TÖL403G GREINING REIKNIRITA

22. Netareiknirit 2

Hjálmtýr Hafsteinsson

Vor 2022

Í þessum fyrirlestri

- Djúpleit (*depth-first search*)
  - Forröðun (*preorder*) og eftirröðun (*postorder*)
  - Flokkun stika
  - Finna hringi
  - Grannfræðiröðun (*topological sort*)

6.1 − 6.3

Djúpleit

- Skoðum nú djúpleit nánar
  - og notum hana til að leysa ýmis netafræðiverkefni

Almenn útgáfa:

```
DFS(v):
    mark v
    PREVISIT(v)
    for each edge vw
        if w is unmarked
            parent(w) ← v
            DFS(w)
    POSTVISIT(v)
```

Munum skilgreina þessi föll á mismunandi hátt eftir því hvaða verkefni við viljum leysa

Bætum við tveimur köllum:

Forskoða(*v*): Þegar við sjáum *v* í fyrsta sinn

Eftirskoða(*v*): Þegar við sjáum *v* í síðasta sinn

Við höfum breytt reikniritinu þannig að við athugum fyrst hvort hnútur er merktur áður en við köllum endurkvæmt

Þýðir að við köllum aðeins einu sinni á *DFS*(*v*) fyrir hvern hnút *v*

Drægni (*reachability*)

- Viljum finna hvaða hnúta hægt er að komast til frá hnúti v

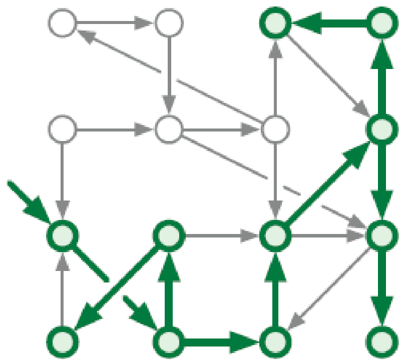
reach(*v*) *drægi*(*v*): mengi hnúta *w*, þ.a. það er vegur í *G* frá *v* til *w*

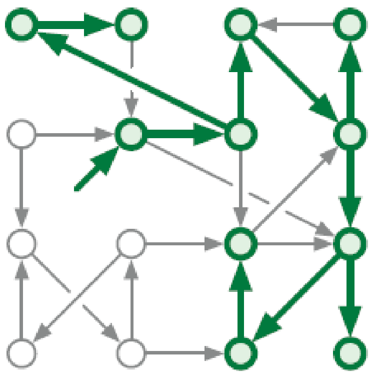
- Skiptir máli hvort netið er óstefnt eða stefnunet:

<u>Óstefnt net</u>: Komumst í alla hnúta í sama samhengisþætti og *v*

<u>Stefnunet</u>: Þá skiptir máli í hvaða hnúti við byrjum

Dæmi:





Komumst í mismunandi hnúta eftir því hvaða hnútur er upphafshnútur

Sjáum síðar: Sterktengda hluta (*strongly connected components*)

Heimsækja alla hnúta

- Til að vera viss um að heimsækja alla hnúta þurfum við ytra fall:

```
DFSAll(G):
  Preprocess(G)
  for all vertices v
      unmark v
  for all vertices v
      if v is unmarked
          DFS(v)
```

Forvinna(G) gerir upphafsstillingar áður en reikniritið hefst

Fyrir óstefnd net er auðvelt að láta þetta reiknirit telja fjölda samhengisþátta netsins

Fáum líka spanskóg (*spanning forest*) netsins

Fyrir stefnunet getum við fengið einn eða fleiri "samhengisþætti", sem fer eftir því hvaða röð hnúta *DFSAll* notar

Höfum reyndar annars konar samhengisþætti í stefnunetum: sterktengda þætti

Dæmi um notkun á djúpleit

- Finna forröðun (*preorder*) og eftirröðun (*postorder*) hnúta netsins *G*

Fyllum þá inn í föllin í *DFS* og *DFSAll*:

$\textsc{Preprocess}(G)$:
    $clock \leftarrow 0$

$\textsc{PreVisit}(v)$:
    $clock \leftarrow clock + 1$
    $v.pre \leftarrow clock$

