CORR TD1

Correction du TD 1, OASIS

Exercice 1
On rappelle que la formule de convolution entre deux suites u et h est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (u * h)_n = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l u_{n-l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l h_{n-l}$$

La formule de convolution entre deux fonctions f et g est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)dt = \int g(t)f(x-t)dt$$

On rappelle aussi que dans le cours nous avons dit que tout SLI est une convolution par une réponse impulsionnelle et que toute convolution par une certaine suite h est un SLI au sens où si $v = h * u$ alors v dépend de manière linéaire et invariante par translation de u

1. On reconnaît la formule de convolution $v = h * u$ avec $h_{-1} = 3, h_0 = 1, h_1 = -1$. Donc le lien entre u et v est bien un SLI.
2. Linéaire mais pas invariant par translation (exemple la suite $u = \delta$ et $u = \delta^1$ la 1-translatée de δ).
3. Pas linéaire mais invariant par translation. Exemple de non linéarité, calculer la sortie associée à la suite δ et la sortie associée à al suite δ^1 et constater que la suite associée à la somme des deux suites n'est pas la somme des deux sorties calculées pour chacune des suites.
4. SLI de réponse impulsionnelle $h_n = \delta^1_n$.
5. SLI de réponse impulsionnelle l'indicatrice de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. (identifier avec la formule de convolution des fonctions).
6. Pas linéaire mais invariant par translation. Exemple de non linéarité :
   - $f(x) = 0$ si $x < -1/2$, $f(x) = 1$ si $x > 1/2$ et f linéaire entre les deux. Alors il est facile de voir que $g(x) = f(x+1)$.
   - Soit une autre fonction f^2 définie par $f^2(x) = f(-x)$ et on appelle g^2 la fonction qui lui est associée par le système étudié. Alors $g^2(x) = f^2(x-1)$
   - la fonction $f^3 = f + f^2$ vaut $f^3(x) = 1$ pour tout x. On appelle g^3 la fonction qui lui est associée par le système.
   - Comme $g + g^2 \neq g^3$ (faire un graphique pour s'en convaincre), notre système n'est pas linéaire.
7. C'est bien un SLI, mais sa réponse impulsionnelle ne peut être représentée par une fonction. C'est le Dirac translaté de 1.

Exercice 2
Pour chaque suite u et v données ci-dessous, calculer le résultat de leur convolution : $w = u * v$

1. u est la suite impulsion en zéro. Donc, $w = u * v = \delta * v = v$ car l'impulsion en 0 est neutre pour la convolution (appliquer la formule de convolution des suites...)
2. $w_0 = 10,\ w_1 = 3.5,\ w_2 = 6.5,\ w_3 = -2$ (les autres w_n sont nuls).

3. Remarquer que u est la translatés de -1 de la suite u de la question précédente. Comme la convolution $w = u{*}v$ fait que w dépend de manière SLI de u, il vient que $w_{-1} = 10,\ w_0 = 3.5,\ w_1 = 6.5,\ w_2 = -2.$
4. D'après la remarque et comme la convolution contre v est un SLI, le w de cette question est la somme des w des deux questions précédentes soit : $w_{-1} = 10,\ w_0 = 13.5,\ w_1 = 10,\ w_2 = 4.5,\ w_3 = -2.$
5. $$w_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} v_l u_{n-l} = v_0 u_n + v_1 u_{n-1} =$$
$$\begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n = 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (1 - 2\frac{1}{2}) = 0 \text{ si } n > 0 \end{cases}$$
Ainsi le SLI dont la réponse impulsionnelle est v est l'inverse du SLI dont la réponse impulsionnelle est u. Cela au sens où leur composition a une réponse impulsionnelle δ si bien que tout signal qui est transformé par les deux SLI successivement ressort égal à lui-même.
6. On remarque que si deux polynômes sont donnés par
$$P(x) = \sum_i u_i x^i \text{ et } Q(x) = \sum_j v_j x^j$$
alors leur produit (en tant que polynômes) est
$$PQ(x) = \sum_k w_k x^k$$
(où $w = u * v$) d'où l'analogie entre convolution et multiplication de polynômes. Pour cette question on a $w_0 = 1,\ w_1 = \frac{3}{2},\ w_2 = \frac{3}{4},\ w_3 = \frac{1}{8}$. Et plus généralement si w est la convolée de v avec lui-même N fois
$$w_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour } 0 \leqslant n \leqslant N$$

Exercice 3

On rappelle que la formule donnant la réponse fréquentielle, notée C, à partir de la réponse impulsionnelle, notée h, pour un SLI sur $\mathbb{Z}$ est
$$\forall \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,\ C(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-2i\pi\nu n}$$
(C est simplement la TFtD de h)

1. $C(\nu) = \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$ pour $\nu \neq 0$ et $C(0) = 2N + 1$ et C est continue.
2. $C(\nu) = 1 + \frac{1}{2}e^{-2i\pi\nu}$ Le module au carré de C vaut $|C(\nu)|^2 = \frac{5}{4} + \cos(2\pi\nu)$, ce qui est suffisant pour donner l'allure de $|C(\nu)|$.
3. Si une onde de fréquence ν est transformée par le SLI de cette question puis par celui de la question précédente, la sortie finale est égale à l'onde d'origine (d'après la question 5 de l'exercice 2). On a donc
$$C(\nu)\left(1 + \frac{1}{2}e^{-2i\pi\nu}\right) = 1$$
on en déduit l'allure du module du gain fréquentiel C (c'est l'inverse du module du gain de la question précédente).

