Hausaufgaben zum 14. 12. 2011

Arne Struck 6326505

3. Juni 2013

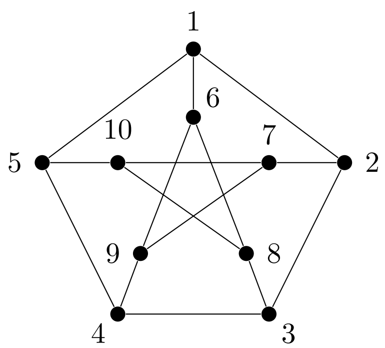
1.

a)

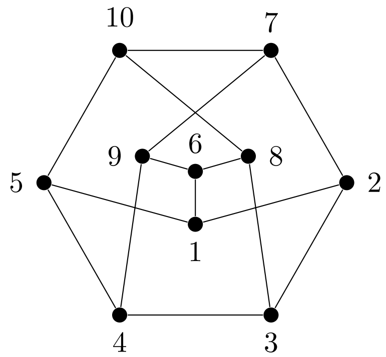
G und G' sind nicht isomorph, da in dem Graphen G die Knoten 4. Grades nur mit Knoten 3. Grades verbunden sind, dies in G' nicht der Fall ist.

b)

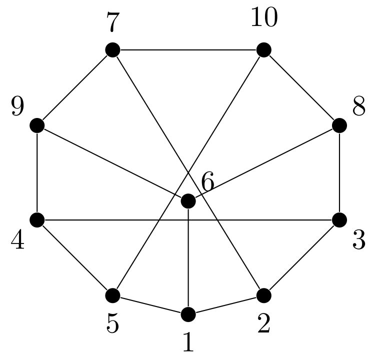
A



B



C



Daraus folgen die Isomorphismen: $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : A \to C$

x	$f(x)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

x	$g(x)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

x	$h(x)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

2.

a)

Die Anzahl der Kanten bei einem vollständigen Graphen ist gleich der Anzahl der Zweierkombinationen an Knoten.

$$|E(G_n)| = \binom{n}{2}$$
$$|E(G_{10})| = \binom{10}{2} = 45$$

b)

Die Anzahl an n-Kreisen bei einem vollständigen Graphen ist gleich der Anzahl der n-Kombinationen an Knoten.

$$|K_n(G_k)| = \binom{k}{n} \qquad |k > n$$
$$|K_3(G_{10})| = \binom{10}{3} = 120$$

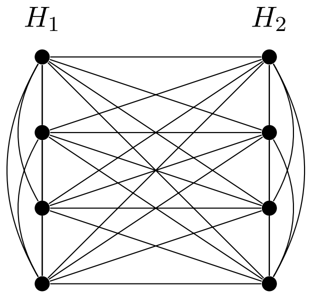
c)

$$|K_4(G_{10})| = \binom{10}{4} = 210$$

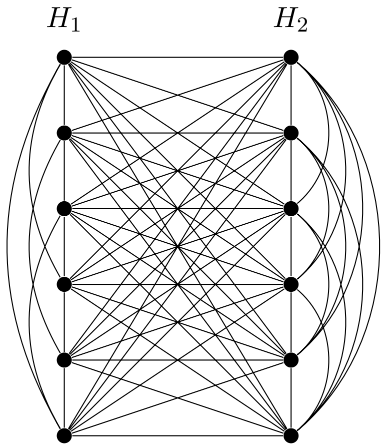
3.

a)

n = 4



n = 6



b)

H_1 besitzt $\frac{3}{2}n$ Kanten (jeder Knoten hat 3 Kanten, dies muss noch halbiert werden, da eine Kante durch 2 Knoten definiert wird).
Da H_2 ein vollständiger Graph ist, kann die Formel aus 2 a) für die Anzahl der Kanten angewandt werden:

$$|E(G_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Das Zusammenfassen von H_1 und H_2 in H bringt ebenfalls noch $n \cdot n$ Kanten hinzu, da jeder Knoten aus H_1 mit jedem aus H_2 verbunden wird.
Also folgt als Gesamtgleichung:

