Institut
Mines-Télécom

PHY101
Technologies Quantiques

Leçon 3

Dynamique & mesure de systèmes quantiques

Nicolas Fabre & Frédéric Grillot

Plan

- Mesure d'un système quantique
- Exemple de la mesure et manipulation: polarisation de photons uniques
- Dynamique d'un système quantique
- Exemple: spin 1/2

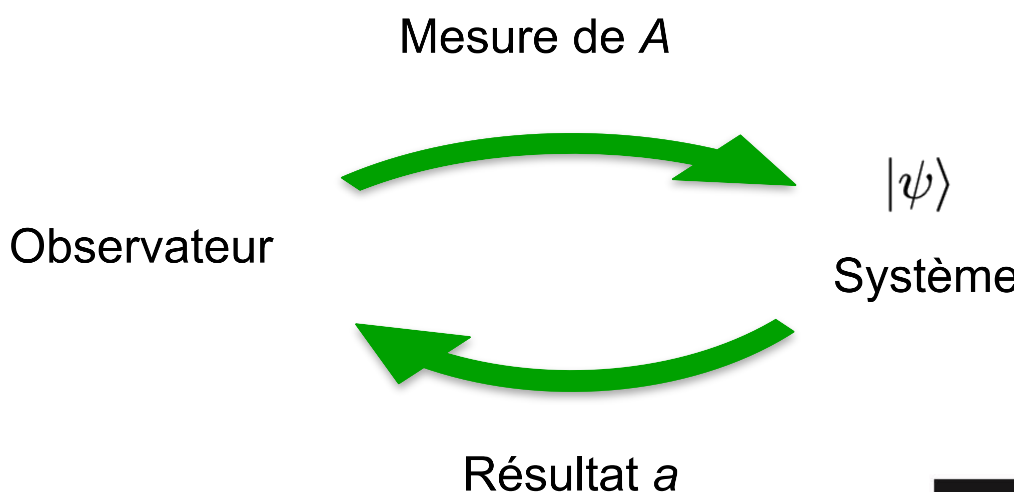
Qu'est ce qu'une mesure?

- On cherche un processus qui permette de déterminer une information sur le système quantique étudié : **la valeur d'une grandeur physique**. Idéalement, on voudrait qu'après **la mesure cette valeur soit univoque, et que l'information soit pertinente**

  - Comment réconcilier ce souhait avec la réalité physique du caractère probabiliste de la valeur des grandeurs physiques ?
  - Est-ce que la nature se comporte vraiment de cette manière ?
  - Quel sens une grandeur physique aurait-elle si elle n'avait jamais de valeur déterminée ?
  - Et pourrait-on parler de mesure pour un processus qui n'apporterait pas d'information sur le système ?

Qu’est ce qu’une mesure?

- Dans ce cours, nous allons voir qu’une grandeur physique est définie par un **ensemble d'états** dans lesquels elle possède une valeur spécifique ; la mesure est le processus qui catégorise le système dans l'un de ces états. **L'application de l’opération de projection, conjointement avec des détecteurs, conduit à l'obtention d'une distribution de probabilité**



Postulat de la mesure (I)

- Un opérateur Hermitien $\hat{A}$ possède des **valeurs propres réelles**. À un opérateur Hermitien sera associée **une observable**, notée $\mathcal{A}$ une grandeur pouvant être mesurée expérimentalement. Ces grandeurs physiques "observables" sont, par exemple, le moment magnétique d'un spin 1/2, la polarisation de photons uniques, la position ou l'impulsion d'un électron non-relativiste, etc.

- A partir de l'opérateur $\hat{A}$ Hermitien, on peut construire une **base orthonormée** de vecteurs propres notées : $\{|u_n\rangle\}$

- Si on note a_n la valeur de $\hat{A}$ dans l'état $|u_n\rangle$ alors on peut définir une observable par son action sur ces vecteurs de base :

