



Électronique des Systèmes d'Acquisition et de Calcul - Partie analogique

Traitement et Propagation des Signaux Physiques

Cours, exercices et travaux pratiques

<https://esac.telecom-paris.fr/>

Première Année— 2023-2024

Département Communications et Électronique
Télécom Paris

Table des matières

Avant propos	5
1 Introduction	7
2 Transformée de Laplace	15
3 Amplification élémentaire	37
4 Amplificateur différentiel et opérationnel	51
5 Échantillonnage et Transformée en Z	63
6 TP : Amplification	77
7 Filtrage analogique	81
8 TP : Filtrage analogique	101
9 Electronique analogique à temps discret	105
10 TP : Circuits à capacités commutées	113
11 Conversion analogique-numérique	119
12 TP : Conversion analogique-numérique	133
A Rappels	139
B TP de rappels	153
C Maquette de Prototypage	157

Avant propos

Un peu d'histoire et organisation

Ce module est le fruit de la fusion entre 2 modules suite à la réforme de l'enseignement de Telecom Paris de 2023-2024. Les 2 modules en question sont ELEC101 Electronique des Systèmes d'Acquisition et ELECINF102 Processus et Architectures Numériques. Le module ELECINF102 a été scindé en 2 et sa partie informatique a été transférée au module INF107. Pour cette première occurrence du module ESAC, les 2 parties analogique et numérique seront abordées comme 2 sous modules séparés. Le module a une durée de 21 TH (31,5 heures) avec la répartition suivante :

- 1 TH d'introduction commune générale qui présentera les enjeux technologiques et économiques du domaine ainsi que l'organisation du module
- 13 THs seront dédiées à la partie analogique
- 6 THs à la partie numérique
- 1 TH de control final concernant uniquement la partie analogique.

Ce polycopié est dédié à la partie analogique.

Thèmes abordés

Ce module offre une première approche de l'électronique des systèmes d'acquisition et de calcul. La partie analogique propose plus particulièrement l'étude des fonctions de traitement du signal analogique et de sa conversion en un signal numérique. Les fonctions d'amplification, de filtrage et de conversion analogique-numérique sont présentées, leurs principales caractéristiques sont décrites, les composants les réalisant sont modélisés. La technique des capacités commutées, largement utilisée pour le traitement du signal analogique en temps discret, est présentée et systématiquement utilisée pour la mise en œuvre des fonctions notamment lors de travaux pratiques utilisant des composants reconfigurables.

Modalité de contrôle de connaissances

La note finale du module ESAC est une note pondérée des parties numérique (33%) et analogique (66%). Pour la partie analogique, la note finale est constituée tout au long du module. Chacune des 4 travaux pratiques donne lieu à une note. **Notez que le “TP : Circuits à capacités commutées” sera à faire en autonomie et sera évalué sous forme d'une petite démo. Les modalités d'évaluation vous seront communiquées par votre responsables de groupe.**

Un contrôle final avec documents d'une durée de 1h30, portant sur l'intégralité du module, complètera la note. La répartition provisoire de la note de la partie analogique est : 40% pour les TPs et 60% pour l'examen final.

Site Web

Ce polycopié, ainsi que les transparents des cours et les annales sont disponibles sur la page web du module : <https://esac.telecom-paris.fr/>.

Heures de bureau

Des heures de bureau (*Office hours*) sont programmées dans votre emploi du temps sur Synapses. Ces séances sont consacrées pour répondre à vos questions, des plus basiques aux plus avancées. Les 2 premières heures de bureau seront dédiées à la révision des prérequis et à la prise en main du matériel de TP (générateur, alimentation, multimètre et oscilloscope) pour les élèves peu familiers avec ce genre d'instruments.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Avant-propos

L'électronique est habituellement divisée en de grands domaines partiellement recouvrants et aux limites floues : la fourniture de puissance, la transduction (acquisition ou restitution d'une information extérieure non "électronique") et le traitement du signal qu'il soit numérique ou analogique. De plus en plus, ces divers aspects de l'électronique sont pris en compte conjointement au sein de systèmes davantage intégrés.

Nous traitons dans ce cours de l'électronique des systèmes d'acquisition de signaux en nous intéressant particulièrement aux principales fonctions analogiques et mixtes nécessaires à cette acquisition, que le signal soit issu d'un capteur ou d'une antenne. Les fonctions étudiées sont l'amplification, le filtrage et la conversion analogique-numérique. L'étude de ces fonctions s'appuie sur l'emploi d'outils de théorie du signal (transformée de Laplace et transformée en Z) ainsi que sur une technique permettant la mise en œuvre du traitement analogique du signal en temps discret (technique à capacités commutées).

A l'issue de ce cours, l'étudiant doit connaître la composition fonctionnelle basique d'une chaîne d'acquisition électronique d'un signal analogique, doit pouvoir comprendre le sens des principales caractéristiques de chaque fonction et doit enfin pouvoir déduire de spécifications globales des contraintes ou des caractéristiques des éléments de la chaîne. L'étudiant doit également avoir pris conscience du rôle d'interfaces d'acquisition électronique de signaux dans le cadre de systèmes complexes et l'impact de leurs caractéristiques sur les performances globales.

Ce cours adopte une démarche de synthèse (encore dite « descendante », du système vers le composant), adaptée à des ingénieurs des télécommunications, c'est-à-dire amenés à conduire la conception, la gestion ou l'acquisition de systèmes complexes de communications.

La conception microélectronique de ces interfaces d'acquisition n'est pas abordée dans ce cours. Le lecteur curieux d'en connaître davantage peut se reporter aux articles ou ouvrages cités en référence.

1.2 Introduction

L'électronique des systèmes d'acquisition de signaux peut être définie comme comprenant :

- un ou des transducteurs (capteurs et actionneurs) ;
- l'interface électronique entre un transducteur et une unité de traitement et d'exploitation du signal ;
- diverses unités nécessaires à l'interface d'acquisition (génération des horloges, contrôle, gestion de la consommation).

Un transducteur est un dispositif convertissant une grandeur physique en une autre. Dans le cas de transducteurs pour systèmes électroniques d'acquisition de signaux, la transduction consiste en la conversion d'une grandeur physique quelconque en un signal électrique. Voici

quelques exemples de transducteurs :

- Microphone : capteur d'un signal acoustique ;
- Thermocouple : capteur utilisé particulièrement pour la mesure de température ;
- Cristal piézoélectrique : capteur utilisé pour la mesure de pression ;
- Haut-parleur : transducteur de conversion d'un signal électrique en un signal acoustique ;
- Voyant lumineux : conversion d'un signal électrique en signal lumineux ;
- Antenne : transducteur permettant de capter ou de rayonner un signal électro-magnétique.

Les grandeurs physiques à l'échelle macroscopique sont de nature analogique, c'est-à-dire que leurs variations peuvent être décrites par un signal continu dans le temps et dans l'espace. Le signal analogique issu d'un capteur est donc de nature analogique. Cependant, fréquemment aujourd'hui l'interface d'acquisition est intégrée directement avec le capteur : dans ce cas, l'utilisateur récupère un signal numérisé, donc représenté par une séquence de mots binaires.

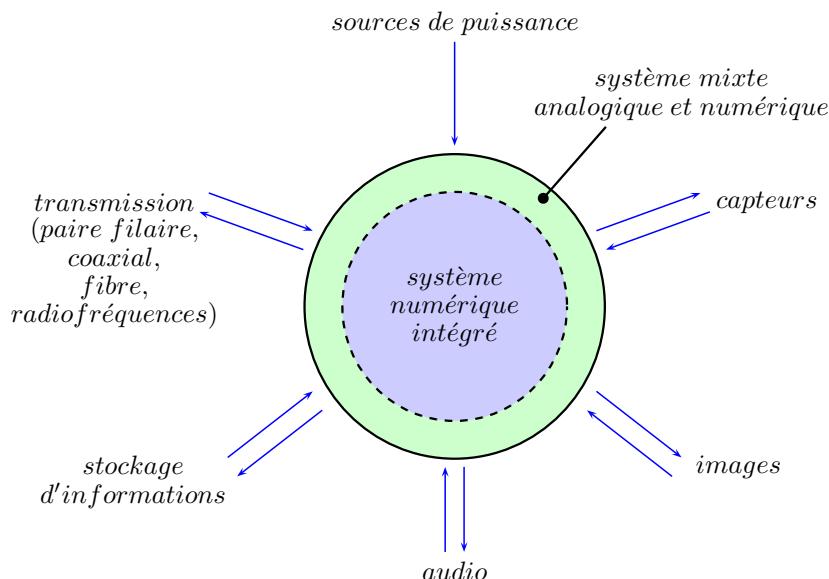


FIGURE 1.1 – Place de l'interface d'acquisition et exemples d'usages

L'unité de traitement et d'exploitation du signal réalise par exemple des opérations de codage, décodage, modulation, démodulation et assure l'exploitation de l'information véhiculée par le signal. Cette unité est normalement mise en œuvre en électronique numérique. Elle n'est pas traitée dans ce cours.

Ce cours d'*Électronique des Systèmes d'Acquisition* traite de l'interface électronique entre un transducteur et une unité de traitement et d'exploitation du signal. Nous nous intéressons donc à l'ensemble des traitements appliqués au signal électrique issu d'un capteur jusqu'à sa restitution numérisée. Les principales fonctions étudiées sont donc : l'amplification, le filtrage et la conversion analogique-numérique.

Dans ce chapitre, dans la section 1.3, nous introduisons quelques données économiques sur le marché des semiconducteurs. Dans la section 1.4, nous indiquons quelques défis techniques et technologiques liés à l'électronique des systèmes d'acquisition.

1.3 Contexte économique

Le marché mondial des semiconducteurs représente, en 2022, 596 milliards de US\$. Ce marché devrait dépasser 1000 milliards de US\$ en 2030. La part des composants dits analogiques (la distinction est délicate du fait de l'intégration de systèmes complets sur puce) représente en 2022 un montant de 83.8 milliards de US\$.

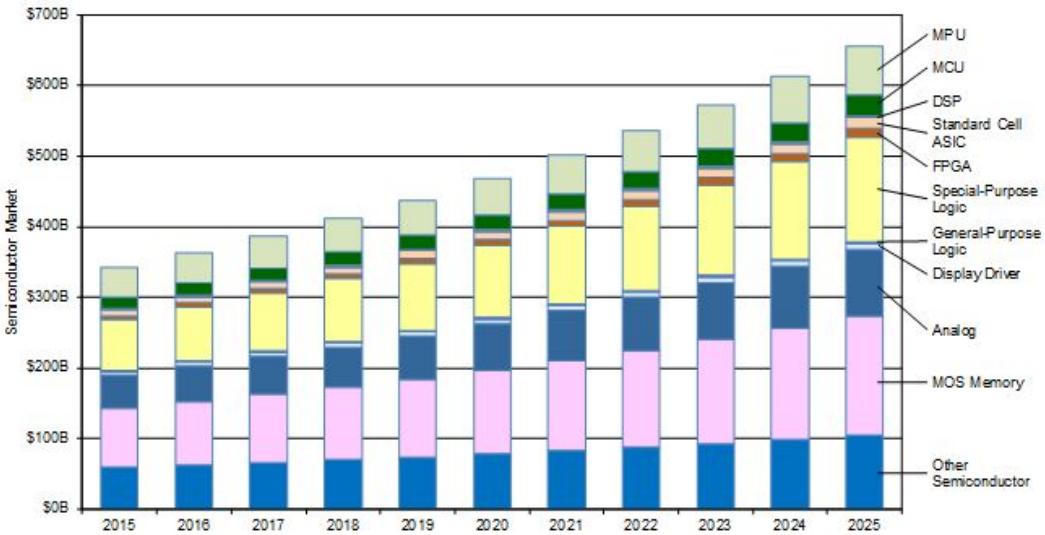


FIGURE 1.2 – Distribution sectorielle du marché des semiconducteurs [3]

Les marchés les plus importants actuellement sont les marchés des ordinateurs et des communications comme le montre la FIGURE 1.3. Dans les années à venir, le marché des communications va continuer à avoir un bon taux de croissance grâce notamment à la cinquième génération des communications mobiles 5G. Les autres marchés très prometteurs sont l'automobile et la biomédicale qui profitent merveilleusement de l'explosion du marché de l'internet des objets (IoT) (FIGURE 1.4).

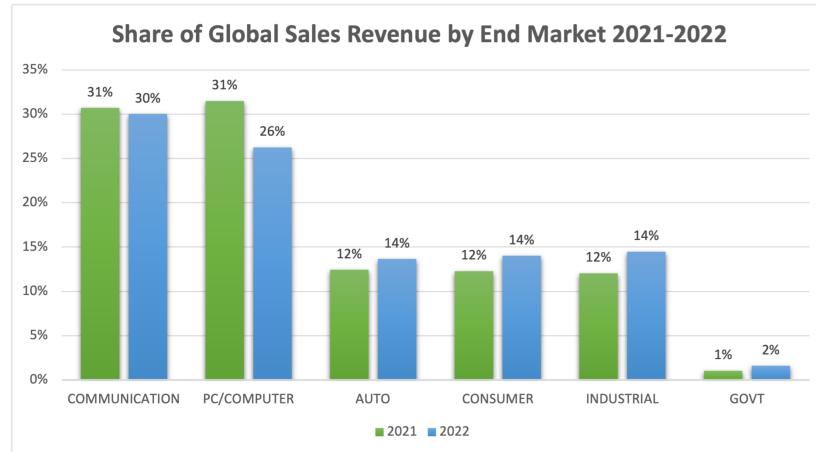


FIGURE 1.3 – Distribution sectorielle du marché des semiconducteurs

Une des raisons principales qui a permis ces bons taux de croissance dans le marché des semiconducteurs est la diminution du coût par transistor dans la technologie CMOS. Comme on peut le constater dans la FIGURE 1.5, un US\$, dans la fin des années 90 avec la technologie CMOS 180 nm, permettait de fabriquer 2,6 Millions de transistors. Actuellement, avec les technologies 28 nm et 16 nm, un US\$ permet de fabriquer approximativement dix fois plus de transistors. Cependant, comme on peut le constater, le coût par transistor est en train de stagner voire d'augmenter. Ceci est dû au fait que les approches classiques de fabrication ne sont plus adaptées aux dimensions actuelles des transistors notamment aux épaisseurs de grilles qui avoisinent le nanomètre dans les technologies les plus récentes. Dans une telle épaisseur, on peut à peine placer 5 à 10 atomes/molécules d'isolants. Pour adressed ce problème, les fabricants de circuit dits également fondeurs ont dû introduire de nouvelles approches

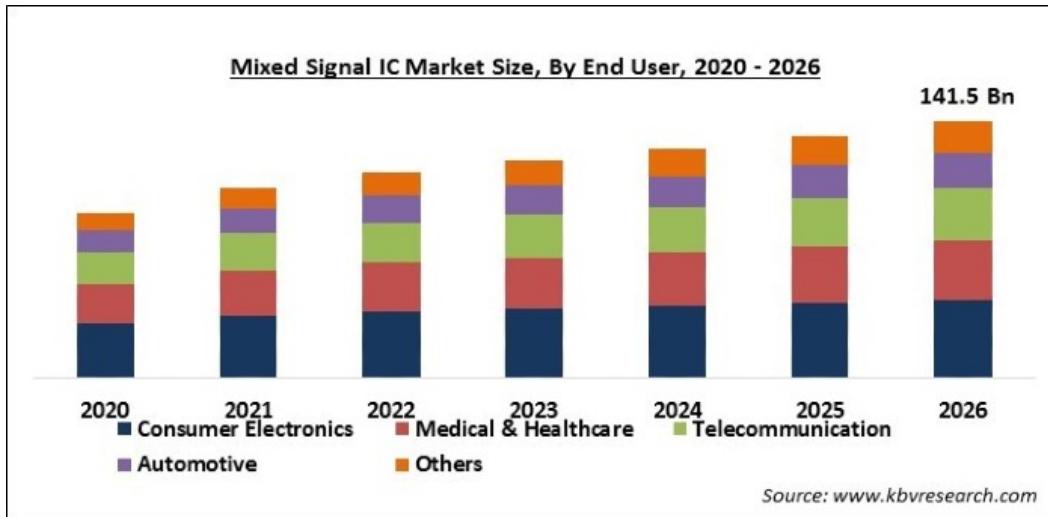


FIGURE 1.4 – Croissance du marché des semiconducteurs

de fabrications telles que les technologies FinFet, FDSOI et GAAFET [4][1]. Ces technologies sont très intéressantes et très prometteuses mais malheureusement plus complexes et en conséquence plus coûteuses. Ceci demandera plus d'innovation et plus de créativité dans la phase de conception pour compenser le ralentissement au niveau technologique.

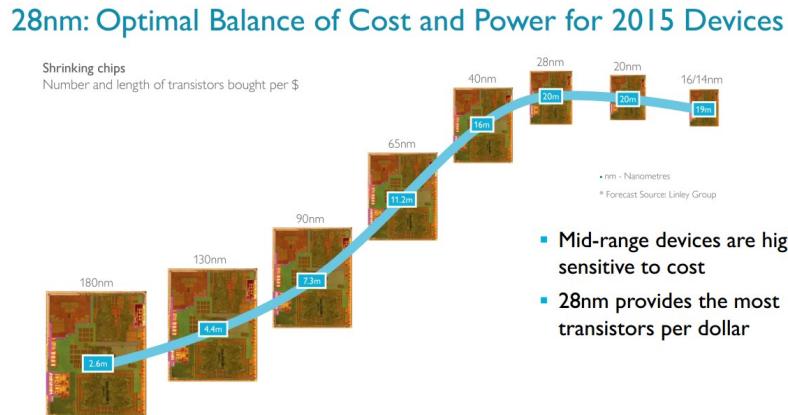


FIGURE 1.5 – Evolution du coût par transistor en fonction de la technologie CMOS - source : ARM

La table 1.6 présente l'importance relative des plus importantes entreprises dans le domaine des semiconducteurs en 2023. Les profils de ces entreprises sont diverses, certaines comme TSMC et GF ne font que la fonderie. D'autres dites fabless sont sans usine de fabrication tels que Broadcom et Qualcomm, leur savoir faire est dans le domaine de la conception. Pour la fabrication, elles font appel à des fondeurs. A noter la progression phénoménale de NVIDIA (126% de croissance en 1 an du chiffre d'affaires), grâce au marché des cartes graphiques, éléments clés pour l'intelligence artificielle. Il existe également des entreprises qui font à la fois de la conception et de la fonderie. On peut notamment citer Intel, Samsung et STMicroelectronics (le plus grand fondeur européen dont les usines se trouvent à Crolles en France).

2023F Top 25 Semiconductor Sales Leaders (\$M, including Foundries)										
2023 Rank	2022 Rank	Company	Headquarters	2022 Total IC	2022 Total O-S-D	2023 Total IC	2023 Total O-S-D	23/22 % Change		
1	2	TSMC (1) †	Taiwan	75,851	0	75,851	0	68,852	0	-9%
2	3	Intel †	U.S.	61,534	0	61,534	0	51,401	0	-16%
3	8	Nvidia (2) †	U.S.	24,503	0	24,503	0	49,565	0	102%
4	1	Samsung †	South Korea	73,002	3,843	76,845	4,5938	2,366	48,304	-37%
5	4	Qualcomm (2) †	U.S.	36,722	0	36,722	0	30,483	0	-17%
6	6	Broadcom (2) -	U.S.	23,972	2,661	26,633	2,5204	2,789	27,993	5%
7	5	SK hynix †	South Korea	33,292	1,613	34,905	21,334	2,588	23,922	-31%
8	9	AMD (2) †	U.S.	23,601	0	23,601	22,612	0	22,612	-4%
9	14	Infineon †	Europe	10,566	5,210	15,776	11,647	5,737	17,384	10%
10	13	ST †	Europe	10,765	5,337	16,102	11,734	5,527	17,261	7%
11	10	TI †	U.S.	17,818	1,175	18,993	15,631	1,040	16,671	-12%
12	12	Apple* (2) -	U.S.	17,824	0	17,824	16,414	0	16,414	-8%
13	7	Micron †	U.S.	25,637	0	25,637	16,200	0	16,200	-37%
14	11	MediaTek (2) †	Taiwan	18,506	0	18,506	13,709	0	13,709	-26%
15	15	NXP -	Europe	11,878	1,076	12,954	11,968	1,074	13,042	1%
16	16	Analog Devices -	U.S.	11,789	599	12,388	11,042	570	11,612	-6%
17	19	Sony †	Japan	837	9,021	9,858	1,065	9,588	10,653	8%
18	17	Renesas †	Japan	8,859	2,459	11,318	8,279	2,230	10,509	-7%
19	24	Microchip †	U.S.	6,757	1,126	7,883	7,314	1,220	8,534	8%
20	21	onsemi †	U.S.	3,582	4,745	8,327	3,614	4,621	8,235	-1%
21	22	GlobalFoundries (1) †	U.S.	8,108	0	8,108	7,388	0	7,388	-9%
22	20	UMC (1) †	Taiwan	9,362	0	9,362	7,129	0	7,129	-24%
23	18	Kioxia †	Japan	10,595	0	10,595	6,738	0	6,738	-36%
24	25	SMIC (1) †	China	7,273	0	7,273	6,296	0	6,296	-13%
25	23	Western Digital †	U.S.	8,022	0	8,022	5,920	0	5,920	-26%
— — Top-10 Total				373,808	18,664	392,472	338,770	19,007	357,771	-9%
— — Top-25 Total				540,655	38,865	579,520	477,477	39,350	516,827	+11%

(1) Foundry (2) Fabless *Custom processors and ICs for internal use in systems products

Source: Company reports, TechInsights

FIGURE 1.6 – Principales entreprises dans le domaine des semiconducteur

1.4 Défis techniques

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'intégration de fonctions de traitement du signal analogique est indispensable pour pouvoir mettre en oeuvre des systèmes interagissant avec l'environnement. Ceci concerne par exemple quasiment tous les systèmes de communications. Les attentes évoluent : des bandes passantes toujours plus larges sont nécessaires, les bandes de fréquences utilisées également du fait de l'encombrement croissant du spectre. Dans le même temps, les informations à émettre, à recevoir, à traiter sont plus hétérogènes et requièrent des puissances de calcul toujours accrues. Pour qu'existe un marché significatif, permettant entre autre à l'industrie électronique de poursuivre son développement, le coût final des produits doit rester abordable et en tout cas en rapport avec le service fourni et l'innovation introduite. Afin de répondre à ces exigences, de nouvelles technologies sont en permanence mises au point. Elles sont presque toujours optimisées en premier lieu pour l'intégration de l'électronique numérique. Cependant, l'intégration de systèmes monopuces confère aujourd'hui à l'intégration de fonctions analogiques ou radiofréquences une part croissante dans l'évolution technologique. Pour répondre aux attentes exprimées ci-dessus, les chercheurs et développeurs en électronique doivent relever de nombreux défis dont les principaux sont exposés dans ce qui suit.

1.4.1 Critères de performances

Les critères sont variés. Leur importance relative varie d'une application à une autre. Citons les plus courants : la largeur de bande de fréquences, la consommation d'énergie, la surface de circuit nécessaire à la mise en oeuvre, la linéarité, le rapport signal sur bruit, la dynamique, la fiabilité, les potentialités de programmation ou de reconfiguration. Il est important de noter que ces différents critères sont liés de façon complexe. Gagner sur un critère peut induire de plus grandes difficultés à satisfaire les exigences sur un autre.

1.4.2 Vitesse, bandes de fréquences

Les progrès réalisés en communications numériques ont permis en particulier d'augmenter le débit de transmission pour une même largeur de bande. Cette augmentation n'est pas suffisante pour couvrir avec des bandes de quelques centaines de kHz les besoins liés à de nouveaux usages tels que la visualisation de vidéo (en différentes qualités) sur des terminaux mobiles (réseaux cellulaires ou locaux). L'accroissement des largeurs de bande requiert des composants électroniques adaptés, amplificateurs, filtres, convertisseurs, etc. tout en maintenant les exigences en rapport signal sur bruit, en consommation, en linéarité... Pour y parvenir, la seule innovation technologique n'est pas suffisante. L'innovation en techniques de traitement du signal, en circuiterie et en architecture est indispensable.

1.4.3 Consommation d'énergie

Une fois les spécifications d'un système établies à partir des données de l'application, de l'usage particulier, et des normes considérées, des performances minimales et nominales pour chaque sous-partie du système peuvent être déterminées après choix d'un partitionnement matériel-logiciel puis d'un partitionnement analogique-numérique. Le respect de ces performances par le système construit est indispensable pour garantir la fonctionnalité au regard de l'application envisagée. D'autres caractéristiques telles que la consommation n'interviennent pas directement dans la fonctionnalité mais ont un impact direct sur le coût du produit et donc sur sa compétitivité. La consommation peut aussi avoir un impact sur l'encombrement ou l'autonomie du produit et donc sur son ergonomie et sa praticité. Moins consommer d'énergie signifie soit une meilleure autonomie avec un même type de batterie, soit des batteries moins encombrantes ou moins onéreuses pour une même autonomie. Moins consommer d'énergie répond aussi à une préoccupation croissante de nature environnementale et écologique. Là encore, l'innovation technologique contribue à cet objectif à condition d'y associer l'innovation en circuit, en architecture et en gestion de la consommation. Ce dernier point (*power management, power-aware system*) est devenu une préoccupation systématique au sein de systèmes complexes. L'écart entre les prévisions technologiques et les prévisions de performances de systèmes futurs montrent que l'innovation technologique ne pourra suffire à elle seule à répondre aux attentes.

1.4.4 Surface d'un circuit, volume d'un système

Le couple (technologie, surface de puce) joue un rôle très important dans le coût final d'un produit. La réduction de la surface de circuit pour la mise en oeuvre d'une fonction peut cependant engendrer d'autres difficultés comme une énergie dissipée par unité de surface accrue. Des moyens d'évacuation de la chaleur doivent alors être mis en oeuvre. Le choix d'une filière technologique (CMOS, BiCMOS, SiGe, SOI, AsGa, etc.) puis d'une génération technologique influe sur la faisabilité du système, sur la surface de puce nécessaire et donc sur le coût final. Au sein d'une même filière, le CMOS par exemple, il faut encore déterminer si des « options » technologiques sont souhaitables : transistors à faible tension de seuil, matériau fortement résistant, oxyde mince entre couches métalliques pour implantation de capacités, etc. Pour chaque projet, ce choix doit être établi en fonction de la prévision de surface, du coût surfacique de la technologie, du surcoût des options, etc. mais aussi du savoir-faire des concepteurs dans la technologie considérée, de la disponibilité de plusieurs sources de fonderie, de la possibilité de réutiliser pour d'autres projet le travail effectué... Pour une filière donnée, la technologie la plus avancée ne constitue pas toujours le meilleur choix : là encore, une estimation de surface pour le système complet est nécessaire. Les fonctions numériques bénéficient pleinement de l'avancée technologique en terme de densité et de vitesse. Il n'en va pas de même pour les blocs analogiques dont la surface ne diminue que très lentement en fonction de l'évolution technologique. En revanche, le coût du mm^2 de circuit croît très

fortement d'une génération technologique à une autre.

1.4.5 Intégration de systèmes monopuces

L'intégration de systèmes monopuces induit divers défis techniques dont certains déjà cités précédemment. Nous pouvons ajouter à ceux déjà cités précédemment, la nécessaire maîtrise des couplages et interférences sur la puce. Certains composants sont sources de bruit, d'autres composants ou matériaux le transportent et d'autres enfin sont particulièrement sensibles. En particulier, les circuits analogiques sensibles doivent être isolés le plus possible des circuits numériques, sources de bruit dû aux commutations.

1.4.6 Outils d'aide à la conception

La maîtrise des coûts impose l'emploi d'outils d'aide à la conception afin d'améliorer et de fiabiliser la production. Il s'agit :

- d'outils de synthèse pour affiner une représentation de tout ou partie d'un système jusqu'à la création des masques (représentation bidimensionnelle des différentes couches conductrices et semi-conductrices constituant la structure physique d'un circuit) ;
- d'outils d'analyse et de vérification pour s'assurer que les performances atteintes sont conformes aux spécifications.

Il est important de noter que la conception de circuits analogiques ou mixtes est encore en grande partie non automatisée requérant ainsi le savoir-faire de concepteurs spécialisés.

Bibliographie

- [1] An introduction to FD-SOI. <https://www.youtube.com/watch?v=uvV7jcpQ7UY>.
- [2] IC Insights. <http://www.icinsights.com/>.
- [3] Semiconductor Industry from 2015 to 2025. <http://www.ibs-inc.net/#!white-paper>.
- [4] Understanding The FinFet Semiconductor Process. <https://www.youtube.com/watch?v=JctkODI7YP8>.
- [5] International Technology Roadmap for Semiconductors. <http://www.itrs2.net/>.
- [6] F. Maloberti and A. Davies. *A short history of circuits and systems*. River, 2016.
- [7] National Institute on Deafness and National Institutes of Health Other Communication Disorders. www.nidcd.nih.gov/health/.
- [8] G. Scalise. S.I.A. World Semiconductor Forecast 2007. www.sia-online.org/, June 2007.

Chapitre 2

Transformée de Laplace

Les transformées de Laplace et en Z sont (avec la transformée de Fourier) les outils mathématiques pour le traitement des signaux et des systèmes analogiques en temps continu ou en temps discret¹.

Afin de mettre en œuvre ces outils mathématiques il est nécessaire de comprendre l'écosystème (un peu mathématique mais surtout physique) dans lequel ils se définissent. Parmi les notions essentielles dans cet écosystème on trouve le concept de signal, de système et de modèle puisque les transformées servent essentiellement dans l'analyse des signaux et dans la modélisation des systèmes ; c'est pourquoi ce chapitre débute par la définition de ces notions. Une fois ces notions appropriées, l'application des transformées se développera assez naturellement.

Pour des raisons de cohérence pédagogique et au grand désarroi des mathématiciens théoriciens et des physiciens passionnés d'analyse², nous n'aborderons que (très) partiellement certains concepts purement mathématiques. Par exemple, nous éluderons³ les questions de convergence d'intégrales et la théorie des distributions (qui sont pourtant les bases mathématiques fondamentales des théories des transformées).

2.1 Concepts préliminaires : signaux, systèmes et modélisation

2.1.1 Signaux et systèmes

Tout phénomène physique variant dans le temps qui est destiné à **transmettre de l'information** est un **signal**. Des exemples de signaux sont la voix humaine, la langue des signes, le code Morse, les feux de signalisation, les tensions dans les câbles téléphoniques, les champs électriques émanant des émetteurs de radio ou de télévision et les variations d'intensité lumineuse dans une fibre optique.

Le **bruit** est aussi un signal en ce qu'il s'agit d'un phénomène physique variant dans le temps, mais il ne transporte généralement pas d'information utile et est considéré comme indésirable. Plus précisément, on peut remarquer que la distinction entre signal et bruit est artificielle et dépend des critères propres de l'utilisateur. Ce qui différencie le signal du bruit est donc l'intérêt de l'observateur.

Les signaux sont exploités par des **systèmes**. Lorsqu'une ou plusieurs excitations (appelées signaux d'entrée) sont appliquées à une ou plusieurs **entrées** du système, le système produit une ou plusieurs **réponses** (appelées signaux de sortie) à ses **sorties**.

Les capteurs et les instruments scientifiques sont des systèmes qui mesurent des phénomènes physiques (température, pression, vitesse, etc.) et les convertissent en une grandeur

1. Note : Le contenu de ce chapitre s'inspire fortement du contenu d'un certain nombre de livres. Ces livres correspondent aux références bibliographiques suivantes : [6, 3, 7]. Ces ouvrages sont donc recommandés si le besoin d'approfondir les notions présentées dans ce chapitre se faisait sentir.

2. mais au plus grand plaisir des autres

3. outrageusement

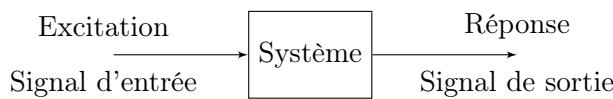


FIGURE 2.1 – Schéma bloc d'un système à entrée unique et sortie unique

exploitable comme une tension ou un courant. **L'acquisition de signaux, comme ceux pré-cités, est le cœur même de ce module d'enseignement.**

En deuxième étape, le phénomène observable est traduit par un **modèle mathématique**. La représentation classique, intuitive est une fonction du temps, mais la représen-

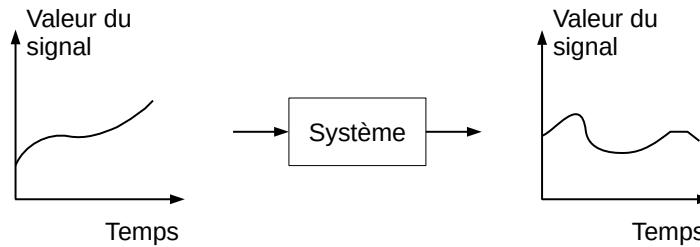


FIGURE 2.2 – Représentation classique d'un système

tation spectrale est également un moyen de caractériser parfaitement les signaux (dualité temps-fréquence) et de faciliter l'étude des systèmes.

Ainsi l'acquisition d'un signal a deux objectifs principaux :

- l'**exploiter plus ou moins directement** pour en extraire un message, lorsqu'il s'agit d'une communication
- l'**analyser** pour extraire des propriétés liées à son obtention, par exemple afin de réaliser des prédictions ; ceci s'appelle de la **modélisation**.

Ces deux exploitations des signaux sont relativement différentes mais fortement liées. Les travaux d'un ingénieur se caractériseront universellement par une phase de modélisation. Cette phase est tellement naturelle qu'il est souvent difficile pour l'étudiant-ingénieur de dissocier la phase de modélisation de l'analyse d'un système réel⁴. Un des objectifs secondaire de ce cours sera de sensibiliser à la différenciation de ces phases.

Signaux

Pour analyser les signaux, nous devons comprendre leur nature et par la même occasion, les classifier, afin de clarifier les limites de notre analyse. Les signaux sont classifiés en fonction de leurs caractéristiques et propriétés de base et nous allons voir qu'il y a différentes manières de les classifier.

Dans l'analyse des signaux et des systèmes, les signaux sont souvent décrits par des fonctions mathématiques d'une ou plusieurs variables indépendantes. Certaines des fonctions qui décrivent des signaux communs devraient déjà être familières comme les sinusoïdes.

Il faut comprendre dès à présent que les signaux peuvent être considérés sur deux plans⁵ :

- un plan *réel* ou expérimental
- un plan théorique

Dans le premier cas, on parlera de signal expérimental. Il s'agira de l'image d'un processus physique et pour cette raison il doit être **physiquement réalisable**. Il est ainsi soumis à une

4. La première consiste à reproduire le comportement, plus ou moins complexe d'un système, à partir d'une description que l'on sait plus ou moins erronée ; la deuxième, peut se caractériser par la recherche ou la compréhension de ce que la modélisation n'arrive pas à reproduire

5. ce qui suit est très inspiré du livre [4] ; son contenu étant d'une clarté inégalable, le paragraphe ici présent en est une quasi-reproduction

série de contraintes (qui pourront être modélisées d'un point de vue mathématique) :

- l'énergie du signal doit être bornée ;
- l'amplitude du signal doit être bornée ;
- dans les systèmes analogiques, l'amplitude sera une fonction continue car l'inertie des systèmes réels interdit toute discontinuité ;
- le spectre du signal est lui aussi borné et doit tendre vers zéro lorsque la fréquence tend vers l'infini.

Dans le deuxième cas, on considérera directement et souvent⁶ de manière implicite, le *modèle* du signal qui sera donc une fonction mathématique. Il très important de noter dès à présent qu'il sera très courant d'utiliser une représentation simplifiée et parfois inexacte en choisissant des modèles commodes et qui par exemple, ne respecteront pas les propriétés de *réalisabilité* énoncées précédemment.

C'est ainsi que l'on fait un usage universel de modèles de signaux à énergie théorique infinie, à amplitude non bornée ou subissant des discontinuités⁷ !

L'usage et la qualité d'un modèle dépendent donc de la qualité de l'approximation visée et de la commodité d'emploi.

On peut classifier les modèles de signaux selon différents modes dont les principaux sont :

- une classification phénoménologique : le signal est alors caractérisé par ses propriétés ou son évolution déterministes ou bien aléatoires.
- une classification énergétique : on se focalise dans ce cas sur les caractéristiques énergétiques et de puissance. On y remarquera les signaux à énergie finie (physiquement réalisables) et certains signaux purement théoriques (mais très pratiques à manipuler) comme les signaux à puissance moyenne finie mais à énergie infinie.
- une classification morphologique : dans ce cas on distinguera les signaux selon le caractère continu ou discret de l'amplitude et du temps. On y distinguera les signaux analogiques temps continu ou temps discret, les signaux quantifiés temps continu et les signaux numériques.

Signaux analogiques et ses discrétisations possibles Dans ce cours, nous prêterons une attention toute particulière à la dernière classification car la nature du temps et de l'amplitude implique des propriétés/interprétations des transformées bien spécifiques (cf. périodisation du spectre, disque de convergence). La Figure 2.3 illustre les différentes morphologies de signaux que nous allons analyser dans le cours. Le signal analogique ($x(t)$) se caractérise par le fait que toutes les grandeurs sont continues (temps et amplitude). Tous les autres signaux possèdent au moins une grandeur discrétisée :

- le signal (analogique) échantillonné ($x(t_k)$) : temps discret uniquement
- le signal quantifié ($x_q(t)$) : amplitude discrète uniquement
- le signal numérique ($x_q(t_k)$) : amplitude et temps discrets

Les signaux à temps discret $x[k]$ et $x_q[k]$ sont aussi appelés des *séquences* en théorie du signal. L'opération de discrétiser le temps s'appelle aussi *échantillonnage (temporel)*. Cette opération sera étudiée en détails dans le chapitre 5.

Caractéristiques supplémentaires

- Les signaux sont de durée finie lorsque le phénomène ne se manifeste que sur un intervalle de temps fini. Si leur durée est faible, on parle de signaux transitoires ou impulsionnels.
- Les signaux de durée infinie sont stationnaires si leurs fluctuations observent une certaine régularité quelque soit t ; c'est le cas des signaux périodiques ou quasi périodiques (superposition de plusieurs composantes harmoniques quelconques).

6. si ce n'est pas systématiquement

7. ces signaux sont alors représentés par des distributions

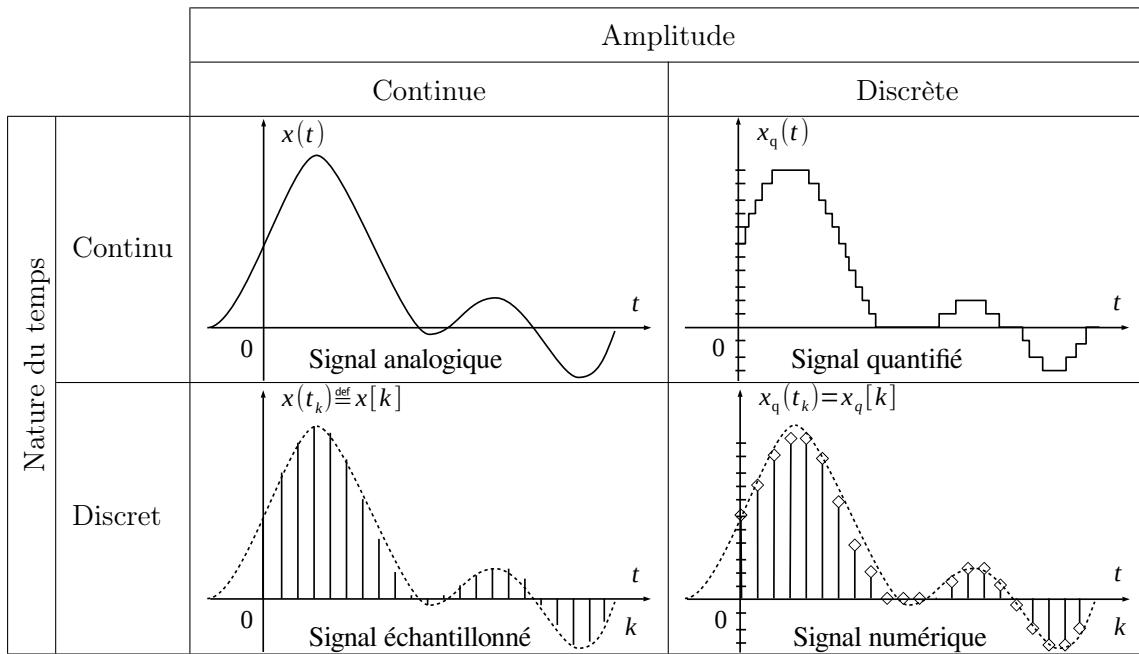


FIGURE 2.3 – Classification morphologique des signaux : illustrations et notations

- Les signaux sont causaux si leurs valeurs sont nulles pour $t, k < 0$ ou anticausaux si leurs valeurs sont nulles pour $t, k > 0$.

Exemples de signaux usuels

- Échelon unité (Heaviside)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad | \quad u[k] = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

- Impulsions :

Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (1)$$

L’impulsion de Dirac en continu est une distribution qui associe à toute fonction continue sa valeur à l’origine ; elle modélise la dérivée d’un échelon unité.

- Signal sinusoïdal :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Fréquence : $f_0 \in [0; \infty]$

Amplitude : A

Phase à l’origine : $\varphi \in [-\pi; \pi]$

$$x[k] = A \cos(2\pi \nu_0 k + \varphi)$$

Fréquence réduite : $\nu_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Amplitude : A

Phase à l’origine : $\varphi \in [-\pi; \pi]$

Fait remarquable : contrairement au cas continu, un signal sinusoïdal à temps discret n’est pas systématiquement périodique et de période égale à l’inverse de la fréquence. Le cas périodique ne se produit que pour $\nu_0 = 1/N$ où N est entier.

Systèmes

Le concept de système est utile pour traiter des dispositifs ou des processus réels à des fins d’analyse et de synthèse. Une ligne de transmission, par exemple, est un système, même si physiquement il ne s’agit que de fils reliant deux bornes. Un autre exemple de système

est un filtre RLC constitué de résistances, de condensateurs et d'inductances. Nous allons voir qu'en représentant ces composants par des modèles⁸ on peut en effectuer l'analyse et la synthèse. Aussi, plus largement, dans un système de communication, un émetteur produit un signal et un récepteur l'acquiert. Ce qui sépare (au sens physique ou bien au sens conceptuel) l'émetteur et le récepteur s'appelle le **canal**; et c'est le chemin emprunté par un signal lors d'une transmission entre un émetteur et un récepteur. Des perturbations sont inévitablement introduites par l'émetteur, le canal et le récepteur et ces perturbations seront appelées bruits et/ou distorsions. L'émetteur, le canal et le récepteur sont tous des composants ou sous-systèmes du système global.

La méthodologie associée à la modélisation et à l'analyse de tels (sous-)systèmes est essentielle à la conception de ces mêmes systèmes.

Comme mentionné précédemment, un système met en relation une ou plusieurs sorties avec une ou plusieurs entrées. Dans le cas d'un système à une entrée et une sortie, on note H la relation fonctionnelle entre x et y :

$$y = H(x) \quad (2)$$

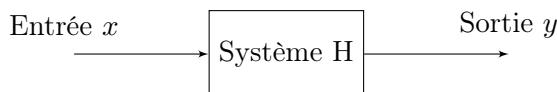


FIGURE 2.4 – Schéma bloc d'un système avec une entrée x et une sortie y

Pour caractériser ou concevoir nos systèmes, nous devons travailler avec un modèle.

Modélisation

Par définition, le modèle permettra de reproduire le comportement du système en cours d'étude ; en d'autres termes il s'agira d'une idéalisation mathématique du comportement des systèmes.

Dans le contexte de l'électronique et du traitement du signal, on commence par étudier les modèles linéaires et invariant dans le temps (LTI) car les composants électroniques de base se modélisent par ce type de modèle.

Cependant, on pourra garder en tête que la plupart des systèmes pratiques s'en écartent, mais que malgré cela, le comportement de nombreux dispositifs s'approxime convenablement par ces modèles LTI, ce qui est suffisant pour aborder les premières phases de conception des systèmes. Un exemple concret que nous traiterons dans un prochain chapitre, est le transistor. C'est un dispositif non linéaire et on l'analyse à l'aide de modèles linéaires autour d'un point de fonctionnement.

Pour conclure, vous verrez aussi que certaines opérations essentielles des systèmes de communication et de traitement ne correspondent pas au modèle LTI et qu'elles s'intègrent dans une théorie plus large des systèmes non linéaires ou variant dans le temps comme les opérations d'échantillonnage ou de quantification.

Modèles et systèmes LTI (MLI/SLI)

— Un système est dit linéaire si son modèle respecte la propriété suivante :

$$H \left(\sum a_i x_i \right) = \sum a_i H (x_i) \quad (3)$$

où les a_i sont des coefficients constants. Ceci est équivalent au principe de superposition.

8. idéaux en premier lieu

- Un système est dit invariant si son modèle ne dépend pas du temps.

Selon la nature des signaux x et y , le système peut être *homogène* (x et y de même nature) ou mixte (continu/échantillonné, analogique/numérique).

Pour les systèmes analogiques, voici les quatre possibilités assorties d'un exemple usuel :

- x et y continus

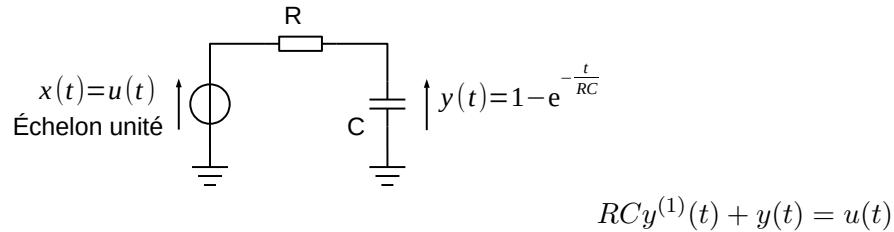


FIGURE 2.5 – Filtre RC

Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre n à coefficients réels et constants.

$$b_0y(t) + b_1y^{(1)}(t) + \dots + b_ny^{(n)}(t) = a_0x(t) + \dots + a_mx^{(m)}(t) \text{ avec } m \leq n. \quad (4)$$

- x et y échantillonnés

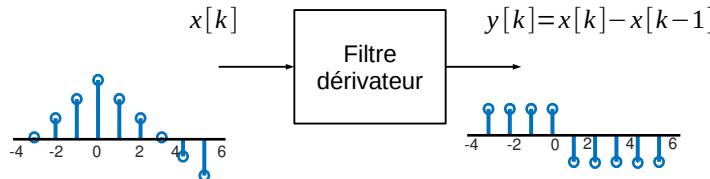


FIGURE 2.6 – Filtre dérivateur temps-discret

Ce filtre réalise la différence entre deux points consécutifs d'où son nom de dérivateur. Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une '*équation aux différences finies*' d'ordre n à coefficient α_i et β_i réels et constants.

$$y[k] = - \sum_{i=1}^n \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^m \alpha_j x[k-j] \text{ où } m \text{ et } n \text{ sont finis.} \quad (5)$$

- x continu et y échantillonné : échantillonateur *réel* à pas constant T_e et durée de fermeture τ ($\tau \ll T_e$)

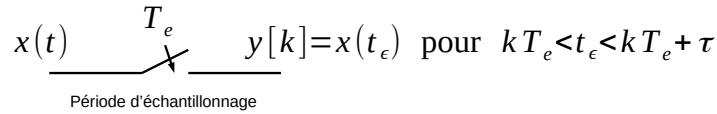


FIGURE 2.7 – Échantillonnage *réel* (avec durée de fermeture non-nulle)

- x échantillonné et y continu : interpolation d'ordre 0 ou blocage

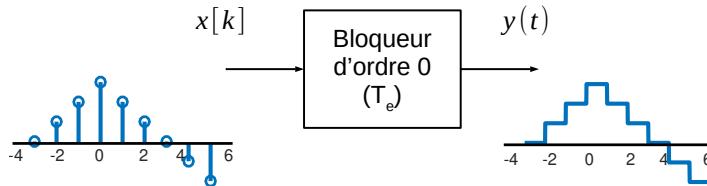


FIGURE 2.8 – Blocage d'ordre 0

Pour le traitement mathématique, les systèmes inhomogènes (d'un point de vue temporel) sont décomposés en sous systèmes homogènes reliés par des échantillonneurs et/ou des interpolateurs qui font les interfaces de changement de domaine.

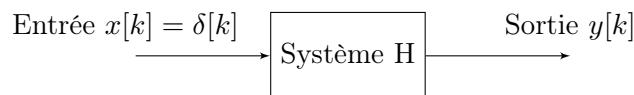
Les outils mathématiques et leurs propriétés sont définis pour les systèmes homogènes continus ou échantillonnés.

Propriété. *Un SLI est un système de convolution.*

Démonstration.

- Temps discret

La réponse impulsionnelle est la sortie correspondante à une entrée impulsionnelle $x[k] = \delta[k]$.



Puis une entrée quelconque $x[k]$ peut être décomposée en une somme d'impulsions discrètes :

$$x[k] = \sum_n x[n] \delta[k - n] \quad (6)$$

Le système H est linéaire et invariant, donc :

$$y[k] = \sum_n x[n] H \{ \delta[k - n] \} \quad (7)$$

$$= \sum_n x[n] h[k - n] \quad (8)$$

Ceci est un produit de convolution discret noté * :

$$y[k] = x * h[k] \quad (9)$$

— Temps continu

De même dans le cas continu, une entrée quelconque peut être décomposée en une somme d'impulsions réelles de largeur τ :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t)$$

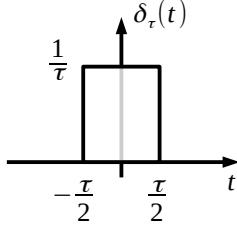


FIGURE 2.9

$$x(t) \simeq \sum_n x(n\tau) \tau \delta_\tau(t - n\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \delta(t - \theta) d\theta \quad (10)$$

$$\xrightarrow{\text{SLI}} x(t) \simeq \sum_n x(n\tau) \tau h_\tau(t - n\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta \quad (11)$$

Ceci est un produit de convolution continu noté également $*$:

$$y(t) = x * h(t) \quad (12)$$

□

Autres propriétés

— Le produit de convolution est commutatif.

$$y(t) = x * h(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (13)$$

$$y[k] = x * h[k] = h * x[k] = \sum_n h[n] x[k - n] \quad (14)$$

— Dans le cas d'un système causal, la réponse à un instant donné ne dépend que des valeurs précédentes de l'entrée, ($h(t) = 0$ pour $t < 0$ ou $h[n] = 0$ pour $n < 0$) :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (15)$$

$$y[k] = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] x[k - n] \quad (16)$$

- Certains systèmes discrets ont une réponse impulsionale de durée finie (système RIF) tandis que d'autres ont une réponse impulsionale de durée infinie (systèmes RII).
- Tous les systèmes continus réels ont une réponse impulsionale de durée infinie.

2.1.2 Généralités sur les transformées

En mathématiques, une transformée consiste à associer une fonction définie sur un domaine à une autre fonction, définie sur un domaine éventuellement différent. L'application principale que nous en ferons consiste à étudier un signal défini sur le domaine temporel par sa transformation sur le domaine fréquentiel.