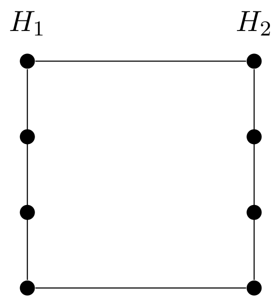
$$\frac{3}{2}n + \frac{n(n-1)}{2} + n^2$$

Nun muss nur noch umgeformt und zusammengefasst werden, um $\frac{3}{2}n^2 + n$ als Gleichung für die Kantenzahl zu verifizieren:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}n + \frac{n(n-1)}{2} + n^2 &= \frac{n^2 - n}{2} + \frac{3n}{2} + \frac{2n^2}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 2n}{2} \\
&= \frac{3}{2}n^2 + n
\end{aligned}$$

c)

In den Abbildungen aus a) ist erkennbar, dass sich ein Hamiltonscher Kreis durch das Durchlaufen sämtlicher Knoten von H_1 oder H_2 und danach den Wechsel zu dem jeweiligen anderen Urgraphen, welcher auch durchlaufen wird und schlussendlich der Rückwechsel zum Ausgangsknoten erreichen lässt. Hier eine Darstellung für einen Hamiltonschen Kreis für n = 4:



d)

G besitzt keine Eulersche Linie, da der Grad der einzelnen Punkte immer ungerade bleibt, dies widerspricht der Voraussetzung für eine Eulersche Linie. Dies resultiert aus dem Anfangsgrad von der Knoten von H_1 (3), denn n muss gerade sein, damit für jeden der der Knoten von H_1der Knotengrad 3 realisiert werden kann. Und eine gerade Zahl addiert mit einer ungeraden, ergibt (zumindest für die Knoten von H_1) einen ungeraden Grad.

4.

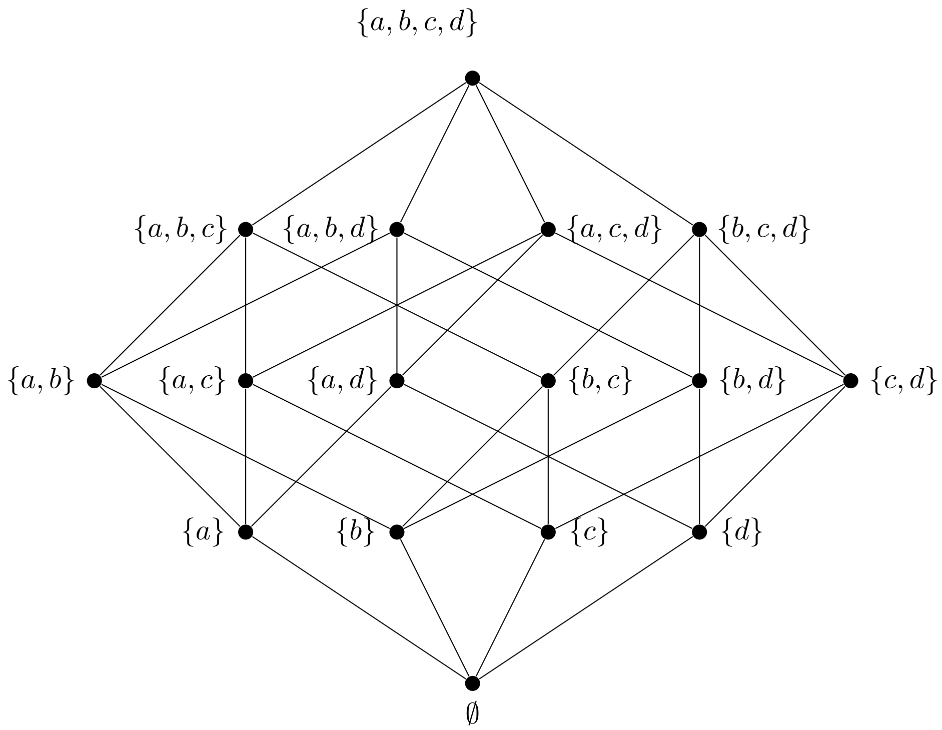
a)

$$M = \{a, b, c, d\}$$

$$\begin{aligned} P(M) = \Big\{ &\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ &\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ &\{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \\ &\{a,b,c,d\} \Big\} \end{aligned}$$

