AD [HA] zum 22. 10. 2013

Arne Struck, Lars Thoms

31. Oktober 2013

1 (a)

- $f_{10} \prec f_7 : n^{-1}$ tendiert gegen 0, wächst also negativ.
- $f_7 \prec f_8 :$ f_7 hat ein 0-Wachstum und f_8 wächst positiv.
- $f_8 \prec f_3 :$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(\log(n))}{log(n)} \to 0$
- $f_3 \asymp f_4 :$ $\frac{3\log(n)}{\log(n)} = 3$ Damit sind beide in der gleichen Wachstumsklasse.
- $f_4 \prec f_{12} :$ $\log^2(n)$ wächst leicht ersichtlich schneller, als $\log(n)$.
- $f_{12} \prec f_2 :$ f_{12} ist eine logarithmische, f_2 ist eine polynomielle Funktion, polynomielle Funktionen wachsen schneller.
- $f_2 \prec f_9 :$ f_2 ist nicht in der gleichen Wachstumsklasse, wie f_9 da die Exponenten verschieden sind.
- $f_9 \prec f_5 :$ die höchste Potenz in f_5 ist 1, die höchste in f_9 ist 0,5.
- $f_5 \prec f_{14} :$ die höchste Potenz in f_5 ist 1, die höchste in f_{14} ist 8.
- $f_{14} \prec f_1 :$ f_1 ist die erste Exponentialfunktion, wächst dementsprechend schneller, als alle vorherigen Funktionen.
- $f_1 \prec f_{13} :$ $8^n = 2^{n\cdot 3}$ damit ist gezeigt, dass f_1 langsamer wächst.
- $f_{13} \prec f_{11} :$ f_{11} ist eine fakultative Funktion, welche schneller wachsen, als exponentielle Funktionen.
- $f_{11} \prec f_6 :$ $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 \quad n^n = n_n \cdot n_{n-1} \cdot ... \cdot n_1$ damit ist der Vergleich eindeutig gezeigt.

(b)

(i) Da gilt : $\log_b(n) = \frac{\log_2(n)}{log_2(b)}$ kann nun ein b gewählt werden, welches den Zielvergleich erfüllt.

(ii) Dass die Aussage gilt ist leicht ersichtlich, wenn man sich die Definitionen ansieht:
$f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
$g \in \omega(f) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
Da $0 < \infty$ gilt, muss die Aussage gelten.

(iii) Der Beweis ist in Fälle gegliedert.
Fall 1: $f_c(n) \in \Theta(n) \Leftarrow c = 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = n \text{ für } c = 1$$

Fall 2: $f_c(n) \in \Theta(n) \Rightarrow c = 1$:

$$\begin{aligned} f_c(n) &\overset{*}{=} \tfrac{1-c^{n+1}}{1-c} \\ &= \tfrac{1}{1-c} - \tfrac{1}{1-c} \cdot c^{n+1} \in \Theta(c^n) \end{aligned}$$

*Summenformel

$$\text{für c} > 1 \text{ gilt:} \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{c^n}{n} = \infty$$
$$\text{für c} < 1 \text{ gilt:} \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{c^n}{n} = 0$$

Also ist es ersichtlich, dass die Behauptung nur für c = 1 gilt.

2 a)

Beh.:
$F_{n+1} \geq 2^{0.5(n+1)} \wedge F_n \geq 2^{0.5n}\ \forall n \geq 6$

I.Anf.:
$F_6 = 8 \geq 2^{0.5\cdot 6} = 8$
$F_7 = 13 \geq 2^{0.5\cdot 7} \approx 11.31$

I.A.:
Die Behauptung gilt für ein frei wählbares, aber festes $n \in \mathbb{N} | n \geq 6$

I.S.: (zu zeigen: $F_{n+2} \geq 2^{0.5(n+2)}$)

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &\overset{IA}{\geq} 2^{0.5(n+1)} + 2^{0.5n} \\ &= 2^{0.5n} \cdot 2^{0.5} + 2^{0.5n} \\ &= 2^{0.5n} \cdot \left(2^{0.5} + 1\right) \\ &\geq 2^{0.5n+2} = 2^{0.5n} \cdot 2 \end{aligned}$$

Dies gilt, da $2 < 2^{0.5} + 1$ $\square$

b)

Beh.:

$F_{n+1} \leq 2^{0.9(n+1)} \wedge F_n \leq$

I.Anf.:

$F_0 = 0 \leq 2^{0.9 \cdot 0} = 1$
$F_1 = 1 <= 2^{0.9*1} \approx 1.866$

I.A.:

Die Behauptung gilt für ein frei wählbares, aber festes $n \in \mathbb{N}$

I.S.: (z.z.: $F_{n+2} <= 2^{0.9(n+2)}$)

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &\overset{IA}{\leq} 2^{0.9(n+1)} + 2^{0.9n} \\ &= 2^{0.9n} \cdot 2^{0.9} + 2^{0.9n} \\ &= 2^{0.9n} \cdot \left(2^{0.9} + 1\right) \\ &\leq 2^{0.9(n+2)} = 2^{0.9n} \cdot 2^{0.9 \cdot 2} \end{aligned}$$

Dies gilt, da $2.866 \approx 2^{0.9} + 1 < 2^{0.9 \cdot 2} \approx 3.482$ □

3 (a)

Beh.:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

I.Anf.:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I.A.:

Die Behauptung gilt für ein frei wählbares, aber festes $n \in \mathbb{N}$

I.S.: z.z.: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} &\overset{IA}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_1 + F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} \ \square \end{aligned}$$

(b)

Für die Berechnung wird eine binäre Exponentiation (Square & Multiply, bekannt aus DM) angewandt. Damit ist eine Laufzeit von $\log(n)$ erreicht, wenn es sich beim Exponenten um eine Zweierpotenz von n handelt. Zur Laufzeit kommen nun nur noch Summanden für die Additionen der einzelnen Ergebnisse des Verfahrens hinzugefügt, wenn n nicht einer Zweierpotenz entspricht. Also kann die Berechnung in $\mathcal{O}(\log(n))$ durchgeführt werden.

(c)

Die Anzahl der Multiplikationen ist $8 \cdot (n-1) + 4$ (die 4 ist als Addition zu vernachlässigen). Die Zeit berechnet sich durch das Anwenden des Verfahrens aus (b) und den gegebenen Informationen wie folgt: $\log(n) \cdot 8(n-1)^{1.59}$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n)\cdot 8(n-1)^{1.59}}{n^2} = 0$ gilt ist gezeigt, dass das Matrizenverfahren echt schneller ist.