Chapitre 4
Calcul d'Itô

Pascal Moyal

11 juin 2021

Table des matières

1 Semi-martingales continues **2**
1.1 Martingales locales 2
1.2 Crochet des martingales locales 4
1.3 Semi-martingales continues 7

2 L'intégrale stochastique **8**
2.1 Intégrale stochastique pour les martingales bornées dans L^2 8
2.2 Extension aux semi-martingales continues 10

3 Formules d'Itô **12**
3.1 Formule d'Itô pour l'intégrale stochastique 12
3.2 Conséquences 12

4 Théorème de Girsanov **14**

Dans ce chapitre, nous étendons la définition des objets introduisons la semaine dernière, et construisons une intégrale stochastique sur $\mathbb{R}+$, contre les variations d'une martingale locale. Cette intégrale stochastique généralise donc l'intégrale de Wiener. Dans tout le chapitre, $(\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$ désigne une filtration satisfaisant les conditions habituelles.

1 Semi-martingales continues

1.1 Martingales locales

Définition.

On dit que le processus $\mathscr{F}_t$-adapté $(M_t,\, t \geq 0)$, issu de 0 et à trajectoires continues, est une $\mathscr{F}_t$-*martingale locale* si il existe une suite croissante de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ tels que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ p.s., tels que pour tout n, le processus arrêté $(M_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale uniformément intégrable. On dit alors que la suite $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ *réduit* la martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$.

Exemple 1. Si $(B_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien et Z est une variable $\mathscr{F}_0$-mesurable, alors le processus $(ZB_t,\, t \geq 0)$ est une martingale locale. En effet,...
En revanche ce n'est *pas* une martingale si Z n'est pas intégrable.

Proposition.

1. Dans la définition, on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale".
2. Toute $\mathscr{F}_t$-martingale continue et issue de 0 est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.
3. Si $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale et τ est un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt, alors $(M^\tau,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.
4. L'ensemble $\mathscr{M}_{\mathrm{Loc}}$ des $\mathscr{F}_t$-martingales locales est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration.

1. Si la suite de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ réduit $(M_t,\, t \geq 0)$, alors c'est aussi le cas pour la suite de t.a. bornés $\{\tau_n \wedge n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout n, le processus arrêté $\left(M_t^{n\wedge\tau_n},\, t \geq 0\right)$ est une martingale arrêtée par un temps d'arrêt borné : elle est uniformément intégrable.
2. Si $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, alors la suite $\{n;\, n \in \mathbb{N}\}$ la réduit puisque pour tout n, $(M_t^n,\, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable, car arrêtée par un temps d'arrêt borné.
3. Soit $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de temps d'arrêt réduisant la martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$. Alors pour tout n $(M_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$ est une martingale. En particulier, on a vu qu'alors $((M^{\tau_n})_t^\tau,\, t \geq 0) = ((M^\tau)_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$ est également une martingale. La suite $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ réduit donc $(M^\tau,\, t \geq 0)$, qui est donc bien une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.
4. Soient $(M_t,\, t \geq 0)$ et $(M'_t,\, t \geq 0)$ deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales, et soient $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\tau'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ les deux suite de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt qui les réduisent respectivement. Il est immédiat que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ réduit le processus $((\lambda.M)_t,\, t \geq 0) := (\lambda M_t,\, t \geq 0)$, qui est donc bien une $\mathscr{F}_t$-martginale locale. D'autre part, par exemple, comme pour tout n $(M_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, $\left(M_t^{\tau_n \wedge \tau'_n},\, t \geq 0\right) = \left((M^{\tau_n})_t^{\tau'_n},\, t \geq 0\right)$ est également une $\mathscr{F}_t$-martingale. Donc la suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n \wedge \tau'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ réduit $(M_t,\, t \geq 0)$, et de même, elle réduit $\{M'_t;\, n \in \mathbb{N}\}$. Par conséquent, $\{\tau_n \wedge \tau'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ réduit $((M+N)_t,\, t \geq 0) := (M_t + N_t,\, t \geq$ qui est bien une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.

□

Proposition.

Toute martingale locale majorée par une variable aléatoire intégrable est une martingale (uniformément intégrable)

Démonstration. Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale locale réduite par $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. L'adaptabilité de $(M_t,\, t \geq 0)$ est vrai par définition, et l'intégrabilité de tout M_t, $t \geq 0$, découle des hypothèse. D'autre part, pour tous $s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_n \wedge t} | \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^{\tau_n} | \mathscr{F}_s\right] = M_s^{\tau_n} = M_{\tau_n \wedge s}, \qquad \text{p.s..}$$

Comme $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ p.s., en passant à la limite dans le terme de gauche par convergence dominée, et dans le terme de droite, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[M_t | \mathscr{F}_s\right] = M_s, \qquad \text{p.s..}$$

$\square$

Nous avons vu que le mouvement brownien n'est pas à variation finie. Nous généralisons ce résultat, en montrant qu'une martingale locale non identiquement nulle ne peut être un processus à variation finie.

Proposition.

Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale. Alors si $(X_t,\, t \geq 0)$ est à variation finie, ce processus est indistinguable du processus nul.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, et posons

$$\tau_n = \inf\left\{ t \geq 0 \,:\, \int_0^t |\, \mathrm{d}X_s| \geq n \right\}.$$

Alors, par la caractérisation du processus $\left(\int_0^t |\, \mathrm{d}X_t|,\, t \geq 0\right)$ comme une limite, on voit que ce processus est $\mathscr{F}_t$-adapté, et donc τ_n est un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt. D'après la propriété 3. ci-dessus, le processus $(X^{\tau_n},\, t \geq 0)$ est une martingale locale continue bornée par n, et donc une (vraie) martingale uniformément intégrable d'après la proposition précédente. D'après la propriété des martingales vue dans le Chapitre 2, on a alors pour tout $t \geq 0$ et pour toute subdivision $\{0 = t_0^k < t_1^k < \ldots < t_{p_n}^k = t,\, k \in \mathbb{N}^*\}$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t^{\tau_n})^2\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left[\left(X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n}\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left|X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n}\right| \sum_{i=1}^k \left|X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n}\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left|X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n}\right| \left|\int_0^t \, \mathrm{d}X_t^{\tau_n}\right|\right] \\
&\leq n\mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left|X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n}\right|\right].
\end{aligned}$$

L'intégrande de l'espérance précédente tend vers 0 p.s. avec k par la continuité p.s. des trajectoires de $(X_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$. Comme ce processus est borné par n, par convergence dominée on obtient que l'espérance précédente tend vers 0 quand $k \to \infty$. En définitive, on a donc $\mathbb{E}\left[(X_t^{\tau_n})^2\right] = 0$, et donc $X_t^{\tau_n} = 0$ p.s.. Comme ceci est vrai pour tout n, on en déduit que $X_t = 0$ p.s.. $\square$

1.2 Crochet des martingales locales

On en déduit le résultat, fondamental, suivant :

Théorème.

Pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale (continue et issue de 0), il existe un unique (à indistinguabilité près) processus à variation finie, noté $(\langle M\rangle_t\,,\, t\geq 0)$ tel que le processus $\left((M_t)^2-\langle M\rangle_t\,,\, t\geq 0\right)$ soit une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. Ce processus est appelé *crochet* de $(M_t,\, t\geq 0)$. De plus, pour tout t et toute subdivision $\{0=t_0^k<t_1^k<...<t_{p_n}^k=t,\, k\in\mathbb{N}^*\}$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\sum_{i=1}^{k}\left(M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} \langle M\rangle_t\,. \tag{1}$$

Démonstration. L'unicité est une conséquence de la Proposition précédente. En effet, si A et A' sont deux processus croissants satisfaisant les conditions du théorème, alors on a p.s. pour tout t,

$$A'_t-A_t=(M_t)^2-A_t-\left((M_t)^2-A'_t\right),$$

et donc le processus $(A'_t-A_t,\, t\geq 0)$ est à la fois un processus à VF (c'est une différence de processus p.s. croissants) et une $\mathscr{F}_t$-martingale locale, en tant que différence de deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales. Le processus $(A'_t-A_t,\, t\geq 0)$ est donc indistinguable du processus nul d'après la Proposition précédente.

Concernant l'existence, l'ingrédient central est le fait que, si $(M_t,\, t\geq 0)$ est une martingale bornée, alors pour tout t et toute subdivision $\{0=t_0^k<t_1^k<...<t_{p_n}^k=t,\, k\in\mathbb{N}^*\}$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, pour tout k et tout i, le processus $\left(X_t^{k,i},\, t\geq 0\right)$ défini pour tout t par

$$X_t^{k,i}=M_{t_{i-1}^k}\left(M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k}\right)$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale, ce qui se démontre similairement à l'Exercice 4 de la feuille 2 de TD. Par conséquent, pour tout k le processus défini pour tout t par $X_t^k=\sum_{i=1}^{p_k}X_t^{k,i}$ est lui-aussi une $\mathscr{F}_t$-martingale, et l'on démontre après des calculs similaires (découpage de l'intervalle, préconditionnement , etc.) que pour tout $T>0$,

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbb{E}\left[(X_T^n-X_T^m)^2\right]=0.$$

(Voir Lemme 4.2 du livre de J.F. Le Gall pour les caculs.) Ceci implique que, le long d'une suite croissante $\{k_n;\, n\in\mathbb{N}\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\leq t\leq T}|X_T^{k_n}-X_T^{k_{n-1}}|<\infty,\ \text{p.s..}$$

Donc, p.s., la suite de processus $\left(X_t^{k_n},\, t\in[0,T]\right)$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus $(Y_t,\, t\in[0,T])$ qui, par passage à la limite en n (et par convergence dominée) dans les égalités d'espérance conditionnelle pour les martingales $\left(X_t^{k_n},\, t\in[0,T]\right)$, est lui-même une $\mathscr{F}_t$-martingale à trajectoires continues. On a de plus immédiatement que pour tout k et tout $i\leq p_k$,

$$M_{t_i^k}^2-2X_{t_i^k}^k=\sum_{j=1}^{i}\left(M_{t_j^k}^2-M_{t_{j-1}^k}^2\right)^2, \tag{2}$$

ce qui montre en particulier que pour tout k, le processus $\left(M_t^2-2X_t^k,\, t\in[0,T]\right)$ est p.s. croissant le long de la subdivision considérée. En passant à la limite sur k, on obtient que le processus

$$(\langle M\rangle_t\,,\, t\in[0,T]):=\left(M_t^2-2Y_t,\, t\in[0,T]\right)$$

est p.s. croissant sur $[0,T]$, et est donc en particulier un processus à variation finie. De plus, le processus

$$(Y_t,\, t\in[0,T]) = \left(\frac{1}{2}\left(M_t^2 - \langle M\rangle_t\right),\, t\in[0,T]\right)$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale. En particulier, pour tout k, en spécialisant (2) à $i\equiv p_k$ nous obtenons que pour tout $T>0$, et tout $t\leq T$,

$$M_t^2 - 2X_t^k = \sum_{j=1}^{p_k}\left(M^2_{t_j^k} - M^2_{t_{j-1}^k}\right)^2.$$

On peut passer à la limite sur k dans l'équation précédente (qui ne dépend pas de la suite de subdivisions choisie par l'unicité du crochet), nous obtenons que pour tout $t\leq T$,

$$\langle M\rangle_t = M_t^2 - 2Y_t = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{p_k}\left(M^2_{t_j^k} - M^2_{t_{j-1}^k}\right)^2, \tag{3}$$

où la limite est dans L^2 et donc en probabilité (puisque X_t^k tend vers Y_t dans L^2 pour tout t).