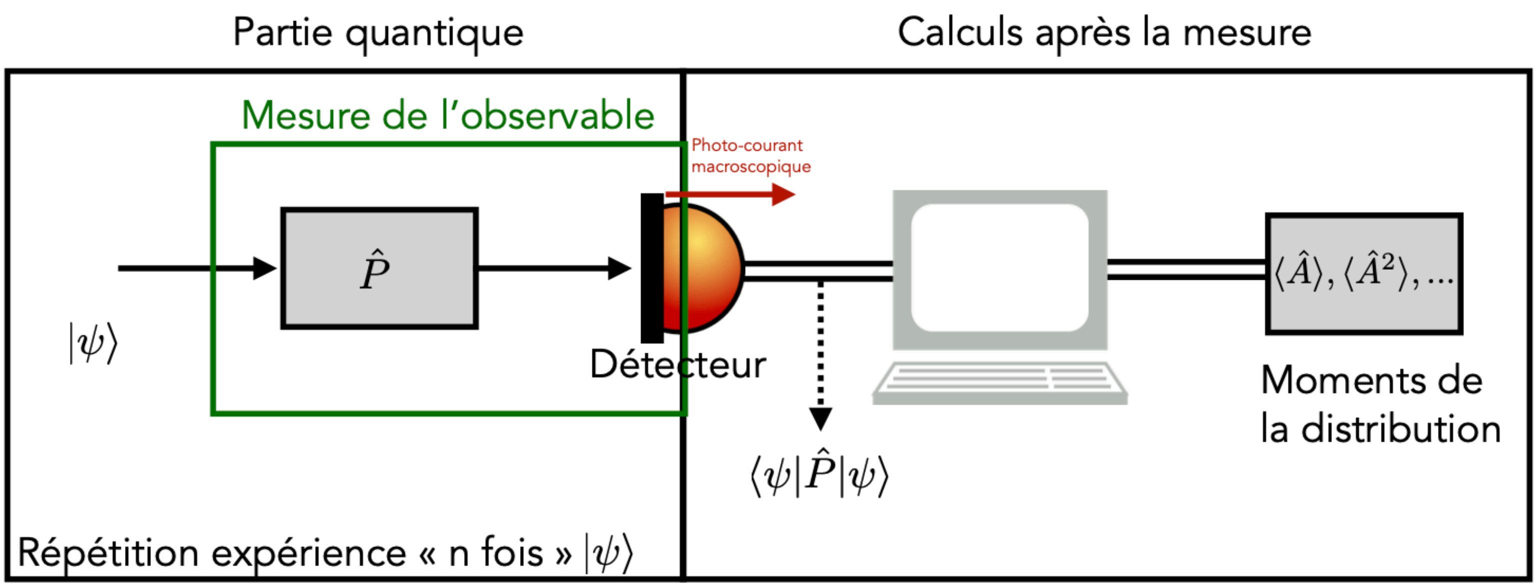
$$\hat{A}\,|u_n\rangle = a_n\,|u_n\rangle$$

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = \sum_n \hat{A}\,|u_n\rangle\,\langle u_n|\psi\rangle = \sum_n a_n\,|u_n\rangle\,\langle u_n|\psi\rangle$$

$$\hat{A} = \sum_n a_n\,|u_n\rangle\,\langle u_n|$$

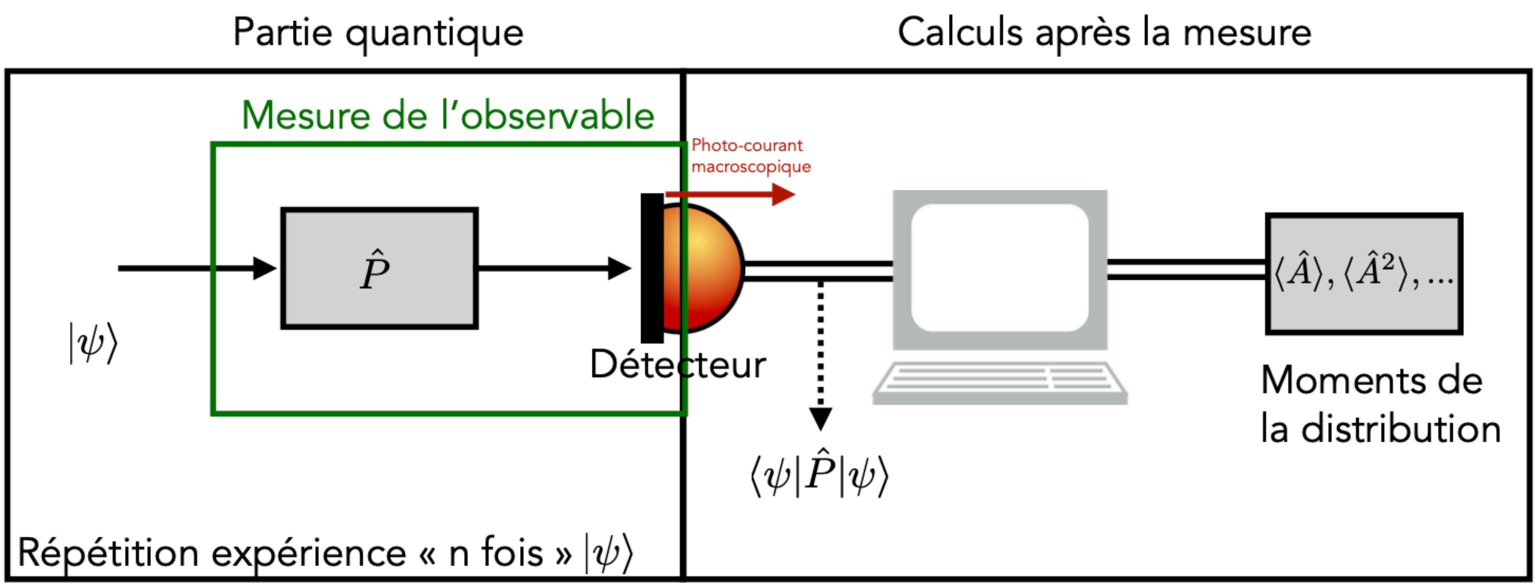
Postulat de la mesure (II)

