

PROJEKTAI

1 Projektas

Dinaminės sistemos analizė.

a) Paruošti programą su vartotojo sąsaja, kurioje būtų nurodyta galimybė keisti transformacijos parametą, bei parinkus tašką, gauti šio taško orbitos laiko eilutę bei iteruojamo taško grafinį vaizdą.

b) Empiriniais metodais nustatyti parametro reikšmių intervalą, kada taškų iteracijos yra neappręžtos bei intervalus- kada apręžtos.

c) Sudaryti šios transformacijos Freigenbaumo medį.

d) Rasti bifurkacinių taškų seką (3 taškus), pažymėti juos grafiškai Freigenbaumo medyje ir išvesti jų taškų skaitine reikšmes.

$$f_a(x) = x \exp(a(1-x)).$$

2 Projektas

Dinaminės sistemos analizė.

a) Paruošti programą su vartotojo sąsaja, kurioje būtų nurodyta galimybė keisti transformacijos parametą, bei parinkus tašką, gauti šio taško orbitos laiko eilutę bei iteruojamo taško grafinį vaizdą.

b) Empiriniais metodais nustatyti parametro reikšmių intervalą, kada taškų iteracijos yra neappręžtos bei intervalus- kada apręžtos.

c) Sudaryti šios transformacijos Freigenbaumo medį.

d) Rasti bifurkacinių taškų seką (3 taškus), pažymėti juos grafiškai Freigenbaumo medyje ir išvesti jų taškų skaitine reikšmes.

$$f_a(x) = ax(1-x).$$

Teorinė medžiaga 1, 2 projektams

Realaus kintamojo diskrečiosios dinaminės sistemos

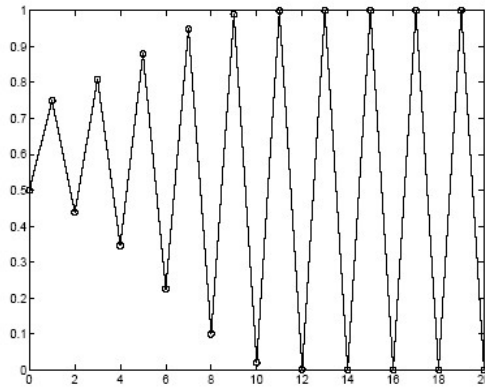
Apibrėžimas Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $f : X \Rightarrow X$ – transformacija. Tada dinamine sistema vadinsime porą $\{X; f\}$. Seką $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ vadinsime taško $x \in X$ orbita.

Tašką $z \in X$ vadinsime transformacijos nejudamu tašku, jei $f(z) = z$.

Sakykime, kad (X, f) – dinaminė sistema. Sakysime, kad erdvės taškas x yra periodinis, transformacijos f atžvilgiu, jeigu egzistuoja natūralusis skaičius n toks, kad $f^n(x) = x$. Mažiausią natūralųjį skaičių n , kuriam teisinga lygybė $f^n(x) = x$, vadinsime taško periodu. Periodinio taško orbitą vadinsime transformacijos f ciklu tame taške. Minimalus ciklo periodas yra skirtingų taškų skaičius, kuris priklauso šiam periodui. Ciklo elementų skaičių vadinsime šio ciklo eile. Beje, jei x yra periodinis taškas, kurio periodas n , tai šio taško ciklo taškai sudaro tokią aibę:

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}.$$

Taško a orbitą vadinsime periodine, jeigu egzistuoja teigiamas skaičius p toks, kad $f^{n+p}(a) = f^n(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Patį mažiausią teigiamą skaičių $p \in \mathbb{N}$, tenkinantį šią sąlygą, vadiname taško periodu. Tuo tarpu, jei seka $\{f^n(x)\}$ tampa periodine, tik tada, kai $n > n_0$, tai sakysime, kad seka beveik periodinė. 1 pav. yra pateikiama beveik periodinio taško orbitos grafinė realizacija.



1 pav.

1. Orbitų grafiko braižymo algoritmas Nurodysime algoritmą, kuriuo naudodamiesi galėsime grafiškai vaizduoti taškų orbitas, kaip pateikta 1 pav. Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{\mathbb{R}; f(x)\}$. Sudarome koordinatinių sistemą, kurios horizontalioje (Ox) ašyje atidedame iteracijos numerius (dažnai sakoma laiko momentus), o vertikalioje ašyje metrinės erdvės X taškus. Ieškosime taško $x_0 \in \mathbb{R}$ orbitos, tuo pačiu ją pažymėdami koordinatinių sistemoje, $\{x_n = f^n(x_0), n = 1, \dots\}$. Ties kiekvienu laiko momentu n , atidedame vertikalioje ašyje reikšmę $f^n(x_0)$. Po to, kaip parodyta 1 pav., gretimus taškus sujungiame atkarpomis, sudarydami vientisą kreivę. Tokiu būdu gautas grafikas bus vadinamas *taško x_0 orbitos grafiku* arba paprastai šis grafikas dar vadinamas *laiko eilute*.

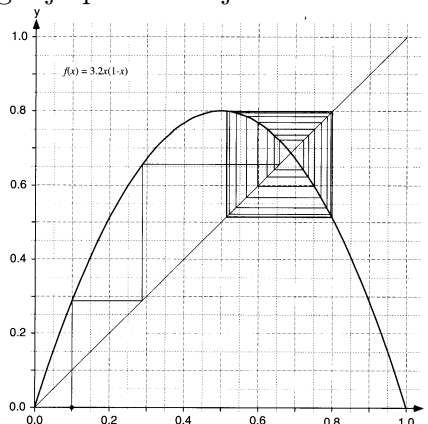
2. Funkcijos iteruojamo taško grafinis vaizdas. Šis dinaminės sistemos veikimo grafinis interpretavimas yra atliekamas įprastinėje Ox, Oy koordinatinių sistemoje. Paprastumo dėlei tarkime, kad $f : [0, 1] \Rightarrow [0, 1]$. Nubrėžkime kvadratą $\{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$, funkcijos $y = f(x)$ grafiką, bei tiesę $y = x$. Fiksavę plokštumos tašką $(x_0, 0)$, sujunkime atkarpa su tašku $(x_0, x_1 = f(x_0))$. Toliau elgsimės analogiškai. Sujungsime pastarąjį tašką su tašku (x_1, x_1) , o paskutiniąjį su tašku $(x_1, x_2 = f(x_1))$ ir taip toliau. Atlikę šią konstrukciją, gauname tiesės taškų seką $\{(x_{n-1}, x_n = f(x_{n-1}))\}$, kuri konverguoja į nejudamą transformacijos tašką arba diverguoja į begalybę. 2 pav. pateikiamas grafinės iteracijos pavyzdys.

Chaotinė dinamika paprastai atsiranda netiesinėse dinaminėse sistemose, t.y. dinaminėse sistemose, kurios apibrėžiamos ne tiesine transformacija. Tarkime, kad G_f yra transformacijos f grafikas. Jeigu taškas x_f yra nejudamas, dinaminės sistemos (X, f) taškas, tai $(x_f, x_f) \in G_f$. Tarkime, kad x_f yra dinaminės sistemos (X, f) nejudamas taškas.

Apibrėžimas Tašką x_f vadinsime pritraukiančiu dinaminės sistemos tašku, jeigu egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad transformacija f rutulį $B(x_f, \delta)$ atvaizduoja į jį patį ir f yra suspaudžiantis atvaizdis šiame rutulyje

$$B(x_f, \delta) = \{y \in X; \rho(x_f, y) \leq \delta\}.$$

Kitaip tariant, nejudamas taškas yra pritraukiantis, jei egzistuoja šio taško aplinka, kurios taškų iteracinės sekos konverguoja prie šio nejudamo taško.



2 pav.

Apibrėžimas Nejudamą tašką x_f vadinsime atstumiančiu, dinaminės sistemos tašku, jeigu egzistuoja $\delta > 0$ ir $c > 1$ tokie, kad

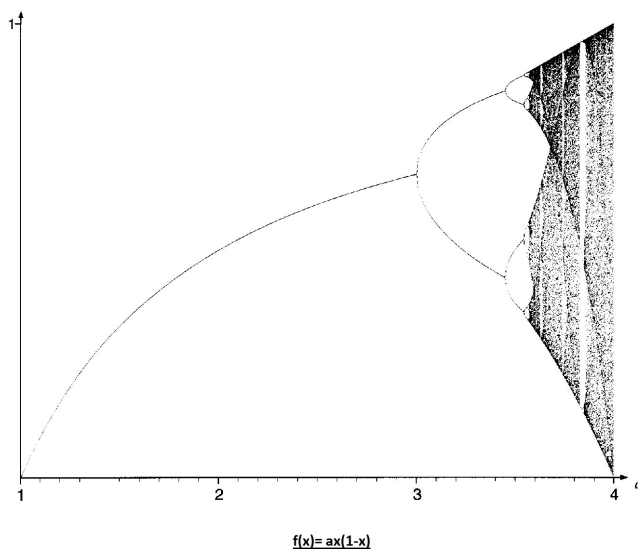
$$\rho(f(x_f), f(y)) \geq c\rho(x_f, y), \quad y \in B(x_f, \delta).$$

Kitaip tariant, taškas yra atstumiantis, jei galima nurodyti pakankamai mažą aplinką, kurioje visos taškų orbitos tolsta nuo šio taško.

Kaip būtų galima geometriškai atskirti ar nejudamas taškas yra atstumiantis ar pritraukiantis? Pasirodo, kad jei taške x_f , transformacijos grafiko liestinės krypties koeficiento absoliuti reikšmė yra didesnė už 1, tai šis nejudamas taškas yra atstumiantis, o jei absoliuti reikšmė mažesnė už vieneta, tai pritraukiantis. 3 pav. yra pavaizduoti keli dinaminės sistemos grafinės iteracijos nariai, kai iteruojami taškai "netoli" pritraukiančiojo (viršutinėje 3 pav. dalyje) ir atstumiančiojo taškų (apatinėje 3 pav. dalyje).

Panagrinėkime, orbitų diagramų priklausomybę nuo parametro c , kurias galime modeliuoti naudodami kompiuterinę grafiką.