Pour le cas général, on peut alors étendre la définition du crochet à $\mathbb{R}+$ en remarquant que le processus $(\langle M\rangle_t,\, t\in[0,T])$ est défini uniquement pour tout $T\geq 0$. Ensuite, si $(M_t,\, t\geq 0)$ est seulement une $\mathscr{F}_t$-martingale locale, alors on la localise par la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{t\geq 0\,:\,|M_t|\geq n\right\},\, n\in\mathbb{N}.$$

Pour tout n, le processus $(M^{\tau_n},\, t\geq 0)$ est une martingale bornée et on lui applique le raisonnement précédent. On en déduit l'existence d'une processus croissant $A^n = \langle M^{\tau_n}\rangle$. Il est alors immédiat que pour tout t et tout $m\geq n$, $A^m_{t\wedge\tau_n} = A^n_t$. Par l'unicité du processus croissant, il existe donc un unique processus croissant A tel que $A_{t\wedge\tau_n} = A^n_t$ pour tout n. Alors, pour tout n, le processus

$$\left((M_t^{\tau_n})^2 - A_{t\wedge\tau_n},\, t\geq 0\right) = \left(M^2_{\tau_n\wedge t} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n},\, t\geq 0\right)$$

est une MaF_t-martingale, ce qui signifie exactement que $\left(M_t^2 - \langle M\rangle_t,\, t\geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. On conclut la preuve en remplaçant M par M^{τ_n} dans (3) (qui dépend implicitement du choix de T), puis en passant à la limite en n, en remarquant que $\mathbb{P}\left[T\leq\tau_n\right]\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. □

Remarquons que nous avons démontré au passage le résultat important que pout tout temps d'arrêt τ et toute martingale locale $(M_t,\, t\geq 0)$, pour tout $t\geq 0$, $\langle M^\tau\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\tau}$.

Remarque. Soit $(B_t,\, t\geq 0)$, un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. Nous savons que $\left((B_t)^2 - t,\, t\geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, donc une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. Par l'unicité dans le théorème ci-dessus, nous avons donc $\langle B\rangle_t = t$ p.s. pour tout $t\geq 0$.

Tout processus p.s. croissant tend p.s. vers une limite, éventuellement infinie. Notons alors pour toute martingale locale $(M_t,\, t\geq 0)$,

$$\langle M\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_t\,,$$

où la limite s'entend presque sûrement. Le théorème suivant montre que le crochet est un outil essentiel pour vérifier la propriété de martingale d'une martingale locale :

Théorème.

Soit $(M_t,\, t\geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale locale issue de 0.

1. Il y a équivalence entre
   (i) $(M_t,\, t\geq 0)$ est une martingale bornée dans L^2, i.e. $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\left[(M_t)^2\right]<\infty$;
   (ii) $\langle M\rangle_\infty$ est intégrable (et donc en particulier p.s. finie) ;
2. Il y a équivalence entre
   (i) $(M_t,\, t\geq 0)$ est une martingale de carré intégrable, i.e. $\mathbb{E}\left[(M_t)^2\right]<\infty$ pour tout $t\geq 0$;
   (ii) Pour tout $t\geq 0$, $\langle M\rangle_t$ est intégrable (et donc en particulier p.s. finie).

Démonstration. La preuve, qui est à lire p.69 du Livre de J.F. Le Gall (Théorème 4.3) découle de l'inégalité de Doob, qui a pour conséquence en particulier que sous les conditions du théorème, l'on a

$$\mathbb{E}\left[(M_t)^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t\right], \, t \geq 0.$$

□

Définition.

Soient M et N, deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales. On appelle crochet de M avec N, et on note $(\langle M, N\rangle_t\,, \, t \geq 0)$, le processus défini par

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t\right), \quad t \geq 0.$$

Proposition.

Soient M et N, deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales. Alors,

1. $(\langle M, N\rangle_t\,, \, t \geq 0)$ est l'unique processus à variation finie tel que le processus $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t\,, \, t \geq 0)$ est une martingale locale.
2. Pour tout t et toute subdivision $\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_{p_k}^k = t, \, k \in \mathbb{N}^*\}$ de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a
$$\sum_{i=1}^{k} \left(M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k}\right)\left(N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} \langle M, N\rangle_t\,. \tag{4}$$
3. L'application $(M, N) \longmapsto \langle M, N\rangle$ est bilinéaire symétrique.
4. Si M et N sont deux martingales bornées dans L^2, alors $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t\,, \, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable. En particulier, $\langle M, N\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty} \langle M, N\rangle_t$ p.s. est fini p.s., intégrable et tel que $\mathbb{E}\left[M_\infty N_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_0N_0\right] + \mathbb{E}\left[\langle M, N\rangle_\infty\right]$.

Démonstration.

1. On procède exactement comme dans la première assertion du Théorème définissant le crochet.
2. La limite (4) découle directement de (1).
3. La symétrie et la bilinéarité sont des conséquences immédiates de la caractérisation par la limité (4).
4. C'est une conséquence simple de l'assertion 1(i) du Théorème précédent.

□

Définition.

On dit que deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales M et N sont *orthogonales* si pour tout t, $\langle M, N\rangle_t = 0$ p.s, autrement dit, si $(M_tN_t, \, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.

