Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

11 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}(n, n)$ una matriz, decimos que A es **diagonalizable** *si existen matrices $P, D \in \mathbb{K}(n, n)$ con P no singular y D diagonal tal que*

$$D = P^{-1}AP$$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$, *en este se tiene que*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

donde

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces para cualquier transformación $T : V \longrightarrow V$ los polinomios $p_{_T}$ y $\varphi_{_T}$ tienen las mismas raíces.

Prueba:

Sea λ una raíz de $p_{_A}$, entonces λ es un valor propio de T, por tanto existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $Av = \lambda v$, de donde se tiene $A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$, también $A^3 v = \lambda^3 v$ y así en forma sucesiva se tiene $A^m v = \lambda^m v$, entonces para un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, tenemos

$$\begin{aligned} p(T)(v) &= \left(a_0 \mathrm{I} + a_1 T + \cdots + a_k T^k\right)(v) \\ &= (a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_k T^k(v)) \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_k \lambda^k v \\ &= (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_k \lambda^k) v = p(\lambda) v. \end{aligned}$$

en particular si $p = \varphi_{T}$, entonces tenemos

$$0 = \varphi_{T}(T)(v) = \varphi_{T}(\lambda)v,$$

y como $v \neq \mathbf{0}$, entonces $\varphi_{T}(\lambda) = 0$.
Por tanto p_{T} y φ_{T} poseen las mismas raíces. ∎

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *entonces su polinomio característico es*

$$\begin{aligned} p_{A}(\lambda) &= det(A - \lambda \mathrm{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2, \end{aligned}$$

de donde $p_{A}(A) = (A - \mathrm{I})^2 = 0$.

Nota

el polinomio mínimal de A, tiene la propiedad que $\text{grad}\left(\varphi_A\right) \leq n$.
En ejemplo anterior el grado de polinomio mínimal es 2, *dado que* $A - \mathrm{I} \neq 0$.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 48 & -10 & -10 \\ 90 & -17 & -20 \\ 135 & -30 & -27 \end{bmatrix}$.
Compruebe que $\text{grad}(\varphi_A) = 2$

Definición

Diremos que una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$ es **triangulable** *si es semejante a una matriz triangular. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es* **triangulable** *si existe una base de V en la matriz asociada a T sea triangular.*

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces toda transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es triangulable.

Prueba:

Usaremos inducción matemática sobre n:

- $n = 1$ es válido.
- (**H I**) Supongamos que hasta $n - 1$ el enunciado es válido.

- Veamos que para n también es válido:
  Consideremos la transformación lineal $T^{\nabla} : V^* \longrightarrow V^*$ definida por $T^{\nabla}(f) = f \circ T$.
  Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de T^{∇} y $g \in V^*$ su correspondiente vector propio, es decir,

$$T^{\nabla}(g) = \lambda g.$$

  Definamos $S = \{v \in V / g(v) = 0\}$, note que S es un subespacio de V, con $dim(S) = n - 1$ y también $T(S) \subset S$.
  Por hipótesis de inducción S posee una base, digamos, $\{v^1, \cdots, v^{n-1}\}$ tal que

$$T(v^1) = \lambda_1 v^1$$
$$T(v^2) = a_{12}v^1 + \lambda_2 v^2$$
$$\vdots$$
$$T(v^{n-1}) = a_{1,n-1}v^1 + \cdots + \lambda_{n-1}v^{n-1}$$

ahora agramos el vector v^n a fin de completar la base de V, con

$$T(v^n) = a_{1n}v^1 + \cdots + \lambda v^n,$$

por tanto la matriz asociada a T, en la base $\{v^1, \cdots, v^n\}$, es

$$A_T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$\begin{aligned} p_{T}(\lambda) &= det(A_{T} - \lambda \mathrm{I}) \\ &= (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big) \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \\ &= \lambda^n - traza(T) \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(T). \end{aligned}$$

Ahora justificamos estos pasos en la siguiente

Proposición

Dada la matriz $A \in \mathbb{C}(n,n)$, *entonces existe una matriz no singular* $P \in \mathbb{C}(n,n)$ *tal que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Prueba: Ejercicio. (sug, La transformación lineal $L_A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene por matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{C}(n,1)$ precisamente a A)

■

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$*, entonces su polinomio característico está dado por* $p_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$*.*
Notamos que A posee un único valor propio $\lambda = 1$ *(multiplicidad dos).*
De la ecuación $Av = v$ *tenemos*

$$Av = A(v_1, v_2)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4v_1 + 3v_2 \\ -3v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos $v_1 + v_2 = 0$*, entonces* $v = (v_1, v_2)^t = (1, -1)^t$*, ahora agregamos el vector* $v^2 = (0, 1)^t$ *tal que* v^1, v^2 *sea una base para* $\mathbb{R}^2$

Por tanto

$$L_A(v^1) = v^1$$
$$L_A(v^2) = 3v^1 + v^2,$$

de donde la matriz triangular de A es

$$P = [v^1 \;\; v^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición (Cayley-Hamilton)

Sean V un espacio vectorial, con $\dim(V) = n$, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. entonces $p_{T}(T) = 0$

Prueba: Ejercicio. $\blacksquare$

Observación

1. *El polinomio $\varphi_T(x)$ divide a $p_T(x)$. En efecto por el algoritmo de la división de Euclides, existen polinomios g y h tales que*

$$p_T(x) = g(x)\varphi_T(x) + h(x)$$

donde $h(x) = 0$ ó $grad(h) < grad(\varphi_T)$.
Por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene

$$0 = p_T(T) = g(T)\varphi_T(T) + h(T) = 0 + h(T) = h(T),$$

de donde $h(T) = 0$. Entonces por la minimalidad del grado φ_T se tiene que $h(x) = 0$. Por tanto

$$p_T(x) = g(x)\varphi_T(x).$$

2. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son valores propios de T diferentes (raales o complejos) y debido a que p_T y φ_T tienen las mismas raíces, y de acuerdo a la observación anterior, tenemos

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$
$$\varphi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r}.$$

Además,

$$m_1 + \cdots + m_r = n, \quad d_1 + \cdots + d_r = grad(\varphi_T)$$
$$1 \leq d_j \leq m_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, r.$$

El número m_j se llama **multiplicidad algebraíca** de λ_j. Por otro lado, asociado a cada raíz λ_j, existe un subespacio

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}$$

cuya dimensión es la **multiplicidad geométrica** de λ_j.

Proposición

Sea λ un valor propio de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si denotamos por e y m a su multiplicidad geométrica y multiplicidad algebraíca respectivamente, entonces

$$e \leq m.$$

Prueba: Ejercicio. ■

Recordar que una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V en donde su matriz asociada es diagonal, es decir, V posee una base formada por vectores propios correspondientes a la transformación lineal.

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios diferentes de T, entonces los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}, \quad j = 1, 2, \cdots, r,$$

tienen la propiedad

$$V_j \cap \left[V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r\right] = \{\mathbf{0}\},\ j + 1, \cdots, r$$

por tanto $V_1 + \cdots + V_r$ es suma directa, y se denota

$$V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$