Carbon cycle projet MACS204

Présentation :

Killian Provin
Eric Romagnan
Louis Maillard
Arnaud Capitan
Nicodème Gorge

Sommaire

- Démonstrations des méthodes
  - Euler Explicite
  - Runge-Kutta 4
- Influence du pas
- Théorèmes utilisés
- Présentation des résultats

N'hésitez pas à aller voir le site web !

https://carbone-macs.rezel.net/

Méthode d'Euler explicite

1 Méthode d'Euler

1.1 Preuve de la consistance

La fonction Global Temp est C^∞, donc continue. Comme ϕ ne dépend pas de h_n pour Euler explicite, on a $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$, et par le théorème 5 elle est donc consistante.

1.2 Preuve de la stabilité

Global Temp étant C^∞, elle est aussi localement lipschitz. Par la consistance, pour un pas h suffisamment petit la méthode d'Euler est donc stable.

1.3 Preuve de la convergence

Par le théorème 4, la consistance et la stabilité d'une méthode implique sa convergence.
Ainsi, pour un pas h suffisamment petit, la méthode d'Euler explicite est stable, consistante, et convergente.

Méthode de Runge-Kutta

2 Méthode de Runge-Kutta

2.1 Preuve de la consistance

La méthode de Runge-Kutta est une méthode à 1 pas :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \tag{1}$$

avec :

$$\phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, y_j) \tag{2}$$

et

$$y_i = y + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t + c_j h, y_j) \tag{3}$$

De même, on peut montrer que pour Runge-Kutta, $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ En effet, pour $h = 0$, $y_i = y$, et on obtient alors :

$$\phi(t, y, 0) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t, y_j) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t, y) = f(t, y) \sum_{j=1}^{q} b_j \tag{4}$$

On obtient alors la condition :

$$\sum_{j=1}^{q} b_j = 1 \tag{5}$$

Donc la méthode de Runge-Kutta est elle aussi <u>consistante</u> si cette condition est vérifiée.

Méthode de Runge-Kutta

2.2 Preuve de la stabilité

On a également par le théorème 7 du cours que la méthode de Runge-Kutta est stable.

2.3 Preuve de la convergence

Par le théorème 4, la consistance et la stabilité d'une méthode implique sa convergence.

Influence du pas

3 Comparaison du pas entre Runge-Kutta 4 et Euler

Euler est d'ordre 1 et Runge-Kutta 4 est d'ordre 4 ce qui implique que la méthode RK4 est plus précise par rapport aux variations de la solution de l'équation différentielle étudiée. Ainsi, même si le pas est plus grand, la résolution par RK4 conserve l'allure globale alors que la méthode d'Euler devient instable.

Il faut ainsi un pas plus faible pour la méthode d'Euler.

Théorèmes du cours autorisés

4 Théorèmes du cours utilisés

Voici les théorèmes du cours utilisés dans les différentes démonstrations.

Théorème 4. Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.

Théorème 5. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue. La méthode à 1 pas définie par ϕ est consistante si et seulement si

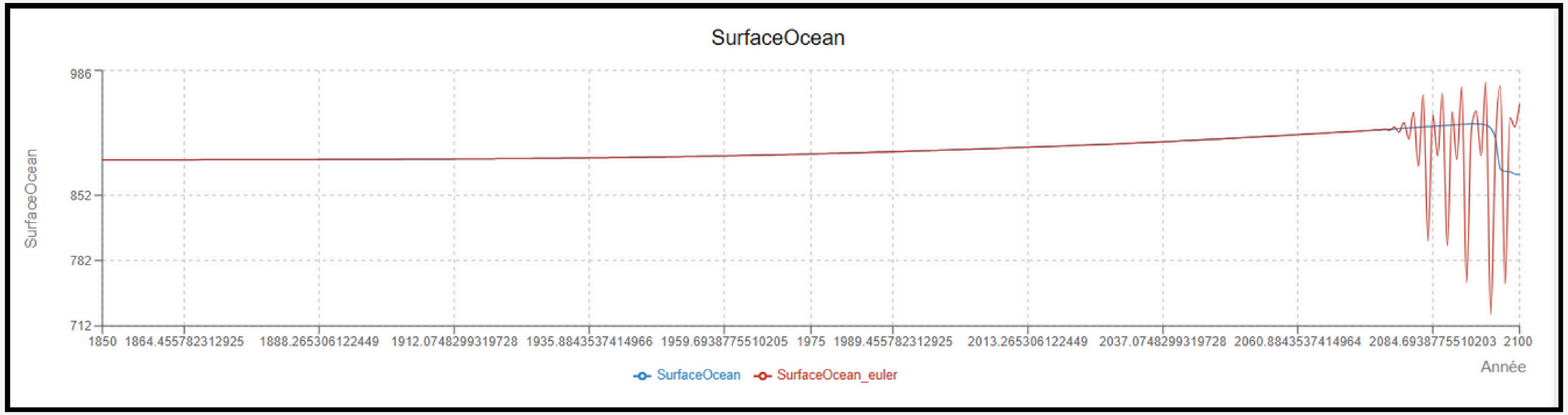
$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad \phi(t, y, 0) = f(t, y).$$

Théorème 6. Si ϕ est lipschitzienne en y avec une constante Λ, alors la méthode est stable de constante de stabilité $e^{\Lambda T}$.

Théorème 7. Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, de constante de stabilité $S = e^{\Lambda T}$.