Remarquons qu'une martingale locale M ne peut pas être orthogonale à elle-même. En effet, si $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle_t = 0$ p.s. pour tout t, alors d'après l'assertion 1(i) du théorème précédent, $\left((M_t)^2, \, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale uniformément intégrable, et en particulier $\mathbb{E}\left[(M_t)^2\right] = \mathbb{E}\left[(M_0)^2\right] = 0$, ce qui implique que $M_t = 0$ p.s. pour tout t.

Exemple 2 (Orthogonalité et indépendance)**.** Soient $(B_t, \, t \geq 0)$ et $(B'_t, \, t \geq 0)$ deux $\mathscr{F}_t$-mouvement browniens indépendants. Alors il est facile de vérifier que le processus $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(B_t + B'_t), \, t \geq 0\right)$ est aussi un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien, et donc une $\mathscr{F}_t$-martingale. Ceci implique que pour tout t,

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(B + B') \right\rangle_t = t.$$

Or, par bilinéarité on a p.s. pour tout t,

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(B+B') \right\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle B\rangle_t + \langle B'\rangle_t + 2\langle B,B'\rangle_t\right) = \frac{1}{2}\left(2t + 2\langle B,B'\rangle_t\right),$$

ce qui, identifié avec l'égalité précédente, montre que p.s.

$$\langle B,B'\rangle_t = 0, \quad t \geq 0,$$

autrement dit B et B' sont orthogonaux.

1.3 Semi-martingales continues

Définition.

On dit que le processus $\mathscr{F}_t$-adapté $(X_t,\, t\geq 0)$, à trajectoires continues, est une $(\mathscr{F}_t$-)semi-martingale continue si p.s.

$$X_t = M_t + A_t, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

où $(M_t,\, t\geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale et $(A_t,\, t\geq 0)$ est un processus à variation finie.

Remarquons que la décomposition (5) est unique à indistinguabilité près, toujours d'après le Théorème précédent. On dit que c'est *la* décomposition de X en semi-martingale.

Définition.

Le crochet de deux semi-martingales continues X et X' de décompositions respectives $X = M + A$ et $X' = M' + A'$ est défini par

$$\langle X,X'\rangle_t = \langle M,M'\rangle_t, \quad t\geq 0.$$

Proposition.

Soient X et X', deux semi-martingales continues. Pour tout $t \geq 0$, et toute subdivision $\{0 = t_0^k < t_1^k < \ldots < t_{p_k}^k = t,\, k\in\mathbb{N}^*\}$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\sum_{i=1}^{p_k}\left(X_{t_i^k} - X_{t_{i-1}^k}\right)\left(X'_{t_i^k} - X'_{t_{i-1}^k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} \langle X,Y\rangle_t\,. \tag{6}$$

Démonstration. En décomposant X et X' en semi-martingales par $X = M + A$ et $X' = M' + A'$, on obtient que pour tout t et toute subdivision comme indiquée,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p_k}\left(X_{t_i^k} - X_{t_{i-1}^k}\right)\left(X'_{t_i^k} - X'_{t_{i-1}^k}\right) &= \sum_{i=1}^{p_k}\left(M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k}\right)\left(M'_{t_i^k} - M''_{t_{i-1}^k}\right) + \sum_{i=1}^{p_k}\left(M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k}\right)\left(A'_{t_i^k} - A'_{t_{i-1}^k}\right)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{p_k}\left(A_{t_i^k} - A_{t_{i-1}^k}\right)\left(M'_{t_i^k} - M'_{t_{i-1}^k}\right) + \sum_{i=1}^{p_k}\left(A_{t_i^k} - A_{t_{i-1}^k}\right)\left(A'_{t_i^k} - A'_{t_{i-1}^k}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

D'après la proposition définissant le crochet $\langle M,M'\rangle$, le premier terme du membre de droite de (7) tend en probabilité vers $\langle M,M'\rangle = \langle X,X'\rangle_t$ quand k tend vers l'infini. Le deuxième est majoré pour tout k par

$$\sup_{1\leq i\leq p_k}\left|M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k}\right| \sum_{i=1}^{p_k}\left|A'_{t_i^k} - A'_{t_{i-1}^k}\right| \leq \int_0^t |\,\mathrm{d}A'_s| \sup_{1\leq i\leq p_k}\left|M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ p.s.}$$

puisque le processus $(M_t,\, t \geq 0)$ est à trajectoires p.s. continues, et donc uniformément continues, sur $[0,t]$. La troisième terme tend vers 0 p.s. pour la même raison. Quant au quatrième, il est majoré par

$$\sup_{1\leq i\leq p_k} \left|A_{t_i^k} - A_{t_{i-1}^k}\right| \sum_{i=1}^{p_k} \left|A'_{t_i^k} - A'_{t_{i-1}^k}\right| \leq \int_0^t |\,\mathrm{d}A'_s| \sup_{1\leq i\leq p_k} \left|A_{t_i^k} - A_{t_{i-1}^k}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ p.s.},$$

de même, puisque le processus $(A_t,\, t \geq 0)$ est à trajectoires p.s. continues, et donc uniformément continues sur $[0,t]$. □

2 L'intégrale stochastique

Nous avons maintenant toutes les cartes en main pour définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale bornée dans L^2, qui généralise l'intégrale de Wiener introduite dans le chapitre précédent.

