Chapitre 2
Martingales à temps continu

Pascal Moyal

21 mai 2021

Table des matières

Dans ce chapitre, nous introduisons les propriétés essentielles des martingales à temps continu, en tant qu'outil (et objet de base) du calcul stochastique. Nous n'en donnerons donc que les caractéristiques principales, en tant qu'elles sont utiles dans le contexte du calcul stochastique. Les propriétés ci-après étendent parfois des propriétés connues concernant les martingales à temps discret. Elles sont parfois données sans démonstration ; je vous renvoie souvent au manuel de référence pour des détails sur ces preuves.

Dans tout le chapitre, on fixe un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1 Rappels sur les filtrations et les temps d'arrêt

1.1 Filtrations

Rappelons d'abord ce qu'est une filtration,

Définition.

Une filtration de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(\mathscr{F}_t,\, 0 \le t \le \infty)$ de sous-tribus de $\mathscr{F}$, croissante pour l'inclusion.

Exemple 1. Pour tout processus stochastique $X := (X_t,\, t \ge 0)$, la *filtration naturelle* de X est la filtration $(\mathscr{F}_t^X,\, 0 \le t \le \infty)$, définie par

$$\begin{cases} \mathscr{F}_t^X & = \sigma\left(X_s,\, :\, 0 \le s \le t\right), \quad t \ge 0, \\ \mathscr{F}_\infty^X & = \sigma\left(X_s,\, :\, s \ge 0\right). \end{cases}$$

Définition.

On dit que la filtration $(\mathscr{F}_t,\, 0 \le t \le \infty)$

— est *complète* si $\mathscr{F}_0$ comprend tous les événements négligeables de $\mathscr{F}$, i.e.

$$\forall A \in \mathscr{F}, \quad \left[\mathbb{P}\left[A\right] = 0 \Longrightarrow \forall t \ge 0,\, A \in \mathscr{F}_t\right].$$

— est *continue à droite*, si pour tout $t \ge 0$,

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s.$$

— *satisfait les conditions habituelles* si elle est complète et continue à droite.

Dans toute la suite, par défaut, $(\mathscr{F}_t,\, 0 \le t \le \infty)$ est un filtration satisfaisant les conditions habituelles.

Définition.

Un processus $(X_t,\, t \ge 0)$ à valeurs dans l'espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ est dit $(\mathscr{F}_t)$-*adapté* si pour tout $t \ge 0$, la v.a. X_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable. Il est dit $(\mathscr{F}_t)$-*progressif* si pour tout $t \ge 0$, l'application

$$\begin{cases} (\Omega \times [0,t], \mathscr{F} \otimes \mathcal{B}([0,t])) & \longmapsto (E, \mathcal{E}) \\ (\omega, s) & \longmapsto X_s(\omega) \end{cases}$$

est mesurable.

Remarque. — Tout processus $(\mathscr{F}_t)$-progressif est $(\mathscr{F}_t)$-adapté ;

— Tout processus est adapté à sa filtration naturelle.

— La filtration naturelle de tout processus càdlàg satisfait les conditions habituelles.

On a alors le résultat suivant,

Proposition.

Si E est un espace métrique et le processus $(X_t,\, t \geq 0)$ à valeurs dans E est $(\mathscr{F}_t)$-adapté et à trajectoires *càdlàg* (continu à droite et admettant une limite à gauche en tout point) ou *càglàd* (continu à gauche et admettant une limite à droite en tout point), alors il est aussi $(\mathscr{F}_t)$-progressif.

Démonstration. Voir la démonstration de la Proposition 3.1, p.34 du livre de Le Gall. □

1.2 Temps d'arrêt

On fixe dans toute la section, une filtration $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$ satisfaisant les conditions habituelles. On a rappelé dans le chapitre précédent, les principales définitions liées aux $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. Nous complétons par quelques éléments qui seront utiles pour la suite. Rappelons en particulier que pout un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, $\mathscr{F}_\tau$ est la tribu

$$\mathscr{F}_\tau = \left\{ A \in \mathscr{F}_\infty \,:\, \text{ for all } t \geq 0,\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \right\}.$$

On a les propriétés suivantes, utiles pour la suite,

Proposition.

