TD1

TD 1, OASIS

Exercice 1
Pour chacun des cas suivants, reconnaître et justifier si la relation entre l'entrée et la sortie est
- Linéaire
- Invariante par décalage

Si la relation est linéaire et invariante par translation, donner, si possible, la réponse impulsionnelle

1. L'entrée est la suite u et la sortie est la suite v et $\forall n \in \mathbb{Z},\ v_n = u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}$.
2. L'entrée est la suite u et la sortie est la suite v et $\forall n \in \mathbb{Z},\ v_n = u_{2n}$.
3. L'entrée est la suite u et la sortie est la suite v et $\forall n \in \mathbb{Z},\ v_n = \max(u_n, u_{n-1}, u_{n+1})$.
4. L'entrée est la suite u et la sortie est la suite v et $\forall n \in \mathbb{Z},\ v_n = u_{n-1}$.
5. L'entrée est une fonction f intégrable définie sur $\mathbb{R}$ et la sortie une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} f(t)dt$.
6. L'entrée est une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}$ et la sortie une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = max\{f(t), t \in [x-1, x+1]\}$.
7. L'entrée est une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}$ et la sortie une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x-1)$.

Exercice 2
Pour chaque suite u et v données ci-dessous, calculer le résultat de leur convolution : $w = u * v$

1. $u_0 = 1$ $u_n = 0$ si $n \neq 0$ et $v_n = \sqrt{log(cos(3n) + 2)}$.
2. $u_0 = 2$ $u_1 = -0.5$, $v_0 = 5$ $v_1 = 3$ $v_2 = 4$ (tous les autres termes de u et v sont nuls).
3. $u_{-1} = 2$ $u_0 = -0.5$, $v_0 = 5$ $v_1 = 3$ $v_2 = 4$ (tous les autres termes de u et v sont nuls. Utiliser le calcul précédent).
4. $u_{-1} = 2$ $u_0 = 1.5$ $u_1 = -0.5$, $v_0 = 5$ $v_1 = 3$ $v_2 = 4$ (tous les autres termes de u et v sont nuls. Remarquer que cette suite u est la somme des deux suites u précédentes.).
5. $u_n = (-1/2)^n$ (pour n positif ou nul, $u_n = 0$ sinon). $v_0 = 1$ $v_1 = 1/2$ (les autres termes de v sont nuls). On dit que v est le **filtre inverse** de u.
6. Convoler la suite v ci-dessus avec elle-même 3 fois (c'est-à-dire calculer la suite $v * v * v$). Comparer avec le polynôme $(1 + \frac{1}{2}x)^3$. Pouvez-vous généraliser ? En particulier, calculer la suite $v * v * \cdots * v$ (où v apparaît au total 10 fois).

Exercice 3
On rappelle la définition des ondes harmoniques (ou ondes de Fourier) sur $\mathbb{Z}$:$\exists \nu \in [-1/2, 1/2[$ tq $u_n = e^{2i\pi\nu n}$. On sait que lorsqu'une onde harmonique est transformée par un SLI, la sortie obtenue est la même onde harmonique multipliée par une constante $C(\nu)$ (voir le cours). Pour chacun des SLI suivants, qui seront donnés par leur réponse impusionnelle h, tracer le graphique (approximatif) du module de $C(\nu)$.

1. $h_n = 1$ si $-N \leqslant n \leqslant N$ et $h_n = 0$ sinon. (on fera le graphique pour $N = 1$ et $N = 4$)

2. $h_0 = 1$ $h_1 = 1/2$, ($h_n = 0$ sinon).
3. $h_n = (-1/2)^n$ pour n positif ou nul et $h_n = 0$ sinon. Ici on pourra considérer ce qui arrive à une onde harmonique qui passe par ce SLI puis dans le SLI précédent. (voir la question 5 de l'exercice précédent)

Exercice 4

1. Si vous aviez à proposer un SLI qui privilégie les basses fréquences (i.e. son gain $C(\nu)$ est grand pour les valeurs de ν proches de zéro), lequel parmi les SLI 1 et 3 de l'exercice précédent choisiriez-vous ? On note ce SLI T_1.
2. Soit $w_n = e^{2i\pi\nu_0 n}$ une onde harmonique de fréquence ν_0 et h^1 la réponse impulsionnelle du SLI T_1. On définit un nouveau SLI T_2 par sa réponse impulsionnelle $h^2_n = w_n h_n$. On note $C_1(\nu)$ le gain fréquentiel du SLI T_1. Exprimer $C_2(\nu)$, le gain fréquentiel de T_2 en fonction de C_1, ν et ν_0. Tracer sommairement son graphe sur $[-1/2, 1/2[$.
3. Proposer un SLI qui privilégie les ondes harmoniques de fréquence ν_0.

Exercice 5 On cherche ici à démontrer la capacité d'une convolution à couvrir un détail. On considère une barre de longueur infinie (indexée par $\mathbb{R}$) dont la température à un instant donné est décrite par (en fonction de la position x) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \text{ si } \frac{-\alpha}{2} - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha} \text{ si } \frac{-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$ (les deux intervalles de la définition ne s'intersectent pas).

