Ályktunartölfræði

Tölfræði frá grunni

Anna Helga Jónsdóttir og Sigrún Helga Lund

Háskóli Íslands

Helstu atriði:

1. Úrtaksdreifing lýsistærðar
2. Lýsistærðin meðaltal
3. Höfuðsetning tölfræðinnar
4. Metlar og prófstærðir
5. Öryggisbil
6. Tilgátupróf

Yfirlit

Lýsistærðir

Lýsistærð

Lýsistærð er tala sem er reiknuð með einhverjum ákveðnum hætti út frá mælingunum okkar.

- Við lítum á mælingarnar okkar sem útkomur slembistærða.
- Lýsistærðir eru reiknaðar út frá útkomunum okkar.
- Ef að útkomurnar breytast geta lýsistærðirnar líka breyst.
- Það þýðir að lýsistærðir eru í raun slembistærðir!

Lýsistærðir - dæmi

Dæmi

- Anna Helga kannar skíðaiðkun Íslendinga.
- Hún hringir í 20 handahófsvalda einstaklinga á aldrinum 18-70 ára úr þjóðskrá og spyr hvort þeir eigi skíði.
- Alls áttu 7 skíði eða 35%.
- Baldur framkvæmir sams konar könnun, sama dag.
- Hjá honum áttu 6 skíði eða 30%.

Hvaða lýsistærð eru Anna Helga og Baldur að reikna? Hverjar voru útkomur hennar?

Lýsistærðir - dæmi

Dæmi

- Anna Helga kannar skíðaiðkun Íslendinga.
- Hún hringir í 20 handahófsvalda einstaklinga á aldrinum 18-70 ára úr þjóðskrá og spyr hvort þeir eigi skíði.
- Alls áttu 7 skíði eða 35%.
- Baldur framkvæmir sams konar könnun, sama dag.
- Hjá honum áttu 6 skíði eða 30%.

Hvaða lýsistærð eru Anna Helga og Baldur að reikna? Hverjar voru útkomur hennar?

Anna Helga og Baldur voru bæði að reikna lýsistærðina hlutfall. Þau fengu útkomurnar 0.35 og 0.3.

Úrtaksdreifing lýsistærðar

Úrtaksdreifing lýsistærðar

Líkindadreifingu lýsistærðar köllum við **úrtaksdreifingu lýsistærðarinnar** (sampling distribution).

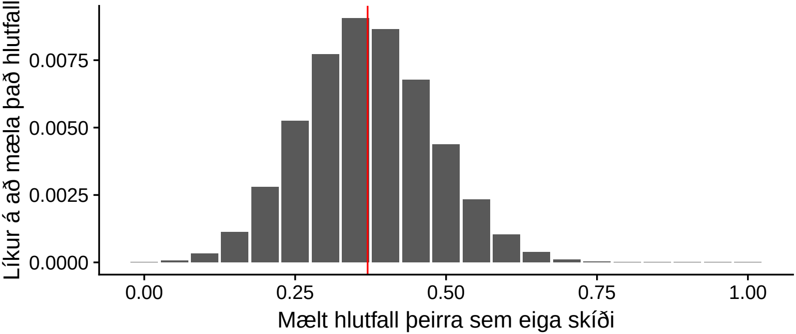
Úrtaksdreifing lýsistærðar veltur á:

- **líkindadreifingu mælinganna** sem lýsistærðin byggir á
- **fjölda mælinga** sem hún er reiknuð út frá

Þegar viss skilyrði eru uppfyllt fylgja úrtaksdreifingar sumra lýsistærða þekktum líkindadreifingum. Ályktunartölfræði byggir yfirleitt á því.