3) Feigenbaumo medis. Aptarsime, kaip sudaryti taškų orbitų grafiką pasirinktai parametro reikšmei, t.y. fiksuotai parametro reikšmei mes iteruosime dinaminės sistemos taškus ir įdomu tai, kad keičiant parametą, taigi keičiant funkcijos grafiką ima keistis periodiniai taškai ir jų skaičius. Panagrinėkime tą pačią funkciją $f(x) = ax(1-x)$, intervale $[0; 1]$. Raskime, pavyzdžiui taško $x = 0$ orbitą, fiksuotoms, bet vis kitoms parametro a reikšmėms. Šiuo atveju koordinatų sistemos Ox ašyje atidedame parametro a reikšmes, o vertikalioje ašyje atidedame ribinius taškus (pritraukiančius nejudamus taškus), prie kurių konverguoja dinaminės sistemos iteracijos. Toks grafikas vadinamas *Feigenbaumo medžiu*.



5 pav.

Trumpai aptarsime algortimą, kuriuo remiantis galima sudaryti minėtą medį, kuriame atspindi dinaminės sistemos nejudamų taškų skaičiaus priklausomybė nuo parametro a reikšmės.

1) Suskaičiuojame funkcijos $x_n = f^n(0)$ reikšmes, kai $n = 1, \dots, 50$, kitaip tariant skaičiuojame reikšmes, kal jos ima stabilizuotis ties nejudamais pritraukiančiais taškais.

2) Toliau skaičiuodami iteracijas, gautas ciklo reikšmes atidedami virš fiksuotos parametro a reikšmės. Taigi, skaičiuodami reikšmes, pradedant $n = 51, 52, \dots, 200$, kiekvieną iš jų atidedame koordinatų sistemoje kartu su parametro reikšme, t.y. (x_n, a) . Pakankamai reprezentatyvi diagrama bus gauta, jei parametro kitimo srityje šį parametą a keisime žingsniu 0,00625.

Žinoma, norint pasiekti geresnį tikslumą, reiktų skaičiuoti ilgesnes orbitas, o parametą a keisti mažesniu žingsniu.

3 Projektas

1) Naudodami kintamo laiko algoritmą (KLA) raskite transformacijų Julijaus ir pilnų Julijaus aibes.

2) Raskite šios transformacijos Mandelbroto aibę.

3) Parinkę kokią nors parametro λ reikšmę, sudarykite Niutono transformaciją ir raskite jos Julia aibę, be to programoje turi būti nurodomos transformacijos nuliai kartu su Niutono transformacijos Julia aibe.

Susiekite Mandelbroto aibę su Julia aibe ir Niutono transformacijos Julia aibe.

Dinaminės sistemos apibrėžtos tokiomis transformacijomis.

$$f(z) = z^4 - z^2 + \lambda.$$

4 Projektas

1) Naudodami kintamo laiko algoritmą (KLA) raskite transformacijų Julijaus ir pilnų Julijaus aibes.

2) Raskite šios transformacijos Mandelbroto aibę.

3) Parinkę kokią nors parametro λ reikšmę, sudarykite Niutono transformaciją ir raskite jos Julia aibę, be to programoje turi būti nurodomos transformacijos nuliai kartu su Niutono transformacijos Julia aibe.

Susiekite Mandelbroto aibę su Julia aibe ir Niutono transformacijos Julia aibe.

Dinaminės sistemos apibrėžtos tokiomis transformacijomis.

$$f(z) = z^3 + \lambda.$$

Teorinė medžiaga 3, 4 projektams

Kintamojo laiko algoritmas

Konvergavimo ir divergavimo aibės. Kintamo laiko algoritmas (KLA)

Kaip rasti divergavimo (konvergavimo) aibės elementus, empiriškai? Aišku, kad jei skaičių z_0 moduliai yra dideli, tai jų iteracijos diverguoja. Kaip optimizuoti šį uždavinį, t.y. nuo kokių taškų pradėti, kad veltui nešvaistytume laiko nustatant, kurie taškai priklauso divergavimo aibei.

Prieš pradėdami nagrinėti šią problemą, visų pirma aptarsime metodą, kurį vadinsime *kintamojo laiko algoritmu* (KLA), kurio dėka, naudodami kompiuterinę grafiką, galėtume nurodyti taškus kompiuterio ekrane, arba popieriuje, priklausomai nuo to ar pasirinktasis taškas priklauso duotosios transformacijos f aibei D_f ar K_f .

Tarkime, kad duotas stačiakampis $W \subset \mathbb{R}^2$, kurio kairiojo apatinio kampo koordinatės yra (a, b) , o dešiniojo viršutinio kampo koordinatės yra (c, d) . Tegu $M \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$x_{p,q} = \left(a + p \frac{(c-a)}{M}, b + q \frac{(d-b)}{M} \right),$$

čia $p, q = 0, 1, \dots, M$. Pastarieji taškai priklauso aibei W . Kitaip tariant, šie pasirinkti taškai reprezentuoja aibę W . Mes palyginsime seką

$$\{f^n(x_{p,q}), n = 0, 1, 2, \dots\}$$

orbitas, kai $p, q = 0, 1, \dots, M$. Tarkime, kad R pakankamai didelis teigiamas skaičius, be to tarkime, kad R yra apskritimo, kurio centras koordinatinių pradžių taške, spindulys. Apibrėžkime aibę

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > R\}.$$

Trumpai nusakysime KLA idėją. Sakysime, kad N , bet koks natūralusis skaičius, kurį vadinsime stabdymo skaičiumi. Užrašysime kiekvienam taškui $x_{p,q}$ orbitą:

$$\{f^1(x_{p,q}), f^2(x_{p,q}), \dots, f^n(x_{p,q})\},$$

kai $p, q = 0, 1, 2, \dots, M, x_{p,q} \in W$. Beje, orbitos elementų skaičius $n \leq N$. Kitaip tariant, $n \leq N$ yra mažiausias natūralusis skaičius toks, kad $f^n(x_{p,q}) \in V$ arba, jei orbitos visi elementai priklauso aibei W , tai tada $n = N$. Ir vienu ir kitu atveju orbitos taškų skaičiavimas (taške $x_{p,q}$) yra nutraukiamas, ir skaičiuojama orbitos kitame taške, kai $n \geq N$. Be to galime susitarti, kad jei kokiam nors $n \leq N$ orbitos elementas $f^n(x_{p,q}) \in V$, tai tašką $x_{p,q}$ galime nuspalvinti pasirinkta spalva.

Pateiksime KLA taikymo pavyzdį. Tarkime, kad W yra kvadratas, kurio apatinis kairysis kampas yra koordinatų pradžios taške, o dešinysis viršutinis kampas yra taške $(1, 1)$. Tarkime, kad $M = 100, R = 200, N = 20$. Tarkime $S \subset W$ yra Sierpinskio trikampis, kaip pavaizduota 6 pav..

Skaičiuodami aibės S taškų orbitas, mes aibės S tašką spalvinkime juodai tada, kai iteracijų skaičius, kuomet pasiekama aibė V , yra nelyginis arba taškų iteracijos, kai $n \leq 20$, aibės V nepasiekia. Gautas vaizdas iliustruojamas 7 pav..

KLA yra naudojamas IAS- mos, apibrėžtos aibėje \mathcal{R}^2 , atraktorių grafiniam vaizdui gauti ir tuo atveju, jei nagrinėjamos aibės atraktorius yra nestabilus. (Atraktorius nestabilus, jei egzistuoja taškai atraktoriuje, kurių orbitos diverguoja). Norint atlikti šį darbą, mums teks realizuoti tokį algoritmą:

Anksčiau minėtu būdu apibrėžkime aibes W ir V . Mes žymėsime (priskirsime atraktoriui) tik tuos taškus, kurie pasiekia aibę V "nelabai" greitai. Kaip greitai pasiekama aibė V nusakome patys, pasirinkdami N . Jei N per didelis, tai per mažai taškų pasieks aibę V , vadinasi atraktoriaus vaizdas bus skurdus ir atvirkščiai, jei N per mažas, tai vaizdas bus labai "sodrus" ir tuo pačiu netikslus. 8 pav. pateikiamas Sierpinskio trikampio grafinis vaizdas, priklausomai nuo N dydžio, t.y. kuo n didesnis, tuo vaizdas skurdesnis.

7.4 Julijaus aibės ir Niutono metodas

Tarkime, kad duotas polinomas $F(z) = z^4 - 1, z \in \mathcal{C}$. Žinoma, kad šis polinomas kompleksinių skaičių aibėje turi keturis nulių, t.y. egzistuoja taškai $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{C}$ tokie, kad $F(a_i) = 0, i = 1, 2, 3, 4$. Beje, nesunkiai galime nustatyti, kad šie polinomo nuliai yra tokie skaičiai: $1, -1, i, -i$. Jei polinomo išraiška bendresnė, tuomet rasti nulių nėra taip paprasta. Niutono metodu galime rasti apytikslus polinomo nulių. Sakysime, kad duota dinaminė sistema

$$\left\{ \bar{\mathcal{C}}; f(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} \right\}.$$

Transformacija $f(z)$ vadinama funkcijos $F(z)$ Niutono transformacija. Niutono metodo esmė tinkamai parinkę pradinį tašką $z_0 \in \mathcal{C}$ pasiekti, kad seka $\{f^n(z_0)\}$ konverguotų į funkcijos $F(z)$ nulį. Funkcijos $F(z) = z^4 - 1$ Niutono transformacija yra

$$(7) \quad f(z) = \frac{3z^4 + 1}{4z^3}.$$

Taigi, mes tikimės, kad paėmę kokį nors tašką z_0 , kuris yra arti tikėtinio nulio a_i , gausime, kad

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = a_i.$$

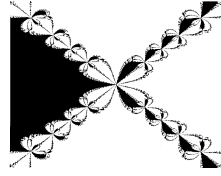
Tačiau kas atsitinka, jeigu taškas z_0 yra pakankamai toli nuo visų nulių? O gal (8) seka konverguoja į artimiausią nulį? O gal apskritai niekur?

Bandydami atsakyti į šį klausimą, pasinaudosime KLA- mu. Tarkime, kad z_0 yra bet koks išplėstinės kompleksinės plokštumos taškas. Naudodami KLA, pabandykime rekonstruoti

taško z_0 orbitą, kuri konverguoja į tašką -1 . Apibrėžkime $W = \{(x, y) \in \mathcal{C}; x, y \in [-2, 2]\}$ ir $V = \{z \in \mathcal{C}; |z + 1| \leq 0.0001\}$. Turime, kad

$$f(x + iy) = x_1 + iy_1,$$

čia realioji ir menamoji dalys randamos sutvarkius (7) lygybę. Naudodami KLA (parinkę parametrus M, N) ir kt. gausime tokį vaizdą (žr. 16 pav.).



16 pav.

Šios srities siena yra (7) transformacijos Julijaus aibė. Juodai žymimi tie $z \in W$, kurių orbitos aibę V pasiekia atlikus ne daugiau negu $N = 1000$ iteracijų.

