Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

25 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y una aplicación de paso cociente $\pi : V \longrightarrow \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$, entonces existe una transformación lineal $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow W$ definida por

$$\widehat{T}(v + \mathcal{N}(T)) = T(v),$$

tal que

$$T = \widehat{T} \circ \pi$$

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

1. $T = \widehat{T} \circ \pi$.
2. $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow Im(T) + W$ *es biyectiva (es decir, un isomorfismo).*

Prueba:
Veamos que $\widehat{T}$ esté bien definida:
Sean $u, v \in V$ tales que $\{u\} + \mathcal{N}(T) = \{v\} + \mathcal{N}(T)$, entonces $u - v \in \mathcal{N}(T)$, por tanto $T(u - v) = \{\mathbf{0}\}$, de donde $T(u) = T(v)$. Entonces

$$\widehat{T}(\{u\} + \mathcal{N}(T)) = T(u) = T(v) = \widehat{T}(\{v\} + \mathcal{N}(T)).$$

Luego $\widehat{T}$ está bien definida.

1. De la definición de $\widehat{T}$ y π tenemos:

   $$(\text{para cada } v \in V)\left(T(v) = \widehat{T}(v + \mathcal{N}(T) = \widehat{T}(\pi(v)) = \widehat{T}\circ\pi(v)\right)$$

   por tanto $T = \widehat{T}\circ\pi$.
2. Sea $w \in Im(T)$, entonces
   $(\exists v \in V)\left(w = T(v) = \widehat{T}(v + \mathcal{N}(T))\right)$.
   luego $w \in \widehat{T}(\frac{V}{\mathcal{N}(T)}) = Im(\widehat{T})$,
   por tanto $Im(T) \subset Im(\widehat{T})$, entonces $Im(\widehat{T}) = Im(T)$.
   Veamos que $\mathcal{N}(\widehat{T}) = \{\mathbf{0}\}$:
   sea $v \in \mathcal{N}(\widehat{T})$, entonces $\widehat{T}(v) = \mathbf{0}$, pero $T(v) = \widehat{T}(v{+}\mathcal{N}(T)) = \widehat{T}(\mathcal{N}(T)) = \widehat{T}(\mathbf{0} + \mathcal{N}(T)) = \mathbf{0}{=}\mathrm{T}(\mathbf{0})$, Así $\mathcal{N}(\widehat{T}) = \{\mathbf{0}\}$.

Entonces $\widehat{T}$ es un isomorfismo. ■

Ésta proposición es llamada el **teorema de factorización**.

Nota

Sean V y W espacios vectoriales, si existe un isomorfismo entre ellos, entonces lo denotaremos $V \approx W$.

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S, U \subset V$ subespacios. Entonces

$$\frac{U}{U \cap S} \approx \frac{U+S}{S}$$

Prueba:

Definamos la aplicación $T : U \longrightarrow \dfrac{U+S}{S}$ mediante $T(u) = u + S$.

Note que T es lineal. En efecto:

Sean $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v) + S = (u + S) + \lambda(v + S) = T(u) + \lambda T(v)$,

por tanto T es lineal.

Además se tiene que $(\forall v \in S)((u+v)+S = u+S)$.
En efecto:
Sea $w \in (u+v)+S$, entonces
$(\exists s \in S)(w = (u+v)+s = u+(v+s) \in u+S)$, luego $w \in u+S$,
similar se tiene que $(\forall v \in S)(u+S \subset (u+v)+S)$.
Luego

$$T(u) = u+S = (u+v)+S = T(u+v),$$

entonces T es sobreyectiva (es decir, T es un epimorfismo).
Además

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U / u+S = S\} = \{u \in U / u \in S\} = U \cap S$$