- Le **système quantique** est soumis à un dispositif de mesure composé d'opérations **unitaires, de projecteurs et de détecteurs**. Ces opérations conjointes **projettent le système** dans une base liée à une observable intrinsèque, associée à un opérateur dont les vecteurs propres décomposent la fonction d'onde



Postulat de la mesure (III)

- L'obtention expérimentale de **probabilités se produit uniquement au niveau de la détection, où l'information quantique est convertie en information classique**. Les détecteurs mesurent et altèrent l'état quantique, fournissant macroscopiquement des informations sous forme de **probabilités**



Postulat de la mesure (IV)

- La mesure de l'observable $\mathcal{A}$ ne peut donner comme résultat qu'une valeur propre de $\hat{A}$ (les a_n sont **réels** car $\hat{A}$ est **autoadjoint**). Le résultat d'une mesure unique est **aléatoire**. Si on répète les mesures sur des systèmes préparés dans l'état $|\psi\rangle$ la probabilité de mesurer a_n est la valeur moyenne du projecteur :

$$\mathcal{P}_\psi(a_n) = ||\hat{P}_n |\psi\rangle ||^2 = \langle\psi| \hat{P}_n |\psi\rangle = \mathrm{Tr}\left\{|\psi\rangle \langle\psi| \hat{P}_n\right\}$$

Règle de Born

avec, $\hat{P}_n = |u_n\rangle \langle u_n|$ et $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$

- La trace indique que l'on a une moyenne quantique, obtenue par répétition de la mesure avec le même état $|\psi\rangle$
- On trouve l'état quantique $|\psi\rangle \langle\psi|$ et la mesure, ici projective $\hat{P}_n$ qui ont tous les deux un rôle aussi important l'un que l'autre. Alors que le système quantique est décrit par une fonction d'onde $|\psi\rangle$ normée, la mesure est décrite par un projecteur $\hat{P}_n$

Quelques exemples de mesures

A chaque système quantique physique, la méthode de mesure de grandeurs physiques est évidemment différente…

- **Energie** : on peut mesurer les niveaux d'énergie d'un atome par spectroscopie, en étudiant la transmission optique du système ou par absorption pour différentes longueurs d'ondes. Le spectre en fréquence de photons uniques se mesure à l'aide d'un réseau suivi de détecteurs de photons uniques

- **Position** : mesurer la position par des méthodes optiques, écran et caméra (cf. trous de Young), microscope, diaphragme...

- **Impulsion** : mesure par effet Doppler pour des atomes. La mesure de la position en champ lointain (après les fentes) pour des électrons se trouve être une mesure de l'impulsion (cf. transformée de Fourier)

Etat quantique après projection ? (I)

- L'état quantique après une opération de projection peut s'écrire

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \frac{\hat{P}\,|\psi\rangle}{||\hat{P}\,|\psi\rangle\,||}$$

- Le dénominateur est présent pour pouvoir normaliser à 1 le vecteur d'état. Juste avec le numérateur, on a un vecteur appartenant à un espace de Hilbert, mais pas une fonction d'onde d'un état quantique qui doit être normalisée à 1
- Pour des opérations unitaires, on n'a pas besoin de ce numérateur, car la fonction d'onde est toujours normalisée à 1 après l'application d'une telle opération

Il s'agit du postulat de la réduction du paquet d'onde. Une opération de projection correspond physiquement à un filtre spatial (un trou), un filtre interférentiel, un polariseur,...

Etat quantique après projection ? (II)

- Si la valeur propre est **non-dégénérée,** et que $|\psi\rangle$ n'est pas vecteur propre de $\hat{A}$, la probabilité de mesurer a_n est donnée, après l'opération de projection par

$$P(a_n) = || \, |u_n\rangle \langle u_n|\psi\rangle \, ||^2$$

- Pour des valeurs propres **dégénérées, il faut sommer sur les vecteurs propres donnant cette même valeur propre**

