Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

18 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de $A \in \mathbb{K}(n, n)$

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$ vectores no nulos. Recordar que la colección de vectores

$$\begin{array}{ccc} T^{q_1-1}(v^1), & \cdots, & T(v^1), v^1 \\ \ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ T^{q_r-1}(v^r), & \cdots, & T(v^r), v^r \end{array} \tag{1}$$

constituyen una base de V, y $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r > 0$, $T^{q_j}(v^j) = \mathbf{0}$, $j = 1, 2, \cdots, r$.

Así, en el subespacio invariante $\mathscr{L}(\{T^{q_i-1}(v^i),\cdots,T(v^i),v^i\})$ *la matriz asociada es*

$$J_i(T)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & & & & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de orden $q_i \times q_i$. *Luego la matriz asociada a* T *en la base dada por (1)*

$$J(T) = \begin{bmatrix} J_1(T) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(T) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada la **forma canónica de Jordan** *de la transformación lineal nilpotente T.*

Ejemplo

consideremos la matriz

$$N = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Notar que

$$N^2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces el índice de nilpotencia es $q = 2$, *sea el vector* $v^1 = (1;1)^t$, *luego* $Nv^1 = (-2,-3)^t$, *entonces estos vectores son l.i.*

Ahora formemos la matriz

$$P = [Nv^1 \; v^1] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde la matriz de cambio de base es P.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) < \infty$, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces existen subespacios invariantes U, W bajo T tales que

1. $V = U \oplus W$.
2. *T restringido a U es nilpotente y restringido a W es inversible.*

Prueba:

1. Si T es invertible o nilpotente, entonces la proposición es vĺida.
2. Si T no es invertible, entonces

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Además, notamos que

$$\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2) \subset \cdots$$

tal sucesión no puede ser infinita, esto es debido a que $dim(V) < \infty$

Consideremos

$$q = \min_{\substack{\mathcal{N}(T^r)=\mathcal{N}(T^{r+1}) \\ r\in\mathbb{N}}} (\{r\}).$$

Entonces

$$\mathcal{N}(T^q) = \mathcal{N}(T^{q+j}), \quad j = 1, 2, \cdots .$$

En efecto, sea $w \in \mathcal{N}(T^{q+1})$, entonces

$$T^{q+1}\Big(T^{j-1}(w)\Big) = \mathbf{0} \quad j = 2, 3, \cdots .$$

Luego por definición de q

$$T^q\Big(T^{j-1}(w)\Big) = \mathbf{0}.$$

Continuamos con este proceso $j-1$, tenemos

$$T^q(w) = \mathbf{0},$$

entonces $w \in \mathcal{N}(T^q)$ y por tanto

$$\mathcal{N}(T^{q+j}) \subset \mathcal{N}(T^q).$$

Por tanto

$$\mathcal{N}(T^q) = \mathcal{N}(T^{q+j}), \quad j = 1, 2, \cdots .$$

Definamos los subespacios

$$U = \mathcal{N}(T^q) \ \text{ y } \ W = Im(T^q)$$

estos subespacios son invariantes bajo T.
Veamos que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$:
En efecto: Supongamos que $w \in U \cap W$, entonces existe $v \in V$ tal que $T^q(v) = w$, $(w \in W)$, además $T^q(w) = \mathbf{0}$, $(w \in U)$, entonces

$$\mathbf{0} = T^q(w) = T^q(T^q(v)) = T^{q+q}(v) = T^q(v) = w.$$

Por tanto $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Aplicando a la transformación lineal $T^q : V \longrightarrow V$ lo siguiente

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{N}(T^q)) + dim(Im(T^q)) &= dim(V) \\ dim(U) + dim(W) &= dim(V), \end{aligned}$$

y dado que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$dim(U + W) = dim(V),$$

y por tanto $V = U \oplus W$.
Queda como ejercicio verificar que $T : U \longrightarrow U$ es nilpotente y $T : W \longrightarrow W$ es inversible.

$\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces la descomposición de T en sus partes nilpotente e inversible, establecida en la proposición anterior, es única.

Prueba Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición (Forma Canónica de Jordan)

Sean V *un* $\mathbb{C}-$*espacio vectorial, con* $dim(V) < \infty$, $T : V \longrightarrow V$ *una transformación lineal,* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ *valores propios distintos de* T, *y* $m_1, m_2, \cdots, m_r$ *sus correspondientes multiplicidades algebraicas, ordenados de la forma*

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 1.$$

Entonces existen subespacios V_j, $j = 1, 2, \cdots, r$ *invariantes bajo* T *tales que*

1. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$,
2. $dim(V_j) = m_j$, $j = 1, 2, \cdots, r$,
3. $T - \lambda_j \mathrm{I}$ *es nilpotente sobre* V_j, $j = 1, 2, \cdots, r$.

Prueba Ejercicio. ■

Ejemplo

Halle la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico asociado de A es

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

de donde los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ de multiplicidad dos y $\lambda_2 = 2$, observe que $(A + \mathrm{I})(A - 2\mathrm{I}) \neq 0$, por tanto A no es diagonalizable, entonces la forma canónica de Jordan de A está dada por

$$J(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular la matriz P de cambio de base, procedemos como sigue: de la ecuación

$$Av^1 = (-1)v^1,$$

donde $v^1 = (v_1, v_2, v_3)^t$ es un vector propio no nulo, el cual es equivalente al sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7v_1 & + & v_2 & - & 9v_3 & = & -v_1 \\ -v_1 & & & & & = & -v_2 \\ 5v_1 & + & v_2 & - & 7v_3 & = & -v_3 \end{array}$$

de donde $v_1 = v_2 = v_3$.

Entonces una de las soluciones es $v^1 = (1, 1, 1)^t$.
Para calcular el segundo vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = -1$, lo hacemos de la siguiente forma

$$(A - (-1)\mathrm{I})w^1 = v^1,$$

de donde obtenemos que $w^1 = (0, 1, 0)^t$.
Finalmente de la ecuación

$$Av^3 = 2v^3$$

nos proporciona el tercer vector $v^3 = (2, -1, 1)^t$, y de esta manera tenemos una base $\{v^1, w^1, v^3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

De esta manera obtenemos la matriz P de cambio de base

$$P = [v^1 \ w^1 \ v^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{de donde} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = J(A) \end{aligned}$$