Il existe une grande variété de transformées (Fourier, Laplace, Z, cosinus, Walsh, ondelettes...) et chacune peut avoir des définitions variables en fonction de l'espace de fonction envisagé. Dans ce module d'enseignement, nous utiliserons intensivement :

- la transformée de Laplace ;
- et sa *restriction* : la transformée de Fourier (qui servira essentiellement à tracer les réponses fréquentielles)
- la transformée en Z ;
- et sa *restriction* : la transformée de Fourier à temps discret (qui servira aussi essentiellement à tracer les réponses fréquentielles)

En pratique, l'étude de la transformée de Laplace se fait souvent après l'étude des séries de Fourier et de leur extension continue, la transformée de Fourier. En effet, l'approche classique pour étendre la série de Fourier à la transformée de Fourier consiste à considérer que la période fondamentale d'un signal périodique peut augmenter à l'infini, faisant fusionner les fréquences discrètes $k f_0$ de la SFTC (série de Fourier temps continue) dans le continuum de fréquences f de la TFTC (transformée de Fourier temps continue).

Concernant la transformée de Laplace, il existe deux approches communes pour l'introduire. Une approche consiste à concevoir la transformée de Laplace comme une généralisation de la transformée de Fourier en exprimant des fonctions comme des combinaisons linéaires d'exponentielles complexes plutôt que comme des combinaisons linéaires de la classe plus restreinte de fonctions, des sinusoïdes complexes, utilisées dans la transformée de Fourier.

L'autre approche consiste à exploiter la nature unique de l'exponentielle complexe en tant que fonction propre des équations différentielles qui décrivent les systèmes linéaires et à se rendre compte qu'un système LTI excité par une exponentielle complexe répond avec une autre exponentielle complexe. La relation entre les exponentielles complexes d'excitation et de réponse d'un système LTI est la transformée de Laplace.

Dans ce cours nous privilierons la première approche.

2.2 Définition et propriétés de la transformée de Laplace

L'outil mathématique qui lie les domaines temporel et fréquentiel est la transformée de Fourier :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (17)$$

$X(\omega)$ peut s'interpréter comme la projection de $x(t)$ sur le signal harmonique $e^{-j\omega t}$: on cherche dans toute l'histoire (passé et future) de $x(t)$ ce qui correspond à la pulsation ω .

2.2.1 Définition, condition d'existence

La transformée de Laplace constitue une extension de la définition de la transformée de Fourier à tout le plan complexe de la variable fréquentielle.

La définition retenue est celle de la TL unilatérale car en pratique les signaux et leurs systèmes de traitement sont causaux. La borne inférieure est fixée à 0^- pour englober une éventuelle discontinuité ou impulsion qui se produirait en $t = 0$.

$$X(p) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (18)$$

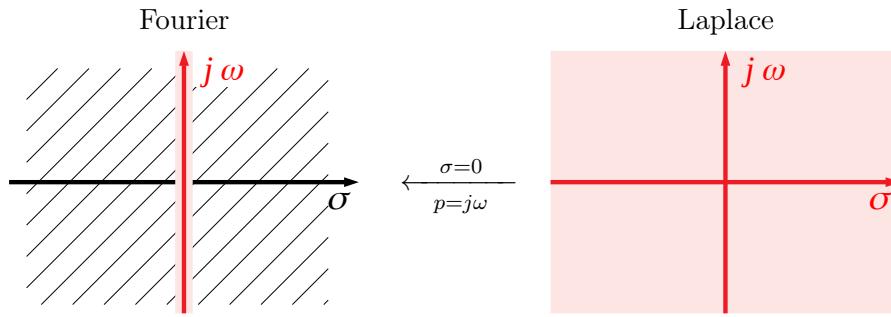


FIGURE 2.10

Le facteur $e^{-\sigma t}$ est un facteur de convergence que la transformée de Fourier ne possède pas. Il en résulte que la transformée de Laplace est définie (convergente) pour un plus grand nombre de signaux, en particulier les signaux dont la croissance est exponentielle.

Notation : Il y a quelques variations de notations. On utilisera le plus souvent :

$$\text{TL}(f) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}\{f\}(p) \quad \text{ou} \quad TL\{f\}(p) \quad \text{ou} \quad F(p)$$

Exemple : la fonction $f(t) = \exp(\alpha t)$ où α est une constante réelle positive ne possède pas de transformée de Fourier. En revanche, pour $\sigma > \alpha$, la transformée de Laplace est définie et vaut : $F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$. Ce résultat s'obtient simplement par :

$$F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \exp[(\alpha - p)t] dt \quad (19)$$

$$F(p) = \frac{1}{\alpha - p} \left[\exp[(\alpha - \sigma)t] \exp(-j\omega t) \right]_0^\infty \quad (20)$$

Et le plan de convergence est représenté à la Figure 2.11.

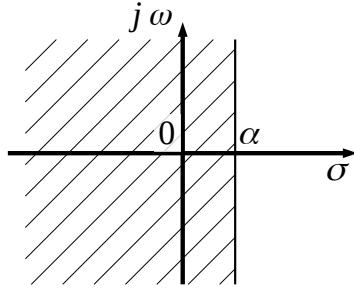


FIGURE 2.11

La transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$ est donnée par l'ensemble de la fonction $X(p)$ et de la bande de convergence.

Une condition suffisante pour l'existence de la TL est qu'il existe un réel positif σ_0 tel que l'intégrale suivante converge :

$$\int_{0^-}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (21)$$

Puis pour tout $\sigma > \sigma_0$, l'intégrale a fortiori converge et donc la TL est définie.

Tous les signaux causaux qui ont une transformée de Laplace sont tels que cette transformée existe dans un demi plan droit (contenant $\Re(p) = +\infty$).

Pour satisfaire à cette condition, $x(t)$ doit être localement sommable et la croissance de $x(t)$ avec t ne doit pas être trop rapide : $x(t)$ doit être d'ordre exponentiel, i.e. il existe deux réels positifs M et α tels que pour $t \rightarrow \infty$:

$$|x(t)| < M e^{\alpha t} \quad (22)$$

Exemples

- $f(t) = K$, une constante, il existe M tel que $|K| < M e^{\alpha t}$ avec $\alpha \geq 0$ quand $t \rightarrow \infty$, K est d'ordre exponentiel.
- $f(t) = t^n$, $n > 0$, comme $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^n}{\exp(\alpha t)} \right) = 0$ avec $\alpha > 0$, il existe M tel que $|t^n| < M e^{\alpha t}$ quand $t \rightarrow \infty$, t^n est d'ordre exponentiel.
- En revanche, $f(t) = \exp(t^3)$ n'est pas d'ordre exponentiel.

2.2.2 La transformée de Laplace de quelques signaux

- Echelon unité (Heaviside)

$$\text{TL}(u) = \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-tp} dt \quad (23)$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-tp} dt \quad (24)$$

$$= \left[-\frac{1}{p} e^{-tp} \right]_{0^-}^{\infty} \quad (25)$$

$$\text{TL}(u) = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \Re(p) > 0 \quad (26)$$

- Impulsion de Dirac

$$\text{TL}(\delta) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-tp} dt \quad (27)$$

$$\text{TL}(\delta) = 1 \quad (28)$$

Toute l'énergie de l'impulsion de Dirac est concentrée en 0 (de 0^- à 0^+) donc elle est bien englobée dans l'intégrale grâce au choix de la borne 0^- pour la définition de la TL unilatérale.

- Signal sinusoïdal complexe :

$$f(t) = \exp(\pm j\omega_0 t) \quad (29)$$

où ω_0 est une constante réelle positive (pulsation)

$$\text{TL}(f) = \int_{0^-}^{\infty} \exp(\pm j\omega_0 t) e^{-tp} dt \quad (30)$$

$$= \frac{1}{-p \pm j\omega_0} \left[\exp [(-p \pm j\omega_0)t] \right]_{0^-}^{\infty} \quad (31)$$

$$\text{TL}(f) = \frac{1}{p \mp j\omega_0} \quad \text{pour } \Re(p) > 0 \quad (32)$$

2.2.3 Propriétés de la TL

Linéarité :

$$\text{TL} \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n a_i \text{TL}[x_i(t)] \quad (33)$$

où les a_i sont des constantes.

- Application : détermination des TL des fonctions $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$:

$$\text{TL}[\cos(\omega_0 t)] = \text{TL}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2(p - j\omega_0)} + \frac{1}{2(p + j\omega_0)} = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \quad (34)$$

$$\text{TL}[\sin(\omega_0 t)] = \text{TL}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j(p - j\omega_0)} - \frac{1}{2j(p + j\omega_0)} = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad (35)$$

Contraction/dilatation temporelle : Multiplication de la variable t par une constante positive α :

$$\text{TL}[x(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (36)$$

Dérivée temporelle :

$$\text{TL}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = pX(p) - x(0^-) \quad (37)$$

Cette propriété est très importante : la dérivée dans le domaine temporel correspond à une multiplication par la variable complexe p dans le domaine de Laplace (avec l'addition de termes correspondant aux conditions initiales). Donc l'opération transcendante de dérivation est convertie en une opération algébrique de multiplication. Ceci est le vrai pouvoir de la TL qui la rend si utile pour résoudre les équations différentielles.

Intégration temporelle :

$$\text{TL}\left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} X(p) \quad (38)$$

Cette relation montre que l'intégration dans le domaine temporel correspond à une division dans le domaine de Laplace.

En combinant les deux dernières propriétés, nous pouvons conclure que grâce à la TL, les équations intégro-différentielles sont remplacées par des équations algébriques.

— Application : détermination de la TL de la fonction $f_n(t) = t^n$ où n est un entier.

Sachant que la TL de l'échelon unité $u(t)$ vaut $\frac{1}{p}$:

$$f_1(t) = t u(t) = \int_{0^-}^t u(\tau) d\tau \implies \text{TL}(f_1) = \frac{1}{p} \text{TL}(u(t)) = \frac{1}{p^2} \quad (39)$$

$$f_2(t) = t^2 u(t) = 2 \int_{0^-}^t \tau d\tau \implies \text{TL}(f_2) = \frac{2}{p} \text{TL}(t u(t)) = \frac{2}{p^3} \quad (40)$$

$$f_n(t) = t^n u(t) = n \int_{0^-}^t \tau^{n-1} d\tau \implies \text{TL}(f_n) = \frac{n}{p} \text{TL}(f_{n-1}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (41)$$

Définition dans le domaine de Laplace :

$$\text{TL}[-t x(t)] = \frac{dX(p)}{dp} \quad (42)$$

Intégration dans le domaine de Laplace :

$$\text{TL}\left[\frac{x(t)}{t}\right] = \int_p^\infty X(p) dp \quad (43)$$

Translation en temps :

$$\text{TL}[x(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha p} X(p) \quad (44)$$

Translation en fréquence :

$$\text{TL}[e^{\alpha t} x(t)] = X(p - a) \quad (45)$$

Convolution en temps :

$$\text{TL}[x_1 * x_2(t)] = X_1(p) \cdot X_2(p) \quad (46)$$

Signaux périodiques : $x(t)$ périodique de période T :

$$\text{TL}[x(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T x(t) e^{-tp} dt \quad (47)$$

2.2.4 Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Theorem 2.1. Soit $x(t)$ un signal causal de transformée $X(p)$, à condition que les limites existent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty} pX(p) \quad (48)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+} pX(p). \quad (49)$$

Le théorème de la valeur initiale permet de connaître la valeur de départ de $x(t)$ à partir de sa transformée de Laplace.

Le théorème de la valeur finale permet de déterminer la valeur de $x(t)$ à l'état stable à partir de sa transformée de Laplace.

Exemple : On a la transformée de Laplace suivante :

$$X(p) = \frac{5p + 3}{p(p + 1)} \quad (50)$$

Alors :

$$pX(p) = \frac{5p + 3}{p + 1} \text{ et } \begin{cases} x(0^+) &= \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty} pX(p) = 5 \\ x(\infty) &= \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+} pX(p) = 3 \end{cases} \quad (51)$$

Pour connaître complètement $x(t)$ à partir de sa transformée de Laplace, il faut inverser la transformée de Laplace.

2.2.5 Transformée inverse : résumé succinct

En toute rigueur, quand on introduit la transformée de Laplace, il est d'usage de présenter l'opération inverse, à savoir *la transformée inverse de Laplace*. Cependant, la définition complète de la transformée de Laplace inverse (TL^{-1}) requiert un bagage théorique (espaces de fonctions, existence, théorème des résidus...) qui ne sera pas être développé ici pour des raisons de cohérence pédagogique.

Nous indiquerons donc succinctement que, *sous les bonnes conditions*, dans le cas général, l'inverse de la fonction de Laplace $X(p)$, s'obtient par la formule suivante :

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p) e^{pt} dp \quad (52)$$

On peut voir que la transformée inverse de Laplace présente la même structure que la transformée inverse de Fourier ; et en fait, que toutes les transformées inverses. Cette expression est en pratique difficile à exploiter et on utilise deux approches pour traiter les problèmes d'inversion de Laplace :

- quand $X(p)$ n'est pas particulière, on utilise le *théorème des résidus* ;
- quand $X(p)$ s'écrit sous forme d'une fonction rationnelle, on la décompose en *éléments simples*, puis on inverse chaque éléments simples.

De la même manière que nous avons éludé les détails mathématiques liés à la définition de la transformée de Laplace inverse, nous ne développerons pas les détails concernant le premier cas (*théorème des résidus*). Cependant, nous encourageons le/la lecteur/trice curieux/se (et/ou passionné/e) à consulter les références bibliographiques suivantes qui traitent du sujet de manière rigoureuse :

- [Transformées de Laplace des fonctions et des distributions](#) J-L Raimbault (Polytechnique,2008)
- [Chapitre 9 Transformation de Laplace](#), J-B Zuber (Jussieux,2013)

Enfin, il est à noter que, dans le cadre des systèmes électroniques étudiés dans ce cours, il ne sera traité quasiment exclusivement que des fonctions de Laplace de type fonction rationnelle. C'est pourquoi, nous ne développerons que ce cas d'usage d'inversion de transformée de Laplace.

2.2.6 La transformée inverse d'une fonction rationnelle

Nous considérons la fonction de la variable complexe p suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (53)$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes à coefficients réels et $\deg(N) < \deg(D)$.

Une méthode efficace pour obtenir la TL^{-1} de $F(p)$ repose sur la décomposition en éléments simples. Les TL^{-1} des éléments simples sont connues et répertoriées (voir tableau en annexe). L'avantage de cette décomposition réside dans l'interprétation physique associée à chaque terme qui nous éclaire sur le comportement temporel du signal ou du système.

Les zéros de $F(p)$ sont les zéros de $N(p)$ et les pôles de $F(p)$ sont les zéros de $D(p)$; les pôles de $F(p)$ sont notés p_k , ils peuvent être réels ou complexes, simples ou multiples (d'ordre m_k).

$$F(p) = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)^{m_k}} \quad (54)$$

Comme $D(p)$ est à coefficients réels, chaque pôle complexe de $F(p)$ est accompagné de son conjugué. Le tableau ci-dessous présente les différents types de pôles et l'expression de leurs éléments simples associés.

Type de pôle	Expression	Eléments simples associés
Pôle réel simple	$p - a$	$\frac{A}{p-a}$
Pôle réel d'ordre r	$(p - b)^r$	$\frac{B_1}{p-b} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_r}{(p-b)^r}$
2 pôles simples complexes conjugués	$p^2 + cp + d$	$\frac{Cp+D}{p^2+cp+d}$
2 pôles d'ordre m complexes conjugués	$(p^2 + ep + f)^m$	$\frac{E_1p+F_1}{p^2+ep+f} + \frac{E_2p+F_2}{(p^2+ep+f)^2} + \dots + \frac{E_mp+F_m}{(p^2+ep+f)^m}$

TABLE 2.1 – Les types de pôles et leurs décompositions en éléments simples

Pour déterminer les coefficients au numérateur de chaque terme, les méthodes sont les suivantes :

- par identification ;
- inversion par calcul de l'intégrale complexe (formule des résidus)

2.3 Principales utilisations de la transformée de Laplace

Le point clé des méthodes d'inversion que nous venons de détailler est la détermination des pôles de la fonction transformée $X(p)$. En effet, les pôles de $X(p)$ contiennent toute l'information nécessaire à la connaissance du comportement temporel de la fonction d'origine $x(t)$.

2.3.1 Prédiction de la réponse d'un système à un stimulus

Signal donné (théorique) : résolution d'équations différentielles

La principale force de la représentation symbolique de Laplace est de convertir les équations intégro-différentielles qui caractérisent les systèmes linéaires invariants en temps continu en équation algébriques.

Domaine temporel	Domaine de Laplace
Dérivation $\frac{d}{dt}x(t)$	Multiplication par p $p \cdot X(p)$
Intégration $\int_0^t x(u)du$	Division $\frac{1}{p} X(p)$

De l'équation algébrique en $X(p)$, il est facile d'extraire l'inconnue $X(p)$. Puis les méthodes d'inversion de la transformée de Laplace sont mises en œuvre pour obtenir $x(t)$.

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer à un système d'équations différentielles avec plusieurs variables.

L'utilisation concrète de cette propriété de la transformée de Laplace sera développée et mise en pratique à la [section 2.3.2](#).

Pôles du système et comportement qualitatif

Soit la fonction rationnelle factorisée :

$$X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)^{m_k}} \quad (55)$$

Chaque pôle est symbolisé par une croix dans le plan p complexe.

La fonction $x(t)$ est la somme des transformées inverses de chaque terme correspondant à un pôle ou une paire de pôles. Le comportement qualitatif d'un terme en fonction de la localisation de son pôle dans le plan p est le suivant :

Pôle réel simple :

$$p = \sigma_0 \quad (56)$$

$$\varphi(t) = k \exp(\sigma_0 t) \quad (57)$$

- Si le pôle réel est égal à 0, la fonction d'origine est une fonction échelon ([Figure 2.12\(c\)](#)).
- Si le pôle réel est négatif, la fonction d'origine décroît exponentiellement et plus le pôle est loin de l'axe $j\omega$, plus la décroissance est rapide ([Figure 2.12\(a\)](#)).
- En revanche, si le pôle est positif, la fonction croît indéfiniment ([Figure 2.12\(e\)](#)).

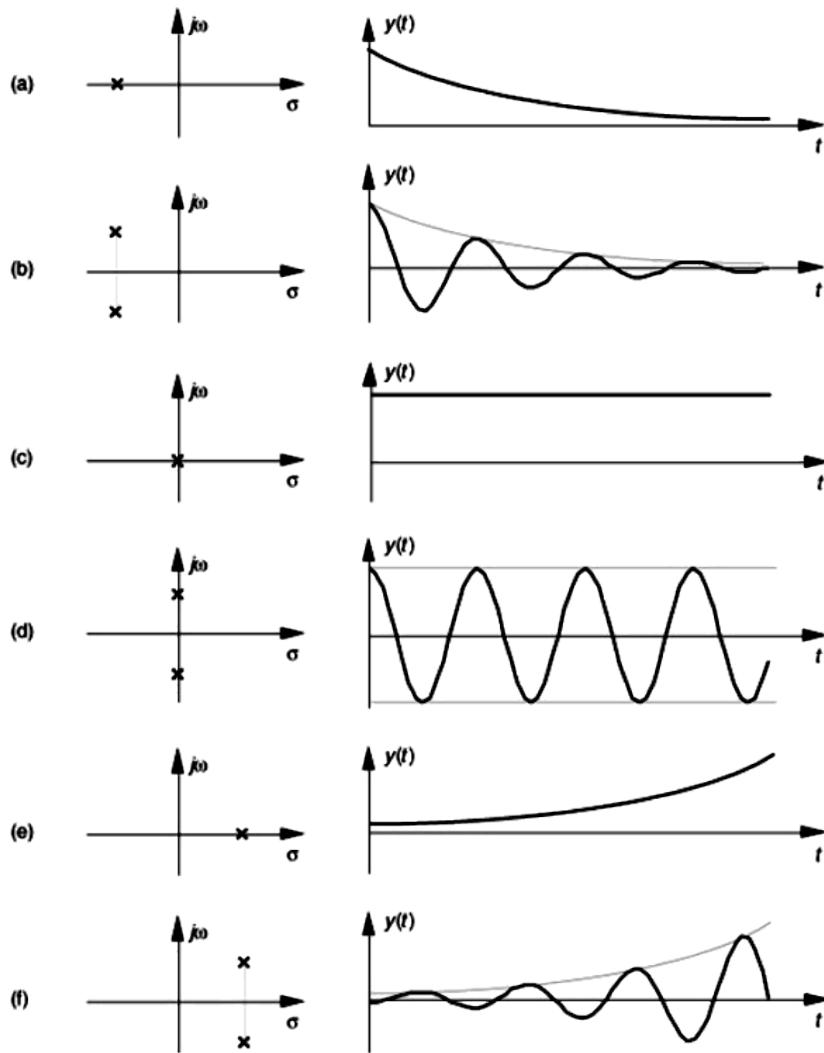


FIGURE 2.12 – Réponses d'un système en fonction du positionnement de ses pôles

Pôles complexes conjugués :

$$p = \sigma_0 \pm j\omega_0 \quad (58)$$

$$\varphi(t) = k \exp(\sigma_0 t) \cos \omega_0 t \quad (59)$$

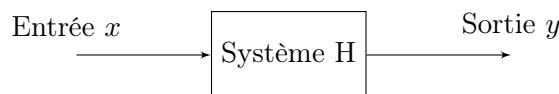
Si le pôle est imaginaire pur, la fonction d'origine est sinusoïdale. Plus le pôle est loin de l'axe des réels, plus la fréquence des oscillations est rapide ([Figure 2.12\(d\)](#)).

Si la partie réelle du pôle est négative, l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement ([Figure 2.12\(b\)](#)). En revanche, si la partie réelle du pôle est positive, l'amplitude des oscillations croît indéfiniment ([Figure 2.12\(f\)](#)).

Ces considérations montrent que selon le signe de la partie réelle des pôles de $X(p)$, le signal $x(t)$ converge ou diverge ou encore reste borné ; ce qui se traduit pour un système par la notion de stabilité.

Stabilité

La stabilité est une notion importante dans l'étude des systèmes.



Intuitivement, un système est stable si lorsqu'on supprime l'excitation x , la sortie y tend vers une limite bornée.

Systèmes forcés : la stabilité au sens EBSB Un système est dit *forcé* lorsque son entrée est non nulle et ses conditions initiales nulles.

Pour ces systèmes, à toute entrée x , *bornée* en amplitude, correspond une sortie y également bornée en amplitude.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit *stable EBSB* est que :

- sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable⁹ :

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| \, dt < +\infty \quad (60)$$

- sa fonction de transfert $H(p)$ n'ait que des pôles à partie réelle **négative** et que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur (ce qui est toujours le cas en pratique).

Exemples :

- Un retard pur est stable EBSB.
- Un intégrateur $\frac{K}{p}$ n'est pas stable EBSB.

Systèmes libres : stabilité au sens large Un système est dit *libre* lorsque son entrée est nulle mais ses conditions initiales sont non nulles. Ces systèmes permettent d'élargir le concept de la stabilité à la situation suivante :

Un système est stable au sens large si sa réponse impulsionnelle est bornée pour tout $t > 0$.

Pour cette définition de la stabilité, $H(p)$ peut aussi avoir des pôles à partie réelle nulle d'ordre 1.

Exemples :

- $H(p) = \frac{5p^3 - 6p - 3}{p^3(p+1)^2}$ est la fonction de transfert d'un système instable.
- $H(p) = \frac{p-2}{p(p+1)^3}$ est la fonction de transfert d'un système stable au sens large, mais pas EBSB.
- $H(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+8}$ est la fonction de transfert d'un système stable dans les deux sens du termes.

2.3.2 Électronique

Étude d'un circuit électrique

La transformée de Laplace est un outil puissant pour l'analyse et la conception de circuits et systèmes électriques. Et au-delà, l'étude de tout système (mécanique, biologique) pour lequel il existe une équivalence (un modèle) électrique peut se servir de l'outil de Laplace.

Les éléments de base : Considérons les principaux éléments d'un circuit électrique et leur expression dans le domaine de Laplace :

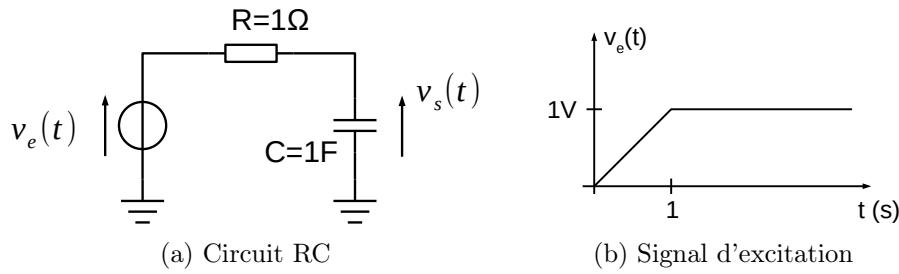
9. Observez qu'il s'agit de la définition de l'espace de fonction $L^1(\mathbb{R})$

Grandeur	Expression temporelle	Expression en Laplace
Tension	$u(t)$	$U(p)$
Courant	$i(t)$	$I(p)$
Résistance	$R = \frac{u(t)}{i(t)}$	$Z_R = \frac{U(p)}{I(p)} = R$
Inductance	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(p) = LpI(p) - Li(0^-) = Z_L I(p) - Li(0^-)$
Capacité	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$I(p) = CpU(p) - Cu(0^-) = \frac{1}{Z_C} U(p) - Cu(0^-)$

Les termes correspondants aux conditions initiales sont très importants ; ils peuvent être modélisés par une source de tension continue ou de courant continu.

Méthode d'étude générale : Nous allons présenter la technique générale pour déterminer l'expression d'un signal dans un circuit en l'appliquant simultanément à un exemple. Les données sont la topologie du circuit, les expressions temporelles des excitations et les conditions initiales (valeurs des tensions et des courants à $t=0$).

Soit le circuit intégrateur et l'excitation représentés ci-dessous, déterminer l'expression temporelle de la sortie $v_s(t)$ en fonction de sa valeur initiale.

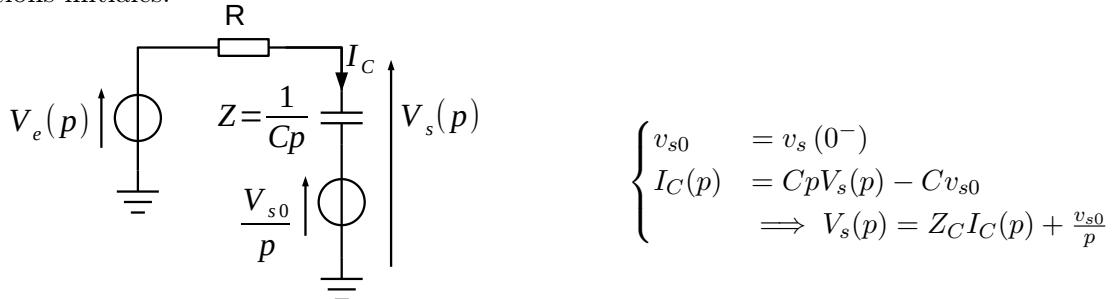


— Calculer les transformées de Laplace des entrées.

$$v_e(t) = t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1) \quad (61)$$

$$V_e(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p} = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) \quad (62)$$

— Représenter le circuit avec les éléments transformés et des générateurs pour les conditions initiales.



$$\begin{cases} v_{s0} &= v_s(0^-) \\ I_C(p) &= CpV_s(p) - Cv_{s0} \\ \Rightarrow V_s(p) &= Z_C I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p} \end{cases}$$

— Écrire autant d'équations que d'inconnues dans le système grâce aux lois des nœuds et des mailles.

$$V_s(p) = \frac{1}{Cp} I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p} \quad (63)$$

$$V_s(p) + RI_C(p) = V_e(p) \quad (64)$$

— Résoudre le système d'équations pour toutes les inconnues ou seulement pour celles

qui sont recherchées.

$$V_s(p) = \frac{V_e(p) + RCv_{s0}}{RCp + 1} \quad (65)$$

$$= \frac{V_e(p) + v_{s0}}{p + 1} \text{ pour } RC = 1 \quad (66)$$

$$V_s(p) = \frac{1}{p + 1} \left[\frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) + v_{s0} \right] \quad (67)$$

— Calculer la transformée de Laplace inverse

$$F_1(p) = \frac{1}{(p + 1)p^2} = \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \implies f_1(t) = (e^{-t} - 1 + t) u(t) \quad (68)$$

$$F_2(p) = \frac{v_{s0}}{(p + 1)} \implies f_2(t) = v_{s0} e^{-t} u(t) \quad (69)$$

$$\implies v_s(t) = f_1(t) - f_1(t - 1) + f_2(t) \quad (70)$$

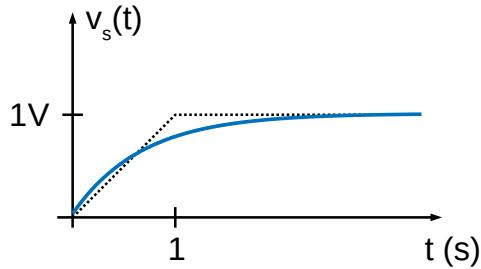


FIGURE 2.14 – Allure de $v_s(t)$ pour $v_{s0} = 0$

2.4 Exercices TL

2.4.1 Transformée de Laplace

Soit la fonction $g(t)$ définie graphiquement par la figure 2.15.

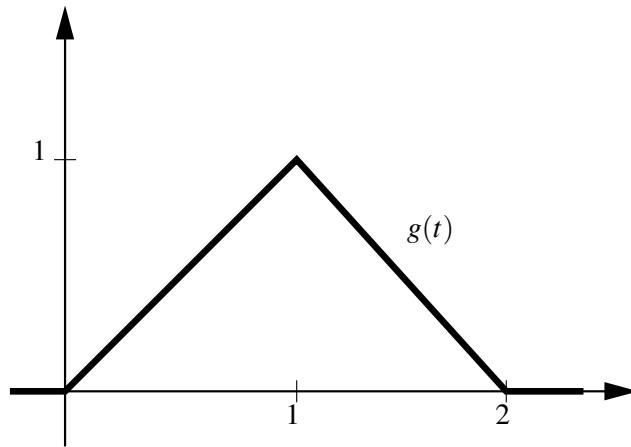


FIGURE 2.15 – Fonction $g(t)$

Question 2.4.1.1. Démontrer que la fonction $g(t)$ peut s'écrire sous

$$g(t) = t \cdot u(t) - 2(t-1) \cdot u(t-1) + (t-2) \cdot u(t-2)$$

Question 2.4.1.2. Calculer la transformée de Laplace $G(p)$ de $g(t)$.

Question 2.4.1.3. En déduire sa transformée de Fourier $G(j\omega)$

2.4.2 Etude en Laplace d'un filtre sélectif

On considère un circuit à temps continu dont le schéma de principe est reporté sur la figure 2.16. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal : le gain en tension de l'amplificateur est infini et indépendant de la fréquence. L'impédance d'entrée est infinie ($i_+ = i_- = 0$).

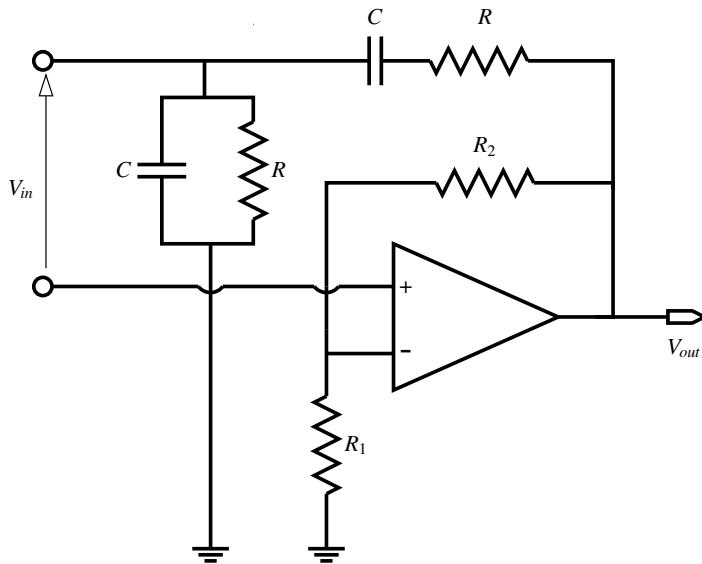


FIGURE 2.16 – Circuit à ampli-op

La fonction de transfert du système est donnée par :

$$F(p) = \frac{-a(\tau^2 p^2 + 3\tau p + 1)}{\tau^2 p^2 + (3 - a)\tau p + 1},$$

avec $a = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ et $\tau = RC$

Question 2.4.2.1. À quelle condition sur a le système est-il stable ?

Question 2.4.2.2. Calculer les zéros $z_{1,2}$ de $F(p)$ en fonction de τ et expliciter $F(p)$ en fonction de $\tau_{1,2} = \frac{-1}{z_{1,2}}$.

Question 2.4.2.3. Tracer le diagramme asymptotique de Bode de F : $|F(p = j\omega)|_{dB}$ et $\Phi(F(p = j\omega))$ ainsi que l'allure de la courbe réelle dans le cas où $a = 1$ ¹⁰ ?.

Question 2.4.2.4. Quelle est la fonction réalisée par le système pour $a = 1$ et puis pour $a = 3$?

Bibliographie

- [1] H. Baher. *Analog & Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, 1992.
- [2] D. Beauvois and Y. Tanguy. *Représentation des signaux certains et des systèmes*. ESE, 1999.
- [3] L. Chaparro and A. Akan. *Signals and Systems using MATLAB*. Elsevier Science, 2018.
- [4] F. de Coulon. *Théorie et traitement des signaux*. Traité d'électricité. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998. <https://books.google.fr/books?id=4Xs0DQAAQBAJ>.
- [5] ESE. *Analyse des systèmes linéaires*, 1980.
- [6] A. Palamides and A. Veloni. *Signals and Systems Laboratory with MATLAB*. CRC Press, 2010.
- [7] M.J. Roberts. *Signals and Systems : Analysis Using Transform Methods & MATLAB*. McGraw-Hill Education, 2018.

10. $a = 1$ correspond au cas particulier où $R_2 = 0$

Chapitre 3

Amplification élémentaire

3.1 Introduction

Dans les chaînes d'acquisition ou de réception, les signaux en début de chaîne ont souvent des amplitudes très faibles. Par exemple, dans les applications ADSL, le signal au niveau du récepteur peut avoir une amplitude de l'ordre du mV. Dans les communications mobiles comme la 4G, la 5G ou le WiFi, les amplitudes sont encore plus faibles pouvant avoisiner le μ V. Pour pouvoir traiter ces signaux et les rendre utilisables et les adapter aux caractéristiques des circuits en aval, il est nécessaire de réaliser une amplification.

La fonction amplification a souvent été la première fonction réalisée en électronique quelques soient les technologies utilisées (tube, transistor bipolaire, circuit intégré).

Cette fonction élémentaire constitue souvent le circuit d'entrée de nombreux traitements de signaux plus globaux, qu'ils soient analogiques ou numériques (filtrage, modulation, démodulation, conversion analogique numérique, communication radio ...).

3.2 Amplificateur élémentaire

3.2.1 Architecture idéale

La manière la plus simple, au vu des technologies actuelles, pour planter un amplificateur est de moduler l'intensité d'un courant en fonction de la tension à amplifier. Puis ce courant circule dans une résistance afin de récupérer le signal amplifié. Comme présenté dans la figure 3.1 gauche), pour planter une telle architecture, nous avons besoin de trois ingrédients :

- Une source d'énergie qui fournit la tension d'alimentation : en pratique il peut s'agir d'une batterie ou d'un redresseur (Alimentation DC)
- Un modulateur tension / courant : le fonctionnement d'un transistor peut s'y rapprocher sous certaines conditions.
- Une charge qui convertit le courant en tension : de nombreuses possibilités sont envisageables mais pour des raisons de simplicité, nous allons nous contenter d'une résistance.

Analysons notre architecture, si l'amplificateur n'a pas de charge externe, le courant I_R qui traverse la résistance R_d serait égal au courant I_T . Ce courant est proportionnel à l'entrée V_e grâce à un modulateur tension / courant avec $I_T = g_m \cdot V_e$. L'implantation de ce modulateur ainsi que la validité de cette approximation seront discutées dans la suite. Ainsi la sortie V_s est donnée par :

$$V_s = VDD - R_d \cdot I_T = VDD - R_d \cdot g_m \cdot V_e \quad (1)$$

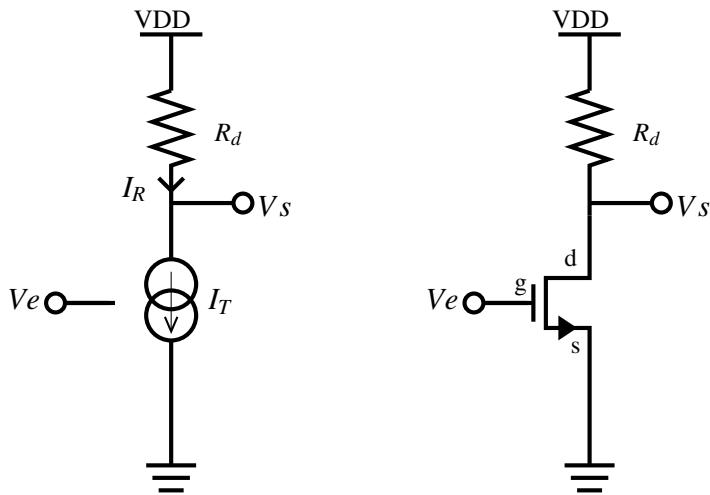


FIGURE 3.1 – Amplificateur élémentaire gauche) : Modèle idéal ; droite) : Circuit réel

Et donc le gain de cette architecture est donné par :

$$A = \frac{\partial V_s}{\partial V_e} = -R_d \cdot g_m \quad (2)$$

Cette architecture permet ainsi de réaliser une fonction d'amplification dont on peut ajuster facilement la valeur du gain en agissant sur R_d et/ou g_m . Deux points méritent d'être clarifiés. Le premier au sujet du signe du gain. En effet, la fonction réalisée est un gain inverseur. Ceci n'est pas problématique en pratique car il est facile de compenser le changement de signe en ajustant les traitements en aval. Le deuxième point est la présence du terme VDD dans l'expression de V_s . Cet aspect non plus n'est pas problématique car il est facile en pratique de supprimer/changer la valeur de la tension continue d'un signal.

Transistor MOSFET

Dans l'architecture de la figure 3.1 gauche), l'élément clé est le modulateur linéaire tension / courant. Malheureusement, il n'existe pas de composant électronique qui permet de reproduire exactement ce fonctionnement. Cependant, les transistors ont un fonctionnement qui se rapproche de celui-ci sous certaines conditions. Nous allons l'illustrer avec un transistor MOSFET (*Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*) mais sachez que d'autres technologies de transistors peuvent être utilisées pour l'implantation de ce genre de circuits.

Le transistor MOSFET a 3 zones de fonctionnement principales¹. Le choix entre ces différents modes se fait en fonction des tensions au niveau des 3 terminaux du transistor : s la source², d le Drain et g la Grille. La figure 3.2 illustre le circuit équivalent pour les 3 modes pour un transistor type NMOS.

- Interrupteur ouvert pour $V_{gs} < V_T$ où V_T est la tension de seuil du transistor
- Source de courant pour $(V_{gs} > V_T) \& (V_{ds} > V_{gs} - V_T)$ avec $I_T = K(V_{gs} - V_T)^2$ où K est une constante qui dépend de la technologie et des dimensions du transistor
- Résistance pour $(V_{gs} > V_T) \& (V_{ds} < V_{gs} - V_T)$ avec $R_T = \frac{K'}{V_{gs} - V_T}$ où K' est une deuxième constante qui dépend de la technologie et des dimensions du transistor

Il est important de souligner que dans les 3 modes, l'impédance de la grille est extrêmement élevée. Nous allons la considérer infinie dans ce module, ce qui résulte en un courant de grille nul.

1. Ceci est une simplification, il existe d'autres zones de fonctionnement sur les modèles complets
2. A ne confondre, avec la sortie

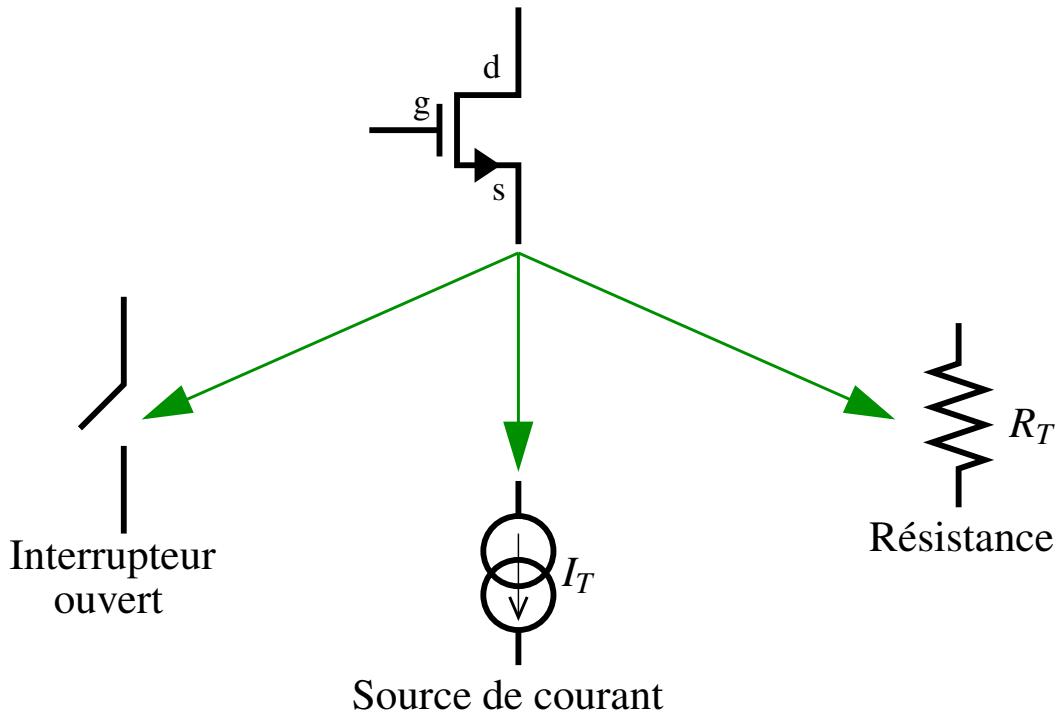


FIGURE 3.2 – Zone de fonctionnement du transistor MOS

3.2.2 Architecture réelle et caractéristiques grand signal

Regardons à présent le fonctionnement quand on remplace le modulateur tension/courant idéal par un transistor NMOS (figure 3.1 droite). Pour cela, analysons l'évolution de la sortie V_s quand on fait varier l'entrée V_e de 0 à VDD.

- Pour $V_e = V_{gs} < V_T$, le transistor est bloqué $\Rightarrow I_T = 0 \Rightarrow V_s = VDD$
- Quand V_e dépasse V_T , le transistor se comporte en source de courant $\Rightarrow V_s = VDD - RK(V_e - V_T)^2$
- Quand on augmente davantage V_e , la tension drain-source V_{ds} du transistor (égale à V_s dans notre architecture) devient inférieure à $(V_{gs} - V_T)$ et donc le montage se résume à présent à un diviseur résistif avec $V_s = \frac{R_T}{R_T + R_d} VDD$.

L'allure de la courbe $V_s = f(V_e)$ est donnée par la figure 3.3. Sur les 3 zones de fonctionnement clairement délimitées sur la courbe, il est évident que c'est la zone centrale qui offre la possibilité de réaliser une amplification. Malheureusement la courbe a un comportement quadratique et non pas linéaire sur cette zone. Cependant, autour du point central M_0 , en limitant les plages d'entrée et de sortie, il est possible d'approximer le comportement $V_s = f(V_e)$ à un comportement linéaire.

La détermination de la fonction $V_s = f(V_e)$ est la première étape de ce qu'on appelle l'analyse grand-signal, grands-signaux ou *large-signal* en anglais. On parle d'une analyse grand signal lorsque les évolutions de signaux peuvent provoquer des comportements non-linéaires et/ou des changements de zone de fonctionnement pour le transistor. L'analyse grand signal permet d'identifier les caractéristiques suivantes :

Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement est le point M_0 avec ses coordonnées $(V_{E0}; V_{S0})$. C'est le point autour duquel variera l'entrée et la sortie. Le choix du point M_0 dépend de divers paramètres tels que le gain requis et aussi les circuits en amont et en aval de l'amplificateur.

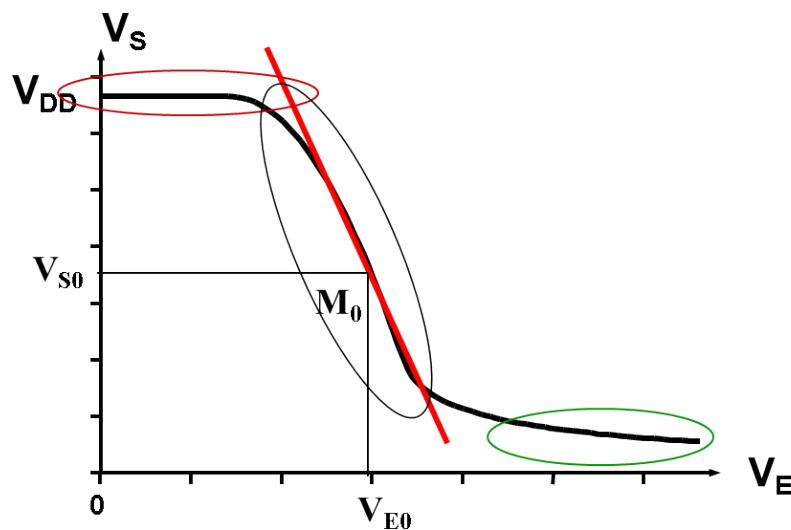
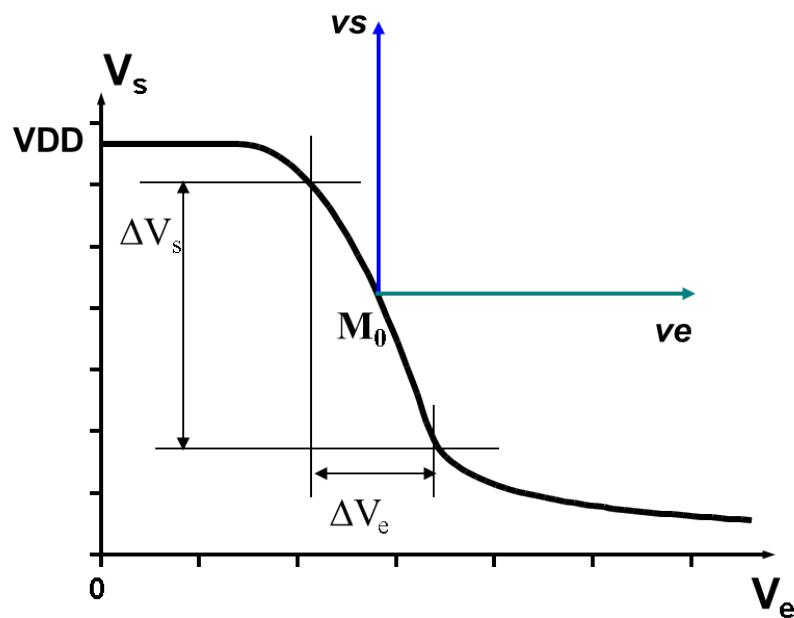


FIGURE 3.3 – Caractéristique entrée sortie de l'amplificateur

FIGURE 3.4 – Caractéristique entrée sortie de l'amplificateur illustrant ΔV_e et ΔV_s . La courbe est identique à la courbe de la figure 3.3. On a séparé les 2 figures pour des soucis de clareté.

La dynamique d'entrée/sortie

La dynamique d'entrée ΔV_e est la plage d'entrée autour de V_{E0} sur laquelle la caractéristique $V_s = f(V_e)$ peut être approximée linéaire. La dynamique de sortie ΔV_s est la plage de sortie autour de V_{S0} correspondante à ΔV_e . La figure 3.4 illustre comment déterminer ces 2 grandeurs. Le choix de ΔV_e et ΔV_s est un compromis entre les valeurs des plages d'entrée/sortie et de la variation du gain sur la plage ΔV_e .

Gain grand signal

Le gain de l'amplificateur est donné par la pente moyenne de la courbe $V_s = f(V_e)$, il est donné par :

$$A = \frac{\Delta V_s}{\Delta V_e} \quad (3)$$

3.2.3 Caractéristiques petits signaux

Principe des analyses petits signaux

L'analyse petits-signaux, petit-signal ou *small signal* en anglais, consiste à étudier le comportement d'un circuit en réponse à des signaux infiniment petit autour d'un point de polarisation donné, notamment le point de fonctionnement. Le fait de manipuler des signaux de très faibles amplitudes autorise la linéarisation de tous les composants non-linéaires du circuit. Ce type d'analyse va nous permettre de déterminer rapidement diverses caractéristiques du circuit notamment son comportement fréquentiel. Pour cela, commençons par redéfinir les entrées/sorties comme suit :

$$v_e = V_e - V_{E0} ; v_s = V_s - V_{S0} \quad (4)$$

Les tensions v_e et v_s correspondent aux tensions d'entrée/sortie petit-signal, elles sont notées par des lettres minuscules en oppositions aux tensions grand-signal notées par des lettres majuscules. Comme illustré dans la figure 3.4, ce changement correspond à un changement d'origine pour recentrer les variations autour de M_0 .

2 transformations additionnelles qui permettent de simplifier le circuit sont permises et recommandées :

- Linéariser tous les éléments non linéaires du circuit, le transistor sera remplacé par une source linéaire $i_t = gm \cdot v_e$ où gm est la valeur de la tangente au point V_{E0} dans la fonction $I_T = f(V_e)$
- Court-circuiter toutes les tensions non-concernées par l'analyse notamment les tensions continues (Alimentation, polarisation) à la masse. Par exemple, si on veut étudier $A(j\omega) = \frac{\partial v_s(j\omega)}{\partial v_e(j\omega)}$, il est facile de se convaincre, vu que notre circuit est linéaire, que tous les termes qui dépendent d'autres tensions notamment de VDD seront annulées lors de l'application de la dérivée en fonction de ∂v_e .

La figure 3.5 montre le modèle petit signal de l'amplificateur de la figure ainsi que son modèle équivalent Thévenin. Il est facile de démontrer que :

$$v_s = -gm \cdot R_d \cdot v_e \implies A = -gm \cdot R_d \quad (5)$$

Dans le circuit considéré, nous n'avons pas de comportement fréquentiel car nous nous sommes restreints à une architecture très simple sans charge. Cependant, en pratique, l'amplificateur aura une charge capacitive en sortie qui engendrera un pôle dans la fonction de transfert. Il est aussi assez courant de cascader plusieurs amplificateurs en série. La fonction de transfert de telles architectures peut devenir rapidement difficile à calculer avec une multitude de pôles et éventuellement des zéros. L'analyse petit signal est un outil très efficace pour étudier ce genre d'architecture.