$$P(a_n) = || \sum_i |u_n^i\rangle \langle u_n^i|\psi\rangle \, ||^2$$

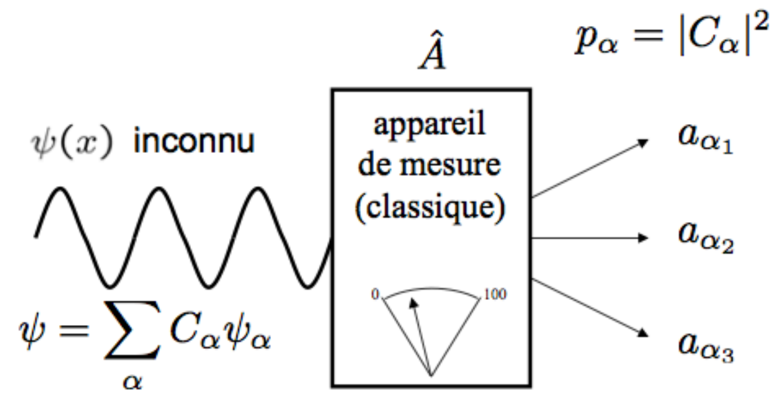
Dans ce cas, on ne doit pas raisonner sur des états individuels, mais sur les sous-espaces engendrés par les états correspondants aux mêmes valeurs

Etat quantique après projection ? (III)

- Imaginons maintenant refaire la même mesure immédiatement après la première. **Si le résultat devait être de nouveau probabiliste alors la première mesure n'aurait apporté aucune information**
- Pour que la mesure ait un sens, **l'état du système doit avoir changé**. Après la mesure, le système est dans un état tel que **la 2ème mesure redonne avec certitude le même résultat**

mesure

Réduction du paquet d'onde



Valeur moyenne & écart-type

- Une fois obtenue la distribution statistique des valeurs propres, on peut en déduire les **valeurs moyennes et la variance** de l'operateur $\hat{A}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n P_n(a_n) \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Moyenne

$$\mathrm{Var}(\hat{A}) = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

Variance (écart-type*)

- La valeur $\langle \hat{A}^2 \rangle$ est obtenue de manière similaire à la valeur moyenne, en remplaçant a_n par a_n^2 dans l'équation de la moyenne

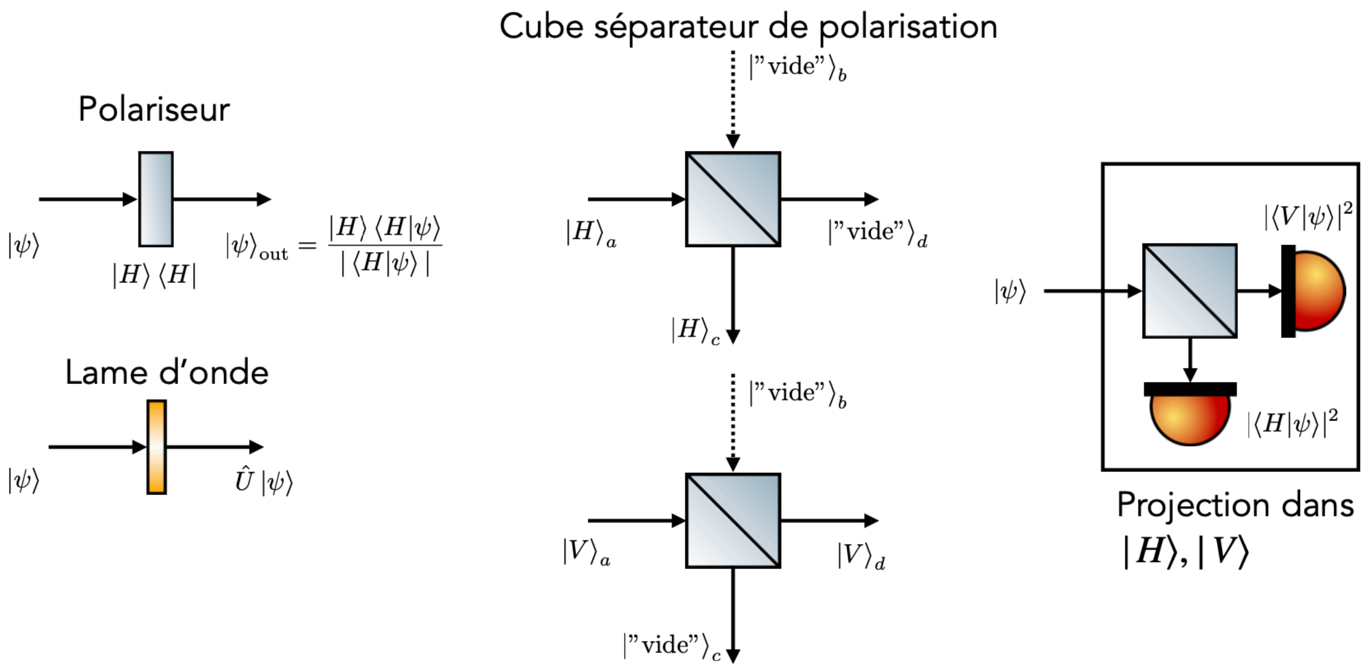
**** L'écart-type est la racine carrée de la variance***

