



VILNIAUS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS  
INFORMATIKOS INSTITUTAS  
KOMPIUTERINIO IR DUOMENŲ MODELIAVIMO KATEDRA

Signalų analizės pirmas projektinis darbas

## **Rekurentinės diagramos, algortimo parametru analizė**

Atliko:

Arnas Vaicekauskas

parašas

Vadovas:

Vilnius  
2026

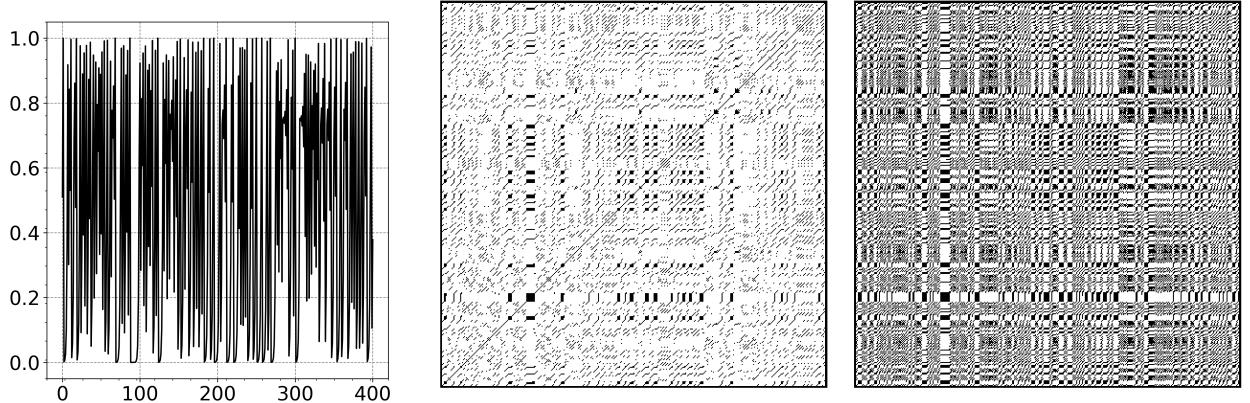
## Turinys

1. Signalų sąrašas .....	3
2. Logistinis atvaizdis .....	3
3. Įmonės „Apple Inc.“ akcijų kaina .....	4
4. Plaučių garsas .....	5
5. Elektros energijos kiekis suvartojoamas Lietuvoje .....	6
6. Oro kokybė .....	8
7. Išvados .....	9
Literatūros šaltiniai .....	10
Priedai .....	11

## 1. Signalų sąrašas

1. Logistinis atvaizdis [1]
2. Įmonės „Apple Inc.“ akcijų kainos svyravymai [2]
3. Klinikinio manekeno plaučių garso įrašas pro stetoskopą [3]
4. Lietuvoje suvartojamas elektros energijos kiekis [4]
5. Sensoriaus duomenys apie anglies monoksido koncentracija ore nuo 1970 iki 1995 [5]

