

Pirmas laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 20 d.

1 Pirmas pratimas

Turime paprastą pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' = 0$$

1.1 Sprendimas

Kintamieji atsiskiria atlikus porą elementarių pertvarkymų:

$$\begin{aligned}\sqrt{5 - x^2}y \frac{dy}{dx} &= -(y^2 + 2) \\ \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}\end{aligned}\tag{1}$$

Integruojame:

$$\begin{aligned}\int \frac{ydy}{-(y^2 + 2)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ -\frac{1}{2} \ln |y^2 + 2| &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C \\ \ln |y^2 + 2| &= C - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \\ y^2 &= Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2\end{aligned}\tag{2}$$

Reikėtų atkreipti dėmesį, kad $y^2 \geq 0$ todėl nevisos C reikšmės bus tinkamos. Galime rasti mažiausią C reikšmę su kuria lygtis turės realių sprendinių:

$$\max_{x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]} e^{-2 \arcsin(\frac{x}{\sqrt{5}})} = e^\pi\tag{3}$$

tai

$$\begin{aligned}Ce^\pi &\geq 2 \\ C &\geq 2e^{-\pi}\end{aligned}\tag{4}$$

1.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$\begin{aligned}(y^2)' &= (Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2)' \\ 2yy' &= \frac{-2C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} \\ yy' &= \frac{-C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}}\end{aligned}\tag{5}$$

tada

$$\begin{aligned}2 + y^2 + \sqrt{5-x^2}yy' &= 0 \\ 2 + Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - 2 + \sqrt{5-x^2} \frac{-C}{\sqrt{5-x^2}} e^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\ 2 - 2 + Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} - Ce^{-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}} &= 0 \\ 0 &\equiv 0\end{aligned}\tag{6}$$

1.3 Palyginimas

Sprendiniai palyginimui buvo rasti naudojant python programavimo kalbą su sympy paketu. Toliau pavaizduotas kodas naudotas rasti sprendinį:

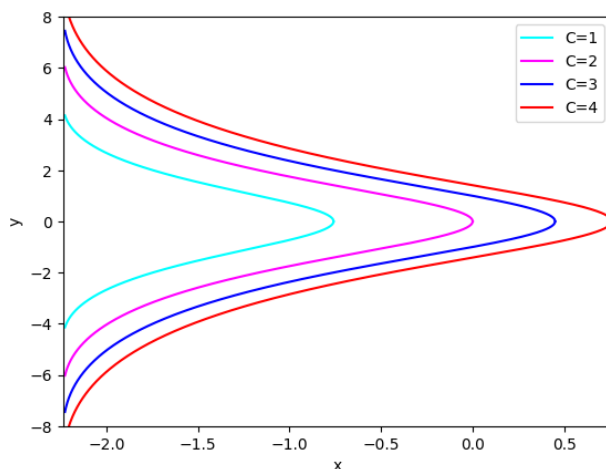
```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = Function('y')(x)
equation = Eq(2 + y**2 + y.diff(x) * y * sqrt(5 - x**2), 0)
solutions = dsolve(equation)
display(solutions[0], solutions[1])
```

Rastas sprendinys turi forma:

$$y = \pm \sqrt{Ce^{-2 \arcsin(\frac{\sqrt{5}x}{5})} - 2}\tag{7}$$

Akivaizdu, kad šis sprendinys ekvivalentus mūsų sprendiniui.

1.4 Integralinės kreivės



1 pav.: Lygties $2 + y^2 + \sqrt{5 - x^2}yy' = 0$ integralinės kreivės, kai C reikšmė 1, 2, 3, 4