Pastebėsime šiuo atveju, kad transformacijos D_f nėra kreivėmis susijusi.

Racionaliosios funkcijos $f: \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$, kurios laipsnis didesnis už vieneta, Julijaus aibę sudaro dinaminės sistemos $\{\overline{\mathcal{C}}, f\}$ atstumiančiųjų, periodinių taškų uždarinys.

(7) transformacijos pilną Julijaus aibę sudaro visi plokštumos taškai, kuriems (8) ribinis sąryšis negalioja. 6.15 paveiksle J_f yra siena, skirianti skirtingų spalvų sritis. Pastebėsime, kad J_f papildini sudaro keturios atviros sritys, kurios yra keturių nulių $(1, -1, i, -i)$ traukos sritys.

Mes nurodėme kompleksinės plokštumos sritį, kurios taškai priklauso aibei J_f . Tačiau išivaizduoti šią aibę labai sunku. Kiek auksčiau esame aptarę galimybę, kaip galima rasti transformacijos Julijaus aibes. Tarkime, kad duota (7) lygtis. Žinome, kad atraktoriaus taškas yra invariantiškas transformacijos atžvilgiu. Todėl raskime visus taškus, kuriems teisinga lygybė $z = (3z^4 + 1)/4z^3$. Arba

$$3w^4 - 4zw^3 + 1 = 0.$$

Išsprendę šią lygtį mes gauname keturis nulių. Taigi

$$f^{-1}(z) = \{\omega_1(z), \omega_2(z), \omega_3(z), \omega_4(z)\}.$$

Tada, Julijaus aibė yra IAS

$$\{\overline{\mathcal{C}}; \omega_i, i = 1, 2, 3, 4\}$$

atraktoriaus, beje, jis vienintelis IAS nejudamas taškas. Šio tvirtinimo neįrodysime.

Tarkime, kad duota funkcija $F(z) = e^z - 1$. Raskime dinaminės sistemos $(\overline{\mathcal{C}}, f)$ pritraukiančius taškus, bei taikydami KLA, pateikime šios dinaminės sistemos grafinį vaizdą.

Visų pirma rasime šios funkcijos Niutono transformaciją. Nesunkiai gauname, kad $f(z) = (z - 1) + e^{-z}$. Raskime šios transformacijos nejudamus taškus. Turime, kad $z = (z - 1) + e^{-z} \Rightarrow e^{-z} = 1 \Rightarrow z = 0$. Be to $\lim_{z \rightarrow \infty} (z - 1) + e^{-z} = \infty$. Taigi, ši transformacija turi du nejudamus taškus: 0 ir ∞ . Niutono transformacijos išvestinė yra lygi $f'(z) = 1 - e^{-z}$. Priminsime, kad taškas yra pritraukiantysis arba atstumiantysis, priklausomai nuo išvestinės absoliutinės reikšmės dydžio šiame taške. Kadangi išvestinės reikšmė taške $z = 0$ yra lygi nuliui, tai šis taškas yra pritraukiantysis. Išvestinės reikšmė taške ∞ lygi 1 , vadinasi šis taškas yra neutralus fiksuotas taškas. 17 pav. pateikiamas transformacijos $f(z) = e^z - 1$ grafinis vaizdas, gautas pritaikius KLA. Beje, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in [-2, 5, 2, 5]\}$.

Pateiksime algoritmą pseudo kodą, polinominės transformacijos $f(z; c) = a_n z^n + \dots + a_1 z + c$, Mandelbroto aibeį gauti.

Algoritmas

Iv.

integer $N, \max x, \max y, \min x, \min y$; "N- yra maksimalus atliekamų iteracijų skaičius, $\max x, \max y$ yra didžiausios-mažiausios pikselių koordinatės"

real R; "R > 0 yra realusis skaičius, parodantis atstumą iki nulio, panašiai kaip ir KLA. Šis skaičius priklauso nuo transformacijos laipsnio bei empirinių rezultatų. Jei R per didelis, tai Mandelbroto aibė bus netiksli, nebent būtų didinamas iteracijų skaičius. Jei R per mažas, Mandelbroto aibė darysis nedidelė sritis apie 0. Pradžioje R galime imti taip:"

$$R := \sqrt{\max x^2 + \max y^2}.$$

$$x(0) := \min x \wedge y(0) := \min y;$$

```

for {k = 0, k < max x, k+}
{
  for {j = 0, j < max y, j+}
  {
    c := x(k) + y(j)i;
    z := f(c; 0);
    while ( |z| < R ∧ l < N)
    z := f(c; z);
    l := l + 1;
    plot(z; color1) (spalvinti Mandelbroto aibės taškus)
  }
  (2) plot(z; color2) (spalvinti taškus, kurie nepriklauso Mandelbroto aibei)
}
}
end

```

5 Projektas Kompleksiniai skaičiai ir funkcijos.

Šio projekto esmė- parodyti, naudojant kompiuterinę grafiką, kaip kompleksinė funkcija transformuoja bet kokią geometrinių objektą. Vartotojo sąsajoje turi būti numatyta galimybė apibrėžti bet kokią polinomine arba racionaliąją funkciją. Data kreipiantis į geometrinių objektų aibę, pakraunama figūra ir ji transformuojama pasirinkta transformacija. Iteracija realizuojama pavyzdžiui "enter" mygtuko pateikimu.

Teorinė medžiaga pateikta pirmame konspektų skyriuje.

Pasirinkti kompleksinio skaičiaus bazę (kompleksinių skaičių) ir jo ilgį n . Realizacija pateikta vartotojo sąsajoje. Generuojame kompleksinių skaičių aibę, kaip pateikta žemiau teorinėje dalyje, šiuos skaičius išvedant į ekraną.

Teorinė mediaga 5 projektui. Julia aibės generuojamos kompleksinių skaičių pagrindu

Tarkime, kad aibė yra sudaryta tokiu būdu:

$$X_b(n) = \{x = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + \dots + \frac{a_n}{b^n}; a_i \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{C}\}.$$

Jei n yra begalinis, tai visi skaičiai gaunami sumuojant geometrinės progresijos narius. Žinoma, kad tokia eilutė konverguoja, jei $|b| > 1$, o kitu atveju eilutė diverguoja. Jei n begalinis ir $|b| < 1$, tai aibės $X_b(n)$ elementų skaičius taip pat begalinis. Jei n baigtinis, tai aibė $X_b(n)$ visada apibrėžta ir jos elementų skaičius yra baigtinis. Naudojantis skaičiaus standartine forma, nepriklausomai nuo bazės, visus aibės $X_b(n)$ skaičius galime užrašyti tokiu būdu:

$$x = (0, a_1 a_2 \dots a_n)_b.$$

Pavyzdžiui skaičius $x = 0, 1011_{1+i} \in X_{1+i}(4)$. Šiuo atveju

$$X = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4}.$$

Nesunku suprasti, kad $|X_b(n)| = 2^n$. Pasirodo, kad transformacijos $G(z)$, kuri apibrėžta tokiu būdu:

$$G(z) = \left\{ \frac{z}{b}, z \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \frac{z+1}{b}, z \in \mathbb{C} \right\} = g_1(\mathbb{C}) \cup g_2(\mathbb{C}), \quad |b| > 1$$

Julia aibė yra aibė $X_b(\infty)$.

Parodykime, kad taip yra iš tikrųjų. Tegu $x = (0, a_1 a_2 \dots a_n \cdot)_b =: 0, a_1 a_2 \dots a_n \cdot$. Tada

$$g_1(x) = 0, 0 a_1 a_2 \dots a_n \cdot, \quad g_2(x) = 0, 1 a_1 a_2 \dots a_n \cdot.$$

Dar daugiau,

$$g_1(X_b(\infty)) = 0, 0 a_1 a_2 \dots a_n \cdot, \quad a_i \in \{0, 1\} \text{ ir } g_2(X_b(\infty)) = 0, 1 a_1 a_2 \dots a_n \cdot, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

Kitaip tariant,

$$G(X_b(\infty)) = g_1(X_b(\infty)) \cup g_2(X_b(\infty)) = X_b(\infty).$$

Matome, kad aibė $X_b(\infty)$ yra nejudamas taškas spaudžiančiai transformacijai. Kadangi jis vienintelis, tai gauname atsakymą į nagrinėjamą klausimą.

.....

6 projektas. Funkcijos išvestinė.

Sudaryti programą pateiktos funkcijos išvestinei skaičiuoti. T.y. pateikus konkrečią funkciją turi būti išvedama jos išvestinė. Pateikus konkretų tašką x_0 yra suskaičiuojama šios funkcijos išvestinės reikšmė tame taške. Be to turi būti pateikiamas procentinis funkcijos kitimo greitis, bei elastingumo reikšmė nurodytame taške. Sudaryti kitimo greičio ir elastingumo funkcijos grafikus.

.....

7 Projektas

Vaizdo konvertavimas į funkciją. Vaizdų lyginimas lyginant funkcijų grafikų skirtumus.

8 Projektai

Funkcijos nulių paieška naudojant Niutono metodą. Funkcijų aproksimavimas Teiloro eilutėmis.

9 projektas

Iteracinės atvaizdžių sistemos (IAS)

Iteracinės atvaizdžių sistemos taikymas objektų kūrimui.

1. Spaudžiantys atvaizdžiai metrinėse erdvėse

Tarkime, kad X – metrinė erdvė. Paprastai funkciją, apibrėžtą ir įgyjančią reikšmes toje pačioje erdvėje vadinsime *erdvės transformacija*. Transformaciją $f : X \Rightarrow X$ vadinsime suspaudžiančiu atvaizdžiu (ateityje trumpai S.A.), jeigu egzistuoja konstanta $0 \leq s < 1$ tokia, kad

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Skaičius s vadinamas sąspūdžio koeficientu (trumpai s.k.).

Teorema 1. Tarkime, kad f yra S.A. metrinėje erdvėje X . Tada transformacija f yra tolydi.

Teoremą įrodyti siūlome skaitytojui.

