Travaux Pratiques 2 - OASIS SI101 :
Transformation(s) de Fourier et échantillonnage

Introduction

Dans ce TP on revoie les notions de fréquences réduites et réelles. Puis vous construisez l'outil d'analyse appelé spectrogramme.

Avec le spectrogramme vous pourrez analyser une classe particulière de son de parole.

Vous utilisez ensuite le spectrogramme pour visualiser le phénomène de repliement spectral.

1 Fréquence en Hz, fréquence réduite : rappels

Si $h_n = f(nT_e)$ est le résultat de l'échantillonnage d'une fonction f à la fréquence $F_e = 1/T_e$ alors une onde de Fourier sur $\mathbb{R}$ de fréquence ξ va donner

$$h_n = e^{2i\pi\xi nT_e} = e^{2i\pi\frac{\xi}{F_e}n}$$

soit une onde de Fourier à la fréquence $\frac{\xi}{F_e}$. Ainsi, la bonne normalisation pour l'axe des abscisses, si on connaît la fréquence d'échantillonnage F_e, est

```
Fe=1000; Te=1/Fe; t=np.arange(0,300)*Te; #fréquence d'échant. 1000Hz. t  qui représente
                      # le temps pour 300 échantillons
xi=100; #fréquence en Hertz
h=cos(2*pi*xi*t); # équivalant à cos(2*pi*(nu/Fe)*(0:299))
fh=fft(h)
fh=fh[0:151] # comme h est réel inutile de garder plus de la moitié de la TF
plt.plot(np.arange(0,151)/300*Fe, abs(fh)); # on indexe en vraies fréquences.
                  # la position 150 dans la TFD donne Fe/2=500Hz, ici.
```

Q.1 On enregistre sur CD le son d'une note "la" à 440Hz. On prend 1500 échantillons successifs de ce CD et on en trace la TFD de taille 1500. Donner la position du ou des pics qui apparaissent ? (Pour le CD on suppose $F_e = 44000Hz$)

2 Spectrogramme et fréquence instantanée

On veut construire une fonction spectrogramme. Pour une suite u définie sur $\mathbb{Z}$ le spectrogramme est une fonction à deux paramètres : $\nu = k/M$ une fréquence entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et une position n

$$\forall (n,k) \in \mathbb{Z} \times \{0,\dots,M-1\},\ U\left(n, \frac{k}{M}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\frac{k}{M}m}$$

où w est une fenêtre de taille N (seuls $w_0 ... w_{N-1}$ sont non nuls). On ne s'intéressera qu'au module de U. Dans tout ce TP on prendra $w_m = 0.54 - 0.46\cos(2\pi\frac{m}{N-1})$ (pour $m = 0...N-1$)

Q.2 Montrer que pour n fixé, on peut calculer tous les $U\left(n, \frac{k}{M}\right)$ grâce à une TFD (d'ordre M) bien choisie (suivie par une multiplication par $e^{-2i\pi\frac{k}{M}n}$ qui ne change rien au module).

— Complétez la fonction **une_colonne_spectrogramme** qui prend comme paramètres : M, N, n et le signal u et renvoie le vecteur $|U(n, \frac{k}{M})|$ pour $k = 0...M/2$ (on suppose désormais que l'on traite un signal réel et que M est toujours pair).

— Complétez la fonction **affiche_spectrogramme**. Elle prend un paramètre supplémentaire nb (le pas entre deux fenêtres)et renvoie un tableau **spectro** à double entrée de taille $(M/2+1) \times (Ent((L-N)/nb)+1)$ qui est définit ainsi

$$\mathbf{spectro}[k,j] = U(nb * j, k/M)$$

(L =longueur du signal u, et Ent est la fonction partie entière)

Finaliser l'affichage en choisissant bien les valeurs de début et de fin du temps et des fréquences.

— Observer le spectrogramme du signal sonore "aeiou.mat" [1]. Pouvez-vous compter le nombre de voyelles prononcées en regardant le spectrogramme ?

Q.3 Si on modélise la production d'une voyelle par le processus suivant : un signal est envoyé des poumons, passe par les cordes vocales, puis va dans la cavité buccale qui agit comme un SLI.
À votre avis d'où proviennent les raies que l'on observe dans le spectrogramme d'une voyelle ? Du SLI cavité buccale ? Des cordes vocales ? Ou des poumons ? [2]

Q.4 Quelle différences voyez-vous entre le son "u" et le son "ou" ?

Q.5 Quelle est la fréquence fondamentale approximative des cordes vocales du locuteur ?

Q.6 Analyser les sont chinois_is.wav et chinois_as.wav et chinois_us.wav. Quelle différence voyez-vous entre les différents tons (ces sons sont prononcés par une personne qui parle le mandarin et les notations pour les quatre sons a sont ā, á ă et à respectivement). Est-ce que la différence s'explique plus, à votre avis, par la variation du travail des cordes vocales ou des variations de la cavité buccale ?

Fréquence instantanée On veut construire un signal dont la fréquence instantanée varie lentement et observer un tel signal au travers de son spectrogramme. Supposons qu'un signal soit défini par $f(t) = cos(2\pi r(t))$. Si $r(t)$ est une fonction linéaire $r(t) = \nu t$ alors on voit que ce signal est une onde (réelle) de fréquence ν. Plus, généralement, supposons que $r(t)$ soit une fonction dérivable, et soit t_0 un instant autour duquel on veut analyser $f(t)$. On écrit

$$f(t) \approx \cos(2\pi(r(t_0) + r'(t_0)(t-t_0))) = cos(2\pi r'(t_0)t + \phi)$$

Le signal $f(t)$ se comporte comme une onde de fréquence $r'(t_0)$ autour du point t_0.

On se donne une fréquence d'échantillonnage F_e construire un signal (**s**) d'une durée de $T = 8$ secondes dont la fréquence instantanée varie de 0 à $F_e/2$ entre le début et la fin. On prendra, pour tester, $F_e = 44100$.

Q.7 Donner la formule de ce signal.

écouter le signal construit par **joue_son(s,Fe)**. Observer son spectrogramme.

Observer le spectrogramme de **s[: :2]**.

Q.8 Que constatez vous ? Comment faut-il normaliser les axes de visualisation pour ce spectrogramme ?

Q.9 Rappeler la valeur de la TFtD de **s[: :2]** en fonction de celle de **s** (voir TD2), et expliquer ainsi l'observation faite sur le spectrogramme.

Écouter **joue_son(s[: :2],Fe/2) ;** (pourquoi $F_e/2$?).

1. La lecture du fichier depuis le disque dur est déjà écrite. La fréquence d'echantillonnage nécessaire à l'écoute et à l'analyse est $Fe = 22050$Hz.

2. Si vous ne voyez pas les raies, il faut songer à augmenter les paramètres N et M pour augmenter la résolution fréquentielle. L'ordre de grandeur de l'écart entre les raies est de 100Hz. Pensez à utiliser la fonction de zoom du visualiseur de python (voir note **??**).

Q.10 Quelle différence avec l'écoute à F_e ? Le repliement spectral a-t-il disparu pour autant ?

Q.11 Proposer un filtre récursif qui devrait s'appliquer à s avant le sous-échantillonnage afin de faire disparaître le repliement. On proposera un filtre ayant 2 pôles complexes et 6 zéros. On donnera simplement le dessin de ces pôle en rapport avec un cercle unité.

Q.12 Écrire (succintement) le code python associé au filtre récursif ci-dessus.