Fenómeno de Gibbs

Arnau Neches Vilà

2 de enero de 2024

Índice

1. Introducción

El Fenómeno de Gibbs es la descripción de como se comportan las series de Fourier asociadas a funciones con discontinuidades de salto finito.

Cuando hay estas discontinuidades no hay buena convergencia en los entornos de los puntos de discontinuidad. En esos entornos, las sumas parciales muestran extremos que por muchos términos que se añadan no desaparecen, solo se acercan más al punto de discontinuidad, los picos se mantienen e incluso tienen un límite.

El fenómeno se comenzó a estudiar en 1898 cuando Michelson y Stratton diseñaron una máquina capaz de hacer gráficas de las sumas parciales de series de Fourier. Se encontraron con este fenómeno y escribieron una carta a la revista *Nature* en la que Gibbs aclaró la situación. Después de esto se encontró que en 1848 Wilbraham ya había publicado un articulo relacionado con el fenómeno por lo que Gibbs no había sido primero.

El ejemplo más conocido es con la función signo(x) definida en $(-\pi, \pi]$ de la siguiente forma:

$$signo(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Esta función tiene un salto de discontinuidad en el punto $x = 0$. Para estudiar su Serie de Fourier, la extenderemos por periodicidad (Así sera 2π-periodica).

2. Serie de Fourier asociada a signo(x)

La serie de Fourier de la función signo(x) converge puntualmente por ser integrable en $(-\pi, \pi)$ y tener derivadas laterales (A.1). No converge uniformemente en el intervalo por ser la función límite discontinua, sin embargo, hay convergencia uniforme en el intervalo $[\delta, \pi - \delta]$ con $\delta > 0$ (A.2).
Ahora bien, ¿A qué serie converge?

Observemos que la serie es impar por lo que los coeficientes a_n serán nulos y solo deberemos calcular los b_n que son de la forma:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} signo(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos(nx)}{n} \bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

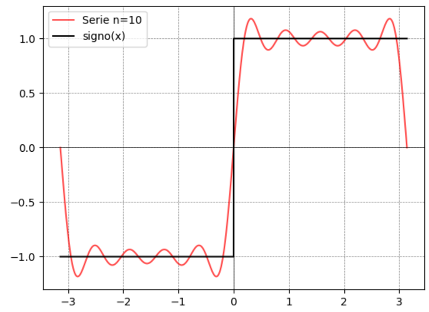
$$signo(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right) \operatorname{sen}(nx) = \{n = 2k+1\} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{2k+1} \right)$$

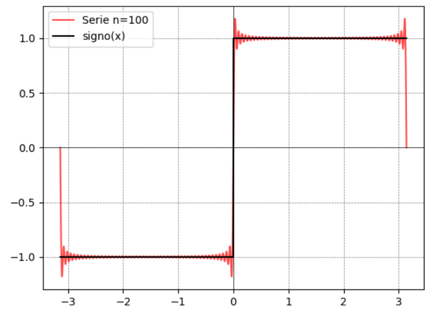
Debido al cambio de variable que hemos hecho, las sumas parciales nos quedarán:

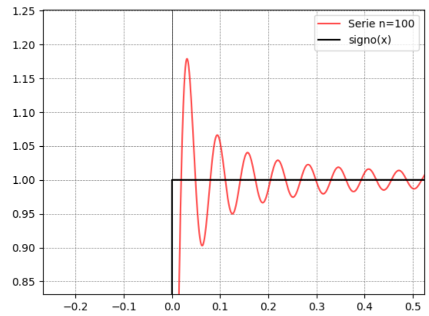
$$S_{2N-1} f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{2k+1} \right) \tag{2}$$

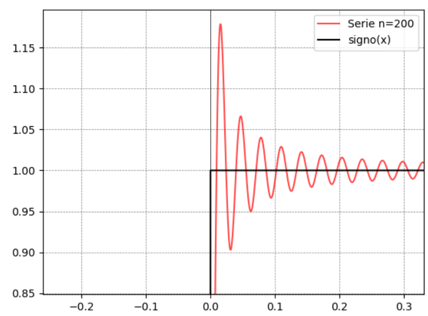
Notese que también hemos hecho el cambio $N = N - 1$ que nos facilitará cálculos más adelante.

