Chapitre 3
Introduction au calcul stochastique

Table des matières

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions essentielles du calcul stochastique et pour commencer, nous définissons une intégrable par rapport aux variations du mouvement brownien, l'intégrale stochastique.

1 Motivations en mathématiques financières

1.1 Quelques rappels

Nous allons modéliser l'évolution de portefeuilles dans le temps (sur plusieurs unités de temps). On suppose que le marché est constitué par

1. un actif non risqué, rémunéré par le taux actuariel r ;
2. d actifs risqués dont les prix respectifs à chaque instant sont aléatoires.

Notons les quantités suivantes,

— $S_0^0 \equiv 1$ valeur du numéraire à n = 0 ;
— Pour tout $n \in [\![0, T]\!]$, $S_n^0 = (1+r)^n$, la valeur du numéraire à l'instant n ;
— Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, S_0^i, la valeur (déterministe, connue) à 0 de l'actif risqué i ;
— Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et tout $n \in [\![0, T]\!]$, S_n, la valeur (aléatoire) de l'actif risqué i à l'instant n.

Définition 1. *Un portefeuille $H = (H_n^0, \dots, H_n^d)_{n \in [\![0,T]\!]}$ est un ensemble d'unités de ces actifs, dont la composition évolue dans le temps. Pour tout $n \in [\![0, T]\!]$, pour tout $i \in [\![0, d]\!]$ H_n^i désigne le nombre d'unités de l'actif i dans le portefeuille à l'instant n. La valeur du portefeuille à l'instant n est alors donnée par*

$$V_n(H) = \sum_{i=0}^{d} H_n^i S_n^i.$$

Définition 2. *Un portefeuille $H = (H_n^0, \dots, H_n^d)_{n \in [\![0,T]\!]}$ est dit* autofinancé *si*

1. *Pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, H_0^i est intégrable.*
2. *Pour tout n, $H_n^i, i = 0, \dots, d$ sont mesurables par rapport à la tribu $(\mathscr{F}_n)$, où*

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_k^i,\ k \in [\![0, n]\!],\ i \in [\![1, d]\!]\right).$$

3. *Pour tout n,*

$$\sum_{i=0}^{d} H_{n-1}^i S_n^i = \sum_{i=0}^{d} H_n^i S_n^i = V_n(H),$$

ce qui signifie que le capital ne peut qu'être réinvesti et redistribué à tout instant, sans ajout ni perte d'actifs depuis l'extérieur.

Définition 3. *Soit $n \in [\![0, T]\!]$, la valeur actualisée du portefeuille H à l'instant n est donnée par*

$$\widetilde{V}_n(H) = \frac{V_n(H)}{S_n^0},$$

et pour tout i, la valeur actualisée de l'actif i à l'instant n est donnée par

$$\widetilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{S_n^0}.$$

Ce sont donc respectivement les valeurs du portefeuille et d'une unité d'actif i, en argent constant.

Proposition 1. *Soit H un portefeuille autofinancé, alors $\forall n \in [\![1, T]\!]$ on a*

$$\widetilde{V}_n(H) = V_0(H) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=0}^{n-1} H_k^i (\widetilde{S}_{k+1}^i - \widetilde{S}_k^i).$$

Jusqu'à la fin de la section, on suppose que $d = 1$, *i.e.* il n'y a qu'un seul unique actif risqué (qui peut lui-même représenter un groupe d'actifs, un portefeuille, un fonds, etc.). On note alors pour tout n, S_n et $\widetilde{S}_n$, le prix et le prix actualisé de l'actif risqué considéré.

Théorème 1 (Théorème fondamental de la modélisation financière). *Le marché est sans OA si et seulement si il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que, sous $\mathbb{P}$, $(\widetilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. $\mathbb{P}$ est alors appelée probabilité risque neutre.*

Corollaire 1. *Soit H un portefeuille autofinancé. Sous l'hypothèse d'absence d'OA, $\widetilde{V}_n(H)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$.*

Définition 4. *On dit que l'actif ξ de maturité T est simulable si il existe un portefeuille autofinancé H tel que $V_T(H) = \xi$ p.s.*

Simuler un actif ξ (i.e. trouver le bon Portefeuille auto-financé le simulant) revient donc à déterminer une stratégie de couverture pour ξ, c'est-à-dire, pour pouvoir payer à T le prix que vaudra cet actif à cet instant.

Proposition 2. *Soit un marché sans OA, soit ξ un actif de maturité T et H simulant ξ. On a alors la formule dite de la* moyenne actualisée *:*

$$V_n(H) = \frac{S_n^0}{S_T^0}\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{n-T}\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n], \quad n \in [\![0,T]\!].$$

1.2 Passage au temps continu dans le modèle de CRR

Définition 5. *Le modèle de CRR est un modèle binomial pour lequel, à chaque instant, le rendement R_n de l'actif risqué ne peut prendre que 2 valeurs. Formellement, on note pour tout $n \in [\![0,T-1]\!]$,*

$$R_{n+1} = \frac{S_{n+1}-S_n}{S_n}.$$

On suppose alors que pour tout tout $n \in [\![0,T-1]\!]$, R_n ne peut prendre que deux valeurs h ("haut") et b ("bas"). On a alors :

- *$b < r < h$,*
- *les v.a. $(R_n)_{1\le n\le T}$ sont i.i.d. de la loi suivante sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$:*

$$\mathbb{P}(R_n = b) = \frac{h-r}{h-b}; \qquad \mathbb{P}(R_n = h) = \frac{r-b}{h-b}.$$

On va se rapprocher d'un contexte plus réaliste, où la gestion du portefeuille peut se faire *à tout instant* sur l'intervalle continu $[0,T]$, en passant à une limite d'échelle. On procède pour cela à la même normalisation que pour le Théorème de Donsker : pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S^{(N)}_{\frac{n}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}S_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

et $(S_t^{(N)})_{t\in[0,T]}$, l'interpolation linéaire de la suite $\left\{S^{(N)}_{\frac{n}{N}}\right\}_{n\in[\![0,NT]\!]}$ sur l'intervalle $[0,T]$. Le Théorème de Donsker implique que

Théorème 2. *La suite de processus $\left\{\left(S_t^{(N)},\, t\in[0,T]\right);\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ converge en loi, quand N tend vers l'infini, vers un mouvement brownien géométrique $(S_t,\, t\in[0,T])$.*

En particulier, l'on peut facilement construire un cas particulier (symétrique) du modèle de CRR convergeant vers le processus de Black & Scholes. On remarque en particulier que sous cette limite d'échelle, la valeur actualisée du numéraire à tout instant $t \le T$ est donnée par $S_t^0 = e^{rt}$, et donc que la valeur actualisée de l'actif risqué de Black et Scholes, donné par

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt}S_t,\; t\le T,$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale, où $(\mathscr{F}_t,\, t\ge 0)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien de référence. En particulier, on a vu qu'une stratégie de couverture pour un actif conditionnel ξ (construit à partir de l'actif risqué de prix $(S_n)_{0\le n\le T}$) à T, c'est-à-dire, (la valeur actualisée d') un portefeuille autofinancé sur $[\![0,T]\!]$ simulant ξ, était donnée par une martingale $\left(\widetilde{V_n}(H)\right)_{0\le n\le T}$ de la forme

$$\widetilde{V}_n(H) = V_0(H) + \sum_{k=0}^{n-1} H_k(\widetilde{S}_{k+1} - \widetilde{S}_k), \quad n\in[\![0,T]\!].$$

Il est donc tentant de vouloir passer à la limite d'échelle dans l'équation précédente, et d'écrire, en un sens à préciser, que la valeur actualisée du portefeuille en temps continu $\left(\widetilde{V}_t(H),\, t\ge 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, et que

$$\widetilde{V}_t(H) = V_0(H) + \int_0^t H_u \;\mathrm{d}S_u, \quad t\in[0,T],$$

où le sens de l'intégrale ci-dessus est à préciser. L'objectif de ce chapitre est de construire rigoureusement cet objet.

