Exercice 1 Soit (B_t), un $\mathcal{F}_t$ - m.b.

(i) (B_t) est adapté par définition, intégrable.

Par ailleurs, $\forall s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \underbrace{\mathbb{E}[B_t - B_s]}_{0} + B_s = B_s \text{ p.s.}$$

(ii) $(B_t^2 - t)$ est adapté car $((B_t)^2)$ l'est, et intégrable car $\forall t$, B_t est de carré intégrable.

Par ailleurs, $\forall s \leq t$ on a

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + 2B_sB_t - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - t$$
$$= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2\,\mathbb{E}[B_sB_t \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - t$$
$$= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s \underbrace{\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s]}_{B_s \text{ d'après 1.}} - B_s^2 - t$$
$$= \mathbb{E}[B_{t-s}^2] + 2B_s^2 - B_s^2 - t$$
$$= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s \text{ p.s.}$$

(iii) $(e^{\lambda B_t + \mu t})$ est adapté car $(e^{\lambda B_t})$ l'est, et intégrable car $\forall t$, $\mathbb{E}[e^{\lambda B_t + \mu t}] = e^{\mu t}\,\mathbb{E}[e^{\lambda B_t}] = e^{(\frac{\lambda^2}{2} + \mu)t}$

De plus, $\forall\, 0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda B_t + \mu t} \mid \mathcal{F}_s] = e^{\mu t}\, \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s) + \lambda B_s} \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= e^{\mu t} e^{\lambda B_s}\, \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)} \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= e^{\mu t + \lambda B_s}\, \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)}]$$
$$= e^{\mu t + \lambda B_s}\, \mathbb{E}[e^{\lambda B_{t-s}}]$$
$$= e^{\mu t + \lambda B_s + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$$
$$\underset{\text{p.s.}}{=} e^{\lambda B_s + \mu s} \text{ si et seulement si } \mu = -\frac{\lambda^2}{2}. \quad \square$$

Exercice 2

$$\forall\, t \geq 0, \quad X_t = x_0 e^{\sigma B_t + \mu t}.$$

1) (X_t) est clairement à trajectoires continues car (B_t) l'est. On a $X_0 = x_0$ p.s.

2) On applique la formule de transfert : pour toute f continue bornée $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[f(\log(X_t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma x + \mu t + \log x_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx,$$

puisque $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

Donc $\mathbb{E}[f(\log(X_t))]$

$$\underset{y = \sigma x + \mu t + \log x_0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y - (\mu t + \log x_0))^2}{2\sigma^2 t}}\, dy$$

Autrement dit $\forall t$, $\log(X_t) \sim \mathcal{N}(\mu t + \log x_0, \sigma^2 t)$. 3

3). $\forall t$, $\mathbb{E}[X_t] = \cancel{x_0}\, \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_t + \mu t}\right]$

$$= x_0 e^{\mu t}\, \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_t}\right]$$

$$= x_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

. $\forall t$, $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - (\mathbb{E}[X_t])^2$

$$= x_0^2 e^{2\mu t}\, \mathbb{E}\left[e^{2\sigma B_t}\right] - x_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t}$$

$$= x_0^2 e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} - x_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t}$$

$$= x_0^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

4) On a $\forall i$,

$$\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{X_{t_{i-1}}} = \frac{e^{\sigma B_{t_i} + \mu t_i} - e^{\sigma B_{t_{i-1}} + \mu t_{i-1}}}{e^{\sigma B_{t_{i-1}} + \mu t_{i-1}}}$$

$$\overset{Y_i}{=} e^{\sigma(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \mu(t_i - t_{i-1})} - 1.$$

D'après l'indépendance des accroissements du m.b., les Y_i, $i = 1, \dots, n$ sont indépendants.

5) De même, $\forall\, 0 \leq s \leq t$,

$$\frac{X_t - X_s}{X_s} = e^{\sigma(B_t - B_s) + \mu(t-s)} - 1$$

$$\overset{(\mathcal{L})}{=} e^{\sigma B_{t-s} + \mu(t-s)} - 1 = \frac{X_{t-s} - X_0}{X_0}. \square$$

Rq : Les (X_t) généralisent au temps continu l'idée de rendement : $\frac{V_{t_n} - V_{t_{n-1}}}{V_{t_{n-1}}}$ Intérêt

Valeur initiale.

Exercice 4

1) • $\forall t < a$, $M_t = 0$ est $\mathcal{F}_t$-mes. et intégrable.

$\forall t \geq a$, $M_t = \varphi(B_{t\wedge b} - B_a)$ est $\mathcal{F}_t$-mes.

car φ est $\mathcal{F}_a$-mes. donc $\mathcal{F}_t$-mes.

et $B_{t\wedge b} - B_a$ est $\mathcal{F}_{t\wedge b}$-mes., donc $\mathcal{F}_t$-mes.

De plus, d'après C.S.

$$\mathbb{E}[|\varphi|\,|B_{t\wedge b} - B_a|] \leq (\mathbb{E}[\varphi^2])^{1/2}(\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2])^{1/2}$$

$$< \infty.$$

• $\forall s \leq t$,

① si $s \leq t < a$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = 0 = M_s$ p.s.

