

Intrication quantique

N. Fabre*

March 4, 2024

1 Expérience

1.1 Motivation

L'objectif de ce cours est de décrire des systèmes de particules quantiques composites, comprenant plusieurs particules. Nous nous limiterons au cas à deux particules (et au cas d'une particule en interaction avec le vide, comme dans le cas en sortie d'un cube séparateur en polarisation, lorsque l'entrée est une source de photons uniques). Cependant, le formalisme pourra être étendu au cas de N particules.

L'intérêt de s'intéresser à des systèmes plus complexes est multiple. En matière condensée, des systèmes de N particules corrélées donnent lieu à une phénoménologie de transition de phase riche, telle que la supraconductivité (modèle BCS) et la superradiance (émission cohérente de photons par des atomes excités). Dans le domaine des technologies quantiques, les corrélations de position, polarisation, fréquence, etc., de particules quantiques sont exploitées de différentes manières. Ces corrélations, qualifiées de quantiques, en métrologie quantique, permettent d'atteindre des niveaux de résolution pour la mesure de paramètres plus faibles qu'avec des ressources classiques. Dans le cadre du calcul quantique, le phénomène de superposition quantique et d'intrication quantique est exploité pour résoudre certains algorithmes de manière "plus rapide" que des algorithmes dits classiques (c'est-à-dire n'utilisant pas de ressources quantiques, c'est-à-dire le phénomène de superposition et d'intrication des états quantiques).

Le cours sera axé sur un système optique permettant de créer deux photons intriqués en polarisation, exhibant ainsi un certain type de corrélations quantiques. Nous aborderons la quantification des corrélations quantiques entre ces photons par la violation des inégalités de Bell, qui a conduit au prix Nobel de physique en 2022.

1.2 Génération de paires de photon intriqués par un processus d'optique non-linéaire quantique

Des paires de photons intriqués en polarisation peuvent être produites dans certains types de cristaux en utilisant un processus d'optique non linéaire appelé "conversion paramétrique descendante". Le cristal est illuminé par un laser intense, également appelé pompe, à une fréquence spécifique et sous un certain angle. Les non-linéarités présentes dans le cristal induisent la déformation de la polarisation électronique du cristal, émettant ainsi de nouveaux champs électromagnétiques appelés signal et idler.

Dans ce processus, les photons d'un faisceau laser intense se convertissent spontanément dans un cristal avec une très faible probabilité (environ 10^{-11} pour les matériaux standards), formant des paires de photons (appelées signal et idler) de fréquence plus basse. Bien que le processus de conversion soit inefficace, on peut collecter 100 000 photons en 1 seconde. Le laser de pompe perd un certain nombre de photons au cours de la traversée dans le cristal, mais cette perte n'est pas significative.

Deux processus physiques contraignent les fréquences et impulsions des paires de photons émises :

- La conservation de l'énergie $\omega_p = \omega_s + \omega_i$.
- La conservation de l'impulsion $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$. On parle également d'accord de phase, ce qui signifie que les vitesses de phase de toutes les ondes (pompe, signal et idler) impliquées permettent des interférences constructives entre les signaux.

Par conséquent, le motif d'émission est constitué de cônes, qui créent des anneaux caractéristiques dans le plan perpendiculaire à la direction du faisceau laser de pompage. Dans un processus de SPDC dit d'accord de

*nicolas.fabre@telecom-paris.fr

phase de type-I, la polarisation de la pompe est orthogonale à celle des photons émis. Chaque cône correspond à une longueur d'onde émise distincte. Les angles d'ouverture des cônes d'émission dépendent à la fois des longueurs d'onde des photons émis et de l'angle θ_p entre la direction de la pompe et l'axe optique ; plus l'angle θ_p est petit, plus l'ouverture du cône pour une longueur d'onde donnée est réduite. En d'autres termes, le milieu est anisotrope et autorise la propagation d'une onde plane uniquement dans certaines directions données (déterminées par l'axe optique) avec une polarisation linéaire.

En sortie de ce cristal de type-I, pour un laser de pompe polarisé verticalement, les deux photons émis sont tous deux de polarisation horizontale. La fonction d'onde pouvant décrire cet état quantique composé de deux particules est donnée par :

$$|\psi\rangle = |H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 \quad (1)$$

où 1,2 décrivent les directions de propagation des photons, sélectionnées par des fentes à travers le cône d'émission. $|H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2$ est un produit tensoriel de deux photons uniques présents dans les voies spatiales 1 et 2. On peut vérifier que seuls des photons de polarisation horizontale sont produits en plaçant un cube séparateur de polarisation suivi de deux détecteurs (plus de détails dans la suite).

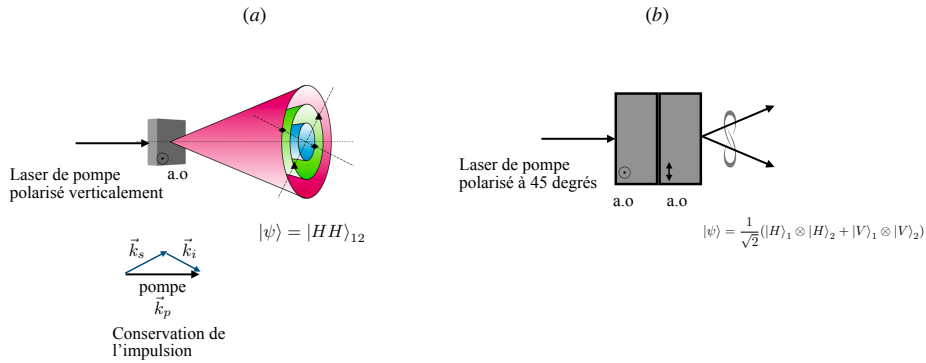


Figure 1: À gauche : Génération de paires de photons par le processus de génération spontanée paramétrique. Un seul cristal non linéaire donne lieu à la création d'une paire de photons indistinguables, tous deux polarisés horizontalement, lorsque la pompe est polarisée verticalement et que l'axe optique du cristal est orienté selon une certaine direction. À droite : Une fois que deux cristaux non linéaires sont placés avec deux axes optiques (ao) orthogonaux, et qu'une pompe optique est dans une superposition d'états horizontal et vertical, une indétermination intrinsèque apparaît. Soit la paire de photons créée provient du premier cristal et est alors polarisée horizontalement, soit la paire de photons créée provient du second cristal et est polarisée verticalement.

