

Hausaufgaben zum 29. 10. 2012

Arne Struck 6326505

9. Januar 2013

1.

a)

H_1 ist keine Untergruppe von G , da kein neutrales Element (1) vorhanden ist.

H_2 ist keine Untergruppe von G , da sie nicht abgeschlossen ist. So entspricht $4 \cdot 8 = 32$ in \mathbb{Z}_{13} der 6, welche kein Element von G ist.

H_3 ist eine Untergruppe von G , da alle Axiome erfüllt sind, wie folgende Multiplikationstabelle für die Multiplikation in \mathbb{Z}_{13} zeigt:

| | 1 | 12 |
|----|----|----|
| 1 | 1 | 12 |
| 12 | 12 | 1 |

b)

$$H = \{1, 3, 9\}$$

$$H_2 = \{2, 6, 5\}$$

$$H_4 = \{4, 12, 10\}$$

$$H_7 = \{7, 8, 11\}$$

2.

a)

b)

c)

3.

a)

$$(4x^2 - x + 2) + (2x^3 + x^2 - 3x + 2) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{aligned}
(4x^2 - x + 2) \cdot (2x^3 + x^2 - 3x + 2) &= (8x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2) \\
&\quad + (-2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x) \\
&\quad + (4x^3 + 2x^2 - 6x + 4) \\
&= 8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 8x + 4
\end{aligned}$$

b)

Als erstes werden die einzelnen Produkte berechnet, welche $a \cdot x^7$ als Ergebnis haben.

$$\begin{aligned}
x^7 \cdot -2 &= -2x^7 \\
3x^6 \cdot 2x &= 6x^7 \\
6x^5 \cdot -3x^2 &= -18x^7 \\
3x^4 \cdot 3x^3 &= 9x^7 \\
7x^3 \cdot -x^4 &= -7x^7 \\
8x^2 \cdot 5x^5 &= 40x^7 \\
x \cdot 6x^6 &= 6x^7 \\
2 \cdot x^7 &= 2x^7
\end{aligned}$$

Nun wird aus den Teilergebnissen eine Summe gebildet anhand der der Koeffizient von x^7 im Produkt von $a(x)$ und $b(x)$ abgelesen werden kann.

$$-2x^7 + 6x^7 - 18x^7 + 9x^7 - 7x^7 + 40x^7 + 6x^7 + 2x^7 = 36x^7$$

c)

$$\begin{aligned}
a(x) \cdot b(x) &= (4x^3 + 2x^2 + 3x + 2) \cdot (3x^4 + x^2 + 3) \\
&= (2x^7 + 4x^5 + 2x^3) \\
&\quad + (x^6 + 2x^4 + x^2) \\
&\quad + (4x^5 + 3x^3 + 4x) \\
&\quad + (x^4 + 2x^2 + 1) \\
&= 2x^7 + x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 4x + 1
\end{aligned}$$

4.**a)**

$$\begin{array}{r}
 \left(\begin{array}{rrrr} x^5 + 2x^4 + 3x^3 & + x^2 & + 4x & + 2 \end{array} \right) : \left(x^2 + 4x + 3 \right) = x^3 - 2x^2 + 8x - 25 + \frac{80x + 77}{x^2 + 4x + 3} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr} - 2x^4 & & + x^2 & \\ 2x^4 + 8x^3 & + 6x^2 & & \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr} 8x^3 & + 7x^2 & + 4x & \\ - 8x^3 - 32x^2 & - 24x & & \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr} - 25x^2 & - 20x & + 2 & \\ 25x^2 + 100x & + 75 & & \end{array} \\
 \hline
 80x + 77
 \end{array}$$

b)

Nebenrechnung: $\left(\begin{array}{rrrr} 6x^5 + 7x^4 & - 7x^3 - 22x^2 + 25x - 15 \\ - 6x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 18x \end{array} \right) : \left(3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9 \right) = 2x + 1 + \frac{3x^3 - 4x^2}{3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9}$

$$\begin{array}{rrrr}
 3x^4 & + 5x^3 - 10x^2 + 43x - 15 \\
 - 3x^4 & - 2x^3 + 6x^2 + 6x + 9 \\
 \hline
 3x^3 & - 4x^2 + 49x - 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \left(\begin{array}{rrrr} 3x^4 + 2x^3 & - 6x^2 & - 6x & - 9 \end{array} \right) : \left(3x^3 - 4x^2 + 49x - 6 \right) = x + 2 + \frac{-47x^2 - 98x + 3}{3x^3 - 4x^2 + 49x - 6} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr} 6x^3 - 55x^2 & & - 9 & \\ - 6x^3 & + 8x^2 - 98x + 12 & & \end{array} \\
 \hline
 - 47x^2 - 98x + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \left(\begin{array}{rrrr} 3x^3 & - 4x^2 & + 49x & - 6 \end{array} \right) : \left(- 47x^2 - 98x + 3 \right) = -\frac{3}{47}x + \frac{482}{2209} + \frac{\frac{155900}{2209}x - \frac{14700}{2209}}{-47x^2 - 98x + 3} \\
 \hline
 \begin{array}{rrrr} - 3x^3 - \frac{294}{47}x^2 & + \frac{9}{47}x & & \\ - \frac{482}{47}x^2 + \frac{2312}{47}x & & - 6 & \\ \frac{482}{47}x^2 + \frac{47236}{2209}x & - \frac{1446}{2209} & & \end{array} \\
 \hline
 \frac{155900}{2209}x - \frac{14700}{2209}
 \end{array}$$

Eukl. Algorithmus:

$$6x^5 + 7x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 25x - 15 = (2x + 1)(3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9) + (3x^3 - 4x^2 + 49x - 6)$$

$$3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9 = (x + 2)(3x^3 - 4x^2 + 49x - 6) + (-47x^2 - 98x + 3)$$

Ich breche hier mal ab, da es mir weniger gewollt erscheint einen Eukl. Algorithmus in 100000er-Höhe zu berechnen.