Summa	Lokað snið
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{n} x^k, \|x\| < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}, \|x\| < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

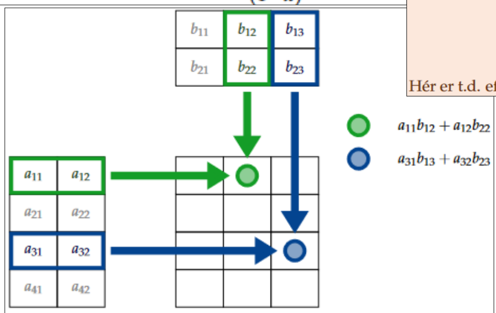
$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Hér er t.d. efsta stakið til vinstri $1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hér er t.d. efsta stakið til hægri $(1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 1$.



Jafngildisregla
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Jafngildisregla	Nafn reglu
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	**Samsemdarreglur** (e. Identity laws)
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	**Yfirgnæfðarreglur** (e. domination laws)
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	**Sjálfvalsreglur** (e. idempotent laws)
$\neg(\neg p) \equiv p$	**Regla um tvöfalda neitun** (e. double negation law)
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	**Víxlregla** (e. commutative laws)
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	**Tengireglur** (e. associative laws)
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	**Dreifireglur** (e. distributive laws)
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	**Reglur De Morgan**
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	**Gleypireglur** (e. absorption laws)
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	**Neitunarreglur** (e. negation laws)

Ályktunarregla	Nafn reglu
$\forall x, P(x)$ $\therefore P(c)$	Almagnaraeyðing (e. **Universal instantiation**)
$P(c)$ fyrir hvaða c sem er $\therefore \forall x, P(x)$	Almagnarainnleiðing (e. **Universal generalization**)
$\exists x, P(x)$ $\therefore P(c)$ fyrir eitthvað stak c	Tilvistarmagnaraeyðing (e. **Existential instantiation**)
$P(c)$ fyrir eitthvað c $\therefore \exists x, P(x)$	Tilvistarmagnarainnleiðing (e. **Existential generalization**)
$\forall x, P(x) \to Q(x)$ $P(a)$ fyrir eitthvað stak a í óðalinu. $\therefore Q(a)$	UMP regla (e. **Universal modus ponens**)
$\forall x, P(x) \to Q(x)$ $\neg Q(a)$ fyrir eitthvað a í óðalinu $\therefore \neg P(a)$	UMT regla (e. **Universal Modus tollens**)

Ályktunarregla	Sísanna	Nafn reglu
p $p \to q$ $\therefore q$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Skilyrðiseyðing (e. **Modus ponens**)
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	**Modus tollens**
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Skilyrðissamsetning (e. **Hypothetical syllogism**)
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$	Eða-samleiðuregla (e. **Disjunctive syllogism**)
p $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Eða-innleiðing (e. **Addition**)
$p \wedge q$ $\therefore p$	$p \wedge q \to p$	Og-eyðing (e. **Simplification**)
p q $\therefore p \wedge q$	$(p \wedge q) \to (p \wedge q)$	Og-innleiðing (e. **Conjunction**)
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$	Úrlausnarregla (e. **Resolution**)

Jafngildisregla	Nafn reglu
$A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$	**Samsemdarreglur** (e. Identity laws)
$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	**Yfirgnæfðarreglur** (e. domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	**Sjálfvalsreglur** (e. idempotent laws)
$\overline{(\overline{A})} = A$	**Regla um tvítekna fyllimengisaðgerð** (e. complementation law)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	**Víxlregla** (e. commutative laws)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**Tengireglur** (e. associative laws)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**Dreifireglur** (e. distributive laws)
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	**Reglur De Morgan**
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	**Gleypireglur** (e. absorption laws)
$A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$	**Fyllimengisreglur** (e. complement laws)

Formúla	Fyrstu liðirnir
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, \ldots$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, \ldots$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, \ldots$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots$

Tímaflækja fylkjamargföldunar A:3x9 B:9x4 C:4x2

Lausn: Við notum dæmi 9 bls. 236 í bókinni. Skoðum tvö tilfelli

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}$: Fyrir margföldun **A** og **B** þarf $3 \cdot 9 \cdot 4 = 108$ margfaldanir og $3 \cdot (9-1) \cdot 4 = 96$ samlagningar. Til að margfalda saman **AB** og **C** þarf $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ margfaldanir og $3 \cdot (4-1) \cdot 2 = 18$. Í heildina þarf því $108 + 24 = 132$ margfaldanir og $96 + 18 = 114$ samlagningar. Samtals eru það $132 + 114 = 246$ aðgerðir.

