PROJECTE ALGORÍSMIA

Connectivitat i Percolació

Arnau Font González
Nil Serra Sors

2020 - Q1
UPC - FIB

INTRODUCCIÓ 2

EXPERIMENTACIÓ 3

PERCOLACIÓ D'ARESTES 3

PERCOLACIÓ DE NODES 4

CONCLUSIONS 7

REFERÈNCIES 8

INTRODUCCIÓ

En aquest projecte treballarem els conceptes de percolació de nodes i arestes en graelles quadrades representades amb grafs i en grafs geomètrics aleatoris.

Inicialment, vam pensar a representar els Grafs com llistes d'adjacència tradicionals, ja que ens permetia fer la majoria d'operacions de forma més eficient. El que en aquell punt no vam saber resoldre era el procés de percolació d'arestes, ja que no veiem una manera de fer-ho eficient. Per aquest motiu, vam decidir canviar la implementació dels Grafs com a matrius d'adjacència tradicionals, el que ens permetia accedir a les arestes de manera molt més eficient aparentment. Un cop teníem quasi tots els algorismes implementats i fèiem les proves d'execució de l'apartat c), vam adonar-nos que fer-ho amb les matrius no era gens eficient per la resta de funcions.

Després de pensar en una representació òptima, vam decidir fer la representació del Graf amb llistes d'adjacència, on cada llista és un vector de nodes. Cada node conté un identificador, un apuntador a un altre node, un booleà final que serveix per determinar si l'aresta amb aquest node és final i un booleà inicialitzat que serveix per assignar correctament els valors de final als diferents nodes. Amb aquesta implementació, després de fer tots els canvis corresponents, vam veure que la millora d'eficiència era molt notable.

Una breu descripció de cadascuna de les funcions implementades en aquest projecte es pot trobar com a comentari abans de cadascuna d'aquestes, igual que una estimació del cost asimptòtic d'elles. A més, per tots els gràfics i les dades, adjuntem també un Excel.

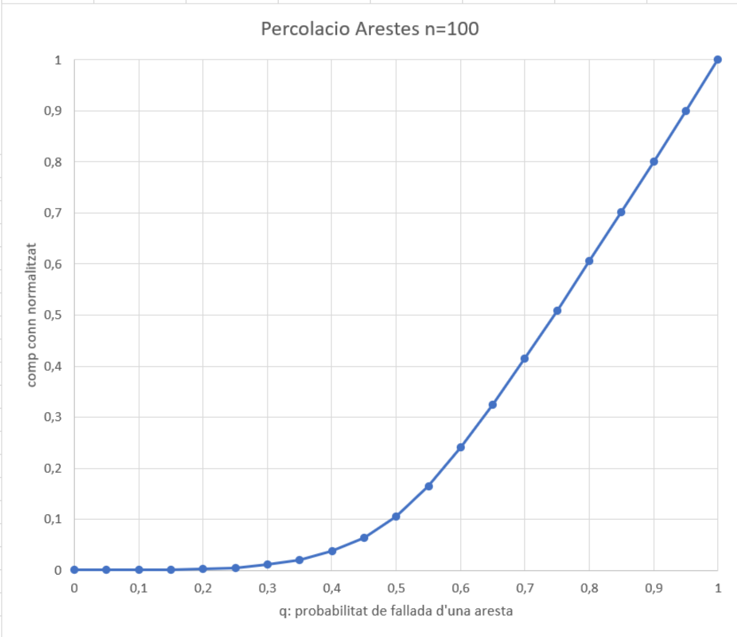
EXPERIMENTACIÓ

(c) Estudiar la possible transició de fase a graelles quadrades n×n, sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes.

