

Trečias laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 28 d.

1 Analitinis sprendimas

Turime antros eilės tiesinę nehomogeninę lygtį.

$$x'' + 9x = 4\sin(t) - \cos(4t) \quad (1)$$

Pirmiausia spęsimė homogeninę atvejį norint gauti bendrąjį sprendinį:

$$x'' + 9x = 0 \quad (2)$$

Lygtis (2) turi pastovius koeficientus, todėl galime formuoti charakteringąjį polinomą

$$\lambda^2 + 9 = 0 \implies \lambda = \pm 3i$$

Šiuo atveju bendrasis sprendinys $x_B(t)$ turės formą

$$x_B(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t) \quad (3)$$

Nehomogeninę lygtį (1) spęsimė konstantų variavimo metodu, todėl:

$$x(t) = C_1(t) \sin(3t) + C_2(t) \cos(3t) \quad (4)$$

Pagal variavimo metodą, darome prielaidą, kad

$$C_1' \sin(3t) + C_2' \cos(3t) = 0 \quad (5)$$

Prieš įstatant varijuotą bendrąjį sprendinį (4) apskaičiuosime x'' ir $x'' + 9x$:

$$\begin{aligned} x'' &= (C_1' \sin(3t) + 3C_1 \cos(3t) + C_2' \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t))' \\ &= \underbrace{(C_1' \sin(3t) + C_2' \cos(3t))}_0 + 3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t) \\ &= (3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t))' \\ &= 3C_1' \cos(3t) - 9C_1 \sin(3t) - 3C_2' \sin(3t) - 9C_2 \cos(3t) \end{aligned}$$

tada

$$\begin{aligned} x'' + 9x &= 3C_1' \cos(3t) - 9C_1 \sin(3t) - 3C_2' \sin(3t) - 9C_2 \cos(3t) + 9C_1 \sin(3t) + 9C_2 \cos(3t) \\ &= 3C_1' \cos(3t) - 3C_2' \sin(3t) \end{aligned}$$

Taigi, dabar sprendžiame lygtį

$$3C_1' \cos(3t) - 3C_2' \sin(3t) = 4 \sin(t) - \cos(4t) \quad (6)$$

Iš prielaidos (5) galime išsireikšti $C_1' = -C_2' \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)}$ ir įsistatyti į (6)

$$\begin{aligned} -3C_2' \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)} \cos(3t) - 3C_2' \sin(3t) &= 4 \sin(t) - \cos(4t) \\ -3C_2' \left(\frac{\cos^2(3t)}{\sin(3t)} + \frac{\sin^2(3t)}{\sin(3t)} \right) &= 4 \sin(t) - \cos(4t) \\ -\frac{3}{\sin(3t)} C_2' &= 4 \sin(t) - \cos(4t) \\ C_2' &= \frac{1}{3} \cos(4t) \sin(3t) - \frac{4}{3} \sin(t) \sin(3t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \int \cos(4t) \sin(3t) dt - \frac{4}{3} \int \sin(t) \sin(3t) dt \quad (8)$$

Šiuos integralus išspręsimė atskirai. Pradėsime nuo antro; naudodamiesi tapatybe $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ galime suprastinti integralą:

$$\begin{aligned} &\int \sin(3t) \sin(t) dt \\ &\frac{1}{2} \int (\cos(2t) - \cos(4t)) dt \\ &\frac{1}{4} \int \cos(2t) d(2t) - \frac{1}{8} \int \cos(4t) d(4t) \\ &\frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{8} \sin(4t) \\ &\frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) - \frac{1}{4} \sin(2t) \cos(2t) \\ &\frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ &\frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) (1 - \cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &\frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) (\sin^2(t) + \cos^2(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &\sin^3(t) \cos(t) \end{aligned}$$

Naudodami tapatybę $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ galime išspręsti pirmąjį integralą:

$$\begin{aligned} &\int \sin(3t) \cos(4t) dt \\ &\frac{1}{2} \int (\sin(-t) + \sin(7t)) dt \\ &-\frac{1}{2} \int \sin(t) dt + \frac{1}{14} \int \sin(7t) d(7t) \\ &-\frac{1}{2} \int \sin(t) dt + \frac{1}{14} \int \sin(7t) d(7t) \\ &\frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{14} \cos(7t) \end{aligned}$$

Galiausiai įsistatome gautas išraiškas atgal į (8) ir gauname $C_2(t)$:

$$C_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{14} \cos(7t) \right) - \frac{4}{3} \sin^3(t) \cos(t) + \tilde{C}_2$$

$$C_2(t) = \frac{1}{6} \cos(t) - \frac{1}{42} \cos(7t) - \frac{4}{3} \sin^3(t) \cos(t) + \tilde{C}_2$$

Norint rasti $C_1(t)$ galim įstatyti (7) į jau minėtą formulę $C_1' = -C_2' \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)}$:

$$C_1' = -\frac{\cos(3t)}{\sin(3t)} \left(\frac{1}{3} \cos(4t) \sin(3t) - \frac{4}{3} \sin(t) \sin(3t) \right)$$

$$C_1' = \frac{4}{3} \sin(t) \cos(3t) - \frac{1}{3} \cos(4t) \cos(3t) \quad (9)$$

$$C_1 = \frac{4}{3} \int \sin(t) \cos(3t) dt - \frac{1}{3} \int \cos(4t) \cos(3t) dt \quad (10)$$

Šiuos integralus taip pat išspręsimė atskirai. Šį kart pradėsime nuo pirmojo. Čia dar kartą galime pritaikyti tapatybę $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

$$\int \sin(t) \cos(3t) dt$$

$$\frac{1}{2} \int (\sin(-2t) + \sin(4t)) dt$$

$$-\frac{1}{4} \int \sin(2t) d(2t) + \frac{1}{8} \int \sin(4t) d(4t)$$

$$\frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{8} \cos(4t)$$

Antrajam integralui išspręsti galime panaudoti dar vieną tapatybę:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

tada

$$\int \cos(4t) \cos(3t) dt = \frac{1}{2} \int (\cos(t) + \cos(7t)) dt = \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{14} \sin(7t)$$

Viską įstatę atgal į (8) gauname, kad

$$C_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{8} \cos(4t) \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{14} \sin(7t) \right) + \tilde{C}_1$$

$$C_1(t) = \frac{1}{3} \cos(2t) - \frac{1}{6} \cos(4t) - \frac{1}{6} \sin(t) - \frac{1}{42} \sin(7t) + \tilde{C}_1$$

Galiausiai nehomogeninės lygties (1) analitinis sprendinys yra

$$x(t) = \left(\frac{\cos(2t)}{3} - \frac{\cos(4t)}{6} - \frac{\sin(t)}{6} - \frac{\sin(7t)}{42} + \tilde{C}_1 \right) \sin(3t) \quad (11)$$

$$+ \left(\frac{\cos(t)}{6} - \frac{\cos(7t)}{42} - \frac{4 \sin^3(t) \cos(t)}{3} + \tilde{C}_2 \right) \cos(3t) \quad (12)$$