Soit $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$, une filtration et τ un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. Alors,

1. Si il existe $t \in \mathbb{R}+$ tel que $\mathbb{P}\left[\tau = t\right] = 1$, alors $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$.
2. τ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.
3. Si τ' est un autre $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, alors $\tau \wedge \tau'$ est un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, et $\mathscr{F}_{\tau\wedge\tau'} = \mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_{\tau'}$.
4. Si τ' est un autre $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}\left[\tau \leq \tau'\right] = 1$, alors $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau'}$.
5. Si $\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une suite croissante p.s. de $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt, alors $\tau = |im_{n\to\infty}\tau_n$ est un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt.
6. Toute v.a. Y à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et définie sur $\{\tau < \infty\}$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable si et seulement si pour tout $t \geq 0$, la v.a. $Y\mathbf{1}_{\tau\leq t}$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Démonstration. Voir le livre de J.F. Le Gall, pp.36-37. □

On a le résultat fondamental suivant,

Proposition.

Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ un processus progressif à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et τ un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. Alors la v.a. X_τ définie sur $\{\tau < \infty\}$, est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.

Démonstration. On applique le point 6 de la propriété précédente. □

2 Définitions et principales propriétés

Dans toute cette section, $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$ désigne une filtration d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

2.1 Martingales

Définition.

Le processus $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale si

1. il est adapté, i.e, pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable ;
2. il est intégrable, i.e. pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$;
3. pour tous $0 \leq s < t$, $\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] = M_s$ p.s..

On dit que le processus $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-sur-martingale (respectivement, une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale) si pour touts $0 < s \leq t$, $\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] \leq M_s$ p.s. (resp., $\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] \geq M_s$).

En particulier, on remarque immédiatement que si $(X_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale (respectivement, sous-martingale, sur-martingale) la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[M_t\right]$ est constante (resp., croissante, décroissante). En effet, pour tous $0 \leq s < t$ on a

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[M_s\right] \quad (\text{ resp.}, \ \geq, \quad \leq).$$

On peut naturellement restreindre la définition d'une $(\mathscr{F}_t)$-(sur-,sous-)martingale sur tout intervalle borné $[0, T]$, on parle alors de (sur-,sous-)martingale à horizon fini T. Il est très simple de construire de telles martingales,

Proposition.

Soit $T > 0$ et $(\mathscr{F}_t,\, t \in [0, T])$ une filtration sur $[0, T]$. Alors $(M_t,\, t \in [0, T])$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale à horizon fini T si et seulement si il existe une v.a. $\mathscr{F}_T$-mesurable et intégrable ξ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, $M_t = \mathbb{E}\left[\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right]$, p.s..

Démonstration. Si $(M_t,\, t \in [0, T])$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale, alors le résultat est clairement vérifié en posant $\xi := M_T$. Quant à la réciproque, en posant pour tout t, $M_t = \mathbb{E}\left[\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right]$, p.s. pour une telle v.a. ξ, on obtient clairement un processus $(\mathscr{F}_t)$adapté, intégrable puisque ξ l'est, et telle que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right] \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\xi \,|\, \mathscr{F}_s\right] = M_s, \ \text{ p.s..}$$

□

Proposition.

1. Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $(\mathscr{F}_t)$-martingale. Alors, pour toute fonction convexe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$, $(F(M_t),\, t \geq 0)$ est une sous-martingale.
2. Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $(\mathscr{F}_t)$-sousmartingale. Alors, pour toute fonction convexe et croissante $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$, $(F(M_t),\, t \geq 0)$ est une sous-martingale.