Per realitzar l'experiment hem treballat amb graelles amb n = 100, la qual cosa vol dir que es generen graelles de 10.000 nodes, quantitat suficient significativa per a l'estudi a realitzar.
El procés per a l'obtenció de dades és el següent: el nostre programa accepta un paràmetre n que és el número amb què es crearà la graella ja esmentada. Un altre paràmetre és nGrafs, que és el número de vegades que es repetirà la prova de connectivitat per cadascuna de les q, per així poder fer una mitjana. En el nostre cas hem cregut adient fer la mitjana amb 50 repeticions. Els següents paràmetres que accepta són per triar si es vol fer una percolació de nodes, d'arestes i sobre quin tipus de graf es vol fer, si sobre un graf geomètric aleatori o sobre un graf del tipus graella.
Així doncs, la columna de les ***q*** que s'observa en el document són les 'q' sobre les quals s'ha fet l'estudi; la columna de les ***components connexes*** és el resultat obtingut de l'execució del programa; i la columna de les ***cc normalitzades*** és el resultat de normalitzar les components connexes en funció dels nodes del graf. En els gràfics es veuen les relacions de les components connexes normalitzades en funció de la q.

PERCOLACIÓ D'ARESTES

q	components connexes	cc normalitzades
0	1	0,0001
0,05	1,8	0,00018
0,1	2,44	0,000244
0,15	7,64	0,000764
0,2	22,9	0,00229
0,25	50,8	0,00508
0,3	108,96	0,010896
0,35	206,4	0,02064
0,4	370,78	0,037078
0,45	632,86	0,063286
0,5	1053,56	0,105356
0,55	1650,28	0,165028
0,6	2409,3	0,24093
0,65	3244,5	0,32445
0,7	4147,38	0,414738
0,75	5093,2	0,50932
0,8	6058,6	0,60586
0,85	7024,62	0,702462
0,9	8015,14	0,801514
0,95	9004,34	0,900434
1	10000	1

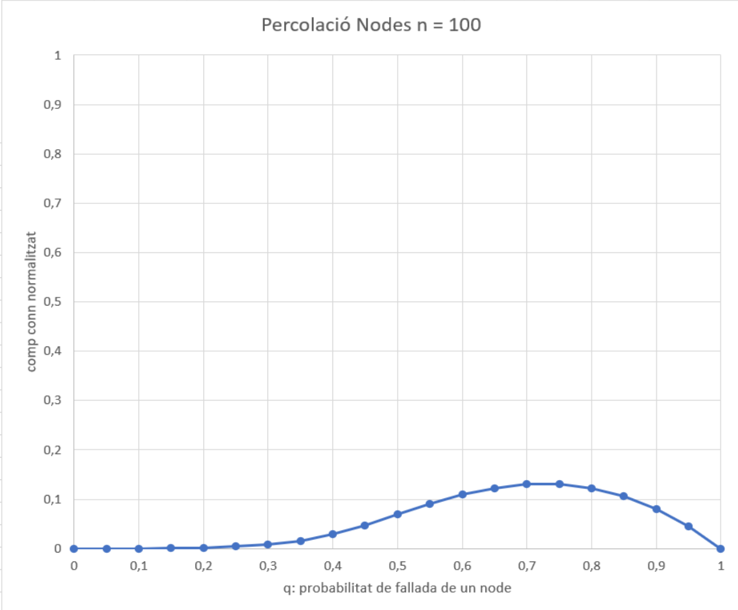


Com es pot observar en els resultats que hem obtingut, fins a la q = 0.2 el nombre de components connexes augmenta de manera molt subtil en comparació amb el nombre total de nodes, però a partir d'aquest punt comença a augmentar, fins que quan la q = 0.4 el pendent de la recta creix, cosa que indica q el nombre de components connexos augmenta prudencialment. A partir de la q = 0.6 el pendent de la recta s'estabilitza i el nombre de components connexes creix linealment fins a arribar al punt on tots els nodes son un component connex, quan la q és 1.