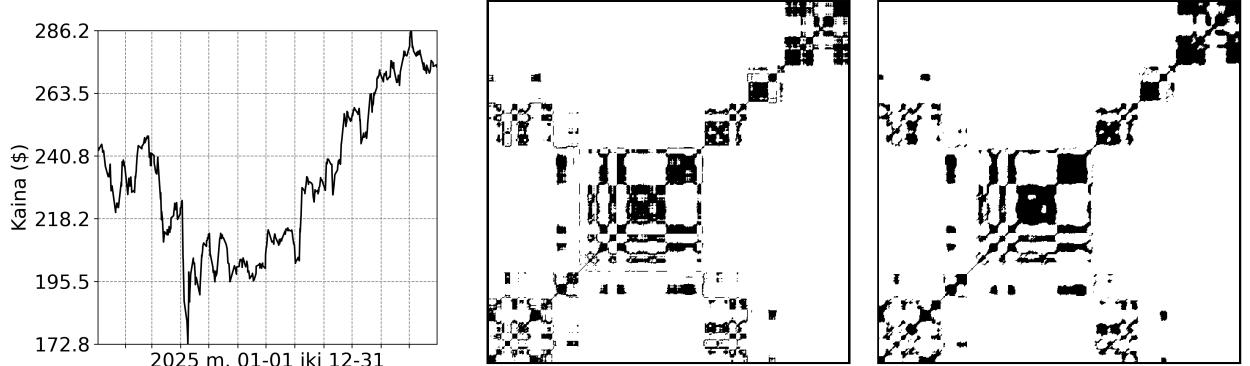
## 2. Logistinis atvaizdis



1 pav. Logistinio atvaizdžio  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ ,  $x_0 = 0.51$  chaotinis signalas (kairėje) ir jo rekurentinės diagramos su parametrais  $r = 0.1$  (centre),  $r = 0.5$  (dešinėje). Signalo imčių skaičius  $N = 400$ .

1 pav. pateiktas logistinio atvaizdžio signalas yra skirtas parodymui, kad rekurentinių diagramų algoritmas yra įgyvendintas korektiškai. Šiuos rezultatus reikėtų lyginti su kurso medžiagoje [1] pateiktomis logistinio atvaizdžio rekurentinėmis diagramomis su tokiais pačiais parametrais. Kaip pažymėta kurso medžiagoje, trumpos atkarpos paralelios centrinei linijai sufleruoja, kad signale yra periodų. Iš trumpo įstrižų linijų ilgio galime spręsti, kad periodiškumas signale išsilaido labai trumpai, o maži tarpai tarp šių linijų rodo, kad periodo ilgis signale labai trumpas.

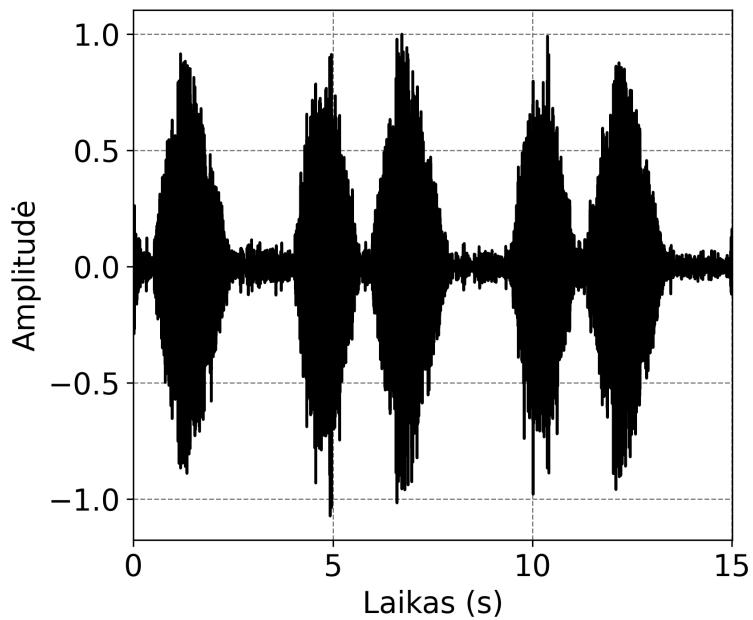
### 3. Įmonės „Apple Inc.“ akcijų kaina



2 pav. „Apple Inc.“ akcijų kainos svyravimai 2025 m. Duomenys gauti naudojant yfinance python paketą [2]. Rekurentinės diagramos gautos su parametrais  $p = 0.1, d = 1$ , kur  $p$  yra vartotojo pasirinktas juodų taškų procentas diagramoje. Diagramoms gauti naudota Euklidinė norma. Centrinės diagramos parametras  $D = 1$ , o esančios dešinėje  $D = 5$ . Signalio imčių skaičius  $N = 494$  su 4 val. tarpais (neskaitant laiko, kada akcijų birža nedirba). Duomenys papildomai apdoroti nebuvo.

