TÖL403G GREINING REIKNIRITA

24. Netflæði

Hjálmtýr Hafsteinsson

Vor 2022

Í þessum fyrirlestri

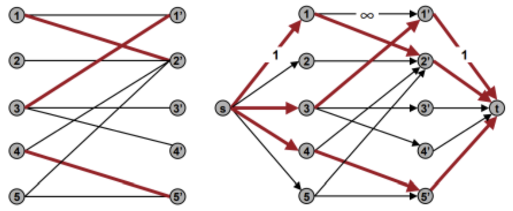
- Flæði í netum (*network flow*)
  - Saga og skilgreiningar
  - Skurðir (*cuts*)
  - Hámarksflæði - lágmarksskurður (*Maxflow - Mincut*)
  - Reiknirit Ford-Fulkerson

10.1 − 10.4

Netflæði (*network flow*)

- Aðferðir til að vinna með flæði (streymi?) í flutningskerfum (*transportation networks*)
- Kemur í ljós að það er líka hægt að nota aðferðirnar til að leysa önnur mjög fjölbreytt verkefni
  - Tvíflokka pörun (*bipartite matching*)
  - Finna aðskilda (*disjoint*) vegi í netum
  - Skipulag samskiptaneta (*communication networks*)
  - Áætlanagerð (*scheduling*)
  - Myndgreining (*image processing*)
  - Útilokun liða (*team elimination*)
  - ...

Gefið tvíflokka net, finna mesta fjölda parana á milli hnúta í flokkunum tveimur, t.d. nemendur og sumarstörf



Myndbútun (*image segmentation*): skipta stafrænni mynd upp í svæði, t.d. aðgreina fólk frá bakgrunni

Í *n*-liða deild spila öll liðin hvert við annað. Á lið *X* möguleika á að verða efst í deildinni þegar *k* umferðir eru eftir? (þarf að taka tillits til þess að hin liðin eiga eftir að spila innbyrðis og að þau geta ekki öll tapað!)

Saga verkefnisins

- Fyrst skoðað 1954 í tengslum við járnbrautarnet í Sovétríkjunum og Austur-Evrópu
  - Skrifuð skýrsla (stimpluð leyndarmál þar til 1999) til að meta afkastagetu flutningsnetsins til að flytja vörur frá Sovétríkjunum til Austantjaldslandanna

Net með 44 hnútum (borgum) og 105 örvum

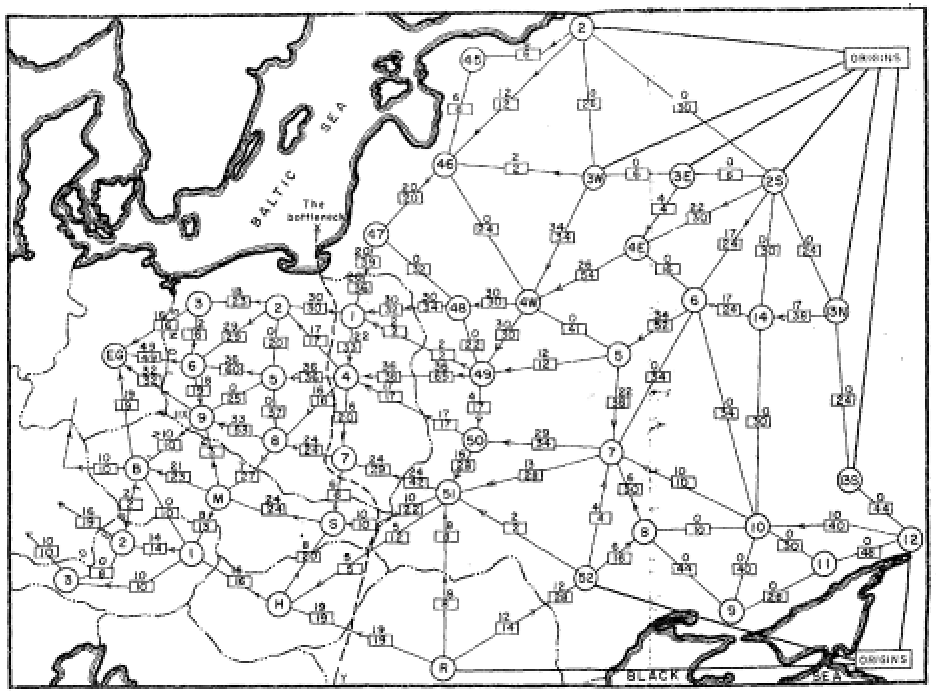
Útkoman var flutningsgeta upp á 163.000 tonn