En particulier, dans les deux cas $(|M_t|^p,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale pour tout $p \geq 1$ tel que $\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. On applique l'inégalité de Jensen :

1. si $(M_t,\, t \geq 0)$ une $(\mathscr{F}_t)$-martingale, on a pour tous $0 \leq s < t$,
$$\mathbb{E}\left[F(M_t) \,|\, \mathscr{F}_s\right] \geq F\left(\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right]\right) = F(M_s).$$
2. si c'est une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale de F est croissante, on a pour tous $0 \leq s < t$,
$$\mathbb{E}\left[F(M_t) \,|\, \mathscr{F}_s\right] \geq F\left(\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right]\right) \geq F(M_s).$$

$\square$

Un corollaire important du résultat précédent est que les espérances de toute (sous, sur-)martingale sont bornées sur tout intervalle,

Corollaire.

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale ou une $(\mathscr{F}_t)$-sur-martingale. Alors pour tout $T \geq 0$ on a $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$.

Démonstration. Supposons que $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale et soit $0 \leq t \leq T$. On a déjà $\mathbb{E}[M_t] \geq \mathbb{E}[M_0]$. Par ailleurs, comme la fonction partie positive $x \mapsto x^+ = \max(x, 0)$ est croissante et convexe, $((M_t)^+,\, t \geq 0)$ est aussi une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale d'après la proposition précédente. On a donc également $\mathbb{E}[(M_t)^+] \leq \mathbb{E}[(M_T)^+]$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 2x^+ - x$ et en combinant ces deux inégalités pour tout t, nous obtenons que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[|M_t|\right] \leq 2\mathbb{E}\left[(M_T)^+\right] - \mathbb{E}\left[M_0\right] \leq 2\mathbb{E}\left[|M_T|\right] + \mathbb{E}\left[|M_0|\right] < \infty.$$

Dans le cas où $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-sur-martingale, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $(-M_t,\, t \geq 0)$, qui est une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale. $\square$

Remarquons maintenant que

Définition.

On dit que la $(\mathscr{F}_t)$-martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ est :
— de carré intégrable, si $\mathbb{E}\left[(M_t)^2\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$;
— bornée dans L^2, si $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.

Remarquons que si $(M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale, d'après la Proposition précédente, pour tout $p \geq 1$ $((M_t)^p,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t)$-sous-martingale, et donc la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right]$ est croissante. En particulier, pour tout $T \geq 0$ on a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] = \mathbb{E}\left[|M_T|^p\right], \tag{1}$$

ce qui, bien entendu, ne garantit en rien que les quantités précédentes soient finies. Ce résultat est complété par la Proposition suivante,

Proposition (Inégalité de Doob)**.**

Pour tout $p > 1$ et tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} (M_t)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[(M_T)^p\right].$$

Démonstration. Ce résultat étend au temps continu le résultat connu pour les martingales à temps discret. Voir la preuve de la Proposition 3.8, (ii) du livre de J.F. Le Gall pour plus de détail. $\square$

En rassemblant ce résultat avec (1), nous obtenons en particulier ($p = 2$) que pour tout $T > 0$, si la $(\mathscr{F}_t)$-martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ est de carré integrable,

$$\mathbb{E}\left[(M_T)^2\right] = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[(M_t)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} (M_t)^2\right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[(M_t)^2\right] = 4\mathbb{E}\left[(M_T)^2\right] < \infty,$$

ce qui implique que toute martingale de carré intégrable est toujours bornée dans L^2 sur tout intervalle.

Le résultat suivant aura des applications cruciales dans la construction de l'intégrale stochastique,

Proposition.

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$, une $(\mathscr{F}_t)$-martingale de carré intégrable, soient $0 \leq s < t$ et une subdivision $s = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ une subdivision de $[s,t]$. Alors,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s\right],$$

et en particulier

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right].$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right] - 2M_{t_{i-1}}\mathbb{E}\left[M_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right] + M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right] - 2M_{t_{i-1}}^2 + M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

Or, on a également que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(M_t - M_s\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathscr{F}_s\right] - 2M_s\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathscr{F}_s\right] + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathscr{F}_s\right] - 2M_s + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_s\right],
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2 Martingales browniennes

Comme on va le voir, plusieurs fonctions simples du mouvement brownien sont des martingales. On commence par la définition suivante,

Définition.

