Telecom ParisTech

Cours MACS 207a

Année 2019/2020

FEUILLE DE TD 3

Exercice 1

Etudier l'existence au sens fort et au sens faible des intégrales stochastiques suivantes :

$$\int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s, \quad \int_0^t B_s^n \, \mathrm{d}B_s, \quad \int_0^t e^{aB_s} \, \mathrm{d}B_s, \quad \int_0^t e^{aB_s^2} \, \mathrm{d}B_s$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit un processus $(A_t, \, t \in [0,T])$ à trajectoires presque-sûrement dérivables.

1. Donner le développement en semi-martingale du processus (A_t) ;
2. Soit (X_t) une semi-martingale,

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t K_s \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,T].$$

Montrer que $\langle X, A \rangle_t = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. En déduire le développement en semi-martingale du processus $(X_t A_t, \, t \geq 0)$.

Exercice 3

On souhaite montrer que le processus de Black & Scholes $(S_t, \, t \geq 0)$ défini pour tout t par

$$S_t := S_0 \exp\left\{\lambda B_t + (r - \frac{\lambda^2}{2})t\right\}$$

est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$(1), \qquad dS_t = S_t\big(\lambda dB_t + r dt\big), \quad S(0) = S_0$$

où λ est un paramètre réel et $(B_t, \, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien.

1. On écrit le processus $(X_t, \, t \geq 0)$ défini pour tout t par $X_t := S_0 \exp\left\{\lambda B_t + (r - \frac{\lambda^2}{2})t\right\}$ sous la forme $X_t = f(t, B_t)$, $t \geq 0$. En déduire que (X_t) est une solution de (1).

2. Réciproquement, soit (S_t) une solution de (1) et

$$Z_t := \frac{S_t}{S_0 \exp\left\{\lambda B_t + (r - \frac{\lambda^2}{2})t\right\}} = \frac{S_t}{S_0} \exp\left\{ -\lambda B_t - (r - \frac{\lambda^2}{2})t\right\}.$$

Montrer, en utilisant la formule d'Itô, que $dZ_t = 0$. En déduire que (1) admet une unique solution.

3. En utilisant une formule bien choisie, vérifier que le processus actualisé $\left(\widetilde{S}_t,\, t \geq 0\right)$ défini pour tout t par $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.

Exercice 4

Soit f une fonction déterministe continue sur $[0, T]$ et $(B_t,\, t \in [0, T])$ un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien.

1. Montrer que $t \mapsto \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}B_s$ est un processus gaussien centré.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[B_t \int_0^T f(s)\, \mathrm{d}B_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s\right].$$

Exercice 5

Trouver la décomposition des semi-martingales suivantes :

1. B_t^2
2. $t + e^{B_t}$
3. $B_t^3 - 3tB_t$
4. $\exp(t/2)\sin(B_t)$

Exercice 6

On admet l'existence et l'unicité d'un processus $(X_t,\, t \geq 0)$ continu tel que

$$X_t = \int_0^t \frac{X(s)}{s-1}\,\mathrm{d}s + B_t,\ 0 \leq t < 1. \tag{1}$$

1. Montrer que le processus

$$Y_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s, t \in [0,\, 1[$$

   est solution de (1).
2. Montrer que $(Y_t,\, t \geq 0)$ est un processus gaussien dont on précisera la moyenne et la covariance.
3. Montrer que Y_t tend vers 0 quand t tend vers 1.
4. Montrer que $(Y_t,\, t \geq 0)$ a même loi que le processus $(Z_t,\, t \geq 0)$ défini par

$$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \geq 0.$$

Exercice 7

Soit $(B_t,\, t \geq 0)$ un $\mathbb{P}$-mouvement brownien et $(S_t,\, t \in [0,T])$ le mouvement brownien géométrique :

$$S_t := S_0 \exp\Big\{\sigma B_t + \big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)t\Big\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma, S_0 > 0$.

1. Soit $r > 0$. Montrer que la mesure

$$\mathbb{P}^* := \exp\Big\{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\Big(\frac{r-\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big\}\,\mathbb{P}$$

   est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
2. Montrer que le processus $(W_t,\, t \in [0,T]) := \big(B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t,\, t \in [0,T]\big)$ est un $\mathbb{P}^*$-mouvement brownien.
3. Retrouver que le processus $\Big(\widetilde{S}_t,\, t \in [0,T]\Big)$ est une P^*-martingale.