Pirmas laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 21 d.

1 Pirmas pratimas

Turime paprastąją pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2} y y' = 0$$

1.1 Sprendimas

Kintamieji atsiskiria atlikus porą elementarių pertvarkymų:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - x^2} y \frac{dy}{dx} &= -(y^2 + 2) \\ \frac{y dy}{-(y^2 + 2)} &= \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Integruojame:

$$\begin{aligned} \int \frac{y dy}{-(y^2 + 2)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ -\frac{1}{2} \ln |y^2 + 2| &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ \ln |y^2 + 2| &= C - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \\ y^2 &= C e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Reikėtų atkreipti dėmesį, kad $y^2 \geqslant 0$ todėl nevisos C reikšmės bus tinkamos. Galime rasti mažiausią C reikšmę su kuria lygtis turės realių sprendinių:

$$\max_{x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]} e^{-2 \arcsin(\frac{x}{\sqrt{5}})} = e^{\pi} \tag{3}$$

tai

$$\begin{aligned} C e^{\pi} &\geqslant 2 \\ C &\geqslant 2 e^{-\pi} \end{aligned} \tag{4}$$

1.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$
\begin{aligned}
(y^2)' &= (Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} - 2)' \\
2yy' &= \frac{-2C}{\sqrt{5-x^2}}e^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} \\
yy' &= \frac{-C}{\sqrt{5-x^2}}e^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

tada

$$
\begin{aligned}
2 + y^2 + \sqrt{5-x^2}yy' &= 0 \\
2 + Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 + \sqrt{5-x^2}\frac{-C}{\sqrt{5-x^2}}e^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\
2 - 2 + Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} - Ce^{-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

1.3 Palyginimas

Sprendiniai palyginimui buvo rasti naudojant python programavimo kalbą su sympy paketu. Toliau pavaizduotas kodas naudotas rasti sprendinį:

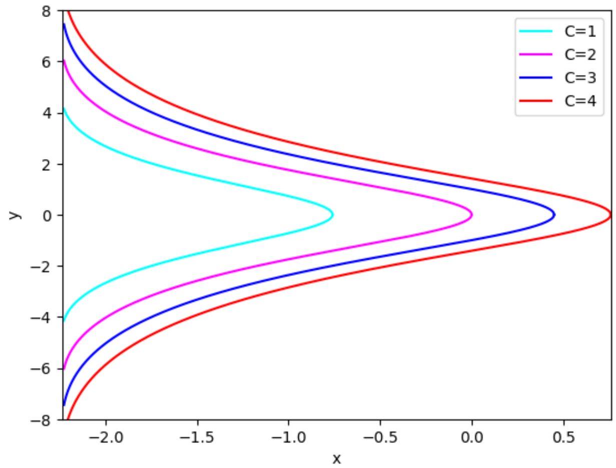
```python
from sympy import *
x = symbols('x')
y = Function('y')(x)
equation = Eq(2 + y**2 + y.diff(x) * y * sqrt(5 - x**2), 0)
solutions = dsolve(equation)
display(solutions[0], solutions[1])
```

Rastas sprendinys turi forma:

$$
y = \pm\sqrt{Ce^{-2\arcsin(\frac{\sqrt{5}x}{5})} - 2}
\tag{7}
$$

Akivaizdu, kad šis sprendinys ekvivalentus mūsų sprendiniui.

1.4 Integralinės kreivės



1 pav.: Lygties $2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' = 0$ integralinės kreivės, kai C reikšmė $1, 2, 3, 4$

Kodas, sugeneruojantis integralinių kreivių pavaizdavimą taip pat buvo parašytas su python programavimo kalba naudojantis numpy bei matplotlib paketais.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y(x, C):
    return np.sqrt(C * np.exp(-2 * np.arcsin(x / np.sqrt(5))) - 2)

cs = [ 1, 2, 3, 4 ]
colors = [ 'cyan', 'magenta', 'blue', 'red' ]

plt.xlim(-np.sqrt(5), np.sqrt(5) * np.sin(0.5 * np.log(2)))
plt.ylim(-8, 8)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