2.1 Intégrale stochastique pour les martingales bornées dans L^2

On commence par définir l'espace

$$\mathscr{M} := \left\{\mathscr{F}_t - \text{martingales continues nulles en 0 et uniformément bornées dans } L^2\right\}.$$

Avec le point 4. de la Proposition ci-dessus, comme les martingales considérées sont bornées dans L^2 on peut définir la forme

$$\begin{cases} \mathscr{M} \times \mathscr{M} & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (M,N) & \longmapsto (M,N)_{\mathscr{M}} := \mathbb{E}\left[\langle M,N\rangle_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty N_\infty\right], \end{cases}$$

qui est bilinéaire et symétrique. Elle est définie positive puisque $\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] = 0$ implique que $\langle M_t\rangle = 0$ p.s. pour tout t puisque ce dernier processus est croissant, ce qui implique à son tour que $M_t^2 = M_t = 0$ p.s. pour tout t. On peut même vérifier que l'espace $\mathscr{M}$ est de Hilbert (il est complet d'après la Proposition 5.1 du livre de J.F. Le Gall).
Pour toute martingale $M \in \mathscr{M}$, donnons (ou rappelons) maintenant les définitions des espaces suivants :

$$\mathscr{E} = \{ \text{ processus élémentaires de } \mathbb{R}+ \text{ dans } \mathbb{R}\};$$

$$\mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M) = \left\{\text{processus progressifs } (H_t,\, t\geq 0) \text{ tels que } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 \;\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < \infty\right\}.$$

Alors, pour toute $M \in \mathscr{M}$, $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H,K) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s K_s \;\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right].$$

Pour généraliser le résultat vu dans le cas brownien, on peut alors montrer que $\mathscr{E}$ est dense dans $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$ pour toute $M \in \mathscr{M}$.

Définition.

Soit $M \in \mathscr{M}$. Pour tout $H \in \mathscr{E}$ de la forme

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i, t_i+1[}(t), \quad t \geq 0,$$

l'intégrale stochastique de H avec M, notée $H \cdot M$, est l'élément de $\mathscr{M}$ (à vérifier en exercice !) défini par

$$(H\cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right), \quad t \geq 0.$$

On a alors le théorème fondamental suivant, qui généralise celui définissant l'intégrale de Wiener,

Théorème.

Soit $M \in \mathscr{M}$. L'application

$$\begin{cases} \mathscr{E} & \longrightarrow \mathscr{M} \\ H & \longmapsto H \cdot M \end{cases} \tag{8}$$

est une isométrie. Elle se prolonge de manière unique en une isométrie

$$\begin{cases} \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M) & \longrightarrow \mathscr{M} \\ H & \longmapsto H \cdot M. \end{cases} \tag{9}$$

Pour tout $H \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$, on appelle intégrale stochastique de H avec M, le processus $H \cdot M$, souvent noté $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s$ pour tout t. Alors, le processus $H \cdot M$ satisfait

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = H \cdot \langle M, N \rangle_t =: \int_0^t H_s \, \mathrm{d} \langle M, N \rangle_s , \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Démonstration. Le caractère d'isométrie de l'application définie par (8) se démontre, comme dans le cas brownien, comme conséquence du fait que $\left((H \cdot M)_t^2 - \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d} \langle M \rangle_s , \, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale. Elle se prolonge donc en l'isométrie (9) par densité comme dans le chapitre précédent. Pour démontrer (10) on considère d'abord un processus $H \in \mathscr{E}$ de la forme

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i, t_i+1[}(t), \quad t \geq 0.$$

Alors, en notant pour tout i, la martingale

$$M_t^i = H_{t_i} \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right), \quad t \geq 0,$$

il est facile de vérifier avec la définition du crochet comme limite que pour tout i et tout t,

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle M^i, N \right\rangle_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} \left(\langle M, N \rangle_{t \wedge t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t \wedge t_i} \right) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d} \langle M, N \rangle_s ,$$

par définition d'un processus à variation à finie. On obtient alors (10) en passant à la limite par densité, voir le détail p.89-90 du livre de J.F. Le Gall. ☐

Remarque. Il est important de remarquer que la formule (10) caractérise $H \cdot M$. En effet, si il existe $M' \in \mathscr{M}$ satisfaisant (10), alors par bilinéarité on obtient que pour tout $N \in \mathscr{M}$, pour tout $t \geq 0$ on a $\langle H \cdot M - M', N \rangle_t = 0$. On peut appliquer cette dernière remarque à $N \equiv H \cdot M - M'$, pour conclure que $(H \cdot M - M')_t = 0$ p.s. pour tout t.

Remarque. En se rappelant que $\langle B \rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$, il est immédiat de voir que l'intégrale de Wiener est un cas particulier de l'intégrale stochastique (arrêtée en l'horizon fini $T > 0$) définie dans le chapitre précédent.

La propriété suivante est importante pour les calculs,

Proposition.

Soient $M \in \mathscr{M}$, $K \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$ et $H \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(K \cdot M)$. Alors $HK \in L^2_{\text{prog}}(M)$ et on a pour tout t,

$$((HK) \cdot M)_t = (H \cdot (K.M))_t.$$

Démonstration. D'après la relation (10), on a pour tout $t \geq 0$,

$$\langle K \cdot M \rangle_t = K \cdot \langle M, K \cdot M \rangle_t = \left(K \cdot \left(\int_0^{\cdot} K_s \, \mathrm{d} \langle M \rangle_s \right) \right)_t = \int_0^t K^2 \, \mathrm{d} \langle M \rangle_t ,$$

où l'on utilise le fait que pour tout fonction f de $L^1(\, \mathrm{d} \langle M \rangle_t)$, en notant $A_t = \int_0^t f(s) \, \mathrm{d} \langle M \rangle_s$, le processus $(A_t,\, t \geq 0)$ est à VF et l'on a la formule de changement de variable

$$\int_0^t f(s) \, \mathrm{d}A_s = \int_0^t f^2(s) \, \mathrm{d} \langle M \rangle_s , \quad t \geq 0.$$

Toujours par changement de variable on a donc

$$\int_0^\infty H_s^2 K_s^2 \, \mathrm{d} \langle M \rangle_s = \int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d} \langle K.M \rangle_t ,$$

d'où la première assertion. Ensuite, pour tout $N \in \mathscr{M}$ on a d'après (10), pour tout $t \geq 0$,

$$\langle (HK) \cdot M, N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s \, \mathrm{d} \langle M, N \rangle_s = \int_0^t H_s \, \mathrm{d} \langle K \cdot M, N \rangle_s = \langle H \cdot (K \cdot M), N \rangle_t ,$$

et l'on conclut avec la remarque précédente sur la caractérisation de l'intégrale stochastique par (10). □