Reynt var að finna flöskuhálsa í netinu

Til að finna ódýrustu leiðina til að trufla flæðið

Ford og Fulkerson settu fram almenna aðferð árið 1956 til að finna hámarksflæði

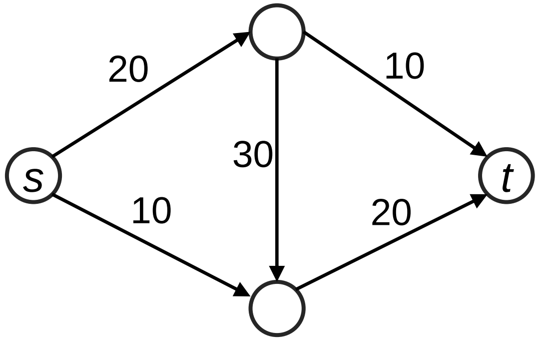
Byggð á leyniskýrslunni, en þeir fengu að birta grein um aðferðina



Skilgreiningar

- Skilgreinum flæðisnet (*flow network*) sem stefnunet $G = (V, E)$ með:
  - Fallinu $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sem skilgreinir afköst (*capacity*) $c(e)$ fyrir hverja ör e
  - Hnútinum s í V sem er uppspretta (lind, *source*)
  - Hnútinum t í V sem er svelgur (*sink*)

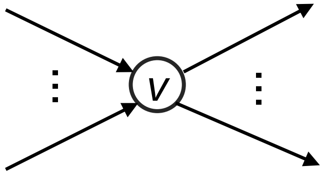
Dæmi:



- Skilgreining á *flæði* (*flow*)
  - (s, t)-flæði ((s, t)-*flow*) er fall $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
  - Um hvern hnút v gildir: $\sum_u f(u \to v) = \sum_w f(v \to w)$
  - Fyrir allar örvar e í E gildir að $0 \leq f(e) \leq c(e)$

Flæðið inn í hvern hnút er það sama og flæðið út

Flæðið í hverri ör má ekki vera meira en afköst stikunnar

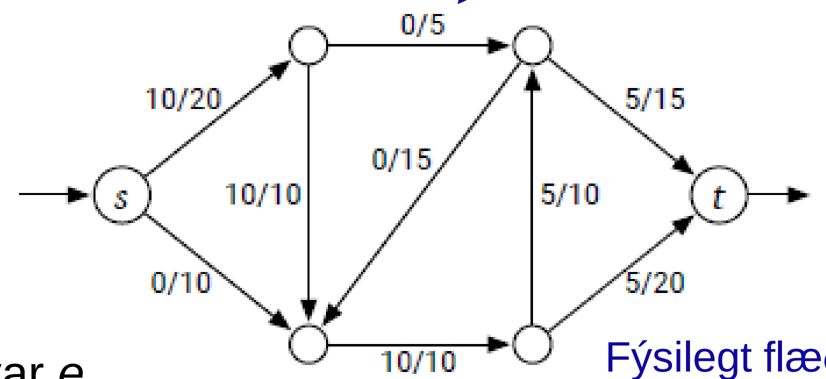


Gildi flæðis

- Gildi flæðis *f*, táknað | *f* |, er heildarflæðið út úr lindarhnútinum *s*
    - $| f | := \sum_w f(s \to w)$

Þetta er það sama og heildar-flæðið inn í svelg-hnútinn *t*

Ónotuð ör



Fýsilegt flæði með gildi 10

Mettuð ör

Skilgreinum:

Flæði *f* er sagt vera fýsilegt (*feasible*) ef 0 ≤ *f*(*e*) ≤ *c*(*e*) fyrir allar örvar *e*

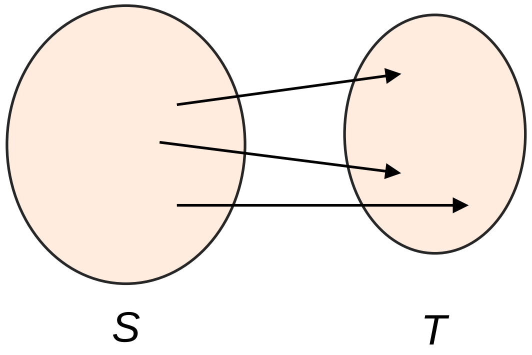
Flæði *f* er sagt vera mettað (*saturated*) á ör *e* ef *f*(*e*) = *c*(*e*)

Flæði *f* er sagt forðast (*avoids*) ör *e* ef *f*(*e*) = *0*

Maxflow verkefnið er að finna fýsilegt (*s*, *t*)-flæði *f*, sem hámarkar | *f* |

Skurður (*cut*)

- Skurður (*cut*) er skipting á hnútunum upp í aðskildu hlutmengin *S* og *T* með $s \in S$ og $t \in T$, þ.a.
  - $S \cup T = V$
  - $S \cap T = \emptyset$

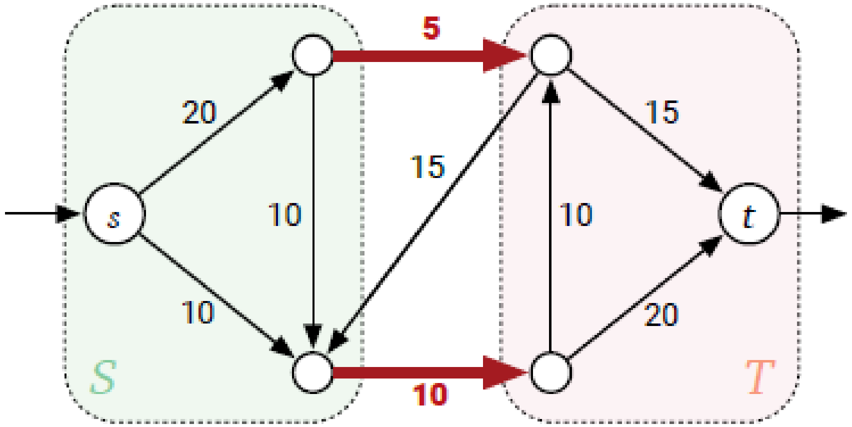


Afköst skurðarins er summa örvanna sem liggja frá *S* til *T*

$$\|S,T\| := \sum_{v \in S} \sum_{w \in T} c(v \to w)$$

Mincut verkefnið er að finna (*s*, *t*)-skurð með sem minnstum afköst

Sýnidæmi



Þetta er bara einn tiltekinn skurður

Það eru til margir aðrir:

- bara *s* í *S*, allir hinir í *T*
- *s* ásamt einum öðrum í *S*, allir hinir í *T*

⋮

Athugið að við höfum aðeins áhuga á örvum frá *S* til *T*, örvar í hina áttina skipta ekki máli

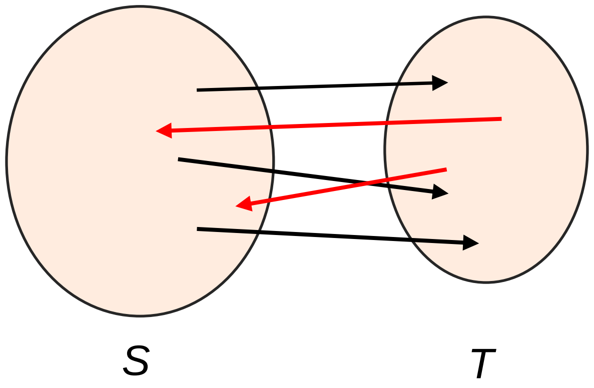
Þær dragast ekki frá!

