Pirmas laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 10 d.

1 Pirmas pratimas

$$2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' = 0$$

Kintamieji atsiskiria atlikus porą elementarių pertvarkymų:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - x^2}y\frac{dy}{dx} &= -(y^2 + 2) \\ \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Integruojame:

$$\begin{aligned} \int \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ -\frac{1}{2} \ln |y^2 + 2| &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ \ln |y^2 + 2| &= C - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \\ y^2 &= Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$\begin{aligned} (y^2)' &= (Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2)' \\ 2yy' &= \frac{-2C}{\sqrt{5 - x^2}}e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} \\ yy' &= \frac{-C}{\sqrt{5 - x^2}}e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} \end{aligned} \tag{3}$$

Tikriname:

$$
\begin{aligned}
2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' &= 0 \\
2 + Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 + \sqrt{5 - x^2}\frac{-C}{\sqrt{5 - x^2}}e^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\
2 - 2 + Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} - Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\
0 &\equiv 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

Analitinio sprendinio palyginimas su sprendiniu gautu skaitiniais metodais:
TODO

2 Antras pratimas

$$3x^3y' = y(3x^2 - y^2) \tag{5}$$

Atliekame elementarų pertvarkymą:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 \tag{6}$$

Įvedame keitinį $u = \frac{y}{x}$ arba $y = ux$, tada $y' = u'x + u$ ir lygtis tampa:

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= u - \frac{1}{3}u^3 \\
u'x &= -\frac{1}{3}u^3 \\
\int\frac{du}{u^3} &= -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} \\
\frac{u^{-2}}{-2} &= -\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|C| \\
u^{-2} &= \frac{2}{3}\ln|Cx|
\end{aligned} \tag{7}
$$

Gražinam keitinį:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{2}{3}\ln|Cx| \\ y^2 &= \frac{3x^2}{2\ln|Cx|} \end{aligned} \tag{8}$$

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$\begin{aligned} (y^2)' &= \left(\frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\right)' \\ 2yy' &= \frac{3}{2}\left(\frac{2x\ln|x| - x}{\ln^2|Cx|}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Tikrinimą atliksime taip pat su "patogesne" lygties forma, padauginę abi puses iš y, tada:

$$\begin{aligned} 3x^3yy' &= y^2(3x^2 - y^2) \\ 3x^3\frac{3}{4}\left(\frac{2x\ln|x| - x}{\ln^2|Cx|}\right) &= \frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\left(3x^2 - \frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\right) \\ \frac{18x^4\ln|x| - 9x^4}{4\ln^2|Cx|} &= \frac{9x^2}{2\ln|Cx|} - \frac{9x^2}{4\ln^2|Cx|} \\ \frac{18x^4\ln|x| - 9x^4}{4\ln^2|Cx|} &\equiv \frac{18x^4\ln|x| - 9x^4}{4\ln^2|Cx|} \end{aligned} \tag{10}$$

Analitinio sprendinio palyginimas su sprendiniu gautu skaitiniais metodais:
TODO

3 Trečias pratimas

$$\begin{cases} y' + 2y = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Pirma sprendžiame homogeninį atvejį:

$$y' + 2y = 0 \tag{12}$$

Lygtis yra tiesinė, homogeninė ir su pastoviais koeficientais, todėl galime formuoti charakteringąją lygtį:

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \tag{13}$$

Tada bendrasis homogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = Ce^{-2x} \tag{14}$$

Nehomogeninį variantą sprendžiame konstantų variavimo metodu, darydami prielaidą, kad nehomogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = C(x)e^{-2x} \tag{15}$$

Tada

$$\begin{aligned} (Ce^{-2x})' + 2Ce^{-2x} &= x \\ C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} &= x \\ C'e^{-2x} &= x \\ C' &= xe^{2x} \\ C &= \int xe^{2x} dx \\ C &= \frac{1}{2} \int xd(e^{2x}) \\ C &= \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \int e^{2x} dx \right) \\ C &= \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) + \widetilde{C} \\ C(x) &= e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + \widetilde{C} \end{aligned} \tag{16}$$

Gauname bendrąjį ir atskirąjį sprendinius:

$$y = C(x)e^{-2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x} \tag{17}$$

ir tada

$$y' = \frac{1}{2} - 2\widetilde{C}e^{-2x} \tag{18}$$

Tikriname:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x}\right)' + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x}\right) = x \\ \frac{1}{2} - 2\widetilde{C}e^{-2x} + x - \frac{1}{2} + 2\widetilde{C}e^{-2x} = x \\ x \equiv x \end{aligned} \tag{19}$$

Analitinio sprendinio palyginimas su sprendiniu gautu skaitiniais metodais:
TODO