On peut déduire simplement des différentes propriétés de martingales introduites dans cette section, les égalités de moments suivantes :

Proposition (Egalités de moments pour l'intégrale stochastique)**.**

Soient $M, N \in \mathscr{M}$, $H \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$ et $K \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(N)$. Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[(H \cdot M)_t\right] = 0;$$
$$\mathbb{E}\left[(HK) \cdot \langle M, N \rangle_t\right] = \mathbb{E}\left[(H \cdot M)_t (K \cdot N)_t\right].$$

Démonstration. La première formule découle de la propriété de martingale de $H \cdot M$. La deuxième, du fait qu'en appliquant (10) deux fois, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_t = H \cdot \langle M, K \cdot N \rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N \rangle_t ,$$

et du fait que le processus $t \longmapsto (H \cdot M)_t (K \cdot N)_t - \langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_t$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale par définition du crochet croisé. □

2.2 Extension aux semi-martingales continues

On peut étendre la définition de l'intégrale stochastique aux martingales locales, comme le montre le résultat suivant.

Théorème.

Soit M une martingale locale issue de 0. On définit l'ensemble

$$\mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M) = \left\{ \text{processus } H \ \mathscr{F}_t\text{−progressif tels que pour tout } t, \int_0^t H_s^2 \ \mathrm{d}\langle M \rangle_s < \infty \text{ p.s.} \right\}.$$

Alors, pour tout $H \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H \cdot M$, telle que pour toute martingale locale N et pour tout t,

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = H \cdot \langle M, N \rangle_t \left(= \int_0^t H_s \ \mathrm{d}\langle M, N \rangle_s\right).$$

De plus, si $K \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M)$ et $H \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(K \cdot M)$, alors $HK \in L^2_{\text{loc}}(M)$ et on a pour tout t,

$$((HK) \cdot M)_t = (H \cdot (K.M))_t.$$

Si $M \in \mathscr{M}$ et $H \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}(M)$, alors la définition de $H \cdot M$ étend celle du Théorème précédent.

Démonstration. L'on se ramène au contexte des martingales bornées dans L^2 en localisant les martingales, en utilisant des suites de temps d'arrêt bien choisis. Le lecteur est renvoyé vers les pages p.86-87 du livre de J.F. Le Gall. □

On peut alors définir une intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue, de la façon suivante,

Définition.

Pour toute semi-martingale continue $X = M + A$, pour tout $H \in \mathscr{L}^2_{\text{loc}}(M)$, on définit l'intégrale stochastique de H par rapport à X par

$$(H \cdot X)_t = (H \cdot M)_t + (H \cdot A)_t,$$

où le premier point représente l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale, et le deuxième, l'intégrale contre un processus à VF.

On a alors

Proposition.

Soit $X = M + A$ une semi-martingale continue et $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$. Alors, pour tout $t \geq 0$ et toute suite de subdivisions $\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_{p_k}^k = t, \, k \in \mathbb{N}^*\}$ de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, pour tout $t \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{p_k - 1} H_{t_i^k} \left(X_{t_{i+1}^k} - X_{t_i^k} \right) \xrightarrow[k \to \infty]{(\mathbb{P})} (H \cdot X)_t.$$

Démonstration. Le résultat est vrai si X est une vraie martingale bornée dans L^2 par définition de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, par continuité de l'isométrie $H \mapsto H \cdot M$ et par densité de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{M}$. Il reste vrai pour une martingale locale en localisant, voir le détail p.96. Il est vrai également si X est un processus à VF par la caractérisation limite de ces processus. □

3 Formules d'Itô

Comme on l'a vu, une formule générale permet d'écrire toute fonction (suffisamment régulière) du mouvement brownien comme une semi-martingale, en un sens que nous avons maintenant défini de façon précise. Comme on va le voir, on peut généraliser cette approche en remplaçant le mouvement brownien par n'importe quelle semi-martingale continue.

3.1 Formule d'Itô pour l'intégrale stochastique

Théorème (Formule d'Itô)**.**

Soient X^1, X^2, ... X^p des semi-martingales continues, et F une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Alors, le processus $t \mapsto F(X_t^1, ..., X_t^p)$ est une semi-martingale continue, dont le développement s'écrit pour tout $t \geq 0$,

$$F(X_t^1, ..., X_t^p) = F(X_0^1, ..., X_0^p) + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s^1, ..., X_s^p) \, \mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s^1, ..., X_s^p) \, \mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s.$$

Démonstration. La preuve généralise celle de la formule d'Itô pour l'intégrale de Wiener, en partant du développement de Taylor avec reste intégral de F, et en utilisant la caractérisation de l'intégrale stochastique contre une semi-martingale comme une limite en probabilité, vue dans la Proposition précédente. Voir le détail (technique) de la preuve dans le livre de J.F. Le Gall, pp. 91–93. □

Corollaire (Formule d'Intégration par parties)**.**

Si X^1 et X^2 sont deux semi-martingales continues, alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$X_t^1 X_t^2 = X_0^1 X_0^2 + \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}X_s^1 + \int_0^t X_s^1 \, \mathrm{d}X_s^2 + \left\langle X^1, X^2 \right\rangle_t.$$

Démonstration. On applique la formule précédente pour $d = 2$ à la fonction $f(x^1, x^2) = x^1 x^2$. □

3.2 Conséquences

Définition.

