FGI 2 [HA], 4. 11. 2013

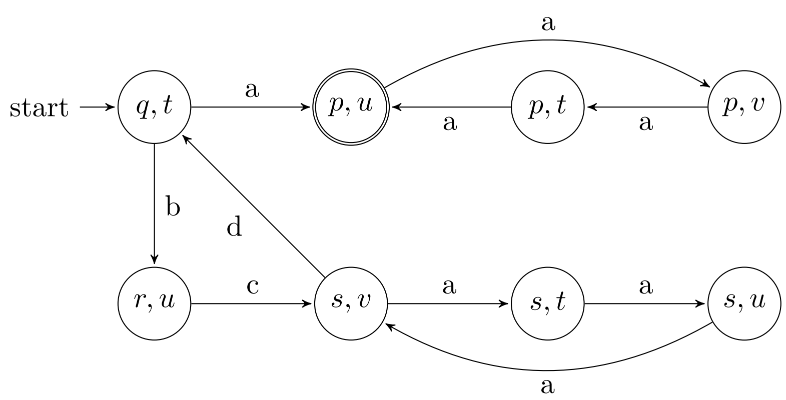
Arne Struck, Tronje Krabbe

3. November 2013

3.3. 1.

$$\begin{array}{lcl}
L(A_1) & = & (bca^*d)^*a^* \\
L(A_2) & = & (a+b)((a+c)(a+d)(a+b))^* \\
L^\omega(A_1) & = & (bca^*d)^\omega + (bca^*d)^*a^\omega \\
L^\omega(A_2) & = & ((a+b)(a+c)(a+d))^\omega
\end{array}$$

2.

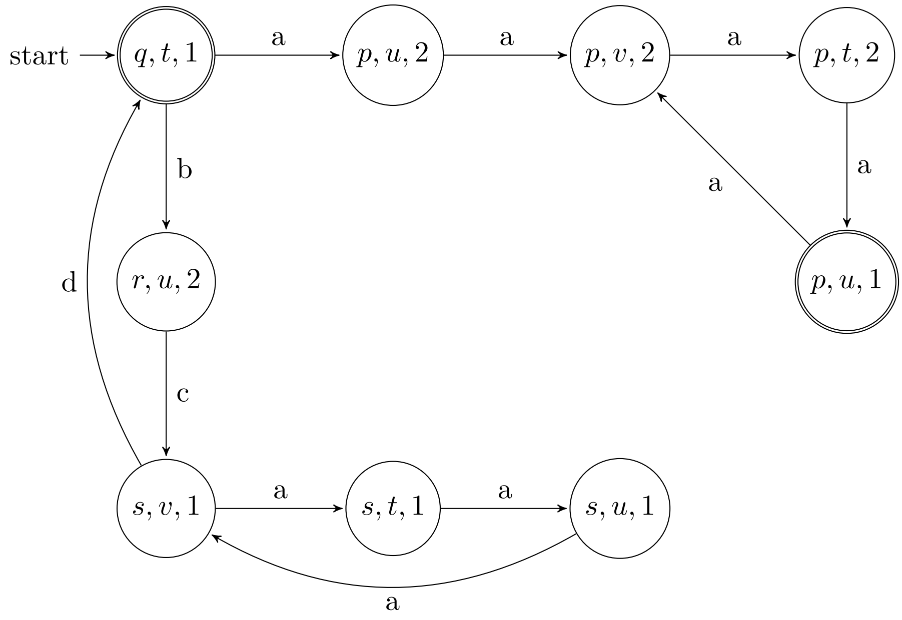


3.

$$\begin{array}{lclcl}
L(A_3) & = & (bc(aaa)^*d)^*a(aaa)^* & & \\
L^\omega(A_3) & = & (bc(aaa)^*d)^*a(aaa)^\omega & & \\
L(A_1) \cap L(A_2) & = & (bc(aaa)^*d)^*a(aaa)^* & = & L(A_3) \\
L^\omega(A_1) \cap L^\omega(A_2) & = & (bc(aaa)^*d)^\omega + (bc(aaa)^*d)^*a(a)^\omega & &
\end{array}$$

$L(A_3)$ sowie der Schnitt von $L(A_1)$ und $L(A_2)$ sind identisch, was zu erwarten war, da A_3 extra konstruiert wurde, um den Schnitt er beiden ursprünglichen Automaten zu akzeptieren.
$L^\omega(A_3)$ ist eine Teilmenge von $L^\omega(A_1) \cap L^\omega(A_2)$.