1. Tracer la fonction f pour $\alpha = 1/2$.
2. On laisse évoluer la température pendant un certain temps suivant l'équation de la chaleur. La distribution de température devient alors

$$g(x) = (h * f)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t\in\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} f(x-t)dt.$$

   ($h(t) = e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ est la fonction gaussienne de variance σ^2. σ^2 est d'autant plus grand que le temps d'évolution est long). Tracer le graphique de g pour σ très petit et σ très grand.
3. Que devient la fonction g lorsque α tend vers 0 ? (on exprimera g en fonction de décalées de la fonction h)
4. Sous l'hypothèse α très petit, pour quelles valeurs de σ la fonction g ne présente-t-elle qu'un seul maximum local ? (On admet que cela se produit lorsque la dérivée seconde de g est strictement négative en $x = 0$)

TD 2, OASIS

Préambule : On évitera tout calcul inutile en se reportant le plus possible aux résultats du cours. Dans les questions (Bonus) on fera intervenir la notion de Dirac définis sur $[-1/2, 1/2[$.

Exercice 1 : Résolution fréquentielle et lien en Hz et fréquences dans [-1/2,1/2[(fréquence réduite)

Ici, on se demande pendant combien de temps il faut écouter un mélange d'ondes de Fourier pour pouvoir les séparer

1. Un signal discret u est constitué d'un mélange de deux ondes de Fourier (de même amplitude)

$$u_n = e^{2i\pi\nu_0 n} + e^{2i\pi\nu_1 n}$$

   Combien faut-il observer d'échantillons successifs $u_0, \dots, u_{N-1}$ pour pouvoir séparer les fréquences ν_0 et ν_1. On donnera la réponse en ordre de grandeur.

2. Un signal défini sur $\mathbb{R}$ a pour équation (c'est une onde de Fourier sur $\mathbb{R}$)

$$f(t) = e^{2i\pi f_0 t}$$

   où t est le temps mesuré en secondes (s) et f_0 est la fréquence mesurée en Hertz (Hz=s^{-1}).
   On considère la suite v qui est l'échantillonnage de f toutes les T_e secondes

$$v_n = f(nT_e) = e^{2i\pi f_0 T_e n}$$

   On appelle $F_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage. Et on suppose que $-\frac{1}{2} < \frac{f_0}{F_e} < \frac{1}{2}$.
   v est-elle une onde de Fourier sur $\mathbb{Z}$? Quelle est sa fréquence en fonction de f_0 et F_e ? (Cette fréquence s'appelle **fréquence réduite**)

3. Maintenant, on cherche à séparer deux fréquences dans un signal défini sur $\mathbb{R}$. Le signal est noté g

$$g(t) = e^{2i\pi f_0 t} + e^{2i\pi f_1 t}$$

   Et cela en observant un certain nombre d'échantillons de la suite des w des échantillons de g

$$w_n = g(nT_e)$$

   Combien d'échantillons de w faut-il pour séparer les deux fréquences f_0 et f_1 ? À quel temps d'écoute (en secondes) cela correspond-il ? (on suppose que $0 < \frac{f_0}{F_e} < \frac{f_1}{F_e} < \frac{1}{2}$)

4. Quel est le temps d'écoute nécessaire pour séparer une note de piano à 27.5Hz d'une autre à 29Hz ? (il s'agit des notes les plus proches émises par un piano)

Exercice 2 :

Pour chaque TZ suivante donner la suite dont elle est la TZ. Donner aussi l'équation de récurrence du filtre récursif stable dont la suite est la RI. Dire si la RI est causale ou anti-causale (ou ni l'un ni l'autre).

1. $$H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

2. $$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

3. $$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

4. $$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \text{ (décomposer en éléments simples)}$$

5. $$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

6. $$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

Exercice 3 :Filtres à minimum de phase

On rappelle qu'un filtre récursif stable est dit à minimum de phase si tous ses pôles et ses zéros sont à l'intérieur du cercle unité.

Ici on veut montrer, que parmi tous les SLI récursifs stables causaux qui ont le même module de TZ de la RI (i.e. même module de la réponse fréquentielle), celui qui est à minimum de phase (i.e. celui qui a aussi ses zéros à l'intérieur du cercle unité) est celui qui "répond le plus vite" en un sens explicité ci-dessous.

1. On suppose que $a \in \mathbb{C}$ est un complexe de module différent de 1 ($a \notin \mathbb{U}$), montrer que la fonction K_a définie sur le cercle unité par
$$\forall z \in \mathbb{U},\ K_a(z) = \frac{1 - az^{-1}}{\bar{a} - z^{-1}}$$
est toujours de module 1. (on remarquera que pour tout z sur le cercle unité, $\bar{z} = z^{-1}$)
K_a est appelé "passe tout".
2. Si on regarde K_a comme une fraction rationnelle définie sur (presque tout) $\mathbb{C}$, quels sont ses pôles et ses zéros ? Suivant les cas dire si la suite dont K_a est la TZ est causale ou non.
3. Si un filtre récursif stable a pour pôle simple[1] a. On note $H(z)$ la TZ de sa RI. Quels sont les pôles de $H(z)K_a(z)$?
Même question si $\frac{1}{\bar{a}}$ est un zéro simple du filtre récursif stable ?
Ainsi, on peut, partant d'un filtre récursif quelconque, remplacer ses pôles et ses zéros qui se trouvent à l'extérieur du cercle unité par des pôles et des zéros qui se trouvent à l'intérieur du cercle unité, sans changer le module de sa TZ et ce en multipliant par des passe-tout bien choisis.
4. Sans démonstration (que l'on pourrait faire en utilisant ce qui précède), on accepte ceci : Si on se donne un module de la TZ fixé, tous les filtres récursifs stables et causaux[2] dont le module la TZ (de leur RI) est ainsi fixé sont de la forme :
$$H(z) = H_0(z) \prod_{j=1}^{N} K_{a_j}(z)$$

