Hausaufgaben zum 2. 11. 2012

Arne Struck 6326505

5. November 2012

1.

a)

(i) $177 \equiv 18(\mod 5)$ ist falsch, $5 \nmid 159$

(ii) $177 \equiv -18(\mod 5)$ ist wahr, $5 \mid 195$

(iii) $-89 \equiv -12(\mod 6)$ ist falsch, $6 \nmid -77$

(iv) $-123 \equiv 33(\mod 13)$ ist wahr, $13 \mid -156$

(v) $39 \equiv -1(\mod 40)$ ist wahr, $40 \mid 40$

(vi) $77 \equiv 0(\mod 11)$ ist wahr, $11 \mid 77$

(vii) $2^{51} \equiv 51(\mod 2)$ ist falsch, $(2 \nmid 2^{51} - 51)$

b)

$$ggt(7293, 378):$$

$$\begin{aligned}
7293 &= 19 \cdot 378 + 111 \\
378 &= 3 \cdot 111 + 45 \\
111 &= 2 \cdot 45 + 21 \\
45 &= 2 \cdot 21 + 3 \\
21 &= 7 \cdot 3 + 0 \\
&\Rightarrow ggt(7293, 378) = 3
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} \lceil\sqrt{7}\rceil & = & 3 \\ \lfloor\sqrt{7}\rfloor & = & 2 \\ \lceil 7,1\rceil & = & 8 \\ \lfloor 7,1\rfloor & = & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lceil -7,1\rceil & = & -7 \\ \lfloor -7,1\rfloor & = & -8 \\ \lceil -7\rceil & = & -7 \\ \lfloor -7\rfloor & = & -7 \end{array}$$

2.

(1)

$c \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow c \mid a$

$$\begin{array}{lrcll} & z \cdot c & = & b & , z \in \mathbb{Z} \\ & y \cdot b & = & a & , y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & b & = & \frac{a}{y} & \\ \Rightarrow & z \cdot c & = & \frac{a}{y} & \\ \Leftrightarrow & z \cdot y \cdot c & = & a & \Rightarrow c \mid a \ \square \end{array}$$

(2)

$b_1 \mid a_1 \wedge b_2 \mid a_2 \Rightarrow b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$

$$\begin{array}{lrcll} & y \cdot b_1 & = & a_1 & , y \in \mathbb{Z} \\ & z \cdot b_2 & = & a_2 & , z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & a_1 \cdot a_2 & = & (y \cdot b_1)(z \cdot b_2) & \\ \Leftrightarrow & a_1 \cdot a_2 & = & (b_1 \cdot b_2)(z \cdot y) & \\ \Rightarrow & \multicolumn{4}{l}{b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2 \ \square} \end{array}$$

(3)

$c \cdot b \mid c \cdot a : c \neq 0 \Rightarrow b \mid a$

$$\begin{array}{lrcll} & y \cdot c \cdot b & = & c \cdot a & , y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & y \cdot b & = & a & \\ \Rightarrow & \multicolumn{4}{l}{b \mid a \ \square} \end{array}$$

(4)

$b \mid a_1 \wedge b \mid a_2 \Rightarrow b \mid (c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2) \ : c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lrcll} \mathrm{I} & y \cdot b & = & a_1 & , y \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{II} & z \cdot b & = & a_2, z \in \mathbb{Z} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & c_1 \cdot y \cdot b & = & c_1 \cdot a_1 \\ \mathrm{II} & c_2 \cdot z \cdot b & = & c_2 \cdot a_2 \\ \Rightarrow & c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 & = & c_2 \cdot z \cdot b + c_1 \cdot y \cdot b \\ \Leftrightarrow & c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 & = & b \cdot (c_2 \cdot z + c_1 \cdot y) \end{array}$$

3.

a)

Beh.:

$$\begin{aligned} & \forall n \geq 0 : 3 \mid (n^3 + 2n) \\ \Leftrightarrow \; & \forall n \geq 0 : \\ & n^3 + 2n = 3a : a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} & 0^3 + 2 \cdot 0 &=& \; 3a \\ \Leftrightarrow \; & 0 &=& \; a \end{aligned}$$