$\textsc{PostVisit}(v)$:
    $clock \leftarrow clock + 1$
    $v.post \leftarrow clock$

```
DFSALL(G):
  clock ← 0
  for all vertices v
      unmark v
  for all vertices v
      if v is unmarked
          clock ← DFS(v, clock)
```

```
DFS(v, clock):
  mark v
  clock ← clock + 1;  v.pre ← clock
  for each edge v→w
      if w is unmarked
          w.parent ← v
          clock ← DFS(w, clock)
  clock ← clock + 1;  v.post ← clock
  return clock
```

Höfum víðværu breytuna *clock* sem hækkar í hvert sinn sem við skoðum hnút

Eftir að *DFSAll* hefur merkt allar hnúta netsins þá gildir:

(*v.pre*)
v.for skilgreinir forröðun (*preorder*) á djúpleitartré netsins *G*

v.eftir skilgreinir eftirröðun (*postorder*) á djúpleitartré netsins *G*
(*v.post*)

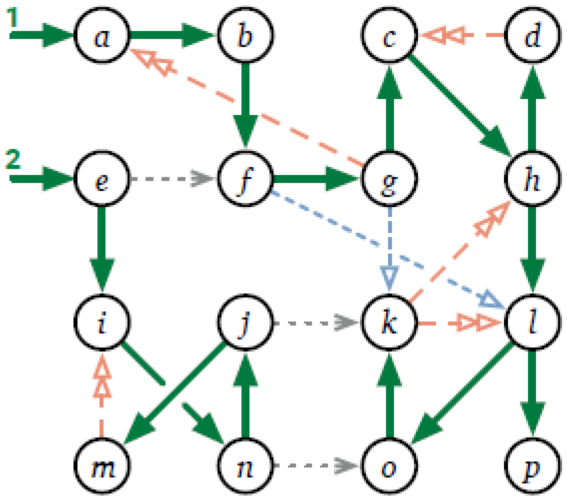
Líftími hnúta

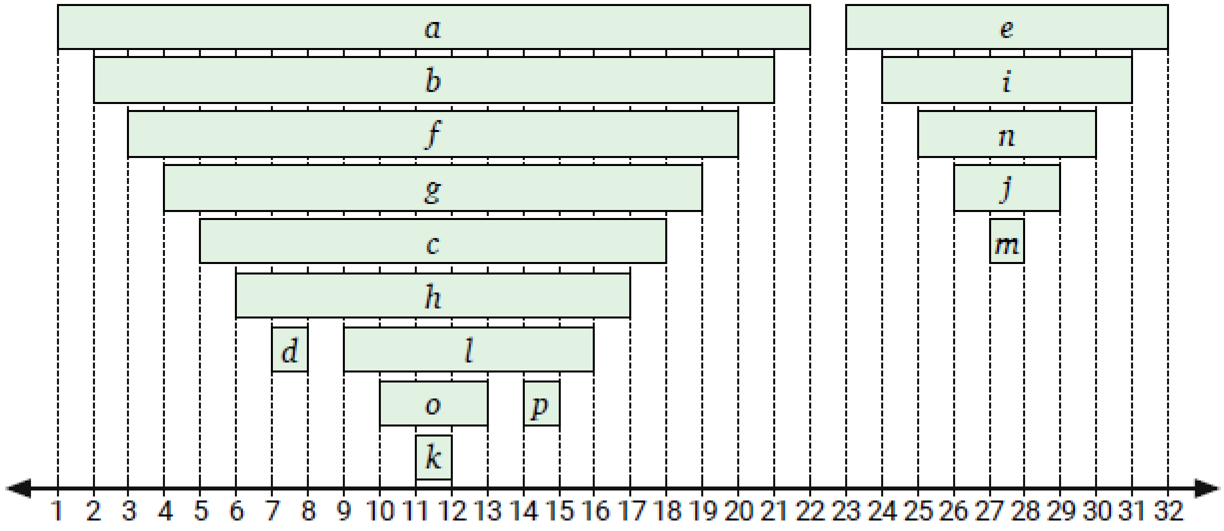
Fyrir hnúta *u* og *v* gildir:

Bilin [*u.for*, *u.eftir*] og [*v.for*, *v.eftir*] eru annað hvort alveg aðskilin (*disjoint*)

eða annað bilið er alveg innan hins (*nested*)

Dæmi:





Flokkun hnúta

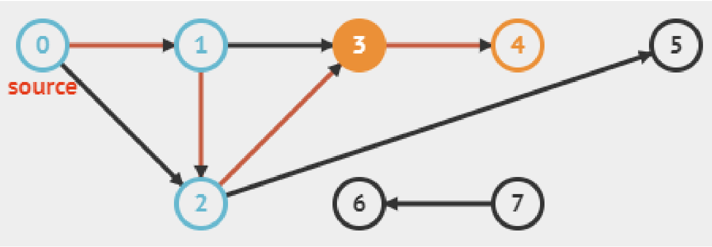
- Á meðan djúpleitinni stendur er hver hnútur *v* í einni af þremur stöðum:

○ hvítur	***nýr*** (*new*)	Ekki búið að kalla á *DFS*(*v*) (höfum ekki séð *v* ennþá)	$clock < v.for$
◐ grár	***virkur*** (*active*)	Búið að kalla á *DFS*(*v*) en ekki komin til baka úr því kalli	$v.for \leq clock < v.eftir$
● svartur	***búinn*** (*finished*)	*DFS*(*v*) er búið (allir hnútar enda svona)	$v.eftir \leq clock$

Virkur hnútur er á endurkvæmishlaðanum

Hermun í Visualgo.net

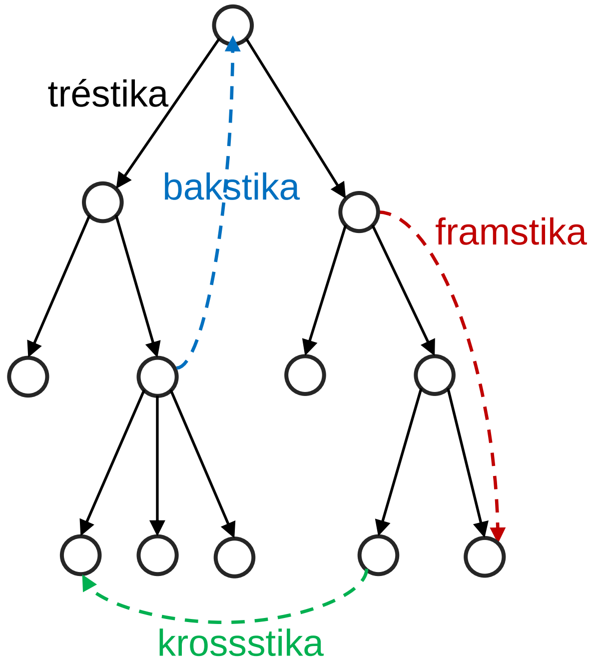
nýjir hnútar eru svartir
virkir hnútar eru bláir
búnir hnútar eru gulir



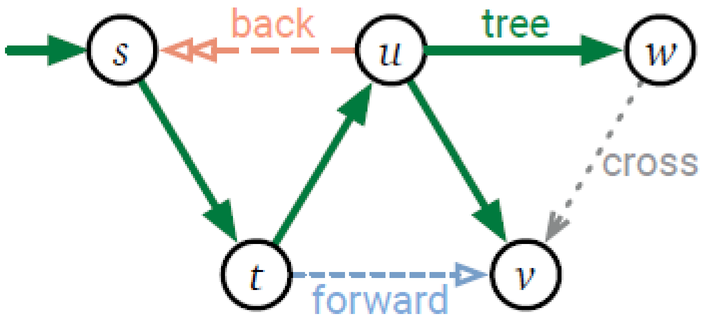
Flokkun stika

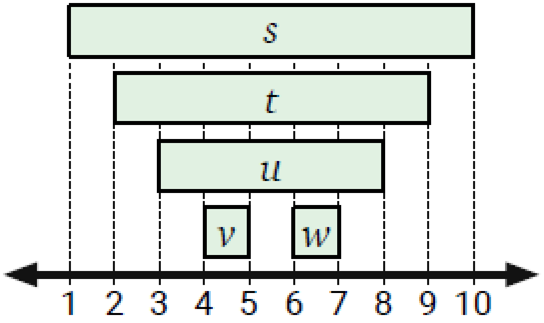
- Getum skipt stikunum $u \to v$ niður í fjóra flokka:

tréstika (*tree edge*)	*DFS*(*u*) kallar beint á *DFS*(*v*) (þá er *u* = *v.parent*)
framstika (*forward edge*)	*v* er niðji *u* í djúpleitartrénu, en er ekki barn *u*
bakstika (*back edge*)	*v* er forfaðir *u* í djúpleitartrénu
krossstika (*cross edge*)	*v* er ***búinn*** þegar *DFS*(*u*) hefst