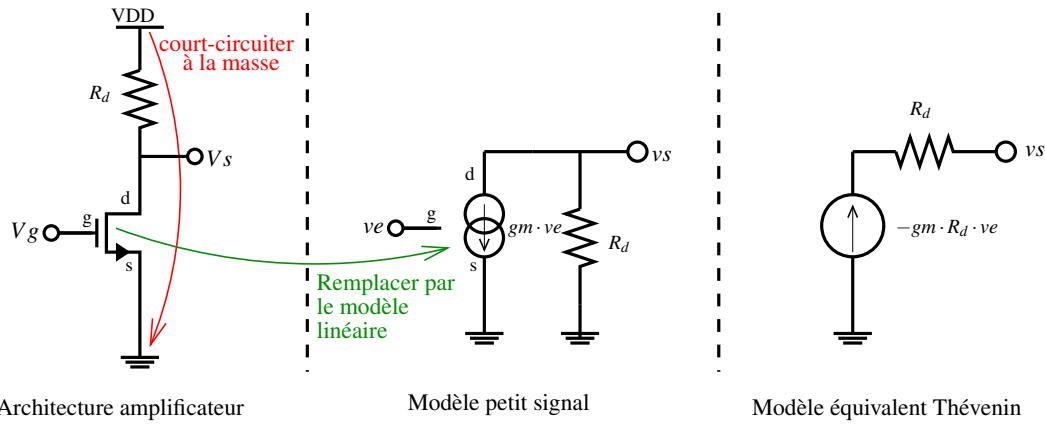


FIGURE 3.5 – Modèle petit signal de l'amplificateur

Fonction de transfert

La fonction de transfert est tout simplement le gain de l'architecture en petit signal. Comme on a vu auparavant, le gain se calcule en faisant une dérivée partielle de la sortie en fonction de l'entrée. Cependant avec la configuration petit signal, le circuit est linéaire et toutes les tensions continues sont reliées à la masse, ceci ramène le gain à une simple division :

$$A(j\omega) = \frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)} \quad (6)$$

Comme précisé dans la section précédente, cette fonction de gain peut contenir plusieurs pôles et éventuellement des zéros si on utilise des architectures complexes notamment des étages en cascade.

La figure 3.6 présente un exemple de gain et de diagramme asymptotique de Bode du gain et la phase de la fonction de transfert d'un amplificateur en fonction de la fréquence. L'exemple considéré est un modèle avec 2 pôles aux fréquences f_1 et f_2 et un gain DC A_0 (exprimé en dB). On voit que l'écart entre l'approximation droite et la courbe réelle est de 3 dB pour la valeur f_1 de la fréquence. f_1 est donc ici égale à la fréquence de coupure f_c . La région comprise entre f_1 et f_2 a une chute de 6 dB par octave ou 20 dB par décade, on dit que cette chute est d'ordre 1. La région au delà de f_2 a une chute en 12 dB par octave ou 40 dB par décade, on dit que cette chute est d'ordre 2. Ainsi, l'ordre d'une courbe de réponse indique comment varie la courbe de réponse en fonction de la fréquence. Une courbe d'ordre n présente une région dont la pente sera de $6 \cdot n$ dB par octave. L'approximation droite présentée ci-dessus est très utilisée dans la pratique.

Fréquence de transition

La fréquence de transition ou fréquence unitaire est la fréquence f_T pour laquelle le gain de l'amplificateur vaut 1 ou 0 dB.

Produit gain-bande

Pour une cellule passe-bas ayant une chute de 6 dB par octave, la transmittance est de la forme :

$$A(j2\pi f) = A_0 \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (7)$$

et si on utilise cette cellule à une fréquence $f >> f_c$, alors, on a : $|A(f)| \cdot f \simeq A_0 \cdot f_c$.

Ainsi, le produit de la transmittance par la fréquence a l'allure d'une quantité constante, appelée produit gain-bande. Ce paramètre traduit la possibilité de transmittance maximum que peut fournir une structure amplificatrice pour une fréquence donnée.

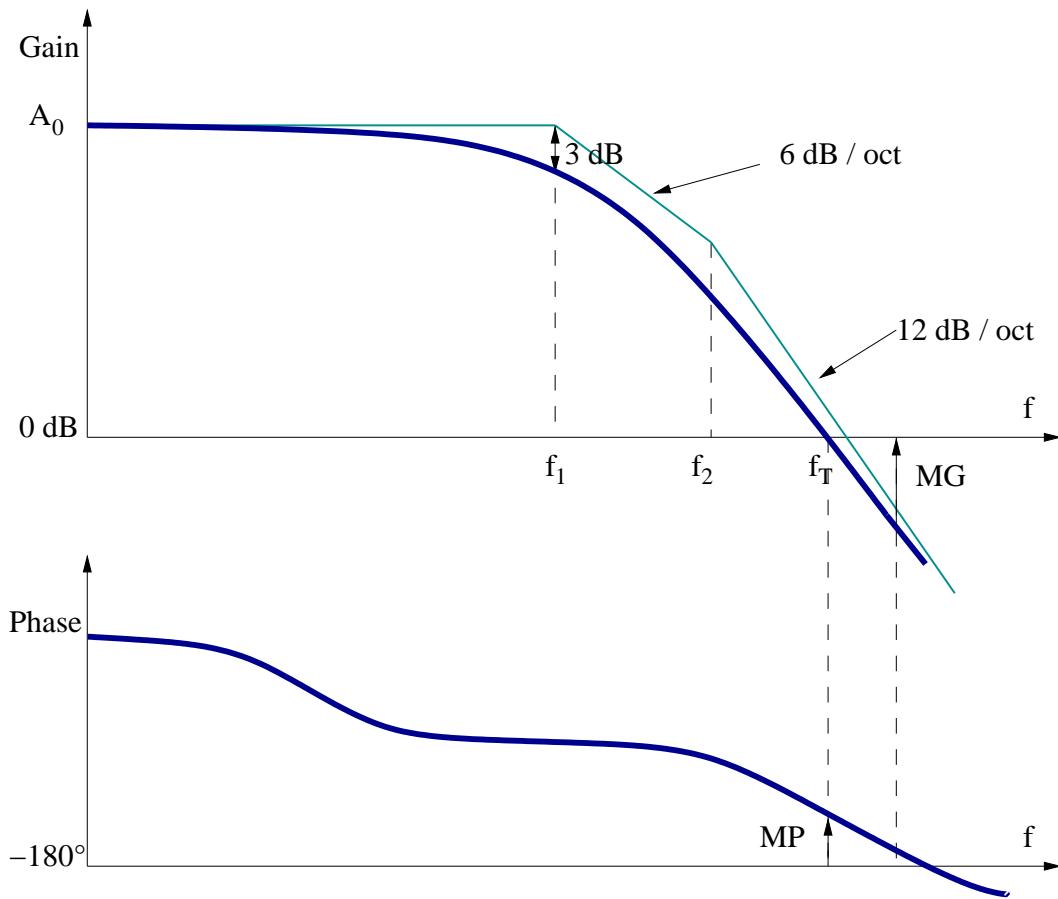


FIGURE 3.6 – Réponse en fréquences de l'amplificateur

Par exemple, comme l'illustre la figure 3.7 une cellule de produit gain-bande de 10^{10} ne pourra pas amplifier de plus de 100 un signal sinusoïdal de 100 MHz; si le gain doit être supérieur à 100 pour ce signal, il faudra utiliser une autre cellule plus importante ou une structure multi-cellules.

Le produit gain-bande d'une cellule est, en quelque sorte, un paramètre marquant les possibilités maximales d'amplification de la cellule.

Il est intéressant de constater qu'à la fréquence f_T

$$\underbrace{|A(f_T)|}_1 \cdot f_T \simeq A_0 \cdot f_c \implies f_T \simeq A_0 \cdot f_c \quad (8)$$

Ainsi dans les systèmes qui peuvent être approximés à des systèmes du premier ordre, le produit gain-bande et la fréquence de transition sont presque égaux.

3.3 Sources d'erreur

Dans les systèmes électroniques, il existe deux grandes sources d'erreur, le bruit et la distorsion.

3.3.1 Bruit

Le bruit dans un système électronique est modélisé comme un processus aléatoire ou pseudo-aléatoire dont la variance ne dépend pas du signal d'entrée. Les bruits sont classifiés souvent en fonction de leur densité spectrale de puissance (DSP). La majorité des bruits

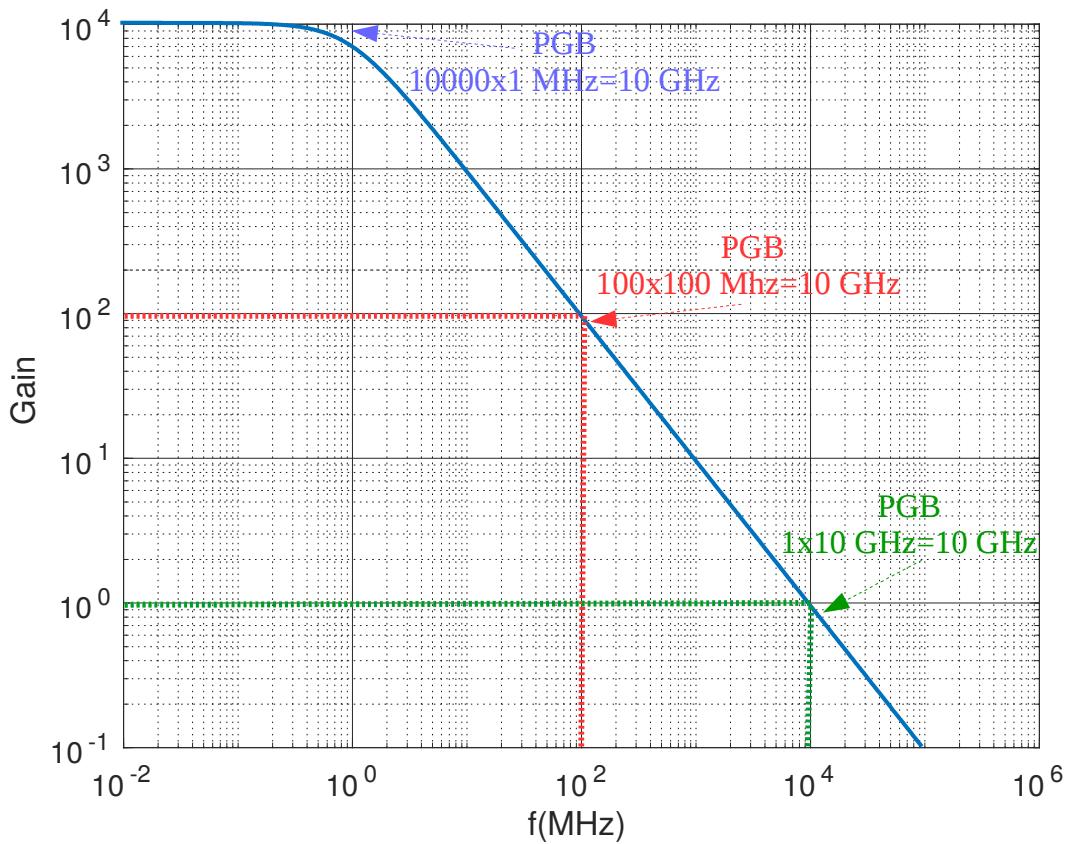


FIGURE 3.7 – Conservation du produit gain bande

en électronique sont dits blancs, c'est des bruits dont la DSP est uniforme sur la plage de fréquence d'utilisation. Le bruit blanc qui affecte le plus les systèmes électronique est le bruit thermique. Il est généré par l'agitation thermique des porteurs de charge. La variance du bruit thermique est proportionnelle à la température en Kelvin. Il existe d'autres sources de bruit blanc notamment le bruit de quantification qui sera étudié plus en détails dans le chapitre 11.

La deuxième grande famille de bruit est les bruits dits colorés. C'est des bruits dont la DSP n'est pas uniforme. On peut citer par exemple le bruit de scintillement dit *flicker noise* en anglais. C'est un bruit dont la DSP a un comportement en $1/f$ et donc très problématique pour les systèmes à faible bande passante.

Il est important de noter que les concepteurs de circuits électroniques peuvent agir sur la dégradation induite par les différents bruits dans un système en ajustant les valeurs des composants passifs et/ou en ajustant les courants de polarisation dans les transistors. La diminution du bruit se paie souvent par une augmentation de la consommation de puissance.

3.3.2 Distorsion

On appelle distorsion toutes les erreurs dont la valeur dépend du signal d'entrée. On peut distinguer 2 grands types de distorsion : les distorsions linéaires et non-linéaires. Les distorsions linéaires sont des erreurs dont la valeur dépend linéairement du signal d'entrée. Leur impact peut s'apparenter à un filtrage.

Les distorsions non-linéaires sont des erreurs dont la valeur dépend non linéairement du signal d'entrée. L'approche la plus classique est de modéliser l'amplificateur ou plus généralement le système électronique par un polynôme d'ordre p mais sachez qu'en pratique des modèles bien plus complexes peuvent être utilisées pour modéliser de tels systèmes. Prenons un exemple pour illustrer cela. Théoriquement, un amplificateur fonctionne de la façon suivante :

$$V_{s-id} = \beta \cdot V_e = A \cdot V_e, \quad (9)$$

où V_e est le signal d'entrée, β le gain d'amplification, et V_{s-id} le signal idéal de sortie. Malheureusement, comme on l'a précisé ci-dessus, dans la réalité la relation entrée/sortie est plutôt modélisée par un polynôme. Pour des raisons de simplicité, contentons-nous d'un ordre 2 :

$$V_{s-rl} = \alpha + \beta \cdot V_e + \gamma \cdot V_e^2, \quad (10)$$

où α est la composante continue (ou tension de décalage), β est le gain d'amplification souhaité, γ le coefficient du second d'ordre et V_{s-rl} le signal de sortie "réel". Ainsi, si l'entrée est une sinusoïde donnée par $V_e = Amp \cdot \cos(\omega t)$, l'expression de V_{s-rl} sera donnée par :

$$V_{s-rl} = \underbrace{\alpha + \frac{\gamma \cdot Amp^2}{2}}_{V_0} + \underbrace{\beta \cdot Amp \cdot \cos(\omega t)}_{V_1} + \underbrace{\frac{\gamma \cdot Amp^2}{2} \cdot \cos(2\omega t)}_{V_2} \quad (11)$$

Ainsi, on retrouve à la sortie V_s , non seulement le signal de départ, amplifié, de même pulsation que V_e mais aussi une tension continue V_0 et une sinusoïde à la pulsation 2ω d'amplitude V_2 .

En généralisant à un polynôme d'ordre p , il est facile de démontrer que des composantes fréquentielles aux pulsations $[0, 1, \dots, p] \cdot \omega$ apparaîtront. Ainsi par exemple, pour un amplificateur modélisé par un polynôme d'ordre 5, le spectre de sortie aura des composantes à DC ($\omega = 0$), ω , 2ω , 3ω , 4ω et 5ω . Et donc l'expression d'un système électronique réel³ et plus particulièrement d'un amplificateur, peut être ramenée après linéarisation et simplification à l'expression suivante :

$$V_s = V_0 + V_1 \cdot \cos(\omega t) + V_2 \cdot \cos(2\omega t) + V_3 \cdot \cos(3\omega t) + \dots \quad (12)$$

Les composantes du signal périodique sont appelées composantes harmoniques ou simplement harmoniques. Ainsi, un signal peut présenter après distorsion une composante fondamentale, une composante à la deuxième harmonique d'amplitude V_2 , une composante à la troisième harmonique d'amplitude V_3 , etc.

Les non-linéarités dans les amplificateurs et plus généralement dans les systèmes électroniques analogiques et RF, peuvent être causées par différents phénomènes. Tout d'abord, nous avons vu que les transistors ont un comportement non-linéaire. Il est par exemple quadratique pour les transistors MOS. Ainsi, la fonction de transfert autour du point de fonctionnement a un comportement approximé linéaire mais bien évidemment il ne l'est pas vraiment et donc la fonction de transfert qui lie la sortie à l'entrée est non linéaire. Il est facile de se convaincre que la relation devient moins linéaire quand les dynamiques d'entrée/sortie sont plus importantes. Il existe d'autres sources d'erreur qui peuvent causer de la non-linéarité telle que la saturation ou les interférences entre symboles. Il est important de noter que les coefficients V_i sont souvent décroissants en pratique, on limite le modèle à l'ordre à partir duquel les contributions des ordres deviennent très négligeables. Il est aussi courant que les composantes paires et impaires aient des différences d'amplitude importantes. Nous détaillerons ce point dans le chapitre 4.

3.4 Métrique d'évaluation des performances

Comme précisé dans la section précédente, la précision des amplificateurs est dégradée par 2 phénomènes : le bruit et la distorsion. Il existe une grande variété de métriques pour quantifier leurs impacts sur les performances d'un système donné. Nous allons nous limiter, pour des raisons de simplicité, à 2 métriques.

Pour quantifier l'impact d'un bruit sur un amplificateur, la métrique la plus utilisée est le rapport signal à bruit, plus communément connu sous les initiales SNR (pour *Signal to Noise*

3. modélisé par un polynôme

Ratio). Le SNR est le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit. Il est tout simplement donné par A.1.4 :

$$SNR_{lin} = \frac{P_{Signal}}{P_{Bruit}} = \frac{\overbrace{\frac{V_1^2}{2}}^{\text{Pour une sinusoïde}}}{V_{rms-bruit}^2} \quad (13)$$

En dB, l'expression devient :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{Bruit}} \right) \quad (14)$$

Il est opportun de rappeler que la conversion en dB se fait en appliquant $10 \log_{10}$ quand on manipule des puissances et en appliquant $20 \log_{10}$ quand on manipule des tensions.

Pour quantifier à la fois l'impact du bruit et des distorsions, la métrique la plus utilisée est le SNDR pour (*Signal to Noise and Distortion Ratio*)

$$SNDR_{lin} = \frac{P_{Signal}}{P_{Bruit} + P_{Distortion}} = \frac{\overbrace{\frac{V_1^2}{2}}^{\text{Pour une sinusoïde}}}{\frac{1}{2}(V_2^2 + V_3^2 + \dots) + V_{rms-bruit}^2} \quad (15)$$

Pour illustrer ces métriques d'une manière plus claire, prenons la figure 3.8 qui illustre le spectre de sortie d'un amplificateur audio en réponse à une sinusoïde à environ 1 kHz. Le produit en question est le ADAU1592 fabriqué par la société Analog Devices. Analysons d'abord le bruit, nous pouvons constater qu'il a un comportement en $1/f$ pour les fréquences < 500 Hz. Ceci est du très probablement au bruit de scintillement. Au delà de 500 Hz, la DSP devient uniforme, on peut ainsi déduire que le bruit dominant à présent est un bruit blanc, très probablement le bruit thermique. Intéressons nous aux harmoniques, nous pouvons observer que l'harmonique correspondante au signal d'entrée apparaît comme prévu à 1 kHz et nous pouvons constater également la présence de composantes aux multiples 2 à 7 de la fréquence d'entrée. On peut constater que les composantes paires ont des puissances moins élevées que les composantes impaires. Ceci est une conséquence de l'utilisation d'une architecture différentielle que nous étudierons dans le chapitre 4.

3.5 Exercices Amplificateur élémentaire

3.5.1 Amplificateur 2 étages

Nous désirons implémenter un amplificateur avec un gain DC (à la fréquence $f = 0$ Hz) de 500 (54 dB). Nous décidons dans un premier temps d'utiliser le montage à 1 étage de la figure 3.9 gauche). La capacité C_L modélise la capacité de charge de l'amplificateur qui inclut les capacités parasites de l'amplificateur lui-même et des autres blocs connectés à la sortie de l'amplificateur.

Question 3.5.1.1. Tracer le montage petit signal de l'amplificateur, déterminer son gain $G_{1-ét}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$. Le modèle petit signal du transistor est une source de courant contrôlée par la tension v_{gs} avec une transconductance qu'on notera g_m .

Question 3.5.1.2. En déduire l'expression du module du gain dans le domaine de Fourier. Quel est la filtration réalisé par l'amplificateur ? Quel est son gain DC pour $g_m=3$ mS et $R_d=10$ kΩ ?

L'amplificateur réalisé n'ayant pas un gain suffisant, nous décidons de cascader 2 étages comme illustré dans la figure 3.9 droite). Les transistors des 2 étages sont identiques.

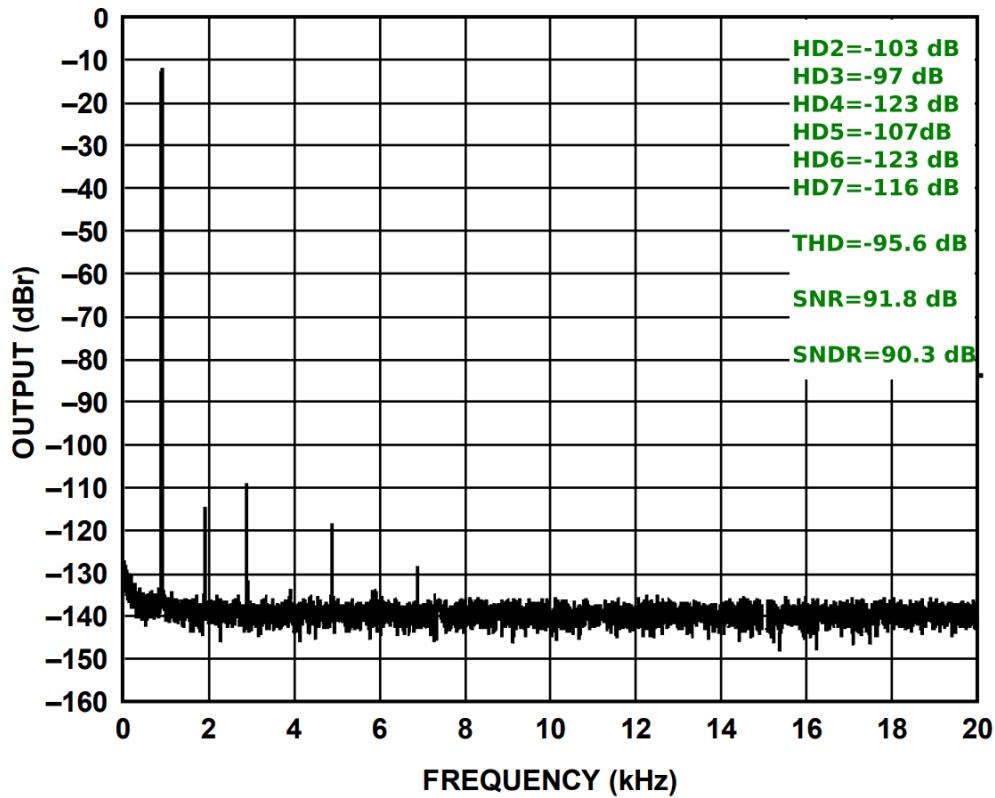


FIGURE 3.8 – Spectre de sortie de l'amplificateur Audio ADAU1592 - Puissance référence =15 W Puissance d'entrée 1 W- <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/adau1592.pdf>

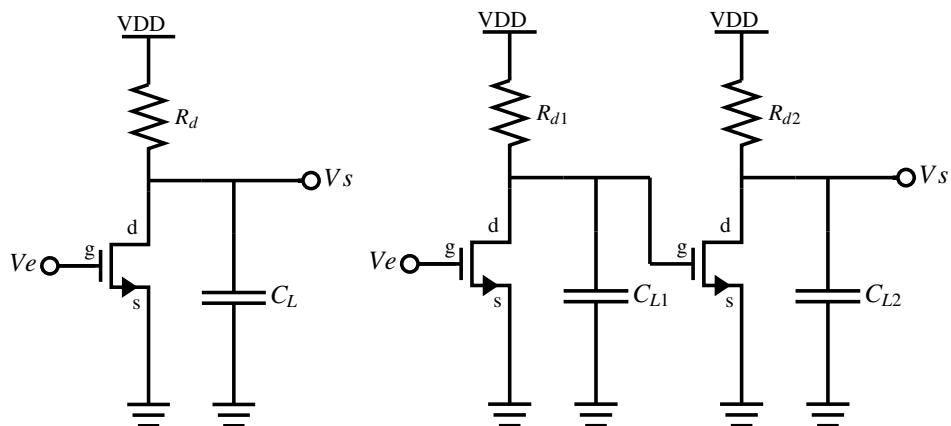


FIGURE 3.9 – Gauche) Amplificateur 1-étage Droite) Amplificateur 2-étages

Question 3.5.1.3. Tracer le montage petit signal du montage à 2 étages et calculer son gain $G_{tot}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$. Calculer son gain DC pour $g_m=3\text{ mS}$ et $R_{d1}=R_{d2}=10\text{ k}\Omega$.

Question 3.5.1.4. Quelles sont les conditions sur R_{d1} , R_{d2} , C_{L1} et C_{L2} qui permettent de garantir la stabilité de l'amplificateur 2 étages.

3.5.2 Etude de la précision d'un amplificateur

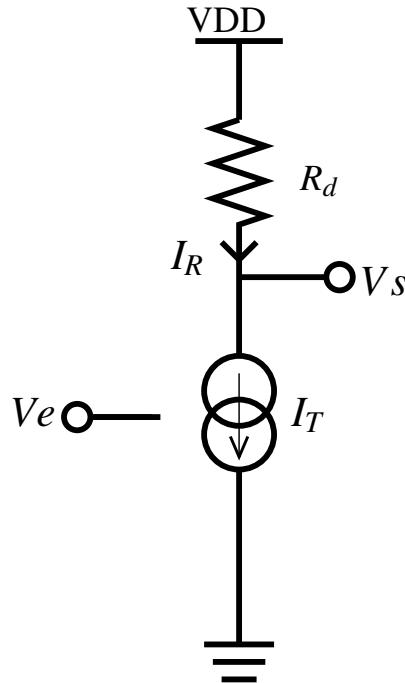


FIGURE 3.10 – Amplificateur élémentaire

On considère un montage d'un amplificateur élémentaire composé d'une source de courant commandée par la tension d'entrée V_e , d'une résistance ($R = 10\text{ k}\Omega$) et d'une tension d'alimentation constante $V_{dd} = 3.3\text{ V}$ (figure 3.10). Cet amplificateur est conçu pour une application audio avec une bande passante de 20 kHz . Le courant I_T est donné par :

$$I_T = K(V_e - V_T)^2$$

où $K = 500\text{ }\mu\text{A/V}^2$ et $V_T = 0,7\text{ V}$.

Nous appliquons un signal d'entrée $V_e = B + A \cos(\omega t)$ avec $A = 0.1\text{ V}$ et $B = 1.65\text{ V}$.

Question 3.5.2.1. Déterminer l'expression linéarisée du signal de sortie V_s .

Question 3.5.2.2. Calculer le gain, la puissance du signal utile en sortie ainsi que celle de la deuxième harmonique.

On trace le spectre à la sortie de l'amplificateur (voir figure 3.11). Le bruit thermique de la résistance et du transistor se manifeste à la sortie par une densité spectrale de puissance de -83 dBV/Hz ou de $5 \cdot 10^{-9}\text{ V}^2/\text{Hz}$.

Question 3.5.2.3. Calculer le SNR et du SNDR de l'amplificateur pour $A=0.1$ et $A=0.01\text{ V}$.

Bibliographie

- [1] M. Bouthier. *Électronique Analogique. Tome III : Opérateurs*. ENSTA, 1989.

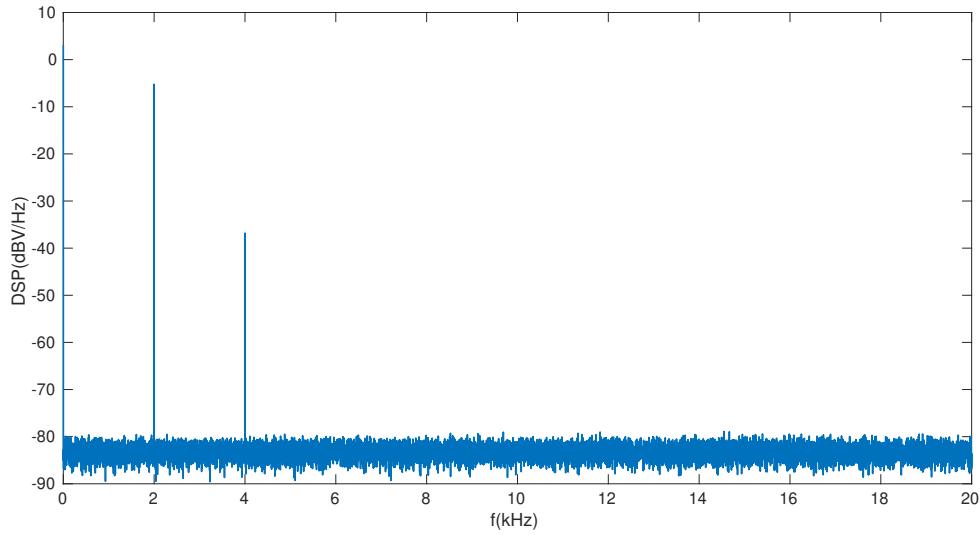


FIGURE 3.11 – Spectre de la sortie de l'amplificateur audio

- [2] J. Huijsing. *Operational Amplifiers : Theory and Design*. Springer International Publishing, 2017.
- [3] B. Razavi. *Design of Analog CMOS Integrated Circuits*. McGraw-Hill, 2002.
- [4] A. Sedra and K. Smith. *Circuits microélectroniques*. De Boeck supérieur, 2016.

Chapitre 4

Amplificateur différentiel et opérationnel

4.1 Amplificateur différentiel

Un amplificateur différentiel est un amplificateur particulier qui amplifie non pas le signal d'entrée mais la différence entre ses deux signaux d'entrée. L'amplificateur doit éliminer le signal commun aux deux entrées afin d'amplifier seulement la différence, d'où le terme "différentiel".

On peut le représenter selon la figure 4.1. On dispose de deux entrées : l'entrée inverseuse

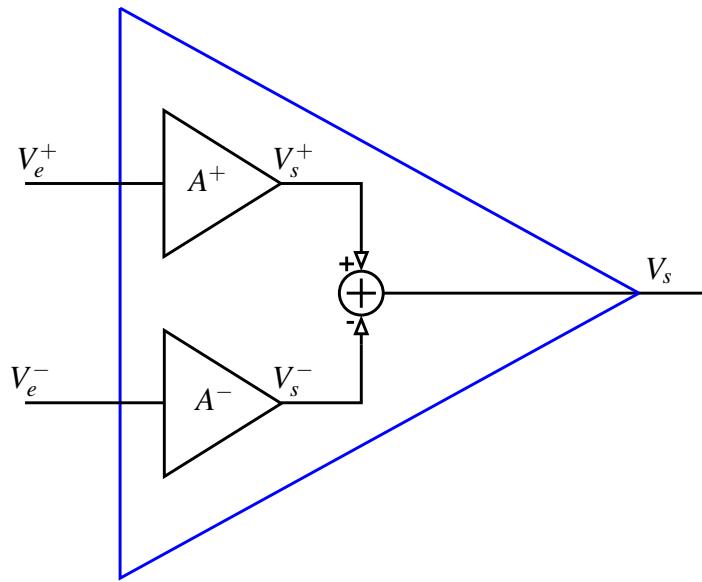


FIGURE 4.1 – Structure élémentaire de l'amplificateur différentiel

(V_e^-) de gain A^- et l'entrée non-inverseuse (V_e^+) de gain A^+ . Ainsi, la sortie s'écrit : $V_s = A^+V_e^+ - A^-V_e^-$. En posant l'entrée en mode commun $V_{ec} = \frac{V_e^+ + V_e^-}{2}$ et l'entrée différentielle $V_{ed} = V_e^+ - V_e^-$, on peut écrire la sortie sous la forme :

$$V_s = A_d \cdot V_{ed} + A_c \cdot V_{ec} \quad (1)$$

où A_d est le gain différentiel et A_c le gain de mode commun avec

$$A_d = \frac{A^+ + A^-}{2} \quad \text{et} \quad A_c = A^+ - A^- \quad (2)$$

Le choix naturel pour les gains est de prendre $A^+ = A^- = A$. Ceci permettra d'avoir un gain différentiel $A_d = A$ et un gain de mode commun A_c nul.

Les circuits différentiels sont très largement utilisés en pratique, bien plus que les circuits classiques, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les circuits différentiels sont plus robustes aux perturbations externes. En fait, le bruit et perturbations externes qui se couplent sur les entrées de l'amplificateur auront quasiment la même valeur dû à la proximité de V_e^+ et V_e^- et ainsi seront supprimés à la sortie de l'amplificateur. Un deuxième avantage des amplificateurs différentiels est la suppression des harmoniques paires. En fait, comme on l'a vu dans le chapitre 3, une modélisation plus réaliste de la relation entrée/sortie d'un amplificateur est donnée par :

$$V_s = \alpha + \beta \cdot V_e + \gamma \cdot V_e^2 + \delta \cdot V_e^3 \dots \quad (3)$$

Ceci nous donnera pour l'entrée V_e^+

$$V_s^+ = \alpha + \beta \cdot V_e^+ + \gamma \cdot (V_e^+)^2 + \delta \cdot (V_e^+)^3 \dots \quad (4)$$

Et pour l'entrée négative, pour simplifier le calcul, prenons le cas particulier $V_e^- = -V_e^+$ ¹

$$V_s^- = \alpha + \beta \cdot V_e^- + \gamma \cdot (V_e^-)^2 + \delta \cdot (V_e^-)^3 \dots = \alpha - \beta \cdot V_e^+ + \gamma \cdot (-V_e^+)^2 + \delta \cdot (-V_e^+)^3 \dots \quad (5)$$

La sortie de l'amplificateur est alors donnée par :

$$V_s = V_s^+ - V_s^- = 2\beta \cdot V_e^+ + 2\delta \cdot (V_e^+)^3 \dots \quad (6)$$

On voit donc que les distorsions d'ordre paire sont éliminées par l'amplificateur différentiel. Ce phénomène est visible dans le spectre de la figure 3.8. On peut ainsi constater que les distorsions d'ordre paire sont significativement inférieures aux distorsions d'ordre impair. L'annulation n'est pas totale car en pratique, il y aura toujours des défauts de fabrication qui engendrent des différences entre l'amplificateur de la voie positive A^+ et l'amplificateur de la voie négative A^- . Ces différences sont appelées désappariements ou *mismatch* en anglais. Un troisième avantage de l'implémentation différentielle est le doublement de la dynamique de tension. En fait, comme on dispose de deux circuits travaillant en opposition de phase, les dynamiques des 2 étages s'ajoutent.

Les implémentations différentielles ont bien évidemment des désavantages. Pour commencer, ils nécessitent de doubler le matériel afin d'implémenter la partie positive et négative. En plus, l'annulation du bruit ambiant et des distorsions paires nécessite que les amplificateurs de voies positives et négatives soient identiques. Ceci requiert de prendre un grand nombre de précautions de symétrie et de proximité. Malgré ces désavantages, l'utilisation des circuits différentiels reste la norme en pratique. L'utilisation des circuits non-différentiels se résume aux circuits pour lesquels on peut se permettre de sacrifier la précision pour réduire la complexité et/ou la consommation d'énergie.

4.2 Amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel doit son nom au fait qu'il a d'abord été conçu pour effectuer des opérations arithmétiques dans des calculateurs analogiques : addition, soustraction, résolution d'équations différentielles, ... Aujourd'hui, il est devenu le composant universel de l'électronique analogique grâce à sa facilité d'emploi et son faible coût. Ce circuit peut fonctionner aussi bien en régime linéaire (amplificateurs, filtres, ...) qu'en régime de commutation (comparateurs, générateurs de signaux carrés, ...).

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel de très fort gain (gain infini idéalement). En d'autres termes, l'amplificateur opérationnel idéal est un système linéaire à deux entrées et une sortie amplifiant infiniment la différence des signaux d'entrée et rejetant parfaitement leur somme. On peut le représenter selon la figure 4.2.

$$A_d = \infty \text{ et } V_s \text{ finie} \Rightarrow V_{ed} = \epsilon = 0 \quad (7)$$

1. Le calcul reste valide pour le cas général : $V_{ec} = \frac{V_e^+ + V_e^-}{2} \neq 0$

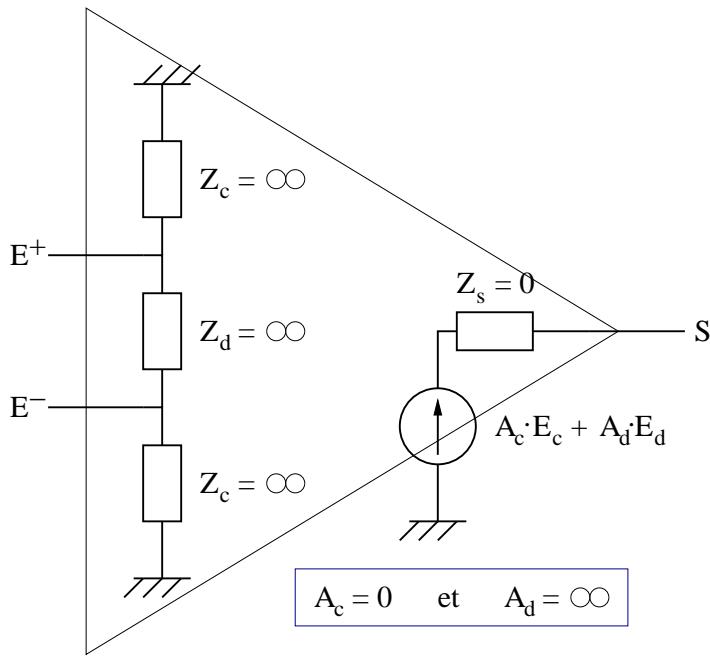


FIGURE 4.2 – Représentation de l'amplificateur opérationnel

D'autre part, ses impédances d'entrée (de mode commun Z_c et de mode différentiel Z_d) sont infinies ; son impédance de sortie Z_s est nulle.

Les caractéristiques principales des amplificateurs opérationnels sont résumées dans le tableau suivant :

Propriété :	Cas idéal
Gain différentiel	infini
Impédance d'entrée	infinie
Impédance de sortie	nulle
Bande passante	infinie
Courants d'entrée	nul
Offset	nul

TABLE 4.1 – Caractéristiques principales des amplificateurs opérationnels

4.3 La contre-réaction

4.3.1 Principe, schéma de base et propriété fondamentale

Considérons le schéma suivant :

Il est composé d'un amplificateur de fonction de transfert $A(j\omega)$, appelé dans ce cas présent chaîne directe, d'un circuit de fonction de transfert $R(j\omega)$, appelé chaîne de retour et d'un soustracteur de signaux.

Pour examiner plus en détail les propriétés de ce circuit bouclé, nous choisirons $A(j\omega)$ et $R(j\omega)$ idéaux et du type "gain en tension".

A l'entrée du circuit bouclé, on applique une tension V_e . A la sortie de ce circuit bouclé, on a une tension V_s .

La tension e effective présente à l'entrée de $A(j\omega)$ est :

$$e(j\omega) = V_e(j\omega) - R(j\omega) \cdot V_s(j\omega) \quad (8)$$

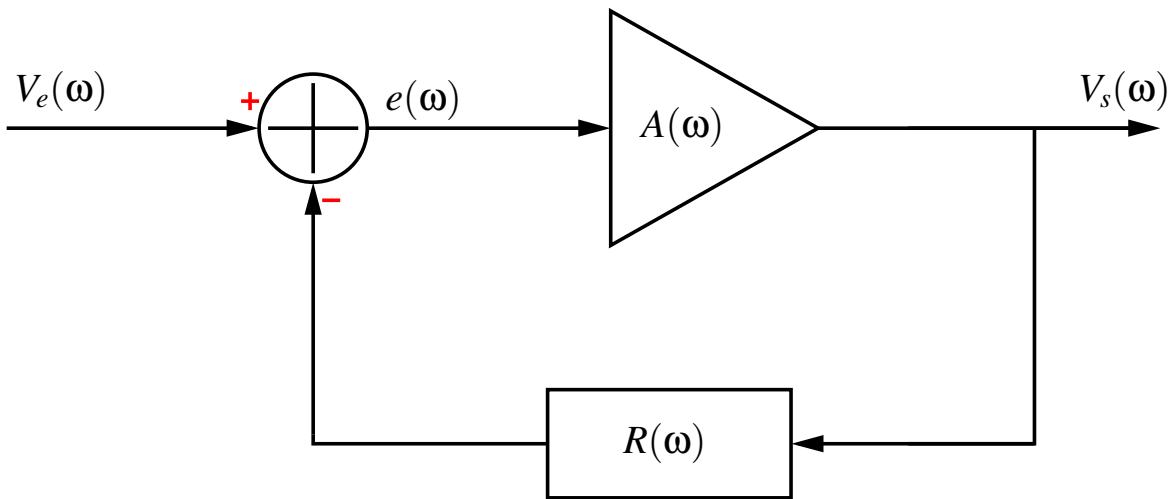


FIGURE 4.3 – Schéma de principe de la contre-réaction

Il est important de faire attention au signe moins dans cette équation. De plus on a :

$$V_s = A(j\omega) \cdot e \quad (9)$$

On en déduit :

$$V_s(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega) \cdot R(j\omega)} V_e(j\omega) \quad (10)$$

On appelle taux de contre-réaction la quantité :

$$1 + A(j\omega) \cdot R(j\omega) \quad (11)$$

Ces relations ci-dessus, tout à fait générales, se simplifient dans le cas particulier où le taux de contre-réaction est grand par rapport à l'unité ; dans ce cas particulier, la fonction de transfert du circuit bouclé devient :

$$\frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{1}{R(j\omega)} \quad (12)$$

C'est l'inverse de la fonction de transfert de la chaîne de retour. Sa valeur ne dépend pas de la valeur de $A(j\omega)$, et des variations de $A(j\omega)$ en fonction de divers facteurs, (dispersion des caractéristiques des éléments actifs de $A(j\omega)$, dépendance de leurs valeurs vis-à-vis des variations de température, de la valeur de la tension d'alimentation, de la charge, ...), pourvu que le taux de contre-réaction reste grand devant l'unité.

En utilisant pour la chaîne de retour $R(j\omega)$ des éléments passifs stables (résistances, capacités, inductances), on aura un circuit bouclé ayant lui aussi une fonction de transfert fixée, reproductible, peu dépendante d'évolutions dues à l'environnement ou au vieillissement des composants actifs.

Ceci est la propriété fondamentale du circuit bouclé à contre-réaction.

Ces notions élémentaires sur les circuits bouclés à contre-réaction demandent à être précisées mais il est essentiel de retenir qu'un circuit bouclé à contre-réaction est une structure dans laquelle un signal dépendant du signal de sortie est retranché au signal appliqué à l'entrée et que le taux de contre-réaction est toujours grand devant l'unité, quel que soit le signal considéré et quelle que soit sa fréquence, son amplitude, etc.

4.3.2 Augmentation de la bande passante

Admettons que $A(j\omega)$ soit une fonction de transfert du premier ordre telle que :

$$A(j\omega) = \frac{A_{DC}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (13)$$

avec A_{DC} le gain maximal de l'amplificateur (souvent son gain DC $f = 0$) et ω_c pulsation de coupure à 3 dB et que $R(j\omega)$ soit indépendant de la pulsation ω ($R(j\omega) = R$). Le circuit bouclé a pour fonction de transfert :

$$H_{BF}(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + R \cdot A(j\omega)} \quad (14)$$

soit

$$H_{BF} = \frac{A_{DC}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{1}{1 + R \frac{A_{DC}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}} = \frac{A_{DC}}{1 + R \cdot A_{DC}} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c(1+R \cdot A_{DC})}} \quad (15)$$

ou donc

$$H_{BF} = H_{BF-DC} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}} \quad (16)$$

On reconnaît ainsi que le circuit bouclé a pour fonction de transfert maximum

$$H_{BF-DC} = \frac{A_{DC}}{1 + R \cdot A_{DC}} \quad (17)$$

et que sa pulsation de coupure à 3 dB a pour valeur $\omega'_c = \omega_c \cdot (1 + R \cdot A_{DC})$, c'est-à-dire la pulsation de coupure de la fonction de transfert $A(j\omega)$ multipliée par le taux de contre-réaction.

On notera au passage que le produit gain-bande du circuit bouclé est le même que celui de la chaîne directe $A(j\omega)$.

4.3.3 Diminution de la distorsion

La non linéarité d'une fonction de transfert telle que $A(j\omega)$ engendre en sortie la présence d'harmonique du signal d'entrée.

Cette distorsion apparaît surtout dans les étages de sortie de $A(j\omega)$ et dépend de l'amplitude du signal dans ces étages. On compare ce qui de passe avec ou sans la contre-réaction.

On peut considérer qu'au niveau des étages de sortie de $A(j\omega)$, on a une source de signaux parasites qui fournit un signal u . Sans contre-réaction, c'est cette tension qui apparaît.

Avec un circuit de retour, il y a, à l'entrée du circuit bouclé, réinjection d'une tension qui est amplifiée par la fonction de transfert $A(j\omega)$.

A cause des propriétés de la contre-réaction, la source de signaux parasites fournit un signal u' , différent de u qu'on détermine de la façon suivante :

u' est une somme du signal u engendré au niveau des étages de sortie de $A(j\omega)$ et du signal qui a été transmis par la chaîne de retour et amplifié par $A(j\omega)$.

La chaîne de retour donne le signal $R \cdot u'$ et l'amplificateur $A(j\omega) \cdot R \cdot u'$; on a donc la relation :

$$u' = u - A(j\omega) \cdot R \cdot u' \quad (18)$$

soit

$$u' = \frac{u}{1 + R \cdot A(j\omega)} \quad (19)$$

Pour un même signal de sortie, l'amplitude harmonique due à la non linéarité est réduite de la valeur du taux de contre-réaction.

4.3.4 Notion de stabilité

La contre-réaction consiste en un couplage établi volontairement entre la sortie et l'entrée d'une fonction de transfert $A(p)$, de telle sorte que le signal appliqué en retour se retranche du signal d'attaque. Or tout amplificateur introduit un déphasage des signaux de sortie par rapport aux signaux d'entrée. Il faut donc prendre garde que les rotations de phase introduites par $A(p)$ et $R(p)$ maintiennent toujours un fonctionnement en contre-réaction du circuit bouclé.

Il faut donc examiner la stabilité du circuit bouclé, sachant qu'un circuit et plus généralement un système est dit stable si, écarté par une perturbation de sa position d'équilibre, il a tendance à y revenir.

Dans ce cas du circuit bouclé, les conditions d'instabilité sont exprimées par la relation :

$$1 + A(p) \cdot R(p) = 0 \quad (20)$$

Si au moins une racine complexe de cette relation a une partie réelle positive ou nulle, alors le circuit bouclé sera instable.

4.3.5 Marge de stabilité

Il est important de noter que la notion de stabilité dans les systèmes temps continu n'est pas purement binaire. En effet, un système est soit stable soit instable mais la proximité du système de la zone d'instabilité peut engendrer des phénomènes indésirables. Il est pour cela important d'assurer une marge de stabilité. Pour mieux illustrer ce phénomène, prenons le

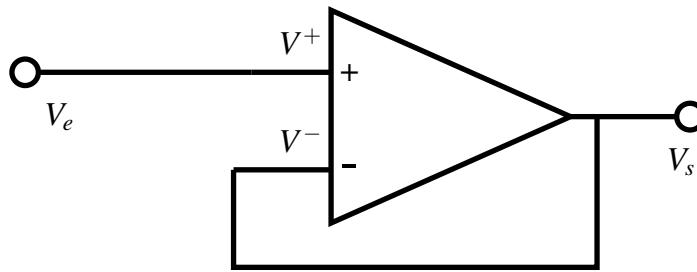


FIGURE 4.4 – Schéma d'un suiveur

circuit de la figure 4.4. Le gain de l'amplificateur opérationnel sera noté

$$A(p) = \frac{V_s}{V^+ - V^-} \quad (21)$$

En analysant le circuit, on peut facilement montrer que la fonction de transfert du montage peut exprimée par

$$H_{BF}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} \quad (22)$$

Dans ce cas, le facteur de la chaîne de retour $R(p)$ est égale à 1. On peut aussi constater que quand $A(p)$ tend vers l'infini, on retrouve le résultat $H_{BF} \simeq 1$ qu'on aurait obtenu dans le cas où l'amplificateur opérationnel serait idéal avec $V^+ = V^-$.

Intéressons nous à présent au circuit de l'amplificateur opérationnel, nous allons étudier les 2 implémentations illustrées dans la figure 4.5. La première consiste en un amplificateur 1 étage dont on fixera le gain à 30 dB (31.6² en linéaire). La deuxième consiste en un amplificateur 2 étages avec chacun un gain de 30 dB soit un gain total de 60 dB (1000 en linéaire). Analysons la stabilité du montage suiveur en remplaçant $A(p)$ par son expression. Il faut ainsi analyser les pôles de H_{BF} , ce qui revient à trouver les racines de l'expression $1 + A(p)$ vu que $R(p) = 1$ dans le cas du suiveur. Commençons d'abord par l'architecture 1 étage, une analyse simple nous donne le résultat suivant :

$$p = -\frac{A_{DC} + 1}{\tau} \quad (23)$$

Le système a un seul pole à partie réelle négative donc il est stable. Passons à l'analyse du suiveur avec l'amplificateur 2 étages. Pour des valeurs raisonnables de constante de temps et

2. Une petite piqûre de rappel, la conversion linéaire pour un gain en tension se fait en appliquant $20\log_{10}(A)$

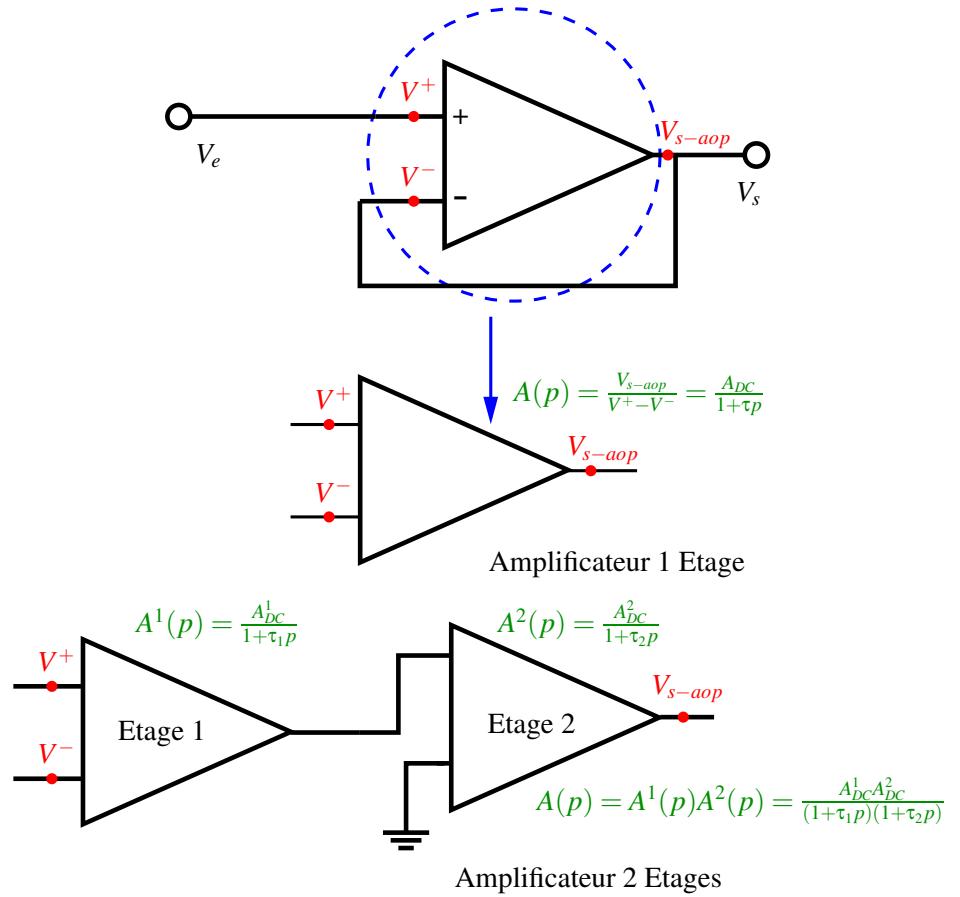


FIGURE 4.5 – Schéma d'un suiveur avec 2 implémentations pour l'amplificateur opérationnel

de gain DC³, le déterminant est négatif. On obtient dans ce cas les pôles suivants

$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm j\sqrt{-\Delta}}{2\tau_1\tau_2} \text{ avec } \Delta = (\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2 A_{DC}^1 A_{DC}^2 \quad (24)$$

Le système a 2 pôles complexes conjugués à partie réelle négative donc lui aussi est stable.

