Chapitre 4
Semimartingales continues

Résumé Les semimartingales continues constituent la classe générale de processus à trajectoires continues pour laquelle on peut développer une théorie de l'intégrale stochastique, qui sera traitée dans le chapitre suivant. Par définition, une semimartingale est la somme d'une martingale (locale) et d'un processus à variation finie. Dans ce chapitre nous étudions séparément ces deux classes de processus. En particulier, nous introduisons la notion de variation quadratique d'une martingale, qui jouera plus tard un rôle fondamental. Tous les processus considérés dans ce chapitre sont indexés par $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles.

4.1 Processus à variation finie

4.1.1 Fonctions à variation finie

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement les fonctions à variation finie sur $\mathbb{R}_+$. Nous nous limitons au cas des fonctions *continues*, qui est le seul qui interviendra dans la suite.

Définition 4.1. Soit $T > 0$. Une fonction continue $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(0) = 0$ est dite à variation finie s'il existe une mesure signée (i.e. différence de deux mesures positives finies) μ sur $[0,T]$ telle que $a(t) = \mu([0,t])$ pour tout $t \in [0,T]$.

La mesure μ est alors déterminée de façon unique. La décomposition de μ comme différence de deux mesures positives finies n'est bien sûr pas unique, mais il existe une seule décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ telle que μ_+ et μ_- soient deux mesures positives finies portées par des boréliens disjoints. Pour obtenir l'existence d'une telle décomposition, on peut partir d'une décomposition quelconque $\mu = \mu_1 - \mu_2$, poser $\nu = \mu_1 + \mu_2$ puis utiliser le théorème de Radon-Nikodym pour trouver deux fonctions boréliennes positives h_1 et h_2 sur $[0,T]$ telles que

$$\mu_1(\mathrm{d}t) = h_1(t)\nu(\mathrm{d}t), \quad \mu_2(\mathrm{d}t) = h_2(t)\nu(\mathrm{d}t).$$

J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*,
Mathématiques et Applications 71, DOI: 10.1007/978-3-642-31898-6_4,

$$\frac{d\mu}{d|\mu|} = 1\!\!1_{D^+} - 1\!\!1_{D^-}$$

Si $A \subset D^+$, $\mu(A) = \mu_+(A) = |\mu|(A)$

et $\mu(A) = \int h^+ 1\!\!1_A \, d|\mu|$

donc $\int (h^+ - 1) 1\!\!1_{A \cap D^+} d|\mu| = 0$, $\forall A$

$A = \{ t, h^+(t) - 1 \geq 0 \}$

$\Rightarrow \int (h^+ - 1)^+ d|\mu| = 0 \Rightarrow (h^+ - 1)^+ = 0$

$\Rightarrow h^+ = 1$ $|\mu|$ p.p.

Idem pour h^- et D^-

Ensuite, si $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$ on a

$$\mu(\mathrm{d}t) = h(t)\nu(\mathrm{d}t) = h(t)^+\nu(\mathrm{d}t) - h(t)^-\nu(\mathrm{d}t)$$

ce qui donne la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_+(\mathrm{d}t) = h(t)^+\nu(\mathrm{d}t)$, $\mu_-(\mathrm{d}t) = h(t)^-\nu(\mathrm{d}t)$, les mesures μ_+ et μ_- étant portées respectivement par les boréliens disjoints $D_+ = \{t : h(t) > 0\}$ et $D_- = \{t : h(t) < 0\}$. L'unicité de la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ découle du fait que l'on a nécessairement, pour tout $A \in \mathscr{B}([0,T])$,

$$\mu_+(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathscr{B}([0,T]),\ C \subset A\}.$$

On note $|\mu|$ la mesure positive $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. La mesure $|\mu|$ est appelée la *variation totale* de a. On a $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}([0,T])$. De plus, la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à $|\mu|$ est

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|} = \mathbf{1}_{D_+} - \mathbf{1}_{D_-}.$$

On a $a(t) = \mu_+([0,t]) - \mu_-([0,t])$, ce qui montre que la fonction a est différence de deux fonctions croissantes continues et nulles en 0 (la continuité de a entraîne que μ n'a pas d'atomes, et il en va alors de même pour μ_+ et μ_-). Inversement une différence de fonctions croissantes (continues et nulles en 0) est aussi à variation finie au sens précédent. En effet, cela découle du fait bien connu que la formule $g(t) = \nu([0,t])$ établit une bijection entre les fonctions croissantes continues à droite $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et les mesures positives finies sur $[0,T]$.