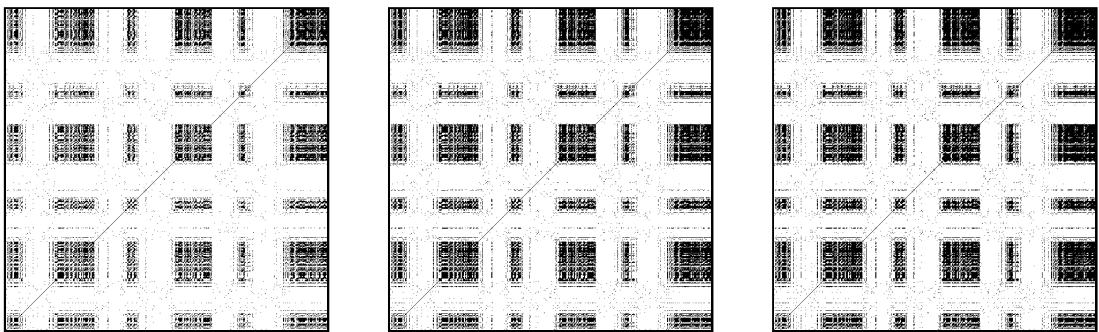
2 pav. pateiktose rekurentinėse diagramose matome nehomogeniškai pasiskirsčiusius juodus taškus, todėl signalas yra nestacionarus. Remiantis [6] pateiktomis raštų prasmės interpretacijomis, vertikalios bei horizontalios linijos žymi lėtai kintančias arba laminarines būsenas. Išbalė diagramos kampai žymi, kad signale yra vienas arba daugiau trendų. Diagrama su didesniu  $D$  parametru pasireiškia glotnesniais raštais, kurie primena Gauso suliejimą (*angl. Gaussian blur*); šio paramетro didinimas padeda atsikratyti triukšmo, tačiau gali paslėpti svarbias detales, pavyzdžiu, glotnioje diagramoje nebematome plonų vertikalių bei horizontalių linijų, kurias matėme viduriniame pavyzdje.

## 4. Plaučių garsas



3 pav. Plaučių garo įrašo signalas

3 pav. matome pavyzdinį sveikos moters dešiniojo viršutinio priekinio plaučio garo įrašą paimtą iš širdies ir plaučių duomenų rinkinio įrašyto su klinikiniu manekenu naudojant skaitmeninį stetoskopą [3]. Gario įrašo diskretizavimo dažnis (*angl. sampling rate*) yra 4000Hz. Prieš rekurentinių diagramų generavimą duomenys buvo praretinti 100 kartų. Rezultate diagramos buvo generuojamos iš signalo, kurio imčių skaičius yra  $N = 599$ .



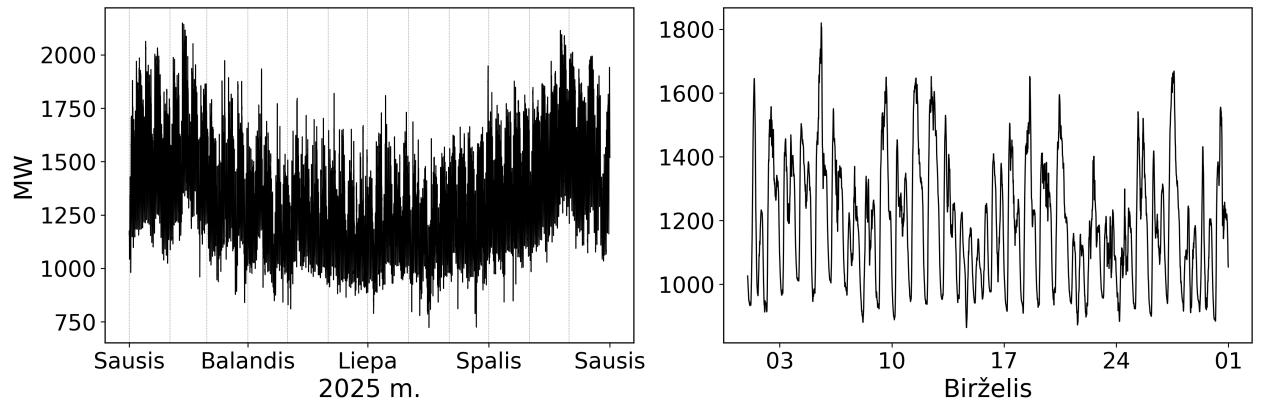
4 pav. Plaučių garo įrašo rekurentinės diagramos su parametrais  $D = 2, r = 0.1, d = 1$  ir skirtingomis normomis (iš kairės į dešinę): Manheteno, Euklidinė ir maksimumo.

