6 Corrigé

6.1 Produit scalaire et orthogonalité

Fait une grande partie en cours. (1) $\langle\phi|\psi\rangle = 1/2(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 1| - \langle 1|1\rangle) = 1/2(1-0+0-1) = 0$. Les états sont dit orthogonaux.
(2) $\hat{P}\,|\psi\rangle = |0\rangle\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\langle 0|\,(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle$
(3) On doit calculer le produit scalaire $\langle\psi|\psi\rangle = (\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle 1|)(\frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,|1\rangle) = 1/3 + 2/3 = 1$.
(4) Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique: $\chi(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A) + \det(A)$. Soit: $\chi(X) = X^2 - X - 3$. Les racines sont donc $X_\pm = (1 \pm \sqrt{13})/2$.
Les vecteurs propres sont donnés par $V_\pm \in \mathrm{Ker}(\hat{A} - X_\pm \mathbb{I}_2)$.
(5) Il suffit de faire les deux produits matriciels, en faisant attention à $\hat{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2 Commutateurs

(1) Le commutateur $[\hat{A}, \hat{B}]$ est donné par $\begin{pmatrix} 2i & -3i \\ -3i & i \end{pmatrix}$.
(2) Pour qu'une matrice soit hermitienne, elle doit être égale à sa propre transposée conjuguée, c'est-à-dire $A = A^\dagger$. La transposée conjuguée d'une matrice A est obtenue en prenant la transposée de A puis en conjuguant chaque élément. A et B sont donc hermitiens.
(3) Considérer une matrice $\hat{C}$ 2×2 avec 4 coefficients, et résoudre le système d'équation.
(4) Montrons que $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.
• Par définition, on a $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$
• $[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$
Enfin, $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = (\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger) = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger]$

6.3 Fonction d'opérateurs

(1) On a $\hat{U}^\dagger f(\hat{A})\hat{U} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{U}^\dagger \hat{A}^n \hat{U}$. Comme $\hat{U}$ est un opérateur unitaire alors $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$. Alors, $(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger)^n = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger ... \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{A}^n\hat{U}$. On obtient bien $\hat{U}^\dagger f(\hat{A})\hat{U} = f(\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U})$.
(2) Fait avant.
(3) On a: $[\hat{A}, f(\hat{B})] = (\hat{A}\hat{f}(\hat{B}) - \hat{f}(\hat{B})\hat{A}) = \sum_n a_n(\hat{A}\hat{B}^n - \hat{B}^n\hat{A}) = \sum_n a_n n \hat{B}^{n-1}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = f'(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}]$.
L'énoncé est il donc correct?