Soit $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_{[0,T]} |f(s)|\,|\mu|(\mathrm{d}s) < \infty$. On note

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) = \int_{[0,T]} f(s)\,\mu(\mathrm{d}s),$$
$$\int_0^T f(s)\,|\mathrm{d}a(s)| = \int_{[0,T]} f(s)\,|\mu|(\mathrm{d}s).$$

On vérifie facilement l'inégalité

$$\left|\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s)\right| \leq \int_0^T |f(s)|\,|\mathrm{d}a(s)|.$$

Remarquons de plus que la fonction $t \mapsto \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}a(s)$ est aussi à variation finie (la mesure associée est simplement $\mu'(\mathrm{d}s) = f(s)\mu(\mathrm{d}s)$).

Proposition 4.1. *Pour tout $t \in]0,T]$,*

$$|\mu|([0,t]) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p} |a(t_i) - a(t_{i-1})|\right\},$$

$$E[X(s) \mid \mathcal{B}_n] = \sum \frac{\mu(I_j^n)}{|\mu|(I_j^n)} \mathbb{1}_{I_j^n}(s)$$
$$\shortparallel$$
$$X_n(s)$$

D'après Doob, $X_n(s) = \sum \alpha_j^n \mathbb{1}_{I_j^n}(s)$

où $I_j^n(s) = \mathbb{1}_{[j2^{-n}T,\ (j+1)2^{-n}T]}(s)$

On cherche α_j^n tq $\forall \varphi \in \mathcal{B}_n$

$$E[X_n \varphi] = E[X\varphi]$$

$\varphi = \sum \beta_j \mathbb{1}_{I_j^n}(s)$ pour la même raison

$$E[X\varphi] = \int \varphi(s) \frac{d\mu(s)}{d|\mu|(s)} \frac{d|\mu|(s)}{|\mu|([0,T])}$$

$$= \frac{1}{|\mu|([0,T])} \int \varphi(s)\, d\mu(s)$$

$$= \frac{1}{|\mu|([0,T])} \sum \beta_j \mu(I_j^n)$$

De plus

$$E[X_n \varphi] = \int X_n(s)\, \varphi(s)\, d|\mu|(s) / |\mu|([0,T])$$

$$= \sum_j \sum_k \alpha_j^n \beta_k^n \int \mathbb{1}_{I_j^n}(s)\, \mathbb{1}_{I_k^n}(s)\, d|\mu|(s) / |\mu|([0,T])$$

Comme les intervalles sont disjoints, ne reste que la somme sur l'un des indices

$$= \sum_j \alpha_j^n \beta_j^n \frac{1}{|\mu|([0,T])} \int \mathbb{1}_{I_j^n}(s)\, d|\mu|(s)$$

$$= \sum \alpha_j^n \beta_j^n \frac{1}{|\mu|([0,T])} |\mu|(I_j^n)$$

En prenant $\beta_j = 1$ et tous les autres $\beta_\ell^n = 0$ on obtient

$$\alpha_j^n = \frac{\mu(I_j^n)}{|\mu|(I_j^n)} = \frac{|a((i+1)2^{-n}T) - a(i2^{-n}T)|}{|\mu|(I_j^n)}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ *de* $[0,t]$. *Plus précisément, pour toute suite* $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ *de subdivisions emboîtées de* $[0,t]$ *de pas tendant vers* 0 *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} |a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)| = |\mu|([0,t]).$$

Remarque. Dans la présentation habituelle des fonctions à variation finie, on part de la propriété que le supremum ci-dessus est fini.