4 pav. pavaizduotos diagramos pasireiškia nehomogeniniu juodų taškų pasiskirstimu, tai reiškia, kad signalas yra nestacionarus. Taip pat matome daugelį juodų taškų telkinių, kurie signalizuoją (pun intended), kad tarpais signalo būsena nekinta ir taip iš ties galime pamatyti net pačiame signale – iš viso turime šešis intervalus, kuriuose signalo reikšmė atrodo pastovi ir tai sutampa su rekurentinėje diagramoje matomu skaičiu telkinių (horizontaliai).

Šiame pavyzdyste bandome keisti normą, o kitus parametrus laikyti pastoviais. Kaip ir nurodytą mokymo priemonėje [1] kokybinio skirtumo nėra, nes diagramoje neatsiranda papildomų darinių bei struktūrų. Iš pirmo žvilgsnio šis parametras gali pasirodyti kiek nereikšmingas – diagramos atrodo taip pat, tik turi skirtinį juodų taškų skaičių, tačiau pažvelgus iš greitaveikos vertinimo pusės skirtumas yra didžiulis. Manheteno metrika

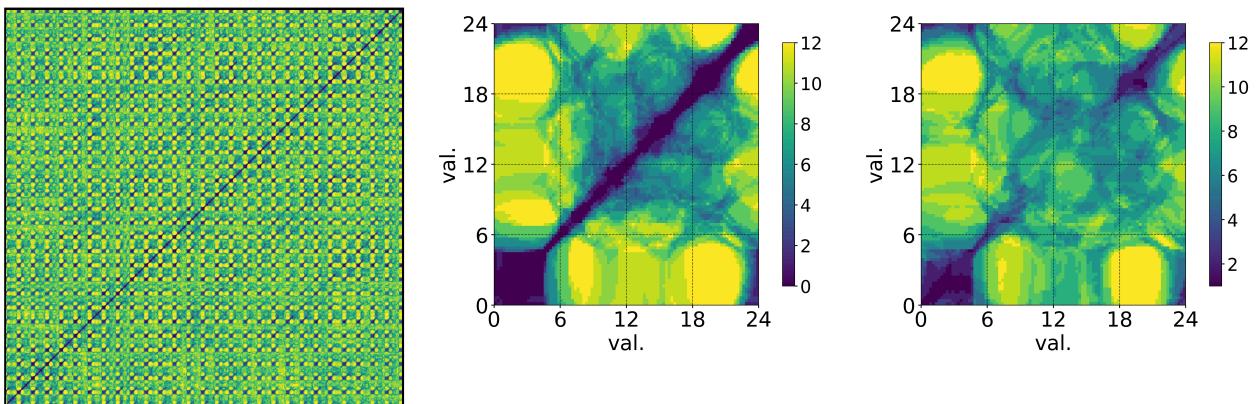
reikalauja suskaičiuoti kiekvieno nario modulį ir tuomet bendrą jų sumą, kas reikalauja daug CPU ciklų, taip pat gali atsirasti perteklius (*angl. overflow*). Tokia pati problema atsiranda pasirinkus Euklidinę metriką, čia aritmetiniai veiksmai net sudėtingesni – modulis, sumavimas, daugyba ir kvadratinė šaknis. Nors kvadratinės šaknies galima išvengti iš anksto suskaičiavus  $r^2$  ir lyginimą atliekant su ja, nedingsta pertekliaus rizika bei daugybos ir sumavimo operacijų sudėtingumas. Greitaveikos prasme patraukliausia norma yra maksimumo dėl to, kad ji nereikalauja aritmetinių veiksmų, o tik surasti narį su didžiausiu moduliu.