Plan

- **Mesure d’un système quantique**
- **Exemple de la mesure et manipulation: polarisation de photons uniques**
- **Dynamique d’un système quantique**
- **Exemple: spin 1/2**

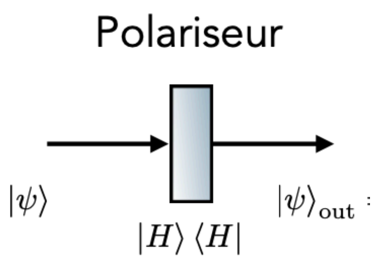
Polarisation de photons uniques (I)

- Pour mesurer la polarisation de photons uniques, on utilise **des polariseurs, des filtres interférentiels ou d'autres dispositifs optiques spécifiques**



Polarisation de photons uniques (II)

- L'effet du **polariseur** se manifeste par la projection de l'état quantique du système correspondant à l'orientation du polariseur. Admettons que le polariseur est orienté horizontalement $|H\rangle$ alors la fonction d'onde en sortie peut s'écrire

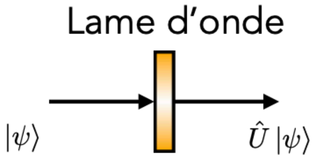


$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \frac{|H\rangle\langle H|\psi\rangle}{||\langle H|\psi\rangle||}$$

- Pour effectuer la mesure de la composante horizontale de la polarisation, il faut placer des détecteurs. C'est une **opération active** dans le sens où elle n'est pas réversible, et il y a **perte d'énergie après la traversée**
- Si la **mesure est non-destructive**, on peut également dire dans un sens que l'on manipule l'état. La mesure va intrinsèquement modifier l'état quantique

Polarisation de photons uniques (III)

- A la différence d'un polariseur, les **lames d'ondes** sont décrites par des **matrices unitaires**. L'état en sortie d'une lame d'onde est donc décrit par



$$|\psi\rangle_{out} = \hat{U}\,|\psi\rangle_{in}$$

- Une **lame demi-onde** introduit une différence de phase de π entre les composantes perpendiculaires de la lumière polarisée (classique ou photon unique) qui la traverse. C'est une **opération unitaire**

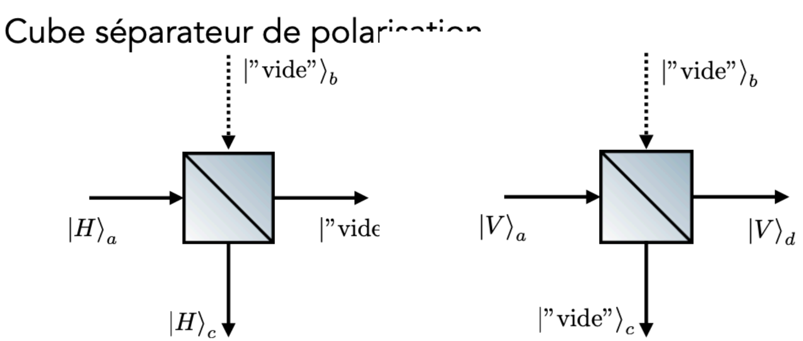
- Une **lame quart-onde** introduit une différence de phase de π /2 entre les composantes perpendiculaires de la lumière polarisée qui la traverse. C'est une **opération unitaire**, permettant de transformer une **onde polarisée rectiligne en elliptique**, et permet la mesure de la **polarisation circulaire droite ou gauche**

Polarisation de photons uniques (IV)

- Le **cube séparateur de polarisation** est un élément optique biréfringent permettant de séparer la **composante verticale et horizontale d'un photon unique** dans deux voies spatiales

- Le cube séparateur de polarisation est une **opération unitaire** agissant sur deux états en entrée, et donnent deux états en sortie :

$$\hat{U}\,|H\rangle_a\,|\text{"}vide\text{"}\rangle_b = |H\rangle_c\,|\text{"}vide\text{"}\rangle_d\,,\ \hat{U}\,|V\rangle_a\,|\text{"}vide\text{"}\rangle_b = |\text{"}vide\text{"}\rangle_c\,|V\rangle_d$$



$$|H\rangle_c\,|\text{"}vide\text{"}\rangle_d = |H\rangle_c \otimes |\text{"}vide\text{"}\rangle_d$$

Produit tensoriel (cf. leçon 6)

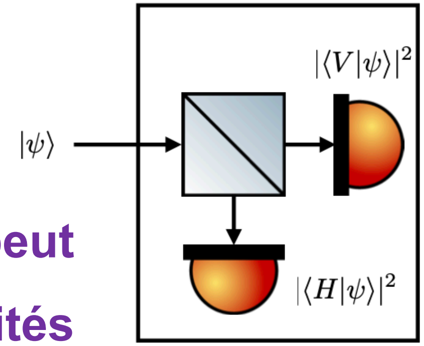
Le **vide est un réel état quantique** dont les conséquences de son existence sont nombreuses

