Ályktanir fyrir flokkabreytur

Tölfræði frá grunni

Anna Helga Jónsdóttir og Sigrún Helga Lund

Háskóli Íslands

HÁSKÓLI ÍSLANDS

Helstu atriði:

1. Ályktanir um hlutfall þýðis
2. Ályktanir um hlutföll tveggja þýða
3. Ályktanir um hlutföll fleiri þýða
4. Tengslatöflur

Yfirlit

Mat á þýðishlutfalli

- Algeng leið til að draga ályktanir um flokkabreytu, er að skoða **hlutfall** mælinga þegar flokkabreytan tekur ákveðið gildi.
- Við látum $\mathbf{p}$ lýsa þessu hlutfalli fyrir **allt þýðið**.
- Við látum $\hat{\mathbf{p}}$ lýsa þessu hlutfalli fyrir **úrtakið okkar**.
- Við viljum nota mælingarnar okkar til að draga ályktanir um þýðishlutfallið $\mathbf{p}$:
  - Með því að reikna öryggisbil fyrir $\hat{\mathbf{p}}$.
  - Með því að framkvæma tilgátupróf um $\mathbf{p}$.

Bernoulli tilraun og tvíkostadreifing

Bernoulli tilraun

Sérhver tilraun í safni endurtekinna tilrauna flokkast sem **Bernoulli tilraun** ef eftirfarandi gildir:

1. Hver tilraun hefur aðeins tvær mögulegar útkomur.
2. Líkurnar á jákvæðri útkomu eru þær sömu í hverri tilraun fyrir sig.
3. Útkomurnar eru óháðar.

Fjöldi jákvæðra tilrauna úr n Bernoulli tilraunum fylgir **tvíkostadreifingu** með stikana n og p, skrifað $X \sim B(n, p)$, þar sem p eru líkurnar á jákvæðri útkomu.

Mat á þýðishlutfalli

Við metum þýðishlutfallið p, með úrtakshlutfallinu, þ.e.

$$\widehat{p} = \frac{x}{n}$$

þar sem x er fjöldi þeirra mælinga sem hljóta viðkomandi útkomu og n er stærð úrtaksins.

Normalnálgun

- Þegar ákveðið skilyrði eru uppfyllt, líkist tvíkostadreifingin normaldreifingunni.
- Þá er hægt að nota aðferðir sem byggjast á eiginleikum normaldreifingarinnar til að draga ályktanir um slembistærðir sem í raun fylgja tvíkostadreifingu.
- Það köllum við að beita **normalnálgun**.

Hvenær má nota normalnálgun?

Séu $n\hat{p}$ og $n(1-\hat{p})$ stærri en 15 má nota normalnálgun til að draga ályktanir um hlutfall tvíkostadreifingar.

Öryggisbil

Öryggisbil fyrir hlutfall þýðis

Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt má reikna neðra öryggismark fyrir p með:

$$\widehat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

og efra öryggismarkið með

$$\widehat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

þar sem $\widehat{p} = \frac{x}{n}$ og $z_{1-\alpha/2}$ fæst með að fletta upp í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar.

Núlltilgátan

- Tilgátuprófið í þessum hluta prófar núlltilgátuna hvort hlutfall þýðisins, p, sé jafnt einhverju ákveðnu gildi sem við köllum p_0.
- Núlltilgátuna ritum við $H_0 : p = p_0$.
- Sé prófið tvíhliða drögum við þá ályktun að hlutfallið p sé frábrugðið p_0.
- Sé það einhliða getum við fullyrt að p sé annað hvort stærra eða minna en p_0 eftir því sem við á.

Tilgátupróf fyrir hlutfall þýðis

Tilgátupróf fyrir hlutfall þýðis

Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt má nota eftirfarandi tilgátupróf:

Núlltilgátan er:

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

þar sem X er fjöldi heppnaðra tilrauna og n er stærð úrtaksins.