1. Simple signifie que la multiplicité de la racine du dénominateur (pour un pôle) ou du numérateur (pour un zéro) est 1
2. On se restreint aux filtres causaux pour pouvoir les implémenter comme vu en cours.

où H_0 est la TZ d'un SLI à minimum de phase et $|a_j| > 1,\ j = 1 \dots N$.
On note T un tel SLI, et T_0 le SLI dont H_0 est la TZ.
Montrer que $T = T_1 \circ T_0$ où T_1 est un SLI récursif causal dont on donnera la TZ en fonction des K_{a_j}.

5. On veut montrer la propriété suivante

$$\forall x \in l^1\ (y = T(x) \text{ et } t = T_0(x)) \Longrightarrow \left(\forall M \in \mathbb{Z},\ \sum_{n \leqslant M} |y_n|^2 \leqslant \sum_{n \leqslant M} |t_n|^2\right) \tag{1}$$

Autrement dit, parmi tous les filtres qui partagent le même module de TZ, celui à minimum de phase est celui qui renvoie le plus d'énergie le plus tôt.
Si on note h^0 et h^1 les RI des SLI T_0 et T_1, justifier que $y = h^1 * t$.

6. Montrer par l'égalité de Parseval que

$$\|y\|_2^2 = \|t\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(e^{2i\pi\nu})\hat{x}(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H_0(e^{2i\pi\nu})\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

7. On fixe un entier M . Et on note t^M la suite t tronquée après M.

$$t_n^M = \begin{cases} t_n \text{ si } n \leqslant M \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $y^M = h^1 * t^M$ (y^M n'est pas forcément nulle après M). Montrer que

$$\forall n \leqslant M,\ y_n^M = y_n$$

Et en déduire que $\sum_{n \leqslant M} |y_n|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_n^M|^2$.

8. Grâce à l'égalité de Parseval, montrer que $\|y^M\|_2^2 = \|t^M\|_2^2$. Et conclure.
Ainsi, c'est parce que l'on a pu écrire y comme dépendant de manière causale de la sortie du filtre à minimum de phase que l'on a pu montrer que la réponse du filtre à minimum de phase est celle qui porte le plus d'énergie le plus vite. Cependant, comme vu à la question 6, y et t ont la même énergie totale.

Exercice 4 : Echantillonner la TFtD périodise le signal
On se donne une suite à support fini [3] u, et on se demande si la connaissance de quelques échantillons de $\hat{u}$ (la TFtD de u) permet de reconstruire u.
On va démontrer la formule suivante (pour N un entier > 0) :

$$\forall n,\ \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{n+lN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} \hat{u}\left(\frac{k}{N}\right) e^{2i\pi \frac{k}{N} n} \tag{2}$$

1. Prouver l'équation (2) dans le cas où u est une impulsion à une position m ($u_n = \delta_n^m$).
2. Montrer que la fonction qui à u associe la suite v

$$v_n = \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{n+lN}$$

est linéaire.

3. L'hypothèse de support fini est faite afin d'éviter les questions de sommes infinies, mais le résultat s'applique aussi si $u \in l^1$

3. Montrer que la fonction qui à u associe la suite finie
$$\hat{u}\left(\frac{k}{N}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1$$
est linéaire.
4. En déduire la formule (2) pour toutes les suites à support fini.
5. Soit un SLI inconnu, dont on sait seulement de la réponse impulsionnelle est à support dans $\{0, \dots, N-1\}$ (elle est nulle hors de cet ensemble). Montrer que l'on peut retrouver sa réponse impulsionnelle à partir des
$$C\left(\frac{k}{N}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1$$
où C est la réponse fréquentielle du SLI. (On rappelle que la réponse fréquentielle d'un SLI sur $\mathbb{Z}$ est la TFtD de sa réponse impulsionnelle)
6. (Bonus) Montrer que la fonction qui à u associe v (défini plus haut) est un SLI. Quelle est sa réponse impulsionnelle ? Quelle en est la réponse fréquentielle ? On pourra comparer la formule (2) à la formule du théorème d'inversion qui dit que pour toute suite h
$$\forall n,\ h_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{2i\pi n\nu} d\nu$$

La suite (indexée par n)
$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{n+lN}$$
est la périodisée de u d'ordre N. Nous avons montré que pour la reconstruire, il suffit de quelques échantillons de $\hat{u}$.