2 Processus à variation finie

2.1 Fonction à variation finie

Dans toute la section, on fixe $T > 0$.

Définition 6. *On dit que la fonction continue $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, nulle en 0, est* à variation finie *("à VF) sur $[0,T]$ si il existe une mesure μ signée (i.e., s'écrivant comme différence de deux mesures finies positives) telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, $a(t) = \mu([0,t])$. On note alors $[\mu|$ la somme de ces deux mesures finies positives, et pour toute fonction mesurable $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{[0,T]} f(s)\,|\mu|(\,ds) < \infty$, pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$\int_0^t f(s) \;\, da(s) = \int_{[0,t]} f(s)\,\mu(\,ds).$$

Proposition 3. *Une fonction continue, nulle en 0, est à VF sur $[0,T]$ si et seulement si elle peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes et continues sur $[0,T]$, et nulles en 0.*

Démonstration. L'application

$$\begin{cases} \{\text{Fonctions croissantes c.à.d. : } [0,T] \to \mathbb{R}\} & \longrightarrow \text{Mesures positives finies sur } [0,T] \\ f & \longmapsto \mu \text{ telle que } \mu([0,t]) = f(t) \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

est bijective. □

Définition 7. *on dit que la fonction continue $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, nulle en 0, est à variation finie, si pour tout T la restriction de a à l'intervalle $[0,T]$ est à variation finie sur $[0,T]$.*

Proposition 4. *Soit a une fonction à VF sur $[0,T]$. Alors, pour tout $t \geq 0$ et toute suite $\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ de subdivisions emboîtées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, pour toute f continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$,*

$$\int_0^t f(s) \;\, da(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} f(t_i^n) \left(a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n)\right).$$

Démonstration. Voir les preuves de la Proposition 4.1 et du Lemme 4.1 du Livre de J.F. Le Gall. □

2.2 Processus à variation finie

A partir de maintenant et pour tout le chapitre, on fixe un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une filtration de référence $(\mathscr{F}_t,\ 0 \leq t \leq \infty)$, satisfaisant aux conditions habituelles.

Définition 8. *On dit que le processus $\mathscr{F}_T$-adapté $(A_t,\ t \geq 0)$ est* à variation finie *si p.s. la fonction $t \mapsto A_t$ est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$.*

Rappelons le résultat suivant,

Proposition 5. *Soit $(B_t,\ t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} \left(B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}}\right)^2 = 1, \quad p.s..$$

Démonstration. Soit pour tout n, $S_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2$. On a clairement pour tout n,

$$\mathbb{E}\left[S_n\right] = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left(B_{2^{-n}}\right)^2\right] = 2^n 2^{-n} = 1;$$
$$\mathrm{Var}\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(\left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(2^{-n} G^2\right) = 2^n 2^{-2n} \mathrm{Var}\left(G^2\right) = 2^{-n} \mathrm{Var}\left(G^2\right),$$

d'après l'indépendance des accroissements, en notant G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ceci implique avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout n,

$$\mathbb{P}\left[|S_n - 1| > \epsilon\right] \leq \frac{2^{-n} \mathrm{Var}\left(G^2\right)}{\epsilon^2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[|S_n - 1| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathrm{Var}\,(G^2)}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, on a donc

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \{|S_n - 1| > \epsilon\}\right] = 0,$$

ce qui est exactement le résultat annoncé. □

Or, on peut montrer que ce résultat implique alors que la série $\sum_{i=0}^{2^n-1} \left|B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}}\right|$ diverge presque sûrement. Donc, d'après la proposition précédente appliquée à $f(.) \equiv 1$,

Le mouvement brownien $(B_t,\, t \geq 0)$ n'est *pas* un processus à VF.

Or, on voudrait définir des quantités telles que $\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}B_s(\omega)$, qui n'est pas défini trajectoire par trajectoire. On va construire un objet approchant cette quantité en approchant des sommes discrètes telles que

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} f(t_i^n) \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right),$$

pour des subdivisions emboîtées de $[0, T]$ et des fonctions f bien choisies.

C'est tout l'objectif de la construction de l'intégrale stochastique (pour le mouvement brownien) et de l'intégrale stochastique (pour des martingales).

3 Construction de l'intégrale stochastique

Dans toute cette section, $(B_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien.

Définition 9. *On appelle processus élémentaire, une processus $(H_t,\, t \geq 0)$ de la forme*

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i, t_i+1[}(t), \quad t \geq 0,$$

où $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, et pour tout $i = 1, \ldots, n$, H_{t_i} est une v.a. $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable. On note $\mathscr{E}$, l'ensemble des processus élémentaires.

On a le résultat suivant,

Proposition 6. *Soit $H := (H_t,\, t \geq 0) \in \mathscr{E}$. On note pour tout t,*

$$I(H)_t = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + H_{t_k}(B_t - B_{t_k}), & t_k \leq t < t_{k+1},\, 0 \leq k \leq n; \\ I(H)_{t_n}, & t \geq t_n. \end{cases}$$

Alors :

1. *$(I(H)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale ;*
2. *Formule d'isométrie : pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left[(I_t(H))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s)^2\ ds\right].$$

3. *$\left((I(H)_t)^2 - \int_0^t (H_s)^2\ ds,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.*

Démonstration. On pose pour tout $i = 0, \ldots, n-1$,

$$M_t^i := H_{t_i}\left(B_{(t \vee t_i) \wedge t_{i+1}} - B_{t_i}\right), \quad t \geq 0, \quad t \geq 0.$$

1. On a clairement que pour tout $t \geq 0$, $I(H)_t = \sum_{i=0}^{n-1} M_t^i$. La question 1 de l'exercice 4 de la feuille de TD 2 montre donc que $(I(H)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale en tant que somme de n $\mathscr{F}_t$-martingales.

2. Découle du point 3 ;
3. Notons pour tout $t \geq 0$,

$$N(H)_t = (I(H)_t)^2 - \int_0^t (H_s)^2 \, \mathrm{d}s,$$
$$N^i(H)_t = (M_t^i)^2 - H_{t_i}^2(t \wedge t_{i+1} - t_i)\mathbf{1}_{t \geq t_i}, \; i = 0, ..., n-1.$$

On a clairement pour tout t,

$$N(H)_t = \sum_{i=0}^{n-1} N^i(H)_t + 2\sum_{i<j} M_t^i M_t^j.$$

Le processus $\left(\sum_{i=0}^{n-1} N^i(H)_t, \, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale d'après la question 3 de l'exercice 4 du TD2. Il reste à traiter la deuxième partie. Fixons $i < j$. Il est immédiat de voir que pour tout t, $M_t^i M_t^j$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable et intégrable (même raisonnement que dans la question 2 de l'exercice 4 du TD2). Soient maintenant $s \leq t$. Nous distinguons les cas suivants :

— Si $t < t_j$, alors on a $M_t^i M_t^j = M_s^i M_s^j = 0$ p.s..

— Si $s < t_j$ et $t \geq t_j$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_{t_j}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_{t_j}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= 0 = M_s^i M_s^j \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

— Si maintenant $t_j \leq s < t_{j+1}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(\mathbb{E}\left[\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_s\right) \mid \mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(B_s - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_s\right]\right) \\
&= H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(\mathbb{E}\left[B_{t \wedge t_{j+1}} - B_s\right] + \left(B_s - B_{t_j}\right)\right) \\
&= H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_s - B_{t_j}\right) \\
&= H_{t_i}\left(B_{(s \vee t_i) \wedge t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{(s \vee t_j) \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \\
&= M_s^i M_s^j \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

— Si finalement $t_{j+1} \leq s$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)H_{t_j}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \\
&= M_s^i M_s^j \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a donc

$$\mathbb{E}\left[2\sum_{i<j} M_t^i M_t^j \mid \mathscr{F}_s\right] = 2\sum_{i<j} M_s^i M_s^j, \quad \text{p.s.,}$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[N(H)_t \mid \mathscr{F}_s\right] = N(H)_s, \quad \text{p.s.,}$$

ce qui conclut la démonstration.

