Hausaufgaben zum 30. 11. 2012

Arne Struck 6326505

28. November 2012

1.

a)

BA, AC und AA existieren nicht.

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 30 & 17 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 26 \\ -4 \end{pmatrix} \quad BB = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad CD = \begin{pmatrix} 12 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$(\mathrm{AB})_{i=3,\ j=2} = 15$

$$(\mathrm{AB})_{i=4,\ j=1...4} = \begin{pmatrix} ... & 13 \\ ... & 8 \\ ... & 3 \\ ... & 23 \end{pmatrix}$$

2.

a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2) &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 52 \\ 6 & 12 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} \\
\mathrm{AB}_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{AB}_1 + \mathrm{AB}_2 = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 24 & 16 \end{pmatrix} = \mathrm{A}(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2)
$$

b)

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 11 & 5 & 17 \\ 22 & 10 & 34 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix} \\
\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ ist nicht definiert, da hier eine 2×2-Matrix mit einer 3×2-Matrix multipliziert wird.

3.

Beh.: Das Distributivgesetz gilt für Matrizen.
Bew.:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad A &= (a_{ij}) \quad | \; i = 1...m, \; j = 1...n \\
\text{Sei } B_1 &= (b_{jk}) \quad | \; j = 1...n, \; k = 1...p \\
\text{Sei } B_2 &= (c_{jk}) \quad | \; j = 1...n, \; k = 1...p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 + B_2 &= (b_{jk} + c_{jk}) \\
A \cdot (B_1 + B_2) &= \Big(a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cdot B_1 &= (a_{ij} \cdot b_{jk}) \\
A \cdot B_2 &= (a_{ij} \cdot c_{jk}) \\
A \cdot B_1 + A \cdot B_2 &= (a_{ij} \cdot b_{jk} + a_{ij} \cdot c_{jk}) \\
&\overset{*}{=} \Big(a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})\Big) = A \cdot (B_1 + B_2) \; \square
\end{aligned}$$

* Hier ist das Distribution erlaubt, da es sich um zwei normale Zahlen handelt und das Distributivgesetz für diese definiert ist.

4.

a)

Beh.: für $f : A \to B \land B' \subseteq B$ gilt $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$
Bew.:
Sei $b \in f(f^{-1}(B'))$
$\Rightarrow \exists \; a \in f^{-1}(B') \mid f(a) = b$ Da das Bild ein Urbild braucht.

Da $a \in f^{-1}(B')$, muss $f(a)$ auf ein Element in B' verweisen. Dieses Element ist b, weil $f(a) = b$ gilt.
Die Behauptung gilt also unter den gegebenen Bedingungen, da das Element b beliebig aus $f(f^{-1}(B'))$ gewählt werden kann. $\square$

b)

$f : A \to B \qquad A = \{1\} \; B = \{v\} = B'$
$f(1)$ sei nicht definiert
$f(f^{-1}(B')) = \{\}$