Exercice 5 : Echantillonner le signal revient à périodiser le spectre

On se donne une suit $u \in l^1$ et on considère la suite v définie par
$$v_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Dans cet exercice, on note $\phi_n^\nu = e^{2i\pi\nu n}$. (onde de Fourier sur $\mathbb{Z}$ de fréquence ν)

1. Montrer que
$$v_n = \frac{1}{2} u_n.(\phi_n^{\frac{1}{2}} + 1)$$
et en déduire que
$$\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{v}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\hat{u}(\nu) + \hat{u}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right)$$
2. Que vaut la TFtD de la suite $w_n = u_{2n}$ en fonction de celle de u.
3. À la figure 1, on donne le graphique de $\hat{u}$. Tracez le graphique de $\hat{v}$ et $\hat{w}$. N'oubliez pas que la TFtD peut être vue comme périodique de période 1, ainsi $\hat{u}(-0.6)$ est la même chose que $\hat{u}(0.4)$.
4. Que vaut (pour tout n) la suite
$$1 + \phi_n^{\frac{1}{3}} + \phi_n^{-\frac{1}{3}} = 1 + \phi_n^{\frac{1}{3}} + \phi_n^{\frac{2}{3}} = \phi_n^0 + \phi_n^{\frac{1}{3}} + \phi_n^{\frac{2}{3}}$$
En déduire la TFtD des suites γ et ζ définies par
$$\gamma_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ n'est pas multiple de 3} \\ u_n, & \text{si } n \text{ est multiple de 3} \end{cases}$$
$$\zeta_n = u_{3n}$$

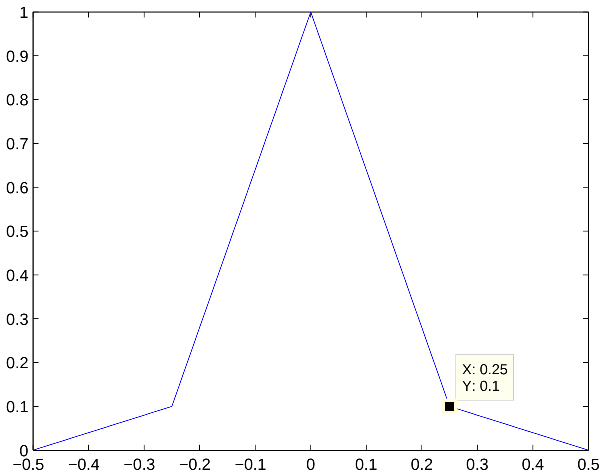


FIGURE 1 – TFtD de u. Le point marqué est situé à $\nu = 0.25$ et $\hat{u}(0.25) = 0.1$.

5. Donner la TFtD de la suite $\beta_n = u_{pn}$ pour tout entier positif p.
6. (Bonus) Quelle serait la TFtD de la suite $\phi_n^{\frac{1}{2}} + 1$? (Un produit est transformé en convolution par la Transformée de Fourier)

Les suites w, ζ et β sont des sous-échantillonnées de la suite u. On constate que le sous-échantiollonnage d'un signal conduit à la périodisation du spectre (la transformée de Fourier).

TD 3, OASIS (Échantillonnage)

Exercice 1 : Rappels
Soit u une suite sommable. Que vaut la TFtD de la suite $v_n = u_{2n}$ et plus généralement la TFtD de la suite $w_n = u_{pn}$ où p est une entier ? Comparer ce résultat à la formule de Poisson.

Exercice 2 : Manipulation du repliement spectral
Pour chacune des fonctions f suivantes, dont on définit le spectre, donner la TFtD de la suite $n \mapsto u_n = f(nT_e)$ (T_e sera donné à chaque qestion). On tracera le graphe du spectre de f et celui de la TFtD. (on rappelle que $F_e = 1/T_e$).

On suppose à chaque fois que f vérifie les conditions du théorème de la formule de Poisson et on ne demande pas le calcul de f.

1. $T_e = 1$ et $\hat{f}(\nu) = \nu + 1/2$ si $-1/2 \leqslant \nu \leqslant 0$ et $\hat{f}(\nu) = 0$ sinon.
2. $T_e = 1$ et $\hat{f}(\nu) = 1/2 - |\nu|$ si $|\nu| \leqslant 1/2$ et $\hat{f}(\nu) = 0$ sinon.
3. $T_e = 2$ et $\hat{f}(\nu) = 1/2 - |\nu|$ si $|\nu| \leqslant 1/2$ et $\hat{f}(\nu) = 0$ sinon.
4. $\hat{f}(\nu) = 1 - \frac{|\nu|}{F_e}$ si $|\nu| \leqslant F_e$. (on demande une réponse littérale où T_e n'a pas de valeur numérique)

Exercice 3 : Choix de coefficients de reconstruction optimaux

On suppose que f est une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème de Shannon (en particulier $\hat{f}$ est à support dans $[-1/2, 1/2]$ et les $f(n)$ sont sommables). On appelle $u_n = f(n)$ la suite de ses échantillons. On reconstruit une approximation de f (notée g) à partir de ses échantillons de la manière suivante

$$g(t) = \sum_n w_n h(t-n)$$

où h est appelé noyau de reconstruction et est fixé et supposé sommable et borné (donc aussi d'énergie finie).

w est définie par

$$w = u * v$$

L'objet de cet exercice est de trouver la suite sommable v qui permet de minimiser l'erreur quadratique

$$E_q = \|g - f\|_2$$

1. Exprimer la TFtD de u en fonction de la transformée de Fourier à temps continu de f.
2. Exprimer la TFtD de w en fonction de celle de u et v.
3. Montrer que g est sommable.
4. Quelle est la transformée de Fourier à temps continu d'une fonction

$$t \mapsto w_n h(t-n)$$

5. En déduire l'expression de la TFtC de g en fonction de celle de h et de la TFtD de w. (on étendra $\hat{w}$ sur $\mathbb{R}$ par $\hat{w}(\nu+n)=\hat{w}(\nu)$ pour tout $\nu\in[-1/2,1/2[$ et $n\in\mathbb{Z}$)
6. Écrire la TFtC de g en fonction de la TFtC de f et h et de la TFtD de v. Pour cela on écrira $\hat{g}(\nu+n)$ pour tout ν dans entre -1/2 et 1/2 et tout entier n. Que vaut le spectre de $f-g$? (on écrira la valeur de $\mathcal{F}(f-g)(\nu+n)$ pour $\nu\in[-1/2,1/2[$ et $n\in\mathbb{Z}$)
7. En écrivant l'égalité de Parseval pour $f-g$ montrer que

$$E_q^2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\hat{f}(\nu)|^2\left(|1-\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu)|^2+\sum_{n\neq 0}|\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu+n)|^2\right)d\nu$$

