Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

13 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de $A \in \mathbb{K}(n, n)$

Recordar que una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V en donde su matriz asociada es diagonal, es decir, V posee una base formada por vectores propios correspondientes a la transformación lineal.

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios diferentes de T, entonces los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}, \quad j = 1, 2, \cdots, r,$$

tienen la propiedad

$$V_j \cap \Big[V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r\Big] = \{\mathbf{0}\},\ j + 1, \cdots, r$$

por tanto $V_1 + \cdots + V_r$ es suma directa, y se denota

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

Proposición (Primer criterio de diagonalización)

Sea V un espacio vectorial, una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si y solo si las multiplicidades algebraica y geométrica, de cada uno de sus valores propios, son iguales.

Prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que T es diagonalizable, y consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios diferentes y definamos para cada $j = 1, 2, \cdots, r$ los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\},$$

Una vez elegida una base para cada subespacio V_j, la unión de estas bases es una base para V_0, dado que T es diagonalizable tenemos que $V_0 = V$.

La matriz asociada T en esta base es diagonal y en su diagonal posee cada valor propio λ_j, repetidos $d_j = dim(V_j)$ veces. Entonces

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r}.$$

Debido a la factorización única d_j debe ser igual a la multiplicidad algebraica de λ_j; y así tenemos que las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio λ_j son iguales.

$\Leftarrow$) Supongamos que $m_j = dim(V_j)$ es la multiplicidad algebraica de λ_j. entonces

$$\begin{aligned} din(V) &= n = m_1 + \cdots + m_r \\ &= dim(V_1) + \cdots + dim(V_r) \\ &= dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r), \end{aligned}$$

de donde $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Por tanto T es diagonalizable. $\blacksquare$

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ *¿ Es diagonalizable?*

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2,$$

en este caso es suficiente determinar la multiplicidad algebraica de $\lambda = -2$, es decir,

$$V_{\lambda=-2} = \{v \in \mathbb{K}(3,1)/Av = -2v\} = \{(2x, 2x, x)/x \in \mathbb{K}\},$$

notamos que $dim(V_{\lambda=-2}) = 1$, por tanto la multiplicidad algebraica es igual a 2 mientras que la multiplicad geométrica es igual a 1 y de esta manera A no es diagonalizable.

Proposición (Segundo criterio de diagonalización)

sea V un espacio vectorial, una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si, y solo si su polinomio minimal posee solamente raíces simples.

Prueba

$\Rightarrow$) Como T es diagonalizable, entonces $V = V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.
Veamos que $\varphi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_r)$:
Para cada $v \in V$ puede ser expresado de la forma

$$v = v^1 + \cdots + v^r$$

donde $\{v^1, v^2, \cdots, v^r\} \subset V_j$.
Como $(T - \lambda_j \mathrm{I})v^j = 0$ para $j = 1, \cdots, r$, entonces

$$(T-\lambda_1\mathrm{I})(T-\lambda_2\mathrm{I})\cdots(T-\lambda_r\mathrm{I})v=0,$$

por tanto

$$\varphi_{T}(T)=(T-\lambda_1\mathrm{I})(T-\lambda_2\mathrm{I})\cdots(T-\lambda_r\mathrm{I})=0,$$

$\Leftarrow$) supongamos que $\varphi_{T}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_r)$.
Veamos que T es diagonalizable, lo que es equivalente $V=V_0$:
Los polinomios

$$\varphi_j(\lambda)=\frac{\varphi_{T}(\lambda)}{\lambda-\lambda_j},\quad j=1,\cdots,r.$$

son coprimos (es decir, no tienen factor común), por tanto existen polinomios h_j tales que

$$\sum_{j=}^{r} \varphi_j(\lambda)h_j(\lambda) = 1,$$

entonces

$$\sum_{j=}^{r} \varphi_j(T)h_j(T) = \mathrm{I},$$

luego para todo $v \in V$ se tiene

$$v = \sum_{j=}^{r} \varphi_j(T)h_j(T)(v),$$

denotemos por $w^j = \varphi_j(T)h_j(T)(v)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(T-\lambda_j\mathrm{I})(w^j) &= \Big[(T-\lambda_j\mathrm{I})\varphi_j(T)\Big]h_j(T)(v)\\ &= \varphi_{_T}(T)h_j(T)(v)\\ &= 0h_j(T)(v)=0.\end{aligned}$$

Luego para w^j, y para cada $j=1,\cdots,r$ se tiene

$$v = w^1+\cdots+w^r \in V_1\oplus\cdots\oplus V_r,$$

de donde $V\subset V_0$, y por tanto $V=V_0$.
Por tanto T es diagonalizable.