Úrtaksdreifing lýsistærðar - dæmi

Gerum ráð fyrir að skíðaeign Íslendinga á aldrinum 18-70 sé í raun 37%. Þá er líkindadreifing hlutfalls þeirra sem eiga skíði, þegar 20 manns eru spurð:



Yfirlit

Væntigildi og dreifni meðaltals

Væntigildi og dreifni meðaltals

Látum $X_1, \ldots, X_n$ lýsa n óháðum mælingum af sömu breytunni og hverja mælingu hafa væntigildi μ og dreifni σ^2. Þá gildir um meðaltal mælinganna, $\bar{X}$ að:

$$E[\bar{X}] = \mu$$

$$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Staðalskekkja

Staðalskekkja

Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera eins og áðan. Þá er **staðalskekkja** mælinganna stærðin

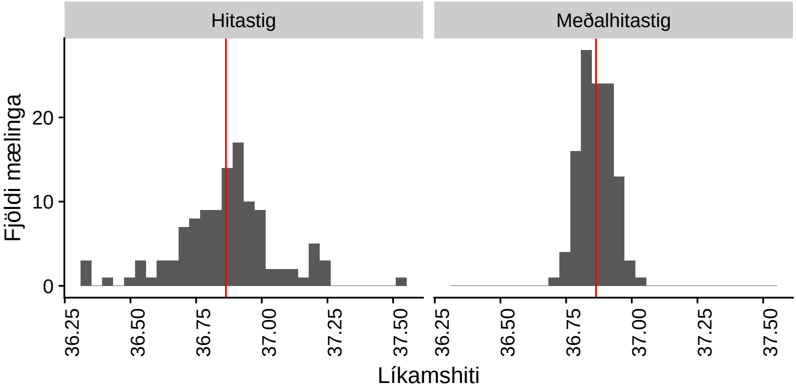
$$\sigma/\sqrt{n}$$

Hún er staðalfrávik meðaltals mælinganna.

Meðaltal er það mikið notuð lýsistærð að staðalfrávik hennar hefur fengið sér nafn.

Líkindadreifing meðaltals - dæmi

Líkindadreifingar líkamshitastigs eins bjarnar (t.v.) og meðallíkamshitastigs 10 bjarna (t.h).



Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða

Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða

Látum $X_1, \ldots, X_n$ lýsa n mælingum af normaldreifðri breytu og hverja mælingu hafa væntigildi μ og dreifni σ^2.

Þá fylgir meðaltal mælinganna, $\bar{X}$, einnig normaldreifingu, með væntigildi μ og dreifni σ^2/n.

Stærðfræðilega: Ef $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ þá $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Dæmi

Gerum ráð fyrir að slembistærðin X lýsi hæð íslenskra kvenna og fylgi dreifingunni $X \sim N(168, 7^2)$. Klara ætlar að mæla hæð fjórtán handahófsvalinna kvenna og reikna meðalhæð þeirra. Hver er líkindadreifing meðaltalsins sem hún mun reikna?

Dæmi

Gerum ráð fyrir að slembistærðin X lýsi hæð íslenskra kvenna og fylgi dreifingunni $X \sim N(168, 7^2)$. Klara ætlar að mæla hæð fjórtán handahófsvalinna kvenna og reikna meðalhæð þeirra. Hver er líkindadreifing meðaltalsins sem hún mun reikna?

Þar sem að hæð fylgir normaldreifingu mun meðalhæð einnig fylgja normaldreifingu, óháð því hversu margar konur eru mældar. Klara mælir 14 konur, svo líkindadreifing meðaltalsins verður:

$$N(168, \frac{7^2}{14})$$

Yfirlit

Höfuðsetning tölfræðinnar

Höfuðsetning tölfræðinnar

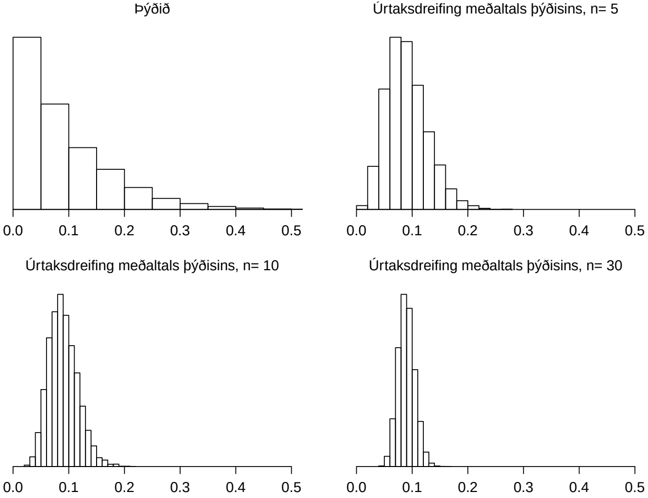
Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar og einsdreifðar slembistærðir, með væntigildi μ og dreifni σ^2 þá fylgir $\bar{X}$ normaldreifingu með væntigildi μ og dreifni σ^2/n