□

Fixons $T > 0$, et définissons les espaces suivants :

$$\mathscr{E}_T = \{ \text{ fonctions élémentaires de } [0,T] \text{ dans } \mathbb{R}\} ;$$
$$\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B) = \left\{\text{processus progressifs } (H, \, t \in [0,T]) \text{ tels que } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty\right\};$$
$$\mathscr{M}_T^2 = \{\text{martingales de carrés intégrables sur } [0,T]\} .$$

Notons pour tout $H := (H_t,\, t \geq 0) \in \mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B)$, $\parallel H \parallel_2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}s\right]$. Alors, on peut montrer que $(\mathscr{E}_T, \parallel . \parallel_2)$ est un espace de Banach dense dans l'espace de Banach $(\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B), \parallel . \parallel_2)$. De plus, $\mathscr{M}^2_T$ est lui-aussi un espace de Banach pour la norme définie pour toute $(M_t,\, t \in [0,T]) \in \mathscr{M}^2_T$ par

$$\parallel M \parallel_T = \mathbb{E}\left[(M_T)^2\right] = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[(M_t)^2\right].$$

Le résultat fondamental est le suivant,

Théorème 3. *Pour tout $H := (H_t,\, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{prog,T}(B)$, il existe une unique martingale de $\mathscr{M}^2_T$, notée $((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T]) = \left(\int_0^t H_s \;dB_s,\, t \in [0,T]\right)$ et appelée* intégrale stochastique *de H sur $[0,T]$, ayant les propriétés suivantes :*

1. *Formule d'isométrie : pour tout $t \in [0,T]$,*
$$\mathbb{E}\left[(H \cdot B)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s)^2 \;ds\right].$$
2. *Le processus $\left((H \cdot B)_t^2 - \int_0^t (H_s)^2 \;ds,\, t \in [0,T]\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.*
3. *Si $(H_t,\, t \in [0,T]) \in \mathscr{E}_T$, alors les processus $((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T])$ et $(I(H)_t,\, t \in [0,T])$ sont indistinguables.*
4. *Pour toute suite de $\{H^n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ de processus de $\mathscr{E}$ convergeant vers $(H_t,\, t \in [0,T])$ dans $\mathscr{L}^2_{prog,T}(B)$, la suite de processus $\{(I(H^n)_t,\, t \in [0,T])\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ converge dans $\mathscr{M}^2_T$ vers $((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T])$.*

Par ailleurs, l'application

$$\begin{cases} \mathscr{L}^2_{prog,T}(B) & \longmapsto \mathscr{M}^2_T; \\ H & \longmapsto ((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T]) \end{cases} \tag{2}$$

est linaire et continue.

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'application

$$\begin{cases} \mathscr{E}_T & \longmapsto \mathscr{M}^2_T; \\ H & \longmapsto (I(H)_t,\, t \in [0,T]) \end{cases}$$

est une isométrie. Il est en effet immédiat que c'est une application linéaire, qui conserve la norme. Par densité, elle se prolonge donc en une unique isométrie de $\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B)$ dans $\mathscr{M}^2_T$, d'où le point 3. En particulier, cette application est continue, d'où l'assertion 4, et l'on obtient l'assertion 2 par passage à la limite dans l'assertion 3 de la Proposition précédente, en considérant une suite de processus élémentaires $\{H^n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ convergeant vers H dans $(H,\, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B))$. L'assertion 1 s'en déduit par la propriété de martingale. □

Définissons maintenant l'ensemble de processus

$$\mathscr{L}^2_{\text{loc},T}(B) = \left\{\text{processus } (H_t,\, t \in [0,T]) \text{ progressifs tels que } \int_0^T H_s^2 \;\mathrm{d}s < \infty \text{ p.s.}\right\}.$$

Alors, on a clairement $\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B) \subset \mathscr{L}^2_{\text{loc},T}(B)$. Si le processus $(H_t,\, t \in [0,T])$ est un élément de $\mathscr{L}^2_{\text{loc},T}(B)$, alors on peut définir une intégrale stochastique en un sens plus faible. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe une suite croissante de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ tels que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ p.s., et satisfaisant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} H_s^2 \;\mathrm{d}s\right] < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On peut alors appliquer, pour tout n, le théorème précédent au processus

$$\left(\hat{H}^n_t,\, t \in [0,T]\right) := \left(H_t \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t),\, t \in [0,T]\right), \tag{3}$$

qui est un élément de $\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B)$. Il entraîne alors que pour tout n, le processus $\left((\hat{H}^n \cdot B)_t,\, t \in [0,T]\right)$ est une martingale de $\mathscr{M}^2_T$. Remarquons en particulier que d'après le théorème d'arrêt, on a alors $\mathbb{E}\left[(\hat{H}^n \cdot B)_t\right] = 0$. De même, d'après l'assertion 2, le processus $\left(\left((\hat{H}^n \cdot B)_t\right)^2 - \int_0^{\tau_n \wedge t} H_s^2 \;\mathrm{d}s,\, t \in [0,T]\right)$ est une martingale.

Définition 10. *Pour tout processus* $(H_t,\, t\in[0,T])\in\mathscr{L}^2_{loc,T}(B)$*, l'*intégrale stochastique au sens faible*, ou* intégrale stochastique *de* $(H_t,\, t\in[0,T])$ *contre le mouvement brownien, est définie par la limite presque-sûre*

$$(H\cdot B)_t=\lim_{n\to\infty}(\hat{H}^n\cdot N)_t,$$

où la suite de processus $\left(\hat{H}^n_t,\, t\in[0,T]\right)$ *est définie par (3).*

On dit aussi que l'intégrale stochastique définie dans le Théorème précédent est définie “au sens fort”. Pour tout processus adapté $(X_t,\, t\in[0,T])$ et tout $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt $\tau\le T$ p.s., on définit le processus “arrêté” $(X^\tau_t,\, t\in[0,T]):=(X_{\tau\wedge t},\, t\in[0,T])$. On peut alors facilement vérifier que pour tout n et tout t,

$$(\hat{H}^n\cdot N)_t=(H\cdot B)_{t\wedge\tau_n}=(H\cdot B)^{\tau_n}_t,$$

autrement dit chaque intégrale stochastique au sens fort est la version arrêtée de l'intégrale stochastique au sens faible correspondante.

Notations. Pour $(H_t,\, t\in[0,T])\in\mathscr{L}^2_{\text{loc},T}(B)$, On notera souvent pour tout t,

$$(H\cdot B)_t:=\int_0^t H_s\ \mathrm{d}B_s.$$

Par ailleurs, pour tout processus à VF $(X_t,\, t\in[0,T])$, et tout processus progressif $(K_t,\, t\in[0,T])$ tel que $\int_0^T|K_t|\ \mathrm{d}t<\infty$ p.s., on notera

$$(K\cdot X)_t:=\int_0^t K_s\ \mathrm{d}X_s.$$

Attention ! Le “point” ne signifie pas la même chose dans les deux dernières formules.