Est-il possible d'obtenir des états plus exotiques? Considérons deux cristaux avec un accord de phase de type-I et excités par de la lumière classique polarisée linéairement. Par exemple, supposons que l'axe optique du premier cristal soit aligné dans le plan vertical et que l'axe du deuxième cristal soit dans le plan horizontal. Avec une pompe polarisée verticalement, le processus de conversion descendante ne se produit que dans le premier cristal, émettant des paires de photons polarisés horizontalement. Tandis qu'avec une pompe polarisée horizontalement, il ne se produit que dans le deuxième cristal, produisant deux photons polarisés verticalement.

Ainsi, en pompant les cristaux avec de la lumière polarisée linéairement à 45 degrés par rapport à la direction horizontale et verticale, il y a une probabilité égale qu'un photon de pompe soit converti dans l'un ou l'autre des cristaux. À condition que les deux processus d'émission soient cohérents les uns avec les autres, ce qui est rempli tant qu'il n'y a aucun moyen de déterminer si une paire de photons a été produite dans le premier ou le deuxième cristal, la paire de photons intriqués est décrite par la fonction d'onde :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 + |V\rangle_1 \otimes |V\rangle_2) \quad (2)$$

Cet état intriqué possède des propriétés contreintuitives, Dans la suite, nous allons établir le formalisme de la description de particules intriqués, le rôle de la mesure, et comment comprendre et quantifier ces corrélations fortes en polarisation.

♣ A noter qu'avec un cristal d'accord de phase de type-II, l'état quantique en sortie du cristal serait directement:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 + |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2) \quad (3)$$

2 Formalisme décrivant des systèmes quantiques composites

Dans cette section, nous aborderons le cas d'un système de deux particules quantiques. Comment décrire un système à deux particules et les éventuelles corrélations entre elles? Nous illustrerons ce formalisme en décrivant le cas de photons intriqués en polarisation. Ce même formalisme peut être étendu pour décrire l'intrication entre deux spins 1/2, l'intrication entre un photon et un atome, entre deux atomes, etc. De plus, le formalisme peut s'appliquer pour décrire l'intrication entre deux systèmes ayant des degrés de liberté de dimension supérieure, comme deux photons intriqués en fréquence.

2.1 Produit tensoriel

Rappelons encore une fois qu'un photon unique ayant un degré de liberté de polarisation est décrit par une fonction d'onde appartenant à un espace de Hilbert de dimension 2. Cette fonction d'onde peut s'écrire comme

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle_a + \beta |V\rangle_a \quad (4)$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ sont les amplitudes de probabilités associées aux états de polarisation horizontal et vertical. On note ici a le mode spatial, qui sera la direction de propagation du photon unique.

Comment décrire un système de deux particules? Deux particules seront aussi décrit par une fonction d'onde, un vecteur appartenant à un espace de Hilbert plus large: $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. La notation \otimes désigne un produit tensoriel entre ici deux espaces de Hilbert, celui où se décrivent les fonctions d'onde de chacune des particules.

La dimension de l'espace de Hilbert total est de $\dim(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = 2^2 = 4$. Cela signifie qu'il existe quatre états de base orthogonaux dans cet espace, qui forment une base complète pour décrire l'état du système, noté $\{|H\rangle_a \otimes |H\rangle_b, |H\rangle_a \otimes |V\rangle_b, |V\rangle_a \otimes |H\rangle_b, |V\rangle_a \otimes |V\rangle_b\}$.

$|H\rangle_a \otimes |H\rangle_b$ signifie que l'on a deux photons dans deux voies spatiales distinctes a et b (l'état quantique pouvant être généré par un processus de type-I). Parfois, on utilise la notation plus compacte $|H\rangle_a |H\rangle_b$ voir même, $|HH\rangle_{ab}$.

Une fonction d'onde générale d'un système à deux particules peut s'écrire alors comme

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle_a \otimes |H\rangle_b + \beta |H\rangle_a \otimes |V\rangle_b + \gamma |V\rangle_a \otimes |H\rangle_b + \delta |V\rangle_a \otimes |V\rangle_b \quad (5)$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}$. La fonction d'onde à deux particules peut s'écrire également en notation vectorielle:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Le bra correspondant est un vecteur ligne où tous les coefficients (amplitudes de probabilités) passent au complexe conjugué: $\langle\psi| = (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*)$, ou en notation de bra et de ket:

$$\langle\psi| = \alpha^* \langle H|_a \otimes \langle H|_b + \beta^* \langle H|_a \otimes \langle V|_b + \gamma^* \langle V|_a \otimes \langle H|_b + \delta^* \langle V|_a \otimes \langle V|_b \quad (7)$$

Exemple de la notation vectorielle: Deux photons uniques présent dans deux voies spatiales a, b polarisées horizontalement:

$$|HH\rangle_{ab} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Cela correspond à l'exemple mentionné dans l'introduction, cet état quantique naturellement crée par un cristal non-linéaire de type-I.

Base orthonormée

Montrons que $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$ est une base orthonormée. Par exemple, nous avons les produits scalaires suivant:

$${}_{ab} \langle HH|HH\rangle_{ab} = ({}_a \langle H| \otimes {}_b \langle H|)(|H\rangle_a \otimes |H\rangle_b) = {}_a \langle H|H\rangle_a \times {}_b \langle H|H\rangle_b = 1 \times 1 = 1 \quad (9)$$

$${}_{ab} \langle HH|HV\rangle_{ab} = ({}_a \langle H| \otimes {}_b \langle H|)(|H\rangle_a \otimes |V\rangle_b) = {}_a \langle H|H\rangle_a \times {}_b \langle H|V\rangle_b = 1 \times 0 = 0. \quad (10)$$

Il est également recommandé d'utiliser la notation vectorielle pour faire cette démonstration. Remarquer bien que l'on a dans ces calculs différents types de produits, un produit tensoriel, un produit scalaire, et une multiplication.

La valeur absolue au carré de l'amplitude de probabilité représente une probabilité. Par exemple, nous avons

$$P(HH) = |\langle HH|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2. \quad (11)$$

La fonction d'onde de système à deux particules, pour décrire un système quantique, doit être normalisée à un, c'est à dire que la somme des probabilités est égale à 1:

$$|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2. \quad (12)$$

Preuve: faire avec les deux méthodes:

- avec la notation de Dirac des bra et des kets
- avec la représentation en terme de vecteur colonne et ligne.

