Ályktanir fyrir talnabreytur

Tölfræði frá grunni

Anna Helga Jónsdóttir og Sigrún Helga Lund

Háskóli Íslands

Helstu atriði:

1. Ályktanir um dreifni
2. Ályktanir um meðaltal - hluti 1
3. Ályktanir um meðaltöl - hluti 2
4. Ályktanir um meðaltöl - hluti 3

Framkvæmd tilgátuprófa

Framkvæmd tilgátuprófa

1 Ákveða hvaða tilgátupróf er viðeigandi fyrir gögnin okkar.

2 Ákveða hæstu ásættanlegu villulíkur.

3 Setja fram núlltilgátu og ákveða um leið áttun prófsins (einhliða/tvíhliða).

4 Reikna prófstærðina sem svarar til tilgátuprófsins.

5a Kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði tilgátuprófsins.

5b Kanna p-gildi tilgátuprófsins.

6 Draga ályktun.

Yfirlit

Ályktanir um dreifni þýðis

- Tilgátuprófin og öryggisbilin sem við munum skoða í þessum hluta eiga við þegar draga á ályktun um dreifni normaldreifðs þýðis, σ^2.
- Þegar reikna á öryggisbil og prófa tilgátur um dreifni þýðis er notast við χ^2-dreifinguna.
- Núlltilgátan í þessum hluta er að dreifni þýðisins sé jöfn einhverju ákveðnu gildi sem við köllum σ_0^2.
- Núlltilgátuna ritum við $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

Öryggisbil fyrir dreifni þýðis

Öryggisbil fyrir dreifni þýðis

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}}$$

þar sem n er fjöldi mælinga í úrtakinu og s^2 er dreifni úrtaksins. $\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}$ og $\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}$ má finna í χ^2-töflu.

Tilgátupróf fyrir dreifni þýðis

Tilgátupróf fyrir dreifni þýðis

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Gagntilgáturnar og höfnunarsvæðin eru

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,(n-1)}$ eða $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}$

Dreifni þýðis - dæmi

Dæmi

Bjarki drekkur mikið gos. Hann og fleiri neytendur hafa undanfarið sent kvartanir til gosverksmiðju nokkurrar um að of lítið gos sé í flöskum sem verksmiðjan selur. Mikilvægt er að áfyllingarferlið í verksmiðjunni sé stöðugt og dreifnin fari ekki yfir 10 ml^2 því fari hún yfir það mark mun of hátt hlutfall flaskanna innihalda of lítið eða of mikið gos. Til að kanna þetta frekar ákvað stjórn fyrirtækisins að framkvæma tilraun þar sem slembiúrtak af stærð 30 var tekið og magn í flöskunum mælt. Gera má ráð fyrir að magn í flöskunum fylgi normaldreifingu. Staðalfrávik magns í flöskunum 30 var reiknað, $s = 3.5$. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort dreifni ferlisins sé frábrugðin 10 ml^2. Notið $\alpha = 0.05$.

Dreifni þýðis - dæmi

Svar:

1. Tilgátupróf fyrir dreifni í normaldreifðu þýði.
2. $\alpha = 0.05$.
3. $$H_0 : \sigma^2 = 10$$ $$H_1 : \sigma^2 \neq 10$$
4. Gildið á prófstærðinni er $\chi^2 = 35.53$
5. Hafna skal H_0 ef $\chi^2 < 16.05$ eða $\chi^2 > 45.72$. Gildið á prófstærðinni er hvorki lægra en 16.05 né hærra en 45.72 og lendir því ekki á höfnunarsvæði.
6. Við getum ekki hafnað H_0. Við höfum því ekki sýnt fram á að dreifnin sé frábrugðin 10 ml^2.

