TÖL403G GREINING REIKNIRITA

26. Nálgunarreiknirit

Hjálmtýr Hafsteinsson

Vor 2022

Í þessum fyrirlestri

- Lausnir á NP-erfiðum verkefnum
  - Leysa lítil tilvik
  - Nota sértilvik
  - Nálgun

Aukaefni

- Nálgunarreiknirit
  - Hleðslujafnvægi (*load balancing*)
  - Farandsalaverkefnið (TSP)

Hvað er til ráða?

- Höfum sýnt að verkefni *P* sem við viljum leysa er *NP-erfitt*
- Við þurfum áfram að leysa verkefnið
  - Það hverfur ekki!

Hvað getum við gert?

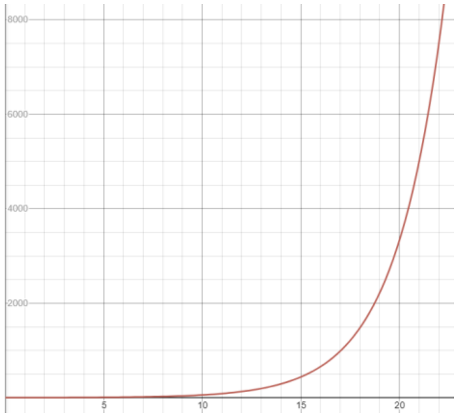
- Getum stundum notað veldistímareiknirit

- Okkar verkefni er sértilvik af almennu NP-erfiðu verkefni

- Okkur nægir "næstum því" besta lausn

Veldistímareiknrit

- Við getum oft notað veldistímareiknirit til að leysa verkefni!



- Ef inntakið er lítið þá er reikniritið nógu hraðvirkt

Veldissprengingin er ekki hafin ennþá

- Stundum er það aðeins versta tilfellið sem tekur veldistíma

Öll "venjuleg" inntök taka ekki svo langan tíma

Dæmi: Simplex aðferðin er veldistíma, en virkar mjög vel á flestum raunhæfum tilvikum

- Sum endurrakningar (*backtracking*) reiknirit get grisjað möguleikana mjög mikið

Prófa að festa gildi og geta fljótt séð hvort það geti leitt til lausnar

Ef ekki þá er hægt að henda burtu mjög mörgum möguleikum

Fræðilega séð erum við að prófa alla möguleika, en margir þeirra koma aldrei til skoðunar

Dæmi: *SAT solvers*

Sértilfelli

- Stundum erum við með sértilvik af *NP-erfiðu* verkefni
- Þetta sértilvik gæti verið léttara en almenna verkefnið

CNF: *Conjunctive Normal Form*
(OG-unar staðalform)

Verkefnið 2CNF SAT er í *P*

$(x_1 \lor \overline{x_3}) \land (x_2 \lor x_3) \land \cdots$

2 breytistærðir í hverjum þætti

þó 3CNF SAT sé NP-fullkomið

$(x_1 \lor \overline{x_3} \lor x_4) \land (x_2 \lor x_3 \lor x_4) \land \cdots$

3 breytistærðir í hverjum þætti

Klíkuverkefnið fyrir ákveðnar gerðir neta er í *P*

Til dæmis sléttunet (*planar graphs*)

Stundum eru sértilvik auðveldari þrátt fyrir að vera líka *NP-erfið*

Til dæmis er auðveldara að nálga lausnir á Farandsalaverkefnið á sumum tegundum neta

Nálgunarreiknirit

- Höfum *NP-erfitt* verkefni *P*, viljum fá einhverja góða lausn á því, ekki endilega þá bestu
- Getum prófað ýmis gráðug reiknirit
  - Gráðug reiknirit er oftast hraðvirk
  - En gefa ekki endilega bestu lausnina

Athugið að við vitum sjaldnast bestu lausnina

Svo að við vitum ekki hversu góða lausn við fáum út úr nálgunarreikniritinu

Ef hún er betri en það sem við höfum nú þegar, þá er það kannski nóg!

Fyrir sum nálgunarreiknit getum við sannað að lausnin sé ekki verri en eitthvað tiltekið hlutfall af bestu lausn

Nálgunarhlutfall

Gefið verkefni *P* og nálgunarreiknrit *A*:

Lát *OPT*(*x*) vera gildi á bestu lausn á inntaki *x*

Lát *A*(*x*) vera gildi á lausn nálgunarreikniritsins á inntaki *x*

Þá er reikniritið *A* með nálgunarhlutfall (*approximation ratio*) $\rho(n)$ ef

$$\frac{OPT(x)}{A(n)} \leq \rho(n) \quad \text{og} \quad \frac{A(x)}{OPT(n)} \leq \rho(n)$$

fyrir öll inntök *x* af stærð *n*

Fyrir hámörkunar-verkefni (*max*)

Fyrir lágmörkunar-verkefni (*min*)

Reikniritið *A* er þá sagt vera $\rho(n)$-nálgunarreiknirit

Dæmi:

1-nálgunarreiknirit skilar alltaf bestu lausn

1.5-nálgunarreiknirit skilar lausn sem er í versta falli 50% verri en besta lausn

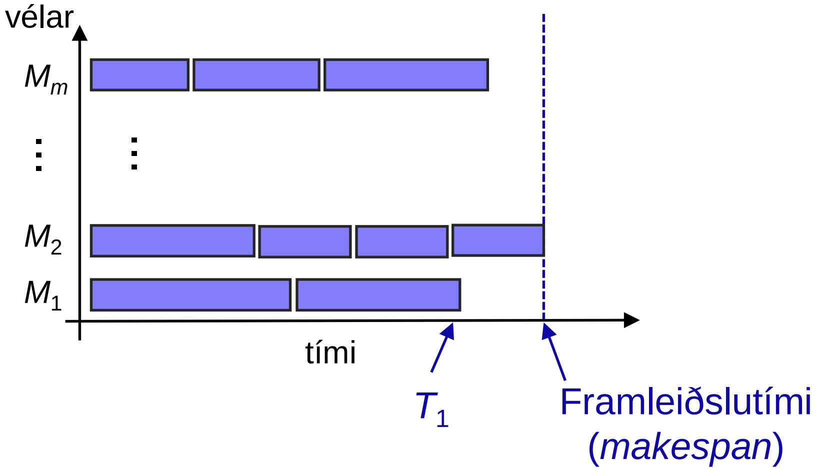
Hleðslujafnvægi (*load balancing*)

- Gefin n verk með keyrslutíma t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Viljum úthluta þeim til m véla þ.a. heildarkeyrslutíminn sé sem minnstur
- Látum $A(i)$ vera mengi þeirra verka sem er úthlutað til vélar i

Notkunartími vélar i er $T_i = \sum_{j \in A(i)} t_j$

Framleiðslutími (*makespan*) er hámarkstími sem einhver vél er í notkun:

$$makespan(A) = \max_i T_i$$



Þetta verkefni er *NP-fullkomið*

Skoðum því nálgunarreiknirit fyrir það

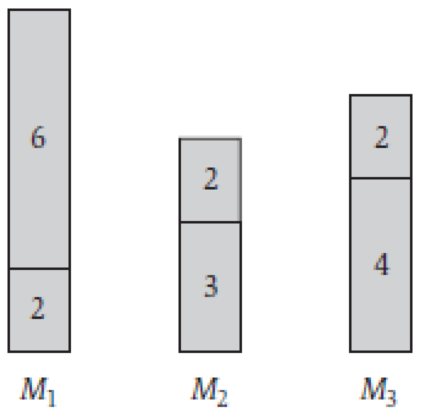
Nálgunarreiknirit fyrir Hleðslujafnvægi

- Notum einfalt gráðugt reiknirit:

```
Í upphafi eru allar vélar með lokatíma 0
Fyrir verk i frá 1 til n
   Setja verk i á þá vél j sem hefur stystan lokatíma
```

Dæmi: Höfum 3 vélar og 6 verk: [2, 3, 4, 6, 2, 2]

Úthlutun verka:



Æfingar

- Hvert er besta lausnin á verkefninu með verkin [2, 3, 4, 6, 2, 2] og 3 vélar?

Neðri mörk á bestu lausn

- Til þess að reikna nálgunarhlutfall þurfum við að vita gildið *OPT* á bestu lausn
  - Við höfum það ekki sem einfalda formúlu frá inntakinu
  - En við höfum tiltekin neðri mörk:

Neðri mörk *A*: $OPT \geq \frac{1}{m}\sum_j t_j$

Besti tíminn hlýtur að vera ≥ heildartími allra verkanna deilt með fjölda véla. Einhver vélin hlýtur að vera notuð ≥ en meðalnotkunartíminn.