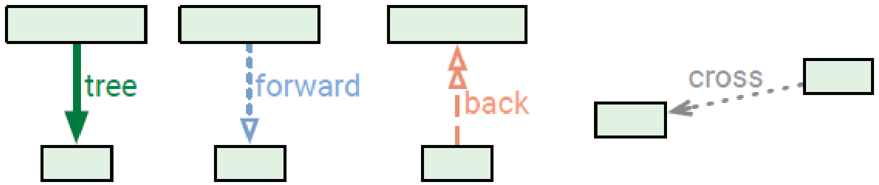


Sýnidæmi um flokkun stika





Líftími hnúta



[Hermun í Visualgo.net]

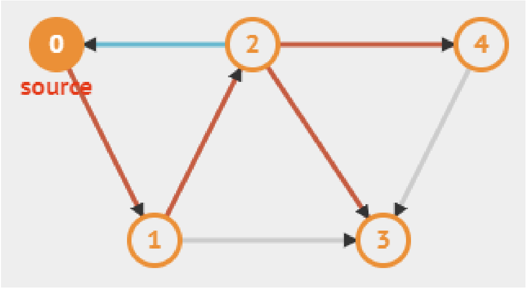
tréstikur: skilgreina djúpleitartré

fram- og ***bakstikur*** eru á milli niðja og forfeðra í trénu

krossstikur eru á milli "óskyldra" hnúta

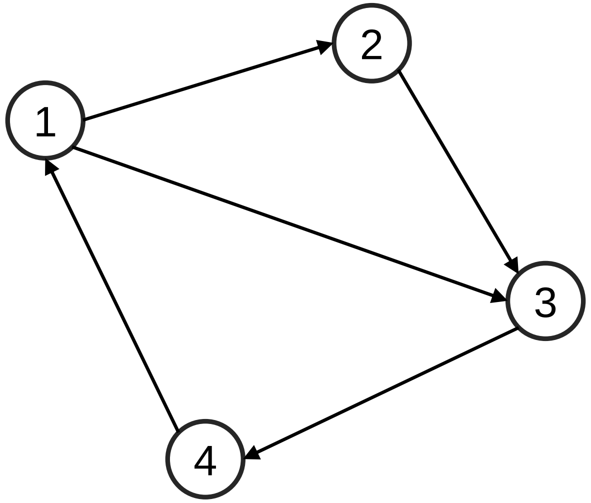
Ekki í beinan legg!

tréstikur eru rauðar
framstikur eru gráar
bakstikur eru bláar
krossstikur eru gráar



Æfingar

- Djúpleit byrjar í hnúti 1 í þessu neti. Flokkið stikurnar í tré-, fram-, bak- og krossstikur



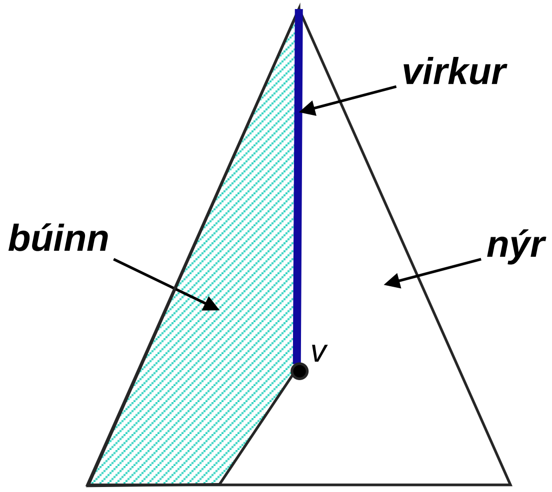
Nánar um flokkun stika

- Getum tengt gerð stikanna við gildin *for* og *eftir*

Stikan *u* → *v*:

téstika og ***framstika***	þá er *u.for* < *v.for* < *v.eftir* < *u.eftir* (*v*-bilið er inni í *u*-bilinu)
bakstika	þá er *v.for* < *u.for* < *u.eftir* < *v.eftir* (*u*-bilið er inni í *v*-bilinu)
krossstika	þá er *v.eftir* < *u.for* (bilin skarast ekki, aðskilin bil)

