Hausaufgaben zum 25./26. 10. 2012

Arne Struck

2. November 2012

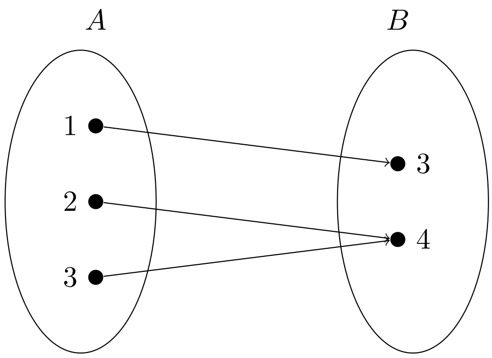
1.

a)

$$A = 1,2,3 \quad B = 3,4$$
$$f : A \to B \quad g : A \to B \quad h : A \to B$$

(i)

A	B
1	3
2	4
3	4



(ii)

$g : A \to B$ kann nicht injektiv sein, da A mächtiger ist, als B. Das hat zur Folge, dass die Bedingung für Injektivität nicht erfüllt werden kann.

(iii)

$h : A \to B$ kann nicht bijektiv sein, da g nicht injektiv ist.

b)

$$A = 1, 2, 3 \quad B = 3, 4, 5$$
$$f : A \to B \quad g : A \to B \quad h : A \to B$$

(i)

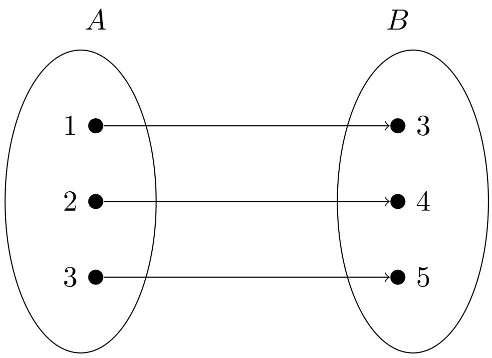
f ist nicht existent, da A und B die gleiche Mächtigkeit besitzen und Surjektivität sich in diesem Fall nicht ohne Injektivität erzeugen lässt.

(ii)

g ist nicht existent, da A und B die gleiche Mächtigkeit besitzen und Injektivität sich in diesem Fall nicht ohne Surjektivität erzeugen lässt.

(iii)

A	B
1	3
2	4
4	5



c)

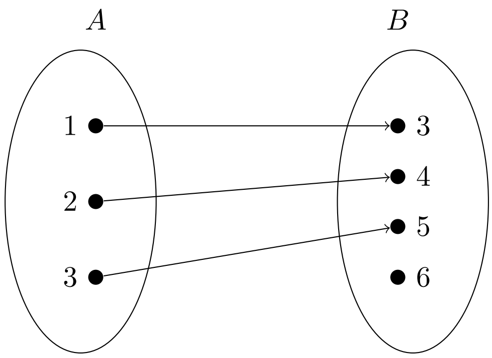
$$A = 1, 2, 3 \quad B = 3, 4, 5, 6$$
$$f : A \to B \quad g : A \to B \quad h : A \to B$$

(i)

f ist nicht darstellbar, da B mächtiger ist, als A und bei dem Versuch Surjektivität herzustellen somit die Funktionsbedingung verletzt werden würde.

(ii)

A	B
1	3
2	4
3	5



(iii)

h ist nicht darstellbar, da A und B nicht die gleiche Mächtigkeit besitzen.

2.

$$f(x) = x^2 - 5$$
$$g(x) = 5x - 3$$
$$h(x) = x + 5$$

f(x):

Beh.: $f(x)$ ist nicht injektiv.
Annahme: $f(x)$ ist injektiv,
$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \neq y : f(x) \neq f(y)$

$$f(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$$
$$f(2) = (2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$$
$$f(-2) = f(2) \quad \textbf{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht injektiv $\square$

Beh.: $f(x)$ ist nicht surjektiv.
Annahme: $f(x)$ ist surjektiv

$$\begin{aligned} \text{sei } y &\in \mathbb{Z} \\ f(x) = y &= x^2 - 5 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{y+5} \\ \text{sei } y_1 &= 1 \\ \Rightarrow x_1 &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$x_1 \notin \mathbb{Z} \quad \textbf{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht surjektiv $\square$
Da f weder surjektiv noch injektiv ist, ist f auch nicht bijektiv.

g(x):

Beh.: g ist injektiv.
Annahme: g ist nicht injektiv,
$\exists\ x, y \in \mathbb{Z} : x \neq y : f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 5x - 3 &= 5y - 3 \\ x &= y \quad \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ g ist injektiv $\square$

Beh.: g ist nicht surjektiv.
Annahme: g ist surjektiv.

$$\begin{aligned} \text{sei } y &\in \mathbb{Z} \\ g(x) = y &= 5x - 3 \\ \frac{y+3}{5} &= x \end{aligned}$$

$$\frac{y+3}{5} \notin \mathbb{Z} \quad \textbf{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ g ist nicht surjektiv $\square$
$\Rightarrow$ g ist nicht bijektiv, da g nicht surjektiv ist.

h(x):

Beh.: h ist injektiv.
Annahme: h ist nicht injektiv,
$\exists\ x, y \in \mathbb{Z} : x \neq y : f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x + 5 &= y + 5 \\ x &= y \quad \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ h injektiv $\square$
Beh.: h ist surjektiv.