Neðri mörk *B*: $OPT \geq \max_{1 \leq j \leq n} t_j$

Einhver vélin þarf að keyra stærsta verkið. Það er ekki hægt að skipta því upp á milli véla.

Nálgunarhlutfall gráðuga reikniritsins

- <u>Setning</u>: Gráðuga reikniritið er 2-nálgunarreiknirit

Sönnun:

Lát M_i vera þá vél sem hefur lengsta notkunartímann í gráðugu lausninni, T_i

Lát verk j vera síðasta verkið sem úthlutað var á þessa vél

Þegar verki j var úthlutað á vél i þá var hún með stysta heildartímann af öllum vélunum (þannig virkar aðferðin)

$T_i - t_j \leq T_k$ fyrir öll $k=1, \ldots, m$

En ef við leggjum saman notkunartíma allra hinna vélanna þá gildir:

$$\sum_k T_k \geq m(T_i - t_j) \qquad \text{eða} \qquad T_i - t_j \leq \frac{1}{m}\sum_k T_k$$

þessi summa er summa yfir öll verkin, svo þetta er jafnt $\sum_j t_j$

Samkvæmt neðri mörkum A þýðir þetta því að $T_i - t_j \leq OPT$

Nálgunarhlutfall gráðuga reikniritsins, frh.

Sönnun, frh.:

Vitum nú að þegar síðasta verkið t_j er sett á vélina með lengsta notkunartímann, þá er sá tími ≤ *OPT*

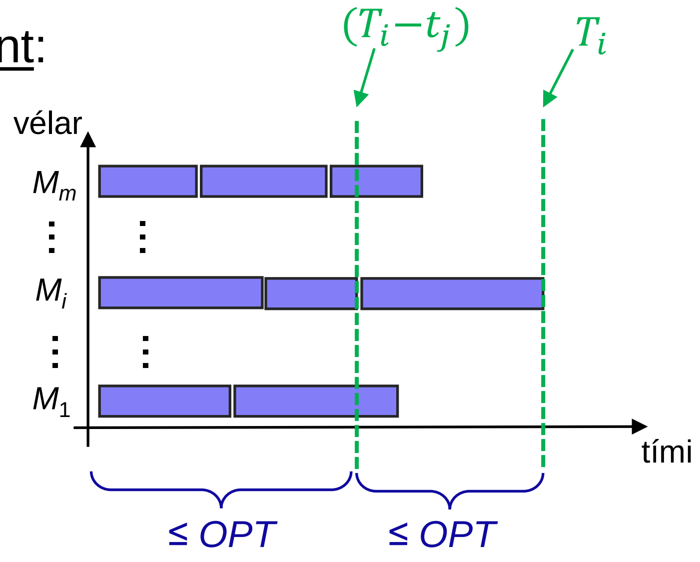
Ath. þetta síðasta verk er ekki endilega lengsta verkið, en það er ≤ lengsta verkið

Samkvæmt neðri mörkum *B* gildir að þetta síðasta verk getur ekki tekið lengri tíma en *OPT*, þ.e. $t_j \le OPT$

Notkunartími vélar *i* er því:

$$T_i = \underbrace{(T_i - t_j)}_{\le OPT} + \underbrace{t_j}_{\le OPT} \le 2 \cdot OPT$$

Myndrænt:



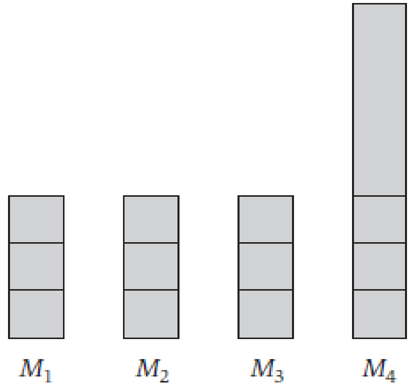
Lausn gráðuga reikniritsins er því í versta falli 2*(besta lausn)

Slæmt tilvik fyrir gráðuga reikniritið

Höfum 4 vélar og 4*3 + 1 = 13 verk

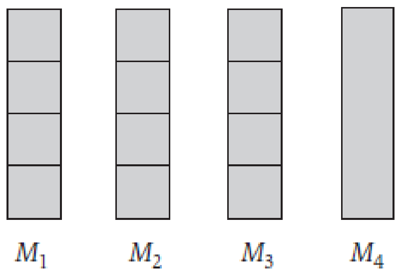
Verk 1, 2, ..., 12 taka tíma 1, en verk 13 tekur tíma 4