8. On fixe ν dans $[-1/2,1/2[$. On suppose que les spectres $\hat{v}$ et $\hat{h}$ sont réels (pour simplifier les calculs). On note

$$\alpha=\hat{v}(\nu)$$
$$\beta=\hat{h}(\nu)$$
$$\gamma=\textstyle\sum_{n\neq 0}|\hat{h}(\nu+n)|^2$$

Trouver la valeur de α qui minimise (β et γ étant fixés)

$$(1-\alpha\beta)^2+\alpha^2\gamma$$

On en déduit que la suite v optimale [1] est celle dont la TFtD est

$$\hat{v}(\nu)=\frac{\hat{h}(\nu)}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{h}(\nu+n)|^2}$$

(dans le cas général, $\hat{h}$ est complexe, la formule est

$$\hat{v}(\nu)=\frac{\overline{\hat{h}(\nu)}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{h}(\nu+n)|^2}$$

vous pouvez la démontrer, si vous en avez le temps).
9. Si $\hat{h}$ est à support dans $[-1/2,1/2[$, que doit valoir la TFtD de v ? (On suppose que $\hat{h}$ ne s'annule jamais sur cet intervalle. [2])
10. Le bloqueur : si h est la fonction indicatrice de $[-1/2,1/2[$, justifier le fait que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{h}(\nu+n)|^2=1$$

On pourra utiliser le théorème 4.6 du polycopié (page 81).
11. Si le système étudié est une chaîne Hi-Fi dont l'entrée u_n est le lecteur de CD et h la réponse impulsionnelle de toute la chaîne (que l'on suppose SLI). En gardant à l'esprit que c'est qualité du son audible par un humain qui le but de la Hi-Fi, justifier qu'un meilleur critère à optimiser est

$${E'_q}^2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\hat{f}(\nu)|^2\left(|1-\hat{v}(\nu)\hat{h}(\nu)|^2\right)$$

et en déduire la formule donnant $\hat{v}$ optimal dans ce cas.

---

1. On optimise la valeur de ce qui est multiplié par $|\hat{f}(\nu)|^2$ pour chaque ν
2. D'un point de vue mathématique, cela est contradictoire avec l'hypothèse que h est sommable (car toutes ces hypothèses sur $\hat{h}$ impliquent que $\hat{h}$ n'est pas continue), cette dernière question devrait utiliser les résultats sur le TF des fonctions d'énergie finie pour être mathématiquement juste.

TD 4, OASIS
Construction de bases

Dans ce TD nous présentons plusieurs manières de construire des bases. Nous avons vu en cours que la base de Fourier est une base adaptée à l'étude des SLI. En effet, une onde de Fourier est un vecteur propre de tout SLI.

Ici, nous expliquons comment construire des bases pour de grands espaces vectoriels à partir de bases d'espaces de petite dimension. Nous montrons également comment construire une base bidimensionnelle à partir d'une base pour les signaux monodimensionnel.

Enfin, on voit comment construire une base adaptée à une base de données de signaux.

Exercice 1 : Base de $\mathbb{R}^{mN}$ à partir d'une base de $\mathbb{R}^N$

On suppose que les (e_i) pour i allant de 1 à N forment une base orthonormée de R^N. On note $e_i(k)$ la k-ième composante du vecteur e_i.

On construit les vecteurs f_i^j de l'espace R^{mN} pour i allant de 1 à N et j allant de 1 à m de la manière suivante

$$f_i^j(k) = \begin{cases} e_i(k-(j-1)N) \text{ si } (j-1)N < k \leqslant jN \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par exemple, si $N = 3$, $m = 2$ et $e_1 = (1, 2, 3)$ alors $f_1^1 = (1, 2, 3, 0, 0, 0)$ et $f_1^2 = (0, 0, 0, 1, 2, 3)$.

Montrer que les f_i^j forment une base orthonormée de R^{mN}. (pour cela il suffit de prouver que les produits scalaires entre les f_i^j et $f_{i'}^{j'}$ vaut 1 si $i = i'$ et $j = j'$ et 0 sinon. Cela prouve l'orthonormalité (et donc la liberté de la famille). Comme les f_i^j sont en nombre mN, ils forment une base de R^{mN}).