Exercice 4

1. Le SLI de la question 1 est un passe bas, celui de la question 2 aussi. Celui de la question 3 est un passe haut. On doit choisir entre 1 et 3, c'est donc le 1, celui dont la réponse impulsionnelle est $h_n = 1$ pour n allant de $-N$ à N.
2. Après avoir remplacé dans la formule donnant le gain fréquentiel, on a

$$C_2(\nu) = C_1(\nu - \nu_0)$$

   C_2 est le ν_0-translaté de C_1.
3. C_2 convient. Il a le même comportement autour de ν_0 que C_1 autour de zéro.

Exercice 5

1. On a deux créneaux indicateurs des intervalles $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$ et $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.
2. Après un petit temps les créneaux sont légèrement écornés. Après un long temps d'attente, la gaussienne efface tous les détails et la distribution de température ressemble à une gaussienne.
3. Lorsque α devient petit l'intégrale se recentre sur deux petits intervalles centrés en $x - 1/2$ et $x + 1/2$ est la limite de cela pour tout x est,

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(h\left(x + \frac{1}{2}\right) + h\left(x - \frac{1}{2}\right) \right)$$

4. En dérivant deux fois l'expression ci-dessus on aboutit à la condition (en remplaçant par $x = 0$, comme le suggère l'énoncé)

$$\sigma > \frac{1}{2}$$

   Comme σ est une fonction croissante du temps (voir formule exacte donnée au chapitre 1 du polycopié), cela nous dit qu'après un certain temps les détails de la distribution de température d'origine (ici les deux créneaux) sont effacés.

Correction du TD 2, OASIS

Exercice 1

1. Comme vu en cours, la résolution fréquentielle résultant de la troncature à N échantillons d'un signal est de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Il faut donc avoir
$$\frac{1}{N} < |\nu_1 - \nu_0|$$
soit
$$N > \frac{1}{|\nu_1 - \nu_0|}$$
2. $$v_n = e^{2i\pi \frac{f_0}{F_e} n}$$
en identifiat avec l'équation des ondes de Fourier sur $\mathbb{Z}$, v est bien une onde de Fourier de fréquence $\frac{f_0}{F_e}$.
3. Les fréquences réduites des deux ondes (après leur échantillonnage) sont $\frac{f_0}{F_e}$ et $\frac{f_1}{F_e}$ respectivement. Il faut donc au moins
$$\frac{1}{|\frac{f_1}{F_e} - \frac{f_0}{F_e}|} = \frac{F_e}{|f_1 - f_0|}$$
échantillons pour les séparer.
Le temps d'écoute est "nombre d'échantillons"$\times$ "temps entre deux échantillons" (soit T_e). Le temps minimal est donc
$$T_e \times \frac{F_e}{|f_1 - f_0|} = \frac{1}{|f_1 - f_0|}$$
Ainsi le temps d'écoute pour séparer deux sinusoïdes s'exprime de la même manière s'il est exprimé en nombre d'échantillons et la fréquence en fréquence réduite ou bien s'il est exprimé en seconde avec des fréquences en Hz.
4. Avec $f_1 = 29Hz$ et $f_0 = 27.5Hz$ il faut au moins $\frac{2}{3}s$ d'écoute.

Exercice 2 :

On rappelle que si un filtre récursif a pour équation de récurrence (x est la suite en entrée et y la sortie qui est associée à x) :
$$b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \cdots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + \cdots + a_p x_{n-p}$$

Alors ce filtre (sous les conditions de la définition 3.8 et Proposition 3.10 du polycopié (page 60)) a une réponse impulsionnelle (RI) h dont la transformée en Z (TZ) est
$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

où P et Q sont des polynômes dont les coefficients sont les a et les b respectivement

$$P(t) = \sum_{i=0}^{i=p} a_i t^i, \quad Q(t) = \sum_{i=0}^{i=q} b_i t^i$$

On retrouve les valeurs de h_n à partir de la définition de la TZ (page 58) et de l'égalité fondamentale

$$\forall x \in \mathbb{C}, t.q. |x| < 1, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geqslant 0} x^n$$

Les valeurs de h_n non spécifiées sont supposées nulles (pour simplifier les réponses)