On dit que le processus $(B_t,\, t \geq 0)$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien si c'est un mouvement brownien, $(\mathscr{F}_t)$-adapté et tel que pour tous $0 < s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$ (on dira alors que le processus est *à accroissement indépendants par rapport à* $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$).

Remarquons que, par sa définition-même, tout mouvement brownien est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien si $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$ désigne sa filtration naturelle. On a les résultats suivants,

Proposition (Martingales browniennes)**.**

Soit $(B_t,\, t \geq 0)$, un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. Alors les processus $(B_t,\, t \geq 0)$, $\left((B_t)^2 - t,\, t \geq 0\right)$ et $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right),\, t \geq 0\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont des $(\mathscr{F}_t)$-martingales.

Démonstration. Nous montrons d'abord que $(B_t,\, t \geq 0)$ est une martingale. Ce processus est $(\mathscr{F}_t)$-adapté par définition et intégrable (et d'ailleurs, centré). Finalement, pour tous $0 \leq s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}\left[B_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s + B_s \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s \,|\, \mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] + B_s = B_s \text{ p.s.},$$

où l'on a utilisé l'indépendance des accroissements par rapport à $(\mathscr{F}_t,\, 0 \leq t \leq \infty)$ dans la troisième égalité.
On note maintenant $M_t = (B_t)^2 - t$ pour tout $t \geq 0$. Il est alors clair que $(M_t,\, t \geq 0)$ est adapté puisque $(B_t,\, t \geq 0)$ l'est, et intégrable puisque pour tout t, B_t est de carré intégrable. De plus, pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\right] - t &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 - (B_s)^2 + 2B_s B_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] - (B_s)^2 + 2B_s \mathbb{E}\left[B_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] - t \\
&= t - s - (B_s)^2 + 2(B_s)^2 - t = (B_s)^2 - s = M_s \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

La troisième propriété de martingale sera montrée en exercice. □

Définition.

On appelle *mouvement brownien géométrique* de paramètres $x_0 > 0$, $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, le processus $(X(x_0, \sigma, \mu)_t,\, t \geq 0)$ défini pour tout t par

$$X(x_0, \sigma, \mu)_t = x_0 \exp\left(\sigma B_t + \mu t\right),$$

où $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

Proposition.

Le mouvement brownien géométrique $(X(x_0,\sigma,\mu)_t,\, t \geq 0)$ de paramètres x_0, σ et μ a les propriétés suivantes :

1. Il est à trajectoires continues ;
2. Pour tout t, la loi de $X(x_0,\sigma,\mu)_t$ est **log-normale**, i.e., la loi de $\log\big(X(x_0,\sigma,\mu)_t\big)$ est normale. Elle admet pour densité
$$f(x) := \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{1}{2x\sigma^2}\Big(\log(x/x_0) - \mu x\Big)^2\right\}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x).$$
3. Ses accroissements relatifs sont indépendants : pour tout $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ les v.a.
$$\frac{X(x_0,\sigma,\mu)_{t_1} - X(x_0,\sigma,\mu)_{t_0}}{X(x_0,\sigma,\mu)_{t_0}}, \cdots, \frac{X(x_0,\sigma,\mu)_{t_n} - X(x_0,\sigma,\mu)_{t_{n-1}}}{X(x_0,\sigma,\mu)_{t_{n-1}}}$$
sont indépendantes.
4. Pour tous $0 \leqslant s < t$, $\dfrac{X(x_0,\sigma,\mu)_t}{X(x_0,\sigma,\mu)_s}$ a même loi que $\dfrac{X(x_0,\sigma,\mu)_{t-s}}{X(x_0,\sigma,\mu)_0}$.