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0, 1)$.

Gagntilgátur fyrir hlutfall þýðis

Gagntilgátur fyrir hlutfall þýðis

Gagntilgátan getur verið einhliða eða tvíhliða og má sjá þær ásamt höfnunarsvæðunum hér að neðan.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : p < p_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p > p_0$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p \neq p_0$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Hlutfall þýðis - Dæmi

Kolbeinn Tumi vill kanna hvort meirihluti landsmanna styður ríkisstjórnina. Hvaða núlltilgátu ætti hann að nota fyrir tilgátuprófið sitt?

Hlutfall þýðis - Dæmi

Kolbeinn Tumi vill kanna hvort meirihluti landsmanna styður ríkisstjórnina. Hvaða núlltilgátu ætti hann að nota fyrir tilgátuprófið sitt?

Hann ætti að nota núlltilgátuna: $\mathrm{H}_0 : p = 0.5$.

Hlutfall þýðis - Dæmi

Kolbeinn Tumi vill kanna hvort meirihluti landsmanna styður ríkisstjórnina. Hvaða núlltilgátu ætti hann að nota fyrir tilgátuprófið sitt?

Hann ætti að nota núlltilgátuna: $\mathrm{H}_0 : p = 0.5$.

Hann framkvæmir könnun þar sem $\hat{p} = 0.56$. Hann reiknar líka 95% öryggisbil fyrir hlutfallið og það reynist $(0.46, 0.66)$. Hvaða ályktun dregur Kolbeinn Tumi (miðað við $\alpha = 0.05$)?

Hlutfall þýðis - Dæmi

Kolbeinn Tumi vill kanna hvort meirihluti landsmanna styður ríkisstjórnina. Hvaða núlltilgátu ætti hann að nota fyrir tilgátuprófið sitt?

Hann ætti að nota núlltilgátuna: $\mathrm{H}_0 : p = 0.5$.

Hann framkvæmir könnun þar sem $\hat{p} = 0.56$. Hann reiknar líka 95% öryggisbil fyrir hlutfallið og það reynist $(0.46, 0.66)$. Hvaða ályktun dregur Kolbeinn Tumi (miðað við $\alpha = 0.05$)?

Hlutlausa gildið $p = 0.5$ er inni á bilinu $(0.46, 0.66)$ svo Kolbeinn Tumi getur ekki hafnað núlltilgátunni og getur því ekki ályktað út frá tilgátuprófinu.

Yfirlit

Möt á hlutföllum í tveimur þýðum

- Við köllum hlutföllin í þýðunum tveimur p_1 og p_2 en hlutföll í tilsvarandi úrtökum $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$.
- Við prófum $\mathbf{H_0} : \mathbf{p_1} = \mathbf{p_2}$, en reiknum öryggisbil fyrir $\hat{\mathbf{p}}_\mathbf{1} - \hat{\mathbf{p}}_\mathbf{2}$.
- Í þessu tilviki er ekki hægt að framkvæma próf sem byggir beint á tvíkostadreifingunni, heldur verðum við að nota normalnálgun.

Skilyrði fyrir normalnálgun

Beita má normalnálgun ef gera má ráð fyrir að $n_1\hat{p}_1$, $n_1(1-\hat{p}_1)$, $n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ séu öll stærri en 15

Öryggisbil fyrir hlutföll tveggja þýða

Öryggisbil fyrir hlutföll tveggja þýða

Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt má reikna neðra öryggismark fyrir **muninn á** p_1 og p_2 með:

$$\widehat{p_1} - \widehat{p_2} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}$$

og efra öryggismarkið með

$$\widehat{p_1} - \widehat{p_2} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}$$

þar sem $\widehat{p_1} = \frac{x_1}{n_1}$, $\widehat{p_2} = \frac{x_2}{n_2}$ og $z_{1-\alpha/2}$ fæst með að fletta upp í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar.

