CORRIGÉ FEUILLE 3

Exercice 1

Les intégrales stochastiques (ici, de Wiener) sont bien définies au sens fort (i.e., sont des martingales de carré intégrable) si (H_t) est tel que $\forall T$, $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$).

- On a $\mathbb{E}[\int_0^T B_s^2 ds] \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^T \mathbb{E}[B_s^2] ds$

$$= \int_0^T s\, ds = \frac{T^2}{2} < \infty \longrightarrow \boxed{OK}.$$

- $\forall n$, $\forall T$, $\mathbb{E}[\int_0^T (B_s^n)^2 ds] = \int_0^T \mathbb{E}[B_s^{2n}] ds$

$$= \int_0^T s^n \mathbb{E}[U^{2n}] ds \quad \text{où } U \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \int_0^T s^n \frac{(2n)!}{n!\, 2^n} ds = \frac{T^{n+1}}{(n+1)!(n!)} \frac{(2n)!}{2^n} \longrightarrow \boxed{OK}$$

- $\forall T$, $\mathbb{E}[\int_0^T (e^{aB_s})^2 ds] = \int_0^T \mathbb{E}[e^{2aB_s}] ds$

$$= \int_0^T \mathbb{E}[e^{2a\sqrt{s}\, U}] ds$$

$$= \int_0^T e^{(2a\sqrt{s})^2/2} ds$$

$$= e^{2a^2} \int_0^T e^s ds = e^{2a^2}(e^T - 1) \quad \boxed{OK}$$

- $\forall T$, $\mathbb{E}[\int_0^T (e^{aB_s^2})^2 ds]$

On a $\forall s$, $\mathbb{E}[e^{2aB_s^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2(\frac{1}{2} - 2as)} dx$

qui est fini si et seulement si $s < \frac{1}{4a}$

$\Rightarrow$ Existe au sens fort sur $[0, 1/4a]$.

Exercice 2

Tout processus p.s. dérivable est à variation finie, avec $dA_t = \mu(dt) = A'_t\, dt$ p.s. $\forall t \geq 0$. En particulier, $\forall t \geq 0$,

1) $$A_t = \int_0^t A'_t\, dt$$

$$=: \int_0^t H_s^A\, dB_s + \int_0^t K_s^A\, ds \quad \text{, avec } \begin{cases} H_s^A \equiv 0 \text{ p.s. } \forall s \\ K_s^A = A'_s \text{ p.s. } \forall s \end{cases}$$

(décomposition unique)

2) On a par définition, p.s. $\forall t$,

$$\langle X, A \rangle_t = \langle H, H^A \rangle_t = 0 \text{ p.s.}$$

Donc, par la formule d'intégration par parties, on a p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$X_t A_t = X_0 A_0 + \int_0^t X_s\, dA_s + \int_0^t A_s\, dX_s$$

$$= X_0 A_0 + \int_0^t X_s A'_s\, ds + \int_0^t A_s H_s\, dB_s + \int_0^t A_s K_s\, ds$$

$$= X_0 A_0 + \int_0^t A_s H_s\, dB_s + \int_0^t (A_s K_s + X_s A'_s)\, ds.$$

Exercice 3

1) On applique la formule d'Itô en dimension 2.

Soit $f(x_1, x_2) = S_0 \exp\{\lambda x_2 + (r - \frac{\lambda^2}{2}) x_1\}$,

d'où $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cancel{S_0} (r - \frac{\lambda^2}{2}) \cancel{x_1} f(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \lambda^2 f(x_1, x_2).$$

~~1)~~ On a alors $\forall t \geq 0$ p.s.

$$
\begin{aligned}
S_t &= f(t, B_t) \\
&= S_0 + \left(r - \frac{\lambda^2}{2}\right)\int_0^t S_s\,ds + \lambda \int_0^t S_s\,dB_s \\
&\qquad + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t S_s\,d\langle B,B\rangle_s \\
&= S_0 + \left(r - \frac{\lambda^2}{2}\right)\int_0^t S_s\,ds + \lambda \int_0^t S_s\,dB_s + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t S_s\,ds \\
&= S_0 + r\int_0^t S_s\,ds + \lambda\int_0^t S_s\,dB_s,
\end{aligned}
$$

on utilise le fait que $\forall t, \begin{cases} \langle t,t\rangle_t = 0 \\ \langle t,B_t\rangle_t = 0 \end{cases}$

et donc (S_t) est solution de (1).