3. Gráficas representativas









En estas gráficas se puede observar el fenómeno de Gibbs

4. Cálculo de extremos

Para calcular cuanto vale el máximo, primero vamos a calcular donde están los extremos, para ello derivaremos:

$$\frac{d}{dx}S_{2N-1}f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\cos((2k+1)x)$$

Ahora debemos calcular en que puntos se anula, para dejar la expresión de una forma más cómoda, utilizaremos la igualdad: $\cos((2k+1)x)\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}((2k+2)x) - \operatorname{sen}(2kx)$ al igual que para calcular el núcleo de Dirichlet.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}S_{2N-1}f(x)\right)\operatorname{sen}(x) =& \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\cos((2k+1)x)\operatorname{sen}(x) =\\ =& \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\operatorname{sen}((2k+2)x) - \operatorname{sen}(2kx) =\\ =& \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(2Nx)\end{aligned}$$

Luego nos quedará:

$$\frac{d}{dx}S_{2N-1}f(x) = \frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2Nx)}{\operatorname{sen}(x)} \tag{3}$$

Como $\operatorname{sen}(x)$ no tiene ningún problema en $(0,\pi)$, (3) se anulará en los punto en los que $\operatorname{sen}(2Nx)$ valga 0 y estos son los puntos $x_k = \frac{k\pi}{2N}$ con $k = 1, 2, .., 2N-1$. Sabemos que estos puntos son candidatos a extremos, para ver exactamente que son, acudiremos a la segunda derivada.

$$\frac{d^2}{dx^2}S_{2N-1}f(x) = \frac{4}{\pi}\frac{2N\cos(2Nx)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2Nx)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

La parte que está restando tiene a $\operatorname{sen}(2Nx)$ luego en nuestros puntos x_k se anulará. Lo único que nos importará para ver el signo de la segunda derivada es $\cos(2Nx)$. Sustituyendo nos quedará, $\cos(2Nx_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ luego los puntos se irán alternando entre máximo y mínimo, siendo el primero un máximo.

5. Valor del máximo global

Ya sabemos que el máximo que queremos calcular está en $x = \frac{\pi}{2N}$
Por lo tanto, queremos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1}f(\frac{\pi}{2N}) = \lim_{N\to\infty} \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2N})}{2k+1}\right) \tag{4}$$

Para ello, vamos a expresar $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ como suma de Riemann (A.3) en $[0,\pi]$ evaluada en el punto medio. En primer lugar, partimos $[0,\pi]$ en N partes iguales. Esto es separarlo por los puntos $x_k = \frac{k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots N-1$.
Ahora tenemos los intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ con punto medio de la forma $\frac{(2k+1)\pi}{2N}$
La suma de Riemann será:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2N})}{(2k+1)\frac{\pi}{2N}}\right)\left(\frac{\pi}{N}\right) = 2\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2N})}{2k+1}\right)$$

Vemos que esta suma es igual a la de (4) pero multiplicando por $\frac{\pi}{2}$.
Al ser la función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ continua, es integrable Riemann. Por lo tanto, el límite de su suma de Riemann es la integral, es decir:

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1}f(\frac{\pi}{2N}) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty} 2\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2N})}{2k+1}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$$

En conclusión, aunque haya convergencia puntual, vemos que hay un pico que por mucho que tomemos límite, nunca se va y tiene un valor conocido.

ANEXO

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Sea f una función 2π-periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$, con derivadas laterales en x_0. Entonces la serie de Fourier converge al semisalto en x_0.

Convergencia uniforme en un intervalo cerrado de la serie de Fourier

Sea f continua, con derivada continua a trozos y acotada en un intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Entonces la serie converge uniformemente en $[a+\delta, b-\delta]$ con $\delta > 0$.

Sumas de Riemann

Sea $P = [a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b]$ una partición de $[a, b]$, y sean t_k puntos de cada intervalo. Llamaremos a:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

La suma de Riemann de f respecto a la partición P y los puntos t_k.
Si f es integrable Riemann en $[a, b]$ y se tiene que la norma de la partición tiende a 0, entonces el límite de las sumas de Riemann es la integral de la función.

Código para generar las imágenes

Las imagenes han sido hechas en python con matplotlib y numpy (Muy parecido a MatLab). El código junto con algunas animaciones está en el siguiente repositorio de github: Repositorio de Github