Kodas, sugeneruojantis integralinių kreivių pavaizdavimą taip pat buvo parašytas su python programavimo kalba naudojantis numpy bei matplotlib paketais.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y(x, C):
    return np.sqrt(C * np.exp(-2 * np.arcsin(x / np.sqrt(5)))) - 2

cs = [ 1, 2, 3, 4 ]
colors = [ 'cyan', 'magenta', 'blue', 'red' ]

plt.xlim(-np.sqrt(5), np.sqrt(5) * np.sin(0.5 * np.log(2)))
plt.ylim(-8, 8)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

for c, color in zip(cs, colors):
    x_start = -np.sqrt(5) + 0.01
    x_end = np.sqrt(5) * np.sin(0.5 * np.log(c / 2))
    xs = np.linspace(x_start, x_end, 1000)
    ys = y(xs, c)
    plt.plot(xs, ys, color=color, label=f'C={c}')
    plt.plot(xs, -ys, color=color)
plt.legend()
```

2 Antras pratimas

Turime paprastą pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$3x^3y' = y(3x^2 - y^2) \quad (8)$$

2.1 Sprendimas

Galime pastebėti, kad tai yra pirmos eilės homogeninė lygtis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 \quad (9)$$

Įvedame keitinį $u = \frac{y}{x}$ arba $y = ux$, tada $y' = u'x + u$ ir lygtis tampa:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u - \frac{1}{3}u^3 \\ u'x &= -\frac{1}{3}u^3 \\ \int \frac{du}{u^3} &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x}, u \neq 0 \rightarrow y \neq 0 \\ \frac{u^{-2}}{-2} &= -\frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|C| \\ u^{-2} &= \frac{2}{3} \ln|Cx| \end{aligned} \quad (10)$$

Gražinam keitinį:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{2}{3} \ln|Cx| \\ y^2 &= \frac{3x^2}{2 \ln|Cx|}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (11)$$

Dar galime pastebėti, kad išmestas sprendinys $y = 0$ tenkina pradinę lygtį.

2.2 Tikrinimas

Prieš tikrindami randame išvestinę "patogesnėje" išraiškoje:

$$\begin{aligned} (y^2)' &= \left(\frac{3x^2}{2 \ln|Cx|} \right)' \\ 2yy' &= \frac{3}{2} \left(\frac{2x \ln|x| - x}{\ln^2|Cx|} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Tikrinimą atliksime taip pat su "patogesne" lygties forma, padauginę abi puses iš y , tada:

$$\begin{aligned}
 3x^3yy' &= y^2(3x^2 - y^2) \\
 3x^3 \frac{3}{4} \left(\frac{2x \ln|x| - x}{\ln^2|Cx|} \right) &= \frac{3x^2}{2 \ln|Cx|} \left(3x^2 - \frac{3x^2}{2 \ln|Cx|} \right) \\
 \frac{18x^4 \ln|x| - 9x^4}{4 \ln^2|Cx|} &= \frac{9x^2}{2 \ln|Cx|} - \frac{9x^2}{4 \ln^2|Cx|} \\
 \frac{18x^4 \ln|x| - 9x^4}{4 \ln^2|Cx|} &\equiv \frac{18x^4 \ln|x| - 9x^4}{4 \ln^2|Cx|}
 \end{aligned} \tag{13}$$

2.3 Palyginimas

Sprendiniai palyginimui buvo rasti naudojant python programavimo kalbą su sympy paketu. Toliau pavaizduotas kodas naudotas rasti sprendinį:

```

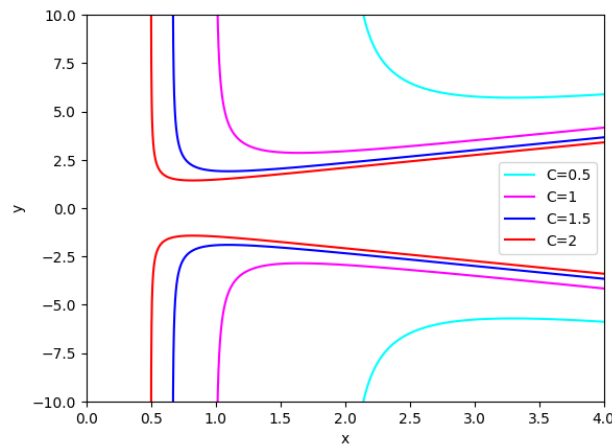
from sympy import *
x = symbols('x')
y = Function('y')(x)
equation = Eq(3 * x**3 * y.diff(x), y * (3 * x**2 - y**2))
solutions = dsolve(equation)
display(solutions[0], solutions[1])

```

Rastas sprendinys turi išraišką:

$$y = \pm \sqrt{3}x \sqrt{\frac{1}{C + 2 \ln(x)}} \tag{14}$$

Nors iš pirmo žvilgsnio sprendiniai atrodo skirtingi, nesunku parodyti, kad išraiškos yra ekvivalenčios. Taip pat jų vienodumą galima įžvelgti žiūrint į integralines kreives:



2 pav.: Lygties $3x^3y' = y(3x^2 - y^2)$ integralinės kreivės, kai C reikšmės 0.5, 1, 1.5, 2

3 Trečias pratimas

3.1 Sprendimas

$$\begin{cases} y' + 2y = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Pirma sprendžiame homogeninį atvejį:

$$y' + 2y = 0 \quad (16)$$

Lygtis yra tiesinė, homogeninė ir su pastoviais koeficientais, todėl galime formuoti charakteringą lygtį:

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad (17)$$

Tada bendrasis homogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = Ce^{-2x} \quad (18)$$

Nehomogeninį variantą sprendžiame konstantų variavimo metodu, darydami prielaidą, kad nehomogeninės lygties sprendinys turės formą:

$$y = C(x)e^{-2x} \quad (19)$$

Tada

$$\begin{aligned} (Ce^{-2x})' + 2Ce^{-2x} &= x \\ C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} &= x \\ C'e^{-2x} &= x \\ C' &= xe^{2x} \\ C &= \int xe^{2x} dx \\ C &= \frac{1}{2} \int x d(e^{2x}) \\ C &= \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \int e^{2x} dx \right) \\ C &= \frac{1}{2} \left(xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) + \tilde{C} \\ C(x) &= e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + \tilde{C} \end{aligned} \quad (20)$$

Gauname bendrąjį ir atskirąjį sprendinius:

$$y = C(x)e^{-2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}, \tilde{C} \in \mathbb{R} \quad (21)$$

3.2 Tikrinimas

Išvestinė:

$$y' = \frac{1}{2} - 2\tilde{C}e^{-2x} \quad (22)$$

Tikriname:

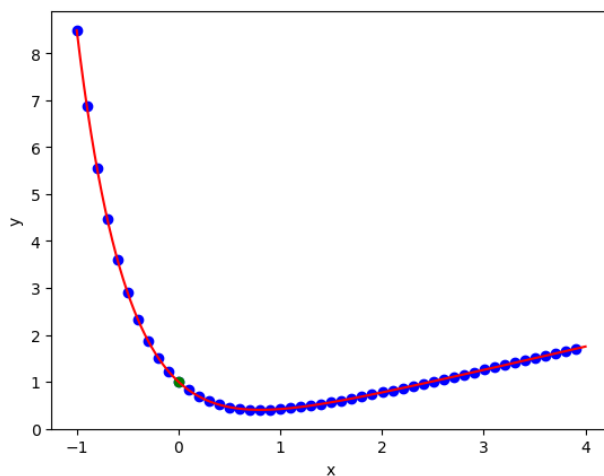
$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}\right)' + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2x}\right) &= x \\ \frac{1}{2} - 2\tilde{C}e^{-2x} + x - \frac{1}{2} + 2\tilde{C}e^{-2x} &= x \\ x &\equiv x \end{aligned} \quad (23)$$

Koši sprendinys:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) \\ 1 &= \frac{0}{2} - \frac{1}{4} + \tilde{C}e^{-2 \cdot 0} \\ 1 &= \tilde{C} - \frac{1}{4} \\ \tilde{C} &= \frac{5}{4} \\ y(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x} \end{aligned} \quad (24)$$

3.3 Palyginimas

Raudona linija vaizduoja analitinį sprendinį. Melynai taškai vaizduoja sprendinį gautą naudojant skaitinius metodus. Žalias taškas žymi pradinę sąlygą $y(0) = 1$.



3 pav.: Koši sprendinys