Exercice 2 : Base de $R^{N\times N}$ à partir d'une base de R^N

On suppose (e_i) une base orthonormée de R^N. Nous construisons les vecteurs de $R^{N\times N}$ notés f_i^j de la manière suivante :

$$f_i^j(k, m) = e_i(k)e_j(m)$$

1. Montrer que les f_i^j sont des vecteurs orthonormés. (Le produit scalaire sur $R^{N\times N}$ est défini par $< v|u >= \sum_{k,m=1}^{k,m=N} v(k, m)u(k, m)$).
2. Soit u un vecteur de $R^{N\times N}$ on note

$$\hat{u}^1(k, m) =< u(k, .)|e_m >= \sum_{l=1}^{N} u(k, l)e_m(l)$$

Autrement dit, $\hat{u}^1(k, .)$ est la décomposition de la ligne $u(k, .)$ sur la base e_i (on rappelle que pour tout vecteur v de R^N on a $v = \sum_i < v|e_i > e_i$ car la base e_i est orthonormée).

On note

$$\hat{u}^2(k,m) = <\hat{u}^1(.,m)|e_k> = \sum_{l=1}^{N} \hat{u}^1(l,m) e_k(l)$$

Autrement dit, $\hat{u}^2(.,m)$ est la décomposition de la colonne $\hat{u}^1(.,m)$ sur la base des e_i.

Montrer que

$$\hat{u}^2(k,m) = <u|f_k^m> .$$

Remarque : On déduit de cela que pour décomposer sur la base des f_i^j il suffit de décomposer chaque ligne de u sur la base des e_i puis de décomposer chaque colonne du résultat sur la base des e_i. Ainsi, si l'on dispose d'un algorithme rapide de calcul de décomposition (par exemple, si les e_i sont la base de Fourier et que l'algorithme est la FFT) alors on peut faire une décomposition rapide bidimensionnelle en partant de l'algorithme monodimensionnel que l'on applique à chaque ligne, puis à chaque colonne du résultat (ou colonnes puis lignes).

Exercice 3 : Construction d'une base adaptée à un ensemble de vecteurs

Cette fois-ci on se donne un ensemble de n vecteurs de R^N notés V_i pour i allant de 1 à n. On cherche à construire une base de vecteurs v_i (i allant de 1 à N) qui représentent au mieux cet ensemble $\{V_i\}$.

Dans un premier temps, on cherche **un seul** vecteur v tel que

$$\|v\| = 1$$

et

$$E = \sum_{i=1}^{n} \|V_i - <V_i|v> v\|^2 \text{ soit minimale}$$

Autrement dit, on cherche un vecteur v qui minimise l'écart en les V_i et leur projection orthogonale sur la droite engendrée par v.

1. Montrer que

$$E = \sum_i \left(\|V_i\|^2 - <V_i|v>^2\right)$$

   En déduire que, pour minimiser E, il faut maximiser la quantité

$$E' = \sum_i <V_i|v>^2$$

2. Remarque : Lorsque deux vecteurs u et v ont la forme colonne, le produit scalaire peut s'écrire

$$<u|v> = u^T v = v^T u$$

   où u^T représente la transposition de u (u^T est un vecteur ligne) et le produit entre u^T et v est le produit matriciel.

   En déduire que

$$E' = v^T \left(\sum_i V_i V_i^T\right) v$$

3. On note

$$A = \sum_i V_i V_i^T$$

C'est une matrice carrée $N \times N$ semi-définie positive.

On suppose que A est définie positive et diagonalisable dans la base orthonormée $e_1, ..., e_N$ avec les valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_N > 0$.

Montrer que pour maximiser E' il faut prendre $v = e_1$ (ou $v = -e_1$).

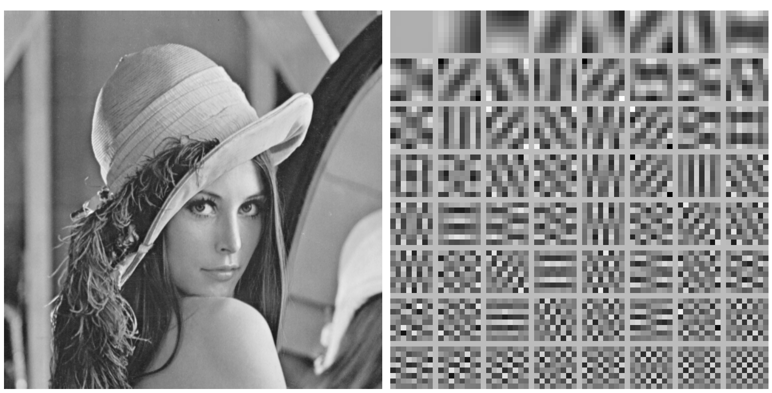
Remarque : Pour construire toute une base au lieu d'un seul vecteur, on peut itérer le procédé de la manière suivante

1. Nommer v_1 le vecteur que l'on vient de trouver.
2. Remplacer les V_i par $V_i - < V_i | v_1 > v_1$ (i.e. leur retrancher leur projection sur v_1).
3. Chercher un vecteur qui minimise l'erreur quadratique E.
4. Il n'est pas difficile de constater que ce vecteur sera e_2 (la nouvelle matrice A aura v_1 comme vecteur propre associé à la valeur propre 0).
5. Et ainsi de suite...

Au final la base ainsi construite sera la base de diagonalisation de la matrice $A = \sum_i V_i V_i^T$.

Ci-dessous, on montre une application de cet exercice. À gauche une image dont on a extrait tous les morceaux de taille 8×8 possibles. On a mis sous forme de vecteur (de taille 64) ces morceaux : ce sont les V_i. Puis calculé les vecteurs propres de la matrice A. Ces vecteurs propres ont été remis au format 8×8 pour être affichés dans l'image de droite. Nous les avons classés par ordre de valeur propre décroissante de gauche à droite et du haut vers le bas.