1. $h_0 = 1, \ h_1 = -\frac{1}{2}$. causal. Équation de récurrence
$$y_n = x_n - \frac{1}{2} x_{n-1}$$
2. $h_0 = 1, \ h_1 = 2, \ h_2 = 3$. causal.
$$y_n = x_n + 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$$
3. $h_n = (1/2)^n$ pour $n \geqslant 0$. causal.
$$y_n - \frac{1}{2} y_{n-1} = x_n$$
4. $$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$
et $h_n = (1/2)^n + (-1/2)^n$ pour n positif ou nul. causal. ($h_n = 2(1/2)^n$ pour n positif et pair).
$$y_n - \frac{1}{4} y_{n-2} = 2x_n$$
5. $h_n = -2^n$ pour $n < 0$. anti-causal.
$$y_n - 2y_{n-1} = x_n$$
6. $$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$
$h_n = (1/2)^n$ pour n positif ou nul et $h_n = -2^n$ pour n strictement négatif. Ni causal ni auti-causal. Bilatère.
$$y_n - \frac{5}{2} y_{n-1} + y_{n-2} = 2x_n - \frac{5}{2} x_{n-1}$$

Exercice 3 :Filtres à minimum de phase

1. Multiplier le numérateur par z (ce qui ne change pas le module car z est de module 1) et en prendre le conjugué. On trouve alors que $K_a(z)$ a le même module que -1.
2. Le zéro est a et le pôle est $\frac{1}{\bar{a}}$. Si $|a| > 1$, la suite dont K_a est la TZ est causale. Si $|a| < 1$ elle est non causale (mais elle n'est pas strictement anti-causale à cause du numérateur) (dans le cours une suite anti-causale est nulle en 0...)
3. Les pôles de $H(z)K_a(z)$ sont les même que ceux de H sauf que le pôle a a été remplacé par le pôle $\frac{1}{\bar{a}}$. Les zéros $H(z)K_a(z)$ sont les mêmes que ceux de H sauf que le zéro $\frac{1}{\bar{a}}$ a été remplacé par le zéro en a.

4. Si on considère le filtre récursif dont la TZ (de la RI) est

$$\prod_{j=1}^{N} K_{a_i}(z)$$

et que l'on appelle T_1, alors $T = T_1 \circ T_0$ car la composition des SLI mène à la convolution de leur RI et donc à la multiplication des TZ. Par hypothèse les K_{a_j} ont leurs pôles à l'intérieur du cercle unité, T_1 est donc causal.
5. On a $y = T(x)$, comme un SLI agit par convolution par sa RI, $y = h^1 * h^0 * x$ (car le SLI T est la composition de T_0 et T_1). Par ailleurs, $t = T_0(x) = h^0 : astx$ donc $y = h^1 * t$ (la convolution est associative).
6. L'égalité de Parseval nous dit qu'une suite a la même énergie que sa TFtD. Or la TFtD de y est

$$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{x}(\nu) = H(e^{2i\pi\nu})\hat{x}(\nu)$$

où h est la RI du SLI T. On applique Parseval

$$\|y\|_2^2 = \sum |y_n|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(e^{2i\pi\nu})\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

On agit de même pour t et on remarque qu'il y a égalité entre les deux derniers termes de l'égalité de l'énoncé car $|H| = |H_0|$(sur le cercle unité).
7. Comme y dépend de manière causale de t, la suite y^M ne diffère pas de la suite y avant la position M (incluse). L'inégalité demandée est obtenue par

$$\sum_{n \leqslant M} |y_n|^2 = \sum_{n \leqslant M} |y_n^M|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_n^M|^2$$

8. On applique l'égalité de Parseval à la suite y^M et comme H_1 est de module 1, on a égalité de l'énergie de y^M et celle de t^M. La conclusion vient de

$$\sum_{n \leqslant M} |y_n|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_n^M|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |t_n^M|^2 = \sum_{n \leqslant M} |t_n|^2$$

Exercice 4

1. On a donc pris $u = \delta^m$ la suite égale à 1 en m et zéro partout ailleurs. On pose le calcul de chaque terme séparément. Pour n fixé, le terme de gauche vaut

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{n+lN} = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists l \in \mathbb{Z},\ n + lN = m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On sait, d'après le cours que $\hat{u}(\nu) = e^{-2i\pi m\nu}$ (la TFtD d'une impulsion en m est une onde de Fourier sur [-1/2,1/2[de fréquence "-position de l'impulsion"). On calcule le terme de gauche

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} e^{-2i\pi m \frac{k}{N}} e^{2i\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} e^{2i\pi(n-m)\frac{k}{N}}$$

C'est une somme géométrique de raison $e^{2i\pi\frac{n-m}{N}}$ avec N termes et commençant (son premier terme) à 1. Elle est nulle si $(n-m)/N$ n'est pas un entier et égale à 1 (ne pas oublier le facteur $1/N$ au début) si $n - m$ est un multiple de N.

On a donc bien égalité des deux termes pour tout n si u est une impulsion.