Pavyzdys Transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apibrėžta sąryšiu $f(x) = ax, a \in (0, 1)$ yra spaudžiantis atvaizdis, kurios sąspūdžio koeficientas lygus a , kadangi bet kokiai realiųjų taškų porai x, y atstumas tarp vaizdų

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = a|x - y|.$$

Pavyzdys Tarkime, kad erdvėje $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ apibrėžta Euklidinė metrika. Tada transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, apibrėžta sąryšiu $f(x, y) = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y)$ yra spaudžiantis atvaizdis, kurios sąspūdžio koeficientas lygus $\frac{1}{3}$, kadangi bet kokiems dviems taškams iš $\mathcal{R}^2(x, y); (u, v)$ atstumas tarp šių taškų vaizdų

$$\rho(f(x, y), f(u, v)) = \frac{1}{3} \sqrt{(x - u + y - v)^2 + (x - u - y + v)^2} = \frac{1}{3} \rho((x, y); (u, v)).$$

Teorema 2. Sakykime, kad $f : X \Rightarrow X$ yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje (X, ρ) . Tada egzistuoja vienintelis nejudamas taškas $x_0 \in X$, kad visiems $x \in X$ seka

$$\{f^n(x)\} \Rightarrow x_0, \text{ kai } n \rightarrow \infty.$$

⊖

Tarkime, kad $x \in X$, o $s \in [0, 1]$ yra transformacijos f , s.k.. Sakykime, kad $n > m$, $m, n = 0, 1, \dots$, tada

$$(1) \quad \rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^m \rho(x, f^{n-m}(x)).$$

Remdamiesi trikampio nelygybe, visiems $k = 0, 1, \dots$, gauname tokią nelygybę:

$$\begin{aligned} \rho(x, f^k(x)) &\leq \rho(x, f(x)) + \rho(f(x), f^2(x)) + \dots + \rho(f^{k-1}(x), f^k(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1}) \rho(x, f(x)) \leq (1 - s)^{-1} \rho(x, f(x)). \end{aligned}$$

Pasinaudoję (1)-ąja nelygybe, iš paskutiniosios gauname

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{m \wedge n} (1 - s)^{-1} \rho(x, f(x)).$$

Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad seka

$$\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

yra Koši seka. Remdamiesi tuo, kad nagrinėjamoji erdvė pilna, tvirtiname, kad Koši seka konverguoja, be to šios sekos riba, tarkime x_0 , priklauso tai pačiai metrinei erdvei. Dar daugiau, nagrinėjamas atvaizdis- spaudžiantysis, taigi jis ir tolydus (Teorema 1), tad visiems $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \rho(x, y) < \epsilon,$$

kai tik $\rho(x, y) < \delta = \epsilon/s$. Vadinasi

$$f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Ar šis taškas vienintelis? Tarkime priešingai. Tuomet egzistuoja taškas $y_0 \in X, x_0 \neq y_0$ toks, kad ir $y_0 = f(y_0)$. Iš nelygybės

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq s \rho(x_0, y_0).$$

išplaukia, kad

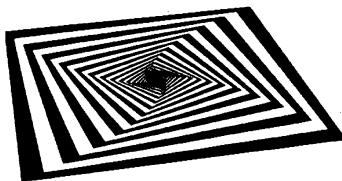
$$(1 - s) \rho(x_0, y_0) \leq 0.$$

Bet tada, $\rho(x_0, y_0) = 0$, ir $x_0 = y_0$.

⊕

Siūlome skaitytojui įrodyti, kad S.A. aibė yra uždara atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu, t.y. S.A. kompozicija yra spaudžiantis atvaizdis.

1 pav. pateikiamas S.A., kuris kvadratą spaudžia ir suka apie tašką. Beje, ribinis taškas yra nejudamas transformacijos taškas.



1 pav.

Pastaba Kokią įdomią išvadą galime padaryti remiantis paskutiniąja teorema? Visų pirma, tai, kad kokį bepaimtumė erdvės tašką ir jį iteruojant (taškui nuosekliai taikant tą pačią S.A.), kai iteracijų skaičių neaprežtai didiname, artėjame prie nejudamo taško. Kita išvada, tai, kad jei transformacija spaudžianti, ji negali turėti daugiau negu vieno nejudamo taško. Na ir pagaliau, natūralu tikėtis, kad jei visi taškai iteruojant juos artėja prie nejudamo taško, tai ir bet kokia figūra (taškų aibė) jos taškus iteruojant, bus suspausta į nejudamą tašką. Apie tai kalbėsime sekančioje teoremoje.

Teorema 3. Tarkime (X, ρ) - kompaktiška metrinė erdvė, o $f : X \Rightarrow X$ S.A. Tada aibė

$$\{f^n(X), n \in \mathbb{N}\}$$

yra fraktalų erdvės $(H(X), h)$ Koši seka ir be to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X) = \{x_0\},$$

čia x_0 yra transformacijos f nejudamas taškas.

⊖

Primename, kad $f(X) = \{f(x); x \in X\}$. Kitaip tariant $f(X)$ yra visų aibės X taškų, gautų juos atvaizdavus funkcija f aibė. Visų pirma išsiaiškinkime, ar $f(X) \subset H(X)$, t.y. ar $f(X)$ yra kompaktiška aibė? Žinome, kad f tolydi, todėl kompaktiškos aibės tolydus vaizdas yra kompaktiška aibė. Taigi, $f(X)$ kompaktiška aibė, tuo pačiu ir $f(X) \subset H(X)$. Naudodami matematinę indukciją gauname (įrodykite kantrusis skaitytojai!), kad ir bet kokiam n , $f^n(X)$ - kompaktiška ir netuščia aibė. Tuomet $f^n(X) \in H(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Be to pastebėkime, kad kiekvienam n , $x_0 \in f^n(X)$, čia x_0 yra atvaizdžio f nejudamas taškas.

Įsitikinsime, kad ši seka yra fraktalų erdvės elementų Koši seka. Pastebėkime, kad erdvė X yra kompaktiška, taigi ir pilna (kiekviena Koši seka turi ribą). Tą patį galime pasakyti ir apie fraktalų erdvę. T.y. jeigu $\{f^n(X)\}$ Koši seka, tai jos riba priklauso $H(X)$.

Jeigu $m > n$, tai

$$f^m(X) \subset f^n(X)$$

ir tuo pačiu

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x \in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)).$$

Bet šis atstumas ne didesnis už $\text{diam}(f^n(X))$, kuris apibrėžiamas taip:

$$\text{diam}(f^n(X)) = \max_{x,y \in f^n(X)} \rho(x,y).$$

Taigi

$$\text{diam}(f^n(X)) \leq s^n \text{diam} X,$$

čia s transformacijos f , s.k. Parinkime n_0 toki, kad būtų teisinga nelygybė:

$$s^{n_0} \text{diam} X < \epsilon.$$

Tuo pačiu, mes užtikriname, kad

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x \in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)) \leq s^{n_0} \text{diam} X < \epsilon,$$

kadangi visi atstumai neviršija aibės $\{f^n(X)\}$ diametro. Bet pastarosios nelygybės dėka galime tvirtinti, kad nagrinėjamoji S.A. seka yra Koši seka pilnoje fraktalų erdvėje. Taigi, ši seka turi ribą, kuri priklauso fraktalų erdvei.

Liko parodyti, kad šios sekos riba yra minėtasis teoremos formuluotėje taškas x_0 . Jau žinome, kad $x_0 \in \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X)$. Ar šios ribinės aibės diameteras lygus nuliui?

Turime, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} f^n(X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s^n \text{diam}(X) = 0$. Vadinasi, jei $y \in \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X)$, tai $\rho(x_0, y) = 0$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $x_0 = y$. Taigi, fraktalų erdvės elementų sekos riba yra kompaktiška aibė, kurią sudaro vienas elementas. Todėl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(X) = \{x_0\}.$$

⊕

2 Spaudžiantys atvaizdžiai metrinėje fraktalų erdvėje

Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $(H(X), h)$ yra fraktalų aibė. Žinome, kad $H(X)$ elementai yra kompaktiški, netušti, metrinės aibės poaibiai. Teisinga tokia teorema:

Teorema 4. *Sakykime, kad $\omega : X \Rightarrow X$ yra tolydus atvaizdis metrinėje erdvėje (X, ρ) . Tada šis atvaizdis fraktalų erdvę atvaizduoja į ją pačią.*

⊖

Kitaip sakant, kompaktiškos netuščios aibės atvaizduojamos į kompaktiškas netuščias aibes. Sakykime, kad $S \subset X$ erdvės X netuščias kompaktas. Kadangi ω tolydus atvaizdis, tai $\omega(S) = \{\omega(x); x \in S\}$ irgi netuščia ir be to kompaktiška, nes jei $\{y_n = \omega(x_n); x \in S\}$ yra taškų iš S seka, tai $\{x_n\} \subset S$. Bet S kompaktas, tuomet išplaukia, kad galime surasti posekį, x_{N_n} toki, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{N_n} = x_0 \in S$. Naudodamiesi transformacijos ω tolydumu gauname, kad seka $\{y_{N_n} = \omega(x_{N_n})\}$ yra sekos $\{y_n\}$ posekis, kuris konverguoja į $y_0 = f(x_0) \in \omega(S)$.

⊕

Kitoje teoremoje nurodomas metodas, kurį naudojant galima sukonstruoti spaudžiantį atvaizdį fraktalų erdvėje, kai žinomas S.A. metrinėje erdvėje (X, ρ) . Kai kalbama apie S.A. fraktalų erdvėje tai turime omeny, kad dabar jau elementai bus ne taškai, o bet kokios kompaktiškos aibės.

Teorema 5. *Sakykime, kad $\omega : X \Rightarrow X$ yra metrinės erdvės (X, ρ) S.A., kurio sąspūdžio koeficientas yra s . Tada S.A., $\omega : H(X) \Rightarrow H(X)$, fraktalų erdvėje gali būti apibrėžtas tokiu būdu :*

$$\omega(B) = \{\omega(x); x \in B\}, \quad B \in H(X).$$

Pastarojo spaudžiančio atvaizdžio sąspūdžio koeficientas yra s .

⊖

Atvaizdis $\omega : X \Rightarrow X$ yra S.A., taigi šis atvaizdis tolydus, be to $\omega : H(X) \Rightarrow H(X)$, tai išplaukia iš Teoremos 5. Kitaip tariant, spaudžiantis atvaizdis apibrėžtas metrinėje erdvėje, indukuoja atvaizdį fraktalų erdvėje $H(X)$. Tada, visiems $B, C \subset H(X)$ teisinga nelygybė:

$$\begin{aligned} d(\omega(B), \omega(C)) &= \max\{\min\{\rho(\omega(x), \omega(y)); x \in B; y \in C\} \leq \\ &\max\{\min\{s\rho(x, y); x \in B; y \in C\} = sd(B, C). \end{aligned}$$

Analogiškai galima įrodyti, kad

$$d(\omega(C), \omega(B)) \leq sd(C, B).$$

Tada

$$h(\omega(B), \omega(C)) = d(\omega(B), \omega(C)) \vee d(\omega(C), \omega(B)) \leq s(d(B, C) \vee d(C, B)) \leq sd(B, C).$$

⊕

Teorema 6. *Sakykime, kad (X, ρ) metrinė erdvė ir $\{\omega_n, n \in \{1, \dots, N\}\}$ spaudžiančių atvaizdžių aibė erdvėje $(H(X), h)$. Be to tarkime, kad $s_n, n \in \{1, \dots, N\}$, yra šių S.A. sąspūdžio koeficientai, atitinkamai. Apibrėžkime transformaciją $W : H(X) \Rightarrow H(X)$ tokiu būdu: visiems $B \in H(X)$,*

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B).$$

Tada transformacija W yra spaudžiantis atvaizdis fraktalų metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, be to šios transformacijos s.k. yra lygus tokiam skaičiui: $s = \max_{n=1 \dots N} \{s_n\}$.