Lágmarksskurður gefur okkur ódýrustu leiðina til að loka á allt flæði frá *s* til *t*

Hjálparsetning

- Lát f vera eitthvert fýsilegt (*s*, *t*)-flæði og lát (*S*, *T*) vera einhvern (*s*, *t*)-skurð. Gildi *f* er í mesta lagi afköst (*S*, *T*). Við höfum að | *f* | = $\|S, T\|$ þþaa *f* mettar allar örvarnar frá *S* til *T* og forðast allar örvar frá *T* til *S*

Sönnun í kennslubók



Þessi setning þýðir að ef | *f* | = $\|S, T\|$ þá hlýtur *f* að vera hámarksflæði og (*S*, *T*) að vera lágmarksskurður

Því ekkert annað flæði getur komið meiru frá *s* til *t*

Athugið að setningin segir ekkert um tilvist hámarksflæðis eða lámarksskurðar heldur bara að ef þau eru til, þá hafa þau þessa eiginleika!

Maxflow−Mincut setningin

- Í sérhverju flæðisneti með uppsprettu *s* og svelg *t*, þá er gildið á hámarks (*s*, *t*)-flæðinu það sama og afköst lámarks (*s*, *t*)-skurðar

Þessi setning segir okkur að þetta jafngildi hámarksflæðis og lágmarksskurður sé til í öllum flæðisnetum

Setningin var fyrst sönnuð af Lester Ford og Delbert Fulkerson árið 1954

Þeir voru að vinna hjá RAND fyrirtækinu

RAND (Research ANd Development) var stofnað fljótlega eftir seinni heimstyrjöldina til að vinna að ýmsum rannsóknum fyrir Bandaríkjaher

Gríðarlegur fjöldi frægra vísindamanna hefur unnið fyrir fyrirtækið. Meðal annars um 32 Nóbelsverlaunahafar

Skoðum næst aðferðafræðina bakvið reiknirit Ford-Fulkerson

Leifarafköst (*residual capacity*)

Lát f vera eitthvert (s, t)-flæði í flæðisneti G

Við skilgreinum nýtt afkastafall, $c_f : V \times V \to \mathbb{R}$, sem kallast <u>leifarafköst</u> (*residual capacity*):

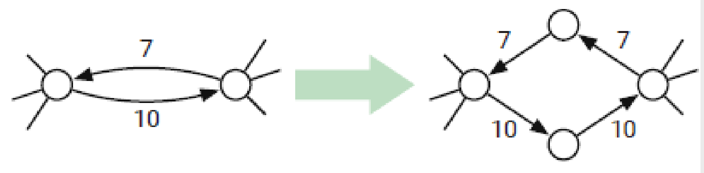
$$c_f(u \to v) = \begin{cases} c(u \to v) - f(u \to v) & \text{ef } u \to v \in E \\ f(v \to u) & \text{ef } v \to u \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Leifarafköst örvar gefa til kynna hversu miklu viðbótarflæði væri hægt að koma í gegnum örina

Við höfum að $f \geq 0$ og $f \leq c$, svo leifarafköst eru alltaf ≥ 0

Gerum ráð fyrir að það sé bara ein ör á milli hverra tveggja hnúta, þ.e. ekki ör í báðar áttir

Getum alltaf breytt G þannig að þetta gildi:



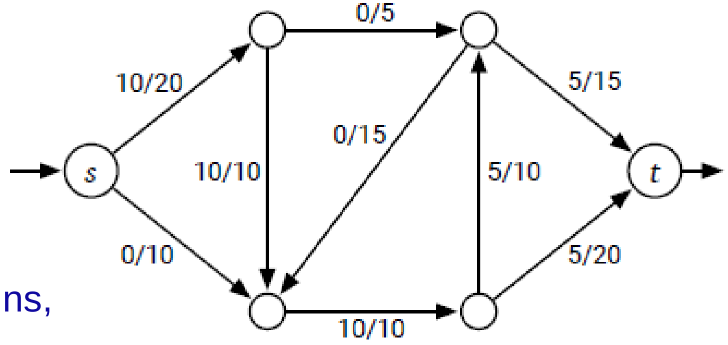
Leifarnet (*residual graph*)