Sabem que existeix una transició de fase si per a una certa propietat P, existeix una q_P tal que amb alta probabilitat les $q < q_P$ no compliran aquesta probabilitat i amb molt alta probabilitat les $q > q_P$ compliran aquesta propietat.
En el gràfic resultant es pot observar com no es produeix aquest comportament, és a dir, no existeix cap transició de fase, ja que no hi ha cap q_P tal que les $q > q_P$ amb alta probabilitat compleixin la propietat que el graf sigui connex[1], ni viceversa.

PERCOLACIÓ DE NODES

q	components connexes	cc normalitzades
0	1	0,0001
0,05	1,13	0,000113
0,1	2	0,0002
0,15	6,8	0,00068
0,2	19,5	0,00195
0,25	41,36	0,004136
0,3	85,78	0,008578
0,35	158,8	0,01588
0,4	290,62	0,029062
0,45	471,46	0,047146
0,5	690,18	0,069018
0,55	903,72	0,090372
0,6	1097,8	0,10978
0,65	1226,56	0,122656
0,7	1305,14	0,130514
0,75	1300,52	0,130052
0,8	1222,28	0,122228
0,85	1055,85	0,105585
0,9	802,7	0,08027
0,95	443,72	0,044372
1	0	0



Com es pot observar en el gràfic obtingut a partir dels resultats de l'execució de la percolació de nodes en una graella amb n=100, la distribució dels punts és força diferent que en la percolació d'arestes. Això és a causa que en la percolació d'arestes s'eliminen amb certa probabilitat les arestes del graf, la qual cosa no modifica el nombre màxim de components connexes; en canvi, en la percolació de nodes, en eliminar amb certa probabilitat els nodes, el nombre de components connexes màximes es veu reduït, i ocasiona aquesta forma de la funció.
En aquest cas, el nombre de components connexes augmenta molt lentament fins que la q = 0.2, però quan aquesta pren el valor de 0.3, veiem com el nombre de components connexes comença a créixer, tot i que gens abruptament, fins al punt en què la q pren el valor de 0.7, punt en el qual hi ha el màxim de la funció. A partir d'aquest punt, la funció comença a decréixer també de manera lenta, fins a arribar a una connectivitat de 100% quan la q val 1, ja que no hi ha cap vèrtex romanent.

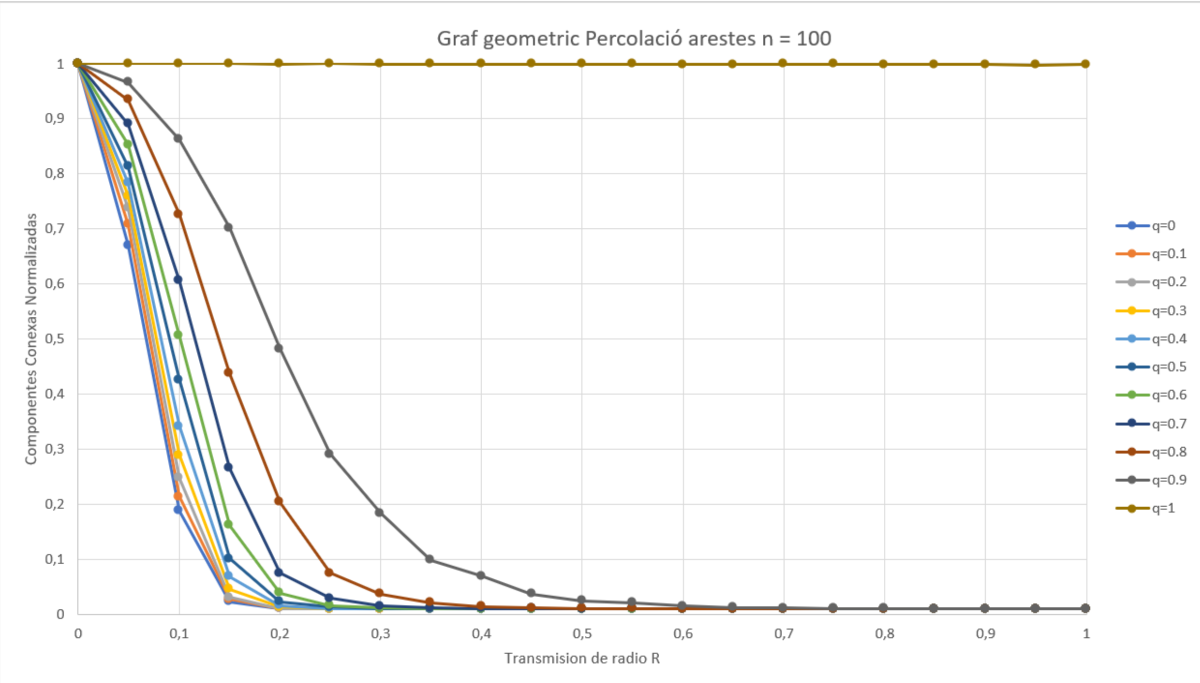
Per aquest motiu, com que no existeix cap valor de q amb el qual amb valors més grans es compleixi amb alta probabilitat la propietat de ser connex i amb valors més petits es compleixi la contrària, tampoc existeix un punt de transició de fase.