⊖

Įrodysime šią teoremą. Tegu $N = 2$. Jeigu $B, C \in H(X)$, tai

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C)) \leq \\ &h(\omega_1(B), \omega_1(C)) \vee h(\omega_2(B), \omega_2(C)) \leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \leq sh(B, C). \end{aligned}$$

Tarkime, kad nagrinėjamas sąryšis teisingas kokiam nors $k-1$, t.y. $N = k-1$ ir parodykime, kad šis teiginys teisingas ir sekančiam žingniui, t.y. $N = k$ (tokių skaičių aibė netuščia, nes parodėme, kad jei $k-1 = 2$ tai teiginys teisingas). Tada, remdamiesi matematinės indukcijos principu galėsime tvirtinti, kad teiginys teisingas ir visiems $N \in \mathbb{N}$. Sakykime, kad $W(\dots)$ sudaro k transformacijų. Tada

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_k(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_k(C)) \\ &= h\left((\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(B)) \cup \omega_k(B), (\omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(C)) \cup \omega_k(C)\right) \end{aligned}$$

Iš pradžioje įrodytos nelygybės bei remdamiesi indukcinė prielaida gauname, kad

$$\begin{aligned} &\leq h\left((\omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(B)), (\omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \dots \cup \omega_{k-1}(C))\right) \vee h\left(\omega_k(B) \cup \omega_k(C)\right) \\ &\leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \vee \dots \vee s_k h(B, C) \leq sh(B, C). \end{aligned}$$

\oplus

3. Iteracinės atvaizdžių sistemos (IAS)

Tarkime, kad $f : X \rightarrow X$ ir $A, B \subset X$. Šiame skyrelyje labai dažnai remsimės tokia atvaizdžių savybe, kurią minėjome įvadiniame skyriuje, t.y.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Tarkime, kad (X, ρ) yra pilna metrinė erdvė, o S.A. aibė

$$\{\omega_n, n = 1 \dots N\},$$

kurių sąspūdžio koeficientai $s_n, n \in \mathbb{N}$. Pažymėkime

$$(2) \quad s = \max\{s_n : n = 1, \dots, N\}.$$

Apibrėžimas *Iteracinė atvaizdžių sistema (trumpai IAS) vadinsime S.A. šeima,*

$$(3) \quad \{(X, \rho), \omega_n; n = 1, \dots, N, s\},$$

kurios sąspūdžio koeficientas apibrėžtas (2) lygybe.

Kitaip tariant, IAS - tai S.A. aibė, veikianti fiksuotoje metrinėje erdvėje.

Iš (5), (6) teoremų išplaukia tokia

Išvada Tarkime, kad IAS apibrėžta (3) sąryšiu. Tada transformacija

$$W : H(X) \Rightarrow H(X)$$

apibrėžta lygybe

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X), \quad (4)$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, kurios s.k. apibrėžtas (2) lygybe. Taigi,

$$h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C), \quad B, C \in H(X).$$

Tada šios transformacijos vienintelis nejudamas taškas

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A)$$

yra tokios sekos riba:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \quad B \in H(X).$$

(4) transformacija yra vadinama *Hutčkinsono transformacija*.

Transformacijos W nejudamą tašką $A \in H(X)$ vadinsime šios transformacijos *atraktoriumi*.

Pastaba Jei duota IAS, tai visada galima apibrėžti Huchinkonso transformaciją ir atvirkščiai, jei turime Hučkinso transformaciją, tai galima su šia transformacija susieti iteracinę atvaizdžių sistemą. Kitaip tariant, šių savokų neskirsime.

Sakykime, kad IAS nusakyta tokiu būdu: $\{X; \omega_1, \dots, \omega_N\}$. Tarkime, kad A_0 kokia nors metrinės erdvės kompaktiška aibė. Tegu $W^0(A_0) = A_0$. Pačią kompaktiškų aibių seką, remdamiesi paskutiniąja teorema, skaičiuojame tokia rekurentine formule:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N \omega_j(A_n), \quad n = 1, \dots$$

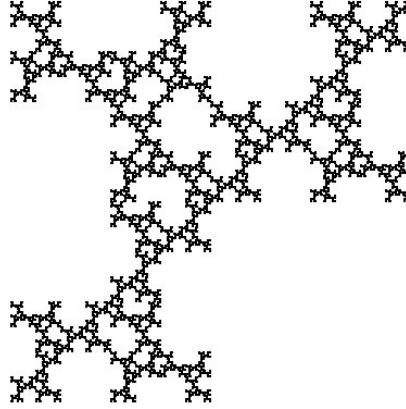
Taip sukonstruotos sekos nariai yra fraktalų erdvės elementai. Be to ši seka konverguoja (hausdorfo metrikos atžvilgiu) į IAS atraktorių.

Pavyzdys Panagrinėkime IAS, apibrėžtą tokiu būdu:

$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \\ \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \\ \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0.5 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

čia K yra kvadratas.

Šios IAS atraktorių (transformacijos $W(K) = \omega_1(K) \cup \omega_2(K) \cup \omega_3(K)$ nejudamas taškas) pateiktas 2 pav.



2 pav.

Panagrinėkime IAS, kurių atraktoriai yra klasikinės fraktalinės aibės.

Apibrėžkime IAS, kurios atraktorių yra Kantoro aibė. Tegu pradinė aibė $I = [0, 1]$. Pastebėkime, kad kiekviename iteraciniame žingsnyje esamas intervalas dalinamas į du lygius intervalus iš jo vidurinės dalies išmetant trečdalį atviro esamo intervalo. Tegu

$$\omega_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in I.$$

Iš pastarojo transformacijų apibrėžimo išplaukia, kad $\omega(I) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Tada

$$W(I) = \omega_1(I) \cup \omega_2(I).$$

Suskaičiuokime antrąją iteracinę žingsnį. Turime, kad

$$W(W(I)) = W(\omega_1(I) \cup \omega_2(I)) = \omega_1(\omega_1(I)) \cup \omega_1(\omega_2(I)) \cup \omega_2(\omega_1(I)) \cup \omega_2(\omega_2(I)).$$

Aišku, kad

$$\omega_1(\omega_1(I)) = [0, \frac{1}{9}], \quad \omega_1(\omega_2(I)) = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], \quad \omega_2(\omega_1(I)) = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad \omega_2(\omega_2(I)) = [\frac{8}{9}, 1].$$

Matome, kad ši intervalų seka sutampa su Kantoro aibę aproksimuojančios sekos antruoju nariu. Ir t.t. Taigi, šios IAS nejudamas taškas sutaps su Kantoro aibe.

Naudodami IAS visiškai analogiškai galime modeliuoti ir Kocho kreivę. Tegu pradinė aibė $I = [0, 1]$. Kantoro aibę aproksimuojančios sekos pirmasis narys gali būti aprašytas tokia transformacijų seka:

$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \quad \omega_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tada

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cup \omega_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x \in I, y = 0.$$

Šios IAS atraktorius (nejudamas taškas) bus Kocho kreivė.

4. Sankaupos aibės ir sankaupos transformacijos

Sakykime, kad (X, ρ) metrinė erdvė ir $C \in H(X)$ – kompaktiška netuščia aibė. Apibrėžkime transformaciją $\omega_0 : H(X) \Rightarrow H(X)$ tokiu būdu:

$$\omega_0(B) = C, \quad B \in H(X).$$

Tokiu būdu apibrėžtą transformaciją vadinsime sankaupos transformacija, o aibę C – sankaupos aibe. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad sankaupos transformacija yra suspaudžiantis atvaizdis metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, kurios sąspūdžio koeficientas $s = 0$.

Apibrėžimas Sakykime, kad duota IAS $\{X; \omega_1, \dots, \omega_n; s \in [0, 1]\}$. Be to tarkime, kad ω_0 kokia nors sankaupos transformacija. Tada IAS $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; s\}$ vadinama sankaupos iteracine atvaizdžių sistema (SIAS) su s.k. s . Žemiau pateiktas teiginys, yra apibendrinimas, skirtas SIAS.

Pastaba Kaip ir IAS-oje taip ir SIAS-oje apibrėžtą transformaciją $W(\cdot)$ yra vadinama *Hutčkinso* transformacija.

Išvada Tarkime, kad duota SIAS

$$\{X; \omega_n, n = 0, 1, \dots, N; s\}.$$

Tada transformacija $W : H(X) \Rightarrow H(X)$, apibrėžta lygybe

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X),$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X), h)$ su tuo pačiu s.k. s . T.y.

$$h(W(B), W(C)) = sh(B, C), \quad B, C \in H(X).$$

Vienintelis nejudamas taškas $A \subset H(X)$ yra lygus

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(A),$$

kuris yra tokios sekos riba:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \quad B \in H(X).$$

Metrinės erdvės elementų seką $\{A_n\}$ vadinsime *didėjančia (mažėjančia)*, jeigu

$$A \subset A_1 \subset \dots \subset A_k \subset \dots (A \supset A_1 \supset \dots \supset A_k \supset \dots).$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad mažėjanti aibių seka yra Koši seka. Be to, jeigu metrinė erdvė kompaktiška tai ir bet kokia didėjanti aibių seka yra Koši seka. Sakykime, kad $\{X; \omega_1, \dots, \omega_n\}$ IAS, su sancaupos aibe C , be to tarkime, kad X kompaktiška. Pažymėkime,

$$W_0(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(X)$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B).$$

Tarkime, kad $\{C_n = W_0^n(C), n \in \mathbb{N}_0\}$. Remdamiesi paskutiniąja teorema, gauname, kad seka $\{C_n\}$ yra Koši seka erdvėje $H(X)$, kuri konverguoja į IAS atraktorių. Be to, seka

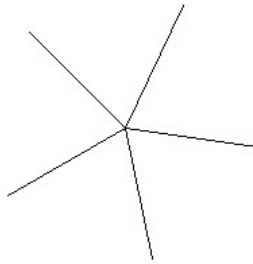
$$C_n = C \cup W(C) \cup W^2(C) \cup \dots \cup W^n(C)$$

yra didėjanti, kompaktiškų aibių seka. Vadinas, $W_0(A) = A$.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad SIAS kitaip negu IAS išsaugo iteracijos ankstesnius narius ir sekantys sekos nariai, t.y. su didesniais indeksais apima ir prieš tai buvusius sekos narius.

