Équations différentielles : Existence et unicité des solutions

Olivier Fercoq

Télécom Paris – MACS205

Problème de Cauchy

Équation sur la fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$:

$$y(t_0) = y_0$$
$$y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in I.$$

Données du problème :

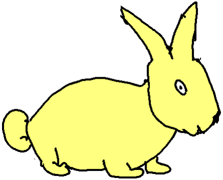
- l'intervalle de définition $I \subset \mathbb{R}$
- la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
  continue en y et intégrable en t
- la condition initiale (t_0, y_0) où $t_0 \in \mathring{I}$

Exemple : les équations du mouvement

q est la position, V est l'énergie potentielle

$$mq'' = -\nabla V(q) \Leftrightarrow \begin{cases} mq' = p \\ p' = -\nabla V(q) \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \text{ et } f(t, y) = f\left(t, \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p/m \\ -\nabla V(q) \end{bmatrix}.$$



Existence et unicité locale

Theorem (Cauchy-Lipschitz)

Si $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y alors $\exists T > 0$ et $\exists ! y : [t_0 - T; t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ solution du problème de Cauchy.

- f C^1 $\Rightarrow$ f localement lipschitzienne
- Preuve : point fixe de Banach

Unicité globale

Theorem (Unicité globale)

Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielle sur I (leur condition initiale peut être différente), avec f localement lipschitzienne en y. Si $\exists t_1$ tel que $y_1(t_1) = y_2(t_1)$, alors $y_1(t) = y_2(t), \forall t \in I$.

- Les courbes sur le diagramme de phase ne se coupent pas