Ályktanir um dreifni tveggja þýða

- Tilgátuprófin sem við skoðum í þessum hluta eru notuð til að bera saman dreifni tveggja þýða sem fylgja normaldreifingu.
- Próf af þessu tagi þarf meðal annars oft að framkvæma áður en tilgátupróf þar sem meðaltöl tveggja þýða eru borin saman og dreifni þýðanna er óþekkt og úrtökin eru ekki stór.
- Núlltilgátan er: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Tilgátupróf fyrir dreifni tveggja normaldreifðra þýða

Tilgátupróf fyrir dreifni tveggja normaldreifðra þýða

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Gagntilgátan getur verið einhliða eða tvíhliða og er prófstærðin mismunandi eftir því hvernig gagntilgátan er sett upp. Mögulegar gagntilgátur, prófstærðir og höfnunarsvæði þeirra má sjá hér að neðan.

Gagntilgáta	Prófstærð	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$	$F > F_{1-\alpha,(n_2-1,n_1-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{1-\alpha,(n_1-1,n_2-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_M^2}{S_m^2}$	$F > F_{1-\alpha/2,(n_M-1,n_m-1)}$

Í tvíhliða prófinu skal ávalt velja úrtakið með hærri dreifni sem úrtak M og úrtakið með lægri dreifni sem úrtak m.

Ályktanir um dreifni tveggja normaldreifðra þýða - dæmi

Dæmi

Kanna á hvort munur sé á dreifni launa karla og kvenna sem starfa við kjötvinnslu. Slembiúrtök voru því tekin úr báðum þýðum, 20 karlar og 20 konur. Meðaltal og staðalfrávik launa í karla úrtakinu voru 345163 kr og 22814. Í kvennaúrtakinu voru meðaltal og staðalfrávik 318634 og 18312. Notið $\alpha = 0.05$.

Dreifni í tveimur þýðum - dæmi

Svar:

1. Tilgátupróf fyrir dreifni í tveimur normaldreifðum þýðum.
2. $\alpha = 0.05$.
3. $$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$ $$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
4. Gildið á prófstærðinni er $F = 1.55$
5. Hafna skal H_0 ef $F > 2.509$ (næst í töflunni). Gildið á prófstærðinni er lægra en 2.509 og lendir því ekki á höfnunarsvæði.
6. Við getum ekki hafnað H_0. Við höfum því ekki sýnt fram á að dreifnin sé mismunandi í hópunum tveimur.

Yfirlit

Ályktanir um meðaltal þýðis

Algeng leið til að draga ályktanir um talnabreytu er að skoða meðaltal hennar.

- Við látum μ lýsa þessu meðaltali fyrir allt **þýðið**.
- Við látum $\bar{x}$ lýsa þessu meðaltali fyrir **úrtakið okkar**.
- Við viljum nota mælingarnar okkar til að draga ályktanir um **þýðismeðaltalið** μ:
  - Með því að reikna **öryggisbil** fyrir μ.
  - Með því að framkvæma **tilgátupróf** um μ.

Meðaltal margra mælinga

- **Höfuðsetning tölfræðinnar** gefur okkur að líkindadreifing meðaltals breytu fylgir **normaldreifingu** ef það byggir á nógu mörgum mælingum af breytunni.
- Staðalfrávik meðaltalsins er staðalskekkjan, $\frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}$.
- Í um 95% tilvika mun meðaltal úrtaksins lenda innan tveggja staðalskekkja frá þýðismeðaltalinu.
- Við þekkjum nánast aldrei $\frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}$, en sé n mjög stórt er $\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$ góð nálgun.

Öryggisbil fyrir μ þegar σ er þekkt (mjög óalgengt...)

Þekkt σ

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Öryggisbil fyrir μ þegar n er mjög stórt

n er mjög stórt

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

þar sem $\bar{x}$ og s eru meðaltal og staðalfrávik úrtaksins.

Tilgátupróf fyrir μ þegar σ er þekkt

Þekkt σ

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Tilgátupróf fyrir μ þegar n er mjög stórt

n er mjög stórt

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0, 1)$.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Hvað ef við höfum ekki mikinn fjölda mælinga?