Analysons les performances des 2 systèmes. Nous prendrons dans un premier lieu, les constantes de temps égales avec $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1$. On va tester notre suiveur avec un échelon comme entrée. On s'attend que l'amplificateur 2 étages ait une meilleure performance car son gain est 30 dB supérieur à celui de l'amplificateur 1 étage. Cependant, la simulation du montage illustrée dans la figure 4.6 gauche) montre que le suiveur avec l'amplificateur 2 étages souffre d'un dépassement oscillatoire très important qui ralentit significativement la convergence. Refaisons l'expérience mais en prenant $\tau_1 = 500\tau_2 = \tau = 1$, le résultat est présenté dans la figure 4.6 droite), on voit qu'à présent l'amplificateur 2 étages permet une convergence plus rapide que celle de l'amplificateur 1 étage.

Pour comprendre la différence de performance entre les 2 configurations, calculons l'expression des pôles en remplaçant d'abord τ_1 et τ_2 par τ :

$$p_{1,2} = -1 \pm 31.4j \quad (25)$$

Pour le deuxième cas, avec $\tau_1 = 500\tau_2 = \tau = 1$, on obtient :

$$p_{1,2} = -250.5 \pm 6166j \quad (26)$$

3. Pour un déterminant positif, il faut que le rapport des constantes de temps soit approximativement supérieur à $4A_{DC}^1 A_{DC}^2$, c'est possible mais pas du tout intéressant en terme de conception

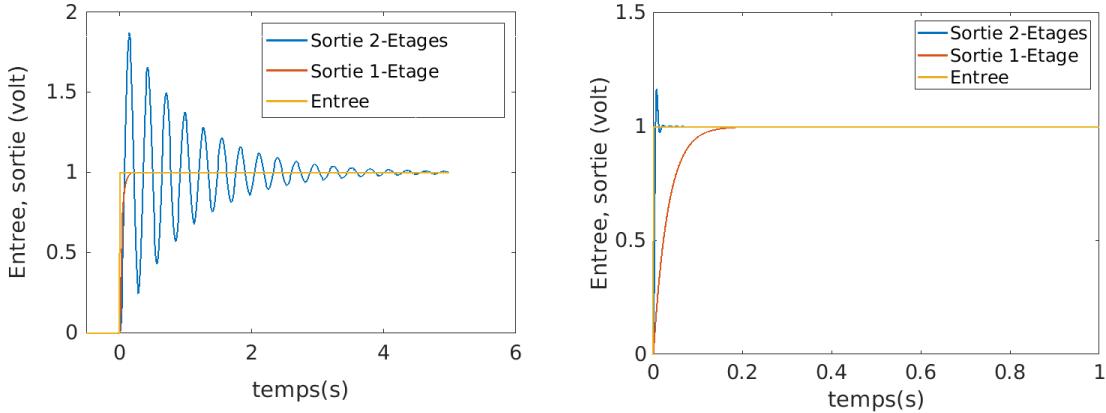


FIGURE 4.6 – Réponse du suiveur à un échelon gauche) $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1$ droite) $\tau_1 = 500\tau_2 = \tau = 1$

On peut constater que la partie réelle est largement supérieure en valeur absolue dans cette deuxième configuration, ceci se traduit ainsi par une marge de stabilité plus importante. Cependant, une analyse de la marge de stabilité tel qu'on l'a faite dans cet exemple est extrêmement chronophage. L'analyse en boucle ouverte permet d'étudier la stabilité plus rapidement et est souvent préférée à l'analyse faite dans cette section dite analyse boucle fermée. **La section suivante explique brièvement le principe de l'analyse boucle ouverte. La maîtrise de ce concept n'est pas au programme de ELEC101 mais on le présente dans ce poly pour les plus curieux.**

4.3.6 Analyse boucle ouverte et marge de phase

L'analyse en boucle ouverte utilise comme point de départ l'expression du système en boucle fermée exprimée dans le domaine de Fourier

$$H_{BF}(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + R(j\omega) \cdot A(j\omega)} \quad (27)$$

En analysant l'expression, il est facile de se convaincre que le système serait instable s'il existe une pulsation ω_0 pour laquelle le produit $R(j\omega_0) \cdot A(j\omega_0)$ vaut -1.

Ce produit $R(j\omega) \cdot A(j\omega)$ est tout simplement le gain en boucle ouverte de notre système. Pour rappel⁴, le calcul du gain boucle ouverte se fait comme l'illustre la figure 4.7 :

- On court-circuite l'entrée du système à la masse
- On ouvre la boucle dans un point de notre choix
- On injecte le signal d'entrée V_{e-BO} en aval du point d'ouverture et on relève le signal de sortie V_{s-BO} en amont.
- Le gain de boucle ouverte est donnée par :

$$H_{BO}(j\omega) = -\frac{V_{s-BO}(j\omega)}{V_{e-BO}(j\omega)} = A(j\omega) \cdot R(j\omega) \quad (28)$$

Ainsi le système serait instable s'il existe une pulsation pour laquelle $H_{BO}(j\omega_0) = -1$. En exprimant

$$H_{BO}(j\omega) = |H_{BO}(\omega)| e^{j\Phi(\omega)} \quad (29)$$

ceci reviendrait à avoir $|H_{BO}(\omega)| = 1$ et $\Phi(\omega) = -\pi$. Or la pulsation pour laquelle $|H_{BO}(\omega)| = 1$ est la pulsation unitaire ou pulsation de transition ω_T . Ainsi, afin d'éviter l'instabilité, il est nécessaire que la phase $\Phi(\omega_T) < -\pi$. La différence entre la phase du gain en boucle ouverte et

4. Nous ne détaillerons pas dans ce module le principe d'asservissement étudié en détail dans les cours d'automatique. Nous nous contenterons d'un rappel rapide

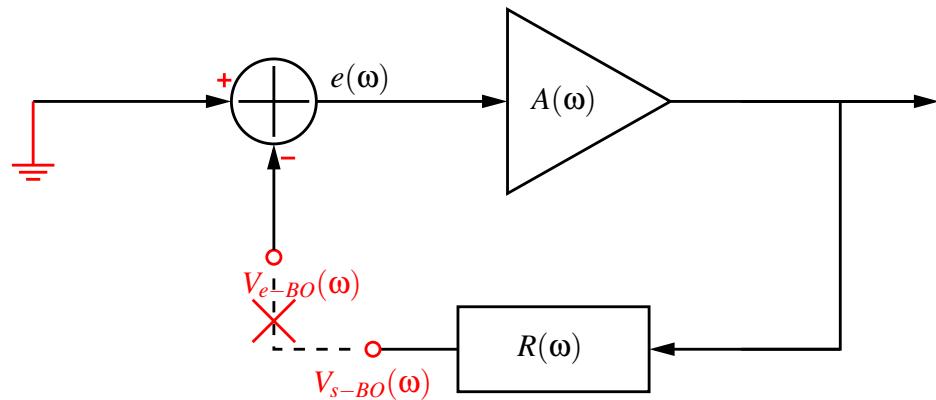


FIGURE 4.7 – Analyse en boucle ouverte

le point instabilité $-\pi$ permet de mesurer la marge de stabilité du système en boucle fermée. Cette grandeur est dite la marge de phase⁵ et est calculée par l'expression suivante :

$$MP = \Phi(\omega_T) + \pi \quad (30)$$

Pour illustrer l'impact de la marge de phase sur un système électronique, reprenons l'exemple du suiveur considéré précédemment. Simulons son comportement pour différentes valeurs de marge de phase. Les résultats sont présentés dans la figure 4.8. Comme on peut le constater, augmenter la marge de phase permet de réduire le dépassement (*overshoot* en anglais) et les oscillations. Cependant, augmenter la marge de phase nécessite, de réduire τ_2 ou si on raisonne fréquentiellement cela revient à augmenter la pulsation du pôle non dominant ω_2 . Ceci se paie en pratique par une augmentation de la consommation de puissance. Pour cela, en pratique on vise une marge de phase de l'ordre de 60° car ça donne un bon compromis entre performances et contraintes sur le deuxième étage.

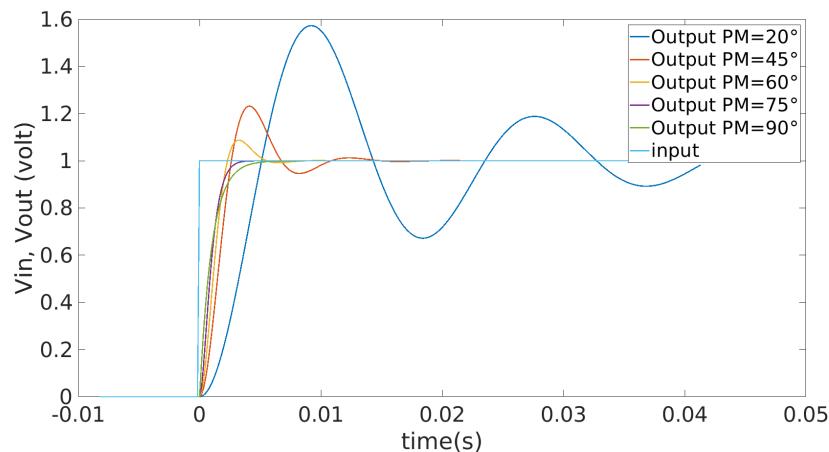


FIGURE 4.8 – Réponse d'un suiveur à un échelon pour différentes valeurs de marge de phase

4.4 Exercice Amplificateur différentiel

4.4.1 Calcul de la fonction de transfert d'un circuit à base d'amplificateur opérationnel

On considère le circuit à temps continu reporté sur la figure 4.9 que nous avons étudié précédemment. Dans le chapitre sur la transformée de Laplace, nous étions partis de la fonc-

5. La figure 3.6 illustre cette grandeur d'une manière graphique

tion de transfert pour étudier la stabilité et le fonctionnement du circuit. Pour cet exercice, l'objectif est de réaliser ce calcul de la fonction de transfert.

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal : le gain en tension de l'amplificateur est infini et indépendant de la fréquence et son impédance d'entrée est infinie. La tension d'entrée V_{in} est une tension différentielle et donc le courant $I_{in}^+ = I_{in}^-$.

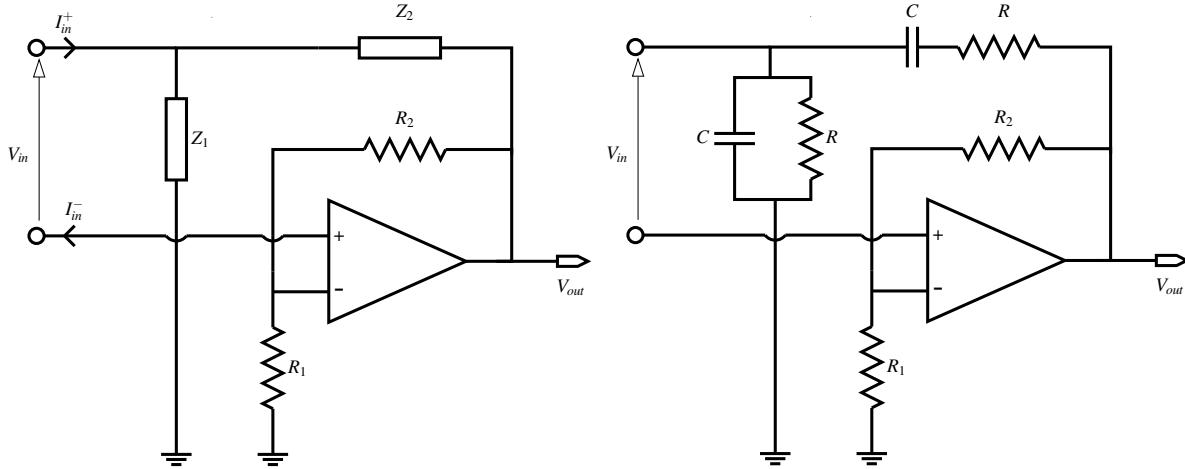


FIGURE 4.9 – Circuit de Wien gauche) Vue haut niveau droite) vue détaillée

Question 4.4.1.1. En utilisant la représentation haut-niveau de la figure 4.9 gauche), calculer la fonction de transfert $F(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ en fonction de $a = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ et $H = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Question 4.4.1.2. En utilisant la représentation détaillée de la figure 4.9 droite), exprimer dans le formalisme de Laplace Z_1 , Z_2 et $H(p)$ en fonction de $\tau = RC$.

Question 4.4.1.3. Donner l'expression de la fonction de transfert $F(p)$ en fonction de a et de τ .

4.4.2 Etude d'une chaîne d'amplification pour un photo-détecteur

On dispose d'un photo-détecteur utilisé pour la mesure des rayons infra-rouge. Ce type de dispositif est très utile dans une diversité d'applications (détecteur de mouvement, mesure de température, surveillance du vieillissement des matériaux ...) Afin de numériser correctement le signal de sortie du photo-détecteur, une amplification par un facteur 10 est nécessaire. Pour réaliser cette opération avec une très bonne précision, nous décidons d'utiliser une architecture à base d'amplificateur opérationnel (AOP). Le montage du système est illustré dans la figure 4.10. Il est important de noter que les résistances R_{s-cap} et R_{e-num} ne sont pas des résistances physiques, elles correspondent respectivement à la résistance de sortie du capteur et à la résistance d'entrée du système de numérisation. Dans un premier temps, nous considérerons que l'amplificateur opérationnel est idéal (Gain et R_{e-aop} infinis, R_{s-aop} nulle).

Question 4.4.2.1. Calculer la fonction de transfert du montage. Faites l'application numérique pour $R_1 = 9\text{ k}\Omega$, $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, $R_{s-cap} = 1\text{ k}\Omega$ et $R_{e-num} = 10\text{ k}\Omega$.

A présent, nous allons considérer que les résistances d'entrée de l'AOP ne sont pas infinies. On considérera toujours que la résistance de sortie R_{s-aop} de l'AOP est nulle et que son gain est infini.

Question 4.4.2.2. Calculer la fonction de transfert dans ce cas.

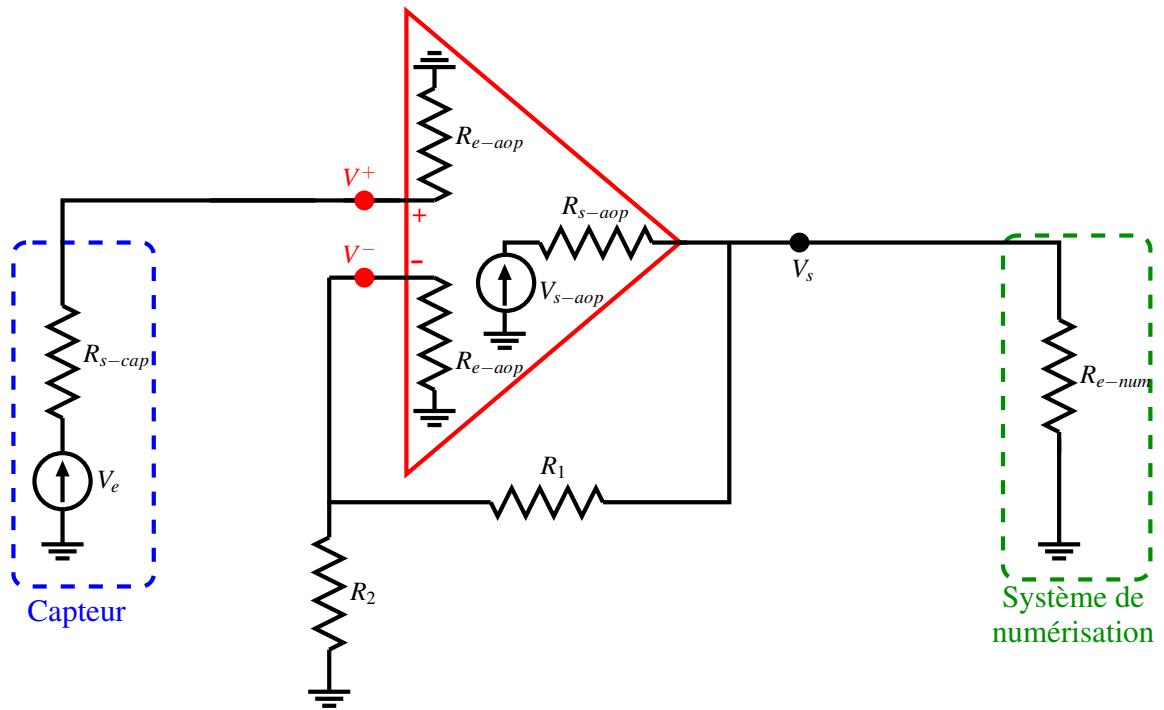


FIGURE 4.10 – Montage amplification à base d'AOP

Nous allons à présent analyser l'impact du gain de l'AOP. Nous allons modéliser l'amplificateur par un gain fini $V_{s-aop} = A(V^+ - V^-)$. Afin de simplifier l'analyse, nous allons considérer que R_{e-aop} est infinie et que R_{s-aop} est toujours nulle.

Question 4.4.2.3. *Calculer la fonction de transfert pour cette nouvelle configuration*

Pour corser un peu les choses, nous allons considérer à présent que la résistance de sortie de l'amplificateur n'est pas nulle. Nous garderons un amplificateur avec un gain fini et R_{e-aop} infinie.

Question 4.4.2.4. *Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme suivante et analyser l'impact de R_{s-aop} sur les performances :*

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{AK + K'},$$

avec $K = \frac{R_2}{R_1+R_2}$ et $K' = 1 + \frac{R_{s-aop}}{R_1+R_2} + \frac{R_{s-aop}}{R_{e-num}}$

Bibliographie

- [1] M. Bouthier. *Électronique Analogique. Tome III : Opérateurs.* ENSTA, 1989.
- [2] J. Huijsing. *Operational Amplifiers : Theory and Design.* Springer International Publishing, 2017.
- [3] B. Razavi. *Design of Analog CMOS Integrated Circuits.* McGraw-Hill, 2002.
- [4] A. Sedra and K. Smith. *Circuits microélectroniques.* De Boeck supérieur, 2016.

Chapitre 5

Échantillonnage et Transformée en Z

5.1 Échantillonnage

L'échantillonnage est l'opération qui permet de transformer un signal temps continu à un signal discret. Dans les systèmes d'acquisition et de communication modernes, cette opération est presque incontournable car les traitements se font dans la très grande majorité des applications dans le domaine numérique. Il est cependant important de noter qu'une partie des traitements analogiques peut se faire en temps discret notamment grâce à la technique des capacités commutées qui sera détaillée dans le chapitre 9.

5.1.1 Analyse temporelle de l'échantillonnage

On considère un signal continu $x(t)$ qu'on souhaite échantillonner aux multiples d'une période T_e comme illustré dans la figure 5.1. La période T_e ou la période d'échantillonnage est également notée très souvent T_s pour *Sampling Period*. Le signal résultant $x^*(t)$ est un signal dont les valeurs ne sont définies qu'aux multiples entiers de T_e . Les valeurs de $x^*(t)$ sont nulles pour $n < 0$ si on considère des signaux causaux. L'opération d'échantillonnage peut être modélisée par une multiplication entre le signal analogique $x(t)$ et une suite infinie d'impulsions de Dirac espacées de T_e . Cette suite est appelée peigne de Dirac et notée $\text{U}\text{U}_{T_e}(t)$.

L'expression du signal échantillonné $x^*(t)$ ou $x^*(nT_e)$ est alors donnée par :

$$x^*(t) = x^*(nT_e) = x(t) \cdot \text{U}\text{U}_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (1)$$

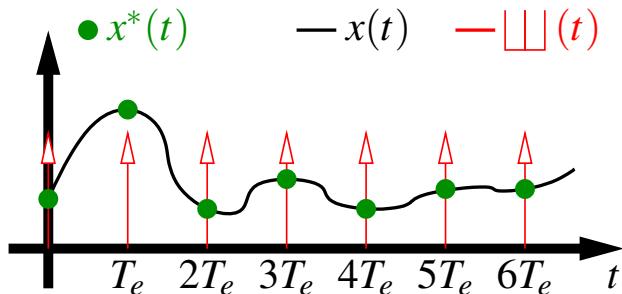


FIGURE 5.1 – Modélisation de l'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon énonce que, pour garantir un échantillonnage sans perte, la fréquence d'échantillonnage f_e (très souvent notée aussi f_s pour

Sampling frequency) doit respecter la condition suivante :

$$f_e > 2 \times f_{max} \quad (2)$$

où f_{max} est la fréquence maximale du signal $x(t)$.

Pour mieux comprendre cette condition, considérons $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ et $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$ 2 signaux qu'on échantillonnera à une fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. On prendra $f_2 = f_e + f_1$

$$x_1^*(t) = \cos(2\pi f_1 t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_1 n T_e) \delta(t - nT_e) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_2^*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_2 n T_e) \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\underbrace{2\pi f_e n T_e}_{2\pi n} + 2\pi f_1 n T_e) \delta(t - nT_e) = x_1^*(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Comme on peut le constater, l'échantillonnage du signal $x_2(t)$, qui ne respecte pas le critère de Nyquist-Shannon, a pour effet de le faire apparaître à la fréquence $f_1 = f_2 - f_e$. La figure 5.2 montre un exemple simulé avec $f_1 = 3$ Hz, $f_2 = 13$ Hz et $f_e = 10$ Hz. Comme on peut le constater, les signaux $x_1^*(t)$ et $x_2^*(t)$ sont indistinguables malgré le fait que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ le soient très facilement.

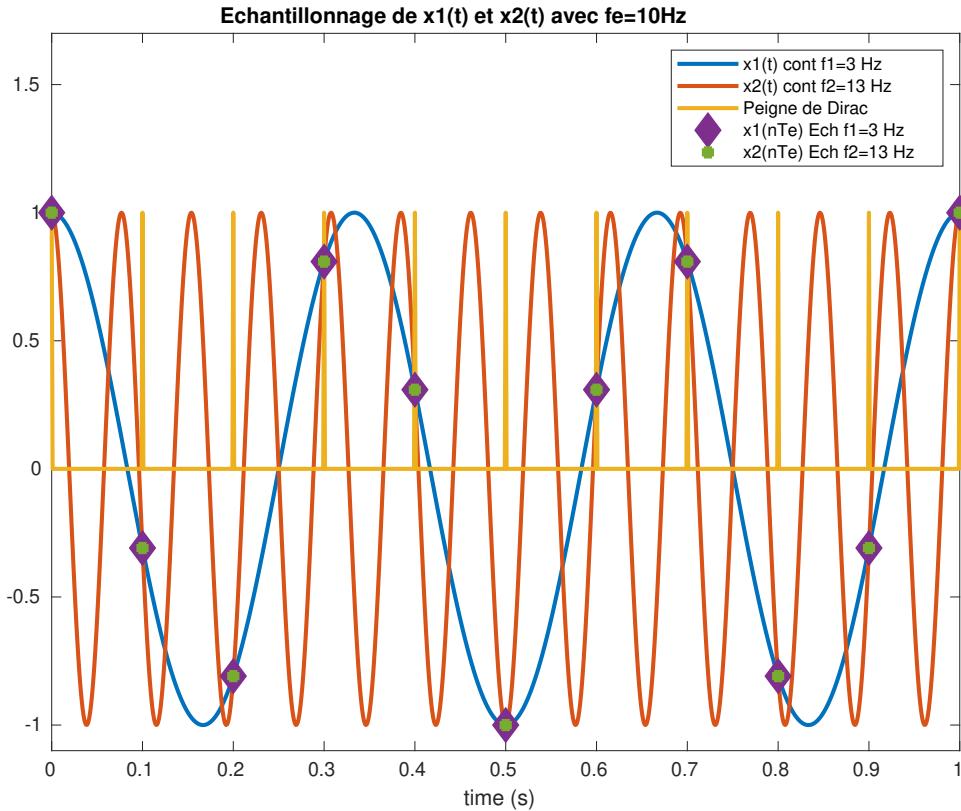


FIGURE 5.2 – Échantillonage de 2 sinusoïdes de fréquence 3 et 13 Hz à une fréquence d'échantillonnage f_e de 10 Hz

5.1.2 Analyse Fréquentielle de l'échantillonnage

Nous allons nous intéresser à présent à l'impact fréquentiel de l'échantillonnage. On peut démontrer en utilisant les séries de Fourier que

$$\mathbb{U}_{T_e}(t) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_e t} \quad (5)$$

La transformée de Fourier de $\mathbb{U}_{T_e}(t)$ est donc donnée par

$$TF\{\mathbb{U}_{T_e}(t)\} = \mathbb{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{U}_{T_e}(t) e^{-j2\pi f t} dt = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e) \quad (6)$$

L'échantillonnage est modélisé par une multiplication par un peigne de Dirac dans le domaine

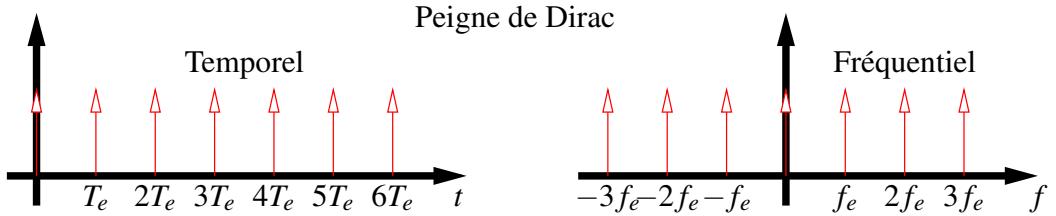


FIGURE 5.3 – Transformée de Fourier d'un Peigne de Dirac

temporel donc c'est une convolution dans le domaine fréquentiel

$$X^*(f) = X(f) * \mathbb{U}(f) = X(f) * f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e) \quad (7)$$

En développant expression :

$$X^*(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(k) \delta(f - n f_e - k) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e) \quad (8)$$

Le spectre de $X^*(f)$ est ainsi infini et est périodisé avec une période f_e . La figure 5.4 illustre d'une manière schématique l'impact fréquentiel de l'échantillonnage. Le choix d'illustrer le spectre comme une fonction paire est pour signifier que le signal $x(t)$ est réel¹. Le spectre du signal échantillonné est périodisé avec une période f_e et a une symétrie autour de la fréquence $f_e/2$ dite également la fréquence de Nyquist. Le non respect du critère de Shannon-Nyquist engendre comme représenté dans la figure 5.4 à droite un recouvrement spectral qui aura comme conséquence de corrompre le signal.

Pour comprendre comment déterminer le spectre du signal échantillonné, il suffit de faire la somme de toutes les répliques du signal générées suite à la convolution à $\mathbb{U}(f)$. Considérons l'exemple de la figure 5.5. Le spectre du signal d'origine temps continu est illustré sur le premier spectre. Échantillonnons ce signal à une fréquence f_1 . Pour simplifier l'affichage, nous allons normaliser l'axe des fréquences à f_1 . Le deuxième spectre qui correspond à $n = 0$ dans l'expression 8, est tout simplement le spectre d'origine. Le troisième spectre est obtenu par un décalage de $+f_1$ et correspond à un $n = -1$. Les quatrième, cinquième et sixième spectres sont respectivement obtenus en faisant un décalage de $-f_1$, de $+2f_1$ et de $-2f_1$ et correspondent respectivement à $n = 1$, $n = -2$ et $n = 2$. On s'est limité dans cet exemple

1. Une fonction de densité spectrale de puissance paire est une condition nécessaire mais pas suffisante pour prouver que $x(t)$ est réel.

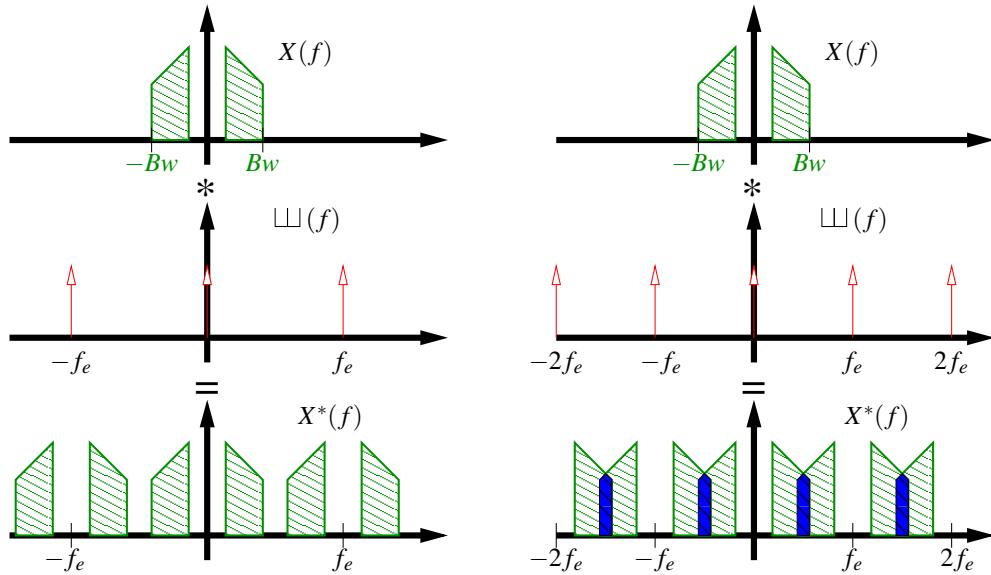


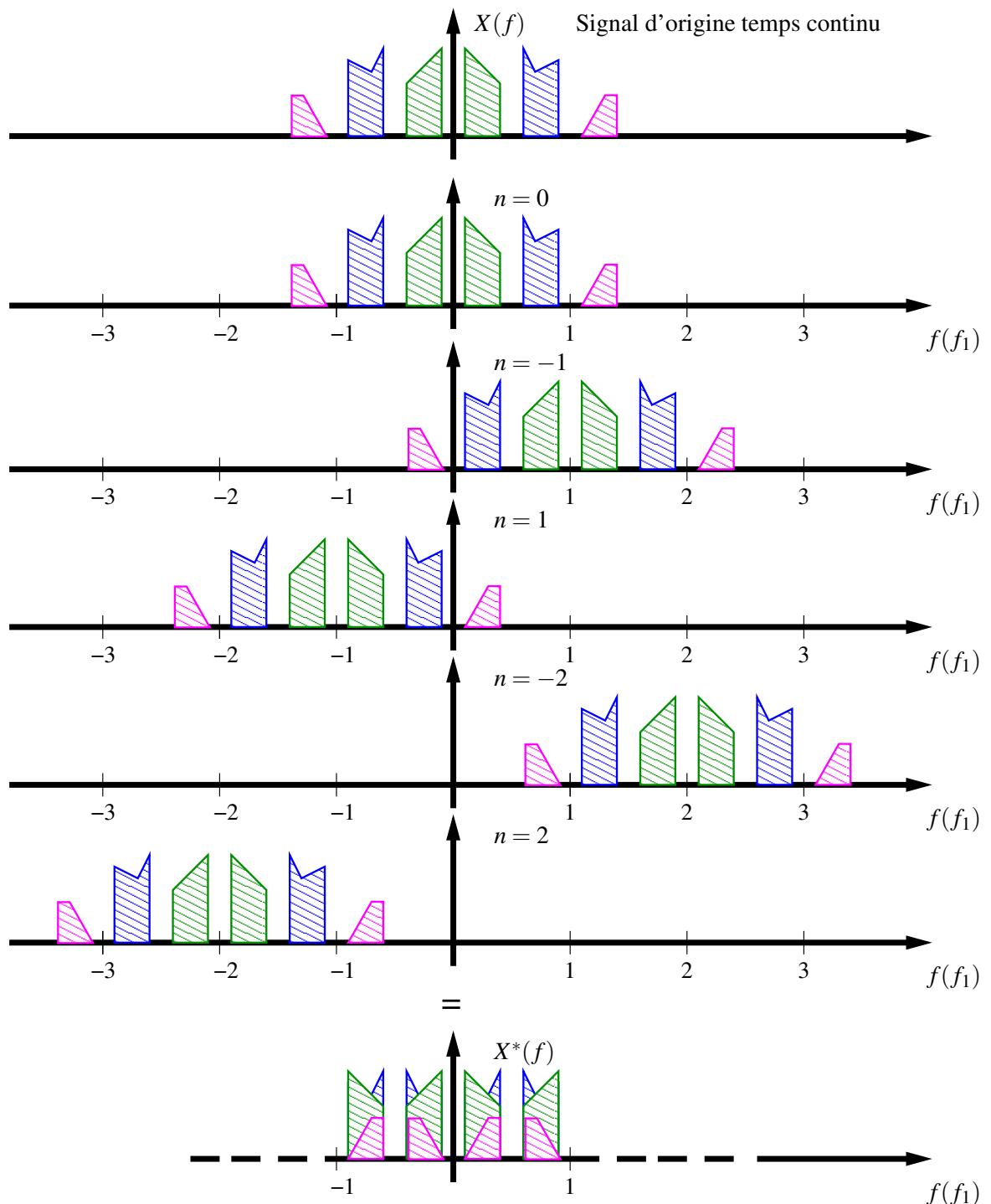
FIGURE 5.4 – Impact fréquentiel de l'échantillonnage gauche) critère de Shannon-Nyquist respecté droite) critère de Shannon-Nyquist non respecté

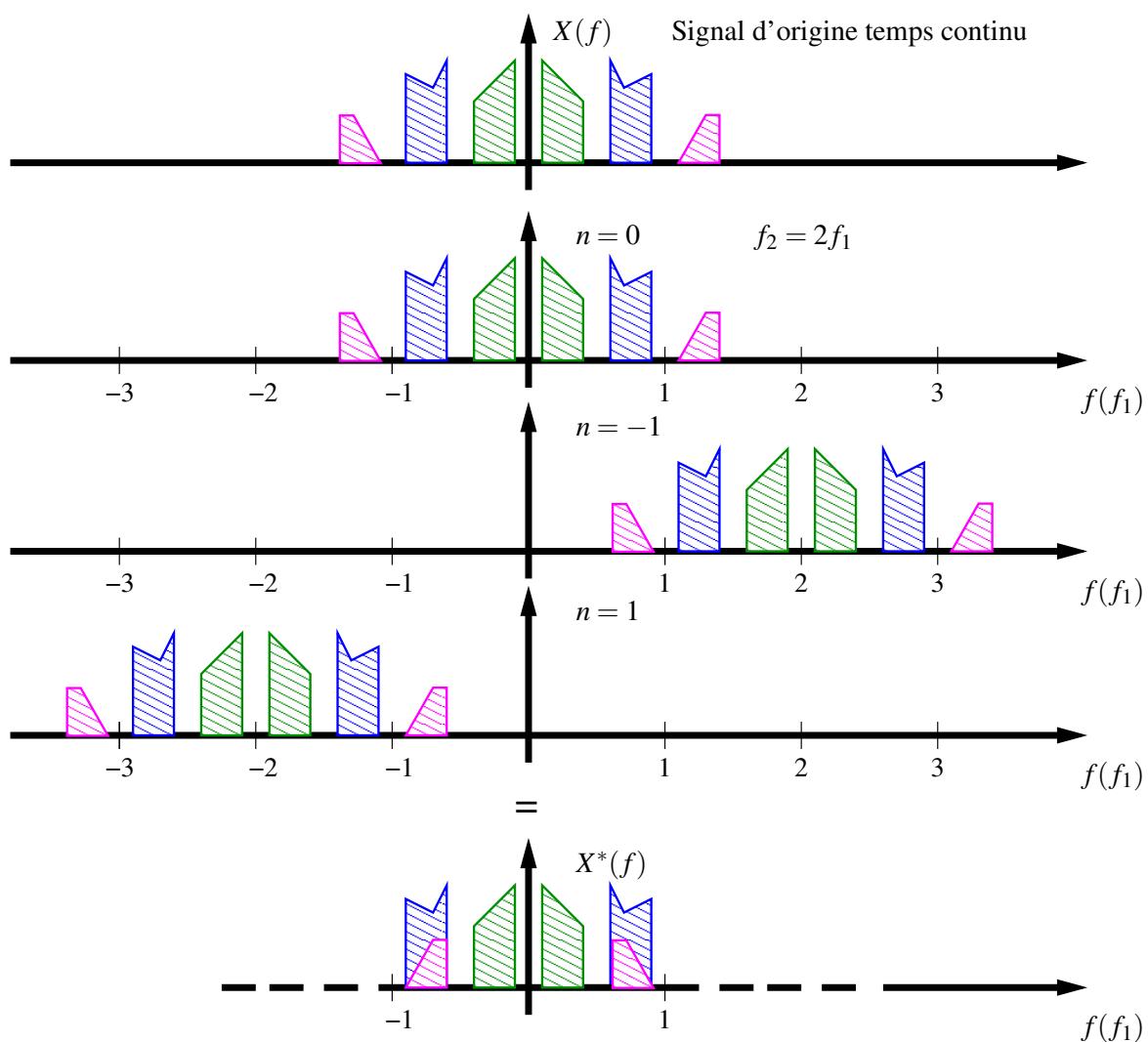
à $-2 \leq n \leq 2$ car le spectre d'origine est compris entre $-2f_1$ et $2f_1$. Le spectre de sortie est la somme de ces différentes répliques. Comme on peut le constater, le spectre du signal échantillonné a une période f_1 et comme le signal d'origine $x(t)$ est réel, le spectre de $X^*(f)$ est symétrique par rapport à $f_1/2$. Pour clarifier davantage ce type d'analyse, refaisons la en réalisant l'échantillonnage à $f_2 = 2f_1$. La figure 5.6 montre le résultat de l'analyse. Les 2 premiers spectres correspondent toujours au signal d'origine à $n = 0$ dans l'expression 8. Le troisième spectre correspond à $n = -1$ mais qui est obtenu cette fois en faisant un décalage de $+f_2$ ou de $+2f_1$. La quatrième spectre correspond à $n = 1$ qu'on obtient avec un décalage de $-f_2$. Le cinquième spectre correspond à la somme des 3 spectres. Comme on peut le constater, dans ce cas, nous sommes contentés de $-1 \leq n \leq 1$ car le spectre d'origine est compris entre $-f_2$ et $+f_2$. En comparant les 2 figures 5.5 et 5.6, on peut facilement observer l'impact de la fréquence d'échantillonnage sur le spectre. Dans le premier cas, le signal en bande de base (signal vert) est corrompu par les 2 autres signaux (bleu et violet) alors que dans le 2ème cas, les signaux bleu et violet ne se replient pas sur le signal vert.

En pratique, pour déterminer le spectre de sortie d'une opération d'échantillonnage, il n'est pas nécessaire de détailler l'analyse telle qu'elle a été faite dans ces 2 exemples. Il suffit de déterminer pour les différentes répliques, les composantes qui se replient entre $-f_e/2$ et $f_e/2$. On peut même se restreindre de 0 à $f_e/2$ pour les signaux réels.

5.2 La transformée en Z

Les systèmes linéaires invariants (SLI) échantillonnés constituent une classe très importante pour le traitement du signal. La transformée en Z pour de tels systèmes joue le même rôle que la transformée de Laplace pour les SLI continus.

FIGURE 5.5 – Calcul du repliement échantillonnage à f_1

FIGURE 5.6 – Calcul du repliement échantillonnage à $f_2 = 2f_1$

5.2.1 Définition, condition d'existence et analyticité

Soit une séquence $x[k]$ de nombre réels, la transformée en Z est une fonction de la variable complexe z définie par :

$$T\mathcal{Z}\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \quad (9)$$

La définition retenue est celle de la $T\mathcal{Z}$ unilatérale valable pour les signaux et les systèmes de traitement causaux.

La variable complexe z peut s'écrire : $z = \rho e^{j\theta}$. Alors, une condition suffisante pour l'existence de la $T\mathcal{Z}$ est qu'il existe un réel positif ρ_0 tel que la somme suivante converge :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]| \rho_0^{-k} \quad (10)$$

Puis pour tout $\rho > \rho_0$, la somme à fortiori converge et donc la $T\mathcal{Z}$ est définie.

Tous les signaux causaux qui ont une transformée en Z sont tels que cette transformée existe dans le plan complexe (contenant $\rho=+\infty$) privé d'un disque centré sur l'origine.

Exemple :

La fonction $f[k] = a^k$ où a est une constante réelle positive.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k$$

$$F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ si } |az^{-1}| < 1$$

pour $\rho > a$, la transformée en Z est définie.

La transformée en Z d'une séquence $x[k]$ est donnée par l'ensemble de la fonction $X(z)$ et du codisque de convergence.

Pour satisfaire à cette condition, $x[k]$ doit être localement sommable et la croissance de $x[k]$ avec k ne doit pas être trop rapide : il existe deux réels positifs M et α tels que pour $k \rightarrow \infty$:

$$|x[k]| < M\alpha^k \quad (11)$$

Dans ce cas, la transformée en Z de $x[k]$, $X(z)$ est définie et analytique (dérivable) dans le codisque de convergence telle que $|z| = \rho > \alpha$.

5.2.2 La transformée en Z de quelques signaux

— Echelon unité (Heaviside) $T\mathcal{Z}\{u[k]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} u[k] z^{-k}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

$$T\mathcal{Z}\{u[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1$$

— Impulsion discrète $T\mathcal{Z}\{\delta\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[k] z^{-k} = 1$

— Séquence exponentielle : $f[k] = e^{(-\alpha k)}$ où α est une constante réelle positive

$$T\mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\alpha k) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\alpha} z^{-1})^k$$

$$T\mathcal{Z}\{f[k]\} = \frac{1}{1-e^{-\alpha} z^{-1}} \text{ pour } |z| > e^{-\alpha}$$

5.2.3 Propriétés de la TZ

- Linéarité : $TZ \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i [k] \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot TZ \{x_i [k]\}$ où a_i sont des constantes
- Multiplication du signal par un signal exponentiel : $TZ \{a^k x [k]\} = X \left(\frac{z}{a} \right)$
- Multiplication du signal par sa variable d'évolution : $TZ \{k \cdot x [k]\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$
- Convolution² : $TZ \{x_1[k] * x_2 [k]\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$
- Translation en temps : soit y le signal x retardé de k_0 échantillons avec $y [k] = x [k - k_0]$

$$TZ \{y [k]\} = z^{-k_0} \cdot X (z)$$

Cette propriété montre que retarder un signal d'une unité (une période d'échantillonnage) revient à multiplier par z^{-1} dans le domaine fréquentiel. Ceci conduit à considérer la variable z^{-1} au sens d'un calcul symbolique comme un opérateur retard d'un échantillon.

5.2.4 Relation entre la transformée en Z et la transformée de Laplace

Si la séquence $x[k]$ provient de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$:

$$x [k] = x(kT_e) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

la transformée en Z s'écrit : $X (z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e) z^{-k}$

D'autre part le signal échantillonné : $x_e (t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e) \delta (t - kT_e)$

possède une transformée de Laplace : $L [x_e (t)] = X_e (p) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e) \exp (-kT_e p)$

Si l'on identifie $X(z)$ et $X_e(p)$, il vient : $z = e^{pT_e}$

Grâce à cette relation, les transformées en Z et de Laplace d'un signal échantillonné causal sont identiques.

Cas particulier :

Lorsque les domaines de convergence incluent l'axe $j\omega$ d'un côté et le cercle unité de l'autre, la séquence $x[k]$ possède une transformée de Fourier :

$$p = j\omega \quad z = e^{jT_e \omega} \quad TF (x) = X_e (j\omega) = X (e^{jT_e \omega}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x [k] \exp (-jkT_e \omega)$$

Les transformées en Z et de Fourier d'une séquence causale sont identiques.

5.3 Principales utilisations de la transformée en Z

La transformée en Z permet l'étude des systèmes discrets avec les mêmes possibilités que la transformée de Laplace pour les systèmes continus.

5.3.1 Fonction de transfert et réponse en fréquence des SLI

Les systèmes linéaires invariants sont les systèmes tels que l'entrée et la sortie sont liées par une équation aux différences linéaire avec des coefficients constants. Cette catégorie de systèmes est très importante car elle correspond aux systèmes de traitement du signal numérique (filtres numériques).

2. pour des signaux causaux $x_1[k] * x_2 [k] = \sum_{n=0}^k x_1 [n] x_2 [k - n]$

Soit un système H avec une entrée x et une sortie y. Le système H est un SLI et de plus il est causal (la sortie y ne dépend que du passé ou du présent de x et du passé de y). Dans ce cas, l'équation aux différences est de la forme générale suivante, a_r et b_r sont des constantes réelles :

$$y[k] = \sum_{r=0}^M a_r x[k-r] - \sum_{r=1}^N b_r y[k-r] \text{ avec } M \leq N \quad (12)$$

La transformation en Z de cette relation donne :

$$Y(z) = X(z) \sum_{r=0}^M a_r z^{-r} - Y(z) \sum_{r=1}^N b_r z^{-r} \quad (13)$$

Alors la fonction de transfert $H(z)$ du système est de la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 + \sum_{r=1}^N b_r z^{-r}} \quad (14)$$

Une fraction rationnelle en z (ou z^{-1}) relie l'entrée et la sortie d'un SLI dans le domaine en Z.

Si l'on considère que les séquences x et y représentent des signaux continus échantillonnés, la réponse en fréquence du système peut être obtenue en remplaçant z par $e^{j\omega T_e}$:

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r e^{-jr\omega T_e}}{1 + \sum_{r=1}^N b_r e^{-jr\omega T_e}} = |H(e^{j\omega T})| \exp(j\Phi(\omega)) \quad (15)$$

$H(z)$ est une fraction rationnelle et $\exp(-j\omega T_e)$ est périodique. Donc les réponses en amplitudes et en phase sont périodiques de période $2\pi/T_e$.

5.3.2 Stabilité

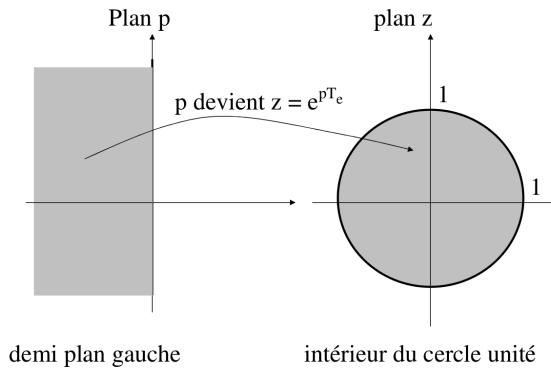
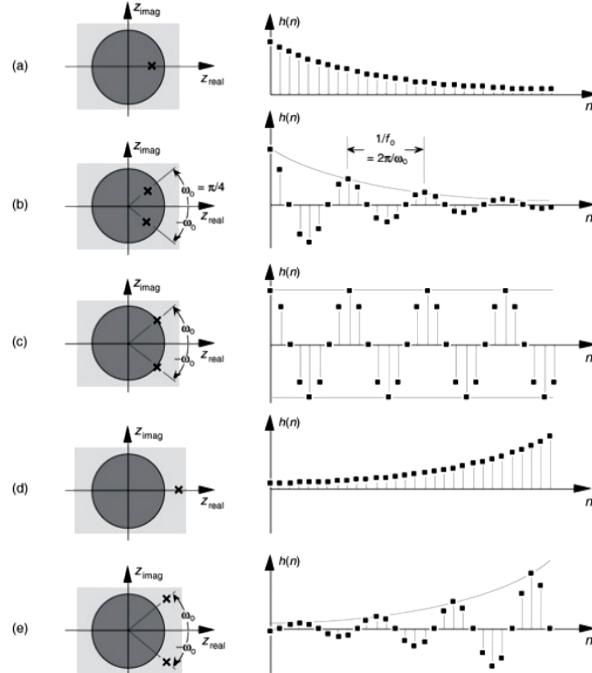
Une application très intéressante de la transformée en Z est l'étude de la stabilité des systèmes discrets. En fait, on sait d'une part qu'il y a une équivalence entre la transformée de Laplace et la transformée en Z. D'autre part, on sait que, dans le domaine temps continu, un système de fonction de transfert $H(p)$ est stable si tous les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle négative. Sachant que la relation qui lie $z = e^{pT_e}$

$$p = \sigma + j\omega \implies z = e^{(\sigma+j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} \cdot e^{j\omega T_e} \quad (16)$$

$$\sigma < 0 \implies |e^{\sigma T_e}| < 1 \quad (17)$$

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que sa fonction de transfert $H(z)$ n'ait que des pôles dont le module est strictement inférieur à 1.

La transmittance d'un système stable au sens large peut avoir des pôles d'ordre quelconque dont le module est inférieur à 1 et des pôles d'ordre 1 dont le module est égal à 1. Un tel système se comportera en oscillateur comme illustré dans la figure 5.8

FIGURE 5.7 – Equivalence entre TL et $T\mathcal{Z}$ FIGURE 5.8 – Equivalence entre TL et $T\mathcal{Z}$

$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2 u(t)}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$u(t) - e^{-at}u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\left(t - \frac{1-e^{-at}}{a}\right)u(t)$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} \sin(bt)u(t)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin bt}{z^2-2ze^{-aT} \cos bt + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos(bt)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos bt}{z^2-2ze^{-aT} \cos bt + e^{-2aT}}$
$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{T^2 ze^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^2} + \frac{T^2 ze^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}$

TABLE 5.1 – Transformations de Laplace et en Z d'une fonction causale $x(t)$ ou $x[kT]$

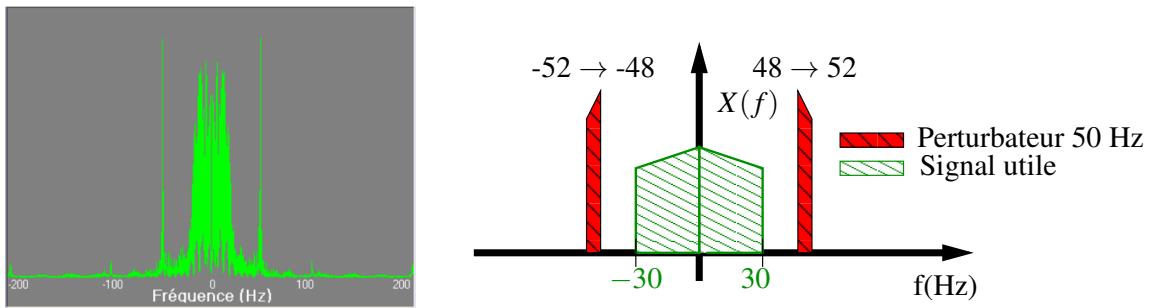


FIGURE 5.9 – Gauche) Signal ECG réel droite) Modélisation

5.4 Exercices Échantillonnage et TZ

5.4.1 Exercice :Échantillonnage d'un signal ECG

Nous souhaitons faire l'acquisition d'un signal Electro-Cardiogramme (ECG). Le spectre de ce signal est illustré dans la figure 5.9 gauche). Comme on peut le constater, le signal présente un perturbateur fort autour de la fréquence 50 Hz du à réseau électrique.