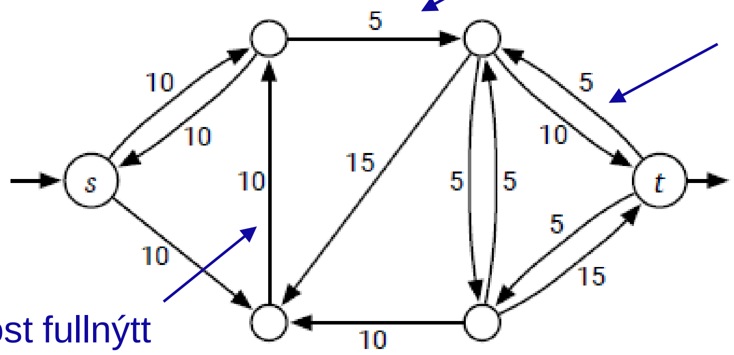
- Skilgreinum nú net fyrir leifarafköst: $G_f = (V, Ef)$
  - þar sem E_f er mengi örva með leifarafköst > 0

Ekkert flæði í *f*

<u>Dæmi</u>:

Flæði 5, ónýtt afköst 15





Gildi flæðisins,
| *f* | er 10

Afköst fullnýtt

Flæðisnet *G* og flæði *f*

Leifarnet G_f

Fáum ör til baka í G_f með þeim hluta afkastanna sem er nýttur í flæðinu *f*

Athugið að það geta verið örvar í G_f sem eru ekki í *G*

Við getum líka haft örvar í báðar áttir í G_f, þó *G* hafi það ekki

Þetta gerist þegar ör í *G* er ekki mettuð, þ.e. $0 < f(u \to v) < c(u \to v)$

Sýnum ekki örvar ef leifin er 0:
- öll afköstin fullnýtt
- ekkert flæði um örina í *G*

Aukningarvegur (*augmenting path*)

- Vegur frá lindinni *s* til svelgsins *t* í leifarnetinu G_f kallast <u>aukingarvegur</u>

  Þýðir að afköstin eru ekki fullnýtt og við getum aukið flæðið!

  Lát *P* vera veg í G_f frá *s* til *t*

  Setjum $F = \min_{u \to v \in P} c_f(u \to v)$

  Minnstu afköstin á veginum *P* (flöskuháls)

  Skilgreinum nýtt flæði $f': E \to \mathbb{R}$:

$$f'(u \to v) = \begin{cases} f(u \to v) + F & \text{ef } u \to v \in P \\ f(u \to v) - F & \text{ef } v \to u \in P \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Ef örin $u \to v$ er í upphaflega *G* þá er bætt við flæðið á henni

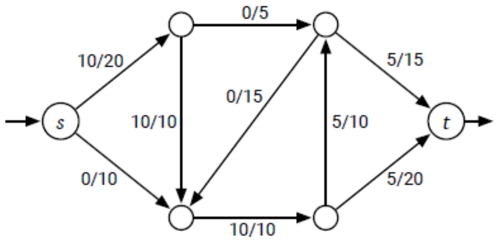
Ef örin $v \to u$ er í upphaflega *G* þá er afturkallað flæði á henni

Munið:

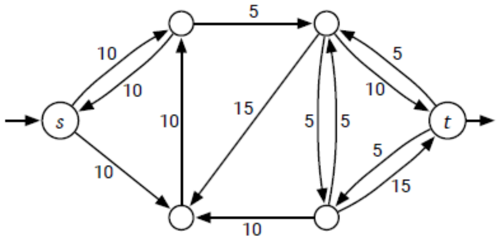
Innflæði í hverjum hnúti þarf að vera jafnt útflæðinu