- Meðaltöl fylgja normaldreifingu ef að upprunalegu mælingarnar sem þau byggja á fylgja normaldreifingu.
- Í þeim tilvikum getum við smíðað öryggisbil og tilgátupróf með svipuðum hætti.
- Nú er hins vegar talsverð óvissa í matinu á staðalskekkjunni, þ.e.a.s $\frac{s}{\sqrt{n}}$ getur orðið talsvert frábrugðið $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Ef að X fylgir normaldreifingu með meðaltal μ og staðalfrávik σ fylgir lýsistærðin:
$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$
t-dreifingu með $\mathbf{n - 1}$ **frígráðu**.

Öryggisbil með t-dreifingu

Normaldreift þýði eða n stórt

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} + t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

þar sem $\bar{x}$ og s eru meðaltal og staðalfrávik úrtaksins.

t-próf fyrir eitt meðaltal

t-próf: normaldreift þýði eða n stórt

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með $(n-1)$ frígráðu, eða $T \sim t_{1-\alpha,(n-1)}$.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n-1)}$

Ályktanir fyrir meðaltal - Dæmi

Dæmi

Helga er að rannsaka greindarvísitölu ákveðinnar apategundar. Hún mældi greindarvísitöluna í 15 öpum með sérstöku apagreindarvísitöluprófi og reyndist hún vera 120 stig að meðaltali. Staðalfrávikið var 12 stig. Gera má ráð fyrir að greindarvísitala fylgi normaldreifingu. Hver eru efri mörk 95 % öryggisbils fyrir meðalgreindarvísitölu apategundarinnar?

Ályktanir fyrir meðaltal - Dæmi

Dæmi

Helga er að rannsaka greindarvísitölu ákveðinnar apategundar. Hún mældi greindarvísitöluna í 15 öpum með sérstöku apagreindarvísitöluprófi og reyndist hún vera 120 stig að meðaltali. Staðalfrávikið var 12 stig. Gera má ráð fyrir að greindarvísitala fylgi normaldreifingu. Hver eru efri mörk 95 % öryggisbils fyrir meðalgreindarvísitölu apategundarinnar?

Svar: 126.65.

Yfirlit

Ályktanir um meðaltöl tveggja þýða

- Skoðum nú tilgátupróf og öryggisbil sem eiga við þegar bera á saman meðaltöl tveggja þýða.
- Við köllum meðaltöl þýðanna μ_1 og μ_2.
- Við köllum meðaltöl úrtakanna $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$.
- Við viljum framkvæma tilgátupróf sem prófar núlltilgátuna:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

- Við viljum reikna öryggisbil fyrir mismuninn:

$$\mu_1 - \mu_2$$

Ályktanir um meðaltöl tveggja þýða

- Við notum z-próf/öryggisbil eða t-próf/öryggisbil líkt þegar unnið er með eitt meðaltal þýðis.
- z-próf/öryggisbil eiga við þegar dreifnin í þýðunum er þekkt (mjög óalgengt...) eða þegar úrtökin eru mjög stór - sjá kennslubók.
- t-próf/öryggisbil eiga við þegar þýðin eru normaldreif (óháð stærð úrtakanna) eða þegar úrtökin eru mjög stór (óhað dreifingu þýðanna).
- Notum mismunandi t-próf/öryggisbil eftir því hvort gera megi ráð fyrir að dreifni þýðanna sé svipuð eða ekki.
- Byrjum á að kanna hvor dreifnin sé ólík með viðeigandi tilgátuprófi. Stundum er notuð þumalputtareglan að ef dreifni annars urtaksins er meira en fjórum sinnum stærri en hins úrtaksins þarf að gera ráð fyrir að dreifnin í þýðunum sé ólík.

