Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

11 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Consideremos $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial (real ó complejo) definamos la función $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{F}$ por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

esta función satisface la siguiente

Proposición

1. $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$, *y* $\|v\| = 0$ *si, y solo si* $v = \mathbf{0}$.
2. $(\forall u, v \in V)(|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\|)$ *(desigualdad de Schwarz).*
3. $(\forall u, v \in V)(\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|)$ *(desigualdad triangular).*

Prueba: Ejercicio.

Definición

Sea V un espacio vectorial, la función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{F}$ que satisface las siguientes propiedades

1. $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$, *y* $\|v\| = 0$ *si, y solo si* $v = \mathbf{0}$.
2. $(\forall v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{F})(\|\lambda v\| \leq |\lambda| \ \|v\|)$.
3. $(\forall u, v \in V)(\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|)$ *(desigualdad triangular).*

es llamada **norma**.

A la función de la proposición anterior es llamada **norma inducida** por el producto interno definido en V.

Definición

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial. Diremos que $u, v \in V$ son **ortogonales** *si, y solo si $\langle u, v \rangle = 0$, y lo denotamos por $u \perp v$*

Nota

Sea $A \subset V$ un conjunto no vacío, el siguiente conjunto

$$A^{\perp} = \{u \in V / \langle u, v \rangle = 0, \ \textit{para todo} \ \ v \in A\}$$

es llamado el **ortogonal** *de A.*

De hecho el $A^{\perp}$ es no vacío, y además es un subespacio de V. (Ejercicio)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial,

Definición

Una base de V es llamada **base ortogonal** *si sus elementos son mutuamente ortogonales.*

Proposición (Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt)

Dada una base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ *de* V*, entonces existe una base ortogonal* $\{u^1, \cdots, u^n\}$ *de* V *tal que* $(j = 1, \cdots, n)(u^j \in \mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^n\})$

Prueba:
La prueba la haremos en forma inductiva:
Sea $u^1 = v^1$.
Definamos $u^2 = v^2 + \lambda u^1$, luego $0 = \langle u^1, u^2 \rangle = \langle u^1, v^2 \rangle + \langle \lambda u^1, u^1 \rangle$ entonces

$$\lambda = -\frac{\langle u^1, v^2 \rangle}{\langle u^1, u^1 \rangle},$$

entonces $u^2 = v^2 - \dfrac{\langle u^1, v^2 \rangle}{\langle u^1, u^1 \rangle} u^1$.

Continuamos con el proceso, y observamos que el $j-$ésimo vector es de la forma

$$u^j = v^j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k u^k,$$

dado que $(\forall k = 1, \cdots, j-1)(\langle u^j, u^k\rangle = 0)$, entonces tenemos para cada $k = 1, \cdots, j-1$

$$\lambda_k = -\frac{\langle u^j, v^k\rangle}{\langle u^k, u^k\rangle},$$

de esta manera hemos construido vectores ortogonales. ■

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ *con el producto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,$$

y sea $\{1, x, x^2 \cdots, x^n, \cdots\}$ *una base de* $\mathbb{R}[x]$.
entonces aplicamos el método de Gram-Schmidt como sigue:
$f_0(x) = 1$, *entonces*

$$f_1(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x;$$

$$f_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = x^2 - \frac{1}{2},$$

etcétera.

Definición

Una base ortogonal $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ *de* V *es llamada* **ortonormal** *si* $($*para cada* $j = 1, 2, \cdots, n)(\langle v^j, v^j \rangle = 1)$.

Es decir, la base es ortonormal si cada de sus elementos tienen norma uno.

Proposición

Sea $S \subset V$ es un subespacio de dimensión finita, entonces

$$V = S \oplus S^{\perp}$$

Prueba:
Consideremos $v^1, \cdots, v^r$ una base ortonormal de S. Luego para cada $v \in V$, definamos el vector

$$w = \sum_{k=1}^{r} \langle v, v^k \rangle v^k,$$

luego $\langle v - w, v^j \rangle = \langle v - \sum_{k=1}^{r} \langle v, v^k \rangle v^k, v^j \rangle = \langle v, v^j \rangle - \langle \langle v, v^j \rangle v^j, v^j \rangle = 0$, entonces $u = v - w \in S^{\perp}$, de donde

$$v = w + u \in S + S^{\perp}.$$

Además, si $v \in S \cap S^{\perp}$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$, luego $v = \mathbf{0}$, es decir, $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, $V = S \oplus S^{\perp}$. ∎

Proposición

Si $B = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ *es un conjunto ortonormal de* V, *entonces*

1. $(\forall v \in V)\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k\rangle|^2 \leq \|v\|^2\right)$. *(Desigualdad de Bessel).*
2. $u = v - \sum_{k=1}^{n}\langle v, v^k\rangle v^k$ *es ortogonal a* B.

Prueba:

1. Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, sea $b_k = \langle v, v^k \rangle$, entonces

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k \right\|^2 = \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k, v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k \right\rangle$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k \langle v, v^k \rangle - \sum_{k=1}^{n} b_k \langle v^k, v \rangle + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_k \overline{b}_j \langle v^k, v^j \rangle$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\overline{b}_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2,$$

   de donde $\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2 \leq \|v\|^2$.

2. Ejercicio.

Proposición

Dado $B = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ *un conjunto ortonormal de* V, *entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. B *es una base de* V.
2. *Si* $(\forall k = 1, 2, \cdots, n)(\langle v, v^k \rangle = 0)$ *entonces* $v = \mathbf{0}$.
3. *Cada* $v \in V$ *es expresado de la forma* $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle v, v^k \rangle v^k$.
4. *Para cada* $v, w \in V$ *se tiene* $\langle v, w \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle v, v^k \rangle \langle v^k, w \rangle$, *(Igualdad de Parseval)*
5. *Para todo* $v \in V$, *se tiene* $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2$

Prueba: Ejercicio.