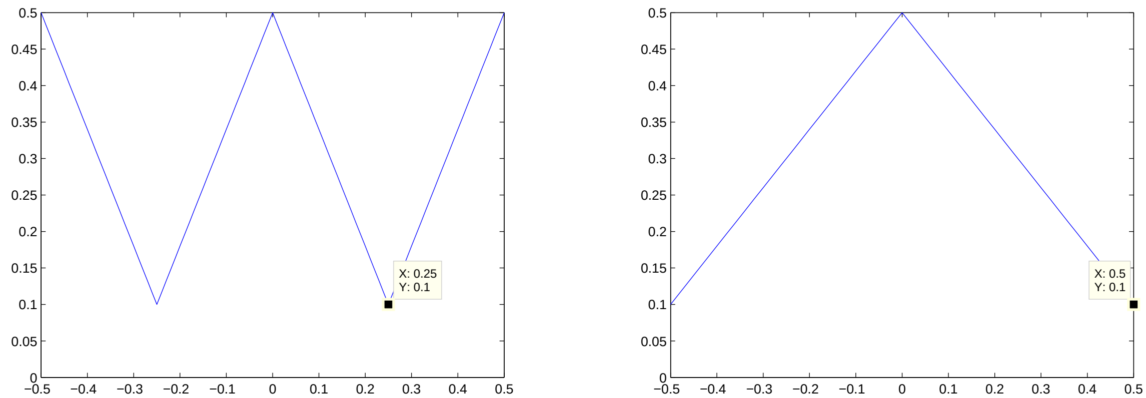

FIGURE 1 – Gauche : TFtd de v. Droite : TFtD de w.

2. On voit clairement que la fonction qui à la suite u associe la suite $n \mapsto \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_{n+lN}$ est linéaire.
3. la TFtD est linéaire, donc chaque terme $\hat{u}\left(\frac{k}{N}\right)$ dépend linéairement de u.
4. Une suite à support fini est une combinaison linéaire finie d'impulsions. Les trois questions précédentes permettent de conclure.
5. D'après l'hypothèse sur le support de h, pour tout $n = 0...N-1$ le terme de gauche de l'équation 1 est h_n. Le terme de droite se calcule à partir des échantillons de $\hat{h}$ aux points k/N. Or $C = \hat{h}$ (par définition de la réponse fréquentielle et de la TFtD). Donc on peut retrouver h à partir d'échantillons de la réponse fréquentielle.
6. C'est déjà linaire, l'invariance par translation est évidente.
   La réponse impulsionnelle est
   $$h_n = 1 \text{ si } n \text{ est multiple de } N \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$
   La comparaison des deux équations permet de suggérer que la TFtD de h est un peigne de Dirac (chose que l'on ne manipule pas dans ce cours, d'où le mot de Bonus) d'écartement $1/N$.

Exercice 5

1. La somme de l'onde et 1 fait bien 0 pour les points impairs et 2 ailleurs.
   La multiplication de u par une onde de fréquence ν_0 décale son spectre de ν_0 (i.e. la TFtD de $\phi_n^{\frac{1}{2}} u_n$ est $\hat{u}(\nu - 1/2)$). C'est du cours. D'où les résultats demandé.
2. On pose le calcul de la TFtD de w.
   $$\hat{w}(\nu) = \sum_n u_{2n} e^{2i\pi\nu n} = \sum_n u_{2n} e^{2i\pi\frac{\nu}{2}(2n)} = \sum_k v_k e^{2i\pi\frac{\nu}{2}(k)} = \hat{v}(\frac{\nu}{2}) =$$
   $$\frac{1}{2}\left(\hat{u}\left(\frac{\nu}{2}\right) + \hat{u}\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$
3. Voir la figure 1

4. La suite vaut 0 aux points non multiples de 3 et 3 aux points multiples de 3. γ est le produit de u par cette dernière suite qui est la somme de 3 ondes. On applique les théorèmes du cours pour obtenir

$$\hat{\gamma}(\nu) = \frac{1}{3}\left(\hat{u}(\nu) + \hat{u}\left(\nu - \frac{1}{3}\right) + \left(\nu + \frac{1}{3}\right)\right)$$

   et de même qu'en 2

$$\hat{\zeta}(\nu) = \frac{1}{3}\left(\hat{u}\left(\frac{\nu}{3}\right) + \hat{u}\left(\frac{\nu}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = \hat{\gamma}(\frac{\nu}{3})$$

5.

$$\hat{\beta}(\nu) = \frac{1}{p}\left(\hat{u}\left(\frac{\nu}{p}\right) + \hat{u}\left(\frac{\nu}{p} + \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{\nu}{p} + \frac{2}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{\nu}{p} + \frac{p-1}{p}\right)\right)$$

6. En identifiant la formule trouvée pour $\hat{v}$ et la convolution on est amené à suggérer que la TFtD demandée ne peut être qu'une somme de deux Dirac, un en 0 et l'autre en $\frac{1}{2}$.