② si $s < a \leq t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\varphi(B_{t\wedge b} - B_a) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(B_{t\wedge b} - B_a) | \mathcal{F}_a] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\varphi\, \mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a) | \mathcal{F}_a] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\varphi\, \underbrace{\mathbb{E}[B_{t\wedge b} - B_a]}_{0} | \mathcal{F}_s] \\ &= 0 = M_s \text{ p.s.}\end{aligned}$$

③ Si $a \leq s \leq t$, et $s < b$,

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\varphi(B_{t\wedge b} - B_a) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \varphi\, \mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \varphi\left\{\mathbb{E}[B_{t\wedge b} - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s - B_a \mid \mathcal{F}_s]\right\}$$
$$= \varphi\left\{\underbrace{\mathbb{E}[B_{t\wedge b} - B_s]}_{0} + B_s - B_a\right\}$$
$$= \varphi(B_s - B_a) = \varphi(B_{s\wedge b} - B_a) = M_s \text{ p.s.}$$

④ Si $b \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\varphi(B_b - B_a) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \varphi(B_b - B_a) = \varphi(B_{s\wedge b} - B_a) = M_s \text{ p.s.}$$

2) . Si $t < a$, alors $M_t = 0$ p.s.

. si $t \geq a$, on a

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_a]]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi^2 (B_{t\wedge b} - B_a)^2 \mid \mathcal{F}_a]]$$
$$= \mathbb{E}[\varphi^2\, \mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2 \mid \mathcal{F}_a]]$$
$$= \mathbb{E}[\varphi^2\, \mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2]]$$
$$= \mathbb{E}[\varphi^2 (t\wedge b - a)] = (t\wedge b - a)\, \mathbb{E}[\varphi^2] < \infty.$$

3) • Si $t < a$ alors $M_t^2 - \varphi^2 (t\wedge b - a) \mathbb{1}_{\{t \geq a\}}$

$$= M_s^2 - \varphi^2 (s \wedge b - a) \mathbb{1}_{\{s \geq a\}} = 0 \text{ p.s.}$$

• si $s < a \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[M_t^2 - \varphi^2 (t\wedge b - a) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi^2 (B_{t\wedge b} - B_a)^2 - \varphi^2 (t \wedge b - a) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi^2 (B_{t\wedge b} - B_a)^2 - \varphi^2 (t\wedge b - a) \mid \mathcal{F}_a] \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi^2 \{\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2 \mid \mathcal{F}_a] - (t\wedge b - a)\} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi^2 \{\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2] - (t\wedge b - a)\} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi^2 \{(t\wedge b - a) - (t\wedge b - a)\} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= 0 = M_s^2 - \varphi^2 (s \wedge b - a) \mathbb{1}_{\{s \geq a\}} \quad \text{p.s.}$$

• si $a \leq s \leq t$ et $s < b$,

$$\mathbb{E}[M_t^2 - \varphi^2 (t\wedge b - a) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \varphi^2 \{\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_a)^2 \mid \mathcal{F}_s] - (t \wedge b - a)\}$$

$$= \varphi^2 \{\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_s)^2 + (B_s - B_a)^2 + 2 B_s B_{t\wedge b} + 2 B_s B_a - 2 B_{t\wedge b} B_a - 2 B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - (t\wedge b - a)\}$$

$$= \varphi^2 \{\mathbb{E}[(B_{t\wedge b} - B_s)^2] + (B_s - B_a)^2 + 2 B_s \underbrace{\mathbb{E}[B_{t\wedge b} \mid \mathcal{F}_s]}_{B_s} + 2 B_s B_a - 2 B_a \underbrace{\mathbb{E}[B_{t\wedge b} \mid \mathcal{F}_s]}_{B_s} - 2 B_s^2 - (t\wedge b - a)\}$$

$$= \varphi^2 \{ (\cancel{t\wedge b} - s) + (B_s - B_a)^2 + \cancel{2 B_s^2} + 2 \cancel{B_s} B_a - 2 \cancel{B_a} B_s - \cancel{2 B_s^2} - (\cancel{t\wedge b} - a) \}$$

$$= \varphi^2 \{ (B_s - B_a)^2 - (s-a) \} = M_s^2 - \varphi^2 (s\wedge b - a) \mathbb{1}\{s \geq a\}$$

p.s.

- si maintenant $b \leq s$,

$$\mathbb{E}[M_t^2 - \varphi^2 (t \wedge b - a) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\varphi^2 (B_b - B_a)^2 - \varphi^2 (b-a) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \varphi^2 \{ \mathbb{E}[\underbrace{(B_b - B_a)^2}_{\mathcal{F}_s\text{-mes.}} \mid \mathcal{F}_s] - b - a \}$$

$$= \varphi^2 (B_b - B_a^2) - \varphi^2 (b-a)$$

$$= M_s^2 - \varphi^2 (s \wedge b - a) \mathbb{1}\{s \geq a\} \quad \text{p.s.} \quad \square$$