Propriété du produit tensoriel

- Le produit tensoriel est **multilinéaire**. Si on a $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ et $|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, on a

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \quad (13)$$

- **Produit tensoriel d'opérateurs** Un produit tensoriel d'opérateur $\hat{\sigma}_x^1 \otimes \hat{\sigma}_x^2$ comme l'opérateur $\hat{\sigma}_x^1$ s'appliquant sur la voie spatiale a et $\hat{\sigma}_x^2$ s'appliquant sur la voie b .

Exemple:

Appliquons des produits tensoriels de matrice de Pauli à des états intriqués.

$$\begin{aligned} (1) & \hat{\sigma}_x^a \otimes \hat{\sigma}_z^b \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a |H\rangle_b + |V\rangle_a |V\rangle_b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x^a |H\rangle_a \otimes \hat{\sigma}_z^b |H\rangle_b + \hat{\sigma}_x^a |V\rangle_a \otimes \hat{\sigma}_z^b |V\rangle_b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_a \otimes |H\rangle_b + |H\rangle_a \otimes (-1)|V\rangle_b) \end{aligned}$$

Il est également possible d'écrire le produit tensoriel sous forme matricielle. Le produit tensoriel d'une matrice A et B est donné par:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pn}B \end{pmatrix} \quad (14)$$

Exemple

Prenons un espace de dimension 2 sur lequel l'opérateur A est représenté par une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (15)$$

et un opérateur B représenté par la matrice suivante:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le produit tensoriel de $A \otimes B$ est une matrice de taille 6×6 :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Identifier bien les 4 blocs. Pour les exemples que l'on va traiter, on ne manipulera pas analytiquement des objets de cette taille. Numériquement par contre, cela sera nécessaire.

2.2 Mesures de polarisation de paires de photons

Pour mesurer les probabilités associées à chacun des termes de la base de décomposition des paires de photons, un montage optique, tel que représenté sur la Fig. 2, est utilisé. Dans chacune des voies spatiales a et b , deux

cubes séparateurs de polarisation sont positionnés. Les photons de polarisation horizontale sont réfléchis, tandis que les photons de polarisation verticale sont transmis. Les deux cubes sont ensuite suivis de 4 détecteurs de photons uniques. On peut mesurer quand chaque détecteur clique, mais également grâce à une électronique de synchronisation, quand deux détecteurs cliquent en même temps, générant ainsi des événements de coïncidences.

Prenons l'état de paire de photons intriqués créé par deux processus de type-I en cascade:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} + |VV\rangle_{ab}). \quad (18)$$

Il est impossible de trouver une base pour décomposer la fonction d'onde qui appartient à 1 particule, et à l'autre car $|\psi\rangle \neq |\phi_1\rangle_a \otimes |\phi_2\rangle_b$. L'état sera alors dit **intriqué**, contraire d'un état dit **séparable** lorsque $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle_a \otimes |\phi_2\rangle_b$

Après les cubes séparateurs de polarisation (voir Fig. 2), en supposant que la composante horizontale (resp. verticale) est réfléchi(e) (resp. transmise) on obtient:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{a_1b_1} + |VV\rangle_{a_2b_2}) \quad (19)$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont les quatre voies spatiales après les deux cubes, dans lesquels on place 4 détecteurs de photons uniques. On obtient alors les probabilités de **coïncidences** représentées sur la Fig. 2(a), qui sont en accord avec les probabilités obtenues avec l'état décrit par Eq. (19):

$$P(VV) = P(HH) = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$P(HV) = P(VH) = 0 \quad (21)$$

et l'on observe des corrélations fortes en polarisation, qui seront quantifiées dans la section suivante par les inégalités de Bell. En d'autres termes, les deux états de polarisation sont dans un état complètement indéfini. Si l'on mesure la polarisation selon l'axe H , alors le photon unique dans la voie spatiale b se trouve dans un état défini, c'est-à-dire polarisé horizontalement selon H . De la même manière, si l'on mesure V dans la voie spatiale a , l'autre photon sera dans un état déterminé V dans la voie spatiale b . On peut montrer que cet état est maximalelement intriqué, c'est-à-dire qu'il est invariant par rotation (voir exercice). La statistique des résultats de mesure est la même, même si l'on mesure avec une base $R_\alpha, R_{\alpha+\pi/2}$.

Prenons l'exemple d'un système de deux particules décrit par la fonction d'onde:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|HH\rangle_{ab} + |HV\rangle_{ab} + |VH\rangle_{ab} + |VV\rangle_{ab}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a + |V\rangle_a) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_b + |V\rangle_b) \quad (22)$$

On constate en effet que la fonction d'onde est **séparable**: celle-ci peut se décomposer en deux fonctions d'onde appartenant respectivement à deux espaces de Hilbert. Il y a aucune corrélation entre les particules: en effet la mesure donne

$$P(HH) = P(HV) = P(VH) = P(VV) = \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Imaginons que l'on a un photon unique généré en France, l'autre en Australie. Les deux dispositifs générant les deux photons uniques sont indépendant, et il n'y a aucune corrélation possible entre ces deux photons. Une mesure de la polarisation de ces paires de photons (non intriqués) donnerait l'histogramme de la Fig. 2(c).

Etats de Bell Les quatre états de Bell formant une base orthonormée sont:

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} \pm |VV\rangle_{ab}) \quad (24)$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle_{ab} \pm |VH\rangle_{ab}) \quad (25)$$

$$(26)$$

A noter que trois de ses états sont symétriques par échange des deux particules (lesquels?) alors qu'un seul d'entre eux est antisymétrique. Ces propriétés de symétrie des états sont fondamentales pour pouvoir les distinguer par la mesure.

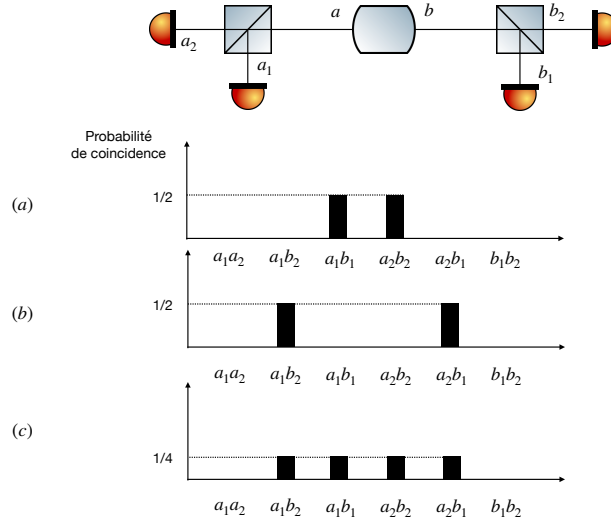


Figure 2: Cristal non-linéaire produisant des paires de photons intriqués en polarisation. Ces paires de photons pénètrent dans un dispositif de mesure contenant deux cubes séparateurs de polarisation, suivi par deux détecteurs. Les histogrammes de polarisation obtenus sont les suivants : (a) Histogramme mesuré lorsque l'état quantique en entrée est l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} + |VV\rangle_{ab})$. (b) Quel est l'état quantique correspondant à cet histogramme de coïncidences ? (c) Histogramme mesuré lorsque l'état quantique en entrée est constitué de deux photons uniques séparables.