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

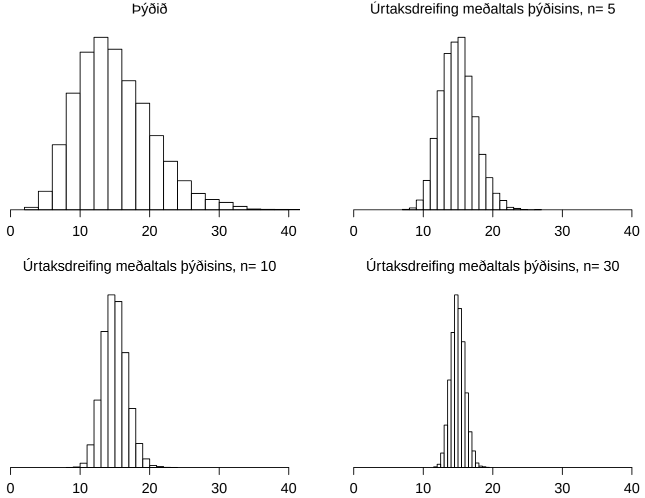
ef n er nógu stórt.

Athugið að við þurfum ekki að vita líkindadreifingu mælinganna!

Mjög skekkt dreifing



Lítið skekkt dreifing



Yfirlit

Metlar og prófstærðir

Til eru tveir flokkar af mikilvægum lýsistærðum.

- **Metlar** gefa mat á stikum líkindadreifingar.
  Dæmi: Metill sem gefur mat á μ þegar gögnin fylgja normaldreifingu.
  Dæmi: Metill sem gefur mat á p þegar gögnin fylgja tvíkostadreifingu.
- **Prófstærðir** gera okkur kleift að framkvæma tilgátupróf.
  Dæmi: Prófstærð sem gerir okkur kleift að álykta hvort dreifni tveggja þýða sé ólík.
  Dæmi: Prófstærð sem gerir okkur kleift að álykta hvort meðaltal þýðis sé stærra en 20.

Metill á meðaltali slembistærðar

Metill á meðaltal slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta meðaltal slembistærðar er

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

þar sem n er heildarfjöldi mælinga.

Metill á dreifni slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta dreifni slembistærðar er

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

þar sem $\bar{X}$ og n eru eins og að ofan.

Metill á hlutfall slembistærðar

Metill á hlutfalli slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta hlutfall slembistærðar er

$$P = \frac{X}{n}$$

þar sem X er fjöldi heppnaðra tilrauna og n er heildarfjöldi tilrauna.

Dæmi

Við höfum mælingar $1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1$ á tvíkosta útkomum. Hvert er mat okkar á p?

Metill á hlutfall slembistærðar

Metill á hlutfalli slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta hlutfall slembistærðar er

$$P = \frac{X}{n}$$

þar sem X er fjöldi heppnaðra tilrauna og n er heildarfjöldi tilrauna.

Dæmi

Við höfum mælingar $1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1$ á tvíkosta útkomum. Hvert er mat okkar á p?

$$P = \frac{X}{n} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Yfirlit

Ákvarðanataka í ljósi breytileika

- Við notum metla til fá mat á gildi stika.
- Það mat sem við sem við reiknum er í raun útkoma slembistærðar.
- Ef að gögnum væri aflað á nýjan leik myndum við sennilegast ekki fá nákvæmlega sömu niðurstöðu.
- Til að varpa ljósi á þessa óvissu gefum við upp bil sem inniheldur öll **sennileg** gildi á stikanum.
- Það er öryggisbil.

Öryggi og öryggisbil

Öryggisbil (confidence interval)

1 - α **öryggisbil** er talnabil sem inniheldur sanna gildi tiltekins stika með örygginu 1 - α.

Öryggi (confidence level)

Öryggi er það hlutfall tilvika þar sem öryggisbilið inniheldur raunverulegt gildi tiltekins stika, þegar tilraunin er endurtekin mjög oft.

Öryggismörk

Öryggismörk eða vikmörk

Öryggismörk (confidence limits) eru endapunktar öryggisbilsins.

