Trečias laboratorinis darbas

Arnas Vaicekauskas

2024 m. rugsėjo 29 d.

1 Analitinis sprendimas

Turime antros eilės tiesinę nehomogeninę lygtį su pradinėmis sąlygomis:

$$x'' + 9x = 4\sin(t) - \cos(4t) \tag{1}$$
$$x(0) = 0 \tag{2}$$
$$x'(0) = 1 \tag{3}$$

Pirmiausia spręsime homogeninį atvejį norint gauti bendrąjį sprendinį:

$$x'' + 9x = 0 \tag{4}$$

Lygtis (4) turi pastovius koeficientus, todėl galime formuoti charakteringąjį polinomą

$$\lambda^2 + 9 = 0 \implies \lambda = \pm 3i$$

Šiuo atveju bendrasis sprendinys $x_B(t)$ turės formą

$$x_B(t) = C_1 e^{3it} + C_2 e^{-3it} \tag{5}$$

Nehomogeninę lygtį (1) spręsime konstantų variavimo metodu, todėl:

$$x(t) = C_1(t) e^{3it} + C_2(t) e^{-3it} \tag{6}$$

Pagal variavimo metodą, darome prielaidą, kad

$$C_1' e^{3it} + C_2' e^{-3it} = 0 \tag{7}$$

Prieš įstatant varijuotą bendrąjį sprendinį (6) apskaičiuosime x'' ir $x'' + 9x$:

$$\begin{aligned} x'' &= (C_1' e^{3it} + 3iC_1 e^{3it} + C_2' e^{-3it} - 3iC_2 e^{-3it})' \\ &= (\underbrace{C_1' e^{3it} + C_2' e^{-3it}}_{0} + 3iC_1 e^{3it} - 3iC_2 e^{-3it})' \\ &= (3iC_1 e^{3it} - 3iC_2 e^{-3it})' \\ &= 3iC_1' e^{3it} - 9C_1 e^{3it} - 3iC_2' e^{-3it} - 9C_2 e^{-3it} \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} x'' + 9x &= 3iC_1' e^{3it} - 9C_1 e^{3it} - 3iC_2' e^{-3it} - 9C_2 e^{-3it} + 9C_1 e^{3it} + 9C_2 e^{-3it} \\ &= 3iC_1' e^{3it} - 3iC_2' e^{-3it} \end{aligned}$$

Taigi, dabar sprendžiame lygtį

$$3iC_1' e^{3it} - 3iC_2' e^{-3it} = 4\sin(t) - \cos(4t) \tag{8}$$

Naudodami tapatybes $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\frac{1}{i} = -i$ galime pertvarkyti lygtį (8)

$$3iC_1'e^{3it} - 3iC_2'e^{-3it} = 4\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} - \frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}$$
$$3iC_1'e^{3it} - 3iC_2'e^{-3it} = \frac{2e^{it}}{i} - \frac{2e^{-it}}{i} - \frac{e^{4it}}{2} - \frac{e^{-4it}}{2}$$
$$3iC_1'e^{3it} - 3iC_2'e^{-3it} = -2ie^{it} + 2ie^{-it} - \frac{e^{4it}}{2} - \frac{e^{-4it}}{2} \tag{9}$$

Iš prielaidos (7) galime išsireikšti C_2'

$$C_2' = -C_1'e^{6it} \tag{10}$$

Tuomet įstatome lygties (10) dešinę pusę į lygtį (9)

$$3iC_1'e^{3it} + 3iC_1'e^{6it}e^{-3it} = -2ie^{it} + 2ie^{-it} - \frac{e^{4it}}{2} - \frac{e^{-4it}}{2}$$
$$6iC_1'e^{3it} = -2ie^{it} + 2ie^{-it} - \frac{e^{4it}}{2} - \frac{e^{-4it}}{2}$$
$$C_1' = \frac{e^{-3it}}{6i}\left(-2ie^{it} + 2ie^{-it} - \frac{e^{4it}}{2} - \frac{e^{-4it}}{2}\right)$$
$$C_1' = -\frac{e^{-2it}}{3} + \frac{e^{-4it}}{3} - \frac{e^{it}}{12i} - \frac{e^{-7it}}{12i} \tag{11}$$
$$C_1 = \int\left(-\frac{e^{-2it}}{3} + \frac{e^{-4it}}{3} - \frac{e^{it}}{12i} - \frac{e^{-7it}}{12i}\right)dt$$
$$C_1 = -\frac{1}{-2i}\frac{e^{-2it}}{3} + \frac{1}{-4i}\frac{e^{-4it}}{3} - \frac{1}{i}\frac{e^{it}}{12i} - \frac{1}{-7i}\frac{e^{-7it}}{12i} + \tilde{C}_1$$
$$C_1(t) = \frac{e^{-2it}}{6i} - \frac{e^{-4it}}{12i} + \frac{e^{it}}{12} - \frac{e^{-7it}}{84} + \tilde{C}_1 \tag{12}$$