Portes logiques A noter que l'on peut avoir des opérateurs qui s'appliquent sur les voies spatiales a et b mais qui ne peuvent pas s'écrire comme le produit tensoriel d'opérateur s'appliquant de manière indépendante sur chacune des voies. C'est l'exemple de la porte logique CNOT qui peut s'écrire:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Etats intriqués "photon unique et vide" En sortie du cube séparateur de polarisation lorsque l'on a un seul photon unique polarisé selon $(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, l'état que l'on a en sortie est l'état suivant:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a |vide\rangle_b + |vide\rangle_a |V\rangle_b). \quad (28)$$

Il s'agit d'un état intriqué composé d'un état de photon unique et du vide, de la même manière mathématique que l'état intriqué de paires de photons. Cette manière d'encoder de l'information par la présence et l'absence de photons est à la base de la réalisation expérimentale d'algorithmes quantiques tels que le Boson Sampling (voir <https://arxiv.org/abs/1011.3245>). Le Boson Sampling est une tâche algorithmique réalisée avec des ressources quantiques, démontrant un avantage quantique sans nécessiter un ordinateur quantique résilient aux erreurs.

♣ Que faudrait il faire pour obtenir l'information complète sur l'amplitude et la phase de l'état? C'est à dire mesurer les 4 coefficients complexes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}$?

3 Quantification des corrélations quantique avec les inégalités de Bell

3.1 Historique

L'un des premiers postulats de la mécanique quantique est que les résultats des mesures sont intrinsèquement aléatoires. Cette nature du hasard est profondément différente de celle rencontrée en physique statistique. Dans cette dernière, la description probabiliste découle d'un manque de connaissance de l'état initial ou des interactions entre le système et son environnement. En théorie, en physique classique, si l'on avait une connaissance complète de l'état et des interactions, on pourrait prédire parfaitement le résultat d'une mesure. En physique

classique, le hasard résulte de notre ignorance ou de la complexité des systèmes. En mécanique quantique, l'aléatoire est un principe fondamental et irréductible, même avec une connaissance parfaite de l'état initial et des interactions (voir l'exemple de la séance 4 pour la réflexion et transmission de photon unique au sein d'une lame séparatrice).

En revanche, en mécanique quantique, il est impossible de prédire avec certitude le résultat d'une mesure. Cette incertitude fondamentale a profondément troublé Albert Einstein, qui considérait la mécanique quantique comme "incomplète". Il était convaincu que dans une description complète de la réalité, on devrait pouvoir prédire le résultat d'une mesure de manière déterministe.

Einstein, Podolsky et Rosen en 1935 ont conçu une expérience de pensée mettant en évidence les implications étranges de l'intrication quantique, un phénomène où deux particules éloignées semblent "liées" instantanément dans leur distribution en position (ou impulsion). Ce paradoxe soulevait un questionnement sur la complétude de la mécanique quantique, et ils en ont conclu que les résultats sont prédéterminés par les propriétés du système qui existent indépendamment de ses mesures. Des "variables cachées" seraient présentes, non écrites directement dans le produit tensoriel, pour décrire ses corrélations.

3.2 Introduction

Un critère statistique a été proposé par Bell (J. S. Bell, *Physics Physique Fizika* **1**, 195 (1964)) pour trancher entre les prévisions de la mécanique quantique selon Bohr et celles des théories à variables cachées, c'est-à-dire pour répondre à la question : les corrélations entre les deux particules sont-elles établies à la source ? Les inégalités de Bell sont construites à partir d'un modèle :

- **Realisme**: les propriétés physiques ont des valeurs définies qui existent indépendamment de l'observation
 - **Localité**: La mesure de deux particules n'influence pas le résultat de l'autre.
- Si l'inégalité de Bell construit à partir d'une de ses hypothèses est violée, alors l'une (ou les deux) sont fausses.

Inégalité de Bell, et modèle à variable cachée

Cette exemple est tiré du livre *Physique Quantique fondements*, de Le Bellac.

Imaginez que vous avez deux chaussettes, une rouge et une verte. Vous les mettez dans un sac opaque, et l'envoyez à deux personnes appelées Alice et Bob (voir Fig. 3). Les deux personnes savent que les couleurs des chaussettes sont différentes. Alice tire une chaussette. Admettons qu'elle obtient une verte, alors elle sait immédiatement que celle de Bob est rouge. Il n'y a pas eu de propagation de signal entre Alice et Bob, l'information était préétablie.

Complexifions maintenant la situation. Considérons maintenant que A, A' soient les couleurs du T-shirt et pantalon d'Alice, et B, B' soient les couleurs du T-shirt et pantalon de Bob. En d'autres termes, nous introduisons A, A' comme la mesure qui peut être appliquée à la particule 1, et B, B' comme la mesure qui peut être effectuée sur la particule 2. Ainsi, il y a quatre mesures possibles qui peuvent être effectuées : (A, B) , (A', B) , (A, B') , et (A', B') . Les habits sont distribués selon une loi préétablie $p(A, B, A', B')$, étant le modèle à variable cachée.

Nous nous intéressons à la quantité suivante :

$$S = B(A + A') + B'(A - A') = AB + A'B + AB' - A'B' \quad (29)$$

Cette valeur S peut prendre les valeurs de:

- soit $A = A'$ et donc $S = \pm 2B = \pm 2$
- soit $A = -A'$ et donc $S = \pm 2B' = \pm 2$

Expérimentalement, nous devons répéter l'expérience, et nous obtenons :

$$\langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle \quad (30)$$

Nous pouvons en déduire une inégalité remarquable, appelé forme CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt) de l'inégalité de Bell.

Forme CHSH des inégalités de Bell

La valeur moyenne de S calculée à partir de $P(A, B, A', B')$ est nécessairement inférieure à 2

$$-2 \leq \langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle \leq 2 \quad (31)$$

Si un modèle à variables cachées existe et peut décrire ces corrélations, alors la quantité S ci-dessous ne peut pas dépasser 2. Si cette valeur de 2 est dépassée, alors le modèle à variable caché local et/ou réaliste est faux (soit les deux sont faux, ou l'un et l'autre).

La preuve est donnée dans l'Appendice B. Qu'en est il maintenant pour des états intriqués? C'est à dire pour lequel la moyenne de S n'est pas calculée à partir du jeu de probabilité $P(a, b, a', b')$.

Version courte d'une dérivation des inégalités de Bell pour des photons polarisés

Considérons une source qui émet des paires de photons intriqués en polarisation se propageant en sens opposé, tel que la fonction d'onde est donnée par $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} + |VV\rangle_{ab})$.

Nous introduisons A et A' comme la mesure pouvant être appliquée à la particule 1, et B et B' comme celles que nous pouvons effectuer sur la particule 2. Ainsi, il existe quatre mesures possibles qui peuvent être effectuées : (A, B) , (A', B) , (A, B') et (A', B') . Nous considérons une mesure de polarisation où nous pouvons obtenir seulement deux résultats - correspondant à la polarisation verticale et horizontale - à partir desquels nous associons les valeurs ± 1 . Nous considérons le schéma expérimental représenté sur la Fig. 3. Lorsque les analyseurs sont parallèles, les probabilités de détection conjointe sont :

$$P_{++}(a, b) = P_{--}(ab) = \frac{1}{2}, \quad (32)$$

$$P_{+-}(a, b) = P_{-+}(ab) = 0 \quad (33)$$

Pour quantifier la quantité de corrélations entre ces événements aléatoires, nous introduisons le coefficient de corrélation qui est défini par:

$$E(a, b) = P_{++}(a, b) + P_{--}(a, b) - P_{-+}(a, b) - P_{+-}(a, b), \quad (34)$$

nous trouvons alors $E(a, b) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$, où \vec{a}, \vec{b} sont les orientations des polariseurs/analyseurs, qui est une quantité aisément mesurable à partir de mesure de coïncidences.

La valeur moyenne de S décrite auparavant (voir Eq. (30)), prise en valeur moyenne avec des états quantiques se décrit avec 4 orientations de polariseurs/analyseurs, ce qui conduit à 16 mesures de coïncidences:

$$\langle S \rangle = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b'). \quad (35)$$

Pour les états intriqués, avec un choix judicieux des bases de mesure, il a été démontré expérimentalement que $\langle S \rangle$ est supérieur à 2. Les états maximalement intriqués violent l'inégalité avec $S = 2\sqrt{2} \sim 2.828$, pour un ensemble spécifique de directions d'analyseurs : $a = 0$, $a' = \pi/4$, $b = \pi/8$, et $b' = 3\pi/8$. D'autres détails sur la mesure sont donnés dans l'Appendice B.

Dans l'expérience d'Aspect et al. en 1982, la valeur moyenne de S mesurée est donnée par $S = 2.697 \pm 0.015$. À présent, de nombreux groupes expérimentaux dans le monde ont démontré la violation des inégalités de Bell pour de nombreux états quantiques intriqués (spin-spin, spin-photon, etc.). De cette violation, on en déduit que le modèle à variable cachée construit sur les hypothèses réalisme et localité sont fausses. On a donc une signature d'un nouveau type de corrélation, la non-localité qui est une des corrélations quantiques.

En pratique, de nombreux bruits, tels que le bruit au niveau de la détection et les imperfections dans la génération de l'état, peuvent perturber la mesure. Même pour des états maximalement intriqués "théoriques", le paramètre S sera généralement inférieur. Cependant, tant que celui-ci n'est pas inférieur à 2, cela reste un indicateur de bonne performance quant à la qualité de l'intrication de la source (car des corrélations classiques seraient modélisées par des variables cachées et/ou locales).

3.3 Discrimination des loopholes

Dix ans après la proposition de Bell, les premiers tests expérimentaux pionniers de Bell ont connu le succès, avec Alain Aspect (Aspect, Alain, Philippe Grangier, et Gérard Roger, PRL **49**, 2 (1982): 91-94.), et Anton

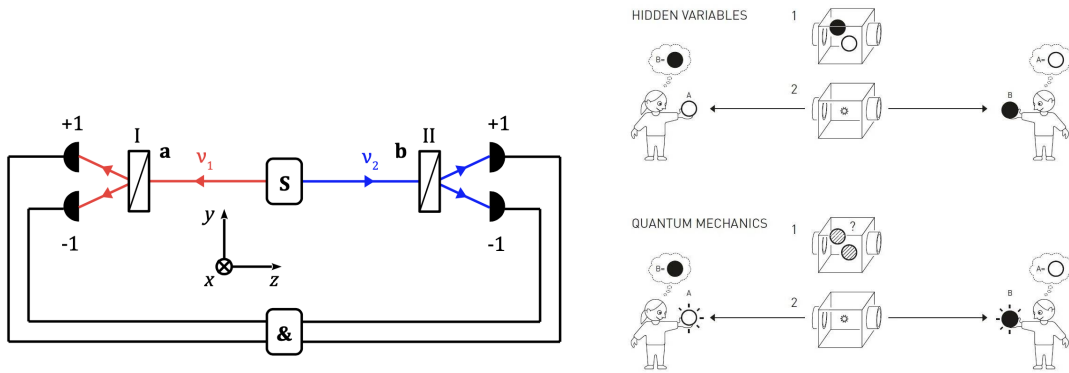


Figure 3: (Gauche) Setup des inégalités de Bell, et (droite) comparaison entre corrélations classiques et quantiques. Dans le test de Bell représenté, les deux parties distinctes A et B détiennent chacune un photon de la paire intriqué. Chaque partie choisit ensuite l'une des deux mesures possibles à effectuer sur son qubit (polariseur orienté avec différents angles et cube séparateur de polarisation) et enregistre le résultat binaire des coïncidences. Les parties répètent le processus plusieurs fois pour accumuler des statistiques et évaluer une inégalité de Bell en utilisant les choix de mesure et les résultats enregistrés. Les systèmes régis par des modèles de variables cachées locales sont censés obéir à l'inégalité, tandis que les systèmes quantiques peuvent la violer.

Zeilinger pour la partie expérimentale et Clauser pour la partie théorique. Cependant, ces premières expériences reposaient sur des hypothèses supplémentaires, créant des loopholes dans les conclusions tirées des expériences. Les expériences ont ensuite progressé pour supprimer tous les loopholes, jusqu'en 2015 où des inégalités de Bell sans loophole ont été réalisés. Bien que cela n'ait pas apporté de "complétude" à la théorie au sens d'Einstein, l'interprétation et les implications philosophiques de ce caractère aléatoire continuent d'être débattues.