Antes de definir espacios cocientes en espacio vectorial V, daremos la siguiente

Definición (Relación de Equivalencia)

Dado un conjunto A no vacío, una **relación de equivalencia** *sobre A, denotada por $\simeq_A$,(si no existe confusión usaremos $\simeq$) si*

1. $\simeq$ *es* **reflexiva**, *es decir,* $(\forall x \in A)(x \simeq x)$.
2. $\simeq$ *es* **simétrica**, *es decir, si* $x \simeq y$, *entonces* $y \simeq x$.
3. $\simeq$ *es* **transitiva**, *es decir,* $(\forall x, y, z \in A)(x \simeq y \text{ e } y \simeq z)(x \simeq z)$.

La **clase de equivalencia** *para cada $x \in A$ es definida por*

$$[x] = \{y \in A / y \simeq x\}.$$

Proposición

Los siguientes enunciados son válidos para todas las clases de equivalencia de conjunto A no-vacío:

1. *Si* $y \in [x]$, *entonces* $[y] = [x]$.
2. *si* $[y] \neq [x]$, *entonces* $[y] \cap [x] = \emptyset$.
3. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

Prueba:

1. Si $w \in [y]$, entonces $w \simeq y$, como $y \in [x]$, se tiene $y \simeq x$, entonces $\simeq$ por ser transitiva tenemos $w \simeq x$, luego $w \in [x]$, es decir, $[y] \subset [x]$.
   De manera similar tenemos $[x] \subset [y]$. Por tanto $[x] = [y]$.
2. Apliquemos la propiedad: $p \longrightarrow q$ es equivalente $\sim q \longrightarrow \sim p$, es decir, si $w \in [y] \cap [x] \neq \emptyset$, entonces $[y] = [x] = [w]$ por el item anterior, entonces $[y] = [x]$.
3. Para cada $x \in A$, se tiene $x \in [x] \subset \bigcup_{x \in A} [x]$, entonces $A \subset \bigcup_{x \in A} [x]$, además si $z \in \bigcup_{x \in A} [x]$, el resto queda de ejercicio.

$\blacksquare$

Nota $A = \bigcup_{x \in A} [x]$ ¿será unión disjunta? Justifique su respuesta.

Con la proposión anterior podemos definir el **conjunto cociente** como el conjunto

$$\frac{A}{\simeq} = \{[x](x \in A\},$$

Definición

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un subespacio y $u, v \in V$, diremos que u es **equivalente** *a v* **módulo** *S si $u - v \in S$, lo cual lo denotamos por*

$$u \simeq v \quad \textit{si, y solo si } u - v \in S.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y usando la definición anterior. Se tiene que la relación $\simeq$ es de equivalencia en V

Prueba:

1. (Para cada $v \in V)(v \simeq v)$, esto es debido a que, $v - v = \mathbf{0} \in S$.
2. Si $u \simeq v$, entonces $u - v \in S$,
   luego $v - u = -(u - v) \in S$, entonces $v \simeq u$.
3. Si $u \simeq v$ y $v \simeq w$, entonces $u - v, v - w \in S$, entonces $u - w = (u - v) + (v - w) \in S$, es decir $u \simeq w$.

■

Nota

La clase de equivalencia de $v \in V$ la podemos expresar

$$\begin{aligned}[v] =& \{u \in V / u \simeq v\} = \{u \in V / w = u - v \in S\} \\ =& \{v + w / w \in S\} \\ =& \{v\} + S = v + S.\end{aligned}$$

Entonces, podemos denotar esta clase de equivalencia $\dfrac{V}{\simeq}$ en V como $\dfrac{V}{S}$, es decir,

$$\frac{V}{S} = \{[v] / v \in V\} = \{v + S / v \in V\}$$

Ejemplo

1. *Si* $S = \{\mathbf{0}\}$, *entonces*

$$\frac{V}{\{\mathbf{0}\}} = \{v + \{\mathbf{0}\}/v \in V\} = V$$

2. *Si* $S = V$, *entonces*

$$\frac{V}{V} = \{[v]/v \in V\} = \{\mathbf{0}\}$$

Proposición

El conjunto $\dfrac{V}{S}$ *es un espacio vectorial con las operaciones definidas anteriormente.*

Prueba:Ejericio.

Proposición

Si $S, W \subset V$ *son subespacios, entonces*

$$\frac{W+S}{W\cap S} = \frac{W}{W\cap S} \oplus \frac{S}{W\cap S}$$

Prueba:Ejercicio.

Proposición

Si V es un espacio de dimensión finita y $S \subset V$ un subespacio, entonces

$$dim\left(\frac{V}{S}\right) = dim(V) - dim(S).$$

Prueba:
Consideremos $\{v^1, \cdots, v^r\}$, con $r < n$ una base de S, (dado que S tiene dimensión finita). Entonces por el teorema de completación de bases, existen vectores $u^1, \cdots .u^t \in V$ tales que $\{v^1, \cdots, v^r, u^1, \cdots .u^t\}$ es una base de V. Aplicamos la definición de $\frac{V}{S}$ obtenemos que los vectores $\{w^1, \cdots, w^t\}$ es una base de $\frac{V}{S}$, por tanto $dim\left(\frac{V}{S}\right) = t = (r + t) - r = dim(V) - dim(S)$.