Question 5.4.1.1. Sachant que la phase du signal ECG est une fonction impaire dans le domaine fréquentiel et que son module, comme illustré, est une fonction paire, quelle conclusion peut-on tirer sur le signal ECG ?

Question 5.4.1.2. En utilisant la modélisation de la figure 5.9 droite), tracer le module du spectre du signal ECG pour une fréquence d'échantillonnage f_e de 70 Hz.

Question 5.4.1.3. Que faut-il faire pour éviter d'avoir le problème du repliement ?

5.4.2 Exercice :Échantillonnage et TZ

Soit le signal échantillonné selon la FIGURE 5.10.

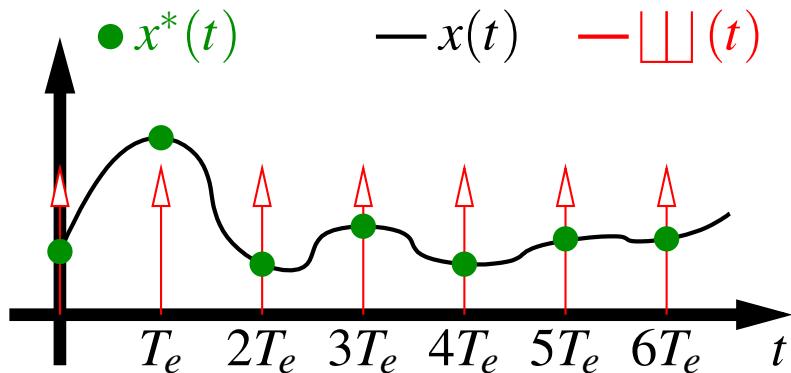


FIGURE 5.10 – Échantillonnage avec un peigne de Dirac

Question 5.4.2.1. Ecrire l'expression du signal $x^*(t)$ en fonction de la valeur des échantillons de $x(t)$ et du peigne de Dirac.

Question 5.4.2.2. Trouver la transformation de Laplace, puis la transformation en z de $x^*(t)$. En déduire la relation entre z et p. De cette relation, sachant que les pôles d'une fonction de transfert $T(p)$ doivent être dans le 1/2 plan gauche de Laplace pour garantir la stabilité du système, en déduire la position des pôles d'une fonction de transfert $T(z)$ pour garantir également la stabilité du système en temps discret.

5.4.3 Exercice : Signal échantillonné et bloqué

En pratique le signal analogique échantillonné est bloqué, en général, pendant une période d'horloge (FIGURE 5.11). On se propose d'étudier l'influence de ce blocage sur le signal en fréquence.

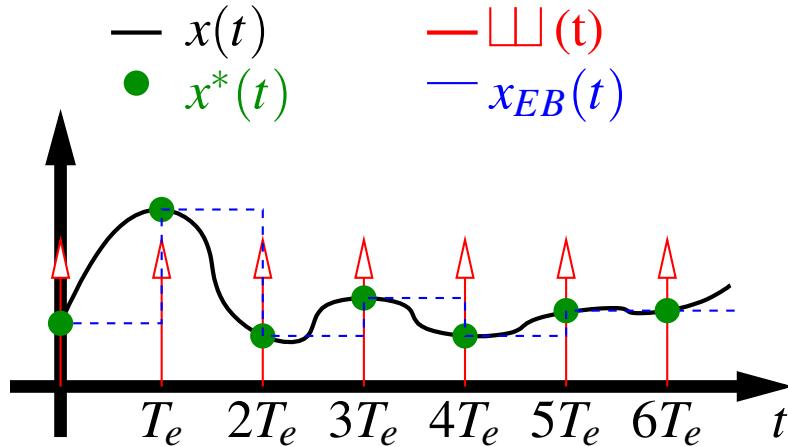


FIGURE 5.11

Question 5.4.3.1. Exprimer $x_{EB}(t)$ en fonction des échantillons $x(nT_e)$ et de la fonction échelon $u(t)$, en supposant $x(t) = 0$ pour $t < 0$.

Question 5.4.3.2. Calculer la transformation de Laplace de $x_{EB}(t)$: $X_{EB}(p)$. Faire apparaître dans cette expression la transformation de Laplace de $x^*(nT_e)$: $X^*(p)$. En déduire la fonction de transfert d'un bloqueur, notée $T_B(p)$. Représenter le module de $T_B(j\omega)$ en fonction de la fréquence.

Bibliographie

- [1] H. Baher. *Analog & Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, 1992.
- [2] D. Beauvois and Y. Tanguy. *Représentation des signaux certains et des systèmes*. ESE, 1999.
- [3] M. Bergounioux. *Mathématiques pour le traitement du signal - 2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI. Dunod, 2014. <https://books.google.fr/books?id=WeWmAwAAQBAJ>.
- [4] ESE. *Analyse des systèmes linéaires*, 1980.
- [5] Richard G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA, 1st edition, 1996.

Chapitre 6

TP : Amplification

6.1 Introduction Générale pour les Travaux Pratiques

Dans le cadre des TPs ESAC, nous allons nous intéresser à la mise en oeuvre d'une banque d'effets musicaux qu'on appliquera à une guitare électrique.

- Dans le TP1, nous étudierons l'amplification. Cette fonction est nécessaire pour la numérisation du signal qu'on abordera dans le TP4 mais aussi en ajustant son gain, un amplificateur peut être utilisé pour générer un effet distorsion.
- Le TP2 sera consacré à la fonction filtrage. Nous réaliserons un filtre passe bande flexible contrôlé par un signal externe.
- Dans le TP3, nous implémenterons un effet Tremolo à l'aide de circuits à capacités commutées.
- Dans le TP4, nous changerons de monde pour passer à des effets numériques (Octaver, Echo ...). Ce passage nécessitera bien évidemment une conception et un dimensionnement appropriés du convertisseur analogique numérique.

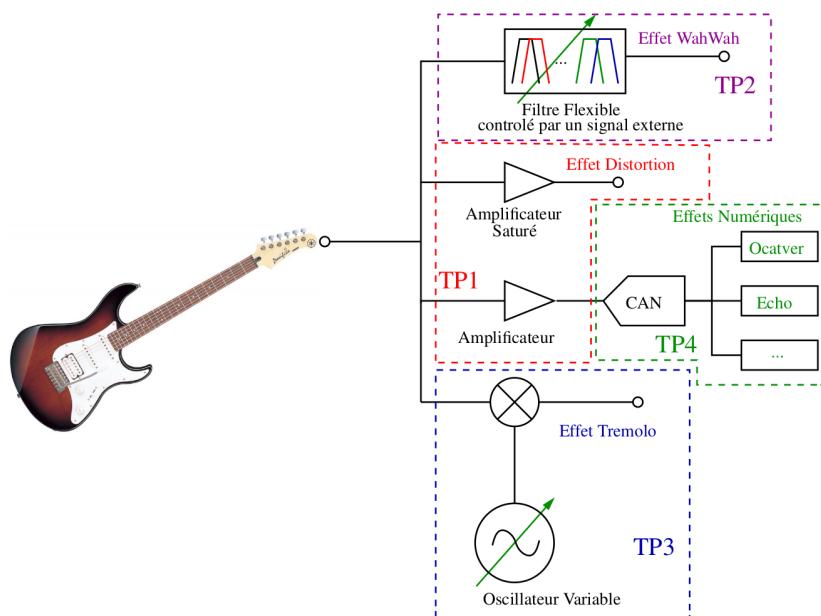


FIGURE 6.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

6.2 Introduction TP amplification

L'objectif de ce premier TP est de concevoir l'amplificateur de la chaîne de numérisation du signal issu de la guitare électrique. Nous étudierons également l'implémentation de l'effet distorsion¹ en s'appuyant sur la même architecture d'amplificateur. Le signal issu de la guitare a une dynamique de ± 250 mV avec une tension moyenne nulle. Fréquemment, ce signal pourrait avoir des composantes sur un spectre allant de 50 Hz à 20 kHz. Le convertisseur analogique numérique (CAN) a une dynamique de 0 à 4 V. Afin de maximiser les performances du CAN, il est nécessaire que le signal à son entrée occupe le plus possible cette dynamique sans la dépasser pour éviter la saturation. Le fonctionnement du CAN sera étudié en détails dans le chapitre 11.

Pour ce TP ainsi que pour le TP 3, nous utiliserons la maquette de prototypage présentée dans l'annexe C.1.

6.3 Analyse statique

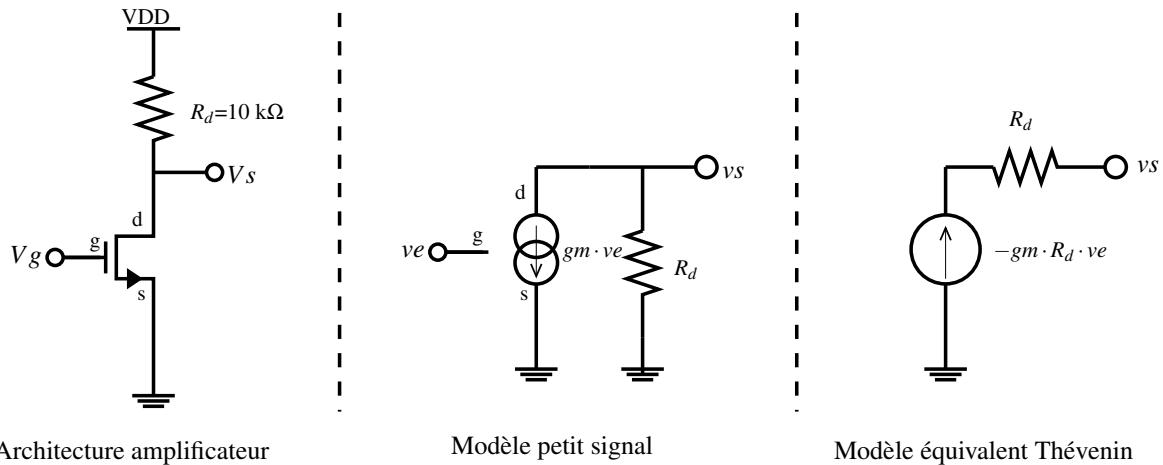


FIGURE 6.2 – Montage pour la mesure de la fonction de transfert

L'architecture choisie est l'amplificateur composé d'un transistor et d'une résistance étudié en cours. L'amplificateur est illustré dans la figure 6.2. Pour réaliser le montage, nous utiliserons le circuit intégré se trouvant sur la partie supérieure de votre maquette. La grille est connectée au connecteur 6, la source au connecteur 7 et le drain au connecteur 14. Il est important de ne pas confondre la source du transistor notée s avec la sortie du montage notée V_s . La valeur de VDD est fixée à 5 V, elle sera fournie par le générateur d'alimentation DC.

Afin de vérifier que le gain et les dynamiques d'entrée et de sortie de l'amplificateur répondent aux besoins de notre chaîne, nous allons tracer la fonction de transfert du montage $V_s = f(V_e)$. Pour réaliser cette opération rapidement sans faire varier la tension d'entrée V_e à la main, l'approche la plus simple est d'appliquer un signal triangulaire faible fréquence à l'entrée de l'amplificateur et l'utiliser pour tracer la courbe $V_s = f(V_e)$ en s'appuyant sur le mode xy de l'oscilloscope. Pour cela, il est nécessaire de connecter l'entrée à la première voie de l'oscilloscope et la sortie à la deuxième. Pour le signal d'entrée, nous réglerons la fréquence à 100 Hz, la tension crête-crête (ou peak-peak Vpp) à 5 V et la tension moyenne (ou offset) à 2.5 V (afin de couvrir la plage de tension allant de la 0 à VDD). Ce signal sera fourni par le générateur basse fréquence.

1. Pour mieux comprendre cet effet, vous pouvez regarder la vidéo suivante qui compare le son d'un guitare sans et avec l'effet <https://www.youtube.com/watch?v=REZP6yF38MA> Vous pouvez aussi regarder la vidéo suivante qui montre M. David Guilmour dans ses œuvres <https://www.youtube.com/watch?v=o5Ht6WIhhmU>

Question 6.3.1. Relever à l'oscilloscope la courbe $V_s = f(V_e)$ du circuit de la figure 6.2. Déterminer la zone de fonctionnement du transistor (Dynamique d'entrée et dynamique de sortie) où le montage considéré est un amplificateur de tension ($V_s - V_{s0} = G \cdot (V_e - V_{e0})$ où V_{e0} et V_{s0} sont des tensions constantes). En déduire la valeur du gain G .

Question 6.3.2. Dans notre but de solliciter la dynamique d'entrée du CAN d'une façon symétrique, nous choisissons de fixer V_{s0} à 2 V. Discuter si l'amplificateur est adapté pour notre application.

Le signal issu de la guitare étant centré autour de la masse, il ne peut pas être appliqué directement à l'entrée de l'amplificateur. Il est nécessaire de changer sa tension moyenne. Pour réaliser cette opération, nous proposons de rajouter le circuit composé par les composants R_1 , R_2 et C_1 à notre amplificateur comme illustré dans la figure 6.3.

La fonction petit signal réalisée par le montage R_1 , R_2 et C_1 est donnée par :²

$$HPF(j\omega) = \frac{vg(j\omega)}{ve(j\omega)} = \frac{C_1 \cdot R_{eq} \cdot j\omega}{1 + C_1 \cdot R_{eq} \cdot j\omega} \text{ avec } Req = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Question 6.3.3. Quel type de filtrage est réalisé par ce montage. Quelle est l'expression de sa fréquence de coupure ?

Compléter votre montage en rajoutant les composants R_1 , R_2 et C_1 . Ne pas rajouter les composants dans le rectangle en pointillé, ceux là seront rajoutés dans la section 6.5. Déconnecter ou désactiver l'entrée du générateur faible fréquence. Régler le potentiomètre R_2 afin d'obtenir une tension de sortie $V_s = 2$ V. Réaliser cette mesure à l'aide du multimètre, ce dernier offre une meilleure précision pour les mesures DC (tension continue) comparé à un oscilloscope.

Question 6.3.4. Relever la valeur de R_2 à l'aide de l'ohmmètre, ainsi que la valeur V_g .

Question 6.3.5. Au vu des valeurs choisies pour R_1 , R_2 et C_1 , est ce que l'ajout de ce montage pourrait poser problème pour l'application visée ? Si oui, comment peut-on pallier ce problème ?

6.4 Analyse petit signal

Nous allons passer à présent à l'analyse fréquentielle de notre amplificateur. Pour cette opération, nous utiliserons un signal sinusoïdal avec une faible amplitude de 100 mVpp et une fréquence de 5 kHz. Pour l'offset, sa valeur n'a pas d'impact sur le fonctionnement de l'amplificateur vu que le montage $R_1-R_2-C_1$ permet de la supprimer.

Question 6.4.1. Mesurer le gain $G_0 = v_s/v_e$, comparer à la valeur obtenue avec l'analyse statique.

Question 6.4.2. Faites varier la fréquence du signal v_e pour déterminer la fréquence de coupure basse f_c^b et la fréquence de coupure haute f_c^h (les fréquences pour lesquelles le gain en tension vaut $G_0/\sqrt{2}$). Vérifier que f_c^b est en concordance avec le calcul théorique de la question 6.3.3.

2. Pour faire cette analyse petit signal, on connecte toutes les tensions continues à la masse. On rappelle aussi que le courant de grille du transistor peut être approximé nul.

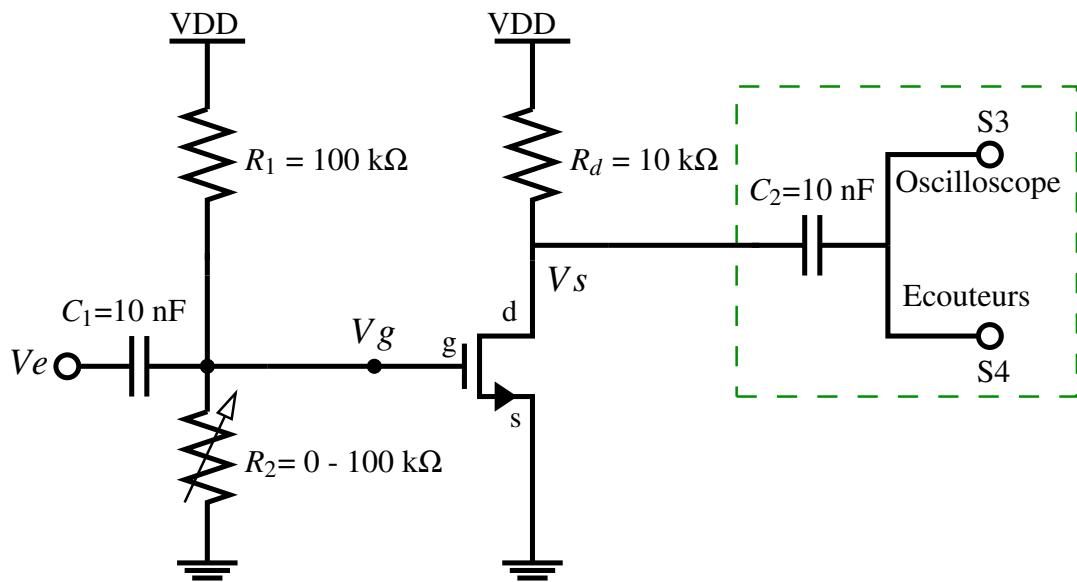


FIGURE 6.3 – Montage amplificateur avec réseau d'entrée

6.5 Et si on jouait de la guitare

Pour évaluer la qualité du signal à la sortie de l'amplificateur, nous souhaitons l'écouter. Pour cela, nous allons utiliser les 2 sorties BNC S3 et S4 pour connecter le signal de sortie à la fois à des écouteurs et à l'oscilloscope. Les écouteurs peuvent être modélisés par une résistance de 4 à 10 Ω. Afin d'éviter de changer le point de polarisation de l'amplificateur, nous allons connecter sa sortie à un condensateur de 10 nF en amont des écouteurs comme illustré dans le rectangle vert en pointillé de la figure 6.3. Dans un premier temps, nous garderons en signal d'entrée une sinusoïde de 5 kHz d'amplitude 100 mVpp.

Question 6.5.1. *En observant l'oscilloscope, que se passe-t-il quand nous branchons les écouteurs ?*

Conseil : Appuyez vous sur le modèle équivalent Thévenin de l'amplificateur pour votre analyse en comparant le gain sans et avec écouteurs.

Pour pallier ce problème, nous utilisons un circuit pilote (ou driver) audio qui a la particularité d'avoir une impédance d'entrée extrêmement élevée et un étage de sortie qui permet de charger des faibles impédances comme celle des écouteurs. Brancher le driver audio à la sortie de l'amplificateur en passant par le condensateur C_2 .

Question 6.5.2. *Commencer par observer la sortie avec un signal issu du générateur, puis passer à un signal issu de la guitare³*

Un effet musical très utilisé parmi les guitaristes est la distorsion qu'on peut obtenir en saturant la sortie de la guitare. Pour cela, nous allons augmenter le gain de notre amplificateur en remplaçant la résistance R_d par une résistance de 100 kΩ.

Question 6.5.3. *Modifier la résistance R_d , ajuster la valeur de R_2 pour ramener la composante continue V_{s0} à 2 V. Jouez et faites ressortir le David Gilmour qui est en vous.*

³. Si vous n'êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur.

Chapitre 7

Filtrage analogique

7.1 Introduction

Les filtres analogiques sont des composants essentiels des systèmes d'acquisition (numérisation) et de restitution du signal. Ils peuvent être utilisés pour conditionner le signal avant d'effectuer certaines opérations. C'est le cas, par exemple, lors d'une opération d'échantillonnage à la fréquence F_s où le spectre $X_d(f)$ du signal échantillonné est relié au spectre $X(f)$ du signal d'entrée par :

$$X_d(f) = \sum_{k \in Z} X(f - k F_s)$$

Pour pouvoir échantillonner à une fréquence $F_s = 2B$ (Nyquist-Shannon) on doit garantir que le spectre du signal d'entrée n'a pas de composantes supérieures à B . Ceci est généralement assuré par un filtre appelé filtre anti-repliement (figure 7.1).

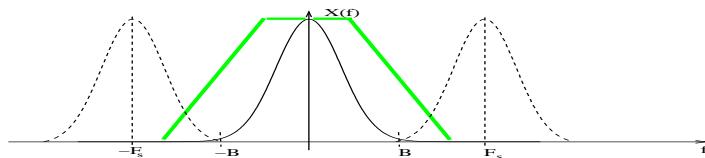


FIGURE 7.1 – Filtrage anti-repliement

Les filtres analogiques sont également utilisés pour sélectionner une partie du spectre d'un signal. C'est par exemple le cas lorsqu'une bande de fréquences est utilisée dans un système radio.

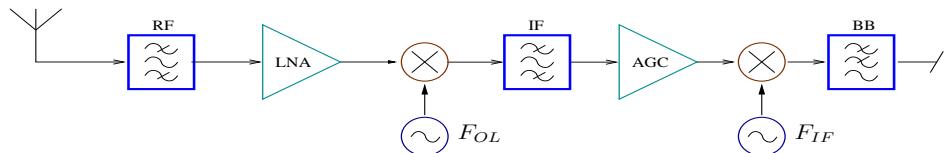


FIGURE 7.2 – Filtrage dans un récepteur radio

La figure 7.2 montre un exemple de récepteur radio où le filtrage est réparti dans la chaîne de réception sur un ensemble de filtres (RF, IF, BB). La technologie utilisée pour ces différents filtres est étroitement liée à la fréquence du signal à traiter. Nous en donnerons quelques exemples à la fin du cours.

7.2 Spécification des filtres

Les filtres analogiques temps continu sont régis, de manière générale, par des équations différentielles du temps et de l'espace. Considérons une onde qui se propage dans le filtre à la vitesse v . Si d est la dimension du dispositif et si la longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{f}$ est voisine de d , les phénomènes de propagation doivent être considérés. Lorsque d est très inférieur à λ , on pourra négliger les phénomènes de propagation. C'est généralement vrai pour les derniers étages d'une chaîne telle que celle de la figure 7.2 (filtre BB). Le circuit est alors dit à **éléments localisées** (lumped element model). Les éléments du circuit (R,L,C,..) sont considérés comme ponctuels et celui-ci est décrit par les lois de Kirchoff. Nous supposerons cette condition réalisée dans la suite de ce cours.

Exemple : $v = 4000 \text{ m/s}$ (filtre à onde de surface où filtre SAW : *Surface Acoustic Wave*)

$$f = 2 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda = 2 \mu\text{m}$$

Dans ce cas, λ est une longueur caractéristique des motifs du filtre et l'approximation précédente n'est pas valide.

7.2.1 Fonction de transfert

Un filtre linéaire est décrit de façon générale par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou la transformée de Laplace $T(p)$ de cette dernière (figure 7.3). La fonction $T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ est la fonction de transfert du filtre.

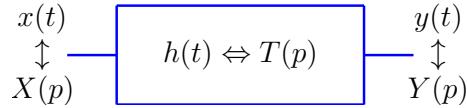


FIGURE 7.3 – Fonction de transfert

Pour les circuits à éléments localisés, les équations de constitution de ces éléments, associées aux lois topologiques (Kirchoff), conduisent à des fonctions de transfert rationnelle en p :

$$\sum_j i_{kj} = 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{i = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow I(p) = C p V(p)}_{\text{Equations de constitution}}$$

Lois topologiques

$T(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p-z_j)}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)}$	(1)	p_i : pôles z_j : zéros n : ordre du filtre
--	-------	---

Les fonctions de transfert de ces filtres sont ainsi caractérisées par les racines des polynômes numérateur (zéros) et dénominateur (pôles). Le nombre n de pôles est appelé ordre du filtre. Il caractérise sa complexité. Ayant la forme de la fonction de transfert, il nous faut maintenant déterminer quelles sont les contraintes imposées à cette dernière pour qu'elle puisse être exploitée efficacement.

7.2.2 Réponse transitoire et harmonique

Considérons la réponse d'un filtre (linéaire à constantes localisées) à une entrée sinusoïdale à la pulsation ω . Pour simplifier, nous considérons que tous les pôles sont simples, le calcul

pouvant facilement être étendu au cas des pôles multiples :

$$x(t) = e^{j\omega t} \cdot \mathbf{1}_{\{t>0\}} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(p) = \frac{1}{p-j\omega}$$

La sortie du filtre est donnée par :

$$Y(p) = T(p) \cdot X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)} \cdot \frac{1}{p-j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p-p_i} + \frac{C_{n+1}}{p-j\omega}$$

On obtient, par identification, le coefficient C_{n+1} :

$$C_{n+1} = [T(p)]_{p=j\omega} = T(j\omega)$$

et par transformée inverse, la réponse temporelle :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + T(j\omega) e^{j\omega t}$$

Réponse transitoire
Réponse harmonique

La réponse temporelle fait apparaître une partie transitoire qui dépend uniquement des conditions initiales et une réponse harmonique avec un gain complexe donné par l'évaluation de $T(p)$ pour $p = j\omega$. Nous nous intéresserons dans la suite à cette deuxième partie de la réponse du filtre. La réponse transitoire est normalement une réponse évanescante. Pour qu'il en soit effectivement ainsi, on doit satisfaire au critère de stabilité de la fonction de transfert ¹ :

Stabilité $\Leftrightarrow m \leq n$ et $\Re\{p_i\} < 0$

7.2.3 Causalité de la réponse impulsionale

Afin de mettre en évidence une autre contrainte imposée à la réponse d'un filtre, nous considérons le cas d'un "passe-bas" idéal. Celui-ci a un gain unitaire dans la bande $[-f_c, f_c]$ (bande passante) et un gain nul en dehors de cette bande. Nous autorisons d'autre part un retard t_o entre l'entrée et la sortie du filtre (figure 7.4).

Nous remarquons que la réponse impulsionale d'un tel filtre est non nulle pour $t < 0$. Ce filtre n'est pas causal. Le théorème de Paley-Wiener stipule que la fonction de transfert T d'un filtre causal doit être telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|T(f)||}{1+f^2} df < \infty$$

En conclusion, on ne peut pas annuler le module de $T(f)$ sur une bande de fréquence aussi petite soit elle. Nous chercherons donc, dans la suite, des fonctions de transfert de la forme (1) de la section 7.2.1 qui approchent au mieux les caractéristiques du filtre précédent.

7.2.4 Gabarits

Les gabarits de filtrage déterminent les limites de variation permises des caractéristiques du filtre. Parmi celles-ci les plus importantes sont l'affaiblissement et le temps de propagation de groupe.

1. la condition $m \leq n$ garantit la causalité de la réponse

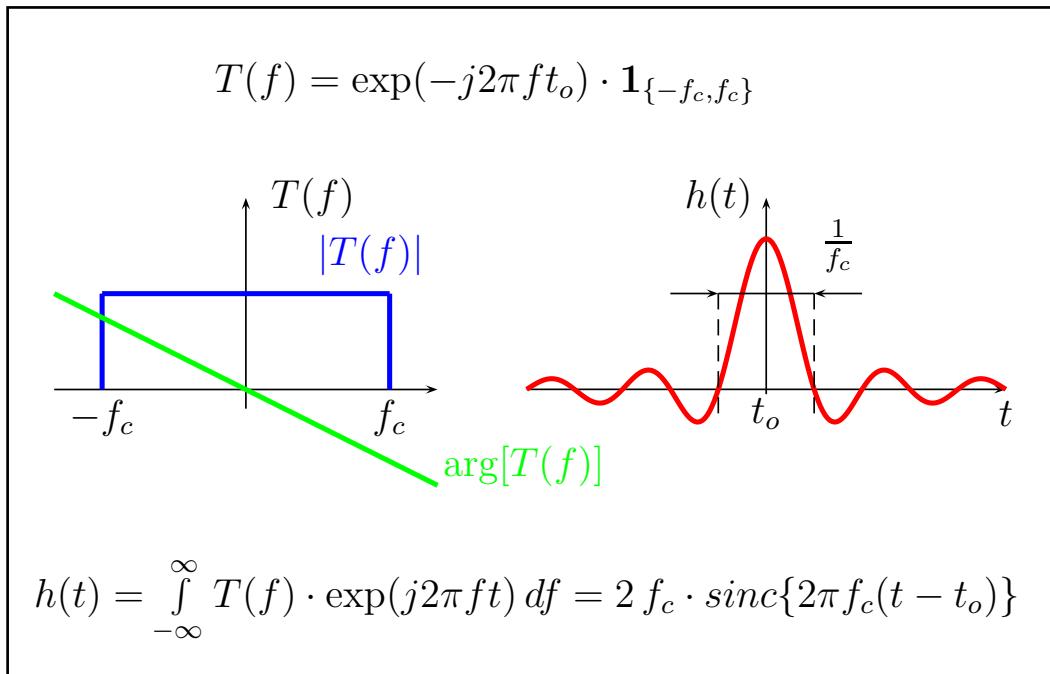
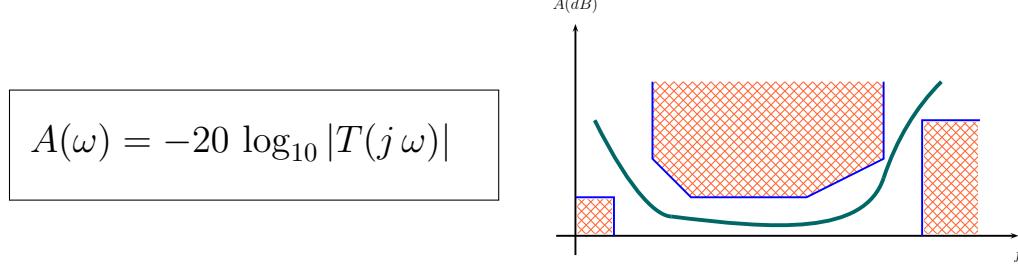


FIGURE 7.4 – Filtre passe-bas idéal

Gabarit d'affaiblissement

L'affaiblissement du filtre est généralement exprimé en dB :



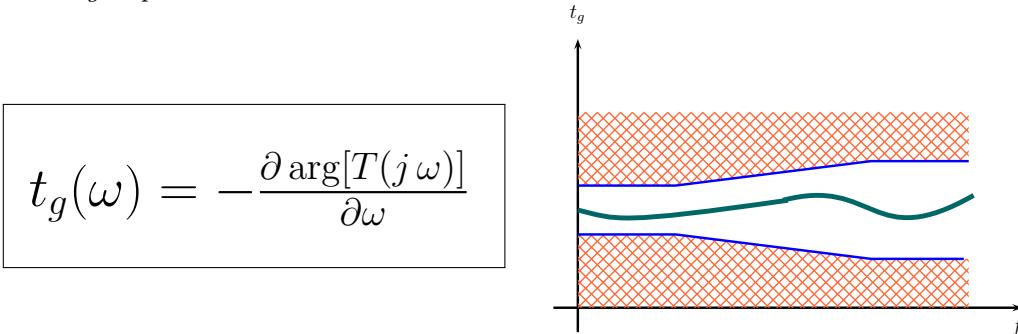
Remarque Pour les filtres à constantes localisées (fonctions rationnelles à coefficients réels), on a la propriété de réflexion :

$$T(\bar{p}) = \bar{T}(p) \quad , \quad |T(\omega)|^2 = [T(p) \cdot T(-p)]_{p=j\omega}$$

où la barre supérieure indique le complexe conjugué.

Gabarit de temps de propagation de groupe

La phase fait intervenir une fonction transcendante. On préfère utiliser le *temps de propagation de groupe* :



7.3 Approximations standards

7.3.1 Introduction

Les approximations standards sont basées sur la construction d'un filtre passe-bas normalisé en amplitude et en fréquence, dit le filtre prototype, définie par une fonction caractéristique Ψ_n . Les séries Ψ_n correspondent à des séries de fonctions existantes dans la littérature comme par exemple les séries de Butterworth définies par $\Psi_n(x) = x^n$.

L'approche consiste à ramener toute construction de filtres à un filtre passe bas normalisé. Ceci se fait en 3 étapes principales :

- On transpose le gabarit du filtre voulu à un gabarit d'un filtre pas normalisé (bande utile égale à 1)
- On réalise les calculs sur le filtre prototype. (ordre, fréquence de coupure, fonction de transfert ...)
- On réalise une re-transposition en fréquence et en type de filtrage si nécessaire (par ex : passe bas à passe haut) pour construire le filtre voulu à partir du filtre passe bas prototype

L'avantage de cette approche est que les séries d'approximation standard et les fonctions de transfert associées sont juste définies pour le cas le plus simple : filtre passe bas avec une bande de passante de 1. L'ajustement par rapport au type de filtrage, aux fréquences et aux atténuations minimale et maximale se fait grâce à des transformations mathématiques simples qu'on détaillera dans la suite.

Afin de faire la différence entre le domaine de Laplace original et le domaine de Laplace normalisé, nous introduisons la variable complexe normalisée $S = \Sigma + j \Omega$, le pendant de la variable de Laplace $p = \sigma + j \omega$.

Par construction, pour tous les filtres à base d'approximation standard, l'atténuation peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)] \quad , \quad |T(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)}$$

avec n l'ordre du filtre et ϵ une constante qui nous permettra de l'ajuster en fonction des atténuations A_{min} et A_{max} requises. Par construction aussi, on a

$$\Psi_n(1) = 1$$

7.3.2 Définition du prototype

Le prototype est un filtre passe-bas normalisé. Il est caractérisé par son affaiblissement maximum en bande passante A_{max} , son affaiblissement maximum en bande atténuee A_{min} et sa limite de bande atténuee normalisée Ω_s , dit également le paramètre de sélectivité. Les atténuations A_{max} et A_{min} du filtre prototype sont identiques à celles du filtre d'origine. Ω_s suit le principe de normalisation des fréquences, son calcul sera détaillé dans la suite.

Afin de calculer l'ordre d'un filtre à partir de ces données, il suffit d'étudier l'atténuation pour les 2 pulsations normalisées 1 et Ω_s . On sait d'une part que l'atténuation à la pulsation 1 devrait être inférieure à A_{max}

$$A(1) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n(1)^2) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \leq A_{max}$$

et que l'atténuation à Ω_s devrait être supérieure à A_{min} .

$$A(\Omega_s) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n(\Omega_s)^2) \geq A_{min}$$

La première relation nous permet d'exprimer ϵ sous la forme suivante :

$$\epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

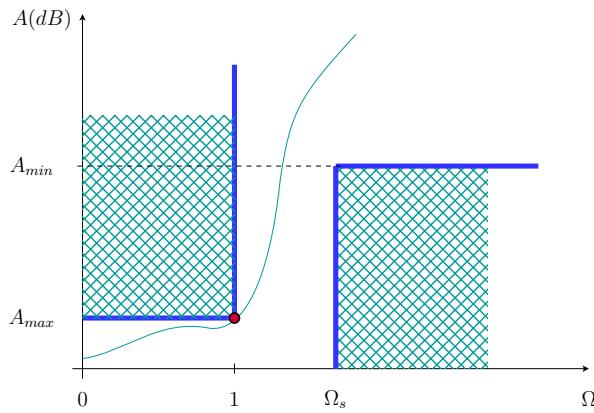


FIGURE 7.5 – Filtre passe-bas prototype

et la deuxième sous la formation suivante :

$$\epsilon \geq \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\Psi_n^2(\Omega_s)}}$$

En faisant le rapport des deux inégalités, on obtient l'inégalité suivante qui nous permet de trouver l'ordre minimal du filtre qui satisfait les besoins en filtrage

$$\Psi_n(\Omega_s) \geq \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}} = D$$

On notera ce rapport D .

7.3.3 Approximation sur le prototype

Nous ne considérerons ici que quelques approximations classiques sur le module de la fonction de transfert. Celles-ci consistent à faire un choix particulier de Ψ qui approche “au mieux” le prototype. On peut distinguer deux classes particulières selon la forme polynômiale ou rationnelle de la fonction caractéristique.

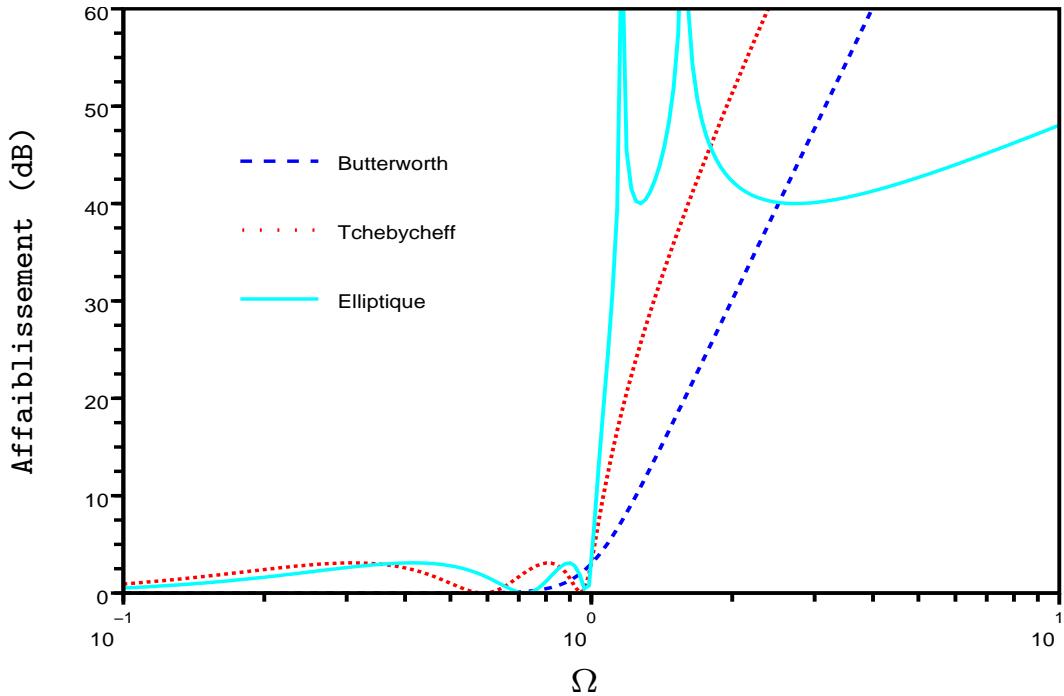
- Approximations polynomiales
 1. Approximation de Butterworth : $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$
 2. Approximation de Tchebycheff :

$$\Psi_n(\Omega) = T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) \quad T_n : \text{polynôme de Tchebycheff d'ordre } n$$

- Approximations rationnelles
 1. Tchebycheff en bande atténuee : $\Psi_n(\Omega) = \frac{T_n(\Omega_s)}{T_n(\frac{\Omega_s}{\Omega})}$
 2. Approximation de Cauer ou Elliptique :

n pair	n impair
$\Psi_n(\Omega) = C_1 \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$	$\Psi_n(\Omega) = C_2 \Omega \prod_{i=1}^{n-1/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$
$\Omega_{oi} \cdot \Omega_{zi} = \Omega_s$	

La figure 7.6 montre quelques exemples d'affaiblissements obtenus pour $n=5$.

FIGURE 7.6 – Exemples d'approximation standard ($n=5$, $A_{max}=3$ dB)

7.3.4 Transformations de fréquences

Les transformations de fréquences permettent de réaliser d'autres types de filtre à partir du passe-bas prototype. Le tableau 7.1 donne les principales transformations $S = f(p)$ et leur paramètres associés.

La principale contrainte imposée aux transformations (2) et (3) du tableau 7.1 est la symétrie géométrique autour de la fréquence centrale ω_o :

$$\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_o^2$$

Ainsi, si le gabarit de départ n'est pas à symétrie géométrique, nous devrons trouver un gabarit plus sévère qui satisfait cette condition pour pouvoir appliquer la méthode d'approximation sur un prototype..

On peut aussi noter que l'ordre du filtre double après une transformation passe-bas à passe-bande ou à coupe bande. Ainsi un filtre coupe ou passe-bande à symétrie géométrique est toujours d'ordre pair.

Nous avons noté $Q_o = \frac{\omega_o}{B}$ le rapport entre la pulsation centrale et la bande B (bande passante (en radian) à 3 dB). Q_o est le coefficient de qualité du filtre du second ordre.

7.3.5 Crédation d'un filtre pas à pas

La synthèse d'un filtre avec une approximation standard peut être faite avec l'approche systématique résumée dans la figure 7.7. Pour mieux l'expliquer, nous allons nous appuyer sur un exemple.

Étape 1 : Lara souhaite utiliser un capteur ultrason pour faire des mesures de distance. Malheureusement ses mesures préliminaires ne semblent pas être précises. Lara appelle son ami Fabian à la rescousse. Après analyse du problème, il conclut que les incertitudes des mesures sont dues aux fréquences audibles ($f < 20$ kHz).

Étape 2 : Pour atténuer ces fréquences, Fabian propose d'utiliser un filtre passe-haut. Pour déterminer les spécifications de ce filtre, Lara et Fabian regardent les différents paramètres

(1) passe-haut :	(2) réjecteur :	(3) passe-bande :
$S = \frac{\omega_2}{p}$ $\Omega_s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$S = \frac{B}{\omega_o} \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]^{-1}$ $B = \omega_4 - \omega_3$	$S = \frac{\omega_o}{B} \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]$ $B = \omega_3 - \omega_2$ $\Omega_s = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2}$ Contrainte : $\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_o^2$

TABLE 7.1 – Transformations de fréquences

de l’application et concluent qu’ils peuvent se permettre une atténuation maximale inférieure à 2 dB dans la bande utile ($f > 50$ kHz). Par ailleurs, dans la bande atténuée ($f < 20$ kHz), l’atténuation minimale requise doit être de 10 dB. Avec ces différentes données, ils tracent le gabarit du filtre passe-haut requis (voir figure 7.8 gauche)).

Étape 3 : Pour déterminer la fonction du filtre passe-haut, Lara propose de passer par l’approche basée sur les approximations standards. Celle-ci consiste à ramener tous les problèmes à un filtre passe-bas avec une bande passante normalisée égale à 1. Ce filtre est dit le filtre prototype passe-bas. Puis d’utiliser une des approximations standards existantes tels que Butterworth ou Tchebycheff. Ces approximations respectent certaines conditions mathématiques dans leur construction qui permettent une conversion facile entre ce filtre passe-bas prototype et un filtre équivalent passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe bande.

La conversion entre le gabarit du filtre passe-haut et celui du filtre passe-bas prototype est très simple. Les valeurs de A_{min} et A_{max} sont inchangées. La bande passante vaut 1 et la pulsation de la bande atténuée notée Ω_s vaut $\frac{f_2}{f_1}$ pour les filtres passe-bas et passe-haut et vaut $\frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2}$ pour les filtres passe-bande et coupe bande. Ainsi dans ce cas, $\Omega_s = 2.5$ et le gabarit du filtre passe-bas prototype est donc comme illustré dans la figure 7.8 droite).

Étape 4 : Après concertation, nos deux compères décident d’utiliser une approximation de type Butterworth caractérisée par $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$. Pour déterminer l’ordre, il suffit de résoudre l’équation suivante :

$$\Psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

$$\Omega_s^n \geq \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

A. N. pour $A_{min} = 10$ dB $A_{max} = 2$ dB, et $\Omega_s = 2.5$

$$D = \sqrt{\frac{10^1 - 1}{10^{0.2} - 1}} = 3.92 \longrightarrow n > \frac{\log(D)}{\log(\Omega_s)} = 1.49$$

L’ordre obtenu est de 1.49 mais vu que l’ordre doit être entier, on utilisera l’entier supérieur, donc 2.

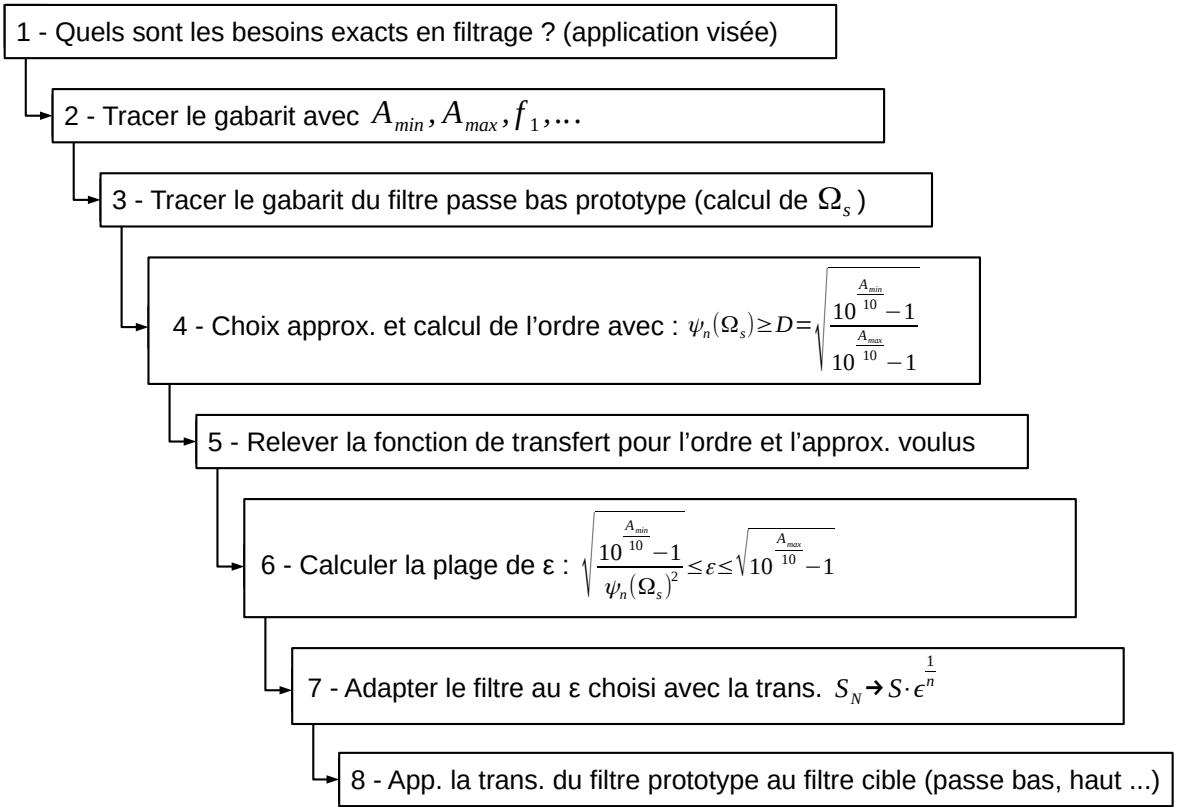


FIGURE 7.7 – Méthodologie pour la synthèse d'un filtre à base d'approximations standards

Ordre	Numérateur	Dénominateur
1	1	$S_N + 1$
2	1	$S_N^2 + \sqrt{2}S_N + 1$
3	1	$(S_N + 1)(S_N^2 + S_N + 1)$
4	1	$(S_N^2 + 0.765S_N + 1)(S_N^2 + 1.848S_N + 1)$
5	1	$(S_N + 1)(S_N^2 + 0.618S_N + 1)(S_N^2 + 1.618S_N + 1)$
6	1	$(S_N^2 + 0.518S_N + 1)(S_N^2 + 1.414S_N + 1)(S_N^2 + 1.932S_N + 1)$

TABLE 7.2 – Table de Butterworth avec $A_{max} = 3$ dB

Étape 5 : Pour relever la fonction de transfert pour un filtre passe-bas normalisé Butterworth d'ordre 2, on consulte la table 7.2 et on conclut que la fonction de transfert requise est

$$H_{PasseBas-NormEnBande-Norm3dB}(S_N) = \frac{1}{S_N^2 + \sqrt{2}S_N + 1}$$

Mais on peut remarquer que cette table est définie pour un A_{max} de 3 dB. En effet, les approximation standards sont toujours définies pour un A_{max} de 3 dB ou en d'autres termes pour une fréquence de coupure normalisée égale à 1. C'est à l'utilisateur de l'adapter à ses besoins.

Étape 6 : Pour adapter le filtre à leur besoin, Lara et Fabian calculent la plage permise pour ϵ . C'est grâce à cette constante qu'ils pourront ajuster le filtre à leurs besoins spécifiques. En partant du fait que l'atténuation est exprimée par $A(\Omega) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega))$ et en

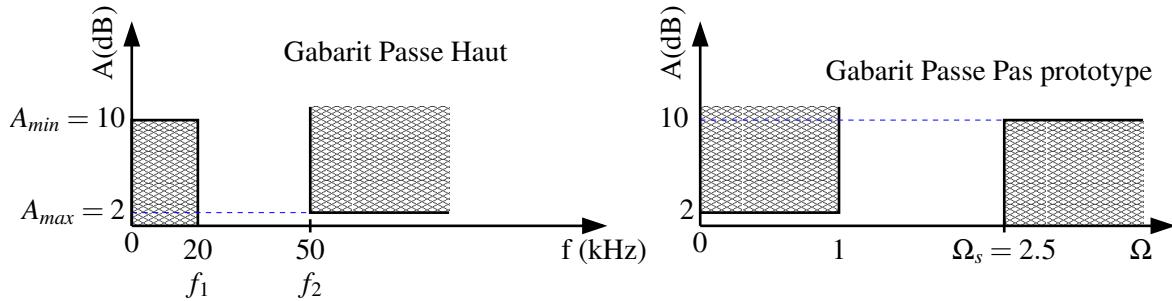


FIGURE 7.8 – Gauche) Gabarit du filtre passe-haut Droite) Gabarit du filtre passe-bas prototype

résolvant l'équation pour $\Omega = 1$ et $\Omega = \Omega_s$, on détermine l'encadrement suivant pour ϵ

$$\sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\Psi_n^2(\Omega_s)}} \leq \epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

A.N. pour $A_{min} = 10$ dB, $A_{max} = 2$ dB, $\Omega_s = 2.5$, $n = 2$ et une approximation Butterworth

$$0.48 \leq \epsilon \leq 0.76$$

Étape 7 : Pour ajuster le filtre au ϵ choisi, il suffit de remplacer $S_N \rightarrow S \cdot \epsilon^{\frac{1}{n}}$, ce qui nous donne la fonction de transfert suivante :

$$H_{PasseBas-NormEnBande}(S) = \frac{1}{\epsilon S^2 + \sqrt{2\epsilon} S + 1}$$

Pour vérifier la validité de leur calcul, on va tracer la fonction de transfert du filtre passe-bas prototype pour ϵ_{min} et ϵ_{max} . Les résultats sont affichés dans la figure 7.9. Ainsi on peut re-

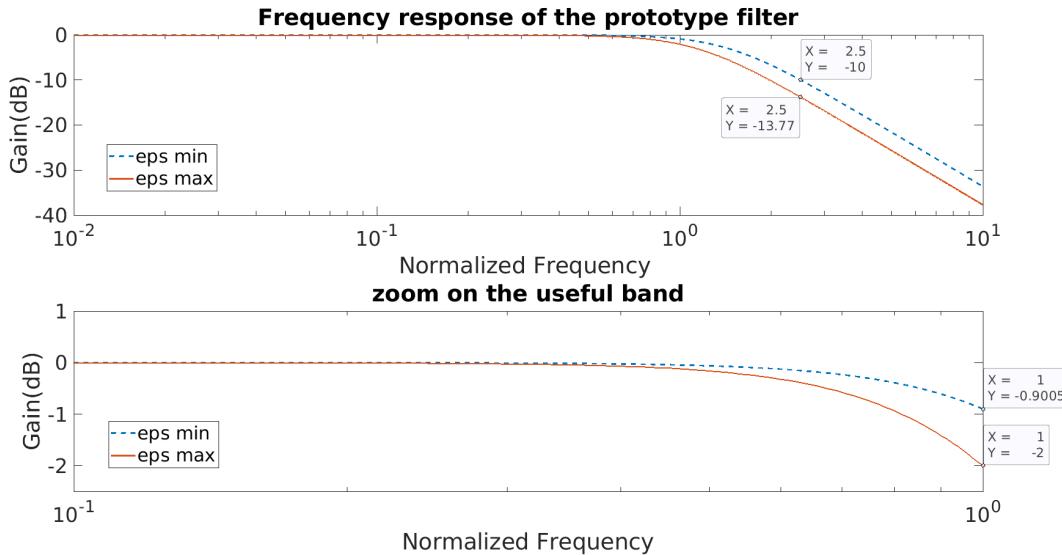


FIGURE 7.9 – Réponse fréquentielle du filtre passe-bas prototype

marquer que l'atténuation à Ω_s est égale à 10 dB pour pour ϵ_{min} contre 13.8 dB pour ϵ_{max} .