4.



5.

$$
\begin{array}{lcl}
L(A_4) & = & ((bc(aaa)^*d)^*aaaa(aaa)^*)? \\
L^\omega(A_4) & = & (bc(aaa)^*d)^\omega + (bc(aaa)^*d)^*a(a)^\omega \\
L(A_1) \cap L(A_2) & = & (bc(aaa)^*d)^*a(aaa)^*
\end{array}
$$

$L(A_1) \cap L(A_2)$ kann kene Teilmenge von $L(A_4)$ sein, da es ein Wort (a) bilden kann, welches kein Element von $L(A_4)$ ist. umgekehrt kann $L(A_4)$ auch keine Teilmenge von $L(A_1) \cap L(A_2)$, da $L(A_4)$ das leere Wort bilden kann, $L(A_1) \cap L(A_2)$ aber nicht.

Per Definition akzeptiert der Produktautomat A_4, konstruiert nach Satz 1.21, genau den Schnitt der Sprachen der Automaten A_1 und A_2. Daraus folgt: $L^\omega(A_4) = (bc(aaa)^*d)^\omega + (bc(aaa)^*d)^*a(a)^\omega = L^\omega(A_1) \cap L^\omega(A_2)$

3.4.

Bisimulationsrelation:

$TS_1 \underline{\leftrightarrow} TS_3$ und $TS_3 \underline{\leftrightarrow} TS_1$:
$\{(z_0, q_0), (z_1, q_2), (z_2, q_1), (z_4, q_0), (z_5, q_2), (z_6, q_1), (z_7, q_2), (z_8, q_0), (z_9, q_2), (z_{10}, q_1), (z_{11}, q_2), ...\}$

$TS_2 \underline{\leftrightarrow} TS_4$ und $TS_4 \underline{\leftrightarrow} TS_2$:
$\{(p_0, r_0), (p_1, r_2), (p_2, r_1), (p_4, r_0), (p_5, r_2), (p_6, r_1), (p_7, r_2), (p_8, r_0), (p_9, r_2), (p_{10}, r_1), (p_{11}, r_2), ...\}$

Definitionsnachweis $TS_1 \underline{\leftrightarrow} TS_3$:

a)

Die Startzustände sind in der ersten Relation als Tupel zu finden.

b)

Beh.:

$\forall (z_n, q_m) \in \mathcal{B} | n \in \mathbb{N}, m \in [0,1,2]$

$z_{4n} \xrightarrow[TS1]{c} z_{4n+1} \; \exists \; q_0 \in TS3 : q_0 \xrightarrow[TS3]{c} q_2 \wedge (z_{4n+1}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_0 \xrightarrow[TS3]{c} q_2 \; \exists \; z_{4n} \in TS1 : z_{4n} \xrightarrow[TS1]{c} z_{4n+1} \wedge (q_2, z_{4n+1}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n-2} \xrightarrow[TS1]{d} z_{4n-1} \; \exists \; q_1 \in TS3 : q_1 \xrightarrow[TS3]{d} q_2 \wedge (z_{4n-1}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_1 \xrightarrow[TS3]{d} q_2 \; \exists \; z_{4n-2} \in TS1 : z_{4n-2} \xrightarrow[TS1]{d} z_{4n-1} \wedge (q_2, z_{4n-1}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n-2} \xrightarrow[TS1]{b} z_{4n} \; \exists \; q_0 \in TS3 : q_0 \xrightarrow[TS3]{b} q_1 \wedge (z_{4n}, q_1) \in \mathcal{B}$

$q_0 \xrightarrow[TS3]{b} q_1 \; \exists \; z_{4n-2} \in TS1 : z_{4n-2} \xrightarrow[TS1]{b} z_{4n} \wedge (q_1, z_{4n}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n} \xrightarrow[TS1]{a} z_{4(n+1)-1} \; \exists \; q_1 \in TS3 : q_1 \xrightarrow[TS3]{a} q_0 \wedge (z_{4n}, q_0) \in \mathcal{B}$