for c, color in zip(cs, colors):
    x_start = -np.sqrt(5) + 0.01
    x_end = np.sqrt(5) * np.sin(0.5 * np.log(c / 2))
    xs = np.linspace(x_start, x_end, 1000)
    ys = y(xs, c)
    plt.plot(xs, ys, color=color, label=f'C={c}')
    plt.plot(xs, -ys, color=color)
plt.legend()
```

2 Antras pratimas

Turime paprastąją pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$3x^3y' = y(3x^2 - y^2) \tag{8}$$

2.1 Sprendimas

Galime pastebėti, kad tai yra pirmos eilės homogeninė lygtis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 \tag{9}$$

Įvedame keitinį $u = \frac{y}{x}$ arba $y = ux$, tada $y' = u'x + u$ ir lygtis tampa:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u - \frac{1}{3}u^3 \\ u'x &= -\frac{1}{3}u^3 \\ \int \frac{du}{u^3} &= -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}, u \neq 0 \to y \neq 0 \\ \frac{u^{-2}}{-2} &= -\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|C| \\ u^{-2} &= \frac{2}{3}\ln|Cx| \end{aligned} \tag{10}$$

Gražinam keitinį:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{2}{3}\ln|Cx| \\ y^2 &= \frac{3x^2}{2\ln|Cx|}, C \neq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Dar galime pastebėti, kad išmestas sprendinys $y = 0$ tenkina pradinę lygtį.

2.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$\begin{aligned}(y^2)' &= \left(\frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\right)' \\ 2yy' &= \frac{3}{2}\left(\frac{2x\ln|x|-x}{\ln^2|Cx|}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Tikrinimą atliksime taip pat su "patogesne" lygties forma, padauginę abi puses iš y, tada:

$$\begin{aligned}3x^3yy' &= y^2(3x^2-y^2) \\ 3x^3\frac{3}{4}\left(\frac{2x\ln|x|-x}{\ln^2|Cx|}\right) &= \frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\left(3x^2-\frac{3x^2}{2\ln|Cx|}\right) \\ \frac{18x^4\ln|x|-9x^4}{4\ln^2|Cx|} &= \frac{9x^2}{2\ln|Cx|}-\frac{9x^2}{4\ln^2|Cx|} \\ \frac{18x^4\ln|x|-9x^4}{4\ln^2|Cx|} &\equiv \frac{18x^4\ln|x|-9x^4}{4\ln^2|Cx|}\end{aligned} \tag{13}$$

2.3 Palyginimas

Sprendiniai palyginimui buvo rasti naudojant python programavimo kalbą su sympy paketu. Toliau pavaizduotas kodas naudotas rasti sprendinį:

```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = Function('y')(x)
equation = Eq(3 * x**3 * y.diff(x), y * (3 * x**2 - y**2))
solutions = dsolve(equation)
display(solutions[0], solutions[1])
```

Rastas sprendinys turi išraiška:

$$y = \pm\sqrt{3}x\sqrt{\frac{1}{\widetilde{C}+2\ln(x)}} \tag{14}$$

Nors iš pirmo žvilgsnio sprendiniai atrodo skirtingi, nesunku parodyti, kad išraiškos apibudina tas pačias kreives. Svarbu pastebėti, kad C ir $\widetilde{C}$ reikšmės skirsis, tačiau nėra sunku surasti transformaciją iš vienos konstantos į kitą.

Pirmiausiai pertvarkome automatiškai gautą sprendinį į panašesnę formą:

$$y^2 = \left(\pm\sqrt{3}x\sqrt{\frac{1}{\widetilde{C}+2\ln(x)}}\right)^2 = \frac{3x^2}{\widetilde{C}+2\ln x} \tag{15}$$

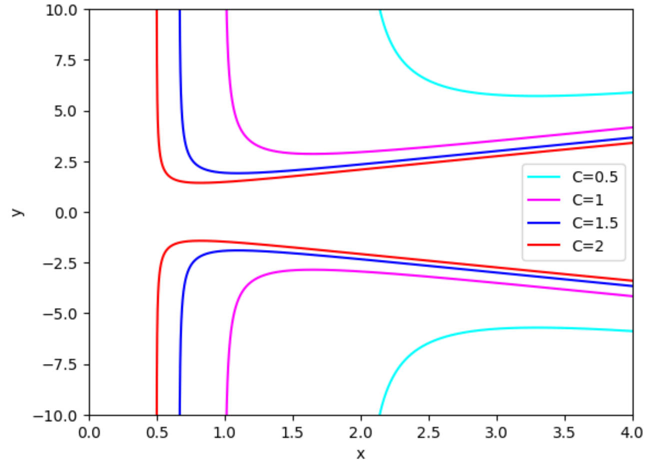
Galime pertvarkyti mūsų sprendinį į tokią pat formą:

$$y^2 = \frac{3x^2}{2\ln Cx} = \frac{3x^2}{2\ln C+2\ln x} \tag{16}$$

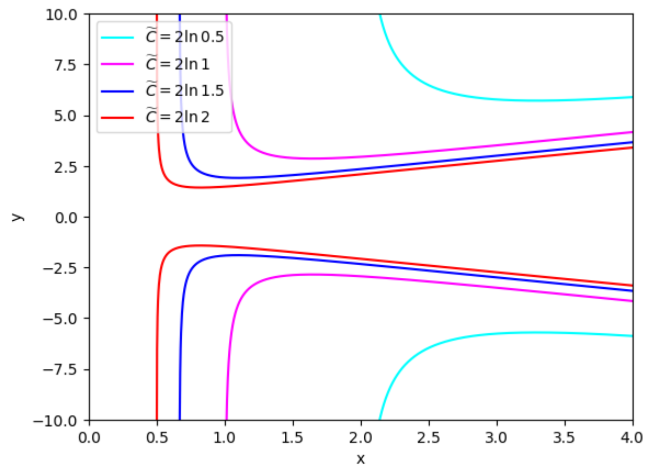
Iš čia matom, kad $\widetilde{C} = 2\ln C$

2.4 Integralinės kreivės

Lygties $3x^3y' = y(3x^2 - y^2)$ integralinės kreivės



2 pav.: Ranka gautas sprendinys



3 pav.: Sprendinys gautas su sympy

Kodas naudotas sugeneruoti pirmą paveikslėlį:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y(x, C):
    return np.sqrt(3/2 * x**2 / np.log(C * x))

cs = [ 0.5, 1, 1.5, 2 ]
colors = [ 'cyan', 'magenta', 'blue', 'red' ]

plt.xlim(0, 4)
plt.ylim(-10, 10)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

for c, color in zip(cs, colors):
    xs = np.linspace(1/c, 4, 10000)
    ys = y(xs, c)
    plt.plot(xs, ys, color=color, label=f'C={c}')
    plt.plot(xs, -ys, color=color)
plt.legend()
```