$\mathbf{A}(\mathbf{BC})$: Fyrir margföldun **B** og **C** þarf $9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$ margfaldanir og $9 \cdot (4-1) \cdot 2 = 54$ samlagningar. Til að margfalda saman **A** og **BC** þarf $3 \cdot 9 \cdot 2 = 54$ margfaldanir og $3 \cdot (9-1) \cdot 2 = 48$ samlagningar. Í heildina þarf því $72 + 54 = 126$ margfaldanir og $54 + 48 = 102$ samlagningar. Samtals eru það $126 + 102 = 228$ aðgerðir.

Við ályktum að seinni kosturinn er betri.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er mengi **náttúrlegra talna**[a].
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ er mengi **heiltalna**.
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ er mengi **jákvæðra heiltalna**.
$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z},$ og $q \neq 0\}$ er mengi **ræðra talna**.
$\mathbb{R}$ er mengi **rauntalna**.

Virki	Forgangur
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\to$	4
$\leftrightarrow$	5

Fall f er **átækt** (e. *surjective* eða *onto*) ef það „þekur" bakmengi sitt,
Fall sem er bæði eintækt og átækt er kallað **gagntækt** (e. *bijective*).

Látum m vera jákvæða heiltölu. Heiltölurnar a og b eru samleifa mátað við m ef og aðeins ef til er heiltala k þannig að $a = b + km$.

Ef A og B eru teljanleg mengi þá er $A \cup B$ einnig teljanlegt.

Látum m vera jákvæða heiltölu. Ef $a \equiv b \pmod m$ og $c \equiv d \pmod m$ gildir að

1. $a + c \equiv b + d \pmod m$, *og*
2. $ac \equiv bd \pmod m$.

Látum m vera jákvæða heiltölu og látum a og b vera heiltölur. Þá gildir að

$$(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m, \text{ og}$$
$$ab \bmod m = ((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m.$$

Hver er margföldunarandhverfa 101 m.t.t. mátunar við 4620? Notum reiknirit Evklíðs og fáum að

$$4620 = 45 \cdot 101 + 75 \qquad 75 = 2 \cdot 26 + 23 \qquad 23 = 7 \cdot 3 + 2$$
$$101 = 1 \cdot 75 + 26 \qquad 26 = 1 \cdot 23 + 3 \qquad 3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1.$$

Þ.e. stærsti samdeilir 101 og 4620 er 1 og því er margföldunarandhverfa til. Ef við rekjum okkur til baka (eins og áður) til að finna Bézout stuðlana þá fáum við að

$$-35 \cdot 4620 + 1601 \cdot 101 = 1.$$

Við vitum að seinni liðurinn er 0 ($-35 \cdot 4620 \equiv 0 \pmod{4620}$) og því gildir að

$$1601 \cdot 101 \equiv 1 \pmod{4620}.$$

Þ.e.a.s. 1601 er margföldunarandhverfa tölunnar 101 þegar mátað er við 4620.

Vensl eru sjálfhverf þá og því aðeins að netaframsetning þeirra hafi lykkju á hverjum hnút.

Vensl eru samhverf þá og því aðeins að fyrir hvern stefndan legg (a, b) sé líka til leggur (b, a).

- Milli sömu hnúta, en í gagnstæðar áttir.

Vensl eru andsamhverf þá og því aðeins að á milli hverra tveggja hnúta sé aldrei leggur í báðar áttir.

Vensl eru gegnvirk þá og því aðeins að hvenær sem stefndir leggir (a, b) og (b, c) séu til sé líka til stefndur leggur (a, c).

- Leggirnir mynda þá „þríhyrning“.

Hversu mörg vensl eru til á mengi A með n stökum?

- $A \times A$ hefur þá n^2 stök (margfeldisregla).
- Mengi með m stökum hefur 2^m hlutmengi.
- Til eru 2^{n^2} vensl á n staka mengi.

Samanhangandi óstefnt net með a.m.k. tveimur hnútum hefur Euler-rás ef og aðeins ef stig allra hnúta í netinu er slétt tala.

Samanhangandi óstefnt net hefur Euler-veg og ekki Euler-rás ef og aðeins ef stig nákvæmlega tveggja hnúta í netinu er oddatala.

Hver er lausnin á $101x \equiv 302 \pmod{4620}$? Við vitum að margföldunarandhverfa tölunnar 101 er 1601. Ef við margföldum báðar hliðar frá vinstri fæst því að

$$x \equiv \overbrace{1601 \cdot 101}^{\equiv 1 \pmod{4620}} \cdot x \equiv 1601 \cdot 302 \equiv 483.502 \equiv 3022 \pmod{4620}.$$

Leysið eftirfarandi leifajöfnuhneppi

$$x \equiv 2 \pmod 3, \qquad x \equiv 3 \pmod 5, \qquad x \equiv 2 \pmod 7.$$

Við notum kínversku leifasetninguna, setjum $m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ og $M_1 = m/3 = 35$, $M_2 = m/5 = 21$ og $M_3 = m/7 = 15$. Með því að prófa nokkra möguleika (í stað þess að nota Evklíð) finnum við að $y_1 = 2$ er margföldunarandhverfa M_1 mátað við 3, $y_2 = 1$ er margföldunarandhverfa M_2 mátað við 5 og $y_3 = 1$ er einnig margföldunarandhverfa M_3 mátað við 7.