Proposition 7. *L'intégrale stochastique est linéaire : pour tous* $\left(h^1_t,\, t\in[0,T]\right)$ *et* $\left(H^2_t,\, t\in[0,T]\right)\in\mathscr{L}^2_{loc,T}(B)$*, pour tous* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$*,*

$$\int_0^t(\lambda_1H^1_s+\lambda_2H^2_s)\ dB_s=\lambda_1\int_0^t H^1_s\ dB_s+\lambda_2\int_0^t H^2_s\ dB_s.$$

Démonstration. La linéarité de l'application

$$\begin{cases}\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B) & \longmapsto \mathscr{M}^2_T;\\ H & \longmapsto ((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T])\end{cases}$$

a déjà été vue (c'est une isométrie). Elle se généralise à $\mathscr{L}^2_{\text{loc},T}(B)$ par passage à la limite sur n dans la définition de l'intégrale stochastique. □

Dans ce contexte, l'intégrale stochastique au sens faible $((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T])$ est appelée *martingale locale.* Cette notion est formalisée dans la définition suivante,

Définition 11. *On dit que le processus* $\mathscr{F}_t$*-adapté* $(M_t,\, t\in[0,T])$*, issu de 0 et à trajectoires continues, est une* $\mathscr{F}_t$-martingale locale *sur* $[0,T]$*, si il existe une suite croissante de* $\mathscr{F}_t$*-temps d'arrêt* $\{\tau_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ *tels que* $\tau_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}T$ *p.s., tels que pour tout* n*, le processus arrêté* $(M^{\tau_n}_t,\, t\ge0)$ *est une* $\mathscr{F}_t$*-martingale. On dit alors que la suite* $\{\tau_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ réduit *la martingale locale* $(M_t,\, t\ge0)$*. On note* $\mathscr{M}_{loc,T}$*, l'ensemble des* $\mathscr{F}_t$*-martingales locales sur* $[0,T]$*.*

Le résultat suivant est immédiat,

Proposition 8. *L'ensemble* $\mathscr{M}_{loc,T}$ *des* $\mathscr{F}_t$*-martingales locales sur* $[0,T]$ *est un espace vectoriel, et* $\mathscr{M}^2_T$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_{loc,T}$*.*

Démonstration. Si $(M_t,\, t\ge0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, alors la suite $\{n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ la réduit puisque pour tout n, $(M^n_t,\, t\ge0)$ est une martingale, car elle arrêtée par un temps d'arrêt borné. Soient maintenant $(M_t,\, t\in[0,T])$ et $(M'_t,\, t\in[0,T])$ deux $\mathscr{F}_t$-martingales locales, et soient $\{\tau_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ et $\{\tau'_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ les deux suite de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt qui les réduisent respectivement. Il est immédiat que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\{\tau_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ réduit le processus $((\lambda.M)_t,\, t\in[0,T]):=(\lambda M_t,\, t\in[0,T])$, qui est donc bien une $\mathscr{F}_t$-martginale locale. D'autre part, par exemple, comme pour tout n $(M^{\tau_n}_t,\, t\in[0,T])$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, $\left(M^{\tau_n\wedge\tau'_n}_t,\, t\in[0,T]\right)=\left((M^{\tau_n})^{\tau'_n}_t,\, t\in[0,T]\right)$ est également une $\mathscr{F}_t$-martingale. Donc la suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\wedge\tau'_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ réduit $(M_t,\, t\in[0,T])$, et de même, elle réduit $\{M'_t;\, n\in\mathbb{N}^*\}$. Par conséquent, $\{\tau_n\wedge\tau'_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ réduit $((M+N)_t,\, t\in[0,T]):=(M_t+N_t,\, t\ge0)$, qui est bien une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. □

Le résultat ci-après donne un critère pour vérifier qu'une martingale locale est une (vraie) martingale.

Proposition 9. *Toute martingale locale majorée par une variable aléatoire intégrable est une martingale (uniformément intégrable)*

Démonstration. Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale locale réduite par $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$. L'adaptabilité de $(M_t,\, t \geq 0)$ est vraie par définition, et l'intégrabilité de tout M_t, $t \geq 0$, découle des hypothèse. D'autre part, pour tous $s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_n \wedge t} | \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^{\tau_n} | \mathscr{F}_s\right] = M_s^{\tau_n} = M_{\tau_n \wedge s}, \qquad \text{p.s..}$$

Comme $\tau_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ p.s., en passant à la limite dans le terme de gauche par convergence dominée, et dans le terme de droite, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[M_t | \mathscr{F}_s\right] = M_s, \qquad \text{p.s..}$$

□

4 Formules d'Itô

4.1 Vers une formule de changement de variable

Soit un processus à variation finie $(X_t,\, t \in [0,T])$. La formule de changement de variables classique nous donne alors que p.s., pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, \mathrm{d}X_s, \quad t \leq T \qquad \text{p.s..} \tag{4}$$

Or, on a vu que $(B_t,\, t \in [0,T])$ n'est *pas* à variation finie. Comme on va le voir, la formule (4), en remplaçant $(X_t,\, t \in [0,T])$ par $(B_t,\, t \in [0,T])$, et l'intégrale contre un processus à VF par une intégrale stochastique, fait alors apparaître un second membre, "terme d'erreur", que nous allons préciser ci-après.

Nous commençons par traiter l'exemple suivant,

Exemple 1. A tout instant $t \leq T$, pour tout n et toute subdivision $0 \leq t_1^n < ... < t_n^n = t$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0 avec n, on associe la variable aléatoire

$$U_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n} \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right).$$

Pour tout n, le processus étagé H^n sur $[0,t]$ égal à $B_{t_i^n}$ sur tout intervalle $[t_i, t_{i+1})$ est un élément de $\mathscr{E}_T$, et par continuité des trajectoires du mouvement brownien, il est facile de voir que la suite de ces processus tend vers le mouvement brownien $(B_t,\, t \in [0,T])$ dans $\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(B)$. En particulier, on a pour tout t que, dans L^2,

$$\lim_{n\to\infty} U_t^n = \lim_{n\to\infty} I(H^n)_t = (B \cdot B)_t = \int_0^t B_s\, \mathrm{d}B_s.$$

Mais il est facile de voir que pour tout n et t, dans L^1,

$$U_t^n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left((B^2_{t_{i+1}^n} - B^2_{t_i^n}) + \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

En identifiant les limites, il vient que pour tout t,

$$2\int_0^t B_s\, \mathrm{d}B_s = B_t^2 - t.$$

Le théorème suivant généralise le résultat précédent,

Proposition 10 (Formule d'Itô pour le mouvement brownien)**.** *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, on a pour tout $t \leq T$,*

$$f(B_t) = \int_0^t f'(B_s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\ ds.$$

Démonstration. On a pour tout n, et toute subdivision $0 \leq t_1^n < ... < t_n^n = t$ de $[0,t]$ comme ci-dessus, d'après la formule de Taylor,

$$f(B_t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(B_{t_{i+1}^n}) - f(B_{t_i^n}) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i^n}) \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i^n}) \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)^2 + R^n,$$

où le reste intégral R^n tend en probabilité vers 0. Alors, en raisonnant comme dans l'exemple ci-dessus on a la convergence dans L^2

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i^n}) \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f'(B_s) \, \mathrm{d}B_s.$$

D'autre part, par la caractérisation limite des processus à variation finie, on a la convergence en probabilité

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f''(B_s) \, \mathrm{d}s.$$

Finalement, il suffit de remarquer que, comme $B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}$ a même loi que $B_{t_{i+1}^n - t_i^n}$ et donc, que $\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n} B_1$, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\mathbb{E}\left[(f''(B_{t_i^n})) \left(\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right)^2 \right] = (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \mathbb{E}\left[(f''(B_{t_i^n}))^2 (B_1^2 - 1) \right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

4.2 Semi-martingales continues

La Proposition 10 montre que pour toute fonction f de carré intégrable, le processus $(f(B_t), \, t \in [0,T])$ peut s'écrire sous la forme

$$f(B_t) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t K_s \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,T],$$

où $(H_s, \, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(B)$ et $(K_s, \, t \in [0,T])$ est un processus progressif tel que $\int_0^T |K_s| \, \mathrm{d}s < \infty$. On dit alors que $(f(B_t), \, t \in [0,T])$ est une *semi-martingale* (brownienne) sur $[0,T]$.