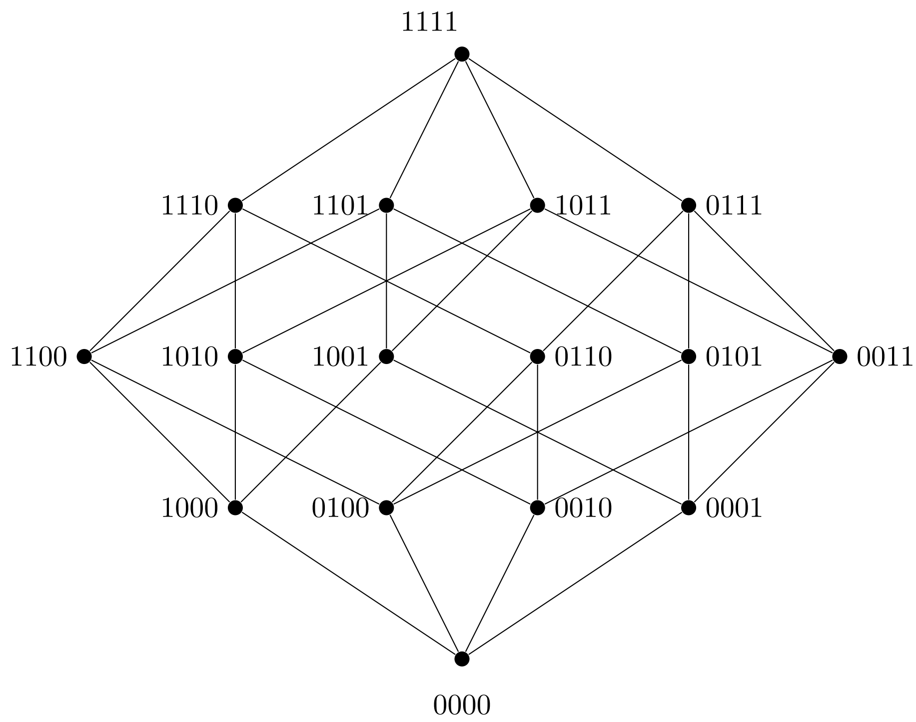
Die Anzahl der Elemente beträgt $2^4 = 16$.

b)



c)

Das Hassediagramm ist isomorph zu dem Hyperwürfel Q_4. Dies kann man schon daran sehen, dass beide 16 Knoten 4. Grades besitzen (trifft ansonsten auf keinen der Graphen zu). Ordnet man den Hyperwürfel, wie das Diagramm an, ergibt sich folgendes:



Dieser Graph folgt dem Prinzip, dass wenn ein Element der Urmenge ein Element der entsprechenden Teilmenge der Potenzmenge ist, dann ist eine 1 gesetzt. a entspricht der Tausender-, b der Hunderter-, c der Zehnerstelle...
Dies entspricht folgender Tabelle (Isomorphismus):

$\subseteq P(M)$	Q_4	$\subseteq P(M)$	Q_4
$\emptyset$	0000	{b,c}	0110
{a}	1000	{b,d}	0101
{b}	0100	{c,d}	0011
{c}	0010	{a,b,c}	1110
{d}	0001	{a,b,d}	1101
{a,b}	1100	{a,c,d}	1011
{a,c}	1010	{b,c,d}	0111
{a,d}	1001	{a,b,c,d}	1111