Tilgátupróf fyrir hlutföll tveggja þýða

Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt má nota eftirfarandi tilgátupróf:

Núlltilgátan er:

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\widehat{P}(1-\widehat{P})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \quad \text{þar sem} \quad \widehat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$.

Ályktanir um hlutföll tveggja þýða - Dæmi

Kristinn er að kanna hlutfall örvfættra í úrvalsdeildum fótbolta á Íslandi. Hann vill athuga hvort hlutfall örvfættra sé ólíkt hjá körlum og konum. Hvernig segjum við núlltilgátuna hans í orðum?

Ályktanir um hlutföll tveggja þýða - Dæmi

Kristinn er að kanna hlutfall örvfættra í úrvalsdeildum fótbolta á Íslandi. Hann vill athuga hvort hlutfall örvfættra sé ólíkt hjá körlum og konum. Hvernig segjum við núlltilgátuna hans í orðum?

Núlltilgátan hans er að hlutfall örvfættra karlmanna sé það sama og hlutfall örvfættra kvenmanna í úrvaldeildum fótbolta á Íslandi.

Ályktanir um hlutföll tveggja þýða - Dæmi

Kristinn er að kanna hlutfall örvfættra í úrvalsdeildum fótbolta á Íslandi. Hann vill athuga hvort hlutfall örvfættra sé ólíkt hjá körlum og konum. Hvernig segjum við núlltilgátuna hans í orðum?

Núlltilgátan hans er að hlutfall örvfættra karlmanna sé það sama og hlutfall örvfættra kvenmanna í úrvaldeildum fótbolta á Íslandi.

Í rannsókninni reyndust 11% karlmannanna og 9 % kvenmannanna vera örvfætt. Kristinn reiknaði 95% öryggisbil fyrir mismun hlutfallanna og reyndist það (0.01, 0.03). Hvaða ályktun dregur Kristinn? (miðað við $\alpha = 0.05$)?

Ályktanir um hlutföll tveggja þýða - Dæmi

Kristinn er að kanna hlutfall örvfættra í úrvalsdeildum fótbolta á Íslandi. Hann vill athuga hvort hlutfall örvfættra sé ólíkt hjá körlum og konum. Hvernig segjum við núlltilgátuna hans í orðum?

Núlltilgátan hans er að hlutfall örvfættra karlmanna sé það sama og hlutfall örvfættra kvenmanna í úrvaldeildum fótbolta á Íslandi.

Í rannsókninni reyndust 11% karlmannanna og 9 % kvenmannanna vera örvfætt. Kristinn reiknaði 95% öryggisbil fyrir mismun hlutfallanna og reyndist það (0.01, 0.03). Hvaða ályktun dregur Kristinn? (miðað við $\alpha = 0.05$)?

Hlutlausa tilvikið $p_1 = p_2$ er jafngilt því að $p_1 - p_2 = 0$. Gildið 0 er ekki á bilinu (0.01, 0.03) og því getur Kristinn áætlað að hlutfall örvfættra karlmanna sé hærra en hlutfall örvfættra kvenmanna.

Yfirlit

1. Ályktanir um hlutfall þýðis
2. Ályktanir um hlutföll tveggja þýða
3. Ályktanir um hlutföll fleiri þýða
4. Tengslatöflur

Kí-kvaðrat próf

- Tilgátuna úr síðasta hluta má útvíkka þannig að hægt sé að bera saman hlutföll fleiri en tveggja þýða.
- Þá er ekki lengur hægt að nota aðferðir byggðar á nálgun normaldreifingarinnar, heldur er stuðst við svokölluð kí-kvaðrat próf (χ^2-próf).
- Aðferðina má einnig nota þegar bera á saman hlutföll tveggja þýða eins og í hlutanum hér að framan.
- Þá munu Kí-kvaðrat prófið og prófið sem byggir á normalnálgun alltaf gefa sömu niðurstöðuna.