Polarisation de photons uniques (V)

- Un **détecteur de photon unique** clique dès lors qu'un photon unique vient s'absorber sur sa surface : **le système quantique ne survit plus**, il n'y a pas de systèmes quantiques après une telle mesure destructrice

- Le détecteur absorbe les photons uniquement dans sa bande spectrale de fonctionnement, et n'est pas sensible à la polarisation de celui-ci. Comme il n'y a pas de résolution en polarisation, **on somme sur toutes les probabilités possibles**

$$P = |\langle H|\psi\rangle|^2 + |\langle V|\psi\rangle|^2 = 1$$

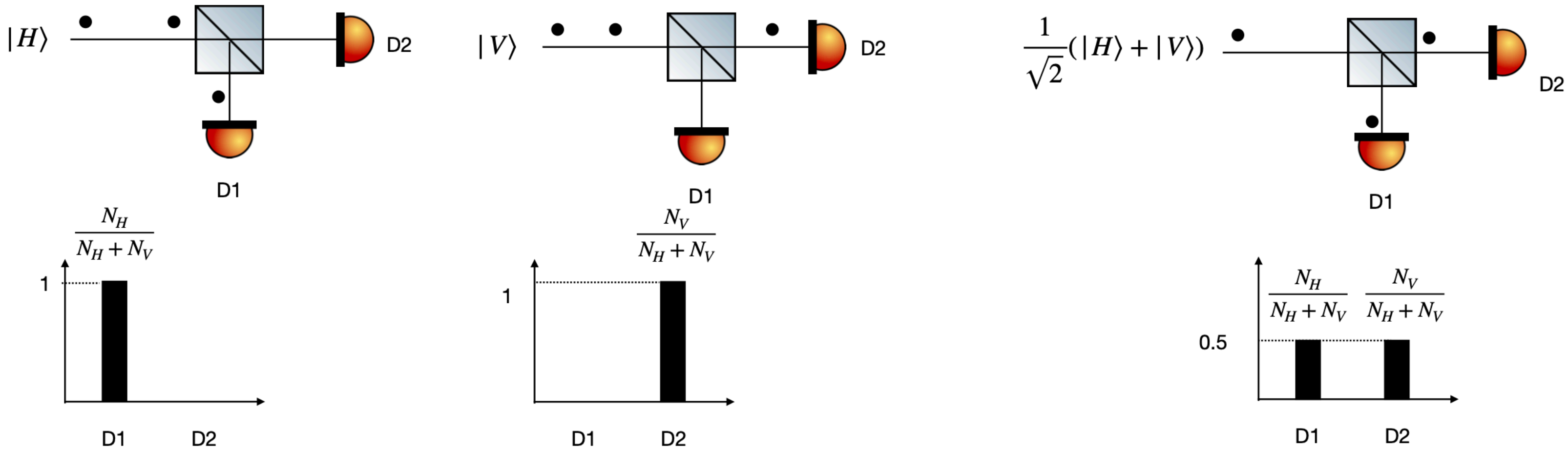


Projection dans $|H\rangle, |V\rangle$

En combinant différents dispositifs optiques, on peut déterminer l'état de polarisation, et les probabilités associées à chacune de ces composantes

Histogrammes des résultats

- Pour obtenir un **histogramme de la polarisation**, on effectue une série de mesures répétées sur des photons uniques en plaçant un **cube séparateur de polarisation suivi de détecteurs** et en enregistrant le résultat de chaque mesure



Avant le cube séparateur $|H\rangle_a |"vide"\rangle_b$ **on a en sortie** $|H\rangle_c |"vide"\rangle_d$

- Un détecteur non sensible à la polarisation présent sur les voies spatiales c et d peut détecter un photon sur n'importe quelle polarisation, mais **la présence du cube séparateur impose la polarisation qui va être détectée**

Plan

- **Mesure d'un système quantique**
- **Exemple de la mesure et manipulation: polarisation de photons uniques**
- **Dynamique d'un système quantique**
- **Exemple: spin 1/2**

Equation de Schrödinger (I)

- L'évolution d'un système quantique isolé est décrit par **l'équation de Schrödinger**

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle$$

1933

$\hat{H}$ **est une matrice unitaire, hermitienne. C'est une observable associée à l'énergie du système, appelé Hamiltonien**

- Cette évolution permet de décrire l'évolution de systèmes quantiques quelque soit leur degré de liberté. **L'objectif en mécanique quantique est de déterminer l'expression du Hamiltonien** pour décrire la dynamique de systèmes quantiques complexes

Equation de Schrödinger (II)

- Le **Hamiltonien** est un opérateur Hermitien : $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1 \rightarrow \frac{d}{dt}\langle\psi|\psi\rangle = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)|\psi\rangle = -\langle\psi|\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)$$

$$\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^* \langle\psi|\,\hat{H}^\dagger\,|\psi\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\,\hat{H}\,|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \langle\psi|\,\hat{H}^\dagger\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{H}\,|\psi\rangle$$

1933

- Pour pouvoir décrire cette évolution, il faudra en général **diagonaliser le Hamiltonien dans la base du vecteur d'onde initial**
- Dans la suite du cours, nous verrons différents exemples décrivant la dynamique de la molécule d'ammoniac, un electron non-relativiste, d'un spin ½ ...