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale locale, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *martingale exponentielle* de paramètre λ de la martingale, le processus $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \geq 0)$ défini par

$$\mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t\right), \quad t \geq 0.$$

Remarquons que ces derniers processus généralisent les martingales exponentielles du mouvement brownien, vues dans les chapitres précédents. On a alors le résultat suivant,

Proposition.

Pour toute martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$ et tout λ, $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.

Démonstration. On applique la formule d'Itô en dimension 2 à la fonction $F : (x_1, x_2) \longmapsto \exp\left(\lambda x_1 - \frac{\lambda^2}{2} x_2\right)$ et aux semi-martingales $(M_t,\, t \geq 0)$ et $(\langle M \rangle_t,\, t \geq 0)$. Comme

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lambda F(x_1, x_2), \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{\lambda^2}{2} F(x_1, x_2); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}(x_1, x_2) = \lambda^2 F(x_1, x_2),$$

et en remarquant que pour tout t, $\langle\langle M \rangle\rangle_t = \langle\langle M \rangle, M\rangle_t = 0$ p.s., on obtient que p.s., pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\lambda(M)_t &= 1 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \,\mathrm{d}M_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s \\ &= 1 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \,\mathrm{d}M_s,\end{aligned}$$

qui est par définition une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. □

On en déduit le

Théorème (Caractérisation de Lévy)**.**

Pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$, $(M_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien si et seulement si

$$\langle M \rangle_t = t, \quad t \geq 0, \quad \text{p.s.}. \tag{11}$$

Démonstration. Une implication est déjà connue ; démontrons la réciproque. Supposons que (11) est vérifiée. Alors, la Proposition précédente montre que pout tout $T > 0$, le processus $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \in [0, T])$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale bornée, donc une vrae $\mathscr{F}_t$-martingale. Donc, pour tout $s < t \leq T$, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{E}_\lambda(M)_t}{\mathcal{E}_\lambda(M)_s} | \mathscr{F}_s\right] = 1 \quad \text{p.s.},$$

ce qui est équivalent à dire que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(M_t - M_s)\right) | \mathscr{F}_s\right] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(s - t)\right) \quad \text{p.s.},$$

ou encore, pour tout $A \in \mathscr{F}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(\lambda(M_t - M_s)\right)\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(s - t)\right).$$

On peut alors facilement généraliser le raisonnement précédent à tout λ complexe. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient que

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(ix(M_t - M_s)\right)\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \exp\left(-\frac{x^2}{2}(s - t)\right). \tag{12}$$

Ceci implique, tout d'abord, en posant $A \equiv \Omega$, que la fonction caractéristique de $M_t - M_s$ vaut en tout x,

$$\varphi_{M_t - M_s}(x) = \mathbb{E}\left[\exp\left(ix(M_t - M_s)\right)\right] = \exp\left(-\frac{x^2}{2}(s - t)\right),$$

ce qui signifie exactement que $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. De plus, (12) implique que $M_t - M_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$. On peut généraliser ce raisonnement à une famille finie d'accroissements. On obtient que pour tout T, $(M_t,\, t \in [0, T])$ est un processus de Lévy à trajectoires continues sur $[0, T]$. Comme ceci est vrai pour tout T, $(M_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. □

On peut même généraliser cette approche,

Théorème (Théorème de Dubins-Schwarz).

Pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale issue de 0 $(M_t,\, t \geq 0)$ telle que $\langle M \rangle_\infty = +\infty$ p.s., il existe un mouvement brownien $(B_t,\, t \geq 0)$ (adapté par rapport à une autre filtration !) tel que

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t}, \quad t \geq 0, \qquad \text{p.s..}$$

Démonstration. Voir le livre de J.F. Le Gall, pp. 103–105. □

Le résultat précédent montre que *via un changement de temps*, toute martingale locale issue de 0 est un mouvement brownien.

On a finalement le résultat suivant, admis, qui nous apprend que toute martingale peut s'écrire comme une intégrale de Wiener,

Théorème (Théorème de représentation des martingales).

Pour toute $\mathscr{F}_t$- martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ bornée dans L^2 (resp. martingale locale) issue de 0, il existe un unique processus $(H_t,\, t \geq 0)$ de $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}(B)$ (resp. de $\mathscr{L}^2_{\text{loc}}(B)$), où $(B_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien, tel que p.s.

$$M_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s, \quad t \geq 0.$$

Ce résultat est particulièrement utile pour simuler l'évolution d'un actif financier. Sur un espace de probabilité adéquat tel que le portefeuille auto-financé qui le simule soit une $\mathscr{F}_t$-martingale, on peut représenter ses trajectoires comme celles d'une intégrale stochastique, que l'on peut approcher par un schéma d'interpolation des trajectoires d'un mouvement brownien.

4 Théorème de Girsanov

Dans cette brève dernière section, nous introduisons un outil très utile pour construire la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, i.e., la mesure de probabilité sous laquelle le prix du sous-jacent actualisé est une martingale. Comme on l'a vu, cette mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ est la probabilité initiale $\mathbb{P}$, si l'on suppose que ce prix est donné par le processus de Black & Scholes.
Rappelons que la dérivée de Radon-Nikodyn d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ (où $\mathbb{P}^*$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$) sur la tribu $\mathscr{A}$, est l'unique fonction

$$h = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathscr{A}},$$

intégrable par rapport à $\mathbb{P}$, vérifiant $\mathbb{P}^*(A) = \int_A h \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. On a alors en particulier, pour toute v.a. F $\mathscr{A}$-mesurable et $\mathbb{P}$-intégrable, $\mathbb{E}^*[F] = \mathbb{E}[Fh]$, où $\mathbb{E}^*[.]$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^*$. Remarquons que

Proposition.

Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, $(\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$ une filtration complète et pour tout t,

$$D_t = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t}. \tag{13}$$

Alors, le processus $(D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale strictement positive sous $\mathbb{P}$.

