Hausaufgaben zum 2. 11. 2012

Arne Struck 6326505, René (Wiinf)

2. November 2012

1.

a)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)}$$

b)

$$A(1) = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{2}$$
$$A(1) = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$A(2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$A(2) = 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$A(3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$A(3) = 1 - \frac{1}{3+1} = \frac{3}{4}$$
$$A(4) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$
$$A(4) = 1 - \frac{1}{4+1} = \frac{4}{5}$$

c)

Beh.:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} A(1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} &= \frac{1}{2} \\ A(1) &= 1 - \frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Induktionsannahme (IA):
Die Beh. gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} \\ &\overset{IA}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung gilt $\square$

2.

a)

$$\begin{aligned} B(1) &= 1^2 &&= 1 \\ B(1) &= 2\cdot 1 - 1 &&= 1 \\ B(2) &= 2^2 &&= 4 \\ B(2) &= 1 + 2\cdot 2 - 1 &&= 4 \\ B(3) &= 3^2 &&= 9 \\ B(3) &= 4 + 2\cdot 3 - 1 &&= 9 \\ B(4) &= 4^2 &&= 16 \\ B(4) &= 9 + 2\cdot 4 - 1 &&= 16 \end{aligned}$$

b)

$$B(n) = (2\cdot 1 - 1) + (2\cdot 2 - 1) + (2\cdot 3 - 1) + ... + (2\cdot n - 1)$$

$B(n)$ ist die n-te Quadratzahl oder auch die Quadratzahl mit der Basis n.

c)

Beh.:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} B(1) &= 1^2 &= 1 \\ B(1) &= 2\cdot 1 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsannahme (IA):
Die Beh. gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1) \\ \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2n + 1 \\ &\overset{IA}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung gilt □

3.

a)

Beh.:

$\forall n \geq 7 : n \in \mathbb{N}$ gilt:
$13n < 2^n$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} n &= 7 \\ 13\cdot 7 &< 2^7 \\ \Leftrightarrow \quad 91 &< 128 \end{aligned}$$

Induktionsannahme (IA):
Die Beh. gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{array}{llllll} \text{zu zeigen:} & 13 \cdot (n+1) & < & 2^{n+1} & & \\ & 13n + 13 & \overset{IA}{<} & 2^n + 13 & \overset{\text{mit } n \geq 7}{<} & 2^n + 2^n = 2^{n+1} \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung gilt $\square$

b)

Beh.:

$\forall n \geq 5 : n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^2 < 2^n$$

Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rrcl} & n & = & 5 \\ & 5^2 & < & 2^5 \\ \Leftrightarrow & 25 & < & 32 \end{array}$$

Induktionsannahme (IA):
Die Beh. gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

zu zeigen: $(n+1)^2 < 2^{n+1}$

$$\begin{array}{rrcl} & (n+1)^2 & = & n^2 + 2n + 1 \\ & n^2 + 2n + 1 & < & 2 \cdot 2^n \\ \overset{IA}{\Rightarrow} & 2n + 1 & \overset{\text{mit } n \geq 5}{<} & 2^n \\ \Rightarrow & (n+1)^2 & < & 2^{n+1} \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung gilt $\square$

4.

Beh.:

$$2^n < n! : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$$

Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 4 \\ 2^4 & < & 4! \\ \Leftrightarrow \quad 16 & < & 24 \end{array}$$

Induktionsannahme (IA):
Die Beh. gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

zu zeigen: $2^{n+1} < (n+1)!$

$$\begin{array}{rrcl} & (n+1)! & = & n! \cdot (n+1) \\ & n! \cdot (n+1) & \stackrel{IA}{>} & 2^n \cdot (n+1) \\ & (n+1) \cdot 2^n & \stackrel{\text{mit } n \geq 4}{>} & 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \\ \Rightarrow & (n+1)! & > & 2^{n+1} \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung gilt □