Naudojant SIAS galima kurti įvairias "augančias struktūras" kurios vystosi ant jau susiformavusios struktūros.

Tarkime, kad aibė $C = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5$. Aibės C grafinis vaizdas pateiktas 3 pav.



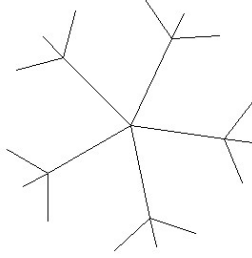
3 pav.

Laikome, kad $\omega_0(X) = C$, bet kokiai aibei X . Tegu

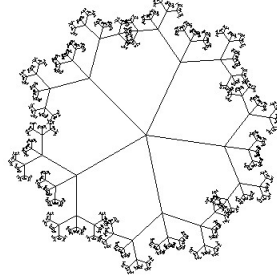
$$W(C) = C \cup \omega_1(C) \cup \omega_2(C) \cup \omega_3(C),$$

o transformacijos W reikšmė, interpretuojant ją grafiškai, pateikta 4 pav.

Žemiau pateiktuose paveikslėliuose pateikti pirmasis ir septintasis sekos nariai.



4 pav.



5 pav.

Panagrinėkime šią problemą teoriškai. Nagrinėsime metrinę erdvę (\mathbb{R}^2, ρ_2) , t.y. plokštumą. Tarkime, kad $C \subset \mathbb{R}^2$ yra medžio kamienas, su vienodu simetriškų šakų skaičiumi į abi kamieno puses, stovintis vertikaliai Ox ašiai, kurio pradžia taške $(0, 0)$. Be to kiekvienam $B \in H(X)$, $\omega_0(B) = C$ ir

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Parodysime, kad $(\mathbb{R}^2; \omega_0, \omega_1)$ yra IAS su sankaupos aibe, bei rasime jos sąspūdžio koeficientą. Pažymėkime

$$A_n = W^n(A_0), \quad n \in \mathbb{N}$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N \omega_n(B), \quad B \in H(\mathbb{R}^2).$$

Parodysime, kad A_n apima pirmuosius $n + 1$ medžių, skaitant iš kairės į dešinę. Tam, kad parodyti, jog $\{\mathbb{R}^2; \omega_0, \omega_1\}$ yra IAS, mums pakanka rasti šios IAS s.k..

Visų pirma pastebėkime, kad

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,75 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ir

$$\rho(\omega_1(x), \omega_1(y)) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2\right)^2} =$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{3}{4} \rho(x, y).$$

Vadinasi, transformacijos ω_1 sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tuo pačiu ir nagrinėjamos IAS sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tarkime, kad pradinė sekos aibė $A_0 = C$. Skaičiuokime $\omega_1^n(A_0)$ naudodami afininę transformaciją

$$(5) \quad A(x - x_f) + x_f,$$

čia x_f yra atvaizdžio f nejudamas taškas. Tada šio taško koordinatės yra tokios:

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \implies x = 1; y = \frac{3}{4}y \implies y = 0.$$

Naudodami gautas reikšmes, (5) reiškini perrašome tokiu būdu:

$$\omega_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad $\omega^n_1(A_0)$ yra aibės C suspaudimas dydžiu $(3/4)^n$ bei postūmis dydžiu $1 - (3/4)^n$. Kitaip tariant, gauname vis mažesnių medžių seką, išsidėsčiusių vienoje tiesėje, kurie neapbrėžtai traukiasi į šios aibės atraktorių, kuris tokios pat prigimties. Taigi

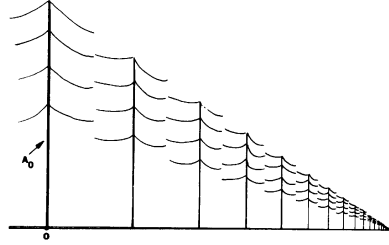
$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(A_0),$$

čia sekos aibės apibrėžiamos taip:

$$A_1 = C \cup \omega_1(C), A_2 = C \cup \omega_1(C \cup \omega_1(C)) = C \cup \omega_1(C) \cup \omega_1^2(C), \dots,$$

$$A_k = \bigcup_{i=0}^k \omega_1^i, \quad k \leq n.$$

6 pav. pateikiama šios iteracijos vaizdinė interpretacija.



6 pav.

Sakykime, kad C – medžio kamienas, kurio pagrindas remiasi į koordinatinių pradžių tašką statmenai Ox ašiai, kitaip tariant, kamienas Oy ašyje. 'Apauginkime' šį medį naudodami SIAS. Tarkime, $\omega_0(B) = C, \quad B \in H(X)$.

$$\omega_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0.8 \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = 20^\circ;$$

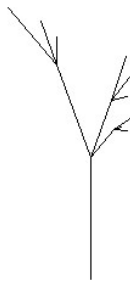
$$\omega_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0.5 \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = -20^\circ;$$

$$\omega_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0.3 \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = -40^\circ;$$

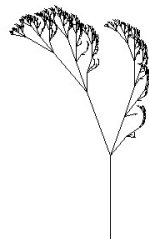
Šios SIAS pirmosios, antrosios bei 8-osios iteracijos grafiniai vaizdai pateikti 7 pav., 8 pav., 9 pav., atitinkamai.



7 pav.



8 pav.

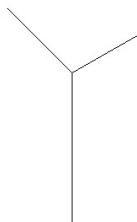


9 pav.

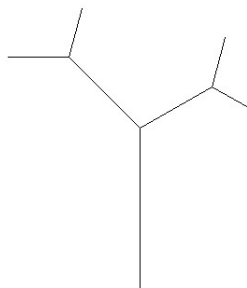
10-12 pav. pateikiama SIAS pirmos, antros bei dešimtos iteracijų grafiniai vaizdai, kai SIAS transformacijos yra tokios:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.6 \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = -45^\circ;$$

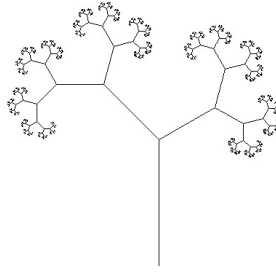
$$\omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = 60^\circ.$$



10 pav.



11 pav.



12 pav.

Kitaip tariant, naudojant transformaciją ω_1 , "kamieną" pasukame kampu ξ , o šios transformacijos sąspūdžio koeficientas yra 0,6. Transformacija ω_2 pasuka "kamieną" kampu ψ , o transformacijos sąspūdžio koeficientas yra 0,5 (kaip ir aukščiau pateiktame pavyzdyje, laikome, kad kamienas yra Oy ašyje).

Tarkime, kad nagrinėjamas fraktalas yra IAS atraktorius, kurios Hutčkinsono transformaciją sudaro lygiai k transformacijų:

$$W(X) = \omega_1(x) \cup \dots \cup \omega_k(X).$$

Sudarysime algoritmą šios transformacijos atraktoriaus grafiniam vaizdui rasti. Bet prieš tai aptarkime šią idėją. Sutapatinkime kompiuterio monitorių su plokštuma, tada pikseliai- šios plokštumos taškai. Šiuos taškus (pikselius) galime koduoti skaičiais ir perrašyti į matricą, kuri kurioje bus saugoma informacija apie pikselius. Jei ekranas tuščias, tai matrica bus lygi nulinėi matricai O . Tarkime, kad X yra kompaktiška aibė (koks nors vaizdas). Tada šios aibės elementus (pikselius) atitinkantys matricos elementai bus žymimi 1, jei kompaktiškai aibei elementas nepriklauso, tai matricos elementas bus lygus 0. Tarkime, kad fraktalas, kurį norime modeliuoti yra vienetinio kvadrato $n \times n$ eilės viduje. Jei kvadratas vienetinis, tai plokštumoje kvadrato taškų koordinatės yra (x, y) , $0 \leq x, y \leq 1$. Susiekime matricos M elementus su plokštumos (šio kvadrato) taškais tokiu būdu: jei

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{i-1}{n-1} \\ \frac{j-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

tai plokštumos taškui (x, y) priskiriame $i = [x(n-1)] + 1$, $j = [y(n-1)] + 1$ ($[u]$ yra skaičiaus u sveikoji dalis). Kitaip tariant, matricoje M bus saugomos kvadrato taškų atitiktys pikseliais. Matome, kad šiuo atveju tarp vienetinio kvadrato ir matricos $M = m_{ij}$ taškų egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis. Aišku, kad

$$m_{00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m_{nn} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}.$$

Sekantis žingsnis- perkelti šią matricą M į monitoriaus ekraną. Pastebėsime, kad matricoje M bus saugomi ne viso kvadrato taškai, bet tik kompaktiškos aibės $S \in K$, kuri yra vienetiniame kvadrato, taškai. Visų pirma skaičiuojame transformacijos $W(S)$ reikšmės pagalbinėje matricoje A . Pastebėsime, kad kompaktiškos aibės elementas 1 yra atvaizduojamas į kelis, ne daugiau negu k , matricos M elementų. Šiuos $W(S)$ elementus, saugomus aibėje A grąžiname aibei S ir procesą kartojame. Formalizuokime šį algoritmą.

Algoritmas

Iv. a) $6 \times k$ IAS matrica, kurios i - oje eilutėje yra i - osios afininės transformacijos koeficientai;

b) $n \in \mathbb{N}$ – rezoliucija;

c) $N \in \mathbb{N}$ – iteracijų skaičius;

Vykdymas

```

 $M[n, n] = I$  – matrica reprezentuojanti kompaktišką sritį, kurios visi elementai vienetai;
 $A[n, n] = O$  – nulinė matrica kurios elementai priklausys fraktalui;
for(1,  $n$ ,  $i+$ )
for(1,  $n$ ,  $j+$ )
{
{
 $(x, y)$  vienetinio kvadrato taškai, atitinkantys elementą  $m_{i,j} \in M$ ;
if( $m_{i,j} = 0$ );
else
for(1,  $k$ ,  $p+$ )
 $(x', y') := f^p(m_{i,j})$ ;
{
Nustatome elemento  $(x', y')$  poziciją (koordinates) matricoje  $M$ , tarkime ši padėtis  $(i', j')$ 
 $a_{i'j'} := 1$ ;
 $M := A$ .
}
}
} Išv. Išvedame matricą  $M$  į ekraną.