Définition 12. *Soit $(B_t, \, t \in [0,T])$ un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. On dit que le processus $(X_t, \, t \in [0,T])$ est une* semi-martingale *(brownienne) si il s'écrit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s \, dB_s + \int_0^t K_s \, ds, \qquad p.s. \text{ pour tout } t \leq T, \tag{5}$$

où $(H_s, \, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{loc,T}(B)$ et $(K_s, \, t \in [0,T])$ est un processus progressif tel que $\int_0^T |K_s| \, ds < \infty$.

Nous avons vu que le mouvement brownien n'est pas à variation finie. Nous généralisons ce résultat, en montrant qu'une martingale locale non identiquement nulle ne peut être un processus à variation finie.

Proposition 11. *Soit $(X_t, \, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale issue de 0. Alors si $(X_t, \, t \geq 0)$ est à variation finie, ce processus est indistinguable du processus nul. En particulier, $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \leq T$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, et posons

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 \, : \, \int_0^t |\, \mathrm{d}X_s| \geq n \right\}.$$

Alors, par la caractérisation du processus $\left(\int_0^t |\, \mathrm{d}X_t|, \, t \geq 0 \right)$ comme une limite, on voit que ce processus est $\mathscr{F}_t$-adapté, et donc τ_n est un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt. D'après la propriété 3. ci-dessus, le processus $(X^{\tau_n}, \, t \geq 0)$ est une martingale locale continue bornée par n, et donc une (vraie) martingale uniformément intégrable d'après la proposition précédente. D'après la propriété des martingales vue dans le Chapitre 2, on a alors pour tout $t \geq 0$ et pour toute subdivision $\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_{p_n}^k = t, \, k \in \mathbb{N}^*\}$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t^{\tau_n})^2 \right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left[\left(X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n} \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left| X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n} \right| \sum_{i=1}^k \left| X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n} \right| \right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left| X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n} \right| |\, \mathrm{d}X_t^{\tau_n}| \right] \\
&\leq n \mathbb{E}\left[\sup_{i=1}^k \left| X_{t_i^k}^{\tau_n} - X_{t_{i-1}^k}^{\tau_n} \right| \right].
\end{aligned}$$

L'intégrande de l'espérance précédente tend vers 0 p.s. avec k par la continuité p.s. des trajectoires de $(X_t^{\tau_n},\, t \geq 0)$. Comme ce processus est borné par n, par convergence dominée on obtient que l'espérance précédente tend vers 0 quand $k \to \infty$. En définitive, on a donc $\mathbb{E}\left[(X_t^{\tau_n})^2\right] = 0$, et donc $X_t^{\tau_n} = 0$ p.s.. Comme ceci est vrai pour tout n, on en déduit que $X_t = 0$ p.s.. □

Corollaire 2. *Toute semi-martingale $(X_t,\, t \in [0,T])$ a une unique décomposition de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\ dB_s + \int_0^t K_s\ ds, \quad t \leq T,$$

c'est à dire, si l'on a aussi

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{H}_s\ dB_s + \int_0^t \tilde{K}_s\ ds, \quad t \leq T,$$

alors $\tilde{H}_t = H_t$ et $\tilde{K}_t = K_t$ p.s. pour tout $t \leq T$. On appelle alors $\int_0^t H_s\ dB_s$ la "partie martingale locale" de $(X_t,\, t \in [0,T])$ et $\int_0^t K_s\ ds$ sa "partie à variation finie."

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale stochastique et de l'intégrale classique, pour tout $t \leq T$ on a

$$\int_0^t (H_s - \tilde{H}_s)\ \mathrm{d}B_s = \int_0^t (K_s - \tilde{K}_s)\ \mathrm{d}s, \quad t \leq T \text{ p.s.}.$$

Les deux processus (à gauche et à droite de l'égalité précédente) sont issus de 0 et sont donc à la fois des processus à VF et des martingales locales. Ils sont donc indistinguables du processus nul, ce qui implique que p.s. pour tout $t \leq T$, $H_t = \tilde{H}_t$ et $K_t = \tilde{K}_t$ p.s.. □

4.3 Crochet des semi-martingales

Définition 13. *Soient deux semi-martingales $(X_t^a,\, t \in [0,T])$ et $\left(X_t^b,\, t \in [0,T]\right)$ s'écrivant respectivement*

$$X_t^a = X_0^a + \int_0^t H_s^a\ dB_s + \int_0^t K_s^a\ ds, \quad t \leq T$$
$$X_t^b = X_0^b + \int_0^t H_s^b\ dB_s + \int_0^t K_s^b\ ds, \quad t \leq T.$$

Alors, le crochet *de $(X_t^a,\, t \in [0,T])$ avec $\left(X_t^b,\, t \in [0,T]\right)$ est le processus à VF $\left(\left\langle X^a, X^b\right\rangle_r,\, t \in [0,T]\right)$ défini par*

$$\left\langle X^a, X^b\right\rangle_t = \int_0^t H_s^a H_s^b\ ds, \quad t \leq T.$$

Si $X^a = X^b$, on notera pour tout $t \leq T$, $\langle X^a\rangle_t = \langle X^a, X^a\rangle_t$.

Remarquons que pour toute semi-martingale $(X_t,\, t \in [0,T])$ de la forme (5), on a par définition que p.s. pour tout $t \leq T$,

$$\langle X\rangle_t = \langle H \cdot B\rangle_t = \int_0^t H_s^2\ \mathrm{d}s. \tag{6}$$

Proposition 12. *Un crochet impliquant un processus à variation finie est toujours p.s. nul pour tout $t \leq T$.*

Démonstration. Si $(A_t,\, t \in [0,T])$ est un processus à variation finie on peut l'écrire de manière unique sous la forme de semi-martingale, comme

$$A_t = A_0 + \int_0^t K^A\ \mathrm{d}s = A_0 + \int_0^t H_s^A\ \mathrm{d}s + \int_0^t K^A\ \mathrm{d}s \qquad \text{p.s. pour tout } t \leq T,$$

où $H_t^A = 0$ p.s. pour tout $t \leq T$. On a donc, par définition, que pour toute semi-martingale $(X_t,\, t \in [0,T])$ de la forme (5),

$$\langle X, A\rangle = \int_0^t H_s H_s^A\ \mathrm{d}s = \int_0^t H_s 0\ \mathrm{d}s = 0 \qquad \text{p.s. pour tout } t \leq T.$$

□

Remarquons également que pour toutes semi-martingales X^a et X^b, le processus $\left(\left\langle X^a, X^b\right\rangle_t, \, t \in [0,T]\right)$ est à variation finie. En effet, il est p.s. à trajectoires continues, et peut simplement s'écrire comme différence de deux processus croissants, puisque pour tout $t \leq T$, p.s.

$$\left\langle X^a, X^b\right\rangle_t = \int_0^t H_s^a H_s^b \; \mathrm{d}s = \frac{1}{4}\int_0^t (H_s^a + H_s^b)^2 \; \mathrm{d}s - \frac{1}{4}\int_0^t (H_s^a - H_s^b)^2 \; \mathrm{d}s.$$

Par ailleurs, par définition de l'intégrale stochastique, et en particulier d'après l'assertion 2 du Théorème 3, le processus

$$\left(((H \cdot B)_t)^2 - \langle H \cdot B\rangle_t, \, t \in [0,T]\right) = \left(\left(\int_0^t H_s \; \mathrm{d}B_s\right)^2 - \int_0^t (H_s)^2 \; \mathrm{d}s, \, t \in [0,T]\right)$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. On peut en fait montrer que le processus $(\langle H \cdot B\rangle_t, \, t \in [0,T]) = \left(\int_0^t H_s^2 \; \mathrm{d}s, \, t \in [0,T]\right)$ est le *seul* processus à variation fini tel que le processus $\left(((H \cdot B)_t)^2 - \langle H \cdot B\rangle_t, \, t \in [0,T]\right)$ soit une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.