Staðsetning hnúta í djúpleitartrénu
(á meðan reikniritið er í gangi)



Óhringað stefnunet (*DAG*)

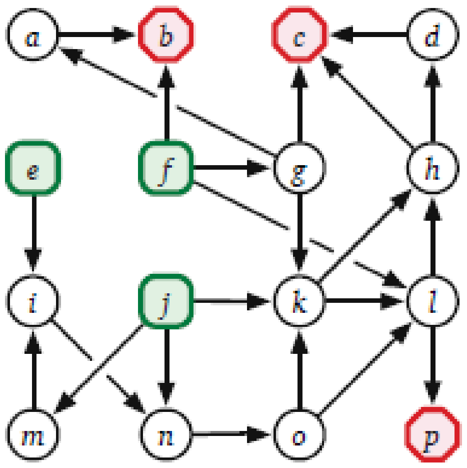
- Óhringað stefnunet (*DAG*) hefur a.m.k. einn hnút með engar stikur inn
- og a.m.k. einn hnút með engar stikur út

Kallast lind (*source*)

Kallast svelgur (*sink*)

Stefnunet getur haft margar lindir og marga svelgi

Dæmi:



Grænir hnútar eru lindir

Rauðir hnútar eru svelgir

Í stefnunetum með hringi, þá geta verið lindir og svelgir

en það geta líka verið engar lindir og engir svelgir

Óhringuð stefnunet hafa **alltaf** a.m.k. einn hnút af hvorri gerð

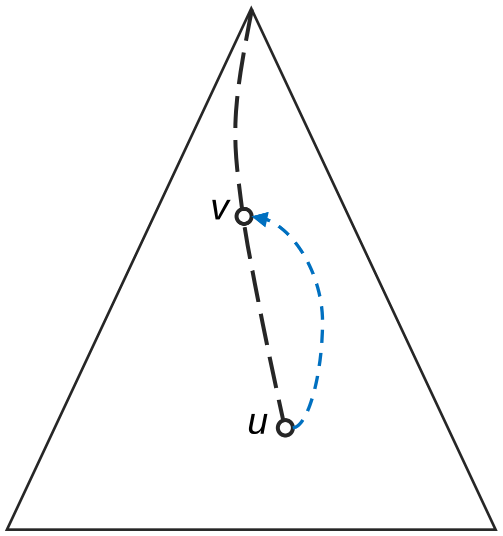
Að finna hringi í neti

- Getum notað djúpleit til að finna hringi í neti

Bakstika býr til hring í djúpleitartrénu

Þegar við komum að stikunni $u \rightarrow v$:

Ef v er ennþá virkur hnútur þá höfum við fundið bakstiku



Er netið G óhringað?

```
IsAcyclic(G):
  for all vertices v
      v.status ← New
  for all vertices v
      if v.status = New
          if IsAcyclicDFS(v) = False
              return False
  return True
```

```
IsAcyclicDFS(v):
  v.status ← Active
  for each edge v→w
      if w.status = Active
          return False
      else if w.status = New
          if IsAcyclicDFS(w) = False
              return False
  v.status ← Finished
  return True
```

Höfum fundið bakstiku

Grannfræðileg röðun (*topological sort*)

- Viljum raða hnútum óhringaðs stefnunets (*DAG*) *G* í röð

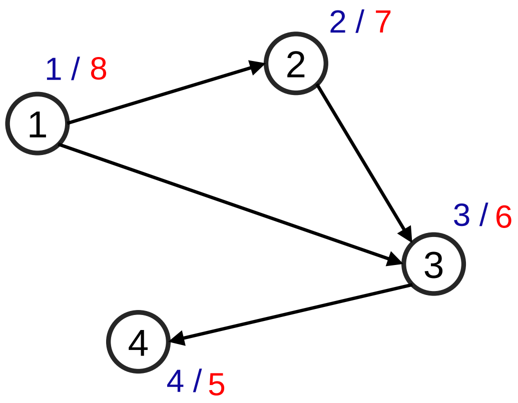
<u>Hugmynd</u>:

> Ef *G* hefur enga hringi og *u*→*v* er stika í *G*,
> þá gildir alltaf að *u.eftir* > *v.eftir*