Etats stationnaires (I)

- Quelle est la grandeur physique correspondant à $\hat{H}$?
- Notons E_n les valeurs propres de $\hat{H}$ et $|\psi_n\rangle$ les vecteurs propres associés. Si on effectue une mesure de l'énergie, on ne peut trouver qu'une valeur propre E_n de $\hat{H}$ d'où une **discrétisation de l'énergie**
- Comme $|\psi_n\rangle$ est indépendant du temps, **l'équation de Schrödinger indépendante du temps** s'exprime comme suit

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi_n | \psi(t) \rangle = E_n \langle \psi_n | \psi(t) \rangle$$

Par intégration, on trouve finalement

$$\langle \psi_n | \psi(t) \rangle = \langle \psi_n | \psi(0) \rangle \, e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Etats stationnaires (II)

- On **décompose la fonction d'onde** dans la base constituée des vecteurs propres de l'observable énergie $|\psi(t)\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle\psi_n|\psi(0)\rangle \, e^{-iE_n t/\hbar} \, |\psi_n\rangle$$

- On peut également exprimer **l'évolution temporelle** de la fonction d'onde de manière plus compacte en introduisant l'opérateur d'évolution temporelle $\hat{U}(t,0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)\,|\psi(0)\rangle \;\;,\;\; \hat{U}(t,0) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

- En pratique, l'objectif est de pouvoir appliquer $\hat{U}(t,0)$ à $|\psi(0)\rangle$ ce qui nécessite de **diagonaliser le Hamiltonien**

Exercice en classe

(1) Considérons l'opérateur $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\hat{A}$ est t'elle une matrice Hermitienne? Déterminer ses valeurs propres, noté $\lambda_{1,2}$ et ses vecteurs propres.
(2) Supposons que le système soit dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Calculer la valeur moyenne de l'observable A dans cet état.
(3) Si le système est préparé dans l'état $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$, quel est la probabilité de mesurer la valeur propre λ_1 de $\hat{A}$?
(4) Si l'état du système est préparé à l'instant $t = 0$ comme $|\psi(t = 0)\rangle = |0\rangle$, trouver l'état $|\psi(t)\rangle$ à un temps ultérieur t: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle$, où $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{A}t/\hbar)$.

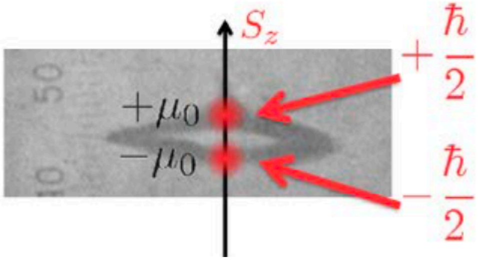
Plan

- **Mesure d’un système quantique**
- **Exemple de la mesure et manipulation: polarisation de photons uniques**
- **Dynamique d’un système quantique**
- **Exemple: spin 1/2**

Exemple : spin 1/2

- Le terme **"spin"** est une analogie avec la rotation classique d'un objet, mais en réalité, le spin n'est pas une rotation au sens habituel. Il s'agit plutôt d'une propriété quantique qui décrit le **moment angulaire intrinsèque des particules**, une sorte de **"rotation interne"** propre à la mécanique quantique

Uhlenbeck & Goudsmit (1925)



$$\mu_0 = \frac{\hbar}{2}\frac{q}{m}$$

- L'existence du moment angulaire de spin est déduite à partir d'expériences telles que celles de **Stern-Gerlach**, où l'on observe que les **particules** possèdent un **moment angulaire** qui ne peut pas être expliqué classiquement

Exemple : spin ½ (I)

- Hamiltonien d'évolution pour un spin ½ dans un **champ magnétique externe**

$$\hat{H} = -\vec{\mu}.\vec{B} \quad \text{avec} \quad \hat{\vec{\mu}} = \gamma\frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$$

le moment magnétique de spin

γ **est le rapport gyromagnétique**

En injectant on trouve,

$$\hat{H} = -\gamma\hbar\vec{B}.\hat{\vec{\sigma}}$$

- En effectuant le produit scalaire entre le **champ magnétique orienté selon z** et l'opérateur vectoriel des matrices de Pauli dans l'espace des positions utilisant les **matrices de Pauli**, le Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = -\gamma\hbar B\hat{\sigma}_z \quad \text{avec} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