Į lygtį (10) įstate (11) gauname C_2' ir integrave gauname C_2:

$$C_2' = -e^{6it}C_1'$$
$$C_2' = -e^{6it}\left(-\frac{e^{-2it}}{3} + \frac{e^{-4it}}{3} - \frac{e^{it}}{12i} - \frac{e^{-7it}}{12i}\right)$$
$$C_2' = \frac{e^{4it}}{3} - \frac{e^{2it}}{3} + \frac{e^{7it}}{12i} + \frac{e^{-it}}{12i} \tag{13}$$
$$C_2 = \int\left(\frac{e^{4it}}{3} - \frac{e^{2it}}{3} + \frac{e^{7it}}{12i} + \frac{e^{-it}}{12i}\right)dt$$
$$C_2 = \frac{1}{4i}\frac{e^{4it}}{3} - \frac{1}{2i}\frac{e^{2it}}{3} + \frac{1}{7i}\frac{e^{7it}}{12i} + \frac{1}{-i}\frac{e^{-it}}{12i} + \tilde{C}_2$$
$$C_2 = \frac{e^{4it}}{12i} - \frac{e^{2it}}{6i} - \frac{e^{7it}}{84} + \frac{e^{-it}}{12} + \tilde{C}_2 \tag{14}$$

Nehomogeninės lygties sprendinys tada bus:

$$x(t) = \left(\frac{e^{-2it}}{6i} - \frac{e^{-4it}}{12i} + \frac{e^{it}}{12} - \frac{e^{-7it}}{84} + \tilde{C}_1\right)e^{3it} + \left(\frac{e^{4it}}{12i} - \frac{e^{2it}}{6i} - \frac{e^{7it}}{84} + \frac{e^{-it}}{12} + \tilde{C}_2\right)e^{-3it}$$
$$x(t) = \frac{e^{it}}{6i} - \frac{e^{-it}}{12i} + \frac{e^{4it}}{12} - \frac{e^{-4it}}{84} + \tilde{C}_1e^{3it} + \frac{e^{it}}{12i} - \frac{e^{-it}}{6i} - \frac{e^{4it}}{84} + \frac{e^{-4it}}{12} + \tilde{C}_2e^{-3it}$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + \frac{1}{7}\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2} + \tilde{C}_1\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} + \tilde{C}_2\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}$$
$$x(t) = \frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{7} + \tilde{C}_1\sin(3t) + \tilde{C}_2\cos(3t) \tag{15}$$

Randame Koši sprendinį įstatant pradines sąlygas (2) ir (3) į lygtį (15):

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0 \\
\frac{0}{2} + \frac{\cos(0)}{7} + \tilde{C_1}\sin(0) + \tilde{C_2}\cos(0) &= 0 \\
\frac{1}{7} + \tilde{C_2} &= 0 \\
\tilde{C_2} &= -\frac{1}{7} \\
x'(0) &= 1 \\
\left(\frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{7} + \tilde{C_1}\sin(3t) - \frac{1}{7}\cos(3t)\right)'\bigg|_{x=0} &= 1 \\
\left(-\frac{\cos(t)}{2} - 4\frac{\sin(4t)}{7} + 3\tilde{C_1}\cos(3t) + \frac{3}{7}\sin(3t)\right)\bigg|_{x=0} &= 1 \\
\frac{\cos(0)}{2} - 4\frac{\sin(0)}{7} + 3\tilde{C_1}\cos(0) + \frac{3}{7}\sin(0) &= 1 \\
\frac{1}{2} + 3\tilde{C_1} &= 1 \\
\tilde{C_1} &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Koši sprendinys:

$$x(t) = \frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{7} + \frac{\sin(3t)}{6} - \frac{\cos(3t)}{7} \tag{16}$$

Kai $t \to +\infty$ sprendinys $x(t)$ nekonverguoja, nes trigonometrinių funkcijų svyravimas nėra slopinamas, t.y. riba neegzistuoja.