Démonstration. Il suffit clairement de traiter le cas $t = T$. L'inégalité $\geq$ dans la première assertion est très facile puisque

$$|a(t_i) - a(t_{i-1})| = |\mu(]t_{i-1},t_i])| \leq |\mu|(]t_{i-1},t_i]).$$

Pour l'autre inégalité, il suffit d'établir la seconde assertion. Considérons pour simplifier les subdivisions dyadiques $t_i^n = i2^{-n}T$, $0 \leq i \leq 2^n$ (l'argument est facilement adapté au cas général). Bien qu'il s'agisse d'un résultat "déterministe", nous allons utiliser un argument de martingales en introduisant l'espace de probabilité $\Omega = [0,T]$ muni de la tribu borélienne $\mathscr{B} = \mathscr{B}([0,T])$ et de la probabilité $P(\mathrm{d}s) = (|\mu|([0,T]))^{-1}|\mu|(\mathrm{d}s)$. Introduisons sur cet espace la filtration discrète $(\mathscr{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}_n$ est engendrée par les intervalles $](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$, $1 \leq i \leq 2^n$. Posons enfin

$$X(s) = \mathbf{1}_{D_+}(s) - \mathbf{1}_{D_-}(s) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}(s),$$

et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = E[X \mid \mathscr{B}_n].$$

Les propriétés de l'espérance conditionnelle montrent que X_n est constante sur chaque intervalle $](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$ et vaut sur cet intervalle

$$\frac{\mu(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])} = \frac{a(i2^{-n}T) - a((i-1)2^{-n}T)}{|\mu|(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}.$$

D'autre part, il est clair que la suite (X_n) est une martingale fermée, relativement à la filtration $(\mathscr{B}_n)$. Puisque X est mesurable par rapport à $\mathscr{B} = \bigvee_n \mathscr{B}_n$, cette martingale converge p.s. et dans L^1 vers X, d'après le théorème de convergence pour les martingales discrètes fermées (voir l'Appendice A2). En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n|] = E[|X|] = 1,$$

cette dernière égalité étant claire puisque $|X(s)| = 1$, $|\mu|(\mathrm{d}s)$ p.p. Le résultat annoncé en découle puisque, d'après ci-dessus,

$$E[|X_n|] = (|\mu|([0,T]))^{-1} \sum_{i=1}^{2^n} |a(i2^{-n}T) - a((i-1)2^{-n}T)|. \qquad \square$$

Lemme 4.1. *Si $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ est une suite de subdivisions de $[0,T]$ de pas tendant vers 0 on a*

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)\,(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)).$$

Démonstration. Soit f_n la fonction définie par $f_n(s) = f(t_{i-1}^n)$ si $s \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)\,(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)) = \int_{[0,T]} f_n(s)\,\mu(\mathrm{d}s),$$

et le résultat voulu en découle par convergence dominée. □

On dira qu'une fonction continue $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$ si la restriction de a à $[0,T]$ est à variation finie, pour tout $T > 0$. Il est alors facile d'étendre les définitions précédentes. En particulier, on peut définir $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}a(s)$ pour toute fonction f telle que $\int_0^\infty |f(s)||\mathrm{d}a(s)| = \sup_{T>0} \int_0^T |f(s)||\mathrm{d}a(s)| < \infty$.

4.1.2 Processus à variation finie

On se place maintenant sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$.

Définition 4.2. Un processus à variation finie $A = (A_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la définition précédente. Le processus A est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de A sont croissantes.

Remarque. En particulier on a $A_0 = 0$ et les trajectoires de A sont continues.

Si A est un processus à variation finie, le processus

$$V_t = \int_0^t |\mathrm{d}A_s|$$

est un processus croissant. En effet il est clair que les trajectoires de V sont croissantes (et aussi continues et nulles en $t = 0$). Le fait que la variable V_t soit $\mathscr{F}_t$-mesurable découle de la deuxième partie de la Proposition 4.1.