On constate que e_1 (celui avec la plus grande valeur propre) est une imagette constante. Alors que e_{64}, le vecteur associé à la plus faible valeur propre ressemble à l'onde de Fourier de fréquence maximale. Nous avons ici une autre confirmation du fait que les images naturelles sont un phénomène basse fréquence, puisque les vecteurs qui en capturent le plus d'énergie sont des vecteurs basse fréquence (e_1, e_2... ressemblent à des ondes de Fourier de fréquence croissante).



TD (Processus 1/2), OASIS

Exercice 1 :
On rappelle que si x et y sont deux suites sommables telles qu'elles vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \sum_{j=0}^{j=q} b_j y_{n-j} = \sum_{i=0}^{i=p} a_i x_{n-i}$$

et que le polynôme $Q(z) = \sum_j b_j z^j$ n'a pas de zéros sur le cercle unité (et on note $P(z) = \sum_i a_i z^i$). Alors on a

$$y = h * x$$

où h est une suite sommable dont la transformée en Z vaut

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \text{ i.e. } \hat{h}(\nu) = \frac{P(e^{-2i\pi\nu})}{Q(e^{-2i\pi\nu})}$$

Et si X et Y sont des processus SSL alors on peut aussi définir Y à partir de X par un filtrage récursif. On rappelle aussi que si $Y = h * X$ alors $R_Y = (h * \tilde{h}) * R_X$ et $S_Y(\nu) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_X(\nu)$ (où $\tilde{h}_n = \overline{h_{-n}}$)

1. On suppose que X est un bruit blanc de moyenne $m_X = 0$ et puissance $Var(X_0) = \sigma^2$. Rappeler ce que valent $R_X(k)$ et $S_X(\nu)$.
2. Si Y est un processus SSL qui vérifie

$$Y_n - \frac{1}{2} Y_{n-1} = X_n$$

   Que valent R_Y et S_Y ? (on commencera par calculer la réponse impulsionnelle du filtre récursif défini ici. Pour l'expression de $S_Y(\nu)$ on se contentera d'une expression en module au carré d'une fraction rationnelle en $e^{-2i\pi\nu}$)
3. Tracer l'allure de $S_Y(\nu)$.

Exercice 2 : Estimation de la moyenne d'un processus SSL
On suppose dans ce qui suit que X est un processus SSL réel dont la fonction d'autocorrélation R_X est sommable. Ceci implique, en particulier, qu'il possède une densité spectrale de puissance S_X qui est la TFtD de R_X. La moyenne de X et notée m_X.

1. On fixe N un entier strictement positif. On appelle T la variable aléatoire

$$T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n$$

   Que vaut la moyenne de T en fonction de m_X ?
2. Montrer que la variance de T est donnée par la formule

$$Var(T) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{k=N-1} \frac{N - |k|}{N} R_X(k)$$

   On pourra pour cela remarquer que si on note h la suite égale à $\frac{1}{N}$ entre 0 et $N-1$ et zéro ailleurs et que si on appelle $Z = h * X$ le résultat du filtrage de X par h alors Z est SSL et que $T = Z_{N-1}$ et dont $Var(T) = Var(Z_{N-1}) = R_Z(0)$. On applique ensuite les formules de filtrage des processus.

3. Montrer, grâce au théorème de convergence dominée, que lorsque N tend vers l'infini alors

$$N(Var(T) - \frac{1}{N}S_X(0))$$

tend vers 0. (en particulier $Var(T)$ tend vers 0)

Ainsi, on a un moyen empirique, pour un processus inconnu, d'estimer sa moyenne. Il suffit de moyenner sur un nombre assez grand d'échantillons.

4. (À faire hors TD, révision du cours de probabilités) Si on suppose que X est gaussien blanc, c'est-à-dire que n'importe quelle collection finie de variable X_{n_i} forme un vecteur gaussien, et les X_n sont i.i.d (gaussiennes). Quelle est la loi de T en fonction de la moyenne et de la variance des X_n (qui ne dépendent pas de n) ?

Exercice 3 : Etude des processus à bande limitée On suppose que X est un processus SSL réel qui possède une densité spectrale de puissance S_X telle que

$$\exists b < \frac{1}{2},\ \forall \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,\ (|\nu| > b) \Longrightarrow (S_X(\nu) = 0)$$

i.e. S_X est nulle hors de l'intervalle $[-b, b]$. On va montrer que de tels processus varient "peu" dans le temps. On s'intéresse pour cela à la quantité

$$\Delta_p = E((X_{n+p} - X_n)^2)$$

qui ne dépend que de p (car X est SSL).