2) Soit (S_t) une solution de (1) et $\forall t$,

$$Z_t = \frac{S_t}{S_0}\exp\left(-\lambda B_t - \left(r - \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right)$$

Soit $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_3}{S_0}\exp\left(-\lambda x_2 - \left(r-\frac{\lambda^2}{2}\right)x_1\right)$.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -\left(r - \dfrac{\lambda^2}{2}\right) f \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -\lambda f \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = \dfrac{\exp(\cdots)}{S_0} \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \lambda^2 f \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = -\dfrac{\lambda}{S_0}\exp(\cdots)
\end{cases}
$$

Itô nous donne alors : $\forall t \geq 0$, p.s.

$$
\begin{aligned}
Z_t &= f(t, B_t, S_t) \\
\cancel{\int_0^t} &= 1 - \left(r - \frac{\lambda^2}{2}\right)\int_0^t Z_s\,ds - \lambda\int_0^t Z_s\,dB_s + \int_0^t \frac{Z_s}{S_s}\,dS_s \\
&\qquad + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t Z_s\,ds - \lambda\int_0^t \frac{Z_s}{S_s}\,d\langle B,S\rangle_s. \\
&= 1 - (r - \lambda^2)\int_0^t Z_s\,ds - \lambda\int_0^t Z_s\,dB_s + \int_0^t \frac{Z_s}{S_s} S_s \lambda\,dB_s \\
&\qquad + \int_0^t \frac{Z_s}{S_s} S_s r\,ds - \lambda\int_0^t \frac{Z_s}{S_s}\lambda S_s\,ds,
\end{aligned}
$$

car $\displaystyle\int_0^t Y_s\,d\langle B,S\rangle_s = \lambda\int_0^t Y_s\,d\langle B, S\cdot B\rangle_s = \lambda\int_0^t Y_s S_s\,ds$.

Finalement, on a bien $\forall t$, p.s.,

$$Z_t = 1 - r\int_0^t Z_s\,ds + \lambda^2\int_0^t Z_s\,ds - \lambda\int_0^t Z_s\,dB_s + \lambda\int_0^t Z_s\,dB_s$$
$$+ r\int_0^t Z_s\,ds - \lambda^2\int_0^t Z_s\,ds = 0.$$

Autrement dit, $S_t = X_t$ p.s. $\forall t$.

3) Soit $\tilde{S}_t = \overbrace{e^{-rt}}^{X_t}\,\overbrace{S_t}^{Y_t}$, $t \geq 0$.

D'après la formule d'IPP, on a $\forall t$,

$$\tilde{S}_t = X_t Y_t = 1 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \underbrace{\langle X, Y\rangle_t}_{0}$$
$$= 1 + \int_0^t e^{-rs}\,dS_s + \int_0^t S_s(-re^{-rs})\,ds$$
$$= 1 + \int_0^t e^{-rs}\lambda S_s\,dB_s + \int_0^t \cancel{e^{-rs}}\, r S_s\,ds$$
$$- \int_0^t r\cancel{e^{-rs}} S_s\,ds$$
$$= 1 + \lambda\int_0^t \tilde{S}_s\,dB_s$$, mart. locale. $\square$

Exercice 4

1) On a $\forall t$, $\int_0^t f(s)\,dB_s \overset{(P)}{=} \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{p_n-1} f(t_i^n)\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)$

c'est donc la limite en loi d'une ~~gaussi~~ suite de Gaussiennes (en tant que somme d'accroissements, gaussiens indép.)