[1] La funció de probabilitat de ser connex és la inversa de la funció del nombre de components connexes normalitzada. Quan les CC norm. tendeixen a 0 vol dir que la probabilitat de ser connex tendeix al 100%, i quan les CC norm. tendeixen a 1 vol dir que la probabilitat és del 0%.

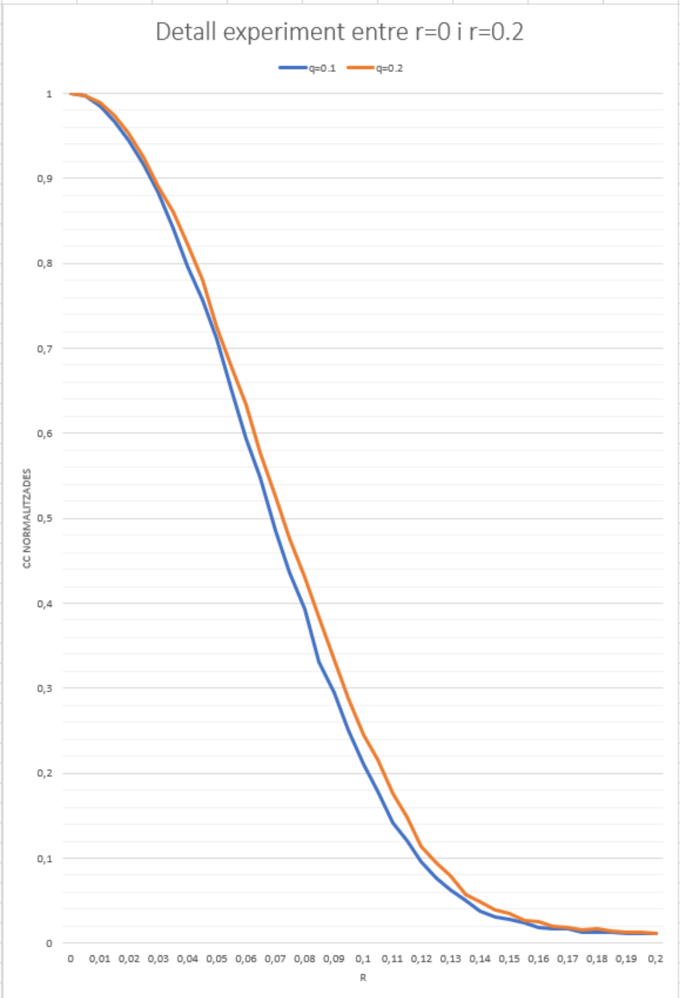
(d) Estudiar la possible transició de fase en grafs geomètrics aleatoris connexos (Random geometric graphs), sota un procés de percolació d'arestes.