1. Montrer que $\Delta_p = 2(R_X(0) - R_X(p))$. En déduire que, $\Delta_p \leqslant 4R_X(0)$.
2. Utiliser le théorème d'inversion de la TFtD pour écrire $R_X(0)$ et $R_X(p)$ en fonction de S_X et en déduire que

$$\Delta_p = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(\nu)(1 - e^{2i\pi p\nu})d\nu$$

3. Comme Δ_p est réel, on peut écrire (on ne demande pas de démontrer)

$$\Delta_p = partier\acute{e}elle(\Delta_p) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(\nu)\,(1 - \cos(2\pi p\nu))\,d\nu$$

En déduire que

$$\Delta_p = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(\nu) 2\sin^2(\pi p\nu)d\nu$$

et enfin que

$$\Delta_p \leqslant (2\pi bp)^2 R_X(0)$$

(on rappelle que pour tout t réel $|\sin(t)| \leqslant |t|$). [1]

4. L'inégalité de Markov stipule que pour toute variable aléatoire positive Z et pour tout α

$$P(Z > \alpha) \leqslant \frac{E(Z)}{\alpha}$$

(une variable aléatoire ne peut pas être trop souvent trop grande, sinon sa moyenne est grande)

En déduire que

$$P(|X_{n+p} - X_n| > \epsilon) \leqslant \frac{(2\pi bp)^2 R_X(0)}{\epsilon^2}$$

1. Cette inégalité n'est une amélioration de la l'inégalité de la question 1 que si $2\pi bp \leqslant 2$

TD (Processus 2/2), OASIS

Exercice 1 : Décomposition d'un bruit blanc dans une base orthonormée

Soit N un entier fixé et $X_0, \dots, X_{N-1}$ des variables réelles indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m_X et de variance σ^2 et définies sur un espace parobabilisé Ω. Pour tout $\omega \in \Omega$ on note $X(\omega)$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les composantes sont $X_0(\omega), \dots, X_{N-1}(\omega)$ (on peut voir X comme une variable aléatoire à valeur vectorielle). Soit $e_0, \ \ , e_{N-1}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$. On définit les variables aléatoires Y_k par

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \ Y_k(\omega) =< e_k | X(\omega) >$$

(où <x|y> désigne le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$)

1. calculer la moyenne de chacune des variables Y_k en fonction de la décompostion du vecteur $(1, \dots, 1)$ sur la base des e_k.
2. Montrer que
$$Cov(Y_l, Y_m) = \sigma^2 \delta_l^m$$
3. On admet que les résultats ci-dessus restent valables si les variables X_k sont à valeurs complexes.

   Donner l'allure qu'aurait le graphique obtenu à la fin de la suite de commandes matab suivantes (demandez aux encadrants dès que vous n'êtes pas sûrs de ce que fait une commande matlab) :

```
N=16;
x=1/sqrt(2)*(randn(1,N)+i*randn(1,N));% génération d'une suite de variables iid de
                                                                moyenne nulle et de variance 1
fx=fft(x)/sqrt(N);
plot(abs(fx).^2)
```

   L'allure changerait-elle si on faisait

```
N=1600; % seul N change
x=1/sqrt(2)*(randn(1,N)+i*randn(1,N));% génération d'une suite de variables iid de
                                                                moyenne nulle et de variance 1
fx=fft(x)/sqrt(N);
plot(abs(fx).^2)
```

   Quelle serait l'allure pour le cas suivant

```
N=1600;
x=1/sqrt(2)*(randn(1,N)+i*randn(1,N));
s=zeros(1,16);
for k=0:99
  fx=fft(x(k*16+1:k*16+16))/sqrt(16); %on découpe x en 100 morceaux de taille 16
  s=s+abs(fx).^2;
end
s=s/100;
plot(s)
```

On pourra se reporter au polycopié et en particulier à la démonstration de la positivité de la densité spectrale de puissance. Ainsi, dans les deux derniers cas, on obtient, pour un même nombre d'échantillons de bruit (1600) une estimation plus claire de la DSP en découpant le vecteur en plusieurs morceaux et en moyennant l'estimation de la DSP sur plusieurs tirages.

Exercice 2 : Processus harmonique On se donne une variable aléatoire ϕ uniforme sur $[0, 2\pi]$. On note X_0 la variable aléatroire $X_0 = e^{i\phi}$

1. Calculer la moyenne et la variance de X_0. (on pourra calculer la moyenne de ses parties réelles et imaginaires séparément).
2. On fixe une fréquence $\nu_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On considère le processus X défini par

$$X_n = e^{2i\pi\nu_0 n + i\phi}$$

Montrer que X est un processus SSL. On calculera sa moyenne et son autocorrélation R_X.

3. R_X est-elle sommable ? Quelle serait la DSP d'un tel processus si on utilisait l'outil "Dirac" ?
4. En vous aidant du polycopié (page 49), donner l'allure du module de la TFtD du vecteur $(X_0, \ldots, X_{N-1})$.
5. On suppose pour simplifier les calculs que $\nu_0 = 0$ et $\phi = 0$ on note $Y_n = X_n + B_n = 1 + B_n$ où B est un bruit blanc de puissance σ^2. On appelle e_k les vecteurs de la base de Fourier de l'ensemble $\{0 \ldots N - 1\}$. Et on appelle

$$Z_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} < Y(\omega)|e_k >= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l(\omega) e^{-2i\pi \frac{k}{N} l}$$

les variables aléatoires qui sont la TFD des variables $Y_0 \ldots Y_{N-1}$ (divisés par $\sqrt{N}$ pour transformer la base de Fourier en une base normée). Calculer la moyenne de Z_0.

6. Calculer l'écart type de Z_k pour k non nul (utiliser l'exercice 1).
7. On suppose que la fréquence ν_0 est inconnue. En vous basant sur ce qui précède, et sans faire de calculs, pour quelles valeurs de σ (en ordre de grandeur) peut-on déterminer ν_0 en observant simplement le module de la TFD de N échantillons du processus Y ? À quelle précision une telle estimation est-elle valable ?