En el teorema de factoriazación hacemos $V = U$, $W = \dfrac{U+S}{S}$ y $\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} = \dfrac{U}{U \cap S}$, de dónde se tiene

$$\widehat{T} : \frac{U}{U \cap S} \longrightarrow \frac{U+S}{S}$$

es un isomorfismo. ■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $U, S \subset V$ subespacios tales que $S \subset U$, entonces

$$\frac{V/S}{U/S} \approx \frac{V}{U}$$

Prueba:Ejercicio (Como $S \subset U \subset V$, entonces $U \cap S = S$, basta definir la aplicación $T : \dfrac{V}{S} \longrightarrow \dfrac{V}{U}$ mediante $T(v+S) = v+U$, pruebe que está bien definida y además es un epimorfismo, halle $\mathcal{N}(T)$, por tanto $\widehat{T} : \dfrac{V/S}{U/S} \longrightarrow \dfrac{V}{U}$ es un isomorfismo).

$\blacksquare$

Sean U, V, W espacios vectoriales, consideremos el conjunto

$$\mathscr{L}(V, W) = \{T : V \longrightarrow W / T \text{ es una tranformación lineal}\}$$

con las operaciones
para todo $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V, W)$, y todo $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{rl} (T_1 + T_2)(v) & = T_1(v) + T_2(v) \\ (\lambda T_1)(v) & = \lambda T_1(v) \end{array}\right\} \forall v \in V$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, el cual es llamado **espacio vectorial de transformaciones lineales**.

- Cuando $W{=}\mathbb{K}$, luego $V^*{=}\mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ se llama **espacio dual** de V.
- Si $W = V$, entonces denotamos $\mathscr{L}(V) = \mathscr{L}(V, V)$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{K}, V) \approx V$.

Prueba:

Basta definir la aplicación $\Lambda : \mathscr{L}(\mathbb{K}, V) \longrightarrow V$ mediante $\Lambda(T) = T(1)$, se observa que Λ es lineal.

Ejercicio. que Λ es un isomorfismo. $\blacksquare$

Proposición

Sea V un espacio vectorial con $dim(V) < \infty$, entonces V y V^* son isomorfos.

Prueba:
Como $dim(V) = n < \infty$, entonces sea $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V. Luego definamos las transformaciones $T_j : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$T_j(v^k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

donde $j + 1, 2, \cdots, n$.
Estas transformaciones constituyen una base.

En efecto:

1. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_j = 0,$$
entonces $\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_j(v^k) = 0$ para cada $k = 1, \cdots, n$.
Entonces $\{T_1, \cdots, T_n\}$ son linealmente independientes.
2. Si $T \in V^*$, entonces existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tales que
$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j,$$
notar que $\alpha_k = T(v^k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j(v^k)$.
Verifique que $T_1, \cdots, T_n$ es una base de V^*.

Además verifique que la transformación lineal $\Phi : V \longrightarrow V^*$ definida por

$$\Phi(v^k) = T_k, \quad \text{para} \quad k = 1, \cdots, n$$

es un isomorfismo. ■

Note que $dim(V^*) = dim(V)$

Proposición

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$dim(\mathscr{L}(V, W)) = dim(V)dim(W)$$

Prueba:
Sean $\{v^1, \cdots, v^n\}$, $\{w^1, \cdots, w^m\}$ bases de V y W respectivamente. Para cada (i, j), $i=1, \cdots, n$, $j=1, \cdots, m$ definamos la trasformación $T_{ij} : V \longrightarrow W$ mediante

$$T_{ij}(v^k) = \begin{cases} w^j & i = k \\ \mathbf{0} & i \neq k \end{cases}$$

Pruebe que los T_{ij} son lineales y $\{T_{ij}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ es una base de $\mathscr{L}(V, W)$. ■

Definición

Sean U, V espacios vectoriales, $V \xrightarrow{L} U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{L} U$ son transformaciones lineales, entonces tenemos

- *Si $L \circ T = \mathrm{I}$ (identidad en U), L es una inversa a la izquierda de T*
- *Si $T \circ L = \mathrm{I}$ (identidad en V), L es una inversa a la derecha de T.*
- *Si $T \circ L = \mathrm{I}$ y $L \circ T = \mathrm{I}$, L es la inversa de T y la denotamos por $L = T^{-1}$. En este caso, decimos que T es inversible.*

Ejemplo

Consideremos las transformaciones $\mathbb{K}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{K}^2$ definidas por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2), \quad L(y_1, y_2, y_3) = (y_2 - y_3, y_3).$$

Encuentre las inversas correspondientes, sí existen.