Töflur fyrir kí-kvaðrat próf

Töflur fyrir kí-kvaðrat próf

Þegar framkvæma á kí-kvaðrat próf er gott að búa til þrjár töflur:

- Tafla mældrar tíðni: Inniheldur tíðni sem við fáum úr rannsókninni, mæld tíðni táknuð með o.
- Tafla væntanlegrar tíðni: Inniheldur væntanlega tíðni, táknuð með e. Gildin fást með því að margfalda samtalstölurnar úr töflu mældrar tíðni úr þeim dálki og þeirri línu sem við erum stödd í og deila með heildarfjölda. Allar tölur í þessari töflu verða að vera hærri en 5 annars er ekki hægt að nota prófið.
- Tafla prófstærðar: Inniheldur framlag til prófstærðar reiknað með $\frac{(o-e)^2}{e}$. Að lokum eru allar tölurnar í töflunni lagðar saman til að fá gildið á prófstærðinni (sjá næstu glæru).

Kí-kvaðrat próf fyrir hlutföll

Kí-kvaðrat próf fyrir hlutföll

Tilgáturnar eru:

$$H_0 : p_1 = p_2 = ... = p_d$$

$$H_1 : \text{hlutföllin eru ekki öll jöfn}$$

Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{d} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

þar sem l er fjöldi lína, d er fjöldi dálka, o er mæld tíðni og e er væntanleg tíðni.

Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin χ^2-dreifingu með (l - 1) $\cdot$ (d - 1) fjölda frígráða. Hafna skal núlltilgátunni sé $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))}$.

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Dæmi

Davíð kannar hvort fólk eigi happatölu og framkvæmir könnun í Reykjavík, í nágrannasveitarfélögum borgarinnar og svo á landsbyggðinni. Hann fær eftirfarandi niðurstöður:

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin
Nei	450	332	415
Já	81	90	108

Reiknið töflu væntanlegrar tíðni, töflu prófstærðar og prófstærðina fyrir þessar niðurstöður.

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Byrjum á að reikna samtalstölurnar fyrir töflu mældrar tíðni.

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Byrjum á að reikna samtalstölurnar fyrir töflu mældrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin	Sum
Nei	450	332	415	1197
Já	81	90	108	279
Sum	531	422	523	1476

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Byrjum á að reikna samtalstölurnar fyrir töflu mældrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin	Sum
Nei	450	332	415	1197
Já	81	90	108	279
Sum	531	422	523	1476

Margföldum svo saman samtalstölurnar í hverri röð og dálki og deilum með heildarfjölda:

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Byrjum á að reikna samtalstölurnar fyrir töflu mældrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin	Sum
Nei	450	332	415	1197
Já	81	90	108	279
Sum	531	422	523	1476

Margföldum svo saman samtalstölurnar í hverri röð og dálki og deilum með heildarfjölda:

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin
Nei	430.628	342.23171	424.14024
Já	100.372	79.76829	98.85976

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Reiknum svo töflu prófstærðar. Þá reiknum við $\frac{(o-e)^2}{e}$ fyrir hvern reit. o kemur úr töflu mældrar tíðni en e kemur úr töflu væntanlegrar tíðni.

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Reiknum svo töflu prófstærðar. Þá reiknum við $\frac{(o-e)^2}{e}$ fyrir hvern reit. o kemur úr töflu mældrar tíðni en e kemur úr töflu væntanlegrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin
Nei	0.8714539	0.3058975	0.1969727
Já	3.7388184	1.3123991	0.8450765

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Reiknum svo töflu prófstærðar. Þá reiknum við $\frac{(o-e)^2}{e}$ fyrir hvern reit. o kemur úr töflu mældrar tíðni en e kemur úr töflu væntanlegrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin
Nei	0.8714539	0.3058975	0.1969727
Já	3.7388184	1.3123991	0.8450765

Prófstærðin er svo summa þessara gilda:

Ályktanir um hlutföll fleiri þýða - Lausn

Reiknum svo töflu prófstærðar. Þá reiknum við $\frac{(o-e)^2}{e}$ fyrir hvern reit. o kemur úr töflu mældrar tíðni en e kemur úr töflu væntanlegrar tíðni.

