \Big(A_{_T} - \lambda \mathrm{I} \Big) P$$

entonces

$$\begin{aligned} det(B_{_T} - \lambda \mathrm{I}) &= det\Big(P^{-1} \Big(A_{_T} - \lambda \mathrm{I} \Big) P \Big) \\ &= det\Big(P^{-1} \Big) det\Big(A_{_T} - \lambda \mathrm{I} \Big) det\Big(P \Big) = det\Big(A_{_T} - \lambda \mathrm{I} \Big) \\ &= p_{_T}(\lambda). \end{aligned}$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T si, y solo si λ es una raíz de p_T.

Prueba:

observar que λ es un valor propio de T si, y solo si existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = \lambda v$ lo que es equivalente a $(T - \lambda \mathrm{I})(v) = \mathbf{0}$ si, y solo si $T - \lambda \mathrm{I}$ no es inversible, lo que es equivalente a que $A_T - \lambda \mathrm{I}$ es singular para una matriz asociada A_T en cualquier base de V (proposición anterior) si, y solo si $det(A_T - \lambda \mathrm{I}) = 0$ si, y solo si λ es una raíz de p_T.

$\blacksquare$

Notar que el polinomio característico p_T de una transformación dada, tiene grado $n = dim(V)$, dado que es de la forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^n - traza(T)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(T),$$

notar que T tiene a lo más n valores propios.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces los vectores propios de T correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Prueba:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ valores propios de T diferentes entres sí, y $v^1, v^2, \cdots,$ los vectores propios correspondientes, entonces

$$\Big(\forall j = 1, 2, \cdots, n\Big)\Big(T(v^j) = \lambda_j v^j\Big).$$

Consideremos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ escalares tales que

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 \cdots, \alpha_n v^n = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Veamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$:
Notar que este producto

$$(T - \lambda_1 \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_{j-1} \mathrm{I})(T - \lambda_{j+1} \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_n \mathrm{I}) \tag{4}$$

es conmutativo, entonces multiplicamos (4) a la ecuación (3) de donde para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ tenemos

$$\left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (T - \lambda_1 \mathrm{I}) \right] (\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n) = \mathbf{0}$$

de donde para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ obtenemos

$$\alpha_j \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i) \right] v^j = \mathbf{0}$$

como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ y además por definición $v^j \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha_j = 0, \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Por tanto $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ son linealmente independientes. $\blacksquare$

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.
Consideremos las transformaciones lineales

$$\mathrm{I}, T, \cdots, T^k,$$

con $k = n^2$, como elementos del espacio vectorial $\mathscr{L}(V)$, deben ser linealmente dependientes, esto es debido a que son $k+1$ vectores en un espacio de dimensión k, luego existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_0 \mathrm{I} + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_k T^k = 0.$$

es decir T es una raíz del polinomio g no nulo de la forma

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

El polinomio mónico de grado mínimo con esta propiedad, se llama el **polinomio minimal** de T. Denotemos por φ_{T} al polinomio minimal de T, el cual debe tener la forma

$$\varphi_{T}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + a_r x^r$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces para cualquier transformación $T : V \longrightarrow V$ los polinomios p_T y φ_T tienen las mismas raíces.