Með því að afturkalla flæði á einni ör getum við kannski notað mögulegt innflæði úr annari ör

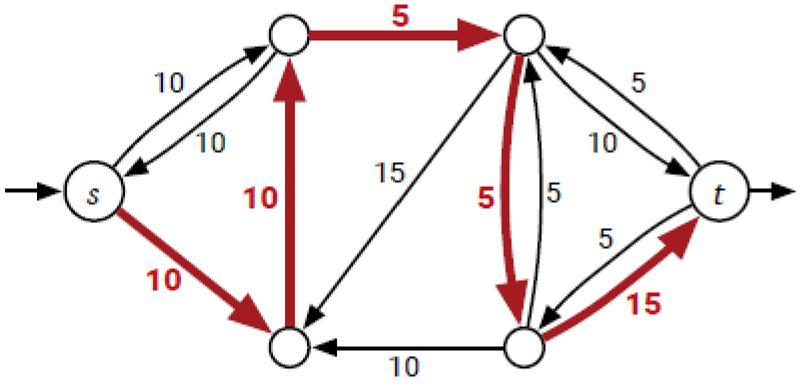
Dæmi um aukningarveg

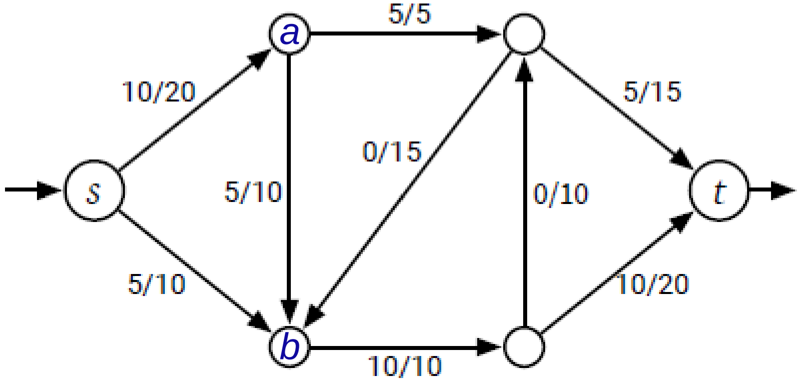


Upphaflegt G og f



Upphaflegt G_f





Nú er | f | = 15 í stað 10 áður

Rauðar örvar sýna aukningarveg P

Hér er F = 5 ← Lægstu leifarafköst á P

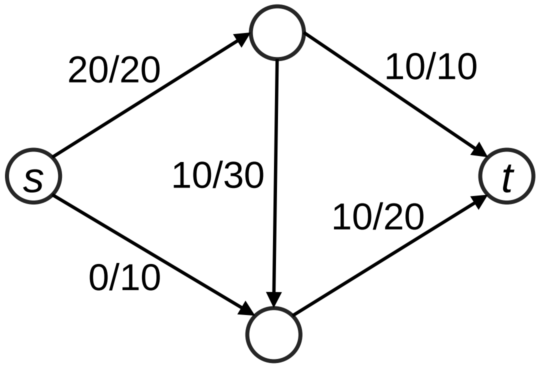
Við lækkum flæðið á örinni $a \rightarrow b$ um 5 til þess að geta sett flæði á örina $s \rightarrow b$

Það er aðeins hægt að flytja 10 út úr hnútinum b

Lykilhugmynd í aukningarvegum:

Stundum þarf að lækka flæði á einstökum örvum til að auka heildarflæðið

Æfingar



- Hvert er gildi flæðisins *f* í netinu *G*?

- Teiknið upp leifarnetið G_f fyrir netið

- Finnið aukningarveg í G_f

Hvað ef G_f hefur engan aukingarveg?