Par contre pour la bande utile, l'atténuation à $\Omega = 1$ est de 0.9 dB pour ϵ_{min} contre 2 dB pour ϵ_{max} . Ainsi on peut constater que un ϵ_{min} respecte tout juste le cahier des charges pour la bande atténuée mais offre une certaine marge pour la bande utile. On peut faire une constatation similaire pour ϵ_{max} avec une atténuation égale à A_{max} dans la bande utile mais une certaine marge dans la bande atténuée comparé au A_{min} voulu. Bien évidemment, il est conseillé de prendre un ϵ intermédiaire afin de rendre le système plus robuste contre d'éventuels défauts de fabrication.

Étape 8 : Pour construire le filtre passe-haut à partir du filtre passe-bas prototype, il suffit d'appliquer la transformation suivante : $S \rightarrow \frac{2\pi f_2}{p} = \frac{\omega_2}{p}$.

$$H_{Passehaut}(p) = \frac{p^2}{p^2 + \sqrt{2\epsilon}\omega_2 p + \epsilon\omega_2^2}$$

Pour confirmer que leur filtre passe-haut obtenu respecte le cahier des charges, on trace sa fonction de transfert (Voir Figure 7.10). Comme on peut le constater, les atténuations obtenues pour $f_1 = 20$ kHz sont égales à celles obtenues pour $\Omega = 1$ dans le cas du filtre passe-bas prototype. La même constatation peut être faite pour $f_2 = 50$ kHz avec $\Omega = \Omega_s = 2.5$ montrant ainsi que les 2 filtres sont équivalents.

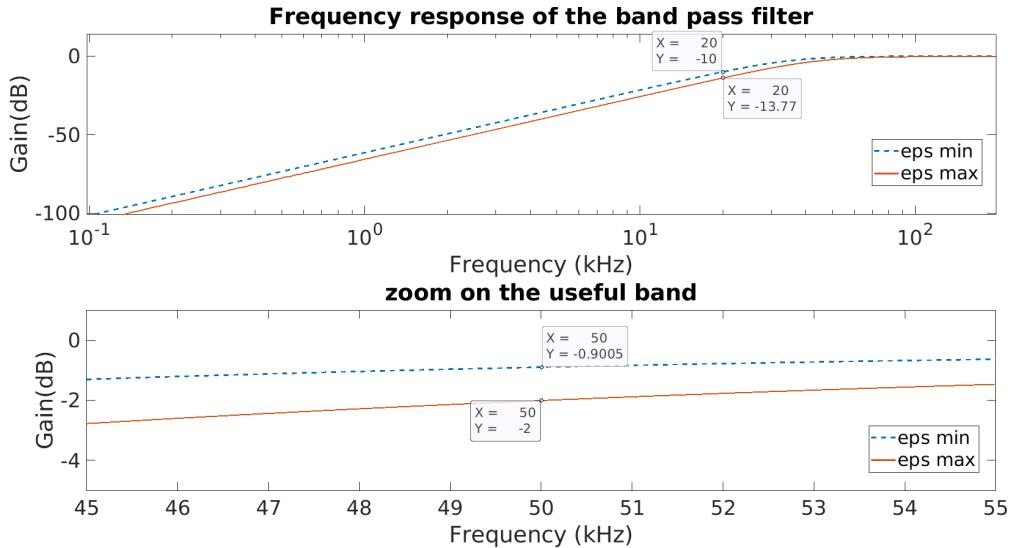


FIGURE 7.10 – Réponse fréquentielle du filtre passe-haut

7.3.6 Filtre à temps discret

Les filtres à temps discret sont décrits par leur fonction de transfert en z (figure 7.11).

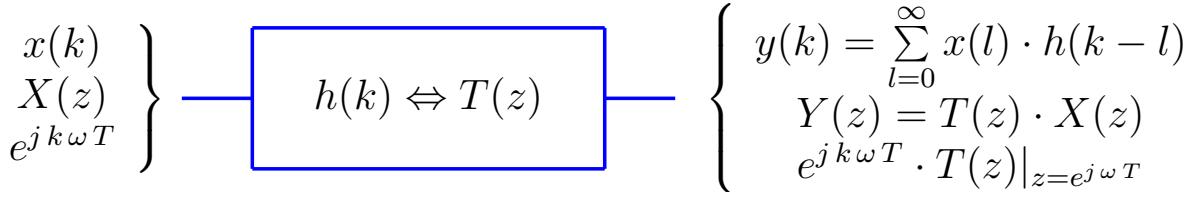


FIGURE 7.11 – Fonction de transfert en z

La méthode du prototype précédemment décrite peut être appliquée en utilisant une transformation univoque du plan p vers le plan z. La transformation bilinéaire suivante est généralement utilisée²

$$p = f(z) = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad p = j\omega_a \rightarrow z = \frac{1 + j \frac{\omega_a T}{2}}{1 - j \frac{\omega_a T}{2}} = e^{j 2\pi f T}$$

La transformation de l'axe des fréquences entre le prototype analogique f_a et le filtre temps-discret f_d est alors donnée par (figure 7.12) :

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan(\pi f_d T)$$

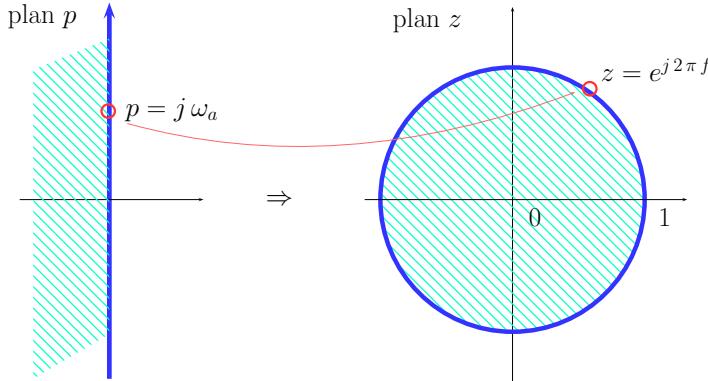


FIGURE 7.12 – transformation bilinéaire

7.4 Types de filtres

Le choix d'une technologie particulière pour réaliser un filtre est guidé par un certain nombre de critères :

- Performances peu sensibles aux variations des composants, de la température,...
- Distorsion réduite, faible bruit
- Faible surface, consommation, coût
- Sélectivité élevée
- Facilité de calibrage si celui-ci est nécessaire
- ...

La figure 7.13 donne une classification des technologies usuelles de filtrage.

2. mais il en existe d'autres comme la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle

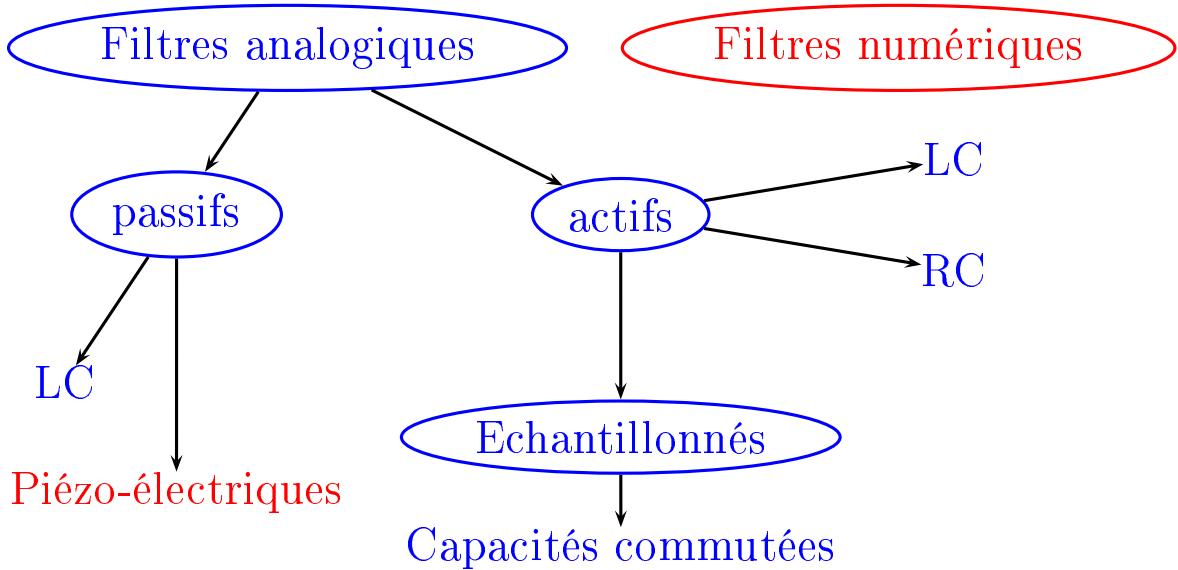


FIGURE 7.13 – Différents types de filtres

7.4.1 Filtre passif LC

Les filtres LC avec terminaisons résistives sont utilisés depuis plus d'un demi siècle. Ces filtres peuvent être décrits en terme de puissance incidente P_i , utile P_u et réfléchie P_r (figure 7.14).

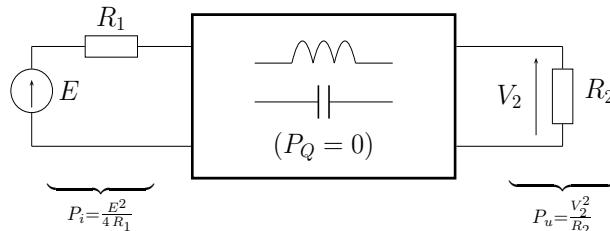


FIGURE 7.14 – Filtre LC avec terminaisons résistives

On a les relations suivantes :

$$P_r = P_i - P_u \quad , \quad |t|^2 = \frac{P_u}{P_i} \leq 1 \quad , \quad |r|^2 = \frac{P_r}{P_i} \quad , \quad |K|^2 = \frac{P_r}{P_u}$$

$$|t|^2 = \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = \frac{P_u}{P_u + P_r} = \frac{1}{1 + |K|^2}$$

On notera la similitude entre la fonction K et la fonction caractéristique de la section 7.3. Le quadripôle LC est idéalement sans pertes et sans bruit.

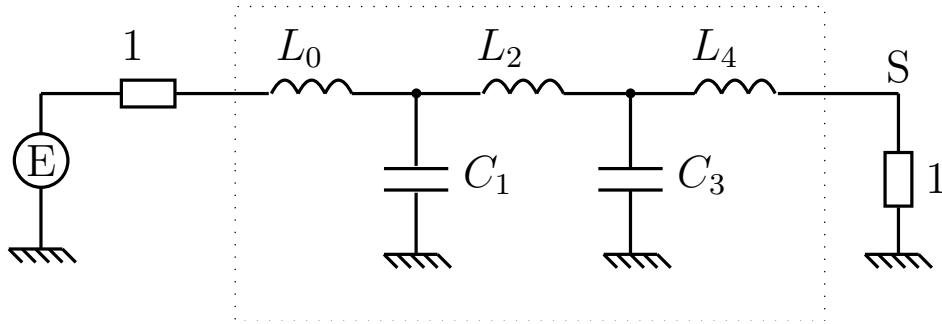
La figure 7.15 montre un exemple d'un filtre prototype polynômial du 5^{ème} ordre.

La valeur des éléments est fonction du type d'approximation. On a par exemple dans le cas d'une approximation de Butterworth avec $A_{max} = 3 \text{ dB}$ ($\epsilon = 1$) les valeurs du tableau 7.3.

Pour calculer les valeurs effectives des composants on utilise les formules de dénormalisation suivantes :

$$c_k = \frac{C_k}{\omega_p R} \quad , \quad l_k = \frac{L_k R}{\omega_p}$$

où R est la résistance de terminaison et ω_p est la pulsation limite de bande passante.

FIGURE 7.15 – Prototype passe-bas LC du 5^{ème} ordre

k impair	k pair
$C_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$	$L_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$

TABLE 7.3 – Valeur des éléments L et C (Butterworth, $A_{max} = 3$ dB)

Ces filtres sont particulièrement intéressants en haute fréquence (quelques centaines de mégahertz) où les inductances ont un encombrement et un coût raisonnables. Les performances des inductances intégrées sur silicium sont cependant limitées comme le montre la figure 7.16 qui donne un exemple de réalisation d'une inductance plane.

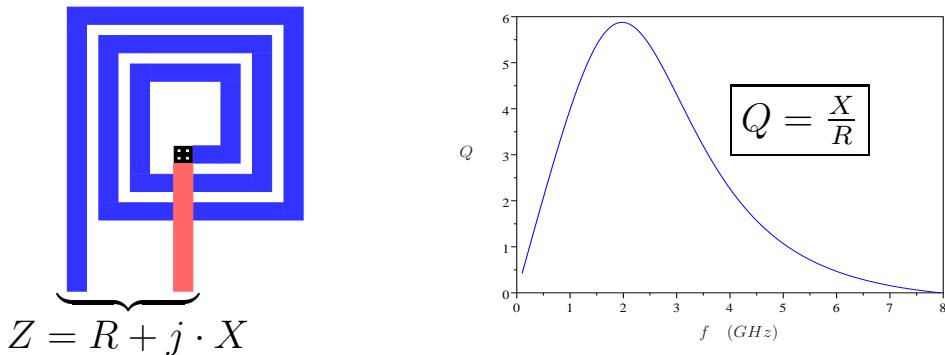


FIGURE 7.16 – Réalisation d'une inductance plane intégrée et coefficient de qualité

Le coefficient de qualité d'une inductance est défini comme $Q = \frac{X}{R}$ où R et X sont les parties réelle et imaginaire de l'impédance complexe du circuit réel. Les courants induits dans le substrat ainsi que les résistances du métal limitent la valeur de ce coefficient de qualité et la possibilité de réaliser une sélectivité importante du filtre (Ω_s voisin de 1).

7.4.2 Filtre actif RC

Nous donnons, à titre d'exemple, la cellule du second ordre de Sallen-Key (figure 7.17) :

$$T(p) = \frac{\omega_o^2}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2} \quad , \quad \omega_o = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad , \quad Q_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

L'avantage d'une telle structure est de ne nécessiter qu'un seul amplificateur (contrairement aux cellules basées sur des intégrateurs telles que celle examinée à la section suivante où le nombre d'amplificateurs est au moins égal à celui du filtre). La sortie basse impédance permet de réaliser un filtre d'ordre élevé en utilisant plusieurs cellules de ce type en cascade (cf section 7.4.4).

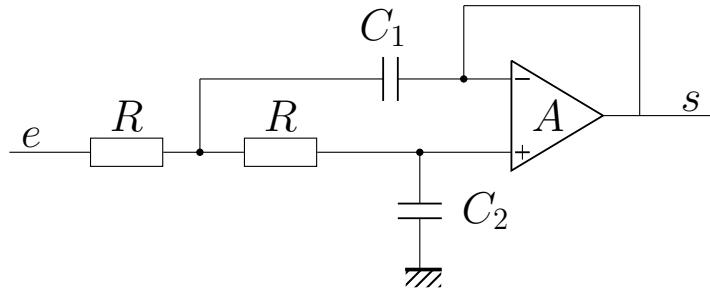


FIGURE 7.17 – Cellule du second ordre de Sallen-Key

Les performances du filtre dépendent bien sur des performances de l'amplificateur. La figure 7.18 montre un exemple de résultat obtenu pour un filtre de Butterworth ayant une fréquence de coupure de 10 kHz. On constate une très forte dégradation à partir de 1 MHz (Amplificateur LT1007³).

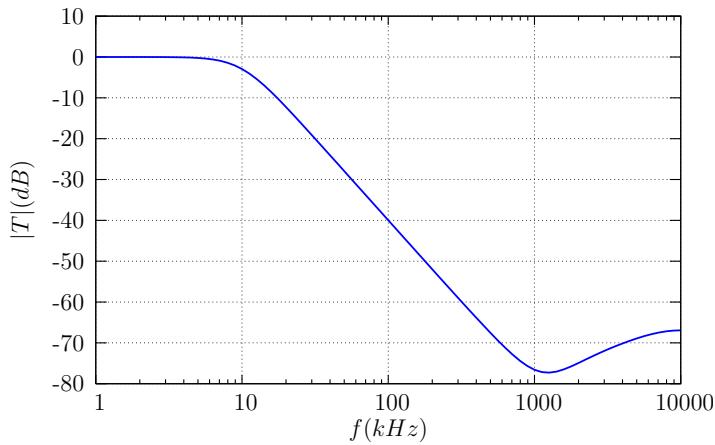


FIGURE 7.18 – Influence de l'amplificateur sur la fonction de transfert

7.4.3 Filtres à capacités commutées

Les circuits à capacités commutées présentent l'avantage de pouvoir réaliser économiquement des circuits échantillonnés utilisés en filtrage et en conversion. Nous donnons, à titre d'exemple, une cellule de filtrage passe-bas du circuit programmable utilisé en travaux pratiques (figure 7.19). La fonction de transfert $T(z) = V_{out}(z)/V_{in}(z)$ est donnée par :

$$T(z) = -\frac{C_1 C_3}{C_A C_B} \cdot \frac{z}{\left(\frac{C_4}{C_B} + 1\right) z^2 + \left(\frac{C_2 C_3}{C_A C_B} - \frac{C_4}{C_B} - 2\right) z + 1}$$

Lorsque la fréquence d'échantillonnage $F_s = 1/T_s$ est très supérieure à la fréquence du signal, La fonction de transfert $T_i(z)$ d'un intégrateur temps discret peut être assimilée à celle d'un intégrateur temps continu :

$$T_i(f) = \frac{1}{z - 1} \Big|_{z=e^{j2\pi f T_s}} \quad \text{pour } f T_s \ll 1 \text{ on a } T_i(f) \approx \frac{1}{j2\pi f T_s}$$

Dans ce cas, la fonction de transfert précédente peut être approchée par :

$$T(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} \approx -G \frac{\omega_o^2}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2}$$

3. <http://www.linear.com>

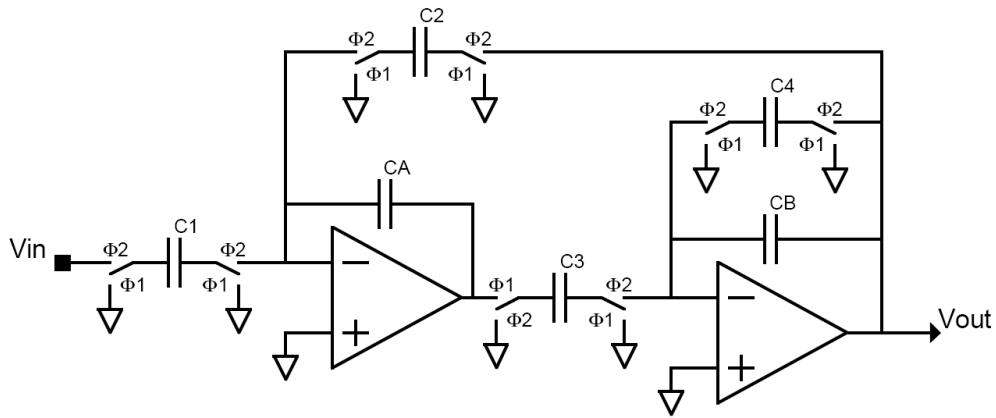


FIGURE 7.19 – Cellule passe-bas du circuit Anadigm AN10E40 (IP : F01 low Q)

avec :

$$\omega_o \cdot T_s = \sqrt{\frac{C_2 C_3}{C_A C_B}} \quad , \quad G = \frac{C_1}{C_2} \quad , \quad Q_o = \frac{C_B}{C_4} \sqrt{\frac{C_2 C_3}{C_A C_B}}$$

7.4.4 Structure cascade

Cette section s'applique aux filtres actifs de manière générale. La structure cascade d'un filtre actif est donnée à la figure 7.20.

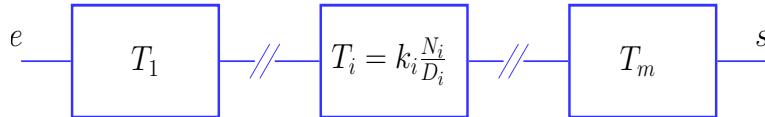


FIGURE 7.20 – Structure cascade

Ces caractéristiques sont les suivantes :

1. Chaque cellule réalise un filtrage du premier ou du second ordre
2. L'interaction entre les cellules est supposée négligeable
3. La réalisation du filtre complet fait intervenir $m - 1$ fonctions intermédiaires, ce qui nécessite les choix suivants :
 - ordonnancement des dénominateurs D_i
 - ordonnancement des numérateurs N_i
 - répartition des gains k_i

Ce sont en général les performances en bruit et en linéarité qui guideront ces différents choix, car dans le cas idéal, et si la condition 2 est vérifiée, toutes ces solutions sont équivalentes avec $\prod_i k_i = K$ où K est le gain global du filtre.

7.5 Exercices

7.5.1 Temps de propagation de groupe

On désire filtrer un signal $x(t)$ à bande étroite à l'aide d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_o . Au voisinage de cette pulsation, le module du filtre peut être considéré comme constant et de valeur T_o . La phase est approchée par un développement limité au premier ordre :

$$\phi(\omega) = \phi_o + (\omega - \omega_o) \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right|_{\omega_o}$$

Question 7.5.1. Déterminer la forme du signal de sortie $s(t)$ lorsque $x(t)$ est un signal modulé en amplitude centré en ω_o :

$$x(t) = a(t) \cdot e^{j\omega_o t}$$

Quel retard subit l'enveloppe $a(t)$?

7.5.2 Filtre pour récepteur ZigBee

Dans les prochaines années, des compteurs intelligents viendront remplacer les compteurs classiques d'électricité. Cette nouvelle génération de compteurs permettra de mesurer d'une manière détaillée et en temps réel la consommation d'électricité et transmettre ces données à un gestionnaire d'énergie qui adaptera le fonctionnement de certains appareils (Chauffe-eau, radiateur, ...) en fonction des contraintes imposées par l'utilisateur ou le fournisseur d'énergie. La figure 7.21 montre un scénario d'utilisation proposé par la société Linky.

Un standard très utilisé pour ce type d'application est le standard ZigBee. C'est un protocole permettant des communications faibles débits avec une faible consommation énergétique et est, par conséquent, largement utilisé pour des applications IoT (Internet of Things). Il existe trois bandes principales pour les communications ZigBee centrées à 868 MHz, 915 MHz et 2.4 GHz. Les canaux de transmission ont une bande passante de 2 MHz et sont espacés de 5 MHz. Dans le cadre de cet exercice, nous nous intéressons à la conception du filtre de sélection pour un récepteur de ce standard de communication.

Nous décidons d'implémenter ce récepteur à l'aide d'une architecture à faible fréquence intermédiaire. Ce type de récepteur est robuste face aux perturbations faible fréquence qui sont susceptibles de dégrader significativement l'intégrité du signal, spécialement pour les applications à faible bande passante. La figure 7.22 montre un diagramme du spectre à l'entrée du filtre après les phases d'amplification et de mélange. Le signal utile est centré autour d'une fréquence intermédiaire de 10 MHz⁴ et est entouré par d'autres canaux ZigBee qu'on souhaite filtrer avant de passer dans le domaine numérique.

Dans le cadre de cet exercice, nous limiterons notre étude aux deux canaux adjacents (canal 1 et canal 2 dans la figure 7.22). Ces canaux nécessitent une atténuation supérieure à 20 dB sur toute leur bande de fréquence. Nous souhaitons également avoir une ondulation inférieure à 0.5 dB à l'intérieur de la bande passante (9 MHz à 11 MHz). Pour la mise en oeuvre du filtre, nous utiliserons un filtre de Butterworth à symétrie géométrique.

4. Sachez qu'en pratique cette fréquence est plus faible (typiquement 3 à 4 MHz), nous avons modifié cette valeur pour simplifier l'exercice.

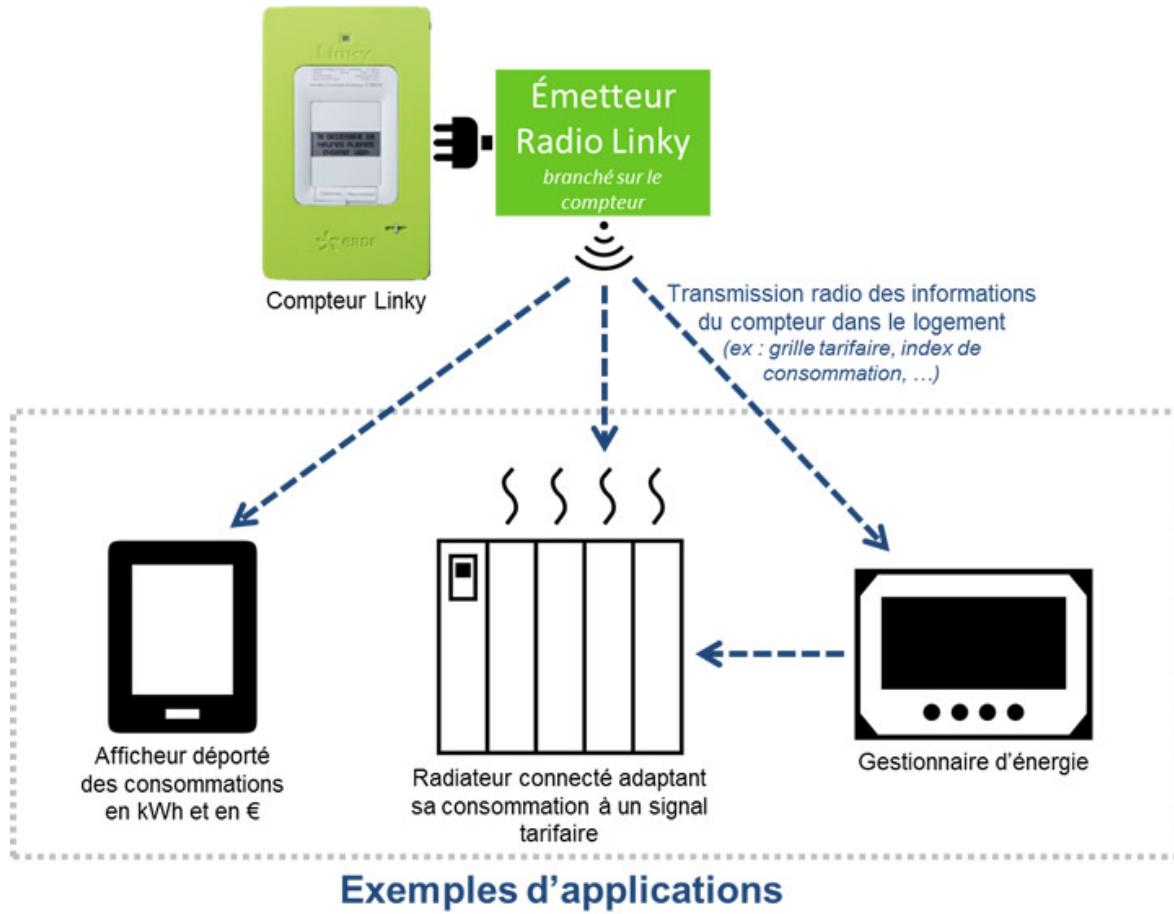


FIGURE 7.21 – Exemple de compteur intelligent

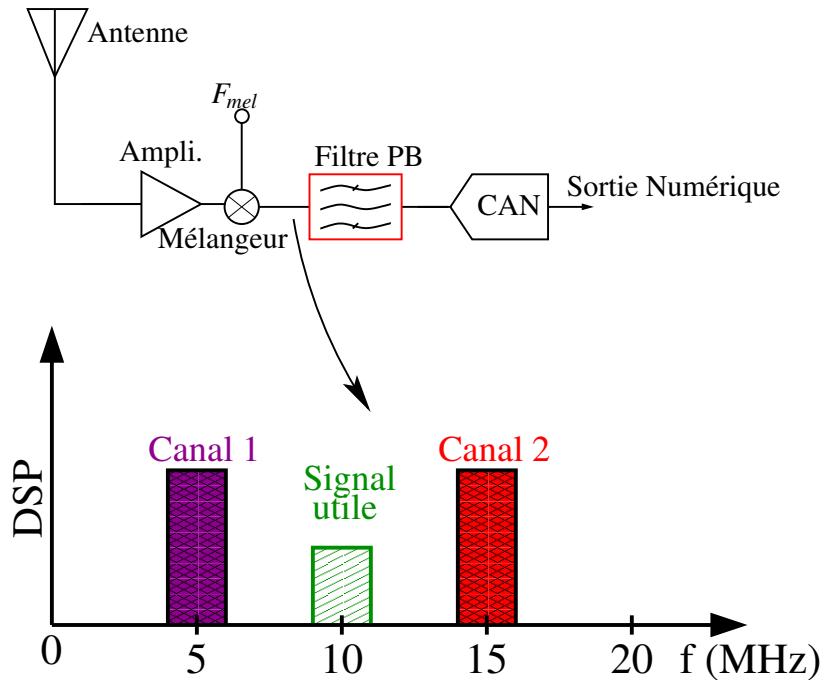


FIGURE 7.22 – Schéma du Haut) Chaîne de réception simplifiée — Schéma du Bas) Spectre du signal à l'entrée du filtre

Question 7.5.2. Parmi les canaux 1 et 2, quel serait le plus contraignant à filtrer ?

Question 7.5.3. En vous basant sur la réponse de la question précédente, déterminer le gabarit du filtre passe-bande à symétrie géométrique permettant de sélectionner le canal utile.

Question 7.5.4. Déterminer le paramètre de sélectivité Ω_s et le gabarit prototype passe-bas.

Question 7.5.5. Calculer l'ordre du filtre prototype pour une approximation polynomiale de type Butterworth.

Nous disposons de cellules Butterworth de second ordre passe bas, passe bande et passe haut.

Question 7.5.6. Proposer une implémentation pour le filtre.

Bibliographie

- [1] H. Baher. *Synthesis of Electrical Networks*. Wiley, 1984.
- [2] H.J. Belinchikoff and A.I. Zverev. *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Krieger, 1986.
- [3] A. Mohan. *VLSI Analog Filters*. Springer, 2013.
- [4] M.H. Nichols and L.L. Rauch. *Radio Telemetry*. J. Wiley, 1956. <https://books.google.fr/books?id=vhkZAAAAIAAJ>.
- [5] R. Schaumann, M.S. Ghausi, and K.R. Laker. *Design of Analog Filters*. Prentice-Hall, 1990.
- [6] LA Times. Lawrence Lee Rauch's life story. Online, 2008.
- [7] J.C. Whitaker. *The Electronics Handbook*. Electrical Engineering Handbook. Taylor & Francis, 1996. <https://books.google.fr/books?id=08wHm9EqX20C>.

Chapitre 8

TP : Filtrage analogique

8.1 Introduction

L'objectif de ce TP est d'implémenter un effet "WahWah" sur le son de la guitare.¹ Ceci nécessite de concevoir un filtre passe bande avec une fréquence centrale reconfigurable. Dans le cadre de ce TP, nous concevrons un filtre avec une fréquence centrale allant de 800 Hz à 2400 Hz. L'implémentation se fera avec des composants sur étagère (résistances, condensateurs, amplificateurs ...).

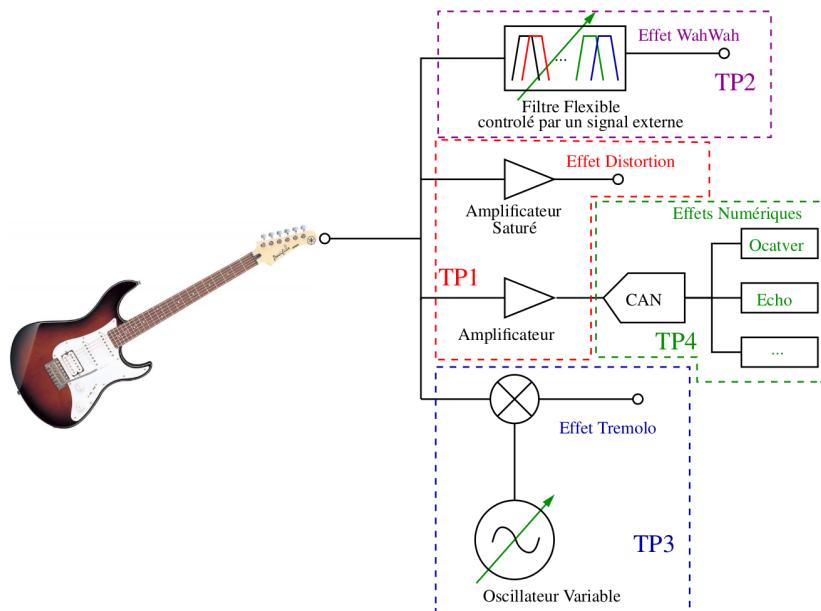


FIGURE 8.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

1. Le WahWah est un effet modifiant la qualité voyelle d'une note. Autrement dit, il transforme un son « o » en « a » et inversement, produisant cet effet quasiment vocal. Pour mieux comprendre, vous pouvez regarder les vidéos suivantes qui montrent plusieurs solos à base d'effet Wahwah <https://www.youtube.com/watch?v=R87mpsSAHXg> <https://www.youtube.com/watch?v=FQbLKtxfvhA#t=1m30s>

8.2 Filtre à base de cellule de Rauch

Nous proposons d'utiliser la cellule de Rauch² pour mettre en oeuvre le filtre (Figure 8.2).

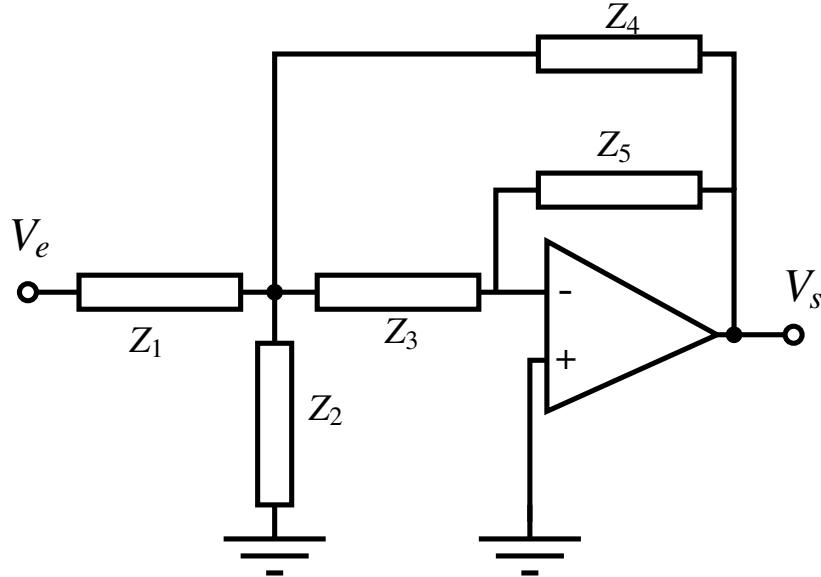


FIGURE 8.2 – Cellule passe-bande du second ordre

La fonction de transfert du filtre est donnée par l'expression suivante :

$$H(p) = \frac{-Y_1(p) \cdot Y_3(p)}{Y_3(p) \cdot Y_4(p) + Y_5(p) \cdot (Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p))}$$

où $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ sont les admittances des impédances Z_i .

Afin de construire un filtre passe bande, nous allons utiliser la configuration suivante pour la cellule de Rauch :

- Z_1 est une résistance $R_1 = 10\text{ k}\Omega$
- Z_2 est une résistance variable R_V
- Z_3 et Z_4 sont des condensateurs de valeur $C = 10\text{ nF}$
- Z_5 est une résistance de valeur $R_2 = 100\text{ k}\Omega$

Question 8.2.1. Déterminer la fonction de transfert du filtre réalisée dans le domaine de Laplace en fonction de R_1 , R_2 , R_V et C .

La fonction de transfert a un zéro à DC ($f = 0\text{ Hz}$) et deux pôles donnés par³ :

$$p_{1,2} = \frac{-R_1 \cdot R_V \pm j\sqrt{R_1 \cdot R_V \cdot (R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_V - R_1 \cdot R_V)}}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_V \cdot C}$$

Question 8.2.2. Quelles sont les conditions nécessaires sur R_1 , R_2 , R_V et C pour garantir la stabilité du filtre.

Afin d'étudier le comportement en fréquence, nous allons exprimer la fonction de transfert $H(j\omega)$ dans le domaine de Fourier. Celle-ci peut être écrite sous la forme suivante :

$$H(j\omega) = \frac{-H_0}{1 + j \cdot Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2. Pour ceux qui se posent la question de la prononciation, cette structure a été introduite par Myron Hiram Nichols et Lawrence Lee Rauch dans leur ouvrage *Radio Telemetry* en 1956. Ainsi, ces messieurs étant d'origine américaine, (tout du moins, M. Rauch) il semble que "Rauch" doivent se prononcer "rock" si l'on s'en réfère aux règles de prononciation anglaise.

3. Pour $R_2 > R_1$

avec

$$H_0 = \frac{R_2}{2 \cdot R_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_V}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_V \cdot C^2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{(R_1 + R_V) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_V}}{2 \cdot R_1 \cdot R_V}$$

Question 8.2.3. En vous appuyant sur les notions du cours, reliez H_0 , Q et ω_0 à des paramètres physiques du filtre.

Question 8.2.4. Ouvrez le script `Rauch_TF.py`, fixer R_V à 1000Ω . Relever les valeurs du gain, de la fréquence centrale et de la bande passante à 3dB . Comparer les aux valeurs théoriques

Question 8.2.5. Déterminer la plage de valeur de R_V qui permet d'obtenir une fréquence centrale variant de 800Hz à 2400Hz . Vérifier votre résultat en simulant la fonction de transfert pour les fréquences minimale et maximale avec le script `Rauch_TF.py`.

Question 8.2.6. Sachant que l'implémentation d'une résistance variable contrôlée est plus simple que celle d'un condensateur variable, expliquer pourquoi le choix de Z_2 comme levier de reconfiguration se justifie-t-il ?

8.3 Implémentation du Filtre

Nous allons à présent implémenter le filtre sur la maquette. Nous utiliserons l'amplificateur opérationnel MC1458P de Texas Instruments que nous alimenterons avec les tensions d'alimentation positive VDD de 5V et négative VSS de -5V ⁴. Le circuit a été installé sur le support du bas de la maquette à droite. Voici le descriptif de ses connecteurs :

- L'alimentation positive VDD est connectée à la broche 14
- L'alimentation négative VCC est connectée à la broche 10
- L'entrée V^- de l'amplificateur est connectée à la broche 8
- L'entrée V^+ de l'amplificateur est connectée à la broche 9
- La sortie de l'amplificateur est connectée à la broche 7

Nous allons fixer dans un premier lieu R_V à 6600Ω . Utiliser l'ohmmètre pour la régler.

Question 8.3.1. Mesurer le gain, la fréquence centrale et la bande passante en balayant une sinusoïde d'amplitude 0.4Vpp avec un offset nul. Comparer les valeurs obtenues aux valeurs théoriques.

Question 8.3.2. Refaire la question précédente pour un R_V de 460Ω . Conclure.

Le retard de groupe ou temps de propagation d'un filtre passe bande autour de la pulsation centrale ω_0 est donné par :

$$t_g = - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2 \cdot Q}{\omega_0}$$

Question 8.3.3. En vous appuyant sur l'expression ci-dessus, calculer la valeur théorique du retard de groupe.

4. Pour cette manipulation, utiliser les sorties $\pm 20\text{V}$ de l'alimentation, en connectant la sortie 20V au VDD de la maquette, la sortie -20V au VSS de la maquette et la masse (port COM) du générateur à la masse de la maquette

Pour mesurer le retard de groupe en pratique, nous décidons d'appliquer une modulation d'amplitude en entrée de notre filtre. En fait, l'utilisation d'une sinusoïde pure de pulsation ω_0 ne nous permet pas de mesurer des retards supérieurs à la période du signal.

Question 8.3.4. Mesurer le retard de groupe que subit l'enveloppe pour le signal d'entrée suivant :

$$V_e(t) = A \cdot (1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

avec une fréquence de modulation $f_m = 200 \text{ Hz}$, une fréquence porteuse $f_0 = 2400 \text{ Hz}$, un indice de modulation $m = 1$ (100%) et une amplitude A de 0.4 Vpp. Comparer la mesure pratique à la valeur théorique.

8.4 Implémentation de la résistance variable et effet Wahwah

Comme indiqué dans l'introduction, l'effet WahWah nécessite une reconfiguration de la fréquence centrale actionnée par un signal de contrôle. Ce signal est en pratique généré par une pédale, une manette ou un accéléromètre. Cependant dans ce TP, pour des limitations de temps, nous utiliserons le générateur d'alimentation⁵. Un des meilleurs moyens pour l'implémentation d'une résistance variable contrôlée est le transistor MOS dont la résistance drain-source peut être reconfigurée en modifiant la tension de grille. La puce contenant le transistor NMOS est installée sur le support du haut de la maquette. Le drain du transistor est connecté à la broche 14, la source à la broche 7 et la grille à la broche 6. Remplacer le potentiomètre R_V par le transistor dans le filtre. Pour cela, il suffit de débrancher la résistance R_{car} et de connecter le drain du transistor au bon noeud du circuit, la source étant déjà connectée à la masse. Connecter la grille du transistor (broche 6) à la sortie 6 V de l'alimentation.

Question 8.4.1. Appliquer une sinusoïde de fréquence 1.6 kHz et d'amplitude 400 mVpp. Connecter le signal de sortie à la fois aux écouteurs et à l'oscilloscope. Faites varier la tension de grille du transistor de 1 à 3 V. Décrivez brièvement les phénomènes observés et perçus.

Pour bien percevoir l'effet Wahwah, il faut appliquer un signal riche fréquentiellement. Vous pouvez générer un tel signal en utilisant la guitare⁶.

Question 8.4.2. Faites varier plus ou moins rapidement (environ 1 cycle par seconde) la tension de grille entre 1 et 3 V, décrivez brièvement l'effet perçu.

5. Pour cette manipulation, utiliser la sortie 6 V de l'alimentation

6. Si vous n'êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur.

Chapitre 9

Électronique analogique à temps discret

9.1 Historique

La première publication connue sur les signaux analogiques échantillonnés se trouve dans "Treatise on Electricity and magnetism" de James Clerk MAXWELL en 1873. La théorie sur les signaux analogiques échantillonnés a ensuite été développée dans les années 1950 [6].

A partir de 1970, plusieurs schémas utilisant des commutateurs et des capacités pour simuler des filtres sont proposés ([3], [4]). Notamment, FRIED montre que, sous certaines conditions, il y a équivalence entre une capacité commutée et une résistance (FIGURE 9.1a). Le schéma de la FIGURE 9.1b est aussi décrit.

La technologie bipolaire, seule disponible à l'époque, n'a pas permis de gros développement. A la fin des années 1970 et durant les années 80, de nombreuses recherches aboutissent, notamment, à la réalisation de filtres analogiques échantillonnés grâce à l'évolution de la technologie MOS. Ces applications ont été rapidement suivies par un développement plus général de circuits de traitement de signal analogique.

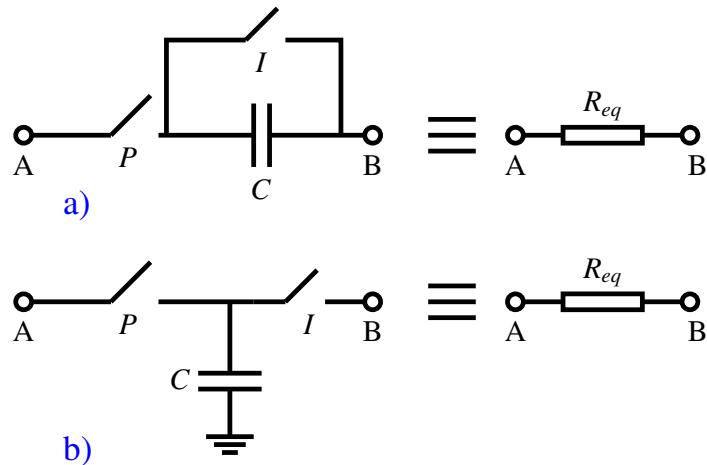


FIGURE 9.1 – (a) Equivalence de Fried ; (b) Capacité commutée série

La *technique des capacités commutées* est aujourd’hui très largement utilisée pour l’intégration des fonctions analogiques en temps discret. cette technique a permis un gain très important en densité d’intégration et en exactitude des caractéristiques des fonctions réalisées. Cette technique couvre tous les domaines d’applications dès lors que la fréquence du signal est compatible avec les possibilités d’échantillonnage de la technologie d’intégration.

9.2 Analogie entre capacité commutée et résistance

Considérons le circuit de la FIGURE 9.1a, où V_A et V_B sont les tensions supposées constantes aux noeuds A et B. Nous analysons le comportement de ce circuit en étudiant le transfert de charge.

Nous formulons les hypothèses suivantes :

- Les commutateurs sont considérés comme parfaits : pas de capacité parasite, la résistance est nulle lorsque le commutateur est fermé et infinie lorsqu'il est ouvert.
- Les condensateurs sont considérés comme parfaits : pas de capacité parasite, pas de courant de fuite.

Les signaux d'horloges paire (P) et impaire (I), commandant respectivement les commutateurs pair (P) et impair (I), ont une période T_e et sont décalés de $T_e/2$. Pendant chaque période d'horloge, la capacité C est chargée et puis déchargée. Par conséquent, la différence de charge pendant une période d'horloge, ΔQ , transférée du noeud A au noeud B, est donnée par

$$\Delta Q = C(V_A - V_B). \quad (1)$$

Puisque le transfert de charge est répété à chaque période d'horloge, le courant moyen dû à ce transfert de charge est donné par :

$$I_{moy} = \frac{C(V_A - V_B)}{T_e}. \quad (2)$$

Le courant traversant la résistance équivalente R_{eq} est donné par :

$$I_{eq} = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}. \quad (3)$$

Nous constatons que le courant traversant le circuit à capacités commutées est égal à celui du circuit de la résistance équivalente à condition que :

$$R_{eq} = \frac{T_e}{C} = \frac{1}{Cf_e}. \quad (4)$$

L'équivalence entre R et $\frac{1}{Cf_e}$ est démontrée plus en détail dans l'étude du passe-bas du premier ordre.

9.3 Etude du passe-bas du premier ordre

Le schéma de la FIGURE 9.2 montre un circuit passif (c'est-à-dire sans composant de type transistor) de filtrage passe-bas du premier ordre, composé d'une résistance et d'une capacité (voir le Chapitre 7 sur le filtrage).

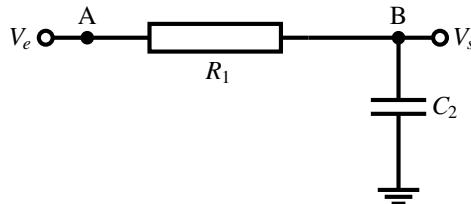


FIGURE 9.2 – Circuit passif de filtrage passe-bas du premier ordre

La réponse en fréquence d'un tel circuit est donné par l'équation :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (5)$$

ou encore :

$$T(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RC_f} \quad (6)$$

Le schéma de la FIGURE 9.3 montre un circuit de filtrage passe-bas du premier ordre à capacités commutées. Les commutateurs et les condensateurs sont considérés comme parfaits. Les signaux d'horloges paire (P) et impaire (I), commandant respectivement les commutateurs pair (P) et impair (I), ont une période T_e et sont décalés de $T_e/2$.

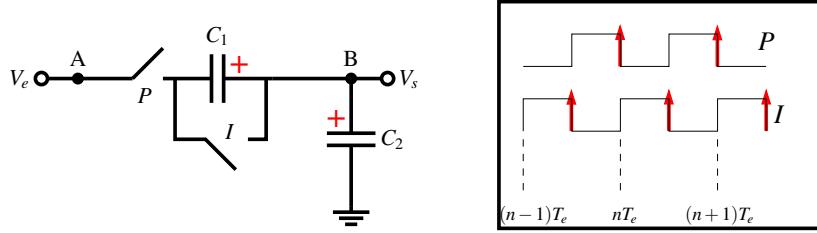


FIGURE 9.3 – Passe-bas du premier ordre et signaux de commande

Nous allons montrer que, en imposant une condition supplémentaire, ce circuit à capacités commutées est équivalent au circuit passif du premier ordre décrit précédemment.

Les conditions initialement imposées font qu'à chaque phase (paire ou impaire) correspond un transfert de charge instantané. Un bilan des charges des capacités (prises sur le noeud B) à ces instants particuliers donne :

$$\begin{array}{ll} \text{Instants pairs : } t = n \cdot T_e & \text{Instants impairs : } t = (n - 1/2) \cdot T_e \\ Q_{C_1}^P(nT_e) = C_1 \cdot (V_s^P(nT_e) - V_e^P(nT_e)) & Q_{C_1}^I((n - 1/2)T_e) = 0 \\ Q_{C_2}^P(nT_e) = C_2 \cdot V_s^P(nT_e) & Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e) = C_2 \cdot V_s^I((n - 1/2)T_e) \end{array} \quad (7)$$

Nous pouvons vérifier qu'il n'y a pas de mouvement de charges dans le circuit entre les instants de commutation (interphase), tous les commutateurs étant ouverts. Autrement dit, toute charge contenue à l'intérieur d'une sous-partie isolée du circuit a nécessairement été acquise à la phase précédente.

En phase paire, le noeud B est isolé, c'est-à-dire qu'aucun transfert de charge n'est possible avec une source de courant ou de tension. L'application du principe de conservation de la charge aux instants pairs pour les deux capacités en série permet d'écrire :

$$Q_{C_1}^P(nT_e) + Q_{C_2}^P(nT_e) = Q_{C_1}^I((n - 1/2)T_e) + Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e). \quad (8)$$

La capacité C_2 est isolée aux instants impairs, d'où :

$$Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e) = Q_{C_2}^P((n - 1)T_e). \quad (9)$$

En combinant les deux équation précédentes, nous obtenons l'équation aux différences finies :

$$(C_1 + C_2) \cdot V_s^P(n) - C_2 \cdot V_s^P(n-1) = C_1 \cdot V_e^P(n). \quad (10)$$

Notation : $V_s^P(n)$ est la tension de sortie à l'instant pair $(n \cdot T_e)$.