Niðurstaða gráðuga reiknirits:



Framleiðslutími: 7

Besta lausn:



Framleiðslutími: 4

Getum gert þetta almennt fyrir m vélar og n = $m(m-1) + 1$ verk

Þá gefur gráðug lausn $2m - 1$ en besta lausn er m

Ef við röðum verkunum í lækkandi röð áður en við keyrum gráðuga reikniritið þá getum við gert betur

Hægt að sýna að það reiknirit er 3/2-nálgunarreiknirit

Farandsalaverkefnið (*TSP*)

- Þetta verkefni er *NP-fullkomið*
- Það er meira að segja líka erfitt að nálga það!

Vitum að það er NP-erfitt að ákvarða hvort net G hafi Hamilton-hring

Búum til annað net G', með sömu hnúta og G og allar mögulegar stikur

Þyngdir stikanna í G' eru þannig:

$w(e) = 1$ ef stika e er í G, en $n+1$ annars

Þá hefur G Hamilton-hring þþaa G' hefur Hamilton-hring af þyngd n

Ef G hefur ekki Hamilton-hring þá er léttasti Hamilton-hringur í $G' \geq 2n$

Við getum því ekki búið til 2-nálgunarreiknirit fyrir Farandsalaverkefnið
því þá myndum við geta leyst Hamilton-hrings verkefnið, sem er NP-fullkomið

Að nálga *TSP* með fasta frá bestu lausn er *NP-erfitt*!

Einfaldari Farandsalaverkefni

- Það eru til útgáfur af Farandsalaverkefninu sem auðveldara er að nálga

Ef allar þyngdir á stikum uppfylla þríhyrningsójöfnuna:

$$w(u,v) \leq w(u,x) + w(x,v)$$

Ódýrara að fara beina leið milli *u* og *v* en að fara í gegnum annan hnút, *x*

Oft kallað Evklíðska Farandsalaverkefnið (*Euclidian TSP*), ef hnútarnir eru hnit í 2- eða 3-víðu rúmi

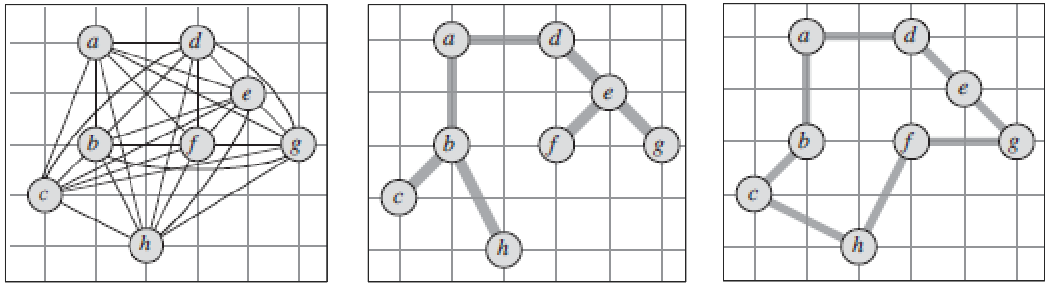
Eitt nálgunarreiknirit:

- Búa til léttasta spantré fyrir hnútana
- Fara í gegnum spantréð með djúpleit og númera hnútana í þeirri röð sem við sjáum þá fyrst

Hægt að sýna að þetta reiknirit er 2-nálgunarreiknirit

Spantré ≤ besta *TSP*

Útkoma reiknirits ≤ 2*Spantré



Sýnidæmi úr CLRS

Fyrirlestraæfingar

1. Í verkefninu Hleðslujafnvægi höfum við tvær vélar (m=2) og 5 verk með tímalengdirnar [4, 3, 3, 2−ε, 2−ε]. Sýnið útkomu gráðuga reikniritsins.

2. Finnið bestu lausnina í tilvikinu hér að ofan.

3. Hér fyrir neðan er gefið spantré fyrir net með 5 hnútum. Búið til Hamilton-hring út frá spantrénu samkvæmt nálgunarreikniritinu úr fyrirlestrinum.