TELECOM ParisTech

Exemple : spin ½ (II)

- L'évolution temporelle du système est donnée par l'opérateur d'évolution

unitaire $\hat{U}(t)$ définit par la relation

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)$$

Exponentielle d'un opérateur*

- Pour le Hamiltonien, l'opérateur d'évolution devient

$$\hat{U}(t) = \exp(i\omega t\hat{\sigma}_z)$$

- Si l'état initial du système est $|\psi(0)\rangle$ l'état du système à un instant ultérieur t est donné par $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle$
- En utilisant l'expression de $\hat{U}(t)$ on trouve,

$$|\psi(t)\rangle = \exp(i\omega t\hat{\sigma}_z)\,|\psi(0)\rangle$$

**** Exponentielle d'une matrice, que l'on peut écrire comme une série entière***

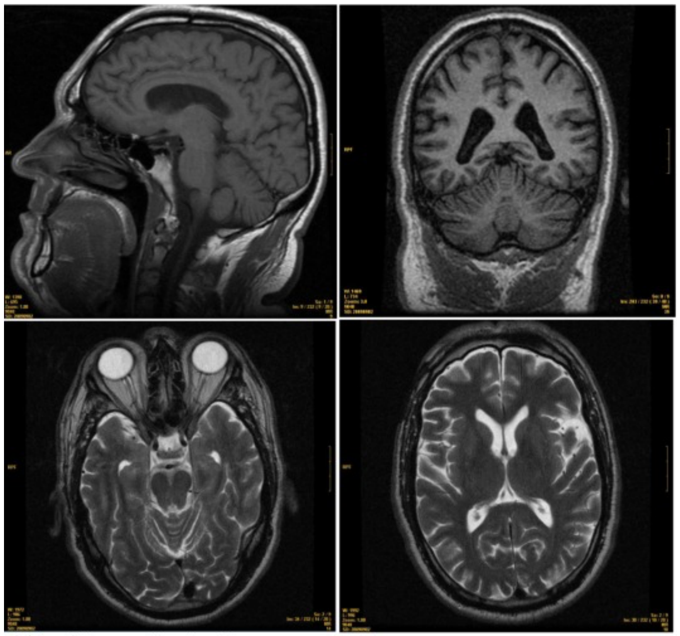
Exemple : spin ½ (III)

- L'évolution du système dans ce champ magnétique se traduit par **une rotation du vecteur de spin autour de l'axe z dans l'espace de Hilbert**. L'angle de rotation est proportionnel à l'amplitude du champ magnétique B et à la durée de l'évolution t
- L'étape suivante est de trouver la méthode pour pouvoir appliquer l'opérateur unitaire d'évolution $\hat{U}(t)$ sur l'état initial afin d'en déterminer les états finaux

- L'étude du spin ½ dans un champ magnétique permet de comprendre le principe de la **résonance magnétique nucléaire**, au cœur de **l'imagerie médicale non invasive**

TELECOM ParisTech

Exemple : spin ½ (IV)



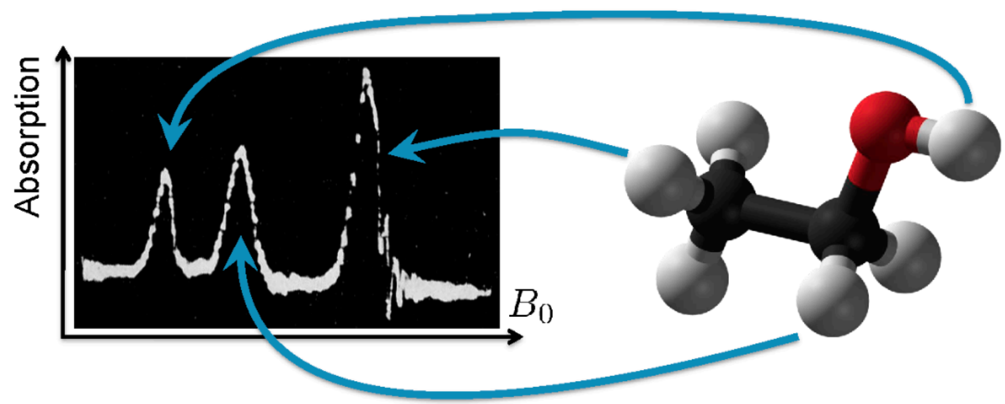
© Classe Qsl - www.enciclopediasalud.com

2003

Paul C. Lauterbur

Sir Peter Mansfield

Chemical spectroscopy
Spectrum of ethanol CH3-CH2-OH (1952)



Summary: Forget it - its just for "fun" (?)