	Reykjavík	Nágrannasv.	Landsbyggðin
Nei	0.8714539	0.3058975	0.1969727
Já	3.7388184	1.3123991	0.8450765

Prófstærðin er svo summa þessara gilda: 7.2706181

Yfirlit

Tengslatöflur

- Við vorum að sjá hvernig við getum borið saman hlutföll í mismunandi þýðum.
- Við viljum enn oftar bera saman tvær flokkabreytur þar sem gögnum er aflað úr sama þýðinu.
- Til þess eru notaðar svokallaðar tengslatöflur og prófin ganga út á að svara spurningunni hvort breyturnar tvær séu óháðar.
- Prófstærðin sem notast er við er sú sama og áður og eru allir útreikningar því eins.
- Tilgáturnar eru þó settar fram á annan máta.

Tengslatöflur

Tengslatöflur

- Gerum ráð fyrir að önnur breytan hafi l flokka, en hin d flokka.
- Tilgáturnar eru

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{Það er ekki samband á milli breytanna tveggja} \\ H_1 &: \text{Það er samband á milli breytanna tveggja} \end{aligned}$$

- Prófstærðin er summa allra gildanna í töflu prófstærðar.
- Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin χ^2-dreifingu með (l - 1)·(d - 1) frígráður.
- Hafna skal núlltilgátunni sé $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))}$.

Tengslatöflur - Dæmi

Þröstur kannar samband milli hjúskaparstöðu og starfsstéttar. Hann fær eftirfarandi niðurstöður:

	Einhleyp	Sambúð	Gift	Skilin
Stjórnendur	50	92	316	40
Iðnaðarmenn	20	46	139	13
Þjónustustörf	31	40	91	29
Verkafólk	17	24	55	11

Hann framkvæmir kí-kvaðratpróf og fær prófstærðina 26.97304. Hvaða ályktun dregur hann?

Tengslatöflur - Dæmi

Þröstur kannar samband milli hjúskaparstöðu og starfsstéttar. Hann fær eftirfarandi niðurstöður:

	Einhleyp	Sambúð	Gift	Skilin
Stjórnendur	50	92	316	40
Iðnaðarmenn	20	46	139	13
Þjónustustörf	31	40	91	29
Verkafólk	17	24	55	11

Hann framkvæmir kí-kvaðratpróf og fær prófstærðina 26.97304. Hvaða ályktun dregur hann?

Hér eru 4 dálkar og 4 línur, svo við miðum við $\chi^2_{0.95,((4-1)\cdot(4-1))} = \chi^2_{0.95,(3\cdot3)} = \chi^2_{0.95,(9)} = 16.92.$

Tengslatöflur - Dæmi

Þröstur kannar samband milli hjúskaparstöðu og starfsstéttar. Hann fær eftirfarandi niðurstöður:

	Einhleyp	Sambúð	Gift	Skilin
Stjórnendur	50	92	316	40
Iðnaðarmenn	20	46	139	13
Þjónustustörf	31	40	91	29
Verkafólk	17	24	55	11

Hann framkvæmir kí-kvaðratpróf og fær prófstærðina 26.97304. Hvaða ályktun dregur hann?

Hér eru 4 dálkar og 4 línur, svo við miðum við $\chi^2_{0.95,((4-1)\cdot(4-1))} = \chi^2_{0.95,(3\cdot 3)} = \chi^2_{0.95,(9)} = 16.92$.

Prófstærðin okkar er stærri en 16.92 svo við ályktum að það sé samband á milli hjúskaparstöðu og starfsstéttar.