Exemple 2. Tout mouvement brownien standard $(B_t, \, t \in [0,T])$ est une semi-martingale de décomposition

$$B_t = B_0 + \int_0^t 1 \; \mathrm{d}B_s + \int_0^t 0 \; \mathrm{d}s, \quad t \leq T,$$

i.e. $H_t = 1$ et $K_t = 0$ p.s. pour tout $t \leq T$. En particulier, on a pour tout $t \leq T$,

$$\langle B\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = \int_0^t H_s \; \mathrm{d}s = \int_0^t 1 \; \mathrm{d}s = t \text{ p.s..}$$

Proposition 13. *L'application*

$$(X^a, X^b) \longmapsto \left\langle X^a, X^b\right\rangle$$

est bilinéaire et symétrique. En particulier, pour tout $t \leq T$ *et toutes semi-martingales* $(X_t^a, \, t \in [0,T])$ *et* $\left(X_t^b, \, t \in [0,T]\right)$ *on a*

$$\left\langle X^a, X^b\right\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\left\langle X^a + X^b\right\rangle_t - \langle X^a\rangle_t - \left\langle X^b\right\rangle_t\right), \quad t \leq T.$$

Démonstration. La première partie découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale stochastique, Corollaire 3. La deuxième est une conséquence immédiate de la bilinéarité. □

4.4 Généralisation de l'intégrale stochastique

Soit $M := (M_t, \, t \in [0,T])$, une $\mathcal{F}_t$-martingale locale. Définissons l'ensemble de processus

$$\mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(M) = \left\{\text{processus } (H_t, \, t \in [0,T]) \text{ progressifs tels que } \int_0^T H_s^2 \; \mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty \text{ p.s.}\right\}.$$

Alors, pour tout processus $(Y_t, \, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(M)$, on peut suivre la construction du Théorème 3 et de sa généralisation aux martingales locales. On peut ainsi définir, de façon similaire à l'intégrale stochastique contre le mouvement brownien, l'intégrale stochastique au sens faible de Y contre la martingale locale M :

$$(Y \cdot M)_t := \int_0^t Y_s \; \mathrm{d}M_s, \quad t \leq T,$$

définie formellement comme limite p.s. d'une suite d'intégrale de processus élémentaires contre les accroissements de $(M_t, \, t \in [0,T])$. En particulier, si $(M_t, \, t \in [0,T])$ est la martingale locale $((H \cdot B)_t, \, t \in [0,T])$, où $H \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(B)$, on peut montrer que $Y \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(H \cdot B)$ si et seulement si $YH \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc},T}(B)$, et en identifiant les limites de fonctions étagées, on montre également la formule d'associativité suivante : pour tout

$$Y \cdot (H \cdot B)_t = YH \cdot B_t, \quad t \leq T,$$

ou en d'autres termes,

$$\int_0^t Y_s \; \mathrm{d}(H \cdot B)_s = \int_0^t Y_s H_s \; \mathrm{d}B_s, \quad t \leq T.$$

On peut par conséquent définir, de la façon suivante, la généralisation de l'intégrale stochastique à toute semi-martingale.

Définition 14. *Pour toute semi-martingale* $(X_t,\, t\in[0,T])$ *s'écrivant*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\ dB_s + \int_0^t K_s\ ds, \quad t\le T$$

et tout processus $(Y_t,\, t\in[0,T]) \in \mathscr{L}^2_{loc,T}(H\cdot B)$ *l'*intégrale stochastique *de* Y *contre* X*, notée*

$$((Y\cdot X)_t,\, t\in[0,T]) = \left(\int_0^t Y_s\ dX_s,\, t\in[0,T]\right)$$

est définie pour tout $t\le T$ *par*

$$(Y\cdot X)_t := \int_0^t Y_s\ dX_s = \int_0^t Y_s H_s\ dB_s + \int_0^t Y_s K_s\ ds. \tag{7}$$

On a alors la caractérisation suivante de l'intégrale stochastique comme une limite presque sûre,

Proposition 14. *Soit* $(X_t,\, t\in[0,T])$ *une semi-martingale continue et* $(Y_t,\, t\in[0,T]) \in L^2_{loc}([0,T])$*. Alors, pour tout* $t\ge 0$ *et toute suite de subdivisions* $\{0=t_0^k<t_1^k<...<t_{p_k}^k=t,\, k\in\mathbb{N}^*\}$ *de* $[0,t]$ *de pas tendant vers 0,*

$$\sum_{i=0}^{p_k-1} Y_{t_i^k}\left(X_{t_{i+1}^k} - X_{t_i^k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} (Y\cdot X)_t.$$

Démonstration. On donne les ingrédients principaux de la preuve sans entrer dans le détail. Le résultat est vrai si X est une vraie martingale bornée dans L^2 par définition de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, par continuité de l'isométrie $H\mapsto H\cdot M$ et par densité de $\mathscr{E}_T$ dans $\mathscr{L}^2_{\text{prog},T}(H\cdot M)$. Il reste vrai pour une martingale locale en localisant. Il est vrai également si X est un processus à VF par la caractérisation limite de ces processus. □

On peut alors généraliser la Proposition 7,

Corollaire 3. *L'intégrale stochastique contre une semi-martingale est linéaire : pour tous* $\left(Y_t^1,\, t\in[0,T]\right)$ *et* $\left(Y_t^2,\, t\in[0,T]\right) \in \mathscr{L}^2_{loc,T}(B)$*, pour toute semi-martingale* $(Y_t,\, t\in[0,T])$ *et tous* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$*,*

$$\int_0^t \left(\lambda_1 Y_s^1 + \lambda_2 Y_s^2\right)\ dX_s = \lambda_1\int_0^t Y_s^1\ dX_s + \lambda_2\int_0^t Y_s^2\ dX_s.$$

4.5 Forme différentielle d'une semi-martingale

Nous introduisons ici une convention notationnelle qui sera pratique dans les calculs. On peut ré-écrire la définition (5) de la semi-martingale $(X_t,\, t\ge 0)$ sous la forme suivante, dite *forme différentielle* :

$$\mathrm{d}X_t = H_t\ \mathrm{d}B_t + K_t\ \mathrm{d}t, \text{ p.s. pour tout } t\le T. \tag{8}$$

Comme le montre la définition (7), on peut remarquer que l'intégration stochastique est, en quelque sorte, distributive par rapport à la décomposition en semi-martingale. On a en effet, avec (8) que p.s. pour tout $t\le T$,

$$\begin{aligned}\int_0^t Y_s\ \mathrm{d}X_s &= \int_0^t Y_s\left(H_s\ \mathrm{d}B_s + K_s\ \mathrm{d}s\right)\\ &= \int_0^t Y_s H_s\ \mathrm{d}B_s + \int_0^t Y_s K_s\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En notant i, le processus déterministe identité, défini pour tout $t\le T$ par $i(t)=t$ p.s., la formule précédent se réécrit comme suit : p.s. pour tout $t\le T$,

$$\begin{aligned}(Y\cdot X)_t &= (Y\cdot(H\cdot B + K\cdot i))_t\\ &= (Y\cdot(H\cdot B))_t + (Y\cdot(K\cdot i))_t\\ &= (YH\cdot B)_t + (YK\cdot i)_t\,.\end{aligned}$$

On peut généraliser les développements de la forme (8), de la façon suivante.

Définition 15. *Soit x_0 un réel. On dit que la semi-martingale $(X_t,\, t \in [0,T])$ satisfait l'*Equation Différentielle Stochastique *(EDS)*

$$dX_t = f(X_t)\ dB_t + g(X_t)\ dt, \quad X_0 = x_0, \tag{9}$$

où f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $(f(X_t),\, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{loc,T}(B)$ et $\int_0^T |g(X_t)|\ dt < \infty$ p.s., si on a p.s.

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)\ dB_s + \int_0^t g(X_s)\ ds, \quad t \leq T. \tag{10}$$

Soit $(X_t,\, t \in [0,T])$, une semi-martingale de la forme (5). Par unicité de la décomposition en semi-martingale, si $(X_t,\, t \in [0,T])$ est solution de l'EDS (9), d'après (10) on a p.s. $f(X_t) = H_t$ et $g(X_t) = K_t$ pour tout $t \leq T$.