Démonstration. La proposition sera démontrée en exercice de TD. □

Le processus suivant va jouer un rôle déterminant dans les applications en finance,

Définition (Processus de Black et Scholes)**.**

On appelle *processus de Black & Scholes* de valeur initiale S_0, de taux $r > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$, le mouvement brownien géométrique $(S_t,\, t \geq 0) = \left(X\left(S_0, \sigma, r - \frac{\sigma^2}{2}\right)_t,\, t \geq 0\right)$, i.e. pour tout $t \geq 0$,
$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right),$$
où $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

La Proposition sur les martingales browniennes montre en particulier que pour tous $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, le processus $\left(\exp\left(-\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right)t\right) X(x_0,\sigma,\mu)_t,\, t \geq 0\right)$, est une $(\mathscr{F}_t^B)$-martingale, où $(\mathscr{F}_t^B,\, 0 \leq t \leq \infty)$ désigne la filtration naturelle du mouvement brownien. En particulier, $(\exp(-rt)\, S_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_t^B)$-martingale, où $(S_t,\, t \geq 0)$ est le processus de Black & Scholes.

3 Thérorèmes d'arrêt

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$, une $\mathscr{F}_t$-martingale. Nous savons que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$. Il serait très tentant, et nécessaire pour les applications, de généraliser ce résultat à des temps d'arrêt. C'est l'objet de cette section. On commence par le résultat, admis, suivant :

Théorème.

Toute sur-martingale à trajectoires continues à droite et bornée dans L^1 (i.e., telle que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|]$ est fini) converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable M_∞.

Remarque. Le résultat précédent reste vrai si l'on remplace "bornée dans L^1" par "positive". En effet, on a vu que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[M_t]$ est décroissante. Elle est donc majorée par $\mathbb{E}[|M_0|]$.

Définition.

On dit qu'une famille (dénombrable ou indénombrable) de v.a. $(X_i,\, i \in I)$ est uniformément intégrable (u.i.) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m_ε tel que pour tout $i \in I$,

$$\mathbb{E}\left[|X_i| \mathbf{1}_{X_i > m_\varepsilon}\right] < \varepsilon.$$

Définition.

On dit que la famille de v.a. $(M_t,\, t \geq 0)$ est *fermée* par la variable aléatoire intégrable Z si on a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[Z \mid \mathscr{F}_t] = M_t$.

Remarquons que toute $\mathscr{F}_t$-martingale à horizon finie $(M_t,\, t \in [0,T])$ est fermée en ce sens, puisque la relation précédente est vérifiée pour $Z := M_T$.

Les trois notions que nous venons d'introduire (convergence presque-sûre, fermeture, uniforme intégrabilité) sont intimement liées, comme nous le démontrons ci-après,

Théorème.

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale à trajectoires continues à droite. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ est fermée ;

(ii) Le processus $(M_t,\, t \geq 0)$ converge presque sûrement, et dans L^1, vers une limite M_∞.

(iii) La famille $(M_t,\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable.

Démonstration. On a

(i) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $(M_t,\, t \geq 0)$ est fermée. Autrement dit, on a pour tout $t \geq 0$ $M_t = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]$ p.s.. Observons que la famille $(\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t],\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable : on fixe $\varepsilon > 0$, et l'on remarque qu'il existe δ_ε tel que pour tout événement A, $\mathbb{P}[A] \leq \delta_\varepsilon$ implique que $\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_A] < \varepsilon$. Alors, en posant $m_\varepsilon = \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{\delta_\varepsilon}$ on a bien pour tout $t \geq 0$, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left[|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]| \geq m_\varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}[|\, \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]\, |]}{m_\varepsilon} \leq \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[|\, Z\, | \,|\mathscr{F}_t]]}{m_\varepsilon} = \frac{\mathbb{E}[|\, Z\, |]}{m_\varepsilon} = \delta_\varepsilon$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\, \mathbb{E}[Z \mid \mathscr{F}_t] \mid \mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]| \geq m_\varepsilon\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|Z| \mid \mathscr{F}_t]\, \mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]| \geq m_\varepsilon\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|Z| \mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]| \geq m_\varepsilon\}} \mid \mathscr{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|Z| \mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]| \geq m_\varepsilon\}}\right] \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) La famille $(M_t,\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable, et donc bornée dans L^1, puisque pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}\left[|M_t| \mathbf{1}_{\{|M_t| > m_\varepsilon\}}\right] + \mathbb{E}\left[|M_t| \mathbf{1}_{\{|M_t| \leq m_\varepsilon\}}\right] < \varepsilon + m_\varepsilon \mathbb{P}[|M_t| \leq m_\varepsilon].$$