Tveggja hópa t-próf: svipuð dreifni

Ef gera megi ráð fyrir að dreifnin sé svipuð byrjum við á að reikna **vegna dreifni**, sem við táknum s_p^2:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Ef mælingarnar í þýðunum tveimur eru jafn margar, þ.e.a.s. ef $n_1 = n_2$ er

$$s_p^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}.$$

t-öryggisbil fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - svipuð dreifni

t-öryggisbil fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - svipuð dreifni

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)} \cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)} \cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

t-próf fyrir meðaltöl tveggja þýða - svipuð dreifni

t-próf fyrir meðaltöl tveggja þýða - svipuð dreifni

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t dreifingu með $(n_1 + n_2 - 2)$ frígráður, eða $T \sim t_{(n_1+n_2-2)}$.

Athugið að δ getur verið hvaða fasti sem er en í langflestum tilvikum er $\delta = 0$.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{1-\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$

tveggja hópa t-próf: ólík dreifni

- Ef ekki er hægt að gera ráð fyrir að dreifnin sé sú sama reiknum við ekki vegna dreifni.
- Þá þurfum við hins vegar að reikna fjölda frígráða fyrir tilgátuprófið með formúlunni:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Öryggisbil fyrir meðaltöl tveggja þýða - ólík dreifni

Öryggisbil fyrir meðaltöl tveggja þýða - ólík dreifni

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

þar sem $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ eru meðaltöl úrtakanna og s_1^2, s_2^2 eru dreifni úrtakanna.

Tilgátupróf fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - ólík dreifni

Tilgátupróf fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - ólík dreifni

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með ν frígráðum

Athugið að δ getur verið hvaða fasti sem er en í langflestum tilvikum er $\delta = 0$.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha,(\nu)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{1-\alpha,(\nu)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(\nu)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(\nu)}$

Ályktanir fyrir meðaltöl - Dæmi

Dæmi

Umhverfistofnun í landi nokkru ákvað að rannsaka hvort stækkun álvers í landinu hefði áhrif á flúormengun í umhverfi þess. Framkvæmdirnar í álverinu stóðu yfir árið 2005 og 2006. Eitt af því sem mælt var styrkur flúors í kjálkum lamba. Gögnin sem eru tiltæk eru mælingar á flúori í kjálkum 8 lamba sem slátrað var árið 2004 og 8 lamba sem slátrað var árið 2007. Gögnin má sjá hér að neðan ásamt nokkrum lýsistærðum.

Gögnin má sjá á næstu glæru ásmat nokkrum lýsistærðum.

Ályktanir fyrir meðaltöl - Dæmi

Flúorstyrkur 2004 (μg/g)	Flúorstyrkur 2007 (μg/g)
131.37	655.09
252.74	541.37
81.29	564.58
225.55	617.97
222.44	472.54
68.29	606.62
227.55	500.80
111.86	394.67

$\bar{x}_{2004} = 165.14$, $\bar{x}_{2007} = 544.21$, $s^2_{2004} = 5555.91$ og $s^2_{2007} = 7348.02$.

a) Kannið hvort meðalflúorstyrkur í kjálkum lamba hafi breyst frá 2004 til 2007. Gera má ráð fyrir að flúorstyrkur í kjálkum lamba fylgi normaldreifingu.

b) Er hægt að nota þessar niðurstöður til að fullyrða um hvort stækkun álversins hafi haft áhrif á meðalstyrk flúors í kjálkum lamba?

Ályktanir fyrir meðaltöl - Dæmi - dæmi

Svar: a)

1. Tilgátupróf fyrir mismun meðaltala í tveimur normaldreifðum þýðum.
2. $\alpha = 0.05$.
3. $$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$ $$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
4. Gildið á prófstærðinni er $t = -9.44$
5. Hafna skal H_0 ef $t < -2.134$ eða $t > 2.145$. Gildið á prófstærðinni er lægra en -2.134 og lendir því á höfnunarsvæði.
6. Við höfnum H_0 og ályktum að meðalflúorstyrkur í kjálkum lamda hefur breyst í umhverfinu. Styrkurinn hefur aukist frá 2004 til 2007.

b) Þó svo við höfum sýnt fram á að meðalflúorstyrkur hafi aukist frá 2004 til 2007 getum við ekki fullyrt að það sé vegna verksmiðjunnar.

Yfirlit

Paraðar mælingar

- Margar rannsóknir eru gerðar á pöruðum slembiúrtökum.
- Þær rannsóknir eru oftar en ekki þannig að gögnum er aflað fyrir og eftir eitthvert inngrip.
- Tilgáturnar ganga þá iðulega út á að kanna hvort inngripið hafi borið árangur.
- Við notum parað próf til að kanna þessar tilgátur.

Paraðar mælingar

- Gerum ráð fyrir að við höfum n pör mælinga (X_i, Y_i), $i = 1, 2, 3, ..., n$.
- Þurfum að finna mismun þessara pöruðu mælinga,

$$D_i = X_i - Y_i.$$

  Við lítum á D_i sem slembiúrtak af stærð n úr þýði með meðaltal μ_D.
- Tilgátuprófin ganga út á að kanna μ_D.

Hvaða mælingar eru óháðar og hvaða paraðar? - Dæmi

Dæmi

1. Þyngd 30 karla mæld áður en þeir ganga í gegnum strangt æfingaprógram. Þyngd karlanna mæld eftir prógramið til að kanna tilgátuna að æfingaprógrammið beri árangur í baráttunni við aukakílóín.
2. Hæð 50 kvenna og hæð 50 karla mæld til að kanna tilgátuna að karlar séu að meðaltali hærri en konur.
3. Hjartsláttur 30 kvenna á aldrinum 41 - 50 ára og 30 kvenna á aldrinum 51 - 60 mældur til að kanna tilgátuna að munur sá á hjartslætti kvenna í þessum tveimur aldurshópum.
4. Aldur 40 karla og eiginkvenna þeirra skráður til að kanna tilgátuna að í hjónaböndum karla og kvenna séu karlarnir að meðaltali eldri en konurnar.

Hvaða mælingar eru óháðar og hvaða paraðar? - Dæmi

Svar:

Dæmi

1. Parað
2. Ekki parað
3. Ekki parað
4. Parað

Paraðar mælingar

Áður en við getum hafist handa við tilgátuprófin þurfum við að reikna eftirfarandi stærðir:

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

sem er meðaltal mismunanna og

$$S_D{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n-1}$$

sem er dreifni mismunanna.

Ályktanir um paraðar mælingar

Ályktanir um paraðar mælingar

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_D = \mu_{D,0}$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_{D,0}}{S_D/\sqrt{n}}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með $(n-1)$ frígráðu, eða $T \sim t_{(n-1)}$ þar sem n er fjöldi para.
Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n-1)}$

Dæmi - parað t-próf

Dæmi

Lyfjafyrirtæki hefur þróað blóðþrýstingslyf sem lækka á blóðþrýsting fólks. Fyrirtækið stóð fyrir rannsókn þar sem blóðþrýstingur 6 einstaklinga var mældur fyrir inntöku lyfsins og aftur eftir inntöku lyfsins. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan:

Einstaklingur	Blóðþrýstingur fyrir inntöku	Blóðþrýstingur eftir inntöku
1	125	119
2	119	117
3	136	119
4	127	121
5	119	113
6	115	112

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort lyfið hafi áhrif á blóðþrýsting.

Dæmi - parað t-próf

1. Tilgátupróf fyrir paraðar mælingar.
2. $\alpha = 0.05$.
3. $$H_0 : \mu_D = 0$$ $$H_1 : \mu_D \neq 0$$
4. $d = 6.67$, s_D = 5.35 og gildið á prófstærðinni er $t = 3.05$
5. Hafna skal H_0 ef $t < -2.571$ eða $t > 2.571$. Gildið á prófstærðinni er hærra en 2.571 og lendir því á höfnunarsvæði.
6. Við höfnum H_0 og ályktum að meðalblóðþrystingur lækki við inntöku lyfsins.