4.6 Formules d'Itô

Comme on l'a vu dans la Proposition 10, une formule générale permet d'écrire toute fonction (suffisamment régulière) du mouvement brownien comme une semi-martingale, en un sens que nous avons maintenant défini de façon précise. Comme on va le voir, on peut généraliser cette approche en remplaçant le mouvement brownien par n'importe quelle semi-martingale continue.

Théorème 4 (Première formule d'Itô)**.** *Pour toute semi-martingale $(X_t,\, t \in [0,T])$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\ dB_s + \int_0^t K_s\ ds, \quad t \leq T$$

et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable, on a p.s. pour tout $t \leq T$,

$$f(X_t) = \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\ d\left\langle X \right\rangle_s.$$

Démonstration. La preuve généralise celle de la formule d'Itô pour le mouvement brownien, en partant du développement de Taylor avec reste intégral de F, et en utilisant la caractérisation de l'intégrale stochastique contre une semi-martingale comme une limite en probabilité, vue dans la Proposition précédente. Voir le détail (technique) de la preuve dans le livre de J.F. Le Gall, pp. 91–93. □

On transposant les arguments précédents à la formule de Taylor pour des fonctions de d variables, on peut généraliser le Théorème 4 en dimension d. On a le résultat suivant,

Théorème 5 (Deuxième formule d'Itô)**.** *Pour tout d-uple de semi-martingales $(X_t^1, \cdots, X_t^d)$ et toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable, on a p.s. pour tout $t \leq T$,*

$$\begin{aligned} f(X_t^1, \cdots, X_t^d) = f(X_0^1, \cdots, X_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^1}(X_s^1, \cdots, X_s^d)\ dX_s^i \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j \leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s^1, \cdots, X_s^d)\ d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s. \end{aligned}$$

Le résultat sera très souvent utilisé par la suite,

Corollaire 4 (Formule d'Intégration par parties)**.** *Pour toutes semi-martingales $(X_t^a,\, t \in [0,T])$ et $\left(X_t^b,\, t \in [0,T]\right)$ on a p.s. pour tout $t \leq T$,*

$$X_t^a X_t^b = X_0^a X_0^b + \int_0^t X_s^b\ dX_s^a + \int_0^t X_s^a\ dX_s^b + \left\langle X^a, X^b \right\rangle_t.$$

Démonstration. On applique la formule précédente pour $d = 2$ à la fonction $f : (x,y) \longmapsto xy$. On a alors p.s. pour tout $t \leq T$,

$$X_t^a X_t^b = X_0^a X_0^b + \int_0^t X_s^b\ \mathrm{d}X_s^a + \int_0^t X_s^a\ \mathrm{d}X_s^b + \frac{1}{2}2\int_0^t 1\ \mathrm{d}\left\langle X^a, X^b \right\rangle_s,$$

d'où le résultat. □

4.7 Conséquences

Dans toute la suite, $(\mathscr{F}_t,\, t \in [0,T])$ désigne la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t,\, t \in [0,T])$. On a le résultat suivant, admis, qui nous apprend que toute $\mathscr{F}_t$-martingale peut s'écrire comme une intégrale stochastique,

Théorème 6 (Théorème de représentation des martingales)**.** *Pour toute $\mathscr{F}_t$- martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ bornée dans L^2 (resp. martingale locale) issue de 0, il existe un unique processus $(H_t,\, t \geq 0)$ de $\mathscr{L}^2_{prog}(B)$ (resp. de $\mathscr{L}^2_{loc}(B)$), où $(B_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien, tel que p.s.*

$$M_t = \int_0^t H_s \; dB_s, \quad t \geq 0.$$

Ce résultat montre en particulier que toute $\mathscr{F}_t$-martingale bornée dans L^2 (resp. martingale locale) est une semi-martingale, puisque c'est une intégrale stochastique. En particulier, on peut définir son crochet, défini pour tout $t \leq T$ par

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t (H_s)^2 \; \mathrm{d}B_s.$$

Le résultat précédent est également particulièrement utile pour simuler l'évolution d'un actif financier. Sur un espace de probabilité adéquat tel que le portefeuille auto-financé qui le simule soit une $\mathscr{F}_t$-martingale, on peut représenter ses trajectoires comme celles d'une intégrale stochastique, que l'on peut approcher par un schéma d'interpolation des trajectoires d'un mouvement brownien.

Définition 16. *Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale locale, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle* martingale exponentielle *de paramètre λ de la martingale, le processus $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \geq 0)$ défini par*

$$\mathcal{E}_\lambda(M)_t = exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t\right), \quad t \geq 0.$$

Remarquons que ces derniers processus généralisent les martingales exponentielles du mouvement brownien, vues dans les chapitres précédents. On a alors le résultat suivant,

Proposition 15. *Pour toute martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$ et tout λ, $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale.*

Démonstration. On applique la formule d'Itô en dimension 2 à la fonction $F(x_1,x_2) = \exp\left(\lambda x_1 - \frac{\lambda^2}{2} x_2\right)$ et aux semi-martingales $(M_t,\, t \geq 0)$ et $(\langle M \rangle_t,\, t \geq 0)$. Comme

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \lambda F(x_1,x_2), \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -\frac{\lambda^2}{2} F(x_1,x_2); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}(x_1,x_2) = \lambda^2 F(x_1,x_2),$$

et en remarquant que pour tout t, $\langle \langle M \rangle \rangle_t = \langle \langle M \rangle, M \rangle_t = 0$ p.s., on obtient que p.s., pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(M)_t &= 1 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \; \mathrm{d}M_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \; \mathrm{d} \langle M \rangle_s + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \; \mathrm{d} \langle M \rangle_s \\ &= 1 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\lambda(M)_s \; \mathrm{d}M_s, \end{aligned}$$

qui est par définition une $\mathscr{F}_t$-martingale locale. □

On en déduit le

Théorème 7 (Caractérisation de Lévy)**.** *Pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$, $(M_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien si et seulement si*

$$\langle M \rangle_t = t, \quad t \geq 0, \quad p.s.. \tag{11}$$

Démonstration. Une implication est déjà connue ; démontrons la réciproque. Supposons que (11) est vérifiée. Alors, la Proposition précédente montre que pout tout $T > 0$, le processus $(\mathcal{E}_\lambda(M)_t,\, t \in [0,T])$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale bornée, donc une vraie $\mathscr{F}_t$-martingale. Donc, pour tout $s < t \leq T$, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{E}_\lambda(M)_t}{\mathcal{E}_\lambda(M)_s} | \mathscr{F}_s\right] = 1 \quad \text{p.s.},$$

ce qui est équivalent à dire que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(M_t - M_s)\right)|\mathscr{F}_s\right] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(s-t)\right) \qquad \text{p.s.},$$

ou encore, pour tout $A \in \mathscr{F}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(\lambda(M_t - M_s)\right)\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(s-t)\right).$$

On peut alors facilement généraliser le raisonnement précédent à tout λ complexe. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient que

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(ix(M_t - M_s)\right)\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \exp\left(-\frac{x^2}{2}(s-t)\right). \tag{12}$$

Ceci implique, tout d'abord, en posant $A \equiv \Omega$, que la fonction caractéristique de $M_t - M_s$ vaut en tout x,

$$\varphi_{M_t - M_s}(x) = \mathbb{E}\left[\exp\left(ix(M_t - M_s)\right)\right] = \exp\left(-\frac{x^2}{2}(s-t)\right),$$

ce qui signifie exactement que $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. De plus, (12) implique que $M_t - M_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$. On peut généraliser ce raisonnement à une famille finie d'accroissements. On obtient que pour tout T, $(M_t,\, t \in [0,T])$ est un processus de Lévy à trajectoires continues sur $[0,T]$. Comme ceci est vrai pour tout T, $(M_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. □

On peut même généraliser cette approche,

Théorème 8 (Théorème de Dubins-Schwarz)**.** *Pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale issue de 0 $(M_t,\, t \geq 0)$ telle que $\langle M \rangle_\infty = +\infty$ p.s., il existe un mouvement brownien $(B_t,\, t \geq 0)$ (adapté par rapport à une autre filtration !) tel que*

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t}, \quad t \geq 0, \qquad p.s..$$

Démonstration. Voir le livre de J.F. Le Gall, pp. 103–105. □

Le résultat précédent montre que *via un changement de temps*, toute martingale locale issue de 0 est un mouvement brownien.