$$\begin{aligned} &\text{sei } y \in \mathbb{Z} \\ &h(x) = y = x + 5 \\ &\Leftrightarrow y - 5 = x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ h ist surjektiv, da hier eine Subtraktion vorliegt. Hierdurch ist gezeigt, dass jedes Element in der Bildmenge durch mindestens ein Element aus der Ursprungsmenge dargestellt werden kann $\square$
Da h sowohl injektiv, als auch surjektiv ist, ist h bijektiv $\square$

3.

a)

$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$f(n, m) = n - m$

Beh.: f ist nicht injektiv.
Annahme: f ist injektiv,
$\forall (n, m), (x, y) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) : n \neq x,\ m \neq y : f(n, m) \neq f(x, y)$

$$\begin{aligned} \text{sei } n &= 3 \\ m &= 4 \\ x &= 2 \\ y &= 3 \\ f(n, m) &= -1 = f(x, y) \quad \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist nicht injektiv $\square$

f ist surjektiv, da jede Ganze Zahl sich durch die Subtraktion zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, somit ist die Surjektivität erfüllt.

b)

$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$g(n, m) = (n + m, n - m)$

Beh.: g ist injektiv
Annahme: g ist nicht injektiv,
$\forall (n, m), (x, y) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) : n \neq x,\ m \neq y : g(n, m) = g(x, y)$

$$\begin{aligned} f(n, m) &= (n + m, n - m) \\ f(x, y) &= (x + y, x - y) \\ f(n, m) &= f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &I && n + m = x + y \\ &II && n - m = x - y \end{aligned}$$

$$I + II :$$

$$\begin{aligned} 2n &= 2x \\ \Leftrightarrow n &= x \end{aligned}$$

$$I - II :$$

$$\begin{aligned} 2m &= 2y \\ \Leftrightarrow m &= y \end{aligned}$$

Widerspruch

$\Rightarrow$ g ist injektiv.

Beh.:g ist nicht surjektiv. Annahme: g ist surjektiv.

$$f(n, m) = (2, 9)$$

I:$= n + m$
II: $9 = n - m$

I+II:

$$\begin{aligned} 11 &= 2n \\ \Leftrightarrow n &= \frac{11}{2} \notin \mathbb{Z} \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ g ist nicht surjektiv $\square$

c)

$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h(n) = ((n+1)^2, n^2+1)$

Beh.: h ist injektiv.
Annahme: h ist nicht injektiv,
$\forall n, x \in \mathbb{Z} : n \neq x : h(n) = h(x)$

$$\begin{aligned} h(n) &= (n+1)^2, n^2+1) \\ h(x) &= (x+1)^2, x^2+1) \\ h(x) &= h(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+1 &= n^2+1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2+2x+1 &= n^2+2n+1 \\ \Leftrightarrow x &= n \quad \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ h ist injektiv $\square$

Beh.: h ist nicht surjektiv.
Annahme:h ist surjektiv.

$$\text{sei } h(n) = (1,3)$$

:

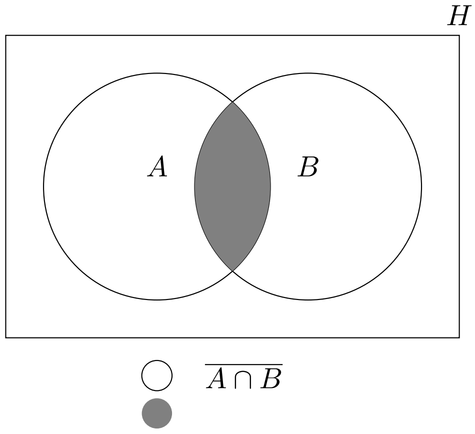
$$\begin{aligned} 3 &= n^2+1 \\ \Leftrightarrow 2 &= n^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &= |n| \\ \sqrt{2} &\notin \mathbb{Z} \quad \textbf{Widerspruch} \end{aligned}$$

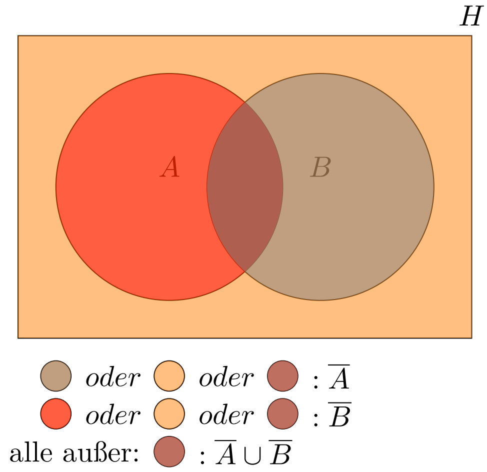
$\Rightarrow$ h ist nicht surjektiv, da jegliche $(x,3) : x \in \mathbb{Z}$ nicht darstellbar sind.

4.

a)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0





b)

$$M = \{a, b, c, d\}$$

$$\begin{aligned} P(M) = \Big\{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \\ &\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \\ &\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\Big\} \end{aligned}$$

c)

$$M = \{a\}\ P(M) = \Big\{\emptyset, \{a\} Big\}$$

(i) falsch
(ii) falsch
(iii) richtig
(iv) falsch
(v) falsch
(vi) richtig