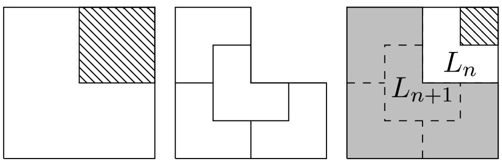
Induktionsschritt:

zu zeigen: $(n+1)^3 + 2(n+1) = 3b \quad , b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 + 2(n+1) &=& \; 3b \\ \Leftrightarrow \; & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 &=& \; 3b \\ \Leftrightarrow \; & n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 &=& \; 3b \\ \overset{\text{IA}}{\Leftrightarrow} \; & 3a + 3n^2 + 3n + 3 &=& \; 3b \\ \Leftrightarrow \; & a + n^2 + n + 1 &=& \; b \Rightarrow 3 \mid ((n+1)^3 + 2(n+1)) \; \square \end{aligned}$$

b)

Ein L-Stück entsteht in einem $2^n \times 2^n$ Schachbrett, wie in (a) zu sehen. Um ein Schachbrett zu erhalten, braucht man noch ein weiteres Stück in der rechten oberen Ecke (schraffiert). In (b) sieht man, wie aus 4 L-Stücken ein weiteres, größeres L-Stück mit doppelter Kantenlänge entsteht. Nun fehlt, um ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett zu erstellen, noch die obere rechter Ecke, welche sich durch ein $2^n \times 2^n$ Schachbrett, wie in (c) zu sehen, ausfüllen lässt. Da dieser Schritt sich beliebig oft wiederholen lässt und analog auch für ein 2×2 Schachbrett gilt, gilt dieses Muster allgemein.



(a) (b) (c)

4.

a)

$g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$g(x, y) = (xy^2, xy^2 - 3x, (x^2 - 2)y)$

Beh.: g ist injektiv.

Annahme:
g ist nicht injektiv.
$\forall (x, y), (m, n) \in (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) : (x, y) = (m, n) \; \exists \; g(x, y) \neq (m, n)$

Beweis:

$$\begin{array}{lrcl}
 & g(x,y) & = & (xy^2, xy^2 - 3x, (x^2-2)y) \\
 & g(x,y) & = & (m, n^2, mn^2 - 3m, (m^2-2)n) \\
\text{I} & xy^2 & = & mn^2 \\
\text{II} & xy^2 - 3x & = & mn^2 - 3m \\
\text{III} & x^2y - 2y & = & m^2n - 2n
\end{array}$$

I-II:

$$\begin{array}{lrcl}
 & xy^2 - xy^2 + 3x & = & mn^2 - mn^2 + 3m \\
\Leftrightarrow & 3x & = & 3m \\
\Leftrightarrow & x & = & m
\end{array}$$

Rückeinsetzen in III:

$$\begin{array}{lrcll}
 & x^2y - 2y & = & x^2n - 2n & \\
\Leftrightarrow & x^2(y-n) - 2y & = & -2n & \mid \text{für } x = 0 : y = n \\
\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} & x^2y - 2y & = & x^2n - 2n & \\
\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} & (x^2-2)y & = & (x^2-2)n & \\
\Leftrightarrow & y & = & n & \mid \text{Widerspruch}
\end{array}$$

$\Rightarrow g$ ist injektiv.

b)

Beh.: h ist nicht surjektiv.

Annahme: h ist surjektiv.

Beweis:

$$\begin{array}{lrcl}
 & h(2) & = & (1,1) \\
 & & & \\
\text{I} & 1 & = & z + 2 \\
\text{II}1 & = & z - 1 & \\
\text{I} & z & = & -1 \\
\text{II} & z & = & 2 \quad \mid \text{Widerspruch}
\end{array}$$

$\Rightarrow h$ ist nicht surjektiv. $\square$