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = DNE$$

Koši sprendinio svyravimų periodą galima rasti pažvelgus į individualiu sprendinio dėmenų svyravimo periodus.

$$
\begin{aligned}
\sin(t) &\implies T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \\
\sin(3t) &\implies T = \frac{2\pi}{3} \\
\cos(3t) &\implies T = \frac{2\pi}{3} \\
\cos(4t) &\implies T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Individualių sprendinio dėmenų svyravimų periodų mažiausias bendras kartotinis yra 2π, todėl ir $x(t)$ svyravimo periodas yra $T = 2\pi$. Analitinis sprendinio amplitudės radimas yra už šio darbo apimties, todėl pateiktos reikšmės buvo rastos naudojant skaitinius metodus.

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} x(t) \approx -0.7252871753033927$$

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} x(t) \approx 0.537908854609837$$

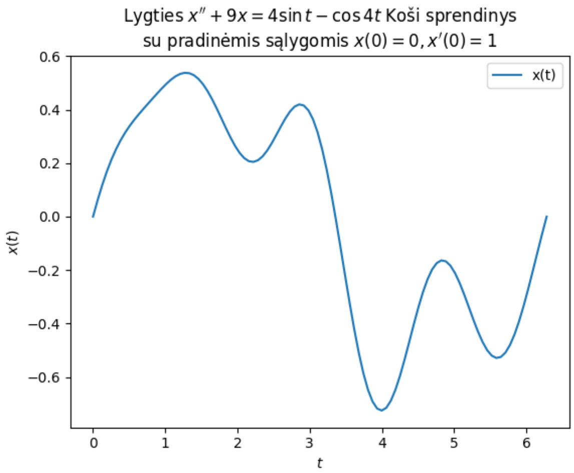
2 Palyginimas su programos sprendiniu

Programa rasti lygties (1) sprendiniui buvo rašyta su python programavimo kalba bei sympy paketu. Programa rastas sprendinys

$$x(t) = \frac{\sin(t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{6} - \frac{\cos(3t)}{7} + \frac{\cos(4t)}{7} \tag{17}$$

Yra akivaizdu, kad analitiškai ir programa gauti sprendiniai yra ekvivalentūs.

3 Sprendinio grafikas



1 pav.: Lygties (1) Koši sprendinys

4 Priedai

Kodas naudotas rasti lygties (1) Koši sprendinį su pradinėmis sąlygomis (2) ir (3)

```
from sympy import *
t = symbols('t')
x = Function('x')(t)
equation = Eq(x.diff(t, 2) + 9*x, 4 * sin(t) - cos(4 * t))
general_solution = dsolve(equation, x).rhs
conditions = [
    Eq(general_solution.subs(t, 0), 0),
    Eq(general_solution.diff(t).subs(t, 0), 1)
]
C_values = solve(conditions, symbols("C1, C2"))
general_solution.subs(C_values)
```

Kodas naudotas pavaizduoti Koši sprendinį (16)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def x(t):
    return np.sin(t)/2 + np.cos(4*t)/7+np.sin(3*t)/6-np.cos(3*t)/7
ts = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
title ="""Lygties $x''+9x=4\sin t-\cos 4t$ šKoi sprendinys
su ėpradinmis ąslygomis $x(0)=0, x'(0)=1$"""
plt.title(title)
plt.plot(ts, x(ts), label='x(t)')
plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$x(t)$')
plt.legend()
```

Kodas naudotas rasti Koši sprendinio (16) svyravimo amplitudę

```
import numpy as np
def x(t):
    return np.sin(t)/2 + np.cos(4*t)/7+np.sin(3*t)/6-np.cos(3*t)/7
ts = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)
xs = x(ts)
np.min(xs), np.max(xs)
```