Donnons quelques exemples de loophole:

- **Loophole de Détection** : Le loophole de détection dans les tests de Bell optiques survient lorsque seule une petite fraction des photons émis est détectée, pouvant conduire à des corrélations non représentatives. Pour y remédier, une efficacité de détection élevée est nécessaire, avec des limites spécifiques pour diverses inégalités de Bell. Historiquement, les systèmes non optiques ont atteint des efficacités élevées, mais des configurations optiques récentes utilisant des photodétecteurs supraconducteurs ont fermé cette faille.

- **Loophole de Localité** : Le théorème de Bell suppose la localité, signifiant que le choix de la configuration de mesure à un site n'influence pas le résultat à un autre, en accord avec la théorie de la relativité. Atteindre une séparation de type espace entre les événements de mesure est crucial. Les premières expériences ont respecté cette condition, tandis que des expériences ultérieures, comme celle de Weihs et al. en 1998, ont introduit des changements aléatoires de configuration. L'expérience de Scheidl et al. en 2010, séparée de 144 km, a encore amélioré le caractère aléatoire.

- **Loophole de Coïncidence** : Dans les expériences, surtout celles impliquant la polarisation des photons, les événements dans différentes branches sont identifiés comme des paires après l'expérience. Le loophole de coïncidence survient lorsque les temps de détection sont considérés après l'expérience, permettant aux variables cachées locales de simuler des corrélations quantiques. Cette faille peut être éliminée en utilisant des fenêtres de détection prédéfinies, garantissant que les paires proviennent de la même émission et minimisant l'impact des limites de fenêtre.

Il est à présent conclu que tous les loopholes ont été fermés. Un débat n'est jamais fermé, il ne demande qu'à être réouvert à la lumière de nouvelles expériences, et à la conception de nouvelles technologies!

3.4 Applications de l'intrication quantique et au-delà

Communication quantique:

Dans la **Distribution Quantique de Clé (QKD)** basée sur l'intrication, Alice et Bob partagent des paires de qubits intriqués. Ils mesurent ensuite les qubits de leur paire respective dans des bases aléatoires et comparent les résultats pour détecter toute interception de la transmission. Dans la QKD basée sur la préparation et la mesure, Alice prépare des qubits individuels et les envoie à Bob. Bob mesure ensuite les qubits dans des

bases aléatoires et communique les résultats à Alice. Ils comparent ensuite les résultats pour détecter toute interception. Les deux protocoles donnent exactement les mêmes statistiques de mesure. La formulation d'un protocole est choisie pour des raisons expérimentales ou parce que la preuve de sécurité du protocole est plus simple dans l'un des cas. Dans le contexte d'un protocole basé sur l'intrication, l'inégalité de Bell est utilisée pour quantifier les corrélations entre les mesures d'Alice et de Bob et détecter toute interception. La violation de cette inégalité prouve l'existence d'une communication quantique sécurisée. Pour plus d'informations, voir le cours de deuxième année intitulé Technologies quantiques.

Calcul quantique: Les qubits intriqués, ou bits quantiques, sont des qubits qui sont intriqués entre eux. Cela permet d'exploiter des propriétés uniques lors des calculs quantiques, notamment la capacité de traiter simultanément plusieurs états grâce à l'intrication, ce qui augmente la puissance de calcul pour certains algorithmes. Pour plus d'informations, voir le cours de deuxième année intitulé Technologies quantiques.

Vers de nouveaux concepts?

Les inégalités de Bell ne donnent pas quelles sont hypothèses résumé en "réalisme locale" qui sont incorrectes. L'explication la plus répandue est celle de non-localité quantique, qui reste compatible avec le principe de causalité (que la vitesse de la lumière est finie) mais pour lequel la provenance de la non-localité reste mystérieuse. Plusieurs pistes sont envisagées:

- le **superdeterminisme**. Une hypothèse nécessaire pour dériver le théorème de Bell est que les variables cachées ne sont pas corrélées avec les configurations de mesure. On a justifié cette hypothèse en soutenant que l'expérimentateur a un "libre arbitre" pour choisir les configurations, ce qui est essentiel pour faire de la science en premier lieu. Une théorie (hypothétique) où le choix de la mesure est déterminé par le système quantique mesuré est connue sous le nom de superdéterminisme. Néanmoins, concevoir une expérience reste un challenge.

- L'interprétation d'Everett, également connue sous le nom **d'interprétation des mondes multiples**, a été formulée par Everett en 1957. L'interprétation des mondes multiples propose une vision particulière de la nature de la réalité quantique et de la façon dont les événements se déroulent au niveau microscopique. Selon cette théorie, chaque fois qu'un événement quantique a plusieurs résultats possibles, tous ces résultats se produisent réellement, mais dans des branches distinctes de l'univers. En d'autres termes, l'univers se scinde en une multitude de réalités alternatives à chaque bifurcation quantique. Par exemple, si un électron peut être dans deux positions différentes à la fois, alors, selon l'interprétation des mondes multiples, il existe deux univers distincts où l'électron occupe chacune de ces positions. Cette interprétation est compatible avec les postulats que l'on a vu, mais il pose un problème ontologique et cette interprétation n'est pas vérifiable expérimentalement.

4 Les postulats de la mécanique quantique

Faisons le bilan des différents postulats de la mécanique quantique que nous avons introduit, et donnons quelques pistes vers d'autres étapes de lecture.

- (1) Pour tout système quantique A est décrit par un vecteur unité (appelé fonction d'onde) pour lequel on lui associe un espace de Hilbert \mathcal{H}_A . (plus généralement des matrices densités, voir cours de 2A).
- (2) Un système isolé évolue selon l'équation de Schrödinger, $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle$. (dans le cas de système non-isolé, on parle d'évolution non-Hamiltonienne, dite Lindbladienne).
- (3) Les quantités physiques mesurables, appelées observables sont représentées par des opérations Hermitiens $\hat{U} = \hat{U}^\dagger$.
- (4) Règle de Born. La mesure de l'observable A ne peut donner comme résultat qu'une valeur propre de \hat{A} (a_n réels car A est autoadjoint). Le résultat d'une mesure unique est aléatoire. Si on répète les mesures sur des systèmes préparés dans l'état $|\psi\rangle$, la probabilité de mesurer a_n vaut: $P(a_n) = \|\hat{P}_n |\psi\rangle\|^2 = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$. (A noter qu'il n'existe pas que des mesures projectives).
- (5) On associe au système AB composé des deux sous systèmes A et B l'espace de Hilbert tensoriel $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

A Exercices et suppléments

A.1 Exercices

(1) Considérons l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle_{ab} + \frac{1}{2}|01\rangle_{ab} + \frac{1}{2}|11\rangle_{ab} \quad (36)$$

Supposons que l'état ait été projeté selon l'état 0 dans la voie spatiale a . Quel est l'état après cette projection? De même si si l'état est projeté selon l'état 1 dans la voie spatiale b . L'état est-il intriqué?