Présentation des résultats

Comparaison Runge-Kutta 4 / Euler explicite



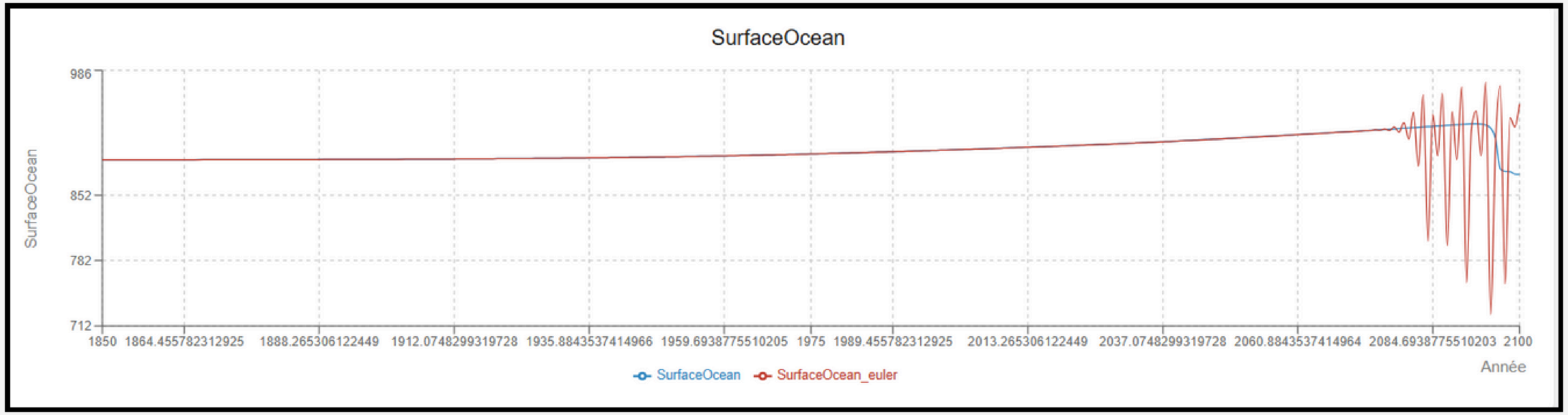
La méthode d'Euler est moins stable que la méthode RK4 : à l'aide d'un pas de 0.85, on voit que la méthode d'Euler devient instable à partir de 2080.

La méthode de Runge-Kutta 4 diverge elle aussi mais plutôt autour de 2090 pour un pas de 0.85

Screen pris de la simulation web, n'hésitez pas à aller la consulter et changez le pas

Présentation des résultats

Comparaison Runge-Kutta 4 / Euler explicite



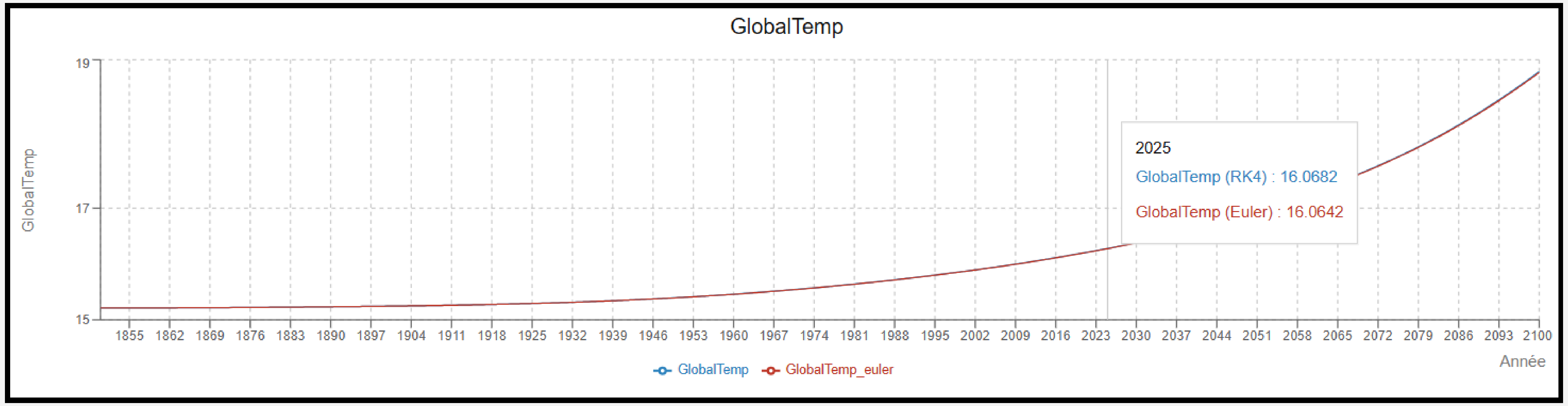
La méthode d'Euler est moins stable que la méthode RK4 : à l'aide d'un pas de 0.85, on voit que la méthode d'Euler devient instable à partir de 2080.

La méthode de Runge-Kutta 4 diverge elle aussi mais plutôt autour de 2090 pour un pas de 0.85

Screen pris de la simulation web, n'hésitez pas à aller la consulter et changez le pas

Présentation des résultats

Comparaison Runge-Kutta 4 / Euler explicite



En réduisant le pas, on observe les mêmes résultats pour les deux méthodes : on peut voir que la température moyenne (indicateur GlobalTemp) atteint selon les prévisions obtenues par la résolution de l'équation différentielle, en 75 ans depuis 2025, 19°C contre 16°C en 2025, soit un gain de 3°C en 75 ans ce qui est dramatique.

On observe ainsi une augmentation de 4°C depuis 1850, ce qui sous-entend une augmentation exponentielle sur les dernières années (même si la résolution ne nous donne pas nécessairement une courbe exponentielle).

Screen pris de la simulation web, n'hésitez pas à aller la consulter et changez le pas

Merci !

N’hésitez pas à aller voir le site web !

https://carbone-macs.rezel.net/