Les équations ci-dessus font référence aux tensions V_e et V_s à des instants discrets multiples de $T_e/2$. L'application de la transformation en z sur ces équations donne les fonctions de transfert en z :

$$\begin{aligned} T_{11}(z) &= \frac{V_s^P(z)}{V_e^P(z)} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})}, & T_{21}(z) &= \frac{V_s^I(z)}{V_e^P(z)} = \frac{z^{-1/2}}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})}, \\ T_{12}(z) &= \frac{V_s^P(z)}{V_e^I(z)} = 0, & T_{22}(z) &= \frac{V_s^I(z)}{V_e^I(z)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Il existe donc plusieurs fonctions de transferts, selon les instants considérés pour le signal d'entrée et le signal de sortie.

La réponse en fréquence du circuit est donnée pour $z = e^{j\omega T_e}$, la sortie étant bloquée durant T_e . On en déduit :

$$\frac{S(\omega)}{E(\omega)} = e^{-j\frac{\pi f}{f_e}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f}{f_e}\right) \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - e^{-j\omega T_e})}. \quad (12)$$

Il vient :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{j\omega}{f_e}}. \quad (13)$$

avec la condition $\frac{f}{f_e} \ll 1$.

En comparant cette fonction de transfert et celle obtenue dans le cas d'un circuit passif $R.C$, nous constatons bien l'équivalence entre : R_1 et $\frac{1}{C_1 f_e}$, dès lors que $\frac{f}{f_e} \ll 1$.

9.4 Intérêts et contraintes liés à la technologie MOS ou CMOS

9.4.1 Intérêts

Exactitude des rapports capacitifs

La technologie MOS permet de réaliser des capacités de bonne qualité. Elles sont peu exactes en valeurs absolues (par exemple dans une technologie 65 nm, elles sont environ de 20%). Par contre, le rapport de capacités peut être obtenu avec une exactitude de 0,1 à 1%, d'où une bonne précision sur les fonctions de transfert (constantes de temps, gains, etc.), sans calibrage, dans la mesure où les coefficients sont définis par des rapports de capacités. La valeur absolue des capacités n'intervenant pas directement dans la fonction de transfert (cette valeur influe sur l'exactitude des valeurs des coefficients en pratique), celles-ci peuvent être choisies très petites. Des capacités de quelques centaines de femtoFarad sont couramment utilisées.

Emulation de comportements résistifs

Comme nous l'avons vu, une capacité commutée peut émuler un comportement résistif dès lors que la fréquence d'échantillonnage est très supérieure à la fréquence maximale du signal et que les commutateurs et la capacités sont idéaux.

Possibilités de configuration

La valeur de la résistance émulée dans les circuits à capacité commutées dépend de la fréquence d'échantillonnage. Cette propriété permet d'opérer des reconfigurations rapides sur ce type de systèmes. Ceci est important pour de nombreuses applications où la reconfiguration de l'interface d'acquisition est nécessaire (communications mobiles multistandards, calibrage d'interfaces pour l'instrumentation).

Avancée technologique

La technique des capacités commutées profite des avancées de la technologie CMOS. En fait, la diminution des tailles des transistors entraîne une diminution de la taille des capacités parasites des commutateurs. Ceci permet d'améliorer les performances et de réduire la consommation de puissance nécessaire pour piloter ces commutateurs.

9.4.2 Contraintes

Les différentes imperfections liées aux éléments constituant les circuits à capacités commutées imposent des limites sur les performances obtenues.

Les commutateurs

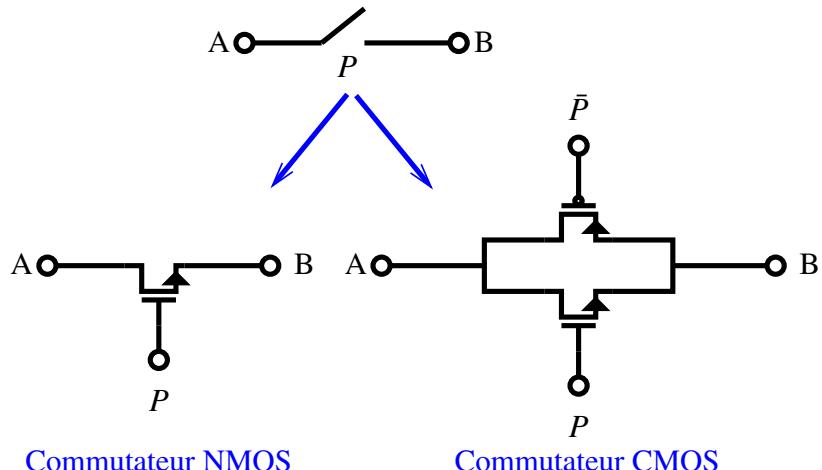


FIGURE 9.4 – Symboles et réalisations des commutateurs

Le comportement idéal du commutateur pourrait se résumer à une impédance infinie quand il est ouvert ou Off et une impédance nulle quand il est fermé ou On. Cependant en pratique, en position ouverte, l'impédance des commutateurs n'est pas infinie notamment à cause des capacités parasites des transistors MOS. Ces capacités engendrent des courants de fuite surtout en haute fréquence. Ces courants modifient la charge stockée sur la capacité et peuvent ainsi dégrader les performances notamment sa linéarité.

En position fermée, les commutateurs doivent avoir une impédance nulle. Cependant en pratique, il présentent une résistance R_{on} d'environ 10 à $1\text{k}\Omega$. La valeur de cette résistance est notamment fixée par la taille des transistors MOS formant le commutateur. En fait, réduire la résistance du transistor MOS nécessite une augmentation de sa largeur W , ceci se paie par une augmentation de la surface, de la consommation et des capacités parasites.

En pratique, le choix de l'architecture du commutateur et de la taille des transistors le composant est un compromis entre ses performances dans les modes fermé et ouvert, la consommation de puissance nécessaire pour le piloter et la surface ainsi que d'autres aspects qui ne seront pas traités dans ce cours tels que la dépendance entre R_{on} et le signal d'entrée et l'injection de charges lors de l'ouverture et de la fermeture.

Les amplificateurs opérationnels

Le désavantage principal des circuits à capacités commutées est qu'ils augmentent les contraintes sur les amplificateurs opérationnels comparés aux circuits temps continu. D'une manière qualitative, il est possible de comprendre ce problème en comparant le pourcentage de temps donné à la charge et décharge de la capacité utile dans les deux types de circuits. En effet, dans les circuits temps continu, la charge de la capacité se fait d'une manière continue. Cependant dans un circuit à capacités commutées, ce pourcentage est souvent de l'ordre de 50%. Ceci augmente les contraintes sur les amplificateurs opérationnels en terme de produit gain bande et en terme de Slew Rate et se traduit ainsi par une augmentation de la consommation de puissance.

9.5 Applications

Le filtrage analogique et la conversion ont constitué les premières applications des circuits à capacités commutées. Puis d'autres applications ont été développées. La facilité d'implantation en technologie MOS rend cette technique attractive. Le concepteur de systèmes de traitement du signal peut choisir entre l'approche tout analogique, tout numérique ou mixte et ainsi optimiser les performances et la surface pour une application donnée.

Des exemples de circuits à capacités commutées pour le filtrage sont présentées dans le chapitre 7 et pour la conversion analogique-numérique dans le chapitre 11. Les capacités commutées peuvent également servir à bien d'autres fonctions : amplification, redressement d'un signal, détection de crête, etc.

9.6 Exercices

9.6.1 Exercice 1

Nous disposons du circuit de la Fig. 9.5 implanté à l'aide de la technique des capacités commutées. L'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal.

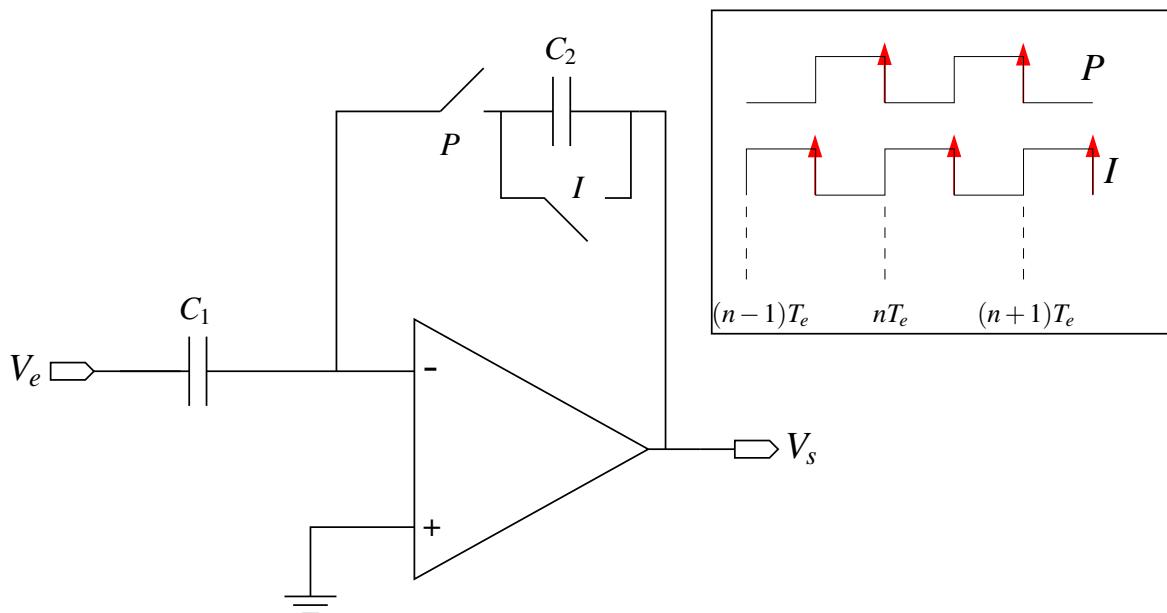


FIGURE 9.5 – Circuit à base de capacités commutées

Question 9.6.1.1. Déterminer la fonction de transfert en z du circuit.

Question 9.6.1.2. Quelle est la fonction réalisée par le montage ?

Question 9.6.1.3. Proposer une implémentation temps continu équivalente à ce montage dans laquelle vous remplacez les commutateurs et capacité(s) par des résistances dont vous déterminerez les expressions.

9.6.2 Exercice 2

Nous disposons du circuit de la Fig. 9.6 implanté à l'aide de la technique des capacités commutées. L'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal. Notez que l'entrée est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_e(nT_e - 0.5T_e) = V_e(nT_e - T_e)$.

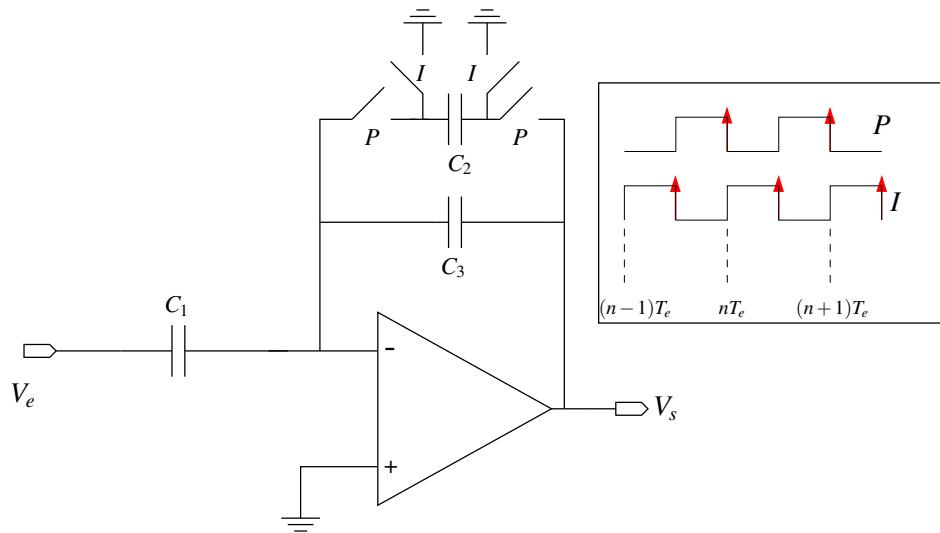


FIGURE 9.6 – Circuit à base de capacités commutées

Question 9.6.2.1. Déterminer la fonction de transfert du circuit $H(\mathcal{Z}) = \frac{V_s(\mathcal{Z})}{V_e(\mathcal{Z})}$.

Question 9.6.2.2. Démontrer que la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel peut s'exprimer sous la forme ci-dessous pour $C_1 = C_3$ et $\omega \ll \frac{1}{T_e}$. Déterminer l'expression de ω_c .

$$H(j\omega) \simeq -\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Question 9.6.2.3. Tracer le diagramme de Bode du module et de la phase de $H(j\omega)$. Quelle est la fonction réalisée par le circuit ?

Bibliographie

- [1] P. Allen and E. Sanchez-Sinencio. Switched capacitor circuits. Technical report, Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- [2] F. Baillieu, Y. Blanchard, P. Loumeau, H. Petit, and J. Porte. Capacités commutées et applications. Dunod, 1996.
- [3] A. Fettweis. Realisation of general network fonctions using the resonant transfert principle. In *Fourth Asilomar Conf. on Circuits and Systems*, pages 663–666, Nov. 1970.
- [4] D. L. Fried. Analog sample data filters. *IEEE J. of Solid State Circuits*, pages 302–304, Août 1972.
- [5] G. Hueber and R. Staszewski. *Multi-Mode / Multi-Band RF Transceivers for Wireless Communications : Advanced Techniques, Architectures, and Trends*. Wiley-IEEE Press, 2010.
- [6] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, 1873.

Chapitre 10

TP : Circuits à capacités commutées

10.1 Introduction

L'objectif de ce TP est de concevoir un oscillateur flexible (2 à 20 Hz) à l'aide de circuits à capacités commutées. Cet oscillateur constituera l'élément de base pour l'implémentation d'un effet Tremolo sur le son de la guitare.¹

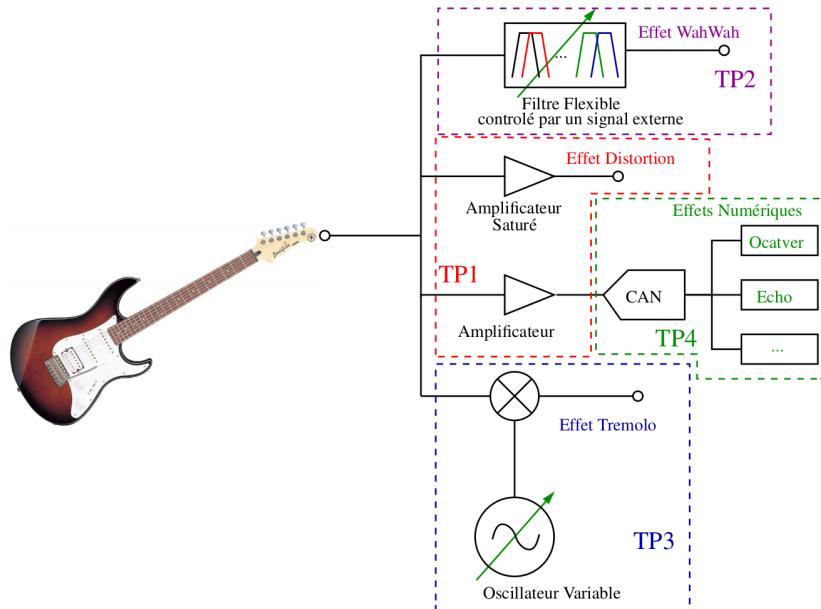


FIGURE 10.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

L'oscillateur sera implémenté en simulation sur le simulateur électrique LTspice. Nous utiliserons également Python pour l'analyse des circuits de base et pour la validation de l'effet. Vous pouvez trouver un court tutoriel sur l'utilisation de LTspice sur le site web de l'UE. Toutes les ressources pour suivre le TP ainsi qu'un canevas pour le compte-rendu sont disponibles dans le répertoire zippé [TP_Capacom.zip](#) que vous pouvez télécharger sur le site web de l'UE <https://c2s.telecom-paristech.fr/ELEC101/documents/TP>.

1. Le Tremolo est un effet musical qui est qualifié parfois par un tremblement de la musique. Cet effet est obtenu par une modulation d'amplitude avec un signal sinusoïdal de très faible fréquence(< 20 Hz) afin que le changement de note du à la modulation soit négligeable. Vous pouvez regarder la vidéo suivante qui compare le son d'une guitare sans et avec l'effet <https://www.youtube.com/watch?v=oOCNB1izw8A>

10.2 Intégrateur Non-inverseur

Pour construire l'oscillateur, nous allons utiliser l'intégrateur suivant (figure 10.2) qu'on échantillonnera à $f_e = 1 \text{ kHz}$.

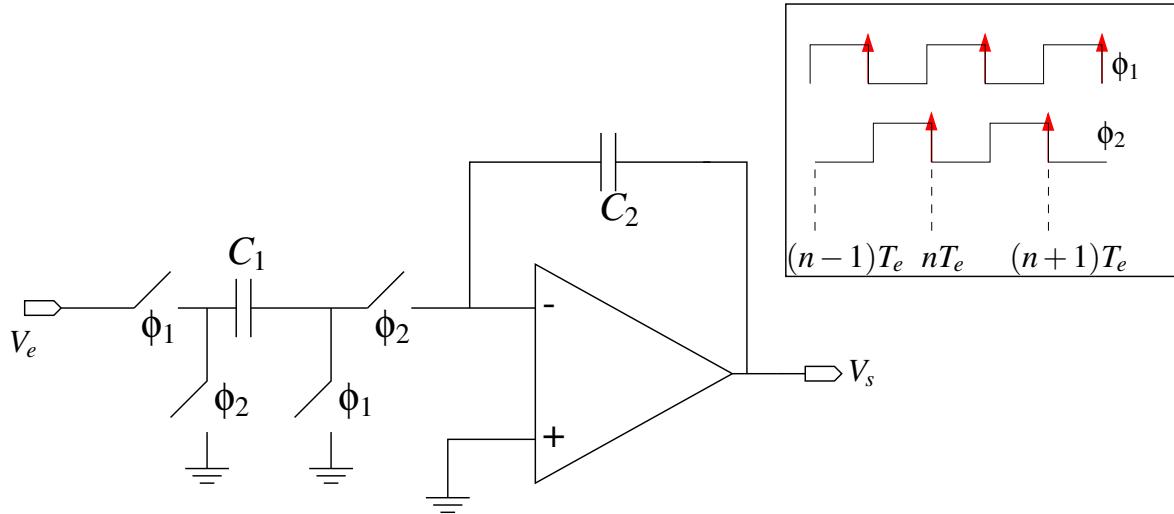


FIGURE 10.2 – Intégrateur en circuit capacités commutées

Question 10.2.1. Montrer que la fonction de transfert aux instants pairs (fin de ϕ_2) est donnée par l'expression ci-dessous. Vous pouvez considérer que l'entrée V_e est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_e(nT_e - 0.5T_e) = V_e(nT_e - T_e)$.

$$T(z) = \frac{V_s(z)}{V_e(z)} = \frac{k z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{C_1}{C_2}$$

On applique à l'entrée de l'intégrateur une tension continue : $V_e = 1 \text{ V}$.

Question 10.2.2. Déterminer la sortie V_s sur 10 périodes avec $V_s(0) = 0$ et $k = 1$.

Nous allons à présent simuler le fonctionnement de l'intégrateur en utilisant LTspice. Pour obtenir un gain $k = 1$, nous fixerons $C_1 = C_2 = 10 \text{ pF}$. Pour instancier les condensateurs C_1 et C_2 , il faut utiliser le menu **Capacitor**. Le tableau 10.1 donne les définitions des unités sous LTspice. Par exemple, pour fixer la valeur d'une capacité à 10 pF , il suffit de mettre 10p . (sans unité)

10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9
p	n	u	m	k	meg	g

TABLE 10.1 – Unités sous LTspice

Nous utiliserons un amplificateur opérationnel idéal disponible dans le menu **Opamps** → **UniversalOpamp2**. Les tensions d'alimentation de l'amplificateur opérationnel seront fixées à $\pm 5 \text{ V}$. Pour les instancier ainsi que la source d'entrée, il faut utiliser le menu **Component** → **voltage**, il suffit de fixer la valeur voulue dans le champs **DC value**.

Pour utiliser des commutateurs dans LTspice, il est nécessaire de créer un modèle sous forme de directive. Pour ce faire, il faut instancier le modèle suivant dans le menu **Spice Directive** accessible dans la barre d'outils à droite .op :

```
.model SWID SW (Ron=1 Roff=1g Vt=2.5 Vh=2)
Nom du modèle   résistance ON   résistance OFF   tension seuil   plage de transition
```

Nous pouvons à présent instancier les commutateurs dans le menu **Component** → **sw**, que nous devons pointer vers le modèle que nous avons créé en changeant **value** de SW à **SWID**. Pour le contrôle des commutateurs, les bornes positives seront connectées aux signaux d'horloge et les bornes négatives à la masse. Pour créer les signaux d'horloge, il faut commencer par les instancier en utilisant le menu **Component** → **voltage**. Appuyer sur **Advanced** → **PULSE**. Il nous faut deux signaux d'horloge de période 1 ms décalés entre eux d'une demi-période avec un niveau bas de 0 V et un niveau haut de 5 V avec des temps de montée/descente de 10 µs. Pour cela, pour ϕ_1 , fixer **Vinitial** à 0, **Von** à 5, **Tdelay** à 0, **Trise** à 10u, **Tfall** à 10u, **Ton** à 480u et **Tperiod** à 1m. Pour ϕ_2 , il faut prendre les mêmes paramètres mais en fixant **Tdelay** à 500u afin d'avoir une horloge décalée d'une demi-période. Pour garder une bonne lisibilité de votre schéma, ne reliez pas les signaux d'horloge aux commutateurs à l'aide de fils mais en utilisant la fonction **Label Net**.

Question 10.2.3. Lancer une simulation transitoire² de 10 ms sur LTspice. Tracer le signal d'entrée et le signal de sortie. Comparer le résultat obtenu au calcul de la question précédente.

10.3 Etude système du générateur sinusoïdal

Pour construire l'oscillateur flexible, on propose d'utiliser deux intégrateurs mis en boucle. Afin d'obtenir un oscillateur stable qui répond à nos besoins, nous allons commencer par une étude *haut-niveau* de notre montage.

L'équation différentielle $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \omega_o^2 u = 0$ a comme solution générale :

$$u(t) = C_1 \sin(\omega_o t) + C_2 \cos(\omega_o t)$$

Nous nous proposons d'effectuer une simulation temps-discret de la forme vectorielle de cette équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \omega_o y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega_o x(t) \end{cases}$$

Pour cela, on utilise l'approximation d'Euler pour la dérivée :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(nT_e) \equiv \frac{\partial x}{\partial t}[n] = \frac{x[n+1] - x[n]}{T_e}$$

La figure 10.3 représente le schéma-bloc à partir de deux intégrateurs réalisant cette approximation.

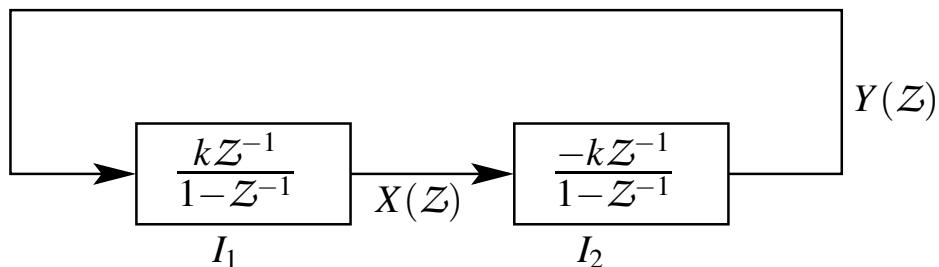


FIGURE 10.3 – Générateur sinusoïdal : cas 1

2. **Simulate** → **Edit Simulation Cmd** → **Transient**

Question 10.3.1. Appliquer la méthode d'Euler au système d'équation différentielle d'une part et d'autre part donner les équations aux différences associées au schéma-bloc de la figure 10.3. En déduire la valeur du coefficient k des intégrateurs en fonction de la pulsation ω_o et de la période d'échantillonnage T_e .

Le script Python `gen-sin.py` effectue une simulation du système discret (vérifier la conformité des équations sur x et y avec le schéma de la figure 10.3).

Question 10.3.2. Exécuter le script et conclure qualitativement sur la stabilité du système.

Pour analyser la stabilité de cette architecture analytiquement, il est nécessaire de déterminer les pôles de la fonction de transfert équivalente. On peut démontrer qu'ils sont égaux aux racines (en z) de l'équation $I_1 \cdot I_2 = 1$ où I_1 et I_2 sont les fonctions de transfert des deux intégrateurs. Pour des contraintes de temps, nous vous donnons le résultat :

$$I_1(z) \cdot I_2(z) = \frac{-k^2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 1 \pm j k$$

Question 10.3.3. Quelle est la contrainte sur k pour garantir la stabilité ?

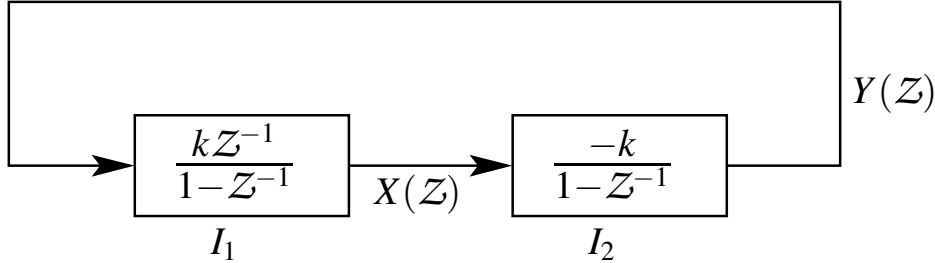


FIGURE 10.4 – Générateur sinusoïdal : cas 2

On modifie le schéma-bloc conformément à celui de la figure 10.4.

Question 10.3.4. Etablir les équations discrètes sur x et y correspondantes et modifier le script `gen-sin.py` en conséquence.

Question 10.3.5. Effectuer la simulation et conclure qualitativement sur la stabilité du système.

Maintenant, la fonction de transfert équivalente est donnée par :

$$I_1(z) \cdot I_2(z) = \frac{-k^2 z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = 1$$

et le calcul des pôles (en z) donne :

$$\begin{array}{lll} \text{pour } k \leq 2 & \Delta \leq 0 & z_{1,2} = \frac{-(k^2 - 2) \pm j k \sqrt{4 - k^2}}{2} \\ \text{pour } k > 2 & \Delta > 0 & z_{1,2} = \frac{-(k^2 - 2) \pm k \sqrt{k^2 - 4}}{2} \end{array}$$

Question 10.3.6. Quelle est la contrainte sur k pour garantir la stabilité ?

10.4 Implémentation du générateur sinusoïdal sous LTspice

Nous souhaitons à présent implémenter l'oscillateur de la figure 10.4 sur LTspice. Pour rappel, la fréquence de sortie de cet oscillateur doit pouvoir être variée entre 2 et 20 Hz. Cette variation sera implantée par une modification du rapport capacitif $k = \frac{C_1}{C_2}$. Nous décidons de garder la valeur de C_2 constante à 10 pF. Les modifications de k se feront en jouant sur la valeur de C_1 .

Question 10.4.1. *Calculer la valeur de k qui permet d'avoir une fréquence d'oscillation de 2 Hz puis de 20 Hz. En déduire les valeurs de C_1 correspondantes.*

Pour l'implémentation du montage, il suffit de dupliquer le circuit de l'intégrateur, reliez la sortie du premier intégrateur au second et vice-versa. Deux changements additionnels sont nécessaires. Le premier concerne le retard de la boucle. Cascader deux intégrateurs identiques donnera une boucle similaire à celle de la figure 10.3. Pour implémenter une boucle avec un seul retard (figure 10.4), il faut faire fonctionner les intégrateurs en opposition de phase. Il faut donc intervertir ϕ_1 et ϕ_2 pour un des deux intégrateurs. Le deuxième changement concerne le gain négatif nécessaire pour I_2 . Pour cela il suffit d'insérer un gain idéal de -1 entre les deux intégrateurs disponibles dans le menu Component → E2³. Fixer k pour l'obtention d'une fréquence de 20 Hz. Lancer une simulation transitoire de 2 secondes.

Question 10.4.2. *Pourquoi selon vous le circuit n'oscille pas ?*

Conseil : Fixez dans le code Python gen-sin.py les conditions initiales à 0 et analyser l'impact sur le comportement du circuit

Pour simuler correctement le fonctionnement de l'oscillateur avec LTspice, nous allons exciter le système en ajoutant une impulsion. Pour cela, ajouter une source du type PULSE entre I_2 et I_1 avec les paramètres suivants : Vinitial = 0, Von = 5, Tdelay = 0, Trise = 10u, Tfall = 10u, Ton = 100m et Tperiod = 10.

Question 10.4.3. *Simuler le montage et vérifiez qu'il est bien capable d'assurer toute la plage de fréquence requise.*

Sachez qu'en pratique, les oscillateurs n'ont pas besoin d'être excités pour rentrer en phase d'oscillation. Le bruit ambiant, qui n'est pas pris en compte dans nos simulations, permet de faire sortir le système de l'équilibre instable où tous les noeuds sont à 0.

Intéressons nous à présent à la fréquence d'échantillonnage f_e . On rappelle que l'approche que nous avons décidé d'adopter pour implémenter l'oscillateur variable est d'opérer à f_e constant et de faire varier le gain des intégrateurs k afin de changer la fréquence de résonance entre 2 et 20 Hz. Nous avons choisi une fréquence d'échantillonnage f_e de 1 kHz mais on aurait pu choisir une valeur différente.

Question 10.4.4. *Quels auraient été selon vous les avantages et inconvénients de choisir une valeur supérieure ou inférieure de f_e ?*

Conseil : Analyser l'impact de f_e sur la qualité du signal en sortie de l'oscillateur et sur k aussi.

10.5 Effet Tremolo

Comme précisé dans l'introduction, dans le cadre de ce TP, nous n'implémenterons que l'oscillateur variable. Le reste de la chaîne requise pour l'effet Tremolo sera abordée au niveau système avec le logiciel Python. Charger le script Python Tremolo.py qui permet de réaliser une modulation d'amplitude ou un effet Tremolo. La variable **effet** permet d'activer (**effet=1**) ou de désactiver (**effet=0**) l'effet Tremolo.

3. Ce composant étant différentiel, il suffira de connecter ses branches négatives à la masse.

Question 10.5.1. Pour commencer, fixer `effet` à 0 pour écouter le signal original sans effet.

Vous disposez dans le script de trois degrés de liberté pour l'effet Tremolo :

- La fréquence de la modulation
- L'indice de la modulation
- La ou les fenêtres temporelles sur lesquelles sera appliqué l'effet Tremolo

Question 10.5.2. Analyser les impacts de ces trois paramètres et trouver le jeu de paramètres qui vous permet d'avoir le meilleur rendu sonore.

Chapitre 11

Conversion analogique-numérique

11.1 Introduction

Les circuits intégrés numériques, en terme de vitesse et de densité, permettent de mettre en oeuvre des traitements de signaux à très grande complexité. De ce fait et aussi grâce aux possibilités de programmation, le traitement numérique du signal est privilégié pour de nombreuses applications, le traitement analogique servant alors essentiellement à l'acquisition et au pré-traitement indispensable pour réaliser une conversion du signal de l'analogique vers le numérique ou à la restitution pour des opérations de filtrage ou d'amplification après conversion du numérique vers l'analogique.

Le traitement analogique et dès lors les circuits analogiques restent indispensables pour la récupération d'informations avec le monde extérieur. En effet, la plupart des capteurs d'informations fournissent une donnée du domaine analogique en temps continu.

Lors de la spécification architecturale d'un système, le choix d'un partitionnement conduisant à un traitement massif du signal en numérique et un traitement minimal en analogique ne conduit pas toujours à un optimum globalement. Le meilleur partitionnement dépend notamment des technologies d'intégration, du traitement à effectuer, des performances recherchées et des divers coûts.

De nombreuses applications en transmission ou en radiocommunications requièrent des systèmes mixtes (analogique et numérique) dans lesquels la recherche d'un optimum d'intégration dépend de nombreux paramètres et notamment de l'état de l'art en conversion analogique-numérique et en conversion numérique-analogique. Ceci illustre l'importance des interfaces d'acquisition et de restitution en général et des interfaces entre traitement d'un signal sous sa forme analogique et traitement sous sa forme numérique. Les convertisseurs jouent un rôle fondamental pour le choix d'architectures, et au-delà, pour l'atteinte des performances vis-à-vis d'objectifs de conception.

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de présenter les principes de la conversion. Les grandes familles de convertisseur classiques sont décrites en soulignant les caractéristiques de chacune d'elles.

11.2 Principe de la conversion

La conversion analogique numérique requiert 2 étapes principales :

- Une discréttisation dans le temps ou un échantillonnage
- Une discréttisation en valeur ou une quantification

11.2.1 Échantillonnage

L'opération d'échantillonnage a été étudiée en détails dans le chapitre 5, nous nous contenterons donc d'un rappel rapide. Le signal d'entrée $x(t)$ est un signal analogique temps continu. On ne va convertir que les valeurs du signal d'entrée espacées du temps T_{conv} , correspondant

au temps nécessaire à la conversion. Aussi doit-on récupérer cette information et pour ce faire échantillonner le signal d'entrée à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_{conv}} = \frac{1}{T_e}$.

L'expression du signal en sortie de l'échantillonneur est :

$$x^*(t) = x(kT_e) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e). \quad (1)$$

La transformation de Fourier de cette expression permet d'obtenir le spectre du signal :

$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) \quad (2)$$

Pour éviter le recouvrement des spectres, on rappelle qu'il est nécessaire que le spectre du signal d'entrée soit limité à $B < \frac{f_e}{2}$. Ceci impose, en général, un filtrage du signal d'entrée.

11.2.2 Quantification et encodage

L'opération de quantification consiste à attribuer un niveau prédéfini aux échantillons $x^*(kT_e)$. Le but de cette opération est de réduire l'ensemble des valeurs traitées à un ensemble de valeurs connues. Ceci est indispensable pour pouvoir réaliser un traitement dans le domaine numérique. Prenons l'exemple de la figure 11.1, dans laquelle on considère la numérisation d'une sinusoïde de fréquence à 1 Hz et d'amplitude 1 V. La première étape du processus est l'échantillonnage. Pour des raisons de simplicité et de clarté, nous choisirons une fréquence f_e de 10 Hz. Le résultat de cette première opération est le signal $x^*(kT_e)$. Passons à présent la quantification, nous allons arrondir les échantillons $x^*(kT_e)$ à un nombre limité de valeurs : 4 pour le signal y_{2b} et 8 pour le signal y_{3b} . Le choix d'une puissance de 2 permet de simplifier l'encodage mais n'est pas obligatoire.

Les signaux y_{2b} et y_{3b} sont ainsi une approximation du signal $x^*(kT_e)$. On peut facilement anticiper que plus le nombre de niveaux est élevé plus l'erreur de quantification sera petite. Mais bien évidemment augmenter le nombre de niveaux se paiera par une augmentation de la consommation de puissance et de la complexité du système.

La sortie finale est un code numérique représentée sous une forme binaire afin que le coeur de traitement puisse l'utiliser ou après conditionnement.

Dans la section suivante, nous allons analyser en détails l'erreur de quantification et son impact sur le processus de numérisation.

11.3 La conversion analogique-numérique

11.3.1 Définitions

Pour un Convertisseur Analogique Numérique (CAN), la grandeur analogique discrète temps continu $x[k]$ est transformée en un signal discret $(b_1, b_2, \dots, b_{nb})$. L'équation de définition du convertisseur s'écrit :

$$\begin{aligned} x[k] &= V_{min} + b_1[k] \frac{PE}{2} + b_2[k] \frac{PE}{4} + \dots + b_{nb}[k] \frac{PE}{2^{nb}} + \frac{PE}{2^{nb+1}} + e = V_{min} + N[k] \frac{PE}{2^{nb}} + \frac{PE}{2^{nb+1}} + e, \\ &= V_{min} + Nq + \frac{q}{2} + e, \end{aligned} \quad (3)$$

- PE : la pleine échelle du convertisseur, égale à la différence entre la tension maximale V_{max} et la tension minimale V_{min} supportées par le convertisseur. Par exemple, pour un CAN opérant entre 0 et 5 V, PE sera égale à 5 V, pour un CAN opérant entre -2 et 2 V, PE sera égale à 4 V et pour un CAN opérant entre 1 et 4 V, PE sera égale à 3 V

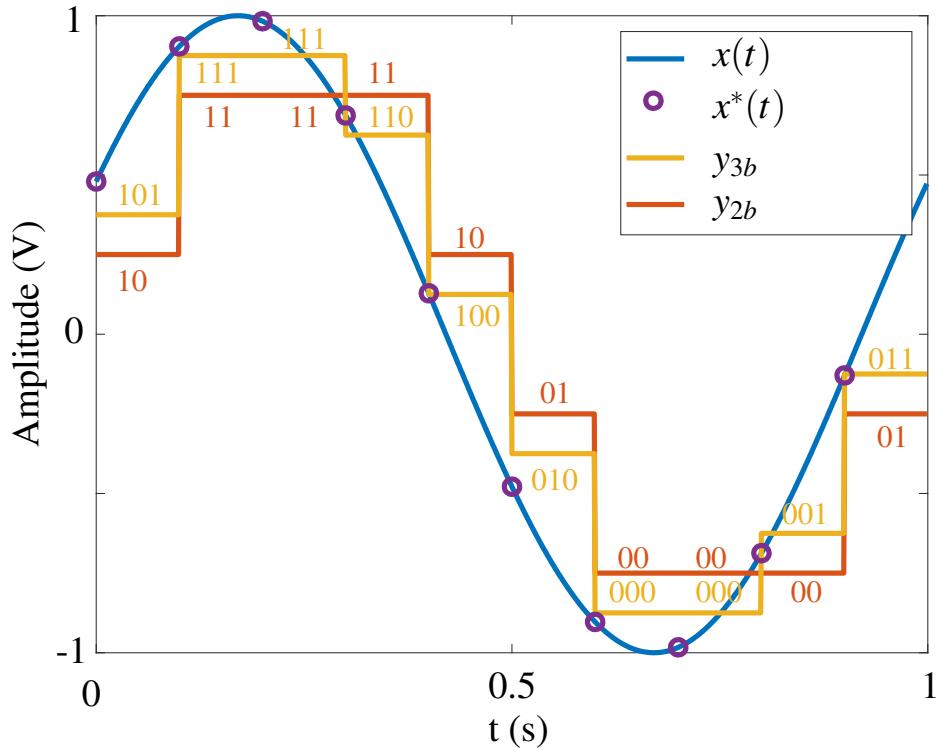


FIGURE 11.1 – Échantillonnage et numérisation d'un sinusoïde de 1 Hz échantillonnée à 10 Hz

- e : l'erreur de quantification du convertisseur
- N : la sortie numérique du convertisseur
- nb : le nombre de bits ou la résolution du CAN
- b_1 : le bit de poids le plus fort (MSB : *Most Significant Bit*) et b_{nb} : le bit de poids le plus faible (LSB : *Least Significant Bit*).

On définit également le pas de quantification qui se nomme également le quantum :

$$q = \frac{PE}{2^{nb}} \quad (4)$$

L'ajout du terme $\frac{q}{2}$ dans l'expression permet de centrer l'erreur ainsi au lieu d'avoir une erreur $0 < e < q$, on obtient une erreur centrée $-\frac{q}{2} < e < +\frac{q}{2}$. On peut ainsi définir la grandeur $a[k]$ qui correspond à l'estimation de $x[k]$ avec :

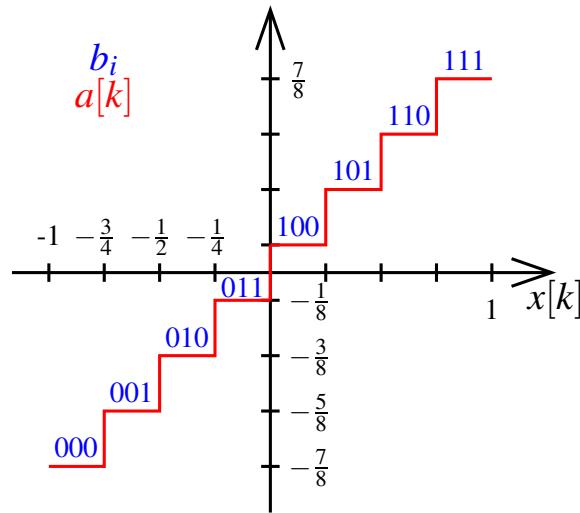
$$a[k] = N[k]q + \frac{q}{2} + V_{min} = x[k] - e \quad (5)$$

Pour clarifier ces différentes notions, prenons l'exemple de la figure 11.2 qui présente la fonction de transfert d'un CAN 3 bits. La tension V_{max} de ce CAN est égale à 1 V, V_{min} à -1 V et donc PE vaut 2 V. On en déduit que $q = 0.25$ V. Prenons par exemple une entrée $x[k]$ de -0.41 V. Le niveau numérique correspondant $N[k]=2$ et le mot binaire de sortie binaire $b_i[k] = 010$. L'estimation analogique $a[k]$ de $x[k]$ est calculée ainsi :

$$a[k] = 2 \times 0.25 + 0.125 - 1 = -0.375 \text{ V} \implies e[k] = -0.035 \text{ V}$$

11.3.2 Etude de l'impact du bruit de quantification sur la précision

L'approximation due à la quantification peut être représentée comme une erreur (figure 11.3) comprise entre $\pm q/2$.



$$nb=3 ; PE=2 \text{ V} ; q=0.25 \text{ V}$$

FIGURE 11.2 – CAN 3 bits

Le comportement non linéaire du quantificateur fait que l'on ne peut pas utiliser les méthodes classiques. Aussi, fait-on appel au modèle statistique. La référence de base de ce travail est un article de Bennett [1].

Par la suite, nous allons considérer la quantification comme un bruit blanc additif de probabilité uniforme (figure 11.4). Nous parlerons dans la suite de bruit de quantification.

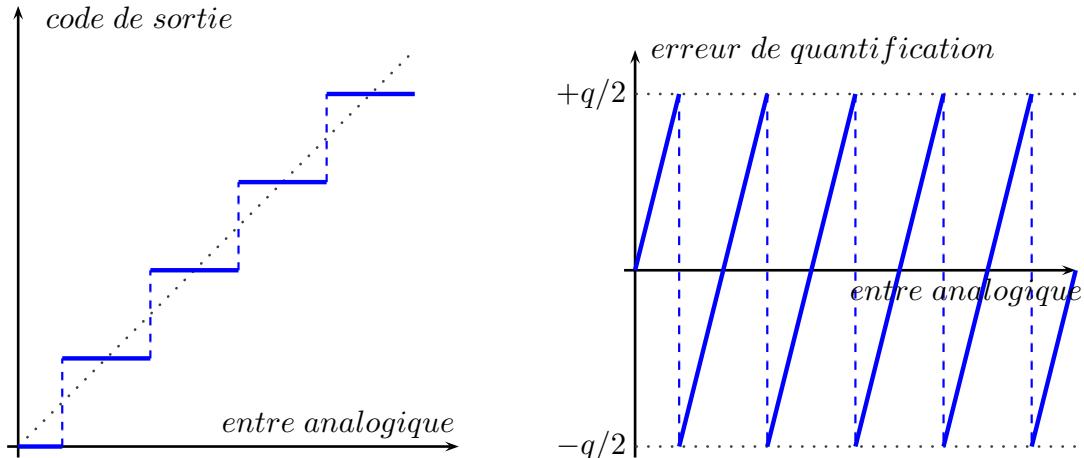


FIGURE 11.3 – Fonction de transfert d'un CAN et erreur de quantification

La variance du bruit de quantification est donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{+q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12} \quad (6)$$

La puissance P_e de ce processus aléatoire, échantillonné à la fréquence f_e , est égale à sa variance. L'hypothèse de bruit blanc donne une densité spectrale de puissance constante sur

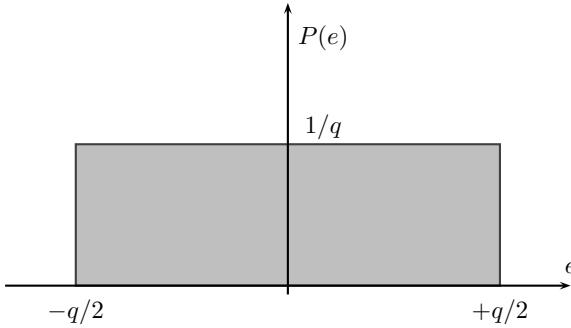


FIGURE 11.4 – Densité de probabilité de l'erreur de quantification

tout le spectre. Il en résulte :

$$P_e = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} dspe df = \frac{q^2}{12} \text{ avec } dspe = \frac{q^2}{12f_e} \quad (7)$$

Pour analyser l'influence de la quantification sur la qualité du signal, nous utilisons le rapport signal sur bruit de quantification (SQNR : *Signal to Quantification Noise Ratio*) :

$$SQNR = \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}} = \frac{\int_{-f_e/2}^{+f_e/2} |\text{Signal}(f)|^2 df}{\int_{-f_e/2}^{+f_e/2} dspe df} \quad (8)$$

(en supposant être à la limite de la fréquence de Nyquist $B = f_e/2$)

Avec une tension d'entrée sinusoïdale d'amplitude Amp et donc d'excursion $2 \cdot Amp$, la puissance du signal est $P_s = \frac{Amp^2}{2}$. Si la pleine échelle du convertisseur est une tension PE , alors la puissance de l'erreur de quantification ou du bruit de quantification est

$$PB_{quant} = P_e = \frac{q^2}{12} = \frac{PE^2}{12 \cdot 2^{2nb}} \quad (9)$$

Ceci permet de déduire le rapport signal sur bruit de quantification :

$$SQNR = \frac{3}{2} \cdot 2^{2nb} \cdot \left(\frac{2 \cdot Amp}{PE} \right)^2 \quad (10)$$

soit en décibel :

$$SQNR_{dB} = 10 \log(SQNR) = 1,76 + 6,02nb + 20 \log \left(\frac{2 \cdot Amp}{PE} \right) \quad (11)$$

Cette relation montre l'équivalence entre un gain de 6 dB de rapport signal sur bruit et 1 bit de plus en résolution (en numérique, la résolution indique le nombre de bits significatifs avec lequel sont représentés les nombres).

11.3.3 Etude de l'impact du sur-échantillonnage

Dans la section précédente, nous avons déterminé l'impact du bruit de quantification dans le cas où le signal d'entrée est échantillonné à une fréquence 2 fois supérieure à sa bande passante. Or comme nous le savons, rien ne nous interdit de prendre une fréquence

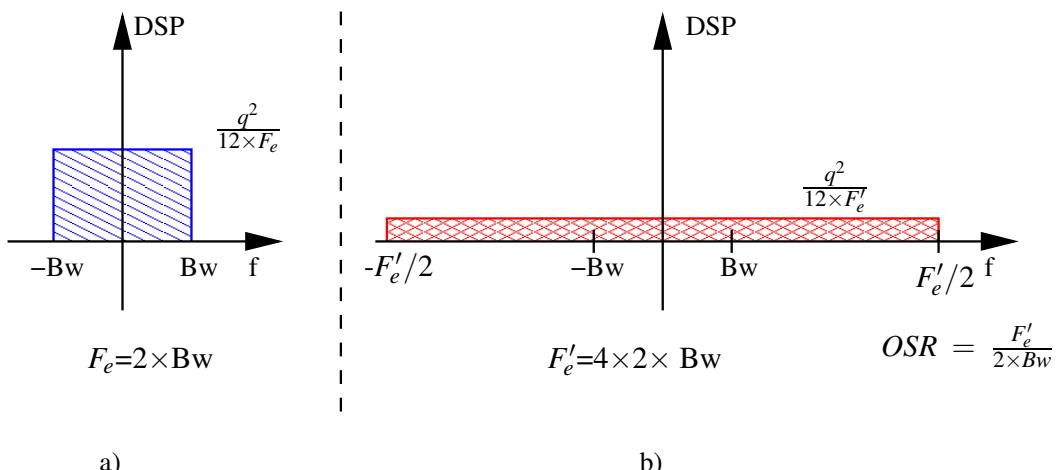


FIGURE 11.5 – Densité spectrale de puissance du bruit de quantification a) CAN Nyquist sans sur-échantillonnage ; b) CAN suréchantillonné avec un $OSR = 4$

d'échantillonnage f_e sensiblement supérieure à 2 fois la bande passante du signal. Essayons de déterminer l'expression du $SQNR$ dans cette nouvelle configuration.

Analysons d'abord la puissance du signal d'entrée. Comme nous le savons, la fréquence d'échantillonnage n'a pas d'impact sur cette dernière et donc sur-échantillonnage ou pas, la puissance du signal reste inchangée. Pour le bruit de quantification, on peut facilement se convaincre que sa puissance ne varie pas. Cependant, grâce au sur-échantillonnage, le bruit est étalé sur une bande de fréquence plus large. Ceci est illustré dans la figure 11.5. En se basant sur cette information et comme on est sur que pour la bande $f > Bw$, il n'y a pas de signal utile, il est ainsi tout à fait possible de faire un filtrage passe bas dans le domaine numérique du signal de sortie à la fréquence Bw . Ceci permettra de diviser la puissance du bruit de quantification par le facteur de sur-échantillonnage noté $OSR = \frac{f_e}{2Bw}$. En intégrant ce facteur dans le calcul du $SQNR$, on peut facilement démontrer que l'expression générale devient :

$$SQNR_{dB} = 10 \log(SQNR) = 1,76 + 6,02nb + 20 \log\left(\frac{2 \cdot Amp}{PE}\right) + 10 \log(OSR) \quad (12)$$

En analysant l'équation, on peut déduire qu'un sur-échantillonnage par 4 a le même effet qu'une augmentation de nb par 1. Cette solution permet ainsi de réduire la complexité d'un CAN mais se paie globalement par une augmentation de la consommation de puissance due à l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage plus élevée.

11.3.4 Budget de bruit

La résolution ou la précision d'un CAN est impacté, en plus du bruit de quantification, par d'autres sources de bruit notamment le bruit thermique et le bruit en $1/f$ (*flicker noise*). Une des premières tâches d'un architecte de CAN est d'établir un budget de bruit entre les différents sources. En effet, diminuer la contribution d'un bruit se paie systématiquement par une augmentation de consommation et/ou de complexité. Ainsi, comme souvent en électronique, il s'agit de trouver le meilleur compromis qui permet d'optimiser les performances en consommation et complexité tout en respectant le cahier des charges fixé en terme de résolution, fréquence d'échantillonnage, etc... Bien évidemment, la solution optimale dépend d'une multitude de paramètres tels que les spécifications visées, l'architecture adoptée pour le CAN, la technologie de fabrication.

Le calcul de la contribution de chaque bruit à la résolution globale s'appuie sur l'approximation très réaliste que tous les bruits sont décorréllés. Nous pouvons donc approximer la

puissance totale du bruit à la somme des puissances des différents bruits présents. Ainsi le rapport signal sur bruit global peut être exprimé sous la forme suivante :

$$SNR_{Glob-dB} = 10 \log \left(\frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}} \right) = 10 \log \left(\frac{Ps}{PB_{Quant} + PB_{Ther} + PB_{Flicker} \dots} \right) \quad (13)$$

En fonction de la résolution visée, de la puissance du signal utile et du budget adopté, nous pouvons calculer la puissance de chacun des bruits.

11.4 Etude des principaux convertisseurs analogique-numérique

Un grand nombre de techniques de Conversion Analogique-Numérique ont été développées pour une grande diversité d'applications. Le choix d'une de ces techniques dépend très étroitement de l'application visée. Dans certains cas, le paramètre important est la précision/résolution, dans d'autres c'est la rapidité. Lorsque les deux paramètres sont exigés, il faut aboutir à un compromis. Nous pouvons classer les CAN en quatre familles essentielles :

- les CAN parallèles ou flash réalisent la conversion en une période d'horloge ;
- les CAN à approximations successives procèdent à des essais successifs pour arriver à la solution ;
- les CAN pipeline sont composés de plusieurs étages qui minimisent au fur et à mesure l'erreur de quantification.
- les CAN $\Delta\Sigma$ basés sur la mise en forme de bruit de quantification

11.4.1 Les CAN parallèles ou "flash" :

Ce sont les plus rapides. La figure 11.6 donne le schéma de principe pour un convertisseur 3 bits. Ce type de convertisseur utilise un comparateur analogique séparé pour chaque niveau de quantification. Pour nb bits de résolution, $2^{nb} - 1$ comparateurs sont nécessaires. La complexité du système croît donc exceptionnellement avec le nombre de bits. L'opération de conversion est effectuée en un seul cycle d'horloge, d'où son nom de convertisseur "flash".

La plus large gamme d'applications de ce type de convertisseurs est le traitement du signal vidéo. Ils sont utilisés dans la compression de bande vidéo, la transmission vidéo numérique, l'analyse de signal radar notamment. Ces applications requièrent des vitesses de conversions dans la gamme de 50 MHz à 1 GHz voire au-delà.

Les CANs flash sont aussi très souvent utilisés pour brique de bases pour des convertisseurs plus complexes comme les convertisseurs pipeline ou Delta Sigma.

11.4.2 Les CAN à approximations successives

Le principe de fonctionnement de l'architecture SAR, comme son nom l'indique, consiste à réaliser la conversion avec des approximations successives.

Une implantation possible de l'architecture SAR est illustrée dans la figure 11.7. En début de chaque période de conversion, le signal d'entrée Ve est échantillonné en connectant toutes les capacités entre Ve et la masse. La détermination du signal de sortie numérique se fera sur nb sous-cycles en allant du bit du poids fort b_1 au bit du poids faible b_{nb} . Pendant ces sous-cycles suivants, Ve est déconnecté et cycle par cycle les capacités sont connectées à $\frac{Vref}{2}$ ou $-\frac{Vref}{2}$ en fonction des sorties b_i . Le calcul du signal de résidu res_i et des bits de sortie se fait suivant les règles suivantes :

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } res_i > \frac{Vref}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$res_{i+1} = \begin{cases} res_i - \frac{Vref}{2^{i+1}} & \text{si } b_i = 1 \\ res_i + \frac{Vref}{2^{i+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

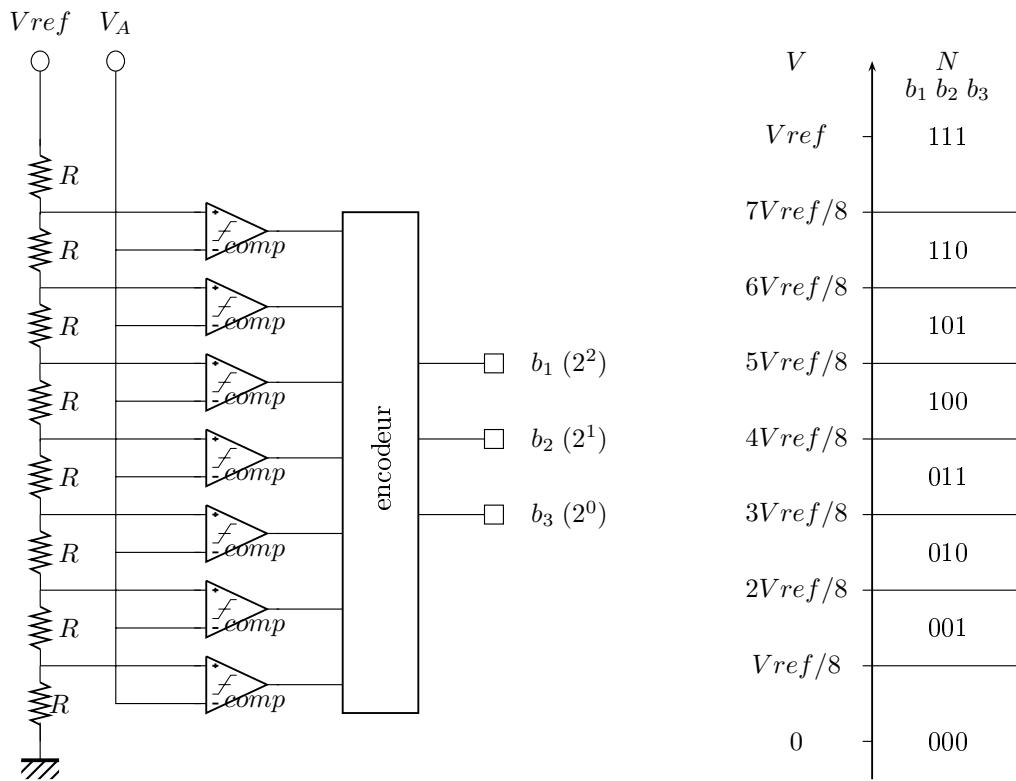


FIGURE 11.6 – CAN "flash"

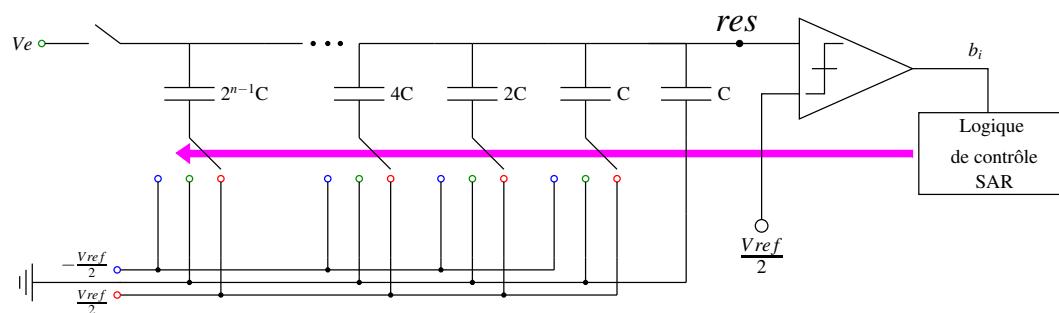


FIGURE 11.7 – Circuit d'un Convertisseur à approximations successives SAR

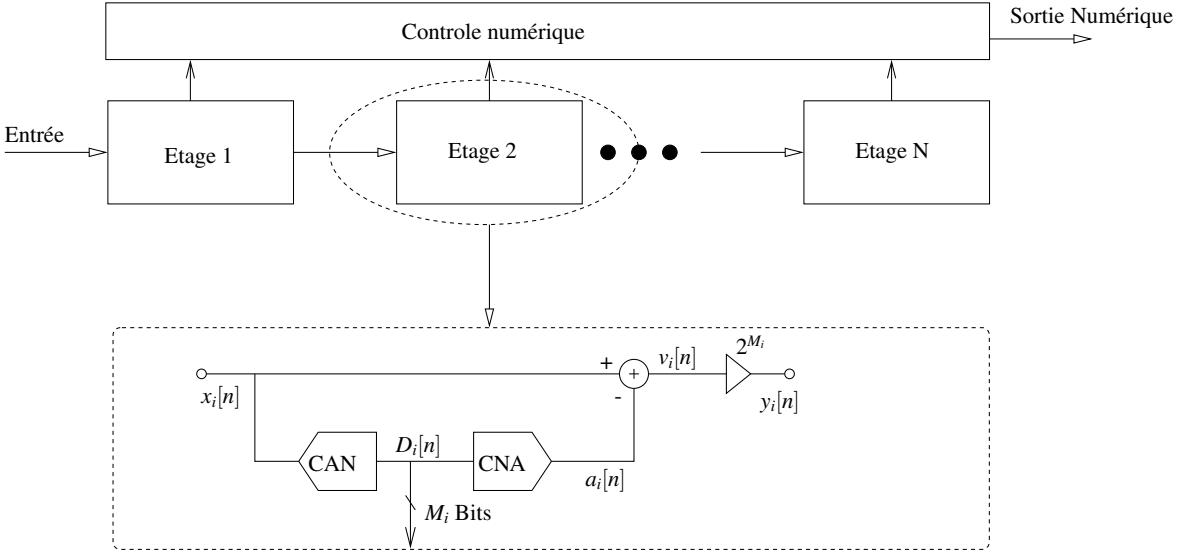


FIGURE 11.8 – Schéma bloc d'un étage Pipeline

$$res_1 = V_e$$

La valeur analogique équivalente à la sortie numérique est donnée par :

$$y = \sum_{i=1}^{nb} b_i \frac{V_{ref}}{2^i} + \frac{V_{ref}}{2^{nb+1}}$$

- le convertisseur numérique analogique qui génère les tensions pondérées composé par le circuit à capacités commutées ;
- le comparateur qui compare res_i à la masse ;
- la logique de commande et de contrôle qui traite le signal de sortie du comparateur.

Le CAN à approximations successives est un CAN série puisque qu'on élabore un bit à chaque étape, il faut nb périodes d'horloge pour obtenir une précision de nb bits. Ainsi, comparé au CAN flash, l'augmentation de la résolution ou du nombre de bit du CAN SAR ne nécessite pas une augmentation exponentielle de la complexité mais une augmentation linéaire de la durée de conversion. Ceci rend les CANs SAR adapté à la conversion des signaux à bande moyenne (quelques dizaines de MHz) avec des résolutions intermédiaires ou élevées (8 à 16 bits).

11.4.3 Les CANs pipeline

Dans les CANs pipeline, la conversion se fait à l'aide de plusieurs étages cascadés permettant d'atteindre une résolution plus élevée qu'un CAN Flash avec moins de comparateurs. La figure 11.8 illustre le schéma bloc d'un CAN pipeline. Il est composé de N étages et chacun est composé :

- Un CAN flash de résolution M_i (i est l'index de l'étage)
- Un CNA de résolution M_i
- Un soustracteur
- Un gain de valeur 2^{M_i}

Le principe du fonctionnement est le suivant. L'entrée du CAN est discrétisé avec une faible résolution (1 à 5 bits) par le première étage. Ceci permettra de générer les bits de poids forts de la sortie binaire. La sortie numérique D_i est reconvertis en analogique afin de la soustraire du signal d'entrée. Ce signal v_i correspond en fait à l'erreur de quantification qui est amplifiée et transmis à l'étage suivant. Ce dernier réalise une nouvelle estimation permettant

ainsi d'améliorer la précision du convertisseur. Les sorties numériques des différents étages M_i sont recombinés pour créer la sortie numérique globale du CAN.

La résolution globale du CAN est la somme des résolutions des étages. Ainsi pour construire un CAN 12 bits, on peut le réaliser par exemple à l'aide de 3 étages de 4 bits chacun. Cette implémentation nécessitera 45 comparateurs ($3 \times (2^4 - 1)$) comparée aux 4095 ($2^{12} - 1$) comparateurs requis pour un CAN Flash de 12 bits. Par contre, le point bloquant dans l'architecture Pipeline est l'étage de soustraction/gain qui nécessite l'utilisation d'un amplificateur opérationnel. Ceci limite la vitesse des CANs pipeline par rapport aux CANs flash. Les CANs pipeline sont ainsi utilisés pour la conversion des signaux à bande moyenne ou large (quelques dizaines à quelques centaines de MHz) à moyenne ou haute résolution.

11.4.4 Les CANs Sigma Delta

Les CANs Delta Sigma ($\Delta\Sigma$) sont des convertisseurs basés sur les principes du sur échantillonnage et de la mise en forme du bruit de quantification. Le schéma bloc général d'un CAN $\Delta\Sigma$ est illustré dans la figure 11.9. Il s'agit d'un filtre de boucle suivi d'un quantificateur Flash de faible résolution (1 à 5 bits en pratique) et d'une boucle de retour qui permet de stabiliser le CAN et de garantir la mise en forme du bruit. Tous ces blocs vont fonctionner à une vitesse $f_e = OSR \times 2Bw$. Le filtre numérique de décimation en sortie permet le passage entre un signal à haute vitesse et faible résolution à un signal à faible vitesse et haute résolution.

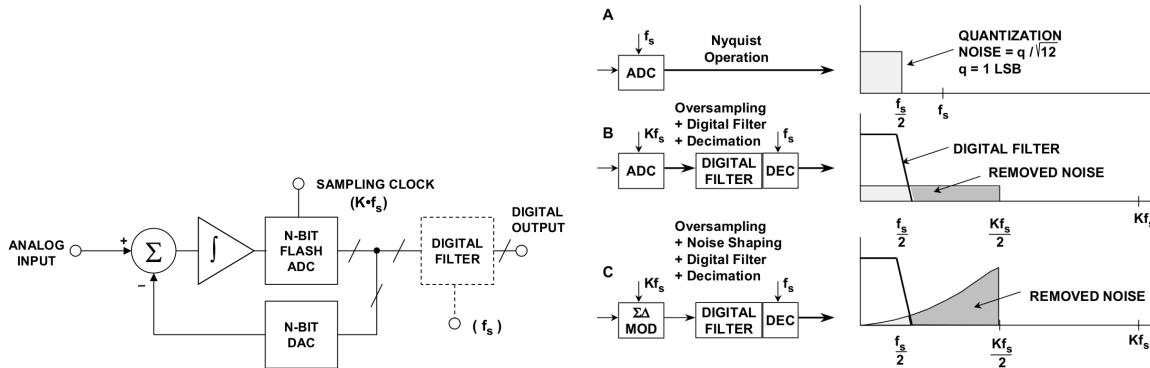


FIGURE 11.9 – Principe de fonctionnement des modulateurs $\Delta\Sigma$

Le fonctionnement des CANs $\Delta\Sigma$ ne sera pas abordé en détails dans le cadre de module mais sachez que c'est des CANs adaptés pour réaliser des résolutions très élevées dépassant les 20 bits.

11.5 Conclusions sur la Conversion

Le tableau 11.1 compare qualitativement les différentes architectures de CAN. Comme on peut le constater, le choix d'une architecture doit se faire en fonction des spécifications requises en bande passante, résolution, consommation de puissance ...

Il est important de noter qu'il existe dans l'état de l'art un grand nombre d'autres architectures de CANs. Certaines sont une fusion entre 2 architectures comme les CANs pipeline-SAR afin d'essayer de profiter des avantages des 2 architectures. Il est aussi courant de disposer les CANs en parallèle en entrelacement temporel ou fréquentiel afin d'augmenter les vitesses de conversion.

	Flash	Pipeline	SAR	$\Delta\Sigma$
Vitesse	Très élevé	élevé	Moyen	Faible
Résolution	Faible	élevé	élevé	Très élevé
Cons. de Puis.	Très élevé	élevé	Très Faible	Faible
Surface	Très élevé	élevé	Faible	Moyen
Désavantages	Résolution Limitée. Nb comparateurs \nearrow exp.	Limité par le S/H	Limité par le matching du DAC ou CNA	Instabilité et horloge haute fréquence

TABLE 11.1 – Comparaison entre les architectures de CANs

11.6 Exercice : capteur cardiaque

Nous souhaitons faire le *reverse engineering* d'un CAN proposé par un concurrent. Ce CAN est optimisé pour la numérisation du signal de sortie d'un capteur cardiaque. On sait que le signal numérisé à la sortie du CAN a un SNR de 40 dB. On sait aussi que 3 types de bruit y sont présents : le bruit thermique, le bruit 1/f dit également *flicker noise* et le bruit de quantification. La bande d'intérêt du signal est comprise entre 0 et 50 Hz.

Question 11.6.1. *Vu que le flicker noise a un comportement en 1/f, ceci veut dire que le bruit tend vers l'infini quand la fréquence tend vers zéro, expliquez pourquoi ceci n'est pas un problème pour ce capteur ainsi que pour tous les autres composants électroniques.*

En analysant la *datasheet* du composant et en s'appuyant sur d'autres méthodes qu'on ne détaillera pas car l'espionnage industriel est interdit, on arrive à déterminer les expressions des densités spectrales de puissance (PSD) du bruit 1/f (*flicker noise*) et du bruit thermique :

$$PSD_{Flicker} = \frac{2.1 \times 10^{-7}}{f} V^2/Hz ; PSD_{Therm} = 10^{-7} V^2/Hz$$

Question 11.6.2. *Calculer la puissance du bruit thermique et du bruit 1/f sur la bande 1 μHz à 50 Hz.*

Question 11.6.3. *Sachant que le signal utile a une puissance de 0.1 V²¹, calculer la puissance maximale autorisée pour le bruit total à la sortie du CAN. En déduire la puissance maximale autorisée pour le bruit de quantification et le budget de bruit adopté par le concurrent pour son CAN.*

Question 11.6.4. *Calculer le nombre de bits nécessaire pour le CAN sans sur-échantillonnage avec une pleine échelle de 1 V.*

11.7 Exercice : Chaîne de Conversion

La 5^{ème} génération des communications mobiles (5G) spécifie que les équipements du réseau cellulaire (mobiles et stations de base) pourront utiliser des porteuses avec des bandes

1. La puissance devrait s'exprimer en toute rigueur en $V^2 \cdot \Omega^{-1}$ ce qui est équivalent à des W mais il est courant de l'exprimer en V^2 si on considère une résistance de conversion constante.

passantes très variées allant de 1.4 MHz jusqu'à 20 MHz. La norme spécifie également la possibilité de faire de l'agrégation de jusqu'à huit canaux permettant ainsi d'atteindre dans certaines conditions de fonctionnement un débit descendant supérieur à 3 Gbits/s. Nous nous

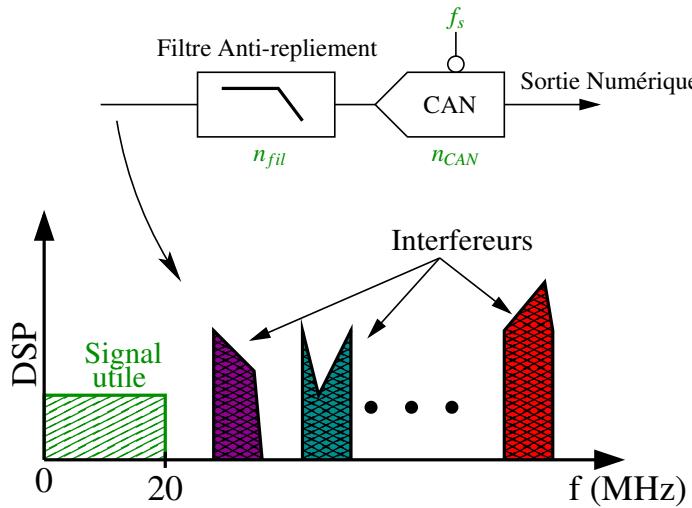


FIGURE 11.10 – Chaîne d'acquisition de signal 5G en bande de base

focaliserons dans ce TD sur l'étude de la sous-partie bande de base d'une chaîne de réception adaptée à un canal de 20 MHz de bande. Comme le montre la figure 11.10, les blocs qui composent cette sous-partie du récepteur sont le filtre anti-repliement et le convertisseur analogique-numérique (CAN).

Nous nous fixons comme objectif d'optimiser les paramètres de la chaîne afin d'obtenir la consommation de puissance la plus basse possible. Nous pourrons intervenir sur les trois paramètres suivants :

- la fréquence d'échantillonnage du CAN f_s
- l'ordre du filtre n_{fil}
- le nombre de bits du CANs n_{CAN}

Le cahier des charges nous impose une résolution supérieure à 74 dB à la sortie du CAN et une atténuation supérieure à 50 dB pour les perturbateurs qui peuvent corrompre le signal utile à cause du repliement. Par ailleurs, l'atténuation maximale à l'intérieur de la bande passante doit être inférieure à 1 dB.

Nous décidons d'investiguer trois possibilités pour f_s : 50 MHz, 200 MHz et 800 MHz. La procédure sera de déterminer pour chaque valeurs de f_s , les valeurs de n_{fil} et n_{CAN} qui permettent de satisfaire le cahier des charges. Ceci nous permettra de comparer les trois solutions en utilisant les métriques suivantes pour évaluer la consommation de puissance :

$$P_{fil} = n_{fil} \times 5 \times 10^{-3} \quad [W]$$

$$P_{CAN} = 2^{n_{CAN}} \times f_s \times 5 \times 10^{-14} \quad [W]$$

Question 11.7.1. Tracer le gabarit du filtre anti-repliement pour les trois valeurs possibles de f_s .

Question 11.7.2. Déterminer la valeur du critère sélectivité Ω_s pour les trois valeurs de f_s

Nous décidons d'utiliser une approximation de Tchebycheff pour le filtre anti-repliement. Les polynômes de Tchebycheff s'expriment par :

$\forall x \geq 1, T_n(x) = \text{ch}(n \argch(x))$, où ch représente le cosinus hyperbolique et argch l'argument du cosinus hyperbolique², réciproque de la fonction ch.

2. $\argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour $x \geq 1$

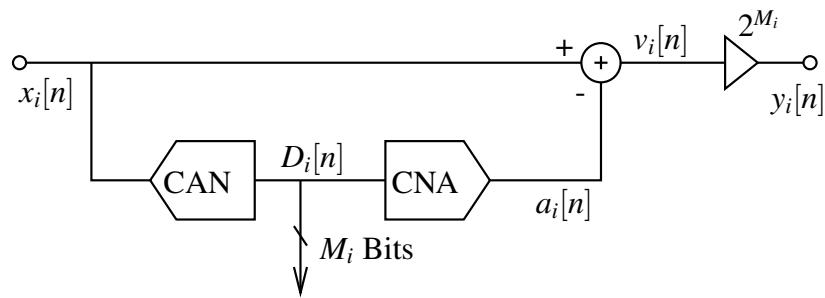


FIGURE 11.11 – Schéma bloc d'un étage Pipeline

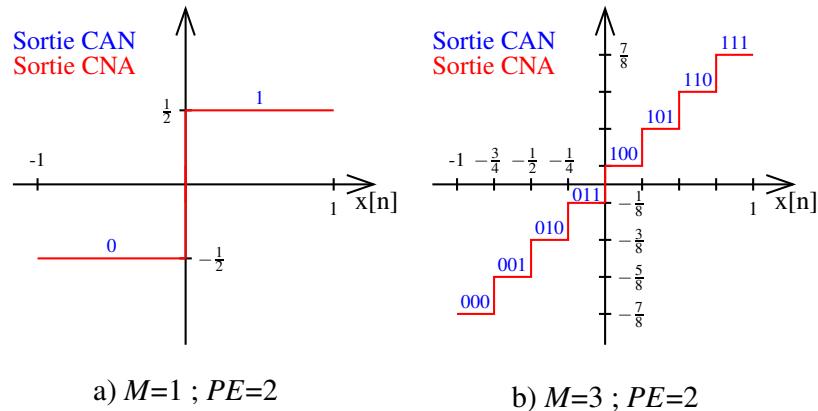


FIGURE 11.12 – Sortie du CAN (code numérique) et du CNA (tension) en fonction de l'entrée (tension)

Question 11.7.3. Déduisez-en l'ordre du filtre requis dans les trois cas.

Intéressons nous à présent au CAN. Pour ce calcul, nous nous permettons d'approximer l'entrée à une sinusoïde qui occupe l'intégralité de la dynamique d'entrée du CAN.

Question 11.7.4. Calculer le nombre théorique de bits nécessaires pour chaque valeur de f_s pour satisfaire le cahier des charges. Nous arrondirons le nombre à l'entier supérieur.

Question 11.7.5. Comparer les trois solutions en terme de consommation de puissance. Retenez pour la suite de l'exercice celle qui permet de la minimiser.

Intéressons nous à présent à l'implémentation du CAN. Nous décidons au vu des spécifications d'utiliser l'architecture pipeline. Le principe de fonctionnement de cette famille de CAN est de cascader plusieurs étages travaillant à haute vitesse mais de précision réduite (typiquement 1 à 5 bits) afin d'obtenir une résolution globale élevée (typiquement 9 à 12 bits).

Commençons d'abord par étudier le comportement d'un seul étage du CAN pipeline. La figure 11.11 illustre le schéma bloc d'un étage du CAN pipeline. Il est composé de :

- Un CAN flash de résolution M_i (i est l'index de l'étage) avec une pleine échelle PE
 - Un CNA de résolution M_i avec une pleine échelle PE
 - Un soustracteur
 - Un gain de valeur 2^{M_i}

Pour clarifier les caractéristiques de transfert du CAN et du CNA, leurs sorties sont illustrées en fonction du signal d'entrée $x[n]$ dans la figure 11.12 pour $PE = 2$ et $M_i = 1$ bit et 3 bits.

Question 11.7.6. Que représente le signal $v[n]$?

Question 11.7.7. Déterminer un encadrement théorique pour $v[n]$ en fonction de la pleine échelle et le nombre de bits du CAN de l'étage.

Question 11.7.8. En déduire pourquoi faut-il mettre un gain de valeur 2^{M_i} en sortie de l'étage.

La sortie numérique d'un CAN pipeline K étages est obtenu par une concaténation des sorties des K étages où les M_1 bits de poids forts sont fixés par la sortie du première étage, les M_2 bits suivants par le deuxième et ainsi de suite. La sortie analogique globale équivalente à cette sortie numérique une donnée par :

$$a_{glob}[n] = a_1[n] + \sum_{i=2}^K \frac{a_i[n]}{\sum_{j=2}^i M_{j-1}}$$

ou en d'autre termes

$$a_{glob}[n] = \left(a_1[n] + \frac{a_2[n]}{2^{M_1}} + \frac{a_3[n]}{2^{M_1+M_2}} \dots \right) \quad (14)$$

Question 11.7.9. Donnez la sortie analogique et numérique pour un CAN à deux étages avec $M_1=M_2=3$ bits pour une entrée de 0.52V avec $PE = 2\text{V}$.

Question 11.7.10. Quelle aurait été l'erreur de quantification si on n'avait pas appliqué le gain de 2^3 à la sortie du premier étage ?

Question 11.7.11. Proposer une implémentation possible en utilisant 3 étages pour le CAN de notre application 5G.

Bibliographie

- [1] W. R. Bennett. Spectra of quantized signals. *Bell Systems Technical Journal*, Jul 1948.
- [2] P. Jespers. *Integrated Converters : D to A and a to d Architectures, Analysis and Simulation*. Oxford University Press, Jan 2001.
- [3] F Maloberti. *Data Converters*. Springer, 2007.
- [4] R. Schreier and G. Temes. *Understanding Delta-Sigma Data Converters*. Wiley-Interscience, 2005.

Chapitre 12

TP : Conversion analogique-numérique

12.1 Introduction

Dans les TPs précédents, nous avons implémenté dans le domaine analogique des effets musicaux tels que la distorsion, le Tremolo et l'effet WahWah. D'autres phénomènes tels que l'octaver¹ ou l'echo s'implémentent plus facilement dans le domaine numérique. Un élément clé d'une telle chaîne est le convertisseur analogique-numérique (CAN) et sera ainsi le sujet principal de ce TP.

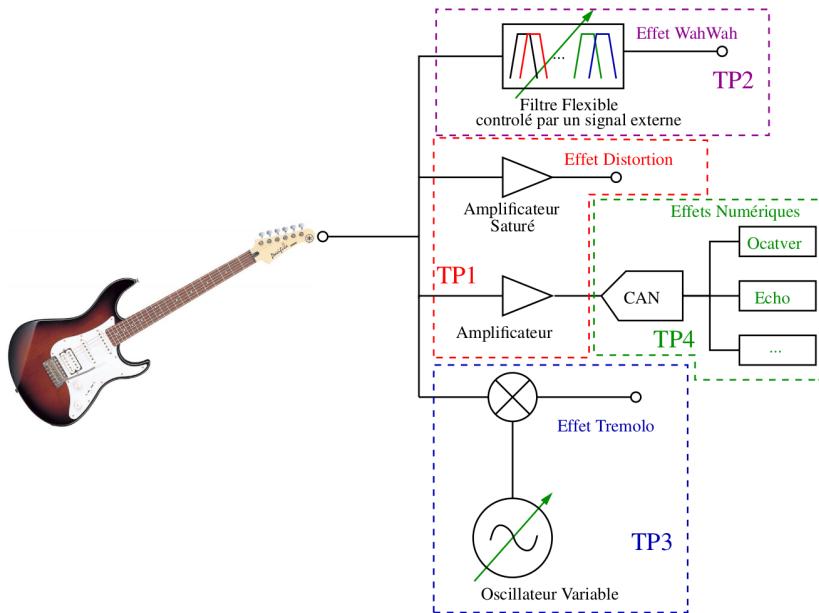


FIGURE 12.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

Pour rappel, le signal de la guitare a une bande passante de 20 kHz et nous souhaitons le numériser avec un SNR minimum de 90 dB afin de garantir une bonne qualité audio pour le signal. Pour respecter le théorème d'échantillonnage, il faut échantillonner ce signal au moins à 40 kE/s (kilo-échantillons/s).

Les expérimentations utiliseront Python d'une part et la plateforme d'acquisition ADALM 1000 d'autre part.

1. L'octaver est un effet audio qui a pour but de transposer à une ou plusieurs octaves en dessous ou au-dessus la tonalité du signal entrant. Pour mieux comprendre cet effet, vous pouvez regarder la vidéo suivante <https://www.youtube.com/watch?v=sdnT31AONis>

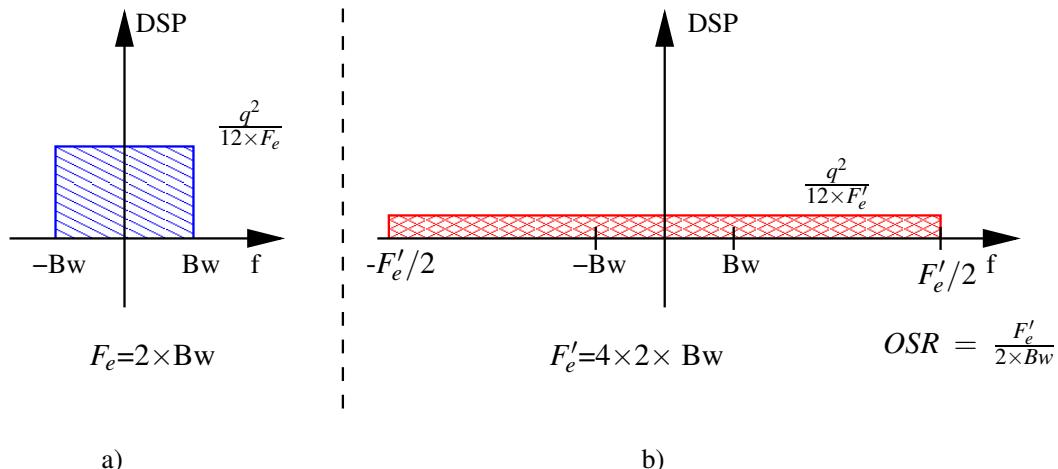


FIGURE 12.2 – Densité spectrale de puissance du bruit de quantification a) CAN Nyquist sans sur-échantillonnage ; b) CAN sur-échantillonné avec un $OSR = 4$

12.2 CAN Flash

Dans cette partie, on désire implémenter ce convertisseur en utilisant l'architecture Flash (Voir section 11.4.1). On montre dans le cours que le SNR maximal d'un CAN Nyquist peut s'exprimer en fonction d'un nombre de bit de quantification n par :

$$SNR_{dB} \approx 6.02n + 1.76$$

Question 12.2.1. Charger le fichier `flash.py` dans l'éditeur de Python. Fixer le nombre de bit n dans le script en utilisant la formule du SNR et visualiser le signal en sortie ainsi que son spectre. Comparer le SNR pratique au SNR théorique.

Question 12.2.2. En vous appuyant sur le cours, discuter les désavantages d'une telle implémentation.

Pour réduire la complexité de notre CAN, on décide de faire du sur-échantillonnage. En d'autre termes, au lieu d'échantillonner le signal à 2 fois la bande passante, en l'occurrence 40 kHz (2×20 kHz), on va échantillonner le signal à OSR (oversampling ratio) fois 40 kHz. Comme on le voit en cours, ceci a pour effet d'étaler le bruit de quantification sur une plage de fréquence plus large comme illustré à la Fig. 12.2, et donc de réduire le niveau de bruit dans la bande utile. On peut ensuite appliquer un filtrage passe-bas dans le domaine numérique pour éliminer le bruit pour les fréquences supérieures à BW.

Lorsqu'il y a sur-échantillonnage, le SNR maximal peut être exprimé en fonction du nombre de bit n et du coefficient de sur-échantillonnage $OSR = \frac{Fs}{2 \times BW}$ par :

$$SNR_{dB} \approx 6.02n + 1.76 + 10 \log_{10}(OSR)$$

Question 12.2.3. En déduire la nouvelle valeur de n nécessaire pour l'obtention de la résolution ciblée avec une fréquence d'échantillonnage de 4 MHz ou un OSR de 100.

Question 12.2.4. Fixer OSR à 100 dans le fichier `flash.py` et n à la valeur obtenue dans la question précédente. Visualiser le signal en sortie ainsi que son spectre. Comparer le SNR pratique au SNR théorique.

Ainsi, le sur-échantillonnage permet de réduire la surface du circuit électronique en diminuant le nombre de comparateurs nécessaires à l'obtention du SNR cible. Cette diminution du nombre de composants se fait au coût d'une fréquence d'échantillonnage significativement

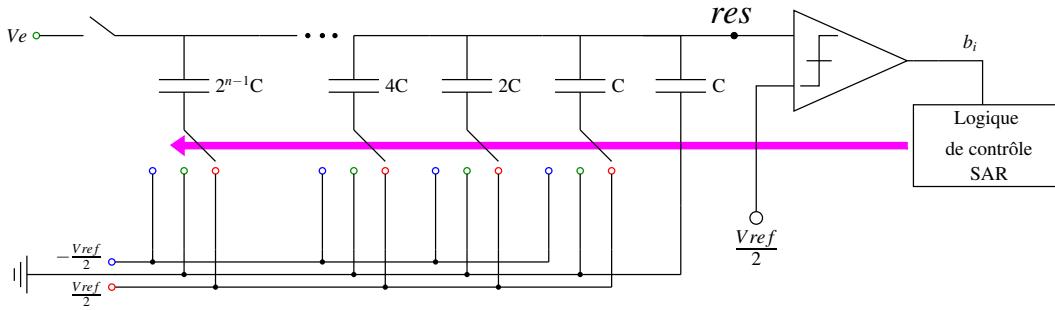


FIGURE 12.3 – Circuit d'un Convertisseur à approximations successives SAR

augmentée (4 MHz en l'occurrence) et n'est pas suffisante pour rendre cette solution utilisable. En fait, les convertisseurs Flash sont plutôt utilisés pour la conversion des signaux large bandes (plusieurs centaines de MHz) à faible résolution (6 à 8 bits). Pour la conversion des signaux audio, deux architectures de CAN sont très largement utilisées, les architectures Sigma Delta et les architectures à approximations successives connues sous le nom d'architectures SAR². Nous proposons d'utiliser cette dernière pour la conversion de notre signal audio.

12.3 Convertisseur à approximations successives SAR

Le principe de fonctionnement de l'architecture SAR, comme son nom l'indique, consiste à réaliser la conversion avec des approximations successives (section 11.4.2).

Le script `SAR_principe.py` permet d'illustrer la logique de fonctionnement de ce CAN. Chargez le fichier, pensez à un entier entre 0 et 100, répondez aux questions successives qui apparaissent sur la fenêtre de commande.

Question 12.3.1. Quelle est l'approche utilisée par le script (et donc par les CAN SAR) pour retrouver votre chiffre et combien d'itérations ont été requises pour atteindre cet objectif.

Pensez à présent à un chiffre entre 0 et 1000, changer dans le script `max` à 1000.

Question 12.3.2. Combien d'itérations sont nécessaires pour faire la conversion pour cette nouvelle plage de valeur ? Proposez une approche théorique qui permet de lier le nombre d'itérations à la plage.

Une implémentation possible de l'architecture SAR est illustrée dans la figure 12.3. En début de chaque période de conversion, le signal d'entrée Ve est échantillonné en connectant toutes les capacités entre Ve et la masse. La détermination du signal de sortie numérique se fera sur n sous-cycles en allant du bit du poids fort b_1 au bit du poids faible b_n . Pendant ces sous-cycles suivants, Ve est déconnecté et cycle par cycle les capacités sont connectées à $\frac{V_{ref}}{2}$ ou $-\frac{V_{ref}}{2}$ en fonction des sorties³ b_i . Le calcul du signal de résidu res_i et des bits de sortie se fait suivant les règles suivantes :

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } res_i > \frac{V_{ref}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$res_{i+1} = \begin{cases} res_i - \frac{V_{ref}}{2^{i+1}} & \text{si } b_i = 1 \\ res_i + \frac{V_{ref}}{2^{i+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$res_1 = Ve$$

2. Successive Approximation Register

3. si $b_i = 0$, alors la capacité $2^{n-i}C$ est connectée à $+\frac{V_{ref}}{2}$; sinon, on la connecte à $-\frac{V_{ref}}{2}$

La valeur analogique équivalente à la sortie numérique est donnée par :

$$y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{Vref}{2^i} + \frac{Vref}{2^{n+1}}$$

Question 12.3.3. En vous appuyant uniquement sur les équations ci-dessus dans un premier temps, expliquer pourquoi l'architecture de la figure 12.3 permet d'implémenter une approche similaire à celle suivie dans *SAR_principe.py*.

Question 12.3.4. Déterminer les valeurs de res_i et de b_i pour i de 1 à 4 pour un CAN SAR 4-bit de dynamique d'entrée 0 à 4 V (Tension de référence $Vref = 4$ V) pour un signal d'entrée Ve de 1.3 V. Calculer aussi l'erreur de quantification.

Question 12.3.5. Charger le fichier *SAR_statique.py*, comparer les résultats obtenus dans la question précédente aux résultats de simulation.

Question 12.3.6. Faites l'analyse du fonctionnement du circuit en étudiant la conservation de charges entre les différentes phases. Déterminer la configuration finale d'un CAN SAR 4 bit pour $Ve = 1.3$ V.

Les contraintes en vitesse sur le comparateur ainsi que sur le réseau capacitif sont fixées par la durée du sous-cycle.

Question 12.3.7. Déterminer la durée du sous-cycle pour assurer un signal en sortie de 40 kE/S avec une résolution de 90 dB.

Question 12.3.8. Charger le script *SAR_dynamique.py* qui permet de réaliser une simulation d'un CAN SAR pour une entrée dynamique. Régler la durée du sous-cycle Tsc à la valeur obtenue dans la question précédente. Relever la valeur du SNR.

Question 12.3.9. En vous appuyant sur les analyses et simulations faites dans cette section, comparer brièvement l'architecture SAR à celle d'un Flash.

12.4 Numérisation et effets musicaux

Pour les expérimentations, nous allons utiliser la plateforme ADALM 1000⁴ illustrée dans la Figure 12.4. Elle intègre deux CANs SAR AD7682 dont les performances sont en adéquation avec nos spécifications. Elle intègre également une partie numérique (micro-contrôleur et interface USB) qui permet de transférer les données numérisées à l'ordinateur. La fréquence d'échantillonnage f_e sera fixée à 40 kHz. Le CAN a une plage d'entrée de 0 à 4 V. L'ADALM 1000 est installé sur une maquette qui facilite les interconnections avec les instruments de mesure. Le fonctionnement de cette maquette est détaillé dans l'annexe C.2.

Nous allons commencer par tester le CAN SAR avec un signal sinusoïdal. Charger le fichier *Acq_Dyn.py* qui vous permettra de visualiser le signal de sortie en temporel ainsi que son spectre.

Question 12.4.1. Appliquer un signal sinusoïdal de fréquence 5 kHz et d'un offset de 2 V à l'entrée du CAN.⁵ Faites varier l'amplitude de 0.25 Vpp à 4 Vpp (en passant par 0.5 Vpp, 1 Vpp et 2 Vpp), relever la valeur du SNDR pour chaque mesure et analyser sa variation en fonction de l'amplitude.

4. <https://wiki.analog.com/university/tools/m1k>

5. Pour cette manipulation, connectez le générateur à une des entrées BNC de la maquette et connectez la sortie "pointe" correspondante à l'entrée CH A.

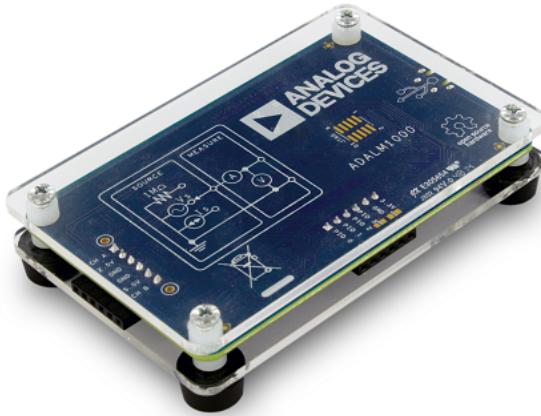


FIGURE 12.4 – Adalm 1000

Nous allons à présent numériser le signal de la guitare⁶. Pour rappel, le signal issu de la guitare a une dynamique de $\pm 250 \text{ mV}$ avec une tension moyenne nulle. Fréquemment, ce signal pourrait avoir des composantes sur un spectre allant de 50 Hz à 20 kHz . Afin de bien profiter de la dynamique d'entrée du CAN (0 à 4 V), nous utiliserons l'amplificateur conçu dans le TP1 (figure 12.5) qui permet d'amplifier le signal de la guitare par environ un facteur 6 à 7 et de le centrer autour de 2 V . Un circuit identique a été disposé sur la *breadboard* de la maquette de l'ADALM. L'impédance d'entrée du CAN est de $1 \text{ M}\Omega$ permettant ainsi de directement connecter l'amplificateur sans passer par un circuit *pilote* (driver). Notez aussi que la capacité C_1 a été modifiée, 100 nF au lieu de 10 nF , afin de résoudre le problème de la fréquence de coupure basse relevé pendant le TP1. Avec cette nouvelle valeur de capacité, la fréquence de coupure est de 34 Hz comparée à 340 Hz pour une capacité de 10 nF .

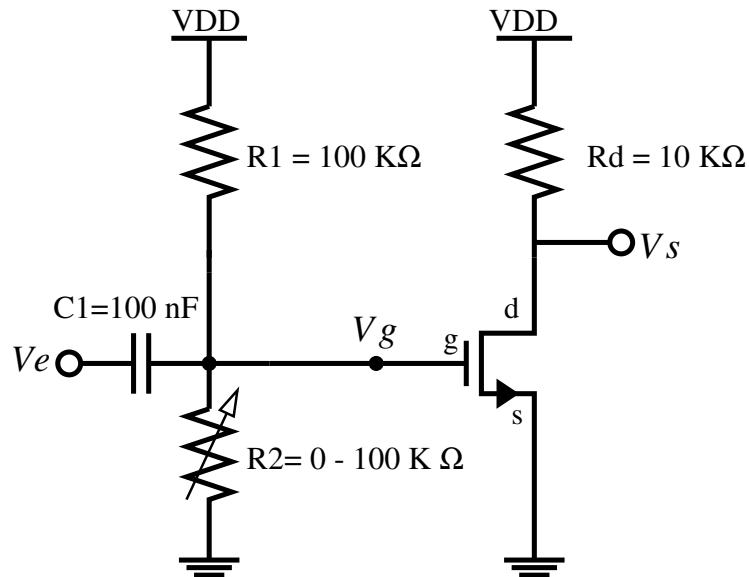


FIGURE 12.5 – Montage amplificateur avec réseau d'entrée

Question 12.4.2. Charger le fichier *Acq_Guitare.py*. La variable *attente* vous permet de régler le délai entre le lancement du programme et le début de l'acquisition. La durée de l'enregistrement est fixée à 12.5 s . Si vous souhaitez ré-écouter votre acquisition, il vous suffit de

6. Si vous n'êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur.

taper `playsound('test.wav')` dans votre console. Une fois que vous êtes satisfaits de votre enregistrement, fixez la variable `Acquisition` à 0 pour arrêter de faire de nouvelles acquisitions.

Le premier effet musical que nous allons mettre en place est l'*octaver*. L'effet voulu est de transposer le signal vers une octave inférieure ou supérieure. La fonction `smbPitchShift` permet d'implémenter cet effet.

Question 12.4.3. Tester la fonction `smbPitchShift`. Ajuster la variable `Pitch` à 0.5 pour transposer à l'octave en dessous et à 2 pour l'octave au dessus. Une note do de la 5ème octave a sa fréquence fondamentale à $f_{do,5} = 1046.5 \text{ Hz}$ et des harmoniques à des multiples de cette fréquence. Quelle serait la composition fréquentielle du signal dans le cas d'une transposition vers le haut ou vers le bas ?

Question 12.4.4. Implémenter un autre effet musical tel que l'écho en expliquant l'approche suivie pour le faire.

Annexe A

Rappels

A.1 Base de l'électricité

A.1.1 Circuit fermé et masse

L'électricité est caractérisée par 2 grandeurs principales :

- La tension (notée U ou V), représente la circulation du champ électrique dans un circuit. L'unité de la tension est le Volt noté V.
- Le courant (notée I), représente la quantité de charge ou de porteurs qui traverse le circuit. Le sens conventionnel du courant est orienté du pôle positif au pôle négatif¹. L'unité du courant est l'Ampère noté A.

Tous les circuits électriques sont des circuits fermés. Par exemple, sur un système alimenté par batterie, si un courant 1 A sort de la borne positive de la batterie, on a forcément 1 A qui rentre par la borne négative.

Pour simplifier les calculs, un noeud dont la tension est nulle est choisi. Ce noeud est appelé la masse et représenté par un des symboles de la figure A.1



FIGURE A.1 – Symbol Masse

A.1.2 Dipôles et impédance

Les dipôles sont les éléments de base des circuits électriques. Les dipôles les plus utilisés sont les résistances, les condensateurs et les inductances. Il existe également des dipôles non linéaires telles que les diodes que nous n'aborderons pas dans le cadre du module ESA.

La différence de tension aux bornes d'un dipôle est illustrée par une flèche ou vecteur et

1. En réalité, vu que les porteurs sont les électrons chargés négativement, le déplacement réel se fait du pôle négatif au pôle positif.

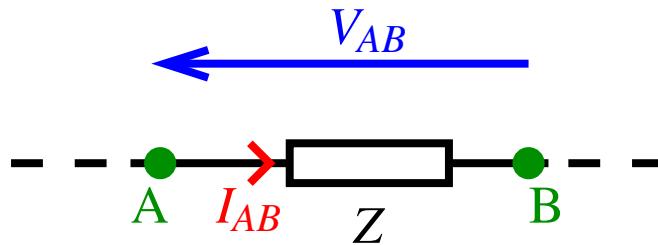


FIGURE A.2 – Tension et Courant aux bornes d'un dipôle

est exprimée par :

$$V_{AB} = \underbrace{V_A}_{\text{La fin de la flèche}} - \underbrace{V_B}_{\text{Le début de la flèche}} \quad (1)$$

Bien évidemment, on peut calculer la différence de tension $V_{BA} = V_B - V_A$.

Le courant qui traverse un dipôle est symbolisé par la petite flèche I_{AB} . Le courant qui rentre par le côté A est forcément égal au courant qui sort du côté B. Le sens du courant est arbitraire, on peut choisir d'avoir un courant entrant côté A ou côté B. La seule contrainte est de garder la même convention pour tout le calcul.

L'impédance, noté Z , est la grandeur qui lie la différence de tension au courant dans le domaine fréquentiel. Au borne du dipôle AB :

$$V_{AB} = Z \cdot I_{AB} \quad (2)$$

Notez ici que le signe est positif car on a choisi d'utiliser une convention avec un courant et une tension de sens opposés. Dans le cas de la tension V_{BA} où le courant et la tension sont dans le même sens :

$$V_{BA} = -Z \cdot I_{AB} \quad (3)$$

La table A.3 donne l'expression temporelle de la relation qui lie la tension au courant ainsi que l'impédance dans le domaine de Fourier. Le passage entre domaines temporel et fréquentiel se fait par la transformée en fréquentiel de la dérivée et de l'intégrale.

	Nom	Unité	Temporel	Impédance
	Résistance R	Ohm Ω	$u(t) = r \cdot i(t)$	$Z_R = R$
	Inductance L	Henry H	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$Z_L = Lj\omega$
	Capacité C	Farad F	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$Z_C = \frac{1}{Cj\omega}$

FIGURE A.3 – Principales caractéristiques des dipôles

On rappelle que l'unité de la pulsation est radian par seconde ou rad/s. Elle est liée à la fréquence f et la période T par les relations suivantes :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

A.1.3 Application : Pont diviseur

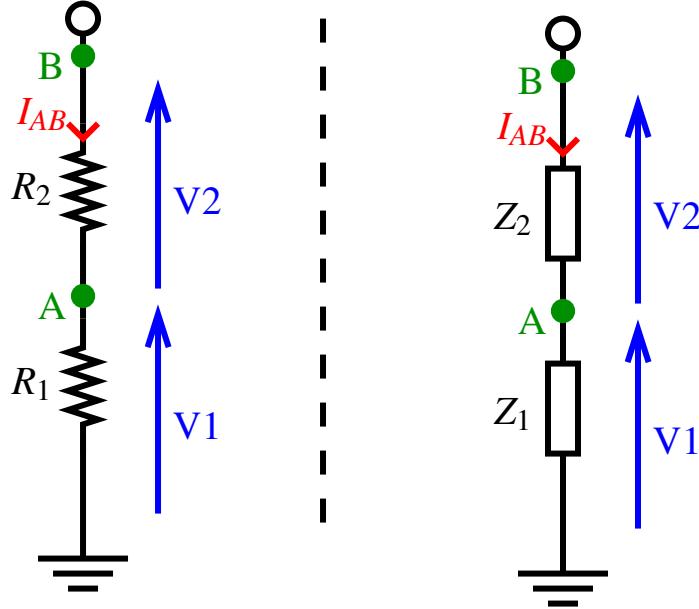


FIGURE A.4 – Pont diviseur : gauche) résistance droite) impédance

Prenons le schéma de la figure A.4 gauche). La tension V_1 (Différence de potentiel entre le noeud A et la masse) est donnée par

$$V_1 = V_A - 0 = R_1 \cdot I_{AB} \quad (5)$$

La tension V_2 est donnée par :

$$V_2 = V_B - V_A = R_2 \cdot I_{AB} \quad (6)$$

La tension V_{tot} est la somme des 2. Cela peut être démontré facilement :

$$V_{tot} = V_B - 0 = (V_B - V_A) + (V_A - 0) = V_2 + V_1 = (R_1 + R_2)I_{AB} \quad (7)$$

Donc la relation qui lie V_1 à V_{tot} :

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{tot} \quad (8)$$

Ce montage est appelé diviseur de tension. La relation est facilement démontