TÖL403G GREINING REIKNIRITA

13. Slembin reiknirit 1

Hjálmtýr Hafsteinsson

Vor 2022

Í þessum fyrirlestri

- Slembin reiknirit (*randomized algorithms*)
  - Las Vegas reiknirit
  - Monte Carlo reiknirit

- Rær og skrúfboltar (*nuts and bolts*)
  - Para eina skrúfu
  - Para allar skrúfur

DC 2.1 − 2.6

Slembin reiknirit

- Venjuleg, löggeng, reiknirit keyra alltaf eins, ef þau fá sama inntakið

- Slembin reiknirit mega taka ákvarðanir af handahófi
  - Nota til þess slembitölugjafa

Hafa aðgang að fallinu *rand*(a, b), sem skilar heiltölu í menginu $\{a, a+1, ..., b\}$, með $a < b$

Hvert kall á *rand* er sjálfstætt og sérhver möguleg heiltala er jafnlíkleg til að vera valin

óháð því sem kom áður
(*independent*)

jafndreifðar
(*uniform distribution*)

Dæmi um slembin reiknirit

- Einfalt slembið reiknirit:

```
meðan rand(0, 1) = 0
    skrifa "halló"
skrifa "bless"
```

Hversu mörg "halló" eru skrifuð?

Gæti haldið áfram endalaust!

Líkur á að ekkert "halló" skrifað: $\frac{1}{2}$ (tveir möguleikar, jafnar líkur á báðum)

Líkur á að eitt "halló" skrifað: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (fengum 0 í fyrstu ítrun, en 1 í annari)

Líkur á að tvö "halló" skrifuð: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (fengum 0 í fyrstu tveimur ítrunum, en 1 í þriðju)

Líkur á k "halló"-um: $\frac{1}{2^k}$

Minnkar sífellt, en verður aldrei 0

Slembið eða löggengt reiknirit

- Gefið verkefni:

  Höfum *n* dyr, það eru verðlaun á bak við helming þeirra.
  Viljum finna ein verðlaun!

<u>Löggengt reiknirit:</u>

Opna dyrnar í einhverri tiltekinni röð, t.d. 1, 2, 3, ..., eða n, $n-1$, ...

Versta tilfellis tími: $O(n)$

Andstæðingur getur alltaf klekkt á þessu reikniriti og látið það opna fyrst allar tómu dyrnar

<u>Slembið reiknirit:</u>

Velja dyr af handahófi til að opna

Líkur á að fá verðlaun: 1/2, 3/4, 7/8, ...

Eftir k ítranir eru líkurnar á að hafa **ekki** fengið verðlaun: $\frac{1}{2^k}$

Hægt að sýna: <u>Væntur fjöldi</u> ítrana er **2**

Óháð *n*

Andstæðingur getur ekki klekkt á þessu reikniriti, því hann veit ekki hvað það gerir!

Gerðir slembinna reiknirita

- Las Vegas reiknirit
  - Skila alltaf réttri niðurstöðu, en taka mismunandi langan tíma
  - Við reiknum þá væntan tíma (*expected time*)

Dæmi:

- Dyraverkefnið áðan, væntur tími O(1)

- Quicksort sem velur vendistak af handahófi, væntur tími $O(n \log(n))$

- Monte Carlo reiknirit
  - Skila rangri niðurstöðu með ákveðnum líkum (*probability*)
  - Við getum látið líkurnar á rangri niðurstöðu verða hverfandi með fleiri ítrunum

Dæmi:

Segjum að í verkefninu áðan séu annað hvort verðlaun á bak við helming dyranna eða engin verðlaun yfirhöfuð. Við eigum að ákvarða hvort sé tilfellið.

Notum slembna reikniritið og hættum eftir 10 ítranir og segjum að það séu engin verðlaun

Líkur á röngu svari: $\frac{1}{2^{10}}$

Rær og skrúfboltar (*nuts and bolts*)

- Höfum *n* skrúfbolta og *n* rær, allar af mismunandi stærðum
- Hver ró passar við nákvæmlega eina skrúfu, og öfugt
- Við eigum að para saman rærnar og skrúfurnar

EN Ekki hægt að bera saman tvær rær eða tvær skrúfur!

Verðum að máta eina skrúfu á móti einni ró

<u>3 mögulegar útkomur:</u> Ró of stór (þ.e. skrúfa of lítil)

Ró of lítil (þ.e. skrúfa of stór)

Ró passar við skrúfu

Einfalt verkefni

- Höfum eina skrúfu, viljum finna þá ró sem passar

Venjulegt löggengt reiknirit:

```
fyrir i=1 til n
    ath. hvort ró i passar
```

Reyndar þarf bara $n-1$ ítrun því síðasta róin hlýtur að passa!

Tími:

Versta-tilfellis: $T_{\text{verst}}(n) = \max_{|X|=n} T(X)$

Skoðum öll inntök X af stærð n. Tíminn er hágildið af því

Væntur: $T_{\text{vænt}}(n) = \underset{|X|=n}{E}[T(X)] = \sum_{|X|=n} T(X) \cdot \Pr[X]$

Vandamál: Vitum ekki líkurnar á hverju inntaki

Gætum notað jafnar líkur á hverju inntaki, en það er óraunhæft og gildir þá ekki alltaf

Slembið reiknirit

- Í slembnu reikniriti er hegðun þess á inntaki X ekki föst og tími þess á inntaki X er slembibreyta (*random variable*)
- Höfum þá áhuga á versta tilfellis væntum tíma:

$$T_{\text{verst-væntur}}(n) = \max_{|X|=n} E[T(X)]$$

Þurfum nú ekkert að vita um dreifingu inntaksins, öll inntök geta verið slæm og öll inntök geta verið góð

Höfum nú fært alla slembnina inn í reikniritið

Slembið reiknirit:

```
meðan rétt ró ekki fundin
    velja ró af handahófi úr þeim sem eftir eru
```

Ef það eru k rær eftir þá er hver þeirra valin með líkunum $1/k$

Væntur tími

- Lát *T*(*n*) vera fjölda samanburða til að finna ró sem passar við tiltekna skrúfu

  Höfum að *T*(1) = 0 og *T*(2) = 1

  Almennt er *T*(*n*) á milli 1 og *n*−1, gildi þess er háð slembiákvörðunum reikniritsins

  Vænt (*expected*) gildi *T*(*n*) er

$$E[T(n)] = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \Pr[T(n) = k]$$

Fjöldi samab. ef ró *k*

Líkur á að þetta sé ró *k*

Höfum að:

$$\Pr[T(n) = k] = \begin{cases} 1/n & \text{ef } k < n-1 \\ 2/n & \text{ef } k = n-1 \end{cases}$$

Þurfum ekki að prófa síðustu rónna

Væntur tími, frh.

- Stingum inn í formúluna fyrir vænt gildi *T*(*n*):

$$E[T(n)] = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n} + \frac{2(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}$$

Þetta er ~ *n*/2, sem er það sem okkur finnst að ætti að gilda

Við ættum að þurfa að prófa u.þ.b. helming rónna til að finna þá réttu

Æfing

- Við sáum að $T(1) = 0$ og $T(2) = 1$

- Skoðum vænt gildi á $T(3)$:   

  Við þurfum alltaf að prófa fyrstu valda ró: 1

  Við þurfum bara að prófa hinar ef hún passaði ekki: $2/3*T(2)$

  1 + 2/3*T(2)

  = 1+ 2/3*1

  = 5/3

- Finnið vænt gildi á $T(4)$ á sama hátt (út frá v.g. á $T(3)$):

Stærra verkefnið

- Para n skúfur við n rær

Löggengt reiknirit:

Bera hverja skrúfu saman við hverja ró í ákveðinni röð

Tími: $O(n^2)$

Versta tilfellis tími

Slembið reiknirit:

Keyra slembið reiknirit fyrir eina skrúfu n sinnum

Væntur fjöldi samanburða: $\approx n^2/2$

Ekki mikið betra en löggenga "ofbeldisreikniritið" (*brute force*)

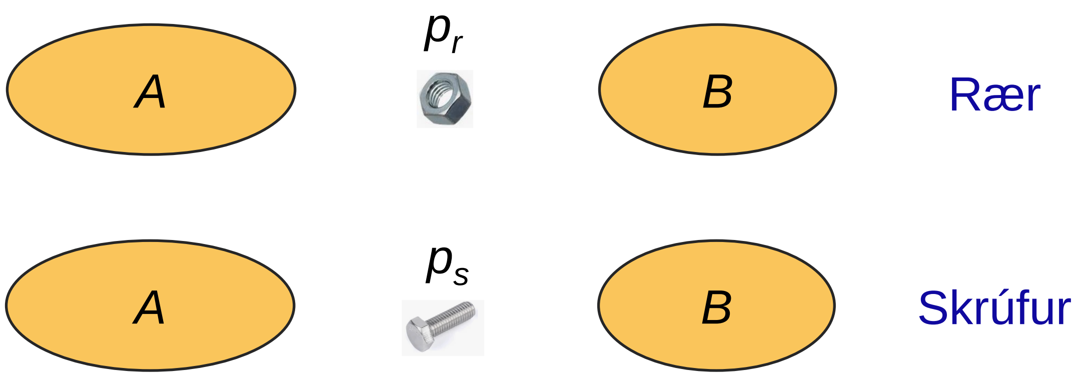
Betra slembið reiknirit

- Velja <u>vendiskrúfu</u> (vendistak) p_s og prófum hana á móti öllum róm
- Þetta skiptir rónum í 3 hópa:

  A: rær sem eru minni en p_s

  B: rær sem eru stærri en p_s

  p_r: róin sem passar við p_s



- Notum svo p_r til að skipta öllum skrúfunum upp í sömu hópa

Vegna þess að allar skrúfurnar og rærnar passa þá verða í *A* allar skrúfur og rær sem eru minni en p_s og p_r. Sömuleiðis eru í *B* allar þær sem eru stærri

- Höfum nú sömu stöðu og í Quicksort:

  Tími: $T(n) = 2n\text{-}1 + T(k\text{-}1) + T(n\text{-}k)$

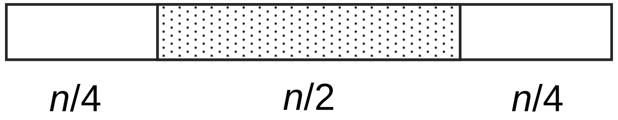
  þar sem p_r er k-ta minnsta róin

  Í versta tilfelli er $T(n) = O(n^2)$

Slembin greining

- Við veljum vendiskrúfuna í hvert sinn af handahófi
- Getum rökstutt að versta tilfellis væntur tími er $O(n \log(n))$

Segjum að skrúfa sé góð ef hún er í miðhelmingi skrúfanna
(þ.e. $n/4$ skrúfur eru minni og $n/4$ skrúfur eru stærri)



Ef vendiskrúfan er góð þá er versta skipting $n/4$ á móti $3n/4$

Líkurnar á því að vendiskrúfan sé góð eru ≥ 1/2

Getum þá sýnt fram á að efri mörk á væntum tíma eru:

$$\bar{T}(n) \leq \bar{T}\left({}^{n}/_{4}\right) + \bar{T}\left({}^{3n}/_{4}\right) + 4n - 2 \qquad \text{svo} \qquad \bar{T}(n) = O(n \log n)$$

$\bar{T}(n)$: $E[T(n)]$

ATH: Þetta er ekki sönnun, heldur rökstuðningur!

Nýlega fannst löggengt $O(n \log(n))$ tíma reiknirit

Fyrirlestraæfingar

1. Hverjar eru líkurnar á því að reikniritið hér fyrir neðan skrifi út 2?

```
i = 0
meðan rand(1,2) != rand(1,2)
    i++
prenta i
```

2. Ef við gætum raðað skrúfboltunum með því að bera þá saman innbyrðis, en gætum ekki séð neinn mun á rónum. Væri þá hægt að leysa verkefnið með einföldu, hraðvirku, löggengu reikniriti?

3. [**Aukadæmi - til umhugsunar**] *n* karlar fara í veislu og skilja eftir hattinn sinn í anddyrinu. Þegar þeir fara heim þá fá þeir hatt af handahófi. Hver er væntur fjöldi karla sem fær réttan hatt?

Lausn á æfingu

1 + 3/4**T*(3)

= 1+ 3/4*5/3

= 1+ 5/4 = 9/4 $= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}$ með *n*=4 $= \frac{4+1}{2} - \frac{1}{4}$ $= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}$ $= \frac{10-1}{4} = \frac{9}{4}$