Telecom ParisTech

Cours MACS 207a

Année 2020/2021

Formule de Black & Scholes

Exercice. On considère que le prix d'une action est donné à tout instant t par S_t, où $(S_t,\, t \geq 0)$ est le processus de Black & Scholes. On note $(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ la filtration naturelle de ce processus. L'objectif de cet exercice est de calculer les prix d'une option d'achat ("call") de maturité $T > 0$ et prix d'exercice $K > 0$ sur cette action. On note C_t le prix du call à l'instant $t \in [0, T]$, c'est à dire, le prix à payer à t pour avoir le droit d'acheter l'action au prix K à l'instant T (si $S_T > K$), ou de ne rien faire si $S_T \leq K$). La valeur de l'option à l'instant d'exercice T est naturellement donnée par

$$C_T = (S_T - K)^+,$$

et on note pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[C_T | \mathcal{F}_t\right].$$

1. Que peut-on dire du processus $\big(e^{-rt}C_t,\, t \in [0, T]\big)$?
2. On note pour tous t et $x > 0$,

$$f(t, x) := e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\Big(x \exp\big\{\sigma(B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\big\} - K\Big)^+\right], \quad t \in [0, T], x \geq 0,$$

avec $\theta := T - t$.

(a) Montrer que pour tout $t \in\in [0, T[$, $C_t = f(t, S_t)$. Que vaut $f(T, x)$?

(b) Montrer que pour tout $t \in\in [0, T[$, $x > 0$,

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\Big(x \exp\big\{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta\big\} - Ke^{-r\theta}\Big)^+\right] e^{-y^2/2} dy.$$

La suite consiste à calculer explicitement la fonction f, et donc le prix de l'option à tout instant.

2. (a) Vérifier que pour tous $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$ et $y > 0$,

$$x \exp\big\{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta\big\} > Ke^{-r\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad y > -d_2,$$

avec

$$d_2 := d_2(t, x) = \frac{\ln(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

(b) En déduire que

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \Big[x \exp\big\{ - \sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta\big\} - Ke^{-r\theta}\Big] e^{-y^2/2} dy.$$

3. Soit Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

(a) Montrer que pour tous x et $t \leq T$, $f(t,x) = I_1 - Ke^{-r\theta}\Phi(d_2)$ avec

$$I_1 := I_1(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big(y^2 + 2\sigma\sqrt{\theta}y + \sigma^2\theta\big)\Big\} dy.$$

(b) En faisant un changement de variable bien choisi dans l'intégrale précédente, en déduire que $I_1 = x\Phi(d_1)$ avec

$$d_1 := d_1(t,x) = d_2 + \sigma\sqrt{\theta} = \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

(c) En déduire la formule de Black et Scholes= pour tous $x > 0$ et $t \leq T$,

$$f(t,x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r\theta}\Phi(d_2).$$