Numerical Analysis

Exam (length 3h)

Notes and duplicated copy are allowed, computers and tablets are prohibited.

You can answer either in French or in English

Throughout the exam subject, by $\mathbb{I}\{\mathcal{E}\}$ is meant the indicator function of any event $\mathcal{E}$.

Ex. 1 - Numerical Integration on $[-1, +1]$

Let $(x_1, x_2) \in [-1, +1]^2$ such that $x_1 < x_2$ and let $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. For any continuous function $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, one considers the quadrature method over $[-1,\ +1]$ T defined by :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

1. Show that the order of the quadrature method T is 1 at least if and only if

$$\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1} \text{ and } \lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}.$$

2. For which values of $\lambda_1,\ \lambda_2,\ x_1$ and x_2, the order of the method T is 3 at least ? In this case, what is the order of the method ?

Ex. 2 - From Interpolation to Numerical Integration

Let $f : [-1,\ +1] \to \mathbb{R}$ be a function of class $\mathcal{C}^2$ and set

$$\sup_{x \in [-1,\ +1]} |f''(x)| = M.$$

Let $x_0 \neq x_1$ in $[-1,\ +1]$.

1. (Lagrangian interpolation at sites $x_0,\ x_1$) : Give the Lagrange form of the polynomial interpolation $P_1(x)$ of f at the sites $x_0,\ x_1$.
2. Prove that

$$\forall x \in [-1, +1],\ \ |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M}{2} \times |x_0 - x| \times |x - x_1|.$$

3. Deduce from the inequality above a bound depending on M for the approximation error

$$\sup_{x \in [-1,+1]} |f(x) - P_1(x)|.$$

4. One considers the quadrature method on $[-1,\ +1]$ to approximate $I(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$:

$$J(f) = \int_{-1}^{+1} P_1(x)dx.$$

Show that there exists $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$ such that

$$J(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1).$$

5. Prove that

$$|I(f) - J(f)| \leq 4M.$$

EX 3. - REJECTION SAMPLING AND MONTE CARLO INTEGRATION

Let f and g two probability density functions on $\mathbb{R}$ (with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$) such that

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq k \times g(x),$$

where $k > 0$ is a finite constant. Let $(Y_n)_{n\geq 1}$ be e sequence of i.i.d. random variables with density $g(x)$ and let $(U_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of independent uniformly distributed on $[0,1]$ random variables, independent from the Y_i's. Consider the stopping time $\tau = \inf\{n \geq 1 : \; kU_n g(Y_n) < f(Y_n)\}$.

1. Show that $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = +1$ (*i.e.* the r.v. τ is almost-surely finite) and compute the distribution of the r.v. τ as well as its expectation.
2. Define the r.v.

$$X = Y_\tau = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \mathbb{I}\{\tau = n\}.$$

For any Borel measurable and bounded function $h(x)$ and $n \geq 1$, compute the expectation

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}\{\tau = n\} h(X)].$$

What is the probability distribution of the r.v. X ? What is the joint distribution of the pair (τ, X) ?

3. Deduce from the preceding answers a method to simulate a r.v. with density $f(x)$ when one knows how to simulate a r.v. with density $g(x)$, as well as a method to approximate an integral $\int h(x) f(x) dx$ when h is a Borel measurable function that can be easily evaluated and is such that hf is integrable.

EX. 4 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Le but de cet exercice est de montrer un résultat de stabilité amélioré pour les méthodes à 1 pas dans un cas particulier. On considère donc la suite récurrente définie par $y_0 \in \mathbb{R}^m$ et

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

Nous allons supposer dans cet exercice que la fonction Φ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\Phi(t, y, h) = A(t, h) y + \Psi(t, y, h)$$

où $\forall t, h, \; A(t, h)$ est une matrice symétrique de taille $m \times m$ qui a ses valeurs propres toutes comprises dans $[-a, 0]$ $(a > 0)$ et $(y \mapsto \Psi(t, y, h))$ est Λ-lipschitzienne.

1. Dans cette question, nous allons donner un exemple de fonction Φ qui vérifie l'hypothèse. On considère le problème de Cauchy "$y(t_0) = y_0, \; y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in I$" et on suppose que $f(t, y) = Dy + g(t, y)$ où D est une matrice diagonale telle que pour tout i, $D_{i,i} \in [-d, 0]$, $d \geq 0$ et g est λ-lipschitzienne en y. On s'intéresse à la méthode du point milieu

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\big(t_n + \tfrac{h_n}{2}, y_n + \tfrac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\big) \; .$$

Donner la fonction Φ associée à la méthode du point milieu et montrer qu'elle peut s'écrire $\Phi(t, y, h) = A(t, h) y + \Psi(t, y, h)$.

2. Montrer que Φ est Lipschitzienne en y et donner la constante de Lipschitz.

3. Montrer qu'il existe $\bar{h}$ tel que pour tout $h \leq \bar{h}$, $\|I + hA(t,h)\| \leq 1$ où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne.
4. On considère une suite $(\tilde{y}_n)$ telle que pour tout n,

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n\Phi(t_n, \tilde{y}_n) + \varepsilon_n \ .$$

Montrer que si $h_n \leq \bar{h}$ pour tout n, alors

$$\|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \ \leq (1 + \Lambda h_n)\|y_n - \tilde{y}_n\| + \|\varepsilon_n\|$$

5. En déduire que la constante de stabilité de la méthode Φ ne dépend pas de a pour h assez petit.
6. Application. On considère l'équation différentielle suivante que l'on cherche à approcher numériquement pour $t \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) + \cos(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

Pour ce problème, comparer la constante de stabilité donnée par le résultat du cours à celle trouvée dans cet exercice.