Per realitzar aquest experiment, en primer lloc hem creat un generador de grafs geomètrics aleatoris. Per fer-ho, donat una 'n' i una 'r', genera n vèrtexs assignats a posicions aleatòries en l'espai de dos dimensions que va des del (0,0) fins el (1,1) i, per cada parell de vèrtexs, existeix una aresta si, i només si, la distància entre els dos punts de cada vèrtex és menor o igual a r. Aquest algorisme l'hem utilitzat per generar els grafs de 100 nodes sobre els quals hem realitzat l'estudi següent. El nombre de repeticions nGrafs és també 50, igual que en l'experiment de l'apartat c).

r	q=0	q=0.1	q=0.2	q=0.3	q=0.4	q=0.5	q=0.6	q=0.7	q=0.8	q=0.9	q=1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,05	0,6702	0,7072	0,7374	0,7606	0,7834	0,8132	0,853	0,8908	0,9336	0,9662	1
0,1	0,188	0,2144	0,2476	0,289	0,3414	0,4264	0,5048	0,606	0,726	0,8624	1
0,15	0,0232	0,0272	0,031	0,046	0,0686	0,1012	0,1612	0,2646	0,4376	0,7026	1
0,2	0,0106	0,0108	0,0106	0,0134	0,0162	0,0232	0,039	0,0756	0,203	0,4824	0,9998
0,25	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0108	0,0134	0,0162	0,0288	0,075	0,2916	1
0,3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0102	0,0106	0,0114	0,015	0,0366	0,1844	0,9992
0,35	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0102	0,0112	0,0206	0,0976	0,9998
0,4	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0104	0,0142	0,0694	0,9994
0,45	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0102	0,0116	0,0364	0,9992
0,5	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0104	0,025	0,999
0,55	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0102	0,0102	0,0206	0,9992
0,6	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0154	0,9982
0,65	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0128	0,9988
0,7	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0118	0,999
0,75	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,011	0,9992
0,8	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,0104	0,9984
0,85	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,9984
0,9	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,9984
0,95	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,9978
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,9984



En el gràfic anterior hi ha representats els resultats que hem obtingut, on es mostra el nombre de components connexos normalitzats en relació a la ‘r’ que donem al generador de grafs. Com que teníem 3 variables (nombre de components connexos, probabilitat de percolació d’arestes, distància mínima de connexió ‘r’), hem hagut de fer una funció per cada probabilitat q.
En aquesta gràfica, contràriament a les anteriors, sí que es pot observar que hi ha una transició de fase.
Al voltant de la r=0.1, per valors més petits a 0.1 la probabilitat de ser connex és molt baixa, i per valors més grans la probabilitat de ser connex és molt alta.



Per observar en més detall quin era el punt r_P pel qual per $r > r_P$ amb alta probabilitat es compleix la propietat de ser connex i, per $r < r_P$ amb alta probabilitat la propietat de ser connex no es compleix , hem fet el mateix experiment amb increments de la r menors, des de r=0 fins a r=0.2, ja que és un punt a partir del qual el valor de les components connexes normalitzades ja tendeix a 0.
Es pot veure com al voltant del punt r=0.075 es produeix la propietat de transició de fase esmentada anteriorment. Que a més, és el punt de màxim pendent de la funció, cosa que la transició de fase compleix per definició.

Per comprovar si els resultats varien amb ‘n’s més grans, hem realitzat el mateix experiment amb n=200, i hem observat que el comportament és pràcticament idèntic. El resultat es pot consultar al fitxer Excel adjuntat.

CONCLUSIONS

En aquest projecte hem treballat amb el concepte de transició de fase en graelles quadrades representades amb grafs i amb grafs geomètrics aleatoris. Hem estat capaços de programar de manera autònoma la generació de ambdós grafs i el procés de percolació de vèrtexs i d'arestes d'aquests. Finalment, hem pogut observar com la transició de fase només es produeix en la percolació d'arestes en els grafs geomètrics aleatoris.

REFERÈNCIES

https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/keynote/15UnionFind-2x2.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Random_geometric_graph