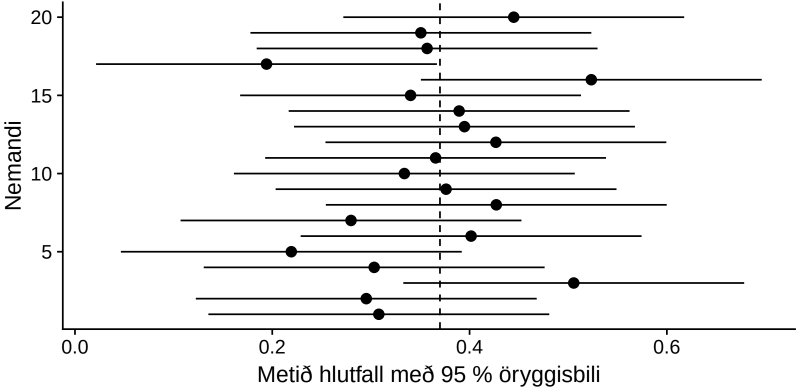
- Efra öryggismarkið er stærsta gildið sem er tekið á bilinu.
- Neðra öryggismarkið er minnsta gildið sem er tekið á bilinu.

Villulíkur

Villulíkur (type I error), táknaðar α, eru það hlutfall tilvika, þar sem öryggisbil metilsins inniheldur ekki raunverulega gildið á stikanum sem hann metur, ef tilraunin er endurtekin mjög oft.

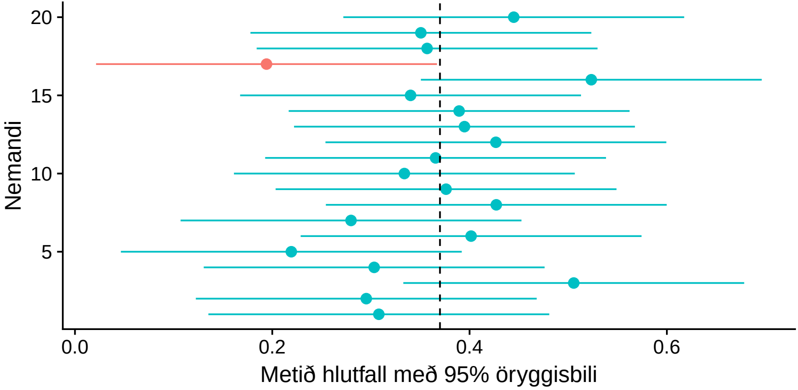
Öryggisbil - dæmi

Tuttugu nemendur í tölfræðinámskeiði könnuðu skíðaeign Íslendinga á aldrinum 18-70. Hver og einn nemandi spurði 30 manns og reiknaði 95% öryggisbil fyrir niðurstöðurnar.



Öryggisbil - dæmi

Tuttugu nemendur í tölfræðinámskeiði könnuðu skíðaeign Íslendinga á aldrinum 18-70. Hver og einn nemandi spurði 30 manns og reiknaði 95% öryggisbil fyrir niðurstöðurnar.



Yfirlit

Tilgátupróf

- Oft viljum við geta fullyrt um einhverja eiginlega sem breyturnar okkar hafa.
  - Að hlutfall þeirra sem þurfa blóðgjöf eftir þvagblöðrubrottnám sé ekki hærra en 40%
  - Að hvíldarpúls sé minni eftir því sem fólk stundar meiri líkamsrækt.
  - Að meðalfjöldi bíógesta á sólarhring sé breytilegur eftir vikudögum.
- Slíkar fullyrðingar eru oftar en ekki jafngildar því að lýsistærðir sem eru reiknaðar út frá breytunum hafi einhverja tiltekna eiginleika.
- Fullyrðingarnar eru svo prófaðar með tilgátuprófum.

Hugmyndafræði tilgátuprófa

Hugmyndafræði tilgátuprófa

Sett er fram ein tilgáta sem lýsir því sem við viljum sýna fram á og önnur sem lýsir hlutlausu tilviki.

Fundin er lýsistærð sem hefur þekkta líkindadreifingu í hlutlausa tilvikinu. Þessi lýsistærð er prófstærðin okkar.

Skilgreint er hvaða gildi á prófstærðinni eru „ósennileg“ miðað við líkindadreifinguna í hlutlausa tilvikinu.