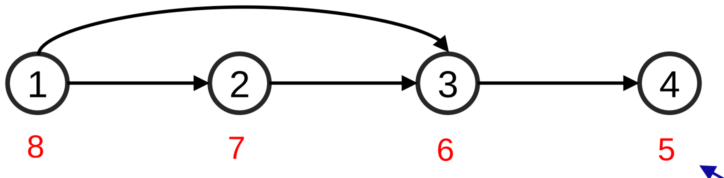
Annars væri *u*→*v* bakstika
og þá er hringur í *G*

Ef við snúum eftirröð (*postorder*) hnútanna í *G* við,
þá erum við komin með grannfræðiröð á hnúta *G*

Dæmi:

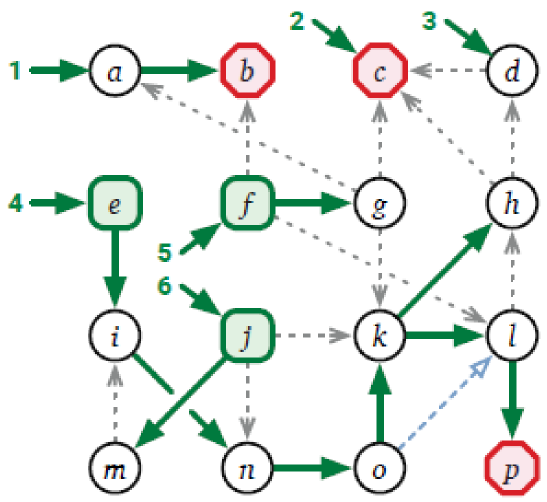


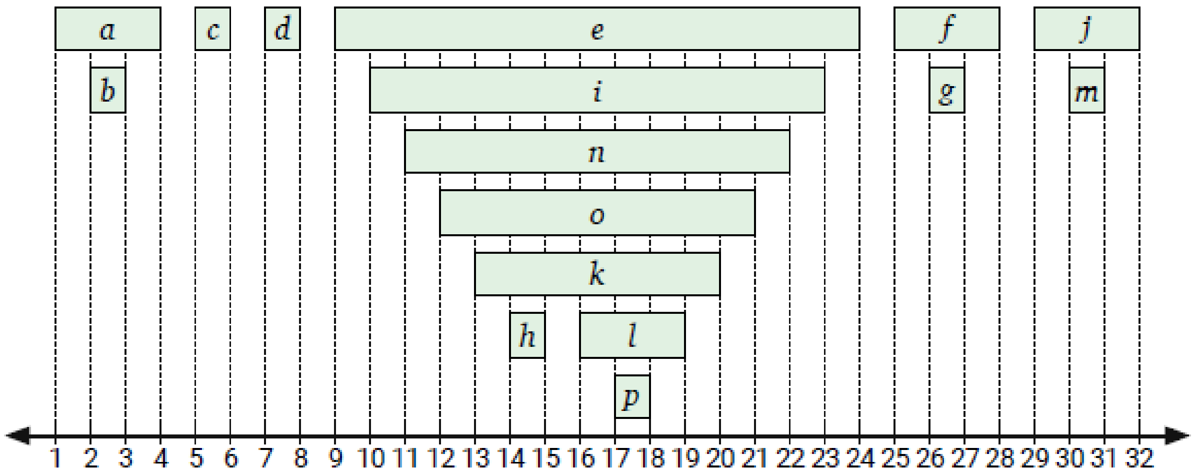
Þá er grannfræðiröð hnútanna:



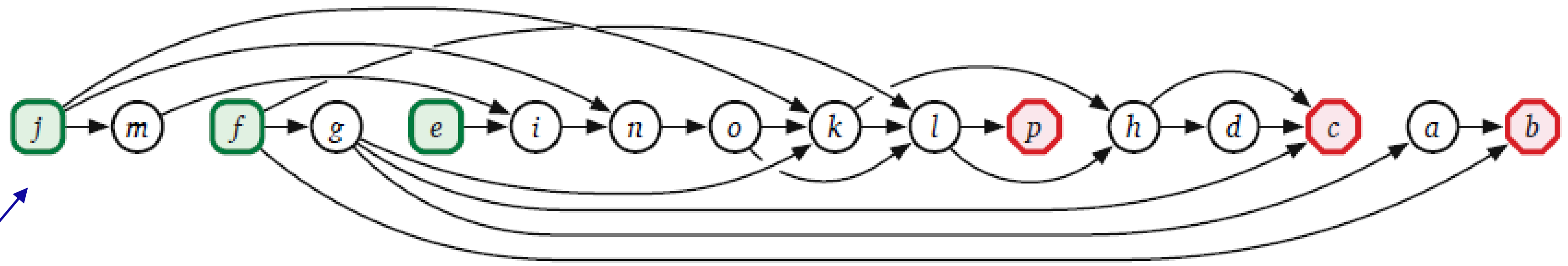
eftir-gildin sjálf skipta ekki máli,
bara að þau séu í lækkandi röð