Segjum að leifarnetið G_f hafi engan veg frá s til t

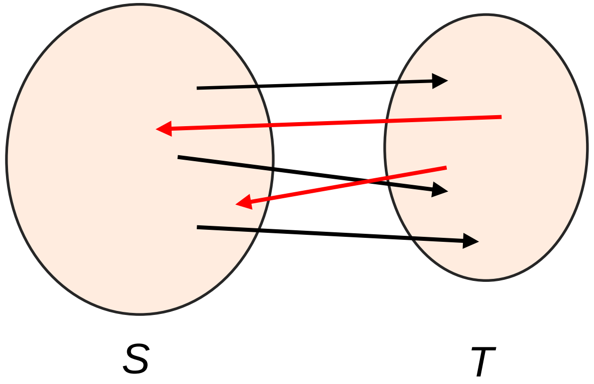
Lát S vera mengi hnútanna sem hægt er að komast í frá s í G_f

Lát $T = V \setminus S$ þ.e. allir aðrir hnútar í G

Þá er (S, T) (s, t)-skurður í G

Fyrir hverja ör $u \rightarrow v$, með u í S og v í T gildir:

$c_f(u \rightarrow v) = 0$ annars væri v líka í S



Þetta þýðir að:

$c(u \rightarrow v) - f(u \rightarrow v) = 0$ Flæðið f mettar allar örvar frá S til T

og $f(v \rightarrow u) = 0$ og forðast allar stikur frá T til S

Svo að (S, T) er lágmarksskurður og flæðið f er hámarksflæði

Reiknirit Ford-Fulkerson

- Byrja með ekkert flæði ($|f| = 0$) í flæðisneti G
- Finna aukningarveg í leifarnetinu G_f
- Auka flæðið sem nemur gildi aukningarvegsins
- Halda þessu áfram þar til engir aukningarvegir eru í G_f

<u>Tími</u>:

Ef við vinnum aðeins með heiltölugildi þá gætu þurft $| f^* |$ ítranir
þar sem f^* er gildi hámarksflæðis

Tíminn er þá $O(E \cdot |f^*|)$ ← Þetta er mögulega veldistími!

Þetta var endurbætt af Edmonds og Karp

Þeir velja alltaf stysta aukningarveginn, þá er heildartíminn $O(V \cdot E^2)$

Með fæstum fjölda örva

Staðan í dag

- Það hafa orðið miklar framfarir í reikniritum fyrir *Maxflow-Mincut*:

Technique	Direct	With dynamic trees	Source(s)
Blocking flow	$O(V^2E)$	$O(VE\log V)$	[Dinitz; Karzanov; Even and Itai; Sleator and Tarjan]
Network simplex	$O(V^2E)$	$O(VE\log V)$	[Dantzig; Goldfarb and Hao; Goldberg, Grigoriadis, and Tarjan]
Push-relabel (generic)	$O(V^2E)$	—	[Goldberg and Tarjan]
Push-relabel (FIFO)	$O(V^3)$	$O(VE\log(V^2/E))$	[Goldberg and Tarjan]
Push-relabel (highest label)	$O(V^2\sqrt{E})$	—	[Cheriyan and Maheshwari; Tunçel]
Push-relabel-add games	—	$O(VE\log_{E/(V\log V)} V)$	[Cheriyan and Hagerup; King, Rao, and Tarjan]
Pseudoflow	$O(V^2E)$	$O(VE\log V)$	[Hochbaum]
Pseudoflow (highest label)	$O(V^3)$	$O(VE\log(V^2/E))$	[Hochbaum and Orlin]
Incremental BFS	$O(V^2E)$	$O(VE\log(V^2/E))$	[Goldberg, Held, Kaplan, Tarjan, and Werneck]
Compact networks	—	$O(VE)$	[Orlin]

Það er hægt að finna hámarksflæði á $O(V \cdot E)$ tíma!

Fyrirlestraæfingar

1. Þegar reiknuð eru afköst (*capacity*) yfir skurð (S, T), hvers vegna drögum við ekki frá afköstin á örvunum sem liggja í öfuga átt (þ.e. frá T til S)?

2. Hvernig væri hægt að eiga við flæðisnet sem hafa fleiri en eina uppsprettu?

3. Hvert er hámarksflæði í netinu hér fyrir neðan?