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T, L : V \longrightarrow V$ transformaciones lineales diagonalizables tales que $T \circ L = L \circ T$. Entonces existe una base de V que diagonaliza T y L simultáneamente. En particular $L \circ T$ es diagonalizable.

Prueba Ejercicio. ∎

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T_j : V \longrightarrow V$, $j = 1, \cdots, m$ una familia de transformaciones lineales diagonalizables que conmutan dos a dos. Entonces existe una base de V que las diagonaliza simultáneamente.

Prueba Ejercicio. ∎

Ejemplo

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica fácilmente que $AB = BA$, *además* A *y* B *son diagonalizable, es decir*

$$p_{_A}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \quad y \quad p_{_B}(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$$

poseen raíces distintas.
Los valores propios asociados a $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda_2 = 1$ *de* A *son* $v^1 = (1;1)^t$ *y* $v^2 = (1;2)^t$, *respectivamente.*

Entonces la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a la matriz A así como a la matriz B.
En efecto

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ un vector fijo tal que $T^{q-1}(v) \neq \mathbf{0}$. Entonces

1. *Los vectores $v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)$ son l. i.*
2. *El subespacio $S = \mathscr{L}(\{v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)\})$ es invariante bajo T.*
3. *Existe un subespacio $W \subset V$ invariante bajo T tal que*

$$V = S \oplus W$$

Prueba:

1. Supongamos que

$$\alpha_1 v + \alpha_2 T(v) + \cdots + \alpha_q T^{q-1}(v) = \mathbf{0}$$

Aplicamos T^{q-1} a la última igualdad, entonces tenemos

$$\alpha_1 T^{q-1}(v) = \mathbf{0},$$

y como $T^{q-1} \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha_1 = 0$.
Ahora aplicamos T^{q-2} a la última igualdad, obtenmos $\alpha_2 = 0$.
Repetimos este proceso obetniéndose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0.$$

Entonces $v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)$ son l.i.

2. Ejercicio.
3. Ejercicio.

■

Proposición (Unicidad)

Con las notaciones de la proposición anterior, sea $w \in V$ otro vector ($w \neq v$) tal que $T^{q-1}(w) \neq \mathbf{0}$.
Sea $S' = \mathscr{L}(\{w, T(w), \cdots, T^{q-1}(w)\})$ y $W' \subset V$ el subespacio invariante bajo T tal que $V = S' \oplus W'$, que por la proposición anterior existen índices de nilpotencia de $T : W \longrightarrow W$ y $T : W' \longrightarrow W'$ son iguales

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición (Teorema de Estructura)

Sean V un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal nilpotente de índice q, entonces existen enteros positivos $r, q_1, q_2, \cdots, q_r$ unívocamente determinados por T, y vectores no nulos $\{v^1, \cdots, v^r\} \subset V$, tales que

1. $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$.
   El conjunto de enteros $r, q_1, q_2, \cdots, q_r$ se llaman **conjunto completo de invariantes** *de T.*
2. *La colección de vectores*

$$
\begin{gathered}
T^{q_1-1}(v^1), \cdots, T(v^1) \\
\vdots \\
T^{q_1-1}(v^r), \cdots, T(v^r)
\end{gathered}
$$

constituyen una base de V.

3. $T^{q_1}(v^1) = \mathbf{0}, T^{q_2}(v^2) = \mathbf{0}, \cdots, T^{q_r}(v^r) = \mathbf{0}$.
4. *El conjunto completo de invariantes caracteriza T. Es decir, dos transformaciones lineales nilpotentes son semejantes si y sólo si tienen el mismo conjunto completo de invariantes.*

Prueba: Ejercicio. ■

Nota

El número de elementos de la base de V dada en la proposición anterior, (2) nos dice que

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_r = n = dim(V)$$

Ahora veamos la forma matricial de una transformación lineal nilpotente. La matriz asociada a la transformación lineal nilpotente $T : V \longrightarrow V$, en la base dada en (2) de la proposición anterior, está formada por bloques

Así, en el subespacio invariante $\mathscr{L}(\{T^{q_i-1}(v^i),\cdots,T(v^i),v^i\})$ *la matriz asociada es*

$$J_i(T)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & & & & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de orden $q_i\times q_i$. *Luego la matriz asociada a* T *en la base dada por* (2) *es*

$$J(T) = \begin{bmatrix} J_1(T) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(T) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada la **forma canónica de Jordan** *de la transformación lineal nilpotente T.*