```

5. Fraktalų modeliavimas

Teorema 7. Tarkime, kad (X, ρ) – pilna metrinė erdvė. Be to, $L \in H(X)$ kokia nors kompaktiška aibė iš fraktalų erdvės. Tegu $\epsilon > 0$ koks nors laisvai pasirinktas fiksuotas skaičius. Sudarykime IAS (SIAS) tokiu būdu:

$$\{X; (\omega_0), \omega_1, \dots, \omega_n, s\}$$

$$s \in [0, 1),$$

$$h(L; \bigcup_{k=1, (k=0)}^n \omega_k(L)) \leq \epsilon.$$

Tada

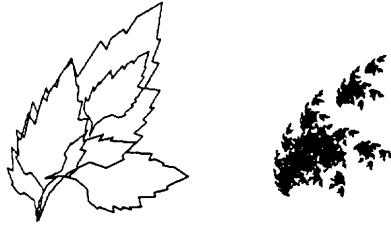
$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s},$$

čia A yra IAS (SIAS) atraktorius. Kitaip tariant,

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h(L, \bigcup_{k=1, (k=0)}^n \omega_n(L)), \forall L \in H(X).$$

Ši teorema nurodo metodą, kurį naudodami galime rasti IAS, turinčią atraktorių arti kokios nors fiksuotos aibės. Taigi, reikia rasti suspaudžiančių transformacijų seką, apibrėžtą toje pat erdvėje kaip ir duotoji aibė, tokią, kad duotosios aibės vaizdų sąjunga (šios transformacijos atžvilgiu) būtų arti duotosios aibės. Be to, minimos teoremos dėka, mes galime nurodyti kreivių seką, kuria "užpildome" plokštumos sritį. Kiek plačiau šią problemą nagrinėsime vėliau.

Sakykime, kad $L \subset \mathbb{R}^2$ yra medžio lapo projekcija plokštumoje, kurio siena nusakyta kokia nors uždara laužte (lapo projekcija laikykime 13 pav. tamsų lapą). Ši laužtė ir bus mūsų iteracijų sekos pradinė aibė. Sakykime, kad IAS transformacijų aibę sudaro keturios suspaudžiančios transformacijos, kurių sąjunga pavaizduota 13 pav. Šio pav. dešinėje pusėje pavaizduotas šios transformacijų sekos atraktorius. Nesunku matyti, kad atraktorius nėra panašus į originalą, o šio fenomeno priežastis ta, kad atstumas tarp atraktoriaus ir transformacijų sekos per didelis. (Pastebėkime, kad ir šiuo atveju gauname gana įdomų rezultatą!)



13 pav.

14 pav. pavaizduota kita IAS. Hausdorfo atstumas tarp keturių pirmųjų šios spaudžiančių transformacijų sąjungos ir originalo yra žymiai mažesnis, negu sekos, kuri buvo pavaizduota 13 pav. . Skirtumą tarp IAS atraktoriaus ir originalo, 14 pav., pabrėžia baltos dėmelės, pateiktame paveikslėlyje.



14 pav.

Lema Sakykime, kad (H, h) fraktalų erdvė. Tegu $W : H \Rightarrow H$ koks nors S.A., kurio s.k. $s \in [0, 1)$. Sakykime, kad šios transformacijos nejudamas taškas yra $A \in H$. Tada teisinga nelygybė:

$$h(X, A) \leq \frac{h(X, W(X))}{1 - s}, X \in A.$$

⊖

Žinome, kad metrika $h(A, X)$, $X \in H$, tolydi kintamojo X funkcija. Todėl

$$\begin{aligned} h(X, A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(X, W^n(X)) \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \leq n} h(W^{m-1}(X), W^m(X)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(X, W(X))(1 + \dots + s^{n-1}) \leq \\ &\frac{1}{s - 1} h(X, W(X)), \quad X \in H. \end{aligned}$$

⊕

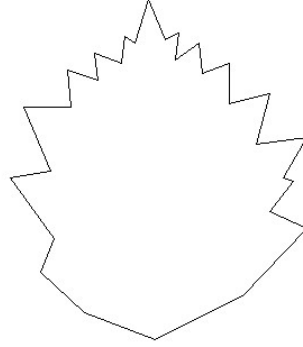
Iš paskutiniosios lemos išplaukia Teoremos 7 įrodymas. ⊕

Modeliuodami kokį nors objektą, mes imame pradinę aibę ir sudarome IAS (SIAS), uždengdami šią aibę transformacijų, kuriomis sudarome Hučkinsono transformaciją, vaizdais nuo šios aibės, o denginių išdėstymą parenkame priklausomai nuo situacijos ir po to iteruojame šios IAS (SIAS) transformaciją $W(\dots)$. Šios transformacijos atraktoriaus ir bus laikomas nagrinėjamo objekto modeliu. Pateiksime keletą pavyzdžių.

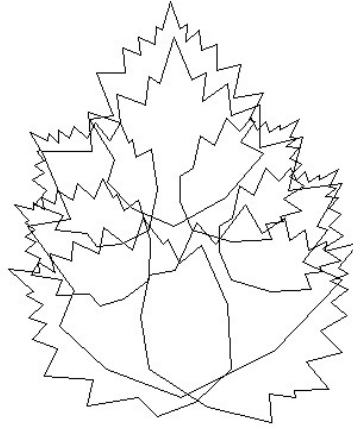
Modeliuosime krūmą. Iš laužčių sudarykime pradinę aibę L , kuri apytiksliai reprezentuotų šio krūmo kontūrus, 15 pav. Sudarome IAS naudodami transformacijas $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$. Šios septynios transformacijos pradinę aibę L suspaudžia įvairiais sąspūdžio koeficientais, pasuka ir "užkloja" aibę L transformacija

$$W(L) = \omega_1(L) \cup \dots \cup \omega_7(L)$$

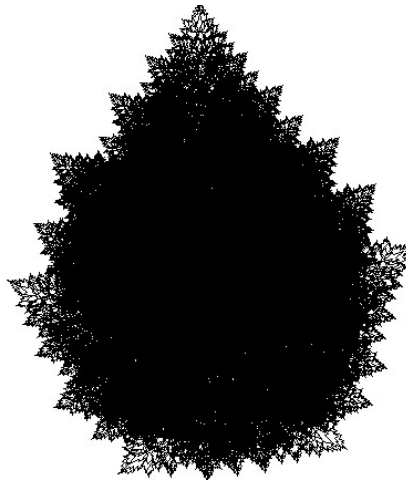
2 pav. ir 3 pav. yra pateiktas transformacijos $W^7(L)$ grafinis vaizdas.



15 pav.



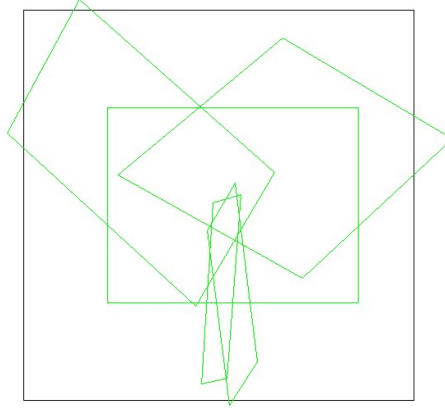
16 pav.



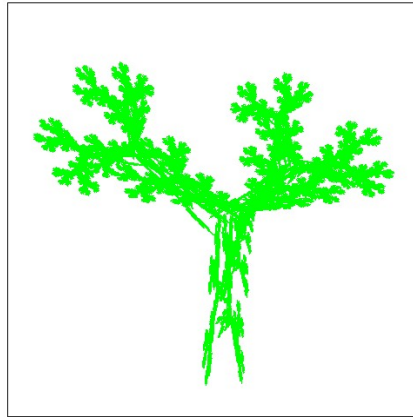
17 pav.

Modeliuosime "atogražų" medį. Tarkime, kad K yra kvadratas. Naudodami keturias transformacijas šį kvadratą transformuojame į keturis keturkampius iš kurių "sudėliojame"

”atogražų” medžio pirmąjį artinį (18 pav.). Atlikę aštuonias transformacijas $W^8(K)$, $W(K) = \omega_1(K) \cup \dots \cup \omega_5(K)$ gauname tokį grafinį vaizdą:



18 pav.



19 pav.

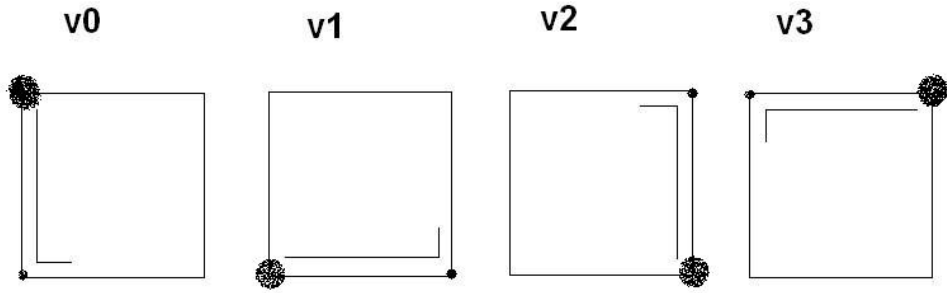
6 Simetrijų grupė ir fraktalų modeliavimas

Šiame skyrelyje aptarsime, kaip galima modeliuoti fraktalus, naudojant specialias transformacijas. Šios transformacijos, su tarp jų apibrėžta kompozicijos operacija sudaro struktūrą, kuri vadinama simetrijų grupe, o šios transformacijos vadinamos, simetrijų grupės transformacijomis. Pastebėsime, kad tai tiesinės transformacijos, taigi jos aprašomos matricomis. Modeliuodami fraktalus mes naudosime ne tik jas, bet ir afinines transformacijas gautas iš minėtųjų transformacijų. Priminsime, kad afininės transformacijos tai tiesinės transformacijos su postūmiu.

Tarkime duotas kvadratas v_0 . Žemiau pateiktame 20 pav. pirmas iš kairės. Kad lengviau būtų stebėti šio kvadrato transformacijas, dvi kvadrato viršūnes pažymėjome. Pastebėsime, kad v_1, v_2, v_3 yra kvadrato v_0 transformacijos. Šie kvadratai gaunami pradinį kvadratą sukant $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ kampais, atitinkamai. Tai atlikti galime naudodami posūkio transformaciją:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \xi & -r \sin \xi \\ r \sin \xi & r \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kai $r = 1$.