Le processus $(M_t,\, t \geq 0)$ converge donc p.s. vers M_∞ d'après le théorème précédent. La convergence a aussi lieu dans L^1 puisque la famille est uniformément intégrable.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si M_t converge dans L^1 vers M_∞, alors pour tout $s \geq 0$, $M_s = \mathbb{E}[M_t \mid \mathscr{F}_s]$ converge p.s. vers $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathscr{F}_s]$ quand $t \to \infty$.

□

On note alors, pour toute $\mathscr{F}_t$-martingale uniformément intégrable $(M_t,\, t \geq 0)$ et pour tout $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt T, la v.a.

$$M_T : \omega \longmapsto M_T(\omega) := M_{T(\omega)}(\omega)\mathbf{1}_{\{T(\omega)<\infty\}} + M_\infty(\omega)\mathbf{1}_{\{T(\omega)=\infty\}},$$

où M_∞ est la limite p.s. de $(M_t,\, t \geq 0)$. On a le théorème suivant, qui se déduit du résultat analogue en temps discret,

Théorème (Théorème d'arrêt)**.**

Soient S et T deux $\mathscr{F}_t$-temps-d'arrêt tels que $S \leq T$ p.s.. Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale uniformément intégrable et à trajectoires continues à droite. Alors M_S et M_T sont intégrables, et satisfont $\mathbb{E}[M_T \mid \mathscr{F}_S] = M_S$ p.s.. En particulier, on a $M_S = \mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_S]$ p.s., $M_T = \mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_T]$ p.s., et $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$.

Démonstration. On note pour tout n,

$$S_n = \frac{\lceil 2^n S \rceil}{2^n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{\lceil 2^n T \rceil}{2^n}.$$

Alors $\{S_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{T_n;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont deux suites de temps d'arrêt par rapport à la filtration discrète $\{\mathscr{F}_{k/2^n},\, k \in \mathbb{N}\}$, qui décroissent p.s. respectivement vers S et T. En appliquant le théorème d'arrêt à temps discret pour tout n, on a

$$M_{S_n} = \mathbb{E}[M_{T_n} \mid \mathscr{F}_{S_n}] \text{ p.s. pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc, pour tout $A \in \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S_n}$ on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_{S_n}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_{T_n}]. \tag{2}$$

Or, M_{S_n} tend p.s. vers M_S par continuité à droite des trajectoires de $(M_t,\, t \geq 0)$, et donc dans L^1 car la famille des $\{M_{S_n},\, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable d'après le théorème d'arrêt à temps discret (et même chose pour T). On peut donc passer à la limite en n dans (2), pour obtenir que pour tout $A \in \mathscr{F}_S$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_S] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A M_T],$$

d'où le résultat. □

Définition.

Soit T un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt et $(M_t,\, t \geq 0)$, une $\mathscr{F}_t$-martingale à trajectoires continues à droite. On définit la *martingale arrêtée* à T par le processus $\left(M_t^T,\, t \geq 0\right)$, où p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$M_t^T : \omega \longmapsto M_t^T(\omega) = M_{T\wedge t}(\omega) = M_{T(\omega)}(\omega)\mathbf{1}_{\{T(\omega)<t\}} + M_t(\omega)\mathbf{1}_{\{T(\omega)\geq t\}}.$$

Bien sûr, cette définition s'étant à tout réel $b \in \mathbb{R}+$ (compris comme un temps d'arrêt presque sûrement égal à b). On va voir plus bas que toute martingale arrêtée par un temps d'arrêt fini est elle-même une martingale.

Corollaire.