2) $\forall t$, $\mathbb{E}\left[B_t \int_0^T f(s)\,dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\,dB_s \int_0^T f(s)\,dB_s\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\,d\langle B\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right]. \ \square$$

Exercice 5

On applique la formule d'Itô

(d=1) • $\forall t \geq 0$, $(B_t)^2 = 2\int_0^t B_s \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2 \, d\langle B\rangle_s$

$$= 2\int_0^t B_s \, dB_s + \int_0^t ds$$

$$= 2\int_0^t B_s \, dB_s + t, \text{ p.s.}$$

(d=2)

• $\forall t \geq 0$, $f(x_1, x_2) = x_1 + e^{x_2}$ $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = e^{x_2}$. $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2}$

$$t + e^{B_t} = 1 + \int_0^t ds + \int_0^t e^{B_s} \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s} \, d\langle B\rangle_s$$

$$= t + 1 + \int_0^t e^{B_s} \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s} \, ds \quad \text{p.s.}$$

• (d=2) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 x_2$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3x_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -3x_1 \end{cases}$

$\forall t$, $B_t^3 - 3tB_t = f(B_t, t)$

$$= \int_0^t (3(B_s)^2 - 3s) \, dB_s - \int_0^t 3B_s \, ds + \frac{1}{2}\int_0^t 6B_s \, d\langle B\rangle_s$$

$$= 3\int_0^t (B_s^2 - s) \, dB_s - 3\int_0^t \cancel{B_s} \, ds + 3\int_0^t \cancel{B_s} \, ds$$

$$= 3\int_0^t (B_s^2 - s) \, dB_s, \text{ mart. locale.}$$

• (d=2) $f(x_1, x_2) = e^{x_1/2} \sin x_2$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} f(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1/2} \cos x_2 \end{cases}$

<u>Donc</u> $\forall t$, $e^{t/2} \sin B_t = f(t, B_t)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cancel{e^{s/2} \sin B_s \, ds} + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \cancel{e^{s/2} \sin B_s \, ds}$$

Exercice 6

1) On applique la formule d'IPP à

$$Y_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dB_s = \overbrace{(1-t)}^{A_t}(Z\cdot B)_t ,$$

où $\forall t\ Z_t = \frac{1}{1-t}$.

On a alors : $\forall t \geq 0$,

$$Y_t = \int_0^t \underbrace{(1-s)}_{A_s}\, d(Z\cdot B)_s + \int_0^t (Z\cdot B)_s\, d\overbrace{(1-s)}^{A_s} + \overbrace{\langle A, Z\cdot B\rangle_t}^{0}$$

$$= \int_0^t \underbrace{(1-s)}_{A_s}\, d(Z\cdot B)_s - \int_0^t (Z\cdot B)_s\, ds \quad \text{p.s.}$$

Or $\forall t$, $(A\cdot(Z\cdot B))_t = (AZ)\cdot B_t$, et donc $\forall t$,

$$Y_t = \int_0^t (1-s)\frac{1}{1-s}\, dB_s + \int_0^t \frac{1}{s-1}\underbrace{(1-s)(Z\cdot B)_s}_{Y_s}\, ds$$

$$= \int_0^t dB_s + \int_0^t \frac{Y_s}{s-1}\, ds = B_t + \int_0^t \frac{Y_s}{s-1}\, ds \quad \text{p.s.}$$

2) $((Z\cdot B)_t, t\geq 0)$ est un processus Gaussien car toute combinaison linéaire de ses valeurs est une combi linéaire de limites de combi. linéaires de Gaussiennes indép.

On sait que $\forall t<1$, $\mathbb{E}[(Z\cdot B)_t] = 0$ car mart.

Donc $\forall t<1$, $\mathbb{E}[(1-t)(Z\cdot B)_t] = 0$.

La formule d'Isométrie donne que pour tout t,

$$\mathbb{E}[(Z\cdot B)_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2\, ds\right] = \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\, ds = \frac{1}{1-t} - 1.$$

~~Donc~~ $\cancel{\forall t,\ Y_t = (1-t)(Z\cdot B)_t \sim \mathcal{N}(0, 1-t)}$.