Correction du TD 3, OASIS (Échantillnnage)

Exercice 1
Voir TD2 pour les démonstrations.

$$\hat{v}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\hat{u}\left(\frac{\nu}{2}\right) + \hat{u}\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\hat{w}(\nu) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=p-1} \hat{u}\left(\frac{\nu}{p} - \frac{k}{p}\right)$$

Au TD2 on avait donc vu l'effet du sous-échantillonnage sur le spectre d'une suite.
Exercice 2
On rappelle la formule de Poisson. La TFtD de la suite $u_n = f(nT_e)$ est donnée par

$$\hat{u}(\nu) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(F_e(\nu + n)\right)$$

Elle signifie que si u est le résultat de l'échantillonnage de f à la fréquence F_e alors le spectre de u (sa TFtD) est obtenu en périodisant celui de f (sa TFTC) de tous les $F_e n$ pour n entier.

1. $\hat{u}$ a exactement la même expression que celle de $\hat{f}$ sur $[-1/2, 1/2[$. Il n'y a pas de repliement.
2. Il n'y a pas de repliement ici non plus.
3. $\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{u}(\nu) = \frac{1}{4}$. (par rapport à la question précédente la fréquence d'échantillonnage est 1/2. $\hat{f}$ n'a plus son support entre $-\frac{F_e}{2}$ et $+\frac{F_e}{2}$ d'où le repliement).
4. $\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{u}(\nu) = F_e$

Exercice 3

1. $\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{u}(\nu) = \hat{f}(\nu)$, il n'y a pas de repliement.
2. $\hat{w} = \hat{u}\hat{v}$ (propriétés de la TFtD. u est supposée sommable par les hypothèses du théorème de Shannon)
3. $$\int |g(t)|dt = \int |\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n h(t-n)|dt \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| \int |h(t-n)|dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| \|h\|_1 = \|w\|_1 \|h\|_1$$
   (on peut faire toutes les interversions somme/intégrale, du moment qu'il s'agit d'une fonction à valeurs positives)
4. $\nu \mapsto w_n \hat{h}(\nu) e^{-2i\pi n\nu}$. (il s'agit de la translation de la fonction h et sa multiplication par une constante w_n)
5. En sommant sur n la formule ci-dessus on a
   $$\hat{g}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n e^{-2i\pi\nu n}\hat{h}(\nu)$$
   Si ν est entre $[-1/2, 1/2[$ on a
   $$\hat{g}(\nu) = \hat{w}(\nu)\hat{h}(\nu)$$
   Si $\nu = \nu_0 + n$ où $\nu_0 \in [-1/2, 1/2[$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a encore
   $$\hat{g}(\nu) = \hat{w}(\nu_0)\hat{h}(\nu) = \hat{w}(\nu)\hat{h}(\nu)$$
   la dernière égalité vient de l'extension à $\mathbb{R}$ tout entier de la définition de $\hat{w}$ comme expliqué dans l'énoncé.

6. En remplaçant par le résultat de la question 2, on a : $\hat{g}(\nu+n) = \hat{w}(\nu)\hat{h}(\nu+n) = \hat{f}(\nu)\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu+n)$.
   Si $\nu \in [-1/2, 1/2[$, $\hat{f}(\nu) - \hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu) - \hat{v}(\nu)\hat{u}(\nu)\hat{h}(\nu) = \hat{f}(\nu)(1-\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu))$ (car $\hat{u} = \hat{f}$ sur cet intervalle)
   Si $\nu = \nu_0 + n$ avec $\nu_0 \in [-1/2, 1/2[$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\hat{f}(\nu) = 0$ et
   $$\hat{f}(\nu) - \hat{g}(\nu) = -\hat{v}(\nu)\hat{u}(\nu)\hat{h}(\nu) = -\hat{f}(\nu_0)\hat{v}(\nu_0)\hat{h}(\nu_0+n)$$
7. $$E_q^2 = \int |\hat{f}-\hat{g}|^2 = \int_{\nu_0=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\nu_0)|^2 \left(|1-\hat{v}(\nu_0)\hat{f}(\nu_0)|^2 + \sum_{n\neq 0} |\hat{v}(\nu_0)\hat{h}(\nu_0+n)|^2 \right) d\nu_0$$
8. $(1-\alpha\beta)^2 + \alpha^2\gamma = \alpha^2(\beta^2+\gamma) - 2\alpha\beta + 1$ Le minimum de ce polynôme de degré deux (dont le coefficient dominant est positif) est atteint pour
   $$\alpha = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma}$$
   Ce qui est le résultat demandé.
9. Si $\hat{h}$ est à support dans $[-1/2, 1/2[$ et que le dénominateur de la dernière formule n'est jamais nul on a
   $$\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{v}(\nu) = \frac{\hat{h}(\nu)}{|\hat{h}(\nu)|^2} = \frac{1}{\hat{h}(\nu)}$$
   (cette formule reste vraie si le $\hat{h}$ est valeur complexe)
   La réponse trouvée nous dit simplement que v est la réponse impulsionnelle d'un SLI inverse de celui qui s'applique à la suite des échantillons par la reconstruction avec h, sans filtrage par v (dans le cas où h et f sont tous deux à bande limitée dans $[-1/2, 1/2]$).
10. On sait que la transformée de Fourier de l'indicatrice de $[-1/2, 1/2]$ est le sinus cardinal (valant 1 en 0 et s'annulant pour la première fois en 1, soit $\sin(\pi x)/(\pi x)$) ce sinus cardinal ($\hat{h}$) étant symétrique sa transformée de Fourier (au sens des fonctions L^2) est l'indicatrice de $[-1/2, 1/2]$ et il rentre dans le cadre du théorème 5.6. Ainsi on a (pour $\nu = 0$ dans l'énoncé du théorème) $\sum_n |\hat{h}(n)|^2 = \|h\|_2^2$. Pour obtenir le formule générale (avec ν différent de 0) il suffit d'appliquer le résultat à h multipliée par une onde, ce qui aura pour effet de décaler le spectre $\hat{h}$. (et, évidemment $\|h\|_2^2 = \int_{[-1/2,1/2[} 1^2 = 1$)
11. Le CD a une fréquence d'échantillonnage de 44100Hz. Cette fréquence est suffisante pour couvrir le spectre audible (-20000,+20000Hz). L'humain ne pouvant entendre au-delà de la fréquence 20000Hz, la qualité Hi-Fi revient à minimiser l'énergie de la fonction $S \star (f-g)$ où S est un filtre passe bas de fréquence de coupure 20000Hz. En effet, la différence entre f (le son original) et g (le son restitué), dont le spectre se situe au-delà de 20000Hz ne changera rien à la qualité de restitution (elle ne sera pas entendue). Au sens strict cela revient à minimiser
    $$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\nu)|^2 \left(|1-\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu)|^2 \right)$$
    avec $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{20000}{22050}$ ce qui est très proche du critère que l'on demande de justifier. Le minimiseur de ce critère est $\hat{v}(\nu) = \frac{1}{\hat{h}(\nu)}$. (si on utilise le critère stricte que l'on vient de justifier cette équation doit être vraie pour $|\nu| \leq \alpha$ et il n'y aucune contrainte pour le reste des fréquences réduites ν (non unicité du minimiseur). Si on utilise le critère donné dans l'énoncé, cette formule doit être valable pour tous les ν (unicité du minimiseur)) (on retrouve la même réponse qu'à la question 9, que $\hat{h}$ soit ou non à support dans -/+22050Hz, ne change rien du point de vue la qualité de l'écoute, seule la partie audible de h rentre en considération.)