Démonstration. Adaptabilité et intégrabilité sont vérifiées par hypothèse. Finalement, pour tout $s < t$, pour tout $A \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ on a

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_t\right] = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_s\right],$$

ce qui signifie exactement que $\mathbb{E}\left[D_t|\mathscr{F}_s\right] = D_s$, $\mathbb{P}$-p.s.. □

On a le résultat suivant,

Théorème (Théorème de Girsanov)**.**

Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, et $(D_t,\, t \geq 0)$ la martingale associée à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ par (13). Alors, il existe une unique martingale locale $(L_t,\, t \geq 0)$ tell que $(D_t,\, t \geq 0) = (\mathcal{E}_1(L)_t,\, t \geq 0)$. De plus, pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$, le processus $(M^*_t,\, t \geq 0)$ défini par

$$M^*_t = M_t - \langle M, L\rangle_t\,, \quad t \geq 0,$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. Pour la première assertion, remarquons que la martingale $(D_t,\, t \in [0,T])$ est strictement positive. Soit la semi-martingale $(L_t,\, t \geq 0)$ définie par

$$L_t = \mathrm{Log} D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s}\, \mathrm{d}D_s, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

On a alors, clairement,

$$\langle L\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{D_s^2}\, \mathrm{d}\langle D\rangle_s\,.$$

Donc, d'après la formule d'Itô, on a p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\, D_t &= \mathrm{Log}\, D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s}\, \mathrm{d}D_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{D_s^2}\, \mathrm{d}\langle D\rangle_s \\ &= L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\,,\end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $D_t = \mathcal{E}_1(L)_t$ pour tout $t \leq T$. Ensuite, montrons que si $(X,\, t \geq 0)$ est $\mathscr{F}_t$-adapté et $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$, alors $(X,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$. Pour le vérifier, remarquons que pour tout t, par définition de la dérivée de Radon-Nikodyn,

$$\mathbb{E}^*\left[|X_t|\right] = \mathbb{E}\left[|X_t D_t|\right] < \infty.$$

Ensuite, pour tout $s < t$ et tout $A \in \mathscr{F}_s$, comme $A \in \mathscr{F}_t$ la v.a. $\mathbf{1}_A X_t$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable, et donc

$$\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_A X_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X_t D_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X_s D_s\right] = \mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_A X_s\right],$$

où l'on utilise la propriété de martingale sous $\mathbb{P}$ de $(X_t S_t,\, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$ dans la deuxième égalité. Cela signifie exactement que

$$X_t = \mathbb{E}^*\left[X_t|\mathscr{F}_s\right] = X_s, \quad \mathbb{P}^* - \text{ p.s.},$$

et donc que $(X_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$. Ceci implique en particulier que pour tout $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt τ, tout processus adapté et arrêté $(X^\tau,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$ dès que $((XD)^\tau_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$. Ceci implique à son tour que pour tout processus $\mathscr{F}_t$-adapté $(X_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$ dès que $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}$. (On applique le raisonnement précédent à toute suite $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ de temps d'arrêt qui réduit $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ et tout $n \in \mathbb{N}$.)

On applique cette observation au processus $(M_t^*,\, t \geq 0)$. La formule d'intégration par parties nous donne que $\mathbb{P}^*$-p.s. pour tout t,

$$\begin{aligned} M_t^* D_t &= M_0^* D_0 + \int_0^t M_s^* \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s^* + \langle M^*, D\rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^* \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s - \int_0^T D_s \,\mathrm{d}\left\langle M, L\right\rangle_s + \langle M, D\rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^* \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s - \int_0^T D_s \frac{1}{D_s} \,\mathrm{d}\left\langle M, D\right\rangle_s + \langle M, D\rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^* \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s, \end{aligned}$$

où l'on utilise (14) dans la troisième égalité. Ceci montre que $(M_t^* D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}$, et donc, d'après l'observation précédente, que $(M_t^*,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$. □

Remarquons en particulier le résultat suivant,

Corollaire.

Soit $(B_t,\, t \in [0,T])$, un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ et $(H_t,\, t \in [0,T])$ un processus de $\mathscr{L}^2_{\mathrm{prog}}(B)$. Soit λ un réel et $(D_t,\, t \in [0,T]) := (\mathcal{E}_\lambda(H \cdot B),\, t \in [0,T])$. Soit $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilité définie par

$$D_T = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_T}. \tag{15}$$

Alors, le processus $(B_t^*,\, t \in [0,T])$ défini par

$$B_t^* = B_t - \int_0^t H_s \,\mathrm{d}s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. Remarquons que $\mathbb{P}^*$ définie par (15) définit bien une mesure de probabilité. En effet, c'est par (15) une mesure σ-finie, telle que

$$\mathbb{P}^*(\Omega) = \int_\Omega D_t \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[D_T\right] = 1.$$

Ensuite, on remarque que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathscr{F}_T$ et donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}\left[D_T | \mathscr{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_T | \mathscr{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_T\right] = \mathbb{P}^*(A),$$

ce qui montre que (13) est vérifiée pour tout $t \leq T$. On peut donc appliquer le Théorème de Girsanov à $(L_t,\, t \in [0,T]) := ((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T])$ et $(M_t,\, t \in [0,T]) := (B_t,\, t \in [0,T])$ pour conclure que le processus défini pour tout $t \leq T$ par

$$B_t - \langle B, H \cdot B\rangle_t = B_t - \int_0^T H_s \,\mathrm{d}s = B_t^*$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$. Cette martingale locale est de crochet donné par

$$\langle B^*\rangle_t = \langle B\rangle_t = t, \quad t \leq T,$$

ce qui conclut la preuve d'après la caractérisation de Lévy. □