Proposition 4.2. *Soit A un processus à variation finie et soit H un processus progressif tel que*

$$\forall t \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega\ ,\ \int_0^t |H_s(\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty.$$

Alors le processus $H \cdot A$ défini par

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}A_s$$

Itô $\quad \psi \in C_b^1 \quad f$ à variation finie

$$\psi(f(t)) - \psi(f(0)) = \int_0^t \psi'(f(s))\, df(s)$$

. $\psi \in C_b^2$

$$\psi(f(t)) - \psi(f(0)) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \psi(f(t_{j+1})) - \psi(f(t_j))$$

$t_j = j 2^{-n} T$

Taylor avec reste intégral donne

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi'(f(t_j))\,(f(t_{j+1}) - f(t_j))$$

$$+ \sum (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2 \int_0^1 \psi''(f(t_j) + u(f(t_{j+1}) - f(t_j)))\,(1-u)\,du$$

Le premier terme tend vers

$\int \psi'(f(s))\, df(s)$ d'après le lemme 4.1

Dans le deuxième terme, $\psi \in C_b^2$

donc l'intégrale est bornée par $\|\psi''\|_\infty / 2$

Reste à voir que $\sum_{j=0}^{2^n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2 \to 0$

or f continue $\Rightarrow$ unif. cont.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n, \quad |t-s| \leq 2^{-n} \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon$

donc

$$\sum (\quad)^2 \leq \varepsilon \underbrace{\sum |f(t_{j+1}) - f(t_j)|}_{\leq \|f\|_{1\text{-var}}}$$

on peut choisir ε aussi petit que l'on

veut donc $\sum (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2 \to 0$

est aussi un processus à variation finie.

Démonstration. D'après des remarques précédentes, il est clair que les trajectoires de $H \cdot A$ sont à variation finie. Il reste donc à montrer que $H \cdot A$ est adapté. Pour cela, il suffit de voir que, si $h : \Omega \times [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu produit $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ et si $\int_0^t |h(\omega,s)||\mathrm{d}A_s(\omega)|$ est fini pour tout ω, alors la variable $\int_0^t h(\omega,s)\mathrm{d}A_s(\omega)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Si $h(\omega,s) = \mathbf{1}_{]u,v]}(s)\mathbf{1}_\Gamma(\omega)$ avec $]u,v] \subset [0,t]$ et $\Gamma \in \mathscr{F}_t$, le résultat est évident. On passe ensuite au cas $h = \mathbf{1}_G$, $G \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ par un argument de classe monotone. Enfin, dans le cas général, on observe qu'on peut toujours écrire h comme limite ponctuelle d'une suite de fonctions étagées h_n telles que $|h_n| \leq |h|$ pour tout n, ce qui assure que $\int_0^t h_n(\omega,s)\mathrm{d}A_s(\omega) \longrightarrow \int_0^t h(\omega,s)\mathrm{d}A_s(\omega)$ par convergence dominée. □

Remarques. (i) Il arrive souvent qu'on ait l'hypothèse plus faible

$$\text{p.s.} \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s(\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty.$$

Si la filtration est complète, on peut encore définir $H \cdot A$ comme processus à variation finie : on remplace H par H' défini par

$$H'_t(\omega) = \begin{cases} H_t(\omega) & \text{si } \int_0^n |H_s(\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty,\ \forall n\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au fait que la filtration est complète, le processus H' reste adapté ce qui permet de définir $H \cdot A = H' \cdot A$. Nous ferons systématiquement cette extension dans la suite.

(ii) Sous des hypothèses convenables (si $\int_0^t |H_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty$ et $\int_0^t |H_s K_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty$ pour tout $t \geq 0$), on a la propriété d'associativité $K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A$.

Un cas particulier important est celui où $A_t = t$. Si H est un processus progressif tel que

$$\forall t \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega, \qquad \int_0^t |H_s(\omega)|\,\mathrm{d}s < \infty,$$

le processus $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}s$ est un processus à variation finie.

4.2 Martingales locales

Nous nous plaçons à nouveau sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$. Si T est un temps d'arrêt et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus à trajectoires continues, on note X^T le processus arrêté $X_t^T = X_{t\wedge T}$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 4.3. Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ et, pour tout n, le processus arrêté M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.