Sýnidæmi um grannfræðiröðun





Þurfum að byrja djúpleitina aftur
á nokkrum hnútum netsins



Hnútur *j* er fremst, hann
hefur hæsta *eftir*-gildið

Hnútur *b* hefur
lægsta *eftir*-gildi

Reiknirit fyrir grannfræðiröðun

```
TopologicalSort(G):
  for all vertices v
      v.status ← New
  clock ← V
  for all vertices v
      if v.status = New
          clock ← TopSortDFS(v, clock)
  return S[1..V]
```

```
TopSortDFS(v, clock):
  v.status ← Active
  for each edge v→w
      if w.status = New
          clock ← TopSortDFS(v, clock)
      else if w.status = Active
          fail gracefully
  v.status ← Finished
  S[clock] ← v
  clock ← clock − 1
  return clock
```

Setjum hnút í fylkið

og lækkum teljarann

Hnútarnir koma í fylkið $S[1..V]$ í grannfræðiröð

Hér byrjar breytan *clock* í *V* (þ.e. *n*) og lækkar niður í 1

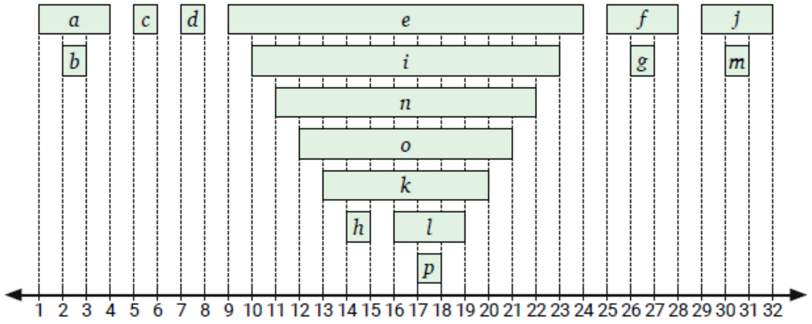
Í dæminu á undan:

Í $S[16]$

b væri fyrsti hnúturinn settur í *S* (fyrstur til að koma upp úr *TopSortDFS*)

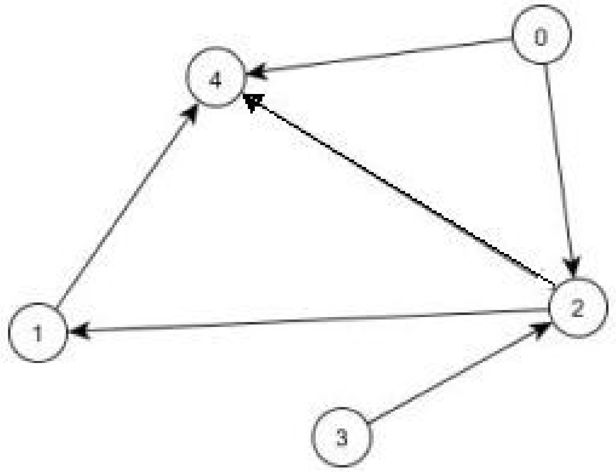
a væri næsti hnúturinn settur í *S* (næstur til að koma upp úr *TopSortDFS*)

svo kæmi *c*, síðan *d*, o.frv.



Fyrirlestraæfingar

1. Reiknið *v.for* og *v.eftir* (þ.e. *v.pre* og *v.post*) fyrir netið hér til hliðar ef við byrjum í hnúti 0:



2. Raðið hnútum netsins hér fyrir ofan í grannfræðilega röð (*topological sort*).

3. Lát (*u*, *v*) vera stiku í stefnuneti *G*. Ef bæði *u* og *v* eru virkir (*active*) þegar djúpleit fer í gegnum hana, hvers konar stika er þá (*u*, *v*)?