Skv. kínversku leifasetningunni er lausnin því

$$\begin{aligned} x &= a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 \\ &= 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 \\ &= 233 \qquad 233 \bmod 105 = 23 \\ &\equiv 23 \pmod{105}. \end{aligned}$$

Við getum því ályktað að 23 er minnsta jákvæða heiltalan sem er lausn á leifajöfnuhneppinu.

Búið til fimm gervislembitölur með hinni línulegu leifaaðferð þar sem $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$ og $x_0 = 3$. Við höfum að

$$\begin{aligned} x_1 &= 7x_0 + 4 \bmod 9 = 25 \bmod 9 = 7, \\ x_2 &= 7x_1 + 4 \bmod 9 = 53 \bmod 9 = 8, \\ x_3 &= 7x_2 + 4 \bmod 9 = 60 \bmod 9 = 6, \\ x_4 &= 7x_3 + 4 \bmod 9 = 46 \bmod 9 = 1, \\ x_5 &= 7x_4 + 4 \bmod 9 = 11 \bmod 9 = 2. \end{aligned}$$

Látum $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{1, 2\}$ og R vera vensl frá A til B þar sem $a > b, a \in A$ og $b \in B$. Hvert er tvíundarfylkið fyrir R? Fáum að $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$. Setjum 1-bita á viðeigandi staði í M, fáum

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Látum $P(n)$ vera yrðinguna $3 \mid (n^3 - n)$. Sönnum að $P(n)$ sé sönn fyrir allar jákvæðar heiltölur með þrepun.

Grunnskref: Vitum að $P(1)$ er sönn því $1^3 - 1 = 0$ er deilanleg með 3.

Þrepunarskref: Gerum ráð fyrir þrepunarforsendunni, þ.e. að $P(k)$ sé sönn fyrir einhverja heiltölu $k \geq 1$. Sýnum að þá sé $P(k+1)$ líka sönn. Höfum að

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k). \end{aligned}$$

Við vitum út frá þrepunarforsendunni að liðurinn $(k^3 - k)$ er deilanlegur með þremur. Liðurinn $3(k^2 + k)$ er það líka. Við höfum því sýnt að ef $P(k)$ er sönn þá er $P(k+1)$ það líka.

Af grunnskrefinu og þrepunarskrefinu getum við nú ályktað út frá lögmálinu um þrepun að $P(n)$ er sönn fyrir allar jákvæðar heiltölur.

Hver eru samsettu venslin $S \circ R$ þegar R er frá $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$ með

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

og S er frá $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{0, 1, 2\}$ með

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}?$$

Finnum öll röðuð pör þar sem seinna stakið í pari úr R passar við fyrra stakið úr S. Fáum:

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Hversu margar mismunandi 5 spila hendur er hægt að mynda úr 52 spila spilastokk?

Röð spilanna í hverri hönd skiptir ekki máli, svo fjöldinn er

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2.598.960.$$

Hver er stuðullinn við $x^{12}y^{13}$ í margliðunni $(2x - 3y)^{25}$? Tvíliðusetningin gefur

$$\binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = 2^{12}(-3)^{13} \frac{25!}{12!13!}.$$

Notum þrepun til að sýna að sé n jákvæð heiltala, þá sé

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Grunnskref: Sjáum fyrst að fyrir $n = 1$ gildir að $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ þ.a. formúlan er sönn fyrir $n = 1$.

Þrepunarskref: Gefum okkur nú þrepunarforsenduna, þ.e. að formúlan sé sönn fyrir $n = k$ þar sem k er einhver heiltala. Við höfum þá að

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &\overset{\text{Þ.F.}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= (k+1) \cdot \frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Við höfum sýnt að ef formúlan gildir fyrir $n = k$ þá gildir hún einnig fyrir $n = k + 1$. Við höfum því sannað þrepunarskrefið og getum ályktað að formúlan er sönn fyrir öll n sem eru jákvæðar heiltölur.

Á hversu marga vegu getum við valið vinningshafa sem fá gull, silfur og brons í 100 einstaklinga keppni?

Erum að velja þrjá einstaklinga úr 100 staka mengi. Röð einstaklinga skiptir máli. Fáum með formúlunni:

$$P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970.200.$$