Ef útkoma prófstærðarinnar flokkast sem „ósennileg“ þá höfnum við tilgátunni um hlutlausa ástandið og fullyrðum tilgátuna sem við viljum sýna fram á.

Ef útkoman er ekki „ósennileg“ er ekkert fullyrt.

Tilgátur

Núlltilgáta

- **Núlltilgáta** er fullyrðing sem getur verið afsönnuð með fyrirliggjandi gögnum.
- Hún verður hins vegar aldrei sönnuð.
- Hún er yfirleitt táknuð með H_0.

Gagntilgáta

- **Gagntilgáta** er sú fullyrðing sem við viljum staðfesta með rannsókninni.
- Hún er eingöngu sönnuð en ekki afsönnuð.
- Hún er ýmist táknuð með H_1 eða H_a.

Áttanir tilgátuprófa

Einhliða próf

Til eru tvær gerðir **einhliða tilgátuprófa**:

- Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **stærri** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.
- Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **minni** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.

Tvíhliða próf

Ef gögnin leyfa þá fullyrðir **tvíhliða tilgátupróf** að einn stiki gagnanna sé **annað hvort stærri eða minni** en eitthvað gildi, ef gögnin leyfa.

Prófstærðir og höfnun núlltilgátu

Prófstærð

Prófstærð (test statistic) er lýsistærð sem má nota til að hrekja núlltilgátu, ef gögnin leyfa.

Höfnun núlltilgátu

Við **höfnum** núlltilgátu ef prófstærðin okkar hefur ósennilegt gildi miðað við þá líkindadreifingu sem hún ætti að hafa ef núlltilgátan væri sönn.

Prófstærð er lýsistærð sem lýsir því hversu ósennileg núlltilgátan er.

α-stig og styrkur

α-stig

α **stig** tilgátuprófs eru mestu ásættanlegu líkur þess að hafna núlltilgátunni þegar hún er í raun sönn.

α stig: Fullyrða rangt

Styrkur

Styrkur (power) tilgátuprófs er líkurnar á því að hafna núlltilgátu sem er í raun ósönn. Hann er oft táknaður með $1 - \beta$

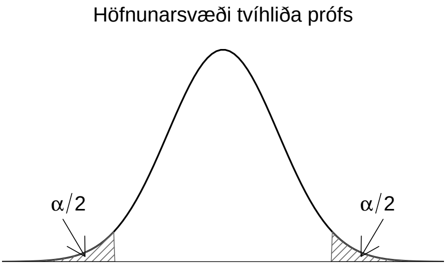
Styrkur: Fullyrða rétt

Höfnunarsvæði og α-stig

Höfnunarsvæði tilgátuprófa

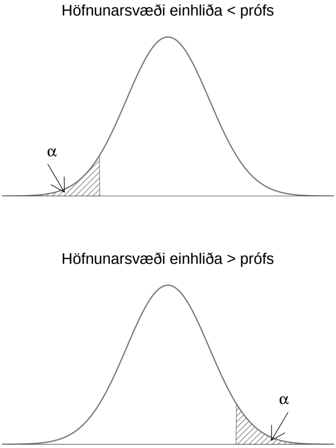
Höfnunarsvæði tilgátuprófa eru nákvæmlega þau bil sem innihalda þau gildi á prófstærðum sem við höfnum núlltilgátunni fyrir.
Ef prófstærðin fellur á höfnunarsvæði tilgátuprófsins þá höfnum við núlltilgátunni og fullyrðum gagntilgátuna.
Ef hún fellur ekki á höfnunarsvæðið, höfnum við ekki núlltilgátunni og drögum enga ályktun.

Höfnunarsvæði tvíhliða prófs



Mynd: Höfnunarsvæði tvíhliða prófs

Höfnunarsvæði einhliða prófs



Höfnunarsvæði og α-stig, framhald.

Líkurnar á því að prófstærð falli á höfnunarsvæði þegar núlltilgátan er sönn eru nákvæmlega α-stig tilgátuprófsins.

