Hausaufgaben zum 7. 12. 2012

Arne Struck 6326505

6. Dezember 2012

1.

a)

Die Invertierbarkeit von 473 in $\mathbb{Z}_{2413}$ lässt sich mit dem $ggt(2413, 473)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
2413 &= 5 \cdot 473 + 48 \\
473 &= 9 \cdot 48 + 41 \\
48 &= 41 + 7 \\
41 &= 5 \cdot 7 + 6 \\
7 &= 6 + 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow ggt(2413, 473) = 1 \Leftrightarrow 473$ ist in $\mathbb{Z}_{2413}$ invertierbar.

$$\begin{aligned}
x = 1 &= 7 - 6 \\
&= 7 - 1(41 - 5 \cdot 7) \\
&= 6 \cdot 7 - 41 \\
&= -41 + 6(48 - 41) \\
&= -7 \cdot 41 + 6 \cdot 48 \\
&= 6 \cdot 48 - 7(473 - 9 \cdot 48) \\
&= 69 \cdot 48 - 7 \cdot 473 \\
&= -7 \cdot 473 + 69(2413 - 5 \cdot 473) \\
&= -352 \cdot 473 + 69 \cdot 2413
\end{aligned}$$

$\Rightarrow -352 \equiv \underline{2061} \mod 2413$ ist das Inverse von 473 in $\mathbb{Z}_{2413}$

b)

Die Invertierbarkeit von 473 in $\mathbb{Z}_{1672}$ lässt sich mit dem $ggt(1672, 473)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
1672 &= 3 \cdot 473 + 253 \\
473 &= 253 + 220 \\
253 &= 220 + 33 \\
220 &= 6 \cdot 33 + 22 \\
33 &= 22 + 11 \\
22 &= 2 \cdot 11
\end{aligned}$$

$\Rightarrow ggt(1673, 473) = 11 \Leftrightarrow 473$ ist in $\mathbb{Z}_{1673}$ nicht invertierbar.

c)

In $\mathbb{Z}_{2413}$ entspricht 2413 der 0. Aus diesem Grund muss 2412 der -1 entsprechen. -1 ist zu sich selbst invers, das heißt, dass in $\mathbb{Z}_{2413}$ 2412 das Inverse von 2412 ist.

2.

In $\mathbb{Z}_{19}$:

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3 \\
3^2 &= 9 \\
3^4 &= 9^2 = 5 \\
3^8 &= 5^2 = 25 = 6 \\
3^{16} &= 6^2 = 36 = 17 \\
3^{32} &= 17^2 = 289 = 4 \\
3^{64} &= 4^2 = 16 \\
3^{128} &= 16^2 = 256 = 9 \\
3^{256} &= 9^2 = 81 = 5 \\
3^{512} &= 5^2 = 25 = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^{1000} &= 3^{512} \cdot 3^{256} \cdot (3 \cdot 3^{64}) \cdot 3^3 2 \cdot 3^8 \\
&= 6 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 6 \\
&= 62208 \equiv 2 \mod 19
\end{aligned}$$

3.

a)

$$\pi = (1,7,6) \circ (2,10,8,5,11,13) \circ (3,4) \circ (9,12)$$

b)

$$\pi = (1,6) \circ (1,7) \circ (2,13) \circ (2,11) \circ (2,5) \circ (2,8) \circ (2,10) \circ (3,4) \circ (9,12)$$

c)

π hat 9 Transpositionen, also ist π eine ungerade Permutation, das bedeutet sign $\pi = -1$

4.

a)

Da alle Einzelelemente für $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ kombiniert werden müssen, ist die Anzahl der Elemente von $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

b)

Die Anzahl aller Relationen auf $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ entspricht der Anzahl aller Teilmengen (wobei ich nicht sicher bin, ob man die leere Menge extra zählen muss). Diese berechnet sich aus $\sum_{i=0}^{n=30} \binom{30}{i} = 2^n | n = 30$.