5 Théorème de Girsanov

Dans cette brève dernière section, nous introduisons un outil très utile pour construire la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, i.e., la mesure de probabilité sous laquelle le prix du sous-jacent actualisé est une martingale. Comme on l'a vu, cette mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ est la probabilité initiale $\mathbb{P}$, si l'on suppose que ce prix est donné par le processus de Black & Scholes.

Rappelons que la dérivée de Radon-Nikodyn d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ (où $\mathbb{P}^*$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$) sur la tribu $\mathscr{A}$, est l'unique fonction

$$h = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathscr{A}},$$

intégrable par rapport à $\mathbb{P}$, vérifiant $\mathbb{P}^*(A) = \int_A h \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. On a alors en particulier, pour toute v.a. F $\mathscr{A}$-mesurable et $\mathbb{P}$-intégrable, $\mathbb{E}^*\left[F\right] = \mathbb{E}\left[Fh\right]$, où $\mathbb{E}^*[.]$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^*$. Remarquons que

Proposition 16. *Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, $(\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$ une filtration complète et pour tout t,*

$$D_t = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t}. \tag{13}$$

Alors, le processus $(D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale strictement positive sous $\mathbb{P}$.

Démonstration. Adaptabilité et intégrabilité sont vérifiées par hypothèse. Finalement, pour tout $s < t$, pour tout $A \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ on a

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_t\right] = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_s\right],$$

ce qui signifie exactement que $\mathbb{E}\left[D_t | \mathscr{F}_s\right] = D_s$, $\mathbb{P}$-p.s.. □

On a le résultat suivant,

Théorème 9 (Théorème de Girsanov)**.** *Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, et $(D_t,\, t \geq 0)$ la martingale associée à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ par (13). Alors, il existe une unique martingale locale $(L_t,\, t \geq 0)$ tell que $(D_t,\, t \geq 0) = (\mathcal{E}_1(L)_t,\, t \geq 0)$. De plus, pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale locale $(M_t,\, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$, le processus $(M_t^*,\, t \geq 0)$ défini par*

$$M_t^* = M_t - \langle M, L \rangle_t\,, \quad t \geq 0,$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. Pour la première assertion, remarquons que la martingale $(D_t,\, t \in [0,T])$ est strictement positive. Soit la semi-martingale $(L_t,\, t \geq 0)$ définie par

$$L_t = \mathrm{Log} D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s}\, \mathrm{d}D_s, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

On a alors, clairement,

$$\langle L \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{D_s^2}\, \mathrm{d}\, \langle D \rangle_s\,.$$

Donc, d'après la formule d'Itô, on a p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\, D_t &= \mathrm{Log}\, D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s}\, \mathrm{d}D_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{D_s^2}\, \mathrm{d}\, \langle D \rangle_s \\ &= L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t\,,\end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $D_t = \mathcal{E}_1(L)_t$ pour tout $t \leq T$. Ensuite, montrons que si $(X,\, t \geq 0)$ est $\mathscr{F}_t$-adapté et $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$, alors $(X,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$. Pour le vérifier, remarquons que pour tout t, par définition de la dérivée de Radon-Nikodyn,

$$\mathbb{E}^*\left[|X_t|\right] = \mathbb{E}\left[|X_t D_t|\right] < \infty.$$

Ensuite, pour tout $s < t$ et tout $A \in \mathscr{F}_s$, comme $A \in \mathscr{F}_t$ la v.a. $\mathbf{1}_A X_t$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable, et donc

$$\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_A X_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X_t D_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X_s D_s\right] = \mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_A X_s\right],$$

où l'on utilise la propriété de martingale sous $\mathbb{P}$ de $(X_t S_t,\, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$ dans la deuxième égalité. Cela signifie exactement que

$$X_t = \mathbb{E}^*\left[X_t | \mathscr{F}_s\right] = X_s, \quad \mathbb{P}^* - \text{ p.s.},$$

et donc que $(X_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$. Ceci implique en particulier que pour tout $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt τ, tout processus adapté et arrêté $(X^\tau,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}^*$ dès que $((XD)_t^\tau,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$. Ceci implique à son tour que pour tout processus $\mathscr{F}_t$-adapté $(X_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$ dès que $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}$. (On applique le raisonnement précédent à toute suite $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ de temps d'arrêt qui réduit $(X_t D_t,\, t \geq 0)$ et tout $n \in \mathbb{N}$.)

On applique cette observation au processus $(M_t^*,\, t \geq 0)$. La formule d'intégration par parties nous donne que $\mathbb{P}^*$-p.s. pour tout t,

$$\begin{aligned}M_t^* D_t &= M_0^* D_0 + \int_0^t M_s^*\, \mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s\, \mathrm{d}M_s^* + \langle M^*, D \rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^*\, \mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s\, \mathrm{d}M_s - \int_0^T D_s\, \mathrm{d}\, \langle M, L \rangle_s + \langle M, D \rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^*\, \mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s\, \mathrm{d}M_s - \int_0^T D_s \frac{1}{D_s}\, \mathrm{d}\, \langle M, D \rangle_s + \langle M, D \rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t M_s^*\, \mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s\, \mathrm{d}M_s,\end{aligned}$$

où l'on utilise (14) dans la troisième égalité. Ceci montre que $(M_t^* D_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}$, et donc, d'après l'observation précédente, que $(M_t^*,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$. □

Remarquons en particulier le résultat suivant,

Corollaire 5. *Soit $(B_t,\, t \in [0,T])$, un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ et $(H_t,\, t \in [0,T])$ un processus de $\mathscr{L}^2_{prog}(B)$. Soit λ un réel et $(D_t,\, t \in [0,T]) := (\mathcal{E}_\lambda(H \cdot B),\, t \in [0,T])$. Soit $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilité définie par*

$$D_T = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_T}. \tag{15}$$

Alors, le processus $(B_t^*,\, t \in [0,T])$ *défini par*

$$B_t^* = B_t - \int_0^t H_s \; ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est un $\mathscr{F}_t$*-mouvement brownien sous* $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. Remarquons que $\mathbb{P}^*$ définie par (15) définit bien une mesure de probabilité. En effet, c'est par (15) une mesure σ-finie, telle que

$$\mathbb{P}^*(\Omega) = \int_\Omega D_t \; \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[D_T\right] = 1.$$

Ensuite, on remarque que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathscr{F}_T$ et donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}\left[D_T | \mathscr{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_T | \mathscr{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A D_T\right] = \mathbb{P}^*(A),$$

ce qui montre que (13) est vérifiée pour tout $t \leq T$. On peut donc appliquer le Théorème de Girsanov à $(L_t,\, t \in [0,T]) := ((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T])$ et $(M_t,\, t \in [0,T]) := (B_t,\, t \in [0,T])$ pour conclure que le processus défini pour tout $t \leq T$ par

$$B_t - \langle B, H \cdot B \rangle_t = B_t - \int_0^T H_s \; \mathrm{d}s = B_t^*$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale locale sous $\mathbb{P}^*$. Cette martingale locale est de crochet donné par

$$\langle B^* \rangle_t = \langle B \rangle_t = t, \quad t \leq T,$$

ce qui conclut la preuve d'après la caractérisation de Lévy. $\square$