$q_1 \xrightarrow[TS3]{a} q_0 \; \exists \; z_{4n} \in TS1 : z_{4n} \xrightarrow[TS1]{a} z_{4(n+1)-1} \wedge (q_0, z_{4(n+1)-1}) \in \mathcal{B}$

I.Anf.: $n \in [0,1]$

$z_0 \xrightarrow{c} z_1 \; \exists \; q_0 \xrightarrow{c} q_2 \wedge (z_1, q_2)$
$q_0 \xrightarrow{c} q_2 \; \exists \; z_0 \xrightarrow{c} z_1 \wedge (z_1, q_2)$
$z_2 \xrightarrow{d} z_3 \; \exists \; q_1 \xrightarrow{d} q_2 \wedge (z_3, q_2)$
$q_1 \xrightarrow{d} q_2 \; \exists \; z_2 \xrightarrow{d} z_3 \wedge (z_3, q_2)$
$z_2 \xrightarrow{b} z_4 \; \exists \; q_1 \xrightarrow{b} q_0 \wedge (z_4, q_0)$
$q_1 \xrightarrow{b} q_0 \; \exists \; z_2 \xrightarrow{b} z_4 \wedge (z_4, q_0)$
$z_0 \xrightarrow{a} z_2 \; \exists \; q_0 \xrightarrow{a} q_1 \wedge (z_2, q_1)$
$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \; \exists \; z_0 \xrightarrow{a} z_2 \wedge (z_2, q_1)$

I.A.: Die Behauptung gilt für ein bestimmtes, aber frei wählbares $n \in \mathbb{N}$.

I.S.: (zu zeigen: Da die Bisimulation zyklisch ist, muss ein 4er-Zyklus (I.A.) nachgewiesen werden)

Schritt 1: $z_{4(n+1)} \underset{TS1}{\overset{c}{\rightarrow}} z_{4(n+1)+1} \exists q_0 \in TS3 : q_0 \underset{TS3}{\overset{c}{\rightarrow}} q_2 \wedge (z_{4(n+1)+1}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_0 \underset{TS3}{\overset{c}{\rightarrow}} q_2 \exists z_{4(n+1)} \in TS1 : z_{4(n+1)} \underset{TS1}{\overset{c}{\rightarrow}} z_{4(n+1)+1} \wedge (q_2, z_{4(n+1)+1}) \in \mathcal{B}$

$z_{4(n+1)-2} \underset{TS1}{\overset{d}{\rightarrow}} z_{4(n+1)-1} \exists q_1 \in TS3 : q_1 \underset{TS3}{\overset{d}{\rightarrow}} q_2 \wedge (z_{4(n+1)-1}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_1 \underset{TS3}{\overset{d}{\rightarrow}} q_2 \exists z_{4(n+1)-2} \in TS1 : z_{4(n+1)-2} \underset{TS1}{\overset{d}{\rightarrow}} z_{4(n+1)-1} \wedge (q_2, z_{4(n+1)-1}) \in \mathcal{B}$

$z_{4(n+1)-2} \underset{TS1}{\overset{b}{\rightarrow}} z_{4(n+1)} \exists q_0 \in TS3 : q_0 \underset{TS3}{\overset{b}{\rightarrow}} q_1 \wedge (z_{4(n+1)}, q_1) \in \mathcal{B}$

$q_0 \underset{TS3}{\overset{b}{\rightarrow}} q_1 \exists z_{4(n+1)-2} \in TS1 : z_{4(n+1)-2} \underset{TS1}{\overset{b}{\rightarrow}} z_{4(n+1)} \wedge (q_1, z_{4(n+1)}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n} \underset{TS1}{\overset{a}{\rightarrow}} z_{4((n+1)+1)-1} \exists q_1 \in TS3 : q_1 \underset{TS3}{\overset{a}{\rightarrow}} q_0 \wedge (z_{4(n+1)}, q_0) \in \mathcal{B}$

$q_1 \underset{TS3}{\overset{a}{\rightarrow}} q_0 \exists z_{(4n+1)} \in TS1 : z_{4(n+1)} \underset{TS1}{\overset{a}{\rightarrow}} z_{4((n+1)+1)-1} \wedge (q_0, z_{4((n+1)+1)-1}) \in \mathcal{B}$

Schritt 2:

$z_{4n+4} \underset{TS1}{\overset{c}{\rightarrow}} z_{4n+1+4} \exists q_0 \in TS3 : q_0 \underset{TS3}{\overset{c}{\rightarrow}} q_2 \wedge (z_{4n+1+4}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_0 \underset{TS3}{\overset{c}{\rightarrow}} q_2 \exists z_{4n+4} \in TS1 : z_{4n+4} \underset{TS1}{\overset{c}{\rightarrow}} z_{4n+1+4} \wedge (q_2, z_{4n+1+4}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n-2+4} \underset{TS1}{\overset{d}{\rightarrow}} z_{4n-1+4} \exists q_1 \in TS3 : q_1 \underset{TS3}{\overset{d}{\rightarrow}} q_2 \wedge (z_{4n-1+4}, q_2) \in \mathcal{B}$

$q_1 \underset{TS3}{\overset{d}{\rightarrow}} q_2 \exists z_{4n-2+4} \in TS1 : z_{4n-2+4} \underset{TS1}{\overset{d}{\rightarrow}} z_{4n-1+4} \wedge (q_2, z_{4n-1+4}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n-2+4} \underset{TS1}{\overset{b}{\rightarrow}} z_{4n+4} \exists q_0 \in TS3 : q_0 \underset{TS3}{\overset{b}{\rightarrow}} q_1 \wedge (z_{4n+4}, q_1) \in \mathcal{B}$

$q_0 \underset{TS3}{\overset{b}{\rightarrow}} q_1 \exists z_{4n-2+4} \in TS1 : z_{4n-2+4} \underset{TS1}{\overset{b}{\rightarrow}} z_{4n+4} \wedge (q_1, z_{4n+4}) \in \mathcal{B}$

$z_{4n} \underset{TS1}{\overset{a}{\rightarrow}} z_{4(n+1)-1+4} \exists q_1 \in TS3 : q_1 \underset{TS3}{\overset{a}{\rightarrow}} q_0 \wedge (z_{4n+4}, q_0) \in \mathcal{B}$

$q_1 \underset{TS3}{\overset{a}{\rightarrow}} q_0 \exists z_{4n+4} \in TS1 : z_{4n+4} \underset{TS1}{\overset{a}{\rightarrow}} z_{4(n+1)-1+4} \wedge (q_0, z_{4(n+1)-1+4}) \in \mathcal{B}$

Da jedes z um 4 Stellen verschoben wird, wird der Viererzyklus kompletiert dadurch ist nachgewiesen, $TS1 \underline{\leftrightarrow} TS3$ gilt.

c)

Da alle z_{4n-1} und z_{4n+1} Auf q_2 abgebildet werden und alles Endzustände sind geht der c)-Teil aus dem b)-Teil hervor.

Anmerkung: War das ernsthaft mit "weisen sie für eine davon nach..."gemeint? Wenn nicht in Zukunft bitte eindeutiger ausdrücken, da ein Nachweis einem formalen Beweis gleichzusetzen ist.

Nichtbisimilaritätsnachweis:
TS2 und TS3 sind nicht bisimilar. Versuchte man, die Bisimulationsrelation aufzustellen, würde man auf einen Fehler stoßen:
$TS_2 \underline{\leftrightarrow} TS_3 : \mathcal{B} = \{(P0, Q0), (P4, Q1)\}$
Bereits hier ist die Relation Fehlerhaft. Man erreicht P4 von P0 und Q1 von Q0 aus mit einem a, jedoch kann nun von P4 aus ein Endzustand mithilfe eines c erreicht werden, von Q1 aus jedoch nicht. □

TS3 und TS4 sind ebenfalls nicht bisimilar. Wieder wird versucht, die Bisimulationsrelation aufzustellen:
$TS_3 \underline{\leftrightarrow} TS_4 : \mathcal{B} = \{(Q0, R0), (Q1, R0)\}$
Von Q0 kann Q1 mit einem a erreicht werden, und von R0 kann R0 ebenfalls mit einem a erreicht werden. Jedoch können Q1 und R0 gar nicht bisimilar sein, da R0 ein Startzustand ist und Q1 nicht.
Unabhängig davon ist es leicht ersichtlich, dass TS3 und TS4 nicht bisimilar sind, da ihr Aufbau sehr ähnlich ist. Der einzige Unterschied sind die beiden Schleifen an R0 bzw. R1. Hieran erkennt man bereits trivialerweise, dass TS3 und TS4 nicht bisimilar sein können. □