## 5. Elektros energijos kiekis suvartojojamas Lietuvoje



5 pav. 2025m. Elektros energijos kieko suvartojimo Lietuvoje priklausomybė nuo paros valandos. Intervalas tarp diskrečių signalo taškų – 15 min. Kairėje duomenys pavaizduotas visiem metams, o dešinėje tik birželio mėnesiui.

Toliau naudosime apibrėžime ir analizei naudosime neįprasta techniką, kuri yra pagrįsta rekurentinėmis diagramomis. Turint ilgą signalą, mes sudalinsime intervalą į  $N$  dalis ir kiekvienai individualiai sudarysime rekurentinę diagramą, tuomet panariui sudésime šias diagramas, kadangi jos yra matricos su reikšmėmis 0 arba 1. Rezultate turėtume gauti jungtinį paveikslą, kuris išryškina sutampančias rekurentinės diagramos detales. Šiam paveikslui galime taikyti panašias struktūrų atpažinimo taisykles kaip ir įprastoms rekurentinėms diagramoms.



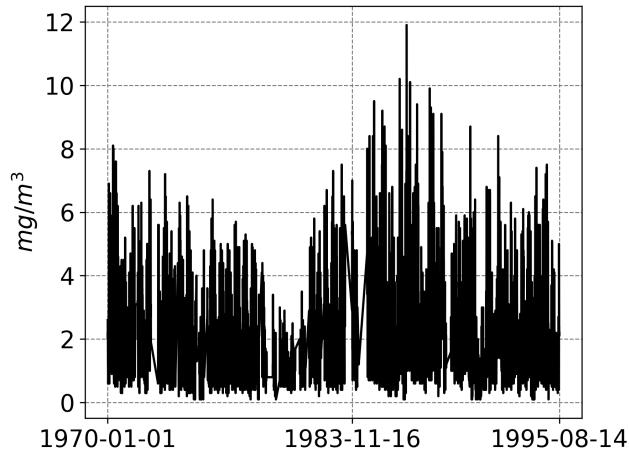
6 pav. Jungtinė rekurentinė diagrama gauta naudojant anksčiau apibūdintą techniką. 2025m. duomenys buvo sukarptyti į dvyliką dalių (po diagramą kiekvienam iš mėnesių, tačiau norint užtikrinti tokį patį diagramų dydi buvo paimtos tik pirmos 28 kiekvieno mėnesio dienos). Kiekvienai signalo atkarpai buvo sudaryta rekurentinė diagrama su parametrais  $D = 2, p = 0.3, d = 1$ . Bendras rezultatas matomas kairėje, tačiau dėl didelės diagramos raiškos įdėtos individualių dienų iškarpos. Centre matome 8 mėnesio dienos iškarpą esančią ant pagrindinės diagonalės, o dešinėje iškarpą ne ant pagrindinės diagonalės – 8 d., 15 d. Visoms diagramoms naudojama „Viridis“ spalvų paletę.

6 pav. pagrindinėje diagramoje matome homogenišką raštą, kuris dengia visą diagramos sritį, čia galima pastebeti, kad šis raštas pasikartoja 28 kartus – tiek, kiek kiekvienam mėnesiui buvo paimta dienų norint sudaryti diagramą, iš šios detalės galime spręsti, kad individualių dienų signalai tarpusavyje yra pakankamai panašūs, tai matosi pažvelgus ir į 5 pav. pateiktą mėnesio suvartojamas energijos diagramą – suvartojamas kiekis diena pakyla, o naktį krenta.

6 pav. centrinėje iškarpoje, kuri yra ties jungtinės diagramos pagrindine diagonale, matome, kad paveiklas yra gana šviesus vietose toliau nuo diagonalės, tai žymi, kad individualios dienos signale yra trendas, o signalas nėra stacionarus.

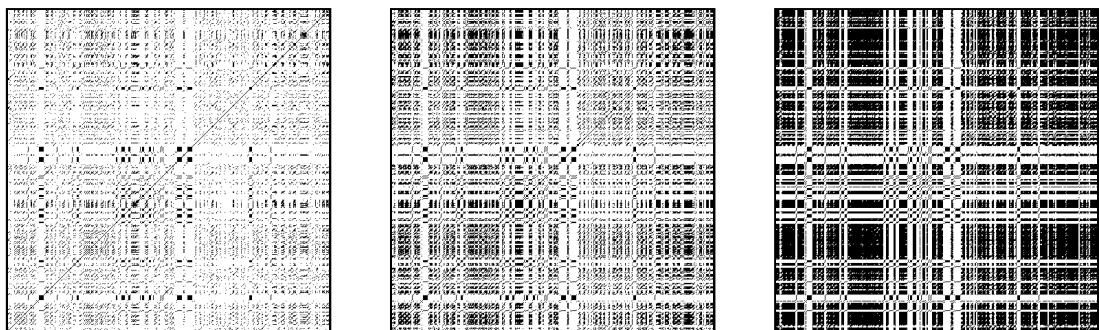
6 pav. kaireje esančioje diagramoje matome, kad iki 6 val. ir nuo 18 val. susidaro panašios struktūros kaip ir centrinėje diagramos iškarpoje, tai reiškia, kad nepriklausomai nuo mėnesio dienos, nakti suvartojamas energijos kiekis išlieka panašus, o dienos metu šis sąryšis pranyksta.

## 6. Oro kokybė



7 pav. Anglies monoksido koncentracijos ore duomenys iš sensoriaus, kuris buvo pastatytas Italijos miestelio laukuose. Duomenis gauti iš oro kokybės duomenų rinkinio [5].

Šio signalo imčių skaičius yra  $N = 9356$ , todėl prieš rekurentinių diagramų generavimą duomenys buvo praretinti 20 kartų.



8 pav. Rekurentinės diagramos sugeneruotos iš anglies monoksido konkcentracijos signalo. Parametrai  $D = 2, d = 1$ , naudojama Euklidinė metrika. Keičiamas parametras  $p$ , kuris žymi vartotojo pasirinktą juodų taškų procentą diagramoje (iš kairės į dešinę): 0.1, 0.25, 0.5

8 pav. matome, kad keičiant parametrą  $p$  diagramose galima išvysti kokybinių skirtumų – kairėje diagramoje juodi taškai beveik homogeniškai be tvarkos pasiskirstę po erdvę, kas rodo, kad signale yra atsitiktinio triukšmo, tačiau matyti ir juodų taškų telkinių, kurie ryškėja didinant parametrą  $p$ , kas rodo, kad signalo būsena laiko tarpais beveik arba visiškai nekinta.