(2) Soit deux qubits initialisés selon $|H\rangle_a |H\rangle_b$, état donc séparable. Appliquons la porte de Hadamard dans la voie spatiale a suivi de la porte CNOT (voir Eq. (27)). Quel est l'état résultant?

(3) Quel est la dimension de l'espace de Hilbert pour N qubits? et pour N qudits?

(4) Montrer que $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$ est invariant par rotation.

(5) Comment écrire deux photons intriqués en position, la position étant une variable continue?

A.2 Correction

(1) On rappelle que l'état final se retrouve projeté sur l'état:

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle}} \quad (37)$$

où le dénominateur est nécessaire pour assurer la normalisation de l'état. Si le projecteur est $\hat{P} = |0\rangle_a \langle 0|$, alors le numérateur vaut: $\hat{P}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle_{ab} + \frac{1}{2}|01\rangle_{ab}$, et on a $\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle = 1/2 + 1/4 = 3/4$, then the final state is:

$$|\psi'\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle_{ab} + \frac{1}{2}|01\rangle_{ab}}{\sqrt{3/4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle_{ab} + \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle_{ab} \quad (38)$$

On a maintenant une probabilité de $2/3$ de mesurer l'état 00 et de $1/3$ l'état 01. Si le projecteur est $\hat{P} = |1\rangle_a \langle 1|$, alors l'état est projeté selon:

$$|\psi\rangle = |11\rangle_{ab} \quad (39)$$

L'état est en effet intriqué, selon la mesure du qubit 1, on obtient différents états avec différentes probabilités. La preuve mathématique est de trouver

$$|\psi\rangle = (a_1|0\rangle_a + a_2|1\rangle_a) \otimes (b_1|0\rangle_b + b_2|1\rangle_b) \quad (40)$$

Qui donne:

$$a_1 a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2} = a_1 b_2, \quad 0 = b_1 a_2, \quad \frac{1}{2} = b_1 b_2 \quad (41)$$

et on constate une incompatibilité: on a donc démontré par l'absurde le résultat.

(2) Après l'application de la porte de Hadamard sur la voie spatiale a , nous obtenons l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a + |V\rangle_a)|H\rangle_b$ qui est toujours un état séparable. Ce qui est raisonnable: une porte locale vient d'être appliquée. L'état final après la porte CNOT s'écrit: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} + |VV\rangle_{ab})$ qui est un état de Bell! Vous pourriez également trouver comment produire les autres états de Bell, en appliquant également des matrices de Pauli.

(3) Un photon unique polarisé est décrit par un espace de dimension 2, aussi appelé bit quantique (qubit). Chaque produit ajout d'un qubit multiplie la dimension de l'espace de Hilbert par 2. Ainsi, pour un registre de N qubits, la dimension sera de dimension 2^N . Pour N qudits, on a d^N .

On a ainsi un accroissement exponentiel de la taille de l'espace de travail. C'est ce qui permet d'obtenir une accélération exponentielle de la résolutions de certains problèmes algorithmiques, à nombre de bits / qubits fixés, en réalisant des calculs sur un ordinateur quantique. Il est en revanche très difficile expérimentalement de fabriquer de grands ordinateurs quantiques (disons $n > 20$) faisant peu d'erreurs. En 2021 on a franchi (ou on s'approche) de la limite dite de la suprématie computationnelle quantique : la réalisation avec une machine

quantique d'une tâche calculatoire impossible à réaliser pour le super-ordinateur classique le plus puissant. Cette limite se situe vers 60 à 100 qubits pas trop bruités (260 et 2100 états, erreur par porte ; 0.1%).

(4) Pour montrer que $|\psi\rangle$ est invariant par rotation, on peut calculer l'expression de l'état quantique après rotation d'un angle α , i.e sur A et sur B. On obtient alors l'état

$$|R_\alpha, R_\alpha\rangle + |R_{\alpha+\pi/2}, R_{\alpha+\pi/2}\rangle = \cos^2(\alpha) |H, H\rangle + \sin(\alpha)\cos(\alpha) |V, H\rangle + \cos(\alpha)\sin(\alpha) |H, V\rangle + \sin^2(\alpha) |V, V\rangle \quad (42)$$

$$+ \sin^2(\alpha) |H, H\rangle - \sin(\alpha)\cos(\alpha) |H, V\rangle - \cos(\alpha)\sin(\alpha) |V, H\rangle + \cos^2(\alpha) |V, V\rangle \quad (43)$$

$$= |H, H\rangle + |V, V\rangle \quad (44)$$

Donc $|\psi\rangle$ s'écrit de la même façon quelle que soit la rotation des axes (du moment que c'est le même angle sur les deux trajets). Ceci implique que si l'on mesure les photons A et B d'état $|\psi_+\rangle$ suivant des mesures tournées d'un même angle α , alors on obtiendra toujours (quel que soit α) des résultats de mesure parfaitement corrélés entre A et B.

(5) Un état maximalelement intriqué en position peut s'écrire à l'aide d'intégrale

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle |x\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp |p\rangle |-p\rangle \quad (45)$$

C'est la généralisation dans le cas continue des états de Bell. Un état est corrélé en position (et se trouve anticorrélé en impulsion) et vice-versa.

B Suppléments

♣ Complément: Inégalités de Bell

Nous introduisons A , A' comme la mesure qui peut être appliquée à la particule 1, et B , B' comme la mesure qui peut être effectuée sur la particule 2. Ainsi, il y a quatre mesures possibles qui peuvent être effectuées : (A, B) , (A', B) , (A, B') , et (A', B') . Nous considérons des mesures de polarisation où nous pouvons obtenir seulement deux résultats - correspondant à la polarisation verticale et horizontale - auxquels nous associons les valeurs ± 1 .

Nous nous intéressons à la quantité suivante :

$$S = B(A + A') + B'(A - A') = AB + A'B + AB' - A'B' \quad (46)$$

Expérimentalement, nous devons répéter l'expérience, et nous obtenons :

$$\langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle \quad (47)$$

Forme CHSH des inégalités de Bell

$$S = E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b') \leq 2 \quad (48)$$

Si un modèle de variables cachées peut décrire ces corrélations, alors la quantité S ne peut pas dépasser 2.