Kodas naudotas sugeneruoti antrą paveikslėlį:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

x = symbols('x')
y = Function('y')(x)
equation = Eq(3 * x**3 * y.diff(x), y * (3 * x**2 - y**2))
solutions = dsolve(equation)

cs = [ 0.5, 1, 1.5, 2 ]
colors = [ 'cyan', 'magenta', 'blue', 'red' ]

plt.xlim(0, 4)
plt.ylim(-10, 10)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

for c, color in zip(cs, colors):
    adjusted_c = 2 * np.log(c)
    xs = np.linspace(1/c+0.001, 4, 1000)
    sol = solutions[0].rhs.subs('C1', adjusted_c)
    ys = np.array([ sol.subs(x, xi).evalf() for xi in xs ])
    plt.plot(xs, ys, color=color, label=f'$\widetilde{{C}}=2\ln {c}$')
    plt.plot(xs, -ys, color=color)
plt.legend()
```

3 Trečias pratimas

3.1 Sprendimas

$$\begin{cases} y' + 2y = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Pirma sprendžiame homogeninį atvejį:

$$y' + 2y = 0 \tag{18}$$

Lygtis yra tiesinė, homogeninė ir su pastoviais koeficientais, todėl galime formuoti charakteringąją lygtį:

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \tag{19}$$

Tada bendrasis homogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = Ce^{-2x} \tag{20}$$

Nehomogeninį variantą sprendžiame konstantų variavimo metodu, darydami prielaidą, kad nehomogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = C(x)e^{-2x} \tag{21}$$

Tada

$$\begin{aligned}
(Ce^{-2x})' + 2Ce^{-2x} &= x \\
C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} &= x \\
C'e^{-2x} &= x \\
C' &= xe^{2x} \\
C &= \int xe^{2x}dx \\
C &= \frac{1}{2}\int xd(e^{2x}) \\
C &= \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \int e^{2x}dx\right) \\
C &= \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + \widetilde{C} \\
C(x) &= e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + \widetilde{C}
\end{aligned} \tag{22}$$

Gauname bendrąjį ir atskirąjį sprendinius:

$$y = C(x)e^{-2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x}, \widetilde{C} \in \mathbb{R} \tag{23}$$

3.2 Tikrinimas

Išvestinė:

$$y' = \frac{1}{2} - 2\widetilde{C}e^{-2x} \tag{24}$$

Tikriname:

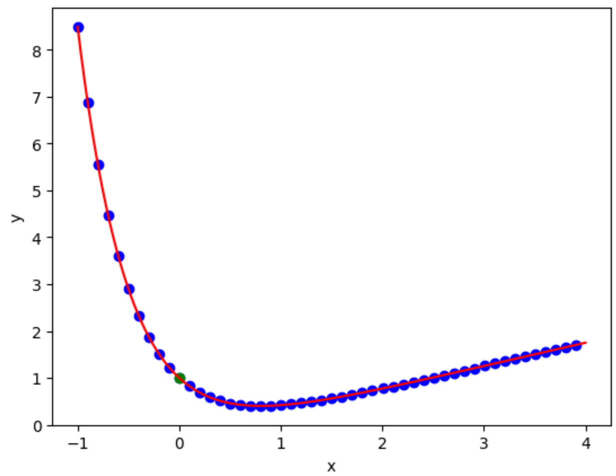
$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x}\right)' + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2x}\right) &= x \\ \frac{1}{2} - 2\widetilde{C}e^{-2x} + x - \frac{1}{2} + 2\widetilde{C}e^{-2x} &= x \\ x &\equiv x \end{aligned} \tag{25}$$

Koši sprendinys:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) \\ 1 &= \frac{0}{2} - \frac{1}{4} + \widetilde{C}e^{-2*0} \\ 1 &= \widetilde{C} - \frac{1}{4} \\ \widetilde{C} &= \frac{5}{4} \\ y(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x} \end{aligned} \tag{26}$$

3.3 Palyginimas

Raudona linija vaizduoja analitinį sprendinį. Melyni taškai vaizduoja sprendinį gautą naudojant skaitinius metodus. Žalias taškas žymi pradinę sąlygą $y(0) = 1$.



4 pav.: Koši sprendinys