1 Méthode d'Euler

1.1 Preuve de la consistance

La fonction Global Temp est C^∞, donc continue. Comme ϕ ne dépend pas de h_n pour Euler explicite, on a $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$, et par le théorème 5 elle est donc consistante.

1.2 Preuve de la stabilité

Global Temp étant C^∞, elle est aussi localement lipschitz. Par la consistance, pour un pas h suffisamment petit la méthode d'Euler est donc stable.

1.3 Preuve de la convergence

Par le théorème 4, la consistance et la stabilité d'une méthode implique sa convergence.
Ainsi, pour un pas h suffisamment petit, la méthode d'Euler explicite est stable, consistante, et convergente.

2 Méthode de Runge-Kutta

2.1 Preuve de la consistance

La méthode de Runge-Kutta est une méthode à 1 pas :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \tag{1}$$

avec :

$$\phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, y_j) \tag{2}$$

et

$$y_i = y + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t + c_j h, y_j) \tag{3}$$

De même, on peut montrer que pour Runge-Kutta, $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ En effet, pour $h = 0$, $y_i = y$, et on obtient alors :

$$\phi(t, y, 0) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t, y_j) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t, y) = f(t, y) \sum_{j=1}^{q} b_j \tag{4}$$

On obtient alors la condition :

$$\sum_{j=1}^{q} b_j = 1 \tag{5}$$

Donc la méthode de Runge-Kutta est elle aussi consistante si cette condition est vérifiée.

2.2 Preuve de la stabilité

On a également par le théorème 7 du cours que la méthode de Runge-Kutta est stable.

2.3 Preuve de la convergence

Par le théorème 4, la consistance et la stabilité d'une méthode implique sa convergence.

3 Comparaison du pas entre Runge-Kutta 4 et Euler

Euler est d'ordre 1 et Runge-Kutta 4 est d'ordre 4 ce qui implique que la méthode RK4 est plus précise par rapport aux variations de la solution de l'équation différentielle étudiée. Ainsi, même si le pas est plus grand, la résolution par RK4 conserve l'allure globale alors que la méthode d'Euler devient instable.

Il faut ainsi un pas plus faible pour la méthode d'Euler.

4 Théorèmes du cours utilisés

Voici les théorèmes du cours utilisés dans les différentes démonstrations.

Théorème 4. Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.

Théorème 5. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue. La méthode à 1 pas définie par ϕ est consistante si et seulement si

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad \phi(t, y, 0) = f(t, y).$$

Théorème 6. Si ϕ est lipschitzienne en y avec une constante Λ, alors la méthode est stable de constante de stabilité $e^{\Lambda T}$.

Théorème 7. Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, de constante de stabilité $S = e^{\Lambda T}$.