Toutes les conclusions du Théorème précédent restent valides si la martingale $(M_t,\, t \geq 0)$ est continue à droite, et les temps d'arrêt S et T sont bornés et tels que $S \leq T$ p.s., i.e. il existe $b \in \mathbb{R}+$ tel que $\mathbb{P}[S \leq T \leq b] = 1$.

Démonstration. Soit la martingale arrêtée $\left(M_t^b,\, t \geq 0\right)$. Il est immédiat de voir que elle-ci est une vraie $\mathscr{F}_t$-martingale : toute v.a. $M_{b\wedge t}$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable et intégrable, et de plus pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[M_t^b \mid \mathscr{F}_s\right] = M_s \mathbf{1}_{\{b>s\}} + M_b \mathbf{1}_{\{b\leq s\}} = M_{b\wedge s} \quad \text{p.s..}$$

Elle est fermée par M_b, puisque pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[M_b \mid \mathscr{F}_t\right] = M_t \mathbf{1}_{\{b>t\}} + M_t \mathbf{1}_{\{b\leq t\}} = M_{b\wedge t} = M_t^b \quad \text{p.s..}$$

Cette martingale est donc uniformément intégrable, et l'on peut lui appliquer le théorème d'arrêt. □

On a un autre corollaire du théorème d'arrêt, crucial dans la construction à suivre,

Corollaire.

Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une $\mathscr{F}_t$-martingale continue à droite et T, un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt. Alors,

1. Si la famille $(M_t,\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable, la famille $\left(M_t^T,\, t \geq 0\right)$ l'est aussi, et on a pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[M_T \mid \mathscr{F}_t\right] = M_t^T, \quad \text{p.s..} \tag{3}$$
2. Le processus $\left(M_t^T,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.

Démonstration.

1. Nous démontrons (3). Nous savons que M_T est intégrable d'après le théorème d'arrêt. Comme $M_T \mathbf{1}_{T<\infty}$ est $\mathscr{F}_T$-mesurable par définition, la v.a. $M_T \mathbf{1}_{T\leq t}$ est $\mathscr{F}_T$-mesurable. Elle est aussi $\mathscr{F}_t$-mesurable d'après la propriété 6. ci-dessus (Propriétés de temps d'arrêt). Elle est donc $\mathscr{F}_{T\wedge t}$-mesurable (puisque $\mathscr{F}_{T\wedge t} = \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_t$, et donc
$$\mathbb{E}\left[M_T \mathbf{1}_{T\leq t} \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[M_T \mathbf{1}_{T\leq t} \mid \mathscr{F}_t\right] \left(= M_T \mathbf{1}_{T\leq t}\right) \quad \text{p.s..} \tag{4}$$
Remarquons maintenant que pour tout événement $\mathcal{A} \in \mathscr{F}_t$, alors $\mathcal{A} \cap \{T > t\} \in \mathscr{F}_t$ puisque $\{T > t\} \in \mathscr{F}_t$. De plus, on a $\mathcal{A} \cap \{T > t\} \in \mathscr{F}_T$ par définition de $\mathscr{F}_T$. Finalement, on a bien $A \cap \{T > t\} \in \mathscr{F}_{t\wedge T}$, et donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{A}} M_T \mathbf{1}_{T>t}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{A}} M_T \mathbf{1}_{T>t} \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \mathbf{1}_{T>t} \mathbb{E}\left[M_T \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[M_T \mathbf{1}_{T>t} \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right]\right]. \end{aligned}$$
Comme ceci est vrai pour tout $\mathcal{A} \in \mathscr{F}_t$, on a donc par définition de l'espérance conditionnelle,
$$\mathbb{E}\left[M_T \mathbf{1}_{T>t} \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[M_T \mathbf{1}_{T>t} \mid \mathscr{F}_t\right] \quad \text{p.s.,} \tag{5}$$
ce qui, avec (4), implique que
$$\mathbb{E}\left[M_T \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[M_T \mid \mathscr{F}_t\right] \quad \text{p.s..}$$
La relation (3) s'ensuit en se rappelant que, d'après le théorème d'arrêt,
$$\mathbb{E}\left[M_T \mid \mathscr{F}_{T\wedge t}\right] = M_{T\wedge t} = M_t^T \quad \text{p.s..}$$
En particulier, d'après (3) la famille $\left(M_t^T,\, t \geq 0\right)$ est fermée par la v.a. intégrable M_T, et donc uniformément intégrable d'après la preuve de (i) ⇒ (iii) ci dessus.
2. Il nous reste à montrer que $\left(M_t^T,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale. L'adaptabilité et l'intégrabilité sont immédiates. Il nous reste à rappeler que pour tout $b \geq 0$, $\left(M_t^b,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, fermée par M_b (Corollaire précédent). Elle est donc uniformément intégrable, et donc pour tous $0 \leq s \leq t$, en appliquant (3) à la martingale u.i. $\left(M_u^t,\, u \geq 0\right)$, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[M_t^T \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_{t\wedge T} \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_T^t \mid \mathscr{F}_s\right] = \left(M^t\right)_s^T = M_{t\wedge T\wedge s} = M_{T\wedge s} = M_s^T, \quad \text{p.s..}$$