Correction du TD 4, OASIS

Exercice 1

Comme indiqué il suffit de montrer que

$$< f_i^j | f_{i'}^{j'} >= \delta_i^{i'} . \delta_j^{j'}$$

Si $j \neq j'$ alors dans le produit scalaire

$$< f_i^j | f_{i'}^{j'} >= \sum_k f_i^j(k) f_{i'}^{j'}(k)$$

l'un des deux termes $f_i^j(k)$ et $f_{i'}^{j'}(k)$ est nul et ce quelque soit k. En effet, ces termes sont non nuls, respectivement, pour

$$(j-1)N < k \leqslant jN$$

et

$$(j'-1)N < k \leqslant j'N$$

qui sont deux conditions mutuellement exclusives car $j \neq j'$.

Si $j = j'$ alors

$$< f_i^j | f_{i'}^j >= \sum_{k=(j-1)N+1}^{k=jN} e_i(k-(j-1)N) e_{i'}(k-(j-1)N) =< e_i | e_{i'} >= \delta_i^{i'}$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 2

1.

$$< f_i^j | f_{i'}^{j'} >= \sum_{k,m} e_i(k) e_j(m) e_{i'}(k) e_{j'}(m) = \sum_k e_i(k) e_{i'}(k) \left(\sum_m e_j(m) e_{j'}(m) \right) = \sum_k e_i(k) e_{i'}(k) < e_j | e_{j'} >$$

$$= \sum_k e_i(k) e_{i'}(k) \delta_j^{j'} = \delta_j^{j'} < e_i | e_{i'} >= \delta_j^{j'} \delta_i^{i'}$$

2.

$$\hat{u}^2(k,m) = \sum_{l=1}^N \hat{u}^1(l,m) e_k(l) = \sum_{l=1}^N \left(\sum_{t=1}^N u(l,t) e_m(t) \right) e_k(l) = \sum_{l,t} u(l,t) e_k(l) e_m(t) =< u | f_k^m >$$

Exercice 3 :

1. Comme v est de norme 1, on a

$$\langle V_i - < V_i|v > v|v\rangle =< V_i|v > - < V_i|v > \|v\|^2 = 0$$

donc, le vecteur $V_i - < V_i|v > v$ est orthogonal à $< V_i|v > v$ et par pythagore

$$\|V_i\|^2 = \|V_i - < V_i|v > v\|^2 + \| < V_i|v > v\|^2 = \|V_i - < V_i|v > v\|^2 + < V_i|v >^2$$

(car, $V_i = (V_i - < V_i|v > v) + (< V_i|v > v)$)
Comme la quantité $\sum_i \|V_i\|^2$, ne dépends pas de v, il est équivalent de minimiser

$$E = \sum_i \|V_i\|^2 - E'$$

ou de maximiser E'.