20 pav.

Raskime transformacijų, kurios pradinį kvadratą v_0 transformuoja į kvadratus v_1, v_2, v_3 analizines išraiškas.

Pažymėkime $T_1 : v_0 \rightarrow v_1$. Kadangi tai posūkio 90° kampu matrica, tai

$$T_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

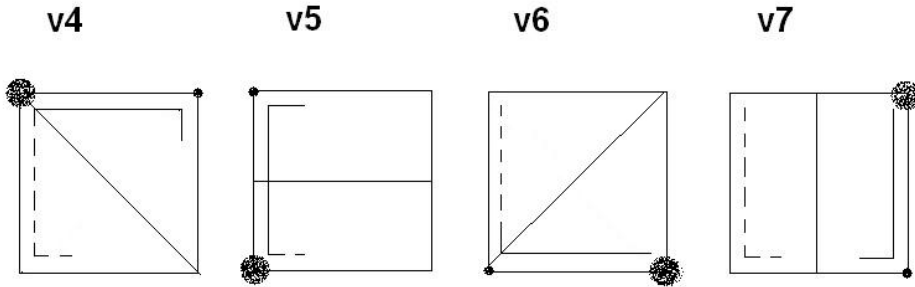
Analogiškai samprotaudami gauname, kad $T_2 : v_0 \rightarrow v_2$.

$$T_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 1 \\ -y + 1 \end{pmatrix},$$

ir $T_3 : v_0 \rightarrow v_3$

$$T_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + 1 \end{pmatrix}.$$

21 pav. yra pateikiamos dar keturios pradinio kvadrato v_0 transformacijos, kurios gaunamos šį kvadratą simetriškai vaizduojant 21 pav. nurodytų ašių atžvilgiu.



21 pav.

Raskime transformacijų, kurios pradinį kvadratą v_0 transformuoja į kvadratus v_4, v_5, v_6, v_7 , matricas A_4, A_5, A_6, A_7 , atitinkamai.

Panagrinėkime, kaip gaunamas v_0 vaizdas v_4 . Laikykite, kad kvadrato apatinė kairioji viršūnė yra koordinatų pradžios taške, o kvadratas yra vienetinis. Tada kvadratas v_4 gaunamas taikant tokią transformacijų seką pradiniam kvadratui:

- atliekame postūmį vektoriaus $(-1, -1)$ kryptimi;
- pasukame teigiama kryptimi 90° kampu;
- atliekame simetrinį vaizdavimą Ox ašies atžvilgiu.

Tada transformaciją $T_4 : v_0 \rightarrow v_4$ galime aprašyti tokiu būdu:

$$T_4(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y \\ 1 - x \end{pmatrix}.$$

Raskime transformaciją $T_5 : v0 \rightarrow v5$.

Panagrinėkime kokius veiksmus reikia atlikti, kad gauti norimą rezultatą:

- a) atliekame postūmį vektoriaus $(0, -1)$ kryptimi;
- b) atliekame simetrinį vaizdavimą Ox ašies atžvilgiu.

Tada transformaciją $T_5 : v0 \rightarrow v4$ galime aprašyti tokiu būdu:

$$T_5(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - y \end{pmatrix}.$$

Transformacija $T_6 : v0 \rightarrow v6$ bus sudaroma tokiu būdu:

- a) atliekame simetrinį vaizdavimą Oy ašies atžvilgiu;
- c) atliekame posūkį 90^0 kampų, neigiama kryptimi.

Tada transformaciją $T_6 : v0 \rightarrow v6$ galime apibrėžti tokiu būdu:

$$T_6(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

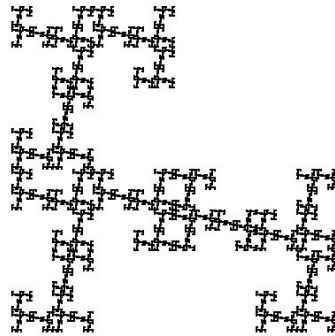
Samprotaudami visiškai analogiškai gauname, kad

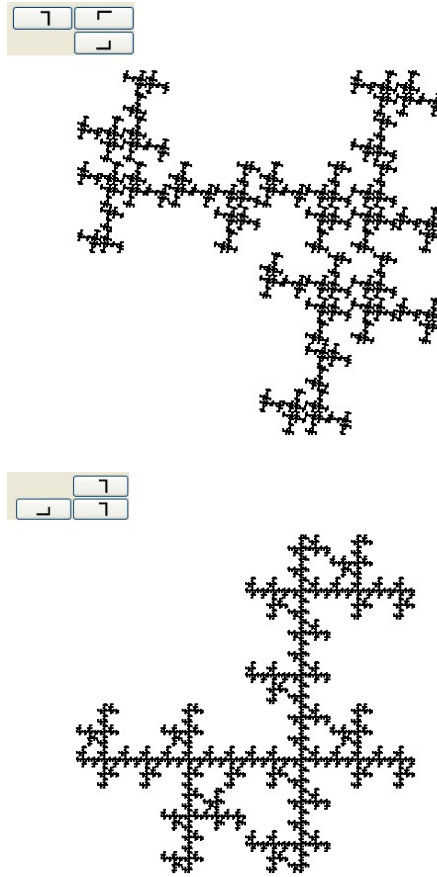
$$T_7(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ y \end{pmatrix}.$$

Visų šių transformacijų matricos (kartu su spaudimo koeficientu 0.5) pateikiamos žemiau.

$$\begin{aligned} v0(x, y) &= \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}, & v1(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}, \\ v2(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & v3(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ v4(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & v5(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ v6(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}, & v7(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Žemiau pateiktuose pav. yra pateikiamas transformacijų kodas bei IAS atraktorius.





22 pav.

7 Modeliavimas naudojant atsitiktinumą. "Chaosas žaidimas"

Šiame skyrelyje aptarsime galimybę modeliuoti fraktalus iteracijoms naudojant tik vieną tašką.

IAS atraktoriui modeliuoti yra naudojamas ir taip vadinamas chaoso žaidimas. Trumpai aprašysime jo esmę. Tarkime, kad duota IAS $\{X; \omega_n : n = 1, \dots, N\}$. Be to tarkime, kad $\{p_i : i = 1, \dots, N\}$ yra tokie skaičiai, kad

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i > 0, i = 1, \dots, N.$$

Tarkime, kad nagrinėjama IAS yra apibrėžta afininėmis transformacijomis, kurių tiesinės dalies matrica yra A_i . Apibrėžkime minėtuosius skaičius tokiu būdu:

$$(6) \quad p_i = \frac{|\det A_i|}{\sum_{i=1}^N |\det A_i|}.$$

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad kartais gali atsitikti taip, kad $|\det A_i| = 0$. Taip atsitiks tada, kad matrica yra išsigimusi. Šiuo atveju nulinį determinatą pakeisime mažu teigiamu skaičiumi.

Tarkime, kad $x_0 \in X$ bet koks, laisvai pasirinktas skaičius. Parinkime $x_n \in \{\omega_1(x_{n-1}), \dots, \omega_N(x_{n-1})\}$ kai $n = 1, 2, \dots$. Tegu skaičiaus $x_n = \omega_i(x_{n-1})$ parinkimo dažnumas apibrėžiamas tikimybe p_i . Tokiu būdu sukonstruojame atsitiktinių skaičių (pikselių) seką $\{x_n\} \in X$. Tarkime, kad duota SIAS $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$. Laikome, kad ir $p_i > 0$ visiems $i = 1, \dots, N$ ir p_i apibrėžti (6) lygybėmis.

Beje, kai reikšmė $\omega_0(x_{n-1}) = x_n$, kokiam nors n , tai tuomet x_n turėtų priklausyti sankaupos aibei. Aišku, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja į SIAS atraktorių. Kaip jau buvo minėta, jei $\det A_i = 0$,

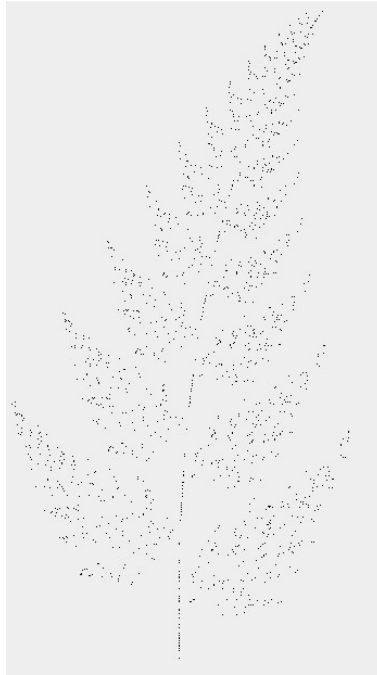
tai šiuo atveju parenkama maža $p_i = \delta$, $0 < \delta < \min_{j \neq i} |\det A_j|$ skaičiaus $\omega_i(x_{n-1}) = x_n$ pasirodymo tikimybė.

Tad bendru atveju galime tikimybių apibrėžimo formulę užrašyti tokiu būdu:

$$(6) \quad p_i = \frac{\max(\delta, |\det A_i|)}{\sum_{i=1}^N \max(\delta, |\det A_i|)}.$$

4.8 paveikslėlyje iliustruojama, kaip didinant iteracijų skaičių "gimsta" lapas. Buvo naudotos afininės transformacijos

$$\omega_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i x + t_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$



23 pav.



24 pav.

8 Plevenimas vėlyje. Fraktalai priklausantys nuo parametro

Paskutinioji teorema suteikia tokią galimybę - apversti priartinimo problemą. Tarkime, kad duotoje aibėje L , apibrėžėme IAS, kurios atraktorius yra fiksuota aibė. Tada teisinga tokia teorema.

Teorema 8. *Tarkime, kad*

$$(Y, \rho_y), (X, \rho_x)$$

dvi metrinės erdvės ir S.A. šeima

$$f : Y \times X \Rightarrow X,$$

kurios s.k. $s \in [0, 1)$, t.y. visiems

$$y \in Y, f(y, \circ)$$

yra spaudžiantis atvaizdis erdvėje X , be to šis atvaizdis yra tolydus parametro y atžvilgiu. Jei $x_f(y)$ yra nejudamas šios transformacijos taškas, tai atvaizdis $x_f : Y \Rightarrow X$ yra tolydi funkcija.

Kitaip tariant, nejudamas taškas nuo parametro priklauso tolydžiai.

⊖