Preuve : voir thèse Adrien Laversanne-Finot. la valeur moyenne peut être écrite comme :

$$\langle A_x B_y \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \sum_{a,b=\pm 1} ab p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \quad (49)$$

Considérant $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ comme des fonctions déterministes de λ , alors le corrélateur s'écrit :

$$\langle A_x B_y \rangle = \int d\lambda q(\lambda) A(x, \lambda) B(y, \lambda) \quad (50)$$

La borne locale peut alors être écrite comme :

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \int d\lambda q(\lambda) (A(0, \lambda)B(0, \lambda) + A(0, \lambda)B(1, \lambda) + A(1, \lambda)B(0, \lambda) - A(1, \lambda)B(1, \lambda)) \\ \langle S \rangle &= \int d\lambda q(\lambda) A(0, \lambda) (B(0, \lambda) + B(1, \lambda)) + A(1, \lambda) (B(0, \lambda) - B(1, \lambda)) \\ \langle S \rangle &\geq 2 \end{aligned} \quad (51)$$

Et pour la dernière égalité, pour une valeur donnée de λ , puisque B peut prendre la valeur ± 1 , soit $B(0\lambda) + B(1, \lambda) = 0$ ou $B(0\lambda) - B(1, \lambda) = 0$.

Traduire les expressions avec des quantités optiques mesurables

En définissant la probabilité de coïncidence $p(\theta_A, \theta_B)$, le contraste est défini comme :

$$c(\theta_A, \theta_B) = p(\theta_A, \theta_B + \pi/2) - p(\theta_A, \theta_B) \quad (52)$$

La cohérence E , ou degré de corrélation est définie comme :

$$E(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{2} (c(\theta_A, \theta_B) - c(\theta_A + \pi/2, \theta_B)), \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} (p(\theta_A, \theta_B + \pi/2) - p(\theta_A, \theta_B) - (p(\theta_A + \pi/2, \theta_B + \pi/2) - p(\theta_A + \pi/2, \theta_B))) \quad (54)$$

Pour observer un conflit entre la physique quantique et les théories de variables cachées, nous pouvons trouver un état et un quadruplet d'angles tels que S soit supérieur à deux, et les corrélations entre les résultats de mesure violent l'inégalité de Bell.

Ecrivons maintenant les probabilités correspondantes.

Pour une paire de Bell : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ab} + e^{i\phi}|VV\rangle_{ab})$. Après l'analyseur et le polariseur, nous obtenons

$$|H\rangle_a \rightarrow \cos(\theta_a)|H\rangle_a + \sin(\theta_a)|V\rangle_{a'} \quad (55)$$

$$|V\rangle_a \rightarrow \cos(\theta_a)|V\rangle_a - \sin(\theta_a)|H\rangle_{a'} \quad (56)$$

et de même pour b . La fonction d'onde devient :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} & (\cos(\theta_a)\cos(\theta_b) - e^{i\phi}\sin(\theta_a)\sin(\theta_b)) |HH\rangle_{ab} + (\sin(\theta_a)\cos(\theta_b) - e^{i\phi}\cos(\theta_a)\sin(\theta_b)) |V\rangle_{a'} |H\rangle_b + (\cos(\theta_a)\sin(\theta_b) \\ & - e^{i\phi}\sin(\theta_a)\cos(\theta_b)) |V\rangle_{b'} |H\rangle_a + (\sin(\theta_a)\sin(\theta_b) + e^{i\phi}\cos(\theta_a)\cos(\theta_b)) |VV\rangle_{a'b'} \end{aligned} \quad (57)$$

La probabilité de coïncidence de deux polarisations horizontales est :

$$P_{ab}(HH) = p(\theta_a, \theta_b) = \frac{1}{2}(\cos^2(\theta_a)\cos^2(\theta_b) + \sin^2(\theta_a)\sin^2(\theta_b) - 2\cos(\phi)\cos(\theta_a)\sin(\theta_a)\cos(\theta_b)\sin(\theta_b)) \quad (58)$$

et donc le taux de corrélation s'écrit:

$$e(\theta_A, \theta_B) = \cos(2(\theta_a + \theta_b)) + (1 - \cos(\phi))\sin(2\theta_a)\sin(2\theta_b) \quad (59)$$

La valeur de s est :

$$\begin{aligned} s = & \cos(2\theta_a)\cos(2\theta_b) - \cos(2\theta_a)\cos(2\theta'_b) + \cos(2\theta'_a)\cos(2\theta_b) + \cos(2\theta'_a)\cos(2\theta'_b) \\ & - \cos(\phi)(\sin(2\theta_a)\sin(2\theta_b) - \sin(2\theta_a)\sin(2\theta'_b) + \sin(2\theta'_a)\sin(2\theta_b) + \sin(2\theta'_a)\sin(2\theta'_b)) \end{aligned} \quad (60)$$

Expérimentalement dans Ménesguen and al, chaque mesure de coïncidence prend 15 secondes, et la valeur de violation d'inégalité de Bell est supérieure à 2 avec 54 écarts-types.

Références

- Adrien Laversanne-Finot. Contextuality and nonlocality in continuous variable systems. Quantum Physics [quant-ph]. Université Sorbonne Paris Cité, 2017. English. ⟨NNT : 2017USPCC220⟩. ⟨tel-02125904⟩
- Ménesguen, Yves; Smirr, Jeanloup; Pillet, Gérard; Alléaume, Romain; Zaquine, Isabelle; Frey, Robert; Lionel, Jacobowicz. (2008). Source de photons intriqués en polarisation : travaux pratiques de physique quantique, Union des professeurs de physique et Chimie.
- Le Bellac, M. (2013). Physique quantique - Fondements Tome 1: Fondements. Allemagne: EDP Sciences.
- J. S. Bell Physics Physique Fizika **1**, 195 (1964)
- Cours d'optique anisotrope de Prof. Francois Treussart http://old.physique-ens-cachan.educ.space/pagregp/cours/fichiers/Cours_opt_anis_v2_5.pdf
- Aspect, Alain, Philippe Grangier, et Gérard Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. PRL **49**, **2** (1982): 91-94.
- Giustina, Marissa, Marjin A. Versteegh, Soren Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, et al. "Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons". PRL **115**, **25** (2015): 250401
- Experimental module of entangled photons: <https://qutools.com/qued/>