## 7. Išvados

Rekurentinės diagramos yra naudingas įrankis analizuojant signalus. Šios diagramos gali atskleisti signalų savybes, kurios nėra akivaizdžios iš pačio signalo. Vienas iš pavyzdžių galėtų būti 1 pav., kuriame pavaizduotos logistinio atvaizdžio rekurentinės diagramos. Jos rodo trumpus kvazi-periodus, nors pats signalas iš pirmo žvilgsnio nieko nesiskiria nuo atsitiktinio signalo. Norint, kad ši technika būtų naudinga, reikia gebeti atliki nepaprastą uždavinį – pasirinkti algoritmo parametrus taip, kad diagramoje būtų atskleistos visos detalės. Šiu parametru yra keletas, o kiekvienas iš jų turi savo unikalų poveikį:

- $r$  parametras nustato slenkstinę reikšmę dvieju signalo atkarpu lyginimui ir nustato ar taškas turėtų būti spalvinamas juodai arba baltais. Tinkamai pasirinkti šio signalo reikšmę yra labai svarbu, nes tai gali turėti didelį poveikį diagramos išvaizdai, pavyzdžiu galėtume laikyti logistinio atvaizdžio diagramą 1 pav., kur maža  $r$  reikšmė atskleidžia homogenišką ir netvarkingą taškų pasiskirstymą, kuris nėra toks akivaizdus pažvelgus į diagramą su didesne  $r$  parametro reikšme.
- $D$  parametras nustato kiek signalo taškų lyginsime spręsdami vieno taško spalvą. Šio parametro didinimas turi glotninantį efektą panašų į Gauso suliejimą. Tai akivaizdžiai matome diagramoje gautoje iš įmonės „Apple Inc.“ akcijų svyravymo 2 pav..
- $d$  parametras reguliuoja atstumą tarp signalo taškų, kuriuos renkamės lyginimui, kai  $d = 1$  imsime taškus, kurie yra šalia vienas kito, kai  $d = 2$  imsime kas antrą tašką ir t. t. Šio parametro didinimas turi dvejinantį efektą dėl kurio gali pranykti diagramos struktūra. To pavyzdys galėtų būti, kuriame matome, kad diagrama gauta naudojant  $d = 2$  turi vos matomų vertikalių ir horizontalių baltų linijų, tačiau padidinus  $d$  iki 5, vaizdas tampa mažiau aiškus.
- $p$  parametras nėra apibrėžtas klasikiniame rekurentinių diagramų algoritme, o yra tik šios uždouties dalis. Jis kontroliuoja procentą juodų taškų skaičiaus diagramoje. Algoritmo įgyvendinime parametras  $p$  yra naudojamas tik parametro  $r$  apskaičiavimui, todėl kokybinis šio parametro didinimo efektas yra toks pat kaip parametras  $r$ . Tai gana aiškiai matosi iliustracijoje 1 pav. ir 8 pav.. Iš praktinės pusės, ši parametrą naudoti yra patogiau nei parametrą  $r$ , todėl, kad ne visada galime lengvai žinoti kokia slenkstinė reikšmė bus tinkama. Taip pat todėl, kad naudojant parametrą  $p$  yra lengviau numatyti algoritmo rezultatą.
- Norma taip yra vienas iš algoritmo parametrų, kurį galime pasirinkti. Praktinis efektas diagramoms yra skirtinges juodų taškų skaičius. Kai naudojama Manheteno norma, juodų taškų bus šiek tiek mažiau nei tuomet, jei būtų naudojama Euklidinė norma, o daugiausiai juodų taškų atsiranda tada, kai naudojama maksimumo norma. Tai galima matyti iliustracijoje 4 pav..