2. Il suffit de remarquer que

$$< V_i|v >^2 =< V_i|v >< V_i|v >=< v|V_i >< V_i|v >= v^T V_i V_i^T v$$

et par les propriétés de linéarité du produit matriciel

$$E' = v^T \left(\sum_i V_i V_i^T \right) v$$

3. On décompose v sur la base des e_i

$$v = \sum_i \gamma_i e_i$$

comme v est de norme 1 et que les e_i sont orthonormés, on sait que

$$\sum_i \gamma_i^2 = 1$$

Par ailleurs, on a

$$E' = v^T A v = v^T \sum_i \gamma_i \lambda_i e_i = \sum_i \gamma_i^2 \lambda_i$$

On voit E' comme une moyenne pondérée des λ_i affectés des coefficients γ_i^2. Comme tous les λ_i pour $i > 1$ sont strictement inférieurs à λ_1, le maximum est atteint pour

$$\gamma_1^2 = 1 \text{ et } \gamma_i = 0 \text{ si } i > 1$$

(et ce maximum vaut λ_1)
La solution est donc de prendre $v = \pm e_1$.

Correction du TD Processus (1/2), OASIS

Exercice 1 :

1. Comme vu en cours, pour un bruit blanc, $R_X(k) = \sigma^2 \delta_k^0$ et $\forall \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,\ S_X(\nu) = \sigma^2$.
2. D'abord $h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$ et $h_n = 0$ pour les $n < 0$ (En effet h a pour TZ la fraction rationnelle en z^{-1} :
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \sum_{n \geqslant \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \text{ car } \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1,\ \forall z \in \mathbb{U}$$
$(h * \tilde{h})_n = \frac{4}{3}h_{|n|}$. Comme R_X est une impulsion, $R_Y(k) = \sigma^2 (h * \tilde{h})_n = \sigma^2 \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$.
$$S_Y(\nu) = \sigma^2 \left|\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2i\pi\nu}}\right|^2$$
3. On trace d'abord l'allure de $|1 - \frac{1}{2}e^{-2i\pi\nu}|^2$ et l'allure de son inverse s'en déduit.

Exercice 2 : Estimation de la moyenne d'un processus SSL

1. $E(T) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E(X_n) = m_X$.
2. Comme donné en indication, $R_Z = (h * \tilde{h}) * R_X$ or
$$(h * \tilde{h})_k = \frac{1}{N}\frac{N - |k|}{N}$$
Et on prend la valeur en 0 de la convolution de cette suite avec R_X.
3. D'abord $S_X(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_X(n)$ donc
$$N(Var(T) - \frac{1}{N}S_X(0)) = \sum_{k=-N+1}^{k=N-1} \left(\frac{N - |k|}{N} - 1\right) R_X(k) - \sum_{|k| > N-1} R_X(k)$$
Si, pour N fixé, on note w^N la suite
$$w_k^N = \begin{cases} -R_X(k) \text{ si } |k| > N - 1 \\ \left(1 - \frac{N-|k|}{N}\right) R_X(k) \text{ sinon} \end{cases}$$
Alors la suite w_k^N tend, pour k fixé vers 0 lorsque N tend vers l'infini et est dominée par $|R_X(k)|$ qui est sommable. Donc, par théorème de convergence dominée on a le résultat voulu.
4. C'est une loi gaussienne de même moyenne que X et de variance $1/N$ fois celle de X.

Exercice 3 : Etude des processus à bande limitée

1.
$$\Delta_p = E(|X_{n+p} - X_n|^2) = E(((X_{n+p} - m_X) - (X_n - m_X))^2) =$$
$$Var(X_{n+p}) + Var(X_n) - 2E(X_{n+p}^c X^c n) = 2R_X(0) - 2R_X(p)$$

On sait, de plus, que
$$\forall k,\ |R_X(k)| \leqslant R_X(0)$$
d'où l'inégalité demandée.

2. Comme S_X est la TFtD de R_X, on applique simplement la formule d'inversion de la TFtD
$$R_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\nu) e^{2i\pi k\nu} d\nu$$
Et on obtient la formule demandée.

3. Une formule de trigonométrie nous donne
$$\Delta_p = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(\nu) 2\sin^2(\pi p\nu) d\nu$$
Puis en remarquant que $S_X(\nu)$ est nulle hors de $[-b, b]$
$$\Delta_p = 2\int_{-b}^{b} S_X(\nu) 2\sin^2(\pi p\nu) d\nu \leqslant 4\int_{-b}^{b} S_X(\nu)(\pi p\nu)^2 d\nu \leqslant 4\int_{-b}^{b} S_X(\nu)(\pi pb)^2 d\nu \leqslant$$
$$(2\pi pb)^2 \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\nu) d\nu = (2\pi pb)^2 R_X(0)$$
La dernière inégalité est due au fait que S_X est positive.