Til að skilgreina höfnunarsvæði þurfum við að ákveða:

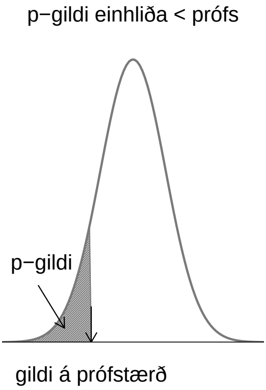
- Hver er stefna tilgátuprófsins? (einhliða/tvíhliða próf)
- Hvað er ásættanlegt α-stig tilgátuprófsins?

p-gildi

p-gildi

- **p-gildi** eru líkurnar á því að fá jafn ósennilega niðurstöðu eða ósennilegri og fengin er ef núlltilgátan er sönn.
- Hafna skal H_0 sé p-gildið minna en α.
- Sé p-gildið stærra en α er ekki hægt að hafna núlltilgátunni.

p-gildi


p−gildi einhliða < prófs
p−gildi
gildi á prófstærð
p−gildi einhliða > prófs
p−gildi
gildi á prófstærð

p-gildi

p-gildi - staðalaða normaldreifingin

Einhliða minna en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar. P-gildið er jafnt gildinu í $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið.
Einhliða stærra en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar og lesum gildið úr $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið. P-gildið er jafnt $1 - \Phi(z)$.

p-gildi fyrir tvíhliða próf

p-gildi fyrir tvíhliða próf

Tvíhliða próf:
Sé gildið á prófstærðinni okkar neikvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða minna en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.
Sé gildið á prófstærðinni okkar jákvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða stærra en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.

Villur af gerð I og II

Villa af gerð I

Villa af gerð I er sú villa að hafna núlltilgátu sem var í raun sönn. Líkurnar á villu af gerð I eru α-stig prófsins.

Villa af gerð II

Villa af gerð II er sú villa að hafna ekki núlltilgátu sem var í raun ósönn. Líkurnar á villu af gerð II eru β, þar sem $1-\beta$ er styrkur prófsins.

	H_0 er sönn	H_0 er röng
Hafna H_0	Villa af gerð I Líkur: α	Rétt ályktun Líkur: $1-\beta$
Hafna ekki H_0	Rétt ályktun Líkur: 1-α	Villa af gerð II Líkur: β

Tilgátuprófi ekki hafnað

Það geta margvíslegar ástæður legið að baki því að tilgátuprófi er ekki hafnað:

- Fjöldi mælinga var of lítill og þar af leiðandi hafði prófið lítinn styrk.
- Núlltilgátan er í raun sönn.
- Líkanið okkar hæfir ekki gögnunum - þær forsendur sem við gerum ráð fyrir að gögnin uppfylli standast ekki.

Við megum aldrei fullyrða hvert ofangreinda atriða var ástæðan
Við megum þó færa rök fyrir því að ein ofangreindra ástæða sé sú sennilegasta.

Samband öryggisbila og tilgátuprófa

Ef gildið á α er það sama fyrir bæði öryggisbil og tilgátupróf fyrir sömu lýsistærðina er eftirfarandi jafngilt:

- Við **höfnum** núlltilgátunni um að tiltekin lýsistærð hljóti ákveðið gildi.
- Öryggisbilið sem við reiknum fyrir lýsistærðina inniheldur **ekki** það gildi.

Hvað ef við viljum sýna fram á engan mun?

- Tilgátupróf gagnast okkur fyrst og fremst til að sýna að lýsistærðar séu **ólíkar**, eða að sýna fram á að það **sé samband** milli breyta.
- Þau eru hins vegar erfiðari í framkvæmd til að sýna fram á hlutlaust ástand.
- Munið að við fullyrðum aldrei núlltilgátu!
- Ef við viljum draga þá ályktun að hlutir séu svipaðir er gott að gera það með **öryggisbilum**.
- Mesti sennilegi munur er þá ekki meiri en efri (eða neðri) mörk öryggisbilsins.

Framkvæmd tilgátuprófa

Framkvæmd tilgátuprófa

1 Ákveða hvaða tilgátupróf er viðeigandi fyrir gögnin okkar.

2 Ákveða hæstu ásættanlegu villulíkur.

3 Setja fram núlltilgátu og ákveða um leið áttun prófsins (einhliðatvíhliða).

4 Reikna prófstærðina sem svarar til tilgátuprófsins.

5a Kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði tilgátuprófsins.

5b Kanna p-gildi tilgátuprófsins.

6 Draga ályktun.