## Literatūros šaltiniai

- [1] T. Meškauskas, „Signalų analize ir apdorojimas“. [Interaktyvus]. Adresas: [https://klevas.mif.vu.lt/~meska/sap2026/T\\_Meskauskas\\_-\\_SAA\\_-\\_Mokymo\\_Priemone\\_LT.pdf](https://klevas.mif.vu.lt/~meska/sap2026/T_Meskauskas_-_SAA_-_Mokymo_Priemone_LT.pdf)
- [2] R. Aroussi, „yfinance: Yahoo! Finance market data downloader“. [Interaktyvus]. Adresas: <https://github.com/ranaroussi/yfinance>
- [3] S. S. Torabi Yasaman ir J. P. Reilly, „HLS-CMDS: Heart and Lung Sounds Dataset Recorded from a Clinical Manikin using Digital Stethoscope“. [Interaktyvus]. Adresas: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/1202/hls-cmds:+heart+and+lung+sounds+dataset+recorded+from+a+clinical+manikin+using+digital+stethoscope>
- [4] Lithuanian Research Council, „Litgrid“. Žiūrėta: 2026 m. vasario 21 d. [Interaktyvus]. Adresas: <https://www.litgrid.eu/>
- [5] S. Vito, „Air Quality“. [Interaktyvus]. Adresas: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/360/air+quality>
- [6] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, ir J. Kurths, „Recurrence plots for the analysis of complex systems“, *Physics reports*, t. 438, nr. 5–6, p. 237–329, 2007, [Interaktyvus]. Adresas: <https://arxiv.org/pdf/2501.13933>

## Priedai

Dokumentą sudaro du priedai 9 išeities kodas. ir 10 išeities kodas..

1 išeities kodas. Klasikinio rekurentinių diagramų algoritmo įgyvendinimas

```
from math import ceil
from typing import Callable, Literal

def recurrence_plot(
    f: list[float],
    D: int,
    r: float,
    d: int = 1,
    ord: Literal[1, 2, 'inf'] = 2
) -> tuple[int, list[bool]]:
    size, field_values = recurrence_field_values(f, D, d, ord)
    return (size, [ v > r for v in field_values ])

def recurrence_field_values(
    f: list[float],
    D: int,
    d: int = 1,
    ord: Literal[1, 2, 'inf'] = 2
) -> tuple[int, list[float]]:
    assert len(f) > 0

    N: int = len(f) - 1
    M: int = N - (D - 1) * d
    field_values: list[float] = [ 0 ] * ((M + 1) * (M + 1))

    norm_fn_lookup: dict[Literal[1, 2, 'inf'], Callable] = {
        1: lambda xs: sum([ abs(x) for x in xs]),
        2: lambda xs: sum([ x**2 for x in xs ]) ** 0.5,
        'inf': lambda xs: max([ abs(x) for x in xs])
    }

    norm_fn: Callable = norm_fn_lookup[ord]

    for i in range(M + 1):
        for j in range(M + 1):
            y_i = [ f[i + k * d] for k in range(D) ]
            y_j = [ f[j + k * d] for k in range(D) ]
            diff = [ a - b for a, b in zip(y_i, y_j) ]
            field_values[j + i * (M + 1)] = norm_fn(diff)

    return (M + 1, field_values)
```

9 išeities kodas. pateiktas klasikinio rekurentinių diagramų algoritmo įgyvendinimas python programavimo kalba nenaudojant jokių išorinių pagalbinių paketų išskyruus standartinės bibliotekos pagalbinę funkciją Ceil ir tipų aprašymo konstrukcijas Callable ir Literal. Didelė algoritmo dalis yra iškelta į metodą recurrence\_field\_values, kuris yra naudojamas įgyvendinant ir pritaikytą algoritmą, kuris palaiko parametrą  $p$ .

2 išeities kodas. Pritaikyto rekurentinių diagramų algoritmo įgyvendinimas

```
def recurrence_plot_custom(
    f: list[float],
    D: int,
    p: float,
    d: int = 1,
    ord: Literal[1, 2, 'inf'] = 2
) -> tuple[int, list[bool]]:
    size, field_values = recurrence_field_values(f, D, d, ord)
    r = choose_r(field_values, p)
    return (size, [v > r for v in field_values])

def choose_r(values: list[float], p: float) -> float:
    k = ceil(p * len(values))
    return sorted(values)[k - 1]
```

10 išeities kodas. pateiktas pritaikyto algoritmo įgyvendinimas. Palaikomas parametras  $p$ , kuris nustato juodą taškų procentą diagramoje. Panaudota praeitame priede 9 išeities kodas. pateikta funkcija `recurrence_field_values`.