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces

1. *Si T posee inversa, entonces ésta es única.*
2. *T es inyectiva si, y solo si T posee inversa a la izquierda.*
3. *T es sobreyectiva si, y solo si T posee inversas por la derecha.*
4. *T es isomorfo si, y solo si T es inversible.*

Prueba:

1. Supongamos que T posee dos inversas L_1 y L_2, entonces

$$L_1 = L_1 \circ \mathrm{I} = L_1 \circ (T \circ L_2) = (L_1 \circ T) \circ L_2 = \mathrm{I} \circ L_2 = L_2,$$

entonces $L_1 = L_2$, por tanto si T posee inversa, ésta es única.

2. $\Longrightarrow$) Supongamos que T posee inversa, y como $T(V) \subset W$ es un subespacio, entonces existe un subespacio $S \subset W$ tal que $W = T(V) \oplus S$.

Ahora, definamos la transformación $L : W \longrightarrow V$ mediante $L(T(v) + w) = v$.

Notamos que L es lineal (ejercicio).

Además, $L \circ T(u) = L(T(u)) = L(T(u) + \mathbf{0}) = u$, $\forall u \in V$, es decir, L es la inversa a la izquierda de T.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $L : W \longrightarrow V$ es la inversa a la izquierda de T, es decir, $L \circ T = \mathrm{I}$.

Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0}$,

luego $v = (L \circ T)(v) = L(T(v)) = L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

entonces $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, es decir, T es inyectiva.

3. Ejercicio.
4. Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \longrightarrow V$ una transformaxión lineal.Si $T \circ L = L \circ T$ para toda transformación lineal $L : V \longrightarrow V$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T = \lambda \mathrm{I}$.

Prueba:

Como V es dimensión finita, entonces sea $\{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de V, entonces cada $T(v^j) \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base, es decir, existen escalares $\alpha_{1j}.\alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{nj}$ tales que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$ definamos la transformación lineal $L_k : V \longrightarrow V$ mediante

$$L_k(v^i) = \begin{cases} v^{k+1}, & i = k, k < n \\ \mathbf{0}, & i \neq k, k < n \\ \mathbf{0}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \ k = n \\ v^1, & i = n, k = n \end{cases}$$

Luego

$$L_k \circ T(v^j) = L_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} L_k(v^i) = \alpha_{kj} v^{k+1}$$

También

$$T \circ L_k(v^j) = \begin{cases} \mathbf{0}, & j \neq k, \\ T(v^{k+1}), & j = k, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0}, & j \neq k, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,k+1} v^i, & j = k, \end{cases}$$

Por hipótesis se tiene que $L_k \circ T = T \circ L_k$, entonces

$$\alpha_{kj} = 0, \text{ si } j \neq k$$

$$\alpha_{kk} v^{k'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} v^i, \quad k' = k+1$$

de dónde

$$\alpha_{kk} = \alpha_{k'k'}, \qquad \alpha_{ik'} = 0 \text{ para } i \neq k$$

por tanto $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{nn} = \lambda, \quad \alpha_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
Luego, T tiene la propiedad

$$T(v^j) = \lambda v^j, \text{ para cada } j = 1, 2, \cdots, n.$$

Si $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v^j$, entonces

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v^j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda v^j = \lambda v.$$

Por tanto $T = \lambda \mathrm{I}$. ■

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una trnadformación lineal tal que $T(v^j) = \alpha_j v^j$, $j = 1, \cdots, n$ en cierta base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de base V, donde $\alpha_j \neq \alpha_i$ para $j \neq i$. Supongamos, además, que existe una transformación lineal $L : V \longrightarrow V$ que conmuta con T, es decir, $T \circ L = L \circ T$.
Entonces, L es de la forma

$$L(v^j) = \beta_j v^j, \quad para\ j = 1, \cdots, n$$