Plus généralement, $\forall s,t < 1$,

Notons $\mathbf{K}_u = \begin{cases} Z_u & \text{si } u \leq s \wedge t \\ 0 & \text{si } u > s\wedge t \end{cases}$,

on a alors

$$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[Y_s Y_t]$$
$$= (1-s)(1-t)\,\mathbb{E}[(Z\cdot B)_s (Z\cdot B)_t]$$
$$= (1-s)(1-t)\,\mathbb{E}[(\mathbf{K}\cdot B)_{t\wedge s}(Z\cdot B)_{t\wedge s}]$$
$$= (1-s)(1-t)\,\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} K_u Z_u \, d\langle B,B\rangle_u\right]$$
$$= (1-s)(1-t)\,\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s}\left(\frac{1}{1-u}\right)^2 du\right]$$
$$= (1-s)(1-t)\left(\frac{1}{1-(t\wedge s)} - 1\right)$$
$$= \cancel{(1-s\wedge t)}(1-s\vee t)\,\frac{1-(1-t\wedge s)}{\cancel{(1-t\wedge s)}}$$
$$= (1-s\vee t)(t\wedge s).$$

3) On a en particulier $\forall t$, $\mathbb{E}[Y_t^2] = t(1-t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$.

<u>Donc</u> $Y_t \xrightarrow[t\to 1]{L^2} 0$ donc $Y_t \xrightarrow[t\to 1]{(P)} 0$.

4) Comme (Y_t), (Z_t) est un processus gaussien, centré, de covariance donnée par : $\forall s,t < 1$,

$$\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathrm{Cov}(B_t - tB_1, B_s - sB_1)$$
$$= \mathrm{Cov}(B_t, B_s) - t\,\mathrm{Cov}(B_1, B_s) - s\,\mathrm{Cov}(B_t, B_1) + st\,\mathbb{E}[B_1^2]$$
$$= s\wedge t - ts - st + st = s\wedge t - ts = s\wedge t(1-s\vee t). \square$$

Exercice 7

1. On pose

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = D_T := \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right),$$

ce qui signifie que pour toute F intégrable,

$$\mathbb{E}^*(F) = \int_{\mathcal{F}_T} F\, D_T\, d\mathbb{P}.$$

$\mathbb{P}^*$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ car c'est une mesure σ-finie, telle que

$$\mathbb{P}^*(\Omega) = \int \mathbb{1}_\Omega D_T\, d\mathbb{P}$$

$$= \mathbb{E}[D_T], \text{ or}$$

$(D_t) := \left(\exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 t\right)\right)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale (c'est $\left(\mathcal{E}_{\frac{r-\mu}{\sigma}}(B)_t\right)$).

<u>Donc</u> $\mathbb{E}[D_T] = \mathbb{E}[D_0] = 1$.

2. On applique le théorème de Girsanov à $\mathbb{P}, \mathbb{P}^*, (D_t)$ et $(L_t) := \left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_t\right)$.

On a bien $\forall t$, $D_t = \mathcal{E}_{\frac{r-\mu}{\sigma}}(B)_t$

$$= \mathcal{E}_1\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B\right)_t$$

$$= \mathcal{E}_1(L)_t.$$

<u>Donc</u>, d'après le th. de Girsanov,

le processus (W_t) défini par

$W_t = B_t - \langle B, L \rangle_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale

sous ~~Q*~~ $\mathbb{P}^*$

Or, $\forall t$, $W_t = B_t - \frac{r-\mu}{\sigma} \langle B, B \rangle_t$

$$= B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

C'est une $\mathcal{F}_t$-martingale dont le crochet vaut :

$$\langle W, W \rangle_t = \langle B + \frac{\mu - r}{\sigma} X , B + \frac{\mu - r}{\sigma} X \rangle$$

on note $X_t = t$.

$$= \langle B, B \rangle_t + 0.$$

$$= t.$$

C'est un $\mathcal{F}_t$- martingale sous $\mathbb{P}^*$ de crochet $t \underset{\text{Lévy}}{\Longrightarrow}$ c'est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$.

3) Soit $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, $\forall t$.

Alors, $\forall t$, $\tilde{S}_t = e^{\sigma B_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t}$

$$= e^{\sigma W_t + (r-\mu)t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

$$= e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \quad \mathcal{F}_t\text{-mart. sous } \mathbb{P}^*$$

car W_t est un $\mathcal{F}_t$-m.b. sous $\mathbb{P}^*$. □