4.
$$P(|X_{n+p} - X_n| > \epsilon) = P(|X_{n+p} - X_n|^2 > \epsilon^2) \leqslant \frac{(2\pi pb)^2 R_X(0)}{\epsilon^2}$$
Par l'inéglalité de Markov.

Correction du TD Processus 2/2, OASIS

Exercice 1 :

1. Pour i et k deux un entiers entre 0 et $N-1$ on note e_k^i la i-ème composante du vecteur e_k. On a
$$E(Y_k) = E(< X|e_k >) = E(\sum_{i=0}^{N-1} X_i e_k^i) = \sum_{i=0}^{N-1} E(X_i)e_k^i = m_X \sum_{i=0}^{N-1} 1.e_k^i = m_X < V|e_k >$$
où V est le vecteur $(1, \ldots, 1)$.
2. D'abord $Y_l - E(Y_l) =< X|e_l > -m_X < V|e_l >=< X - m_X V|e_l >$. Or, le vecteur $X - m_X V$ est le vecteur $(X_0^c, \ldots, X_{N-1}^c)$ (i.e. le vecteur des variables X_n centrée. On note $X^c = X - m_X V$.
$$Cov(Y_l, Y_m) = E(< X^c|e_l >< X^c|e_m >) =$$
$$E\left(\left(\sum_i X_i^c e_l^i\right)\left(\sum_j X_j^c e_m^j\right)\right) = \sum_{i,j} e_l^i e_m^j E(X_i^c X_j^c) = \sum_i e_l^i e_k^i \sigma^2 = \sigma^2 < e_l|e_m >$$
L'avant-dernière égalité est due au fait que les variables X_i sont indépendantes deux à deux. Or les e_k sont orthonormés, d'où les résultat demandé.
3. La TFD revient à décomposer un vecteur de taille N sur la base de Fourier. Il vient des questions précédentes que si le vecteur est un tirage de bruit blanc alors sa TFD a les même propriétés statistiques qu'un bruit blanc. Ainsi, dans les deux premiers cas de scripts matlab on dessine le module d'un tirage aléatoire. Le graphique obtenu ressemble à du bruit blanc (sauf, que les valeurs sont toujours positives parce qu'on affiche le module)
Dans le dernier cas, on moyenne sur beaucoup de tirages le module au carré de la TFD de $X_0, \ , X_15$. Or l'espérance statistique de cela est la TFtD de (R_X multiplié par une fonction triangle). Dans le cas du bruit blanc R_X est une impulsion en zéro et R_X n'est pas modifié par la multiplication par une fonction triangle. Donc on devrait voir apparaître un graphique à peu près constant qui vaut la DSP du bruit blanc, i.e. σ^2 multiplié par 16 (parce que dans le cours on a vu qu'il fallait diviser par N le module au carré de la TFtD pour obtenir une estimation de la DSP. Or, dans le script proposé cette division n'est pas faite).

Exercice 2 :

1. $$E(X_0) = E(Re(X_0) + iIm(X_0)) = E(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = E(\cos(\phi)) + iE(\sin(\phi))$$
et
$$E(\cos(\phi)) = \int_0^{2\pi} \cos(t)dp\phi = \int_0^{2\pi} \cos(t)\frac{1}{2\pi}dt = 0$$

2. La moyenne de X_n est nulle (ne dépend pas de n) comme vu plus haut). Par ailleurs

$$E(X_{n+k}\overline{X_n}) = e^{2i\pi\nu_0 k}$$

Par ailleurs la variance X_n est 1. (donc finie). Donc, X est SSL et $R_X(k) = e^{2i\pi\nu_0 k}$.

3. R_X n'est pas sommable. Sa DSP (i.e. TFtD de R_X) serait le Dirac en ν_0.
4. Onde de Fourier tronquée sur un intervalle de taille N. Donc un sinus -cardinal (périodique) centré en ν_0 dont la largeur du lobe principale est $2/N$, les autres lobes étant de largeur 1.
5. $E(Z_0) = \sqrt{N}$.
6. D'abord la moyenne de Z_k pour k non nul est 0 (par la question 1 de l'exercice 1). Ensuite, par la question 2, (la transformation qui mène de Y à Z étant isométrique et les B_n indépendants, on peut donc appliquer cette question), il vient que

$$E(Z_k\overline{Z_k}) = Cov(Z_k, Z_k) = \sigma^2$$

L'écart-type de Z_k est donc σ.

7. Pour ne pas confondre un Z_k (k non nul) avec Z_0 il faut que l'écart type des Z_k soit bien inférieur à la moyenne de Z_0. Donc

$$\sigma << \sqrt{N}$$

Pour simplifier, on suppose que la fréquence ν_0 est de la forme k_0/N et alors tout ce qui a été dit s'applique en remplaçant Z_0 par Z_{k_0}. Dans le cas général où ν_0 n'est plus un multiple entier de $1/N$ les calculs sont plus compliqués et font intervenir la TFtD d'une onde de $\mathbb{Z}$ tronquée sur $\{0, \ldots, N-1\}$.