

Pirmas laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 11 d.

1 Pirmas pratimas

1.1 Sprendimas

$$2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' = 0$$

Kintamieji atsiskiria atlikus porą elementarių pertvarkymų:

$$\begin{aligned}\sqrt{5 - x^2}y \frac{dy}{dx} &= -(y^2 + 2) \\ \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}\end{aligned}\tag{1}$$

Integruojame:

$$\begin{aligned}\int \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ -\frac{1}{2} \ln |y^2 + 2| &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ \ln |y^2 + 2| &= C - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}\end{aligned}\tag{2}$$

$$y^2 = Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2, C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

1.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

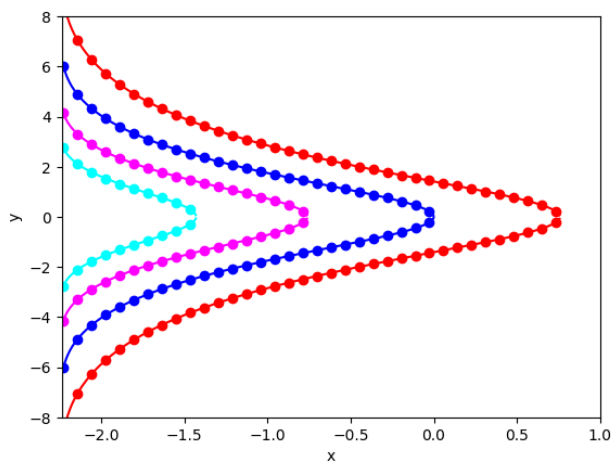
$$\begin{aligned}(y^2)' &= (Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2)' \\ 2yy' &= \frac{-2C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} \\ yy' &= \frac{-C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}}\end{aligned}\tag{3}$$

tada

$$\begin{aligned}2 + y^2 + \sqrt{5-x^2}yy' &= 0 \\ 2 + Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 + \sqrt{5-x^2} \frac{-C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\ 2 - 2 + Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\ 0 &\equiv 0\end{aligned}\tag{4}$$

1.3 Palyginimas

Skirtingos spalvos naudojamos vaizduoti sprendinius su skirtingomis C reikšmėmis. Vientisos linijos vaizduoja sprendinį gautą analitiniu metodu, kuris aprašytas šiame dokumente. Praretinti taškai žymi sprendį, kuris buvo apskaičiuotas skaitiniu metodu su automatinio sprendėju.



1 pav.: Integralinės kreivės C reikšmėm 0.5, 1, 2, 4

2 Antras pratimas

2.1 Sprendimas

$$3x^3y' = y(3x^2 - y^2) \quad (5)$$

Atliekame elementarų pertvarkymą:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 \quad (6)$$

Įvedame keitinį $u = \frac{y}{x}$ arba $y = ux$, tada $y' = u'x + u$ ir lygtis tampa:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u - \frac{1}{3}u^3 \\ u'x &= -\frac{1}{3}u^3 \\ \int \frac{du}{u^3} &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|C|$$

$$u^{-2} = \frac{2}{3} \ln|Cx|$$

Gražinam keitinį:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2}{3} \ln|Cx| \quad (8)$$

$$y^2 = \frac{3x^2}{2 \ln|Cx|}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

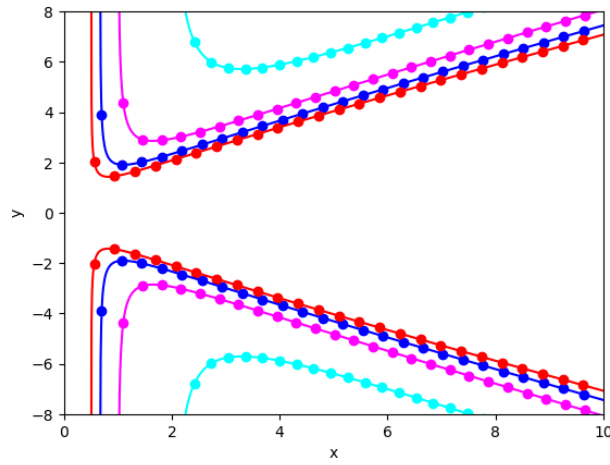
$$\begin{aligned} (y^2)' &= \left(\frac{3x^2}{2 \ln|Cx|} \right)' \\ 2yy' &= \frac{3}{2} \left(\frac{2x \ln|x| - x}{\ln^2|Cx|} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Tikrinimą atliksime taip pat su "patogesne" lygties forma, padauginę abi puses iš y , tada:

$$\begin{aligned}
 3x^3 y y' &= y^2 (3x^2 - y^2) \\
 3x^3 \frac{3}{4} \left(\frac{2x \ln |x| - x}{\ln^2 |Cx|} \right) &= \frac{3x^2}{2 \ln |Cx|} \left(3x^2 - \frac{3x^2}{2 \ln |Cx|} \right) \\
 \frac{18x^4 \ln |x| - 9x^4}{4 \ln^2 |Cx|} &= \frac{9x^2}{2 \ln |Cx|} - \frac{9x^2}{4 \ln^2 |Cx|} \\
 \frac{18x^4 \ln |x| - 9x^4}{4 \ln^2 |Cx|} &\equiv \frac{18x^4 \ln |x| - 9x^4}{4 \ln^2 |Cx|}
 \end{aligned} \tag{10}$$

2.3 Palyginimas

Palyginimas analogiškas pirmam pratimui su šiek tiek skirtingom C reikšmėm.



2 pav.: Integralinės kreivės C reikšmėm 0.5, 1, 1.5, 2

3 Trečias pratimas

3.1 Sprendimas

$$\begin{cases} y' + 2y = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

Pirma sprendžiame homogeninį atvejį:

$$y' + 2y = 0 \quad (12)$$

Lygtis yra tiesinė, homogeninė ir su pastoviais koeficientais, todėl galime formuoti charakteringąją lygtį:

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad (13)$$

Tada bendrasis homogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = Ce^{-2x} \quad (14)$$

Nehomogeninį variantą sprendžiame konstantų variavimo metodu, darydami prielaidą, kad nehomogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = C(x)e^{-2x} \quad (15)$$

Tada

$$(Ce^{-2x})' + 2Ce^{-2x} = x$$

$$C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = x$$

$$C'e^{-2x} = x$$

$$C' = xe^{2x}$$

$$C = \int xe^{2x} dx$$

$$C = \frac{1}{2} \int x d(e^{2x}) \quad (16)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \int e^{2x} dx \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) + \tilde{C}$$

$$C(x) = e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + \tilde{C}$$

Gauname bendrąjį ir atskirąjį sprendinius:

$$y = C(x)e^{-2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}, \tilde{C} \in \mathbb{R} \quad (17)$$

3.2 Tikrinimas

Išvestinė:

$$y' = \frac{1}{2} - 2\tilde{C}e^{-2x} \quad (18)$$

Tikriname:

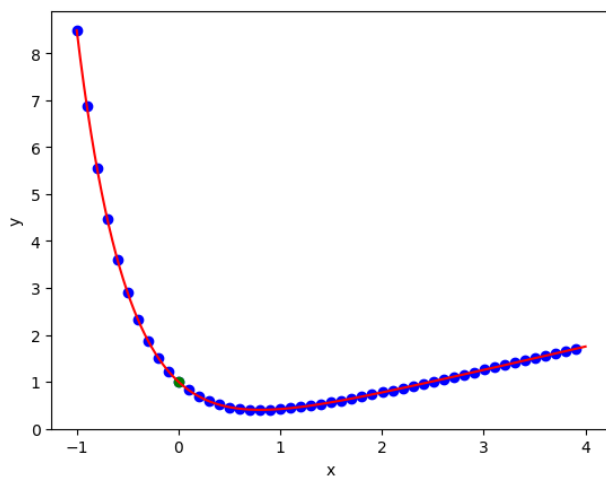
$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}\right)' + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}\right) &= x \\ \frac{1}{2} - 2\tilde{C}e^{-2x} + x - \frac{1}{2} + 2\tilde{C}e^{-2x} &= x \\ x &\equiv x \end{aligned} \quad (19)$$

Koši sprendinys:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) \\ 1 &= \frac{0}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2 \cdot 0} \\ 1 &= \tilde{C} - \frac{1}{4} \\ \tilde{C} &= \frac{5}{4} \\ y(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x} \end{aligned} \quad (20)$$

3.3 Palyginimas

Raudona linija vaizduoja analitinį sprendinį. Melyni taškai vaizduoja sprendinį gautą naudojant skaitinius metodus. Žalias taškas žymi pradinę sąlygą $y(0) = 1$.



3 pav.: Koši sprendinys