□

Exemple 2 (Temps d'atteinte du m.b.)**.** Soit $(B_t,\, t \geq 0)$ un $\mathscr{F}_t$-m.b. standard et $a < 0 < b$. On rappelle les définitions des temps d'atteinte τ_a et τ_b. Alors on a

$$\mathbb{P}\left[\tau_a < \tau_b\right] = \frac{b}{b-a}, \qquad \text{et donc } \mathbb{P}\left[\tau_a \geq \tau_b\right] = \frac{-a}{b-a}.$$

Pour le vérifier, observons que la martingale arrêtée $\left(B_t^{\tau_a \wedge \tau_b},\, t \geq 0\right)$ est bornée, et donc uniformément intégrable. D'après le théorème d'arrêt, on a donc que

$$\mathbb{E}\left[B_{\tau_a \wedge \tau_b}\right] = \mathbb{E}\left[B_{\tau_a \wedge \tau_b}^{\tau_a \wedge \tau_b}\right] = \mathbb{E}\left[B_0^{\tau_a \wedge \tau_b}\right] = 0.$$

Or, on a clairement

$$\mathbb{E}\left[B_{\tau_a \wedge \tau_b}\right] = a\mathbb{P}\left[\tau_a < \tau_b\right] + b\mathbb{P}\left[\tau_a \geq \tau_b\right],$$

d'où le résultat.

Exemple 3 (Temps de parcours d'une distance 1)**.** Soit $(B_t,\, t \geq 0)$ un $\mathscr{F}_t$-m.b. standard et $T_1 := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}$. Alors, $(M_t,\, t \geq 0) := \left((B_t)^2 - t,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale. En particulier, pour tout $n > 0$ la martingale $\left(M_t^{T_1 \wedge n},\, t \geq 0\right)$ est une martingale bornée, donc uniformément intégrable. D'après le théorème d'arrêt, on a donc

$$\mathbb{E}\left[M_{T_1}^n\right] = \mathbb{E}\left[M_{T_1}^{n \wedge T_1}\right] = \mathbb{E}\left[M_0^{n \wedge T_1}\right] = 0,$$

ce qui signifie, comme $(B_{T_1 \wedge n})^2$ et $T_1 \wedge n$ sont tous deux bornés donc intégrables, que

$$\mathbb{E}\left[(B_{T_1 \wedge n})^2\right] = \mathbb{E}\left[T_1 \wedge n\right].$$

L'espérance de gauche tend vers $\mathbb{E}\left[B_{T_1}\right]$ par convergence dominée, celle de droite tend vers $\mathbb{E}\left[T_1\right]$ par convergence monotone. En identifiant les limites, nous obtenons que

$$\mathbb{E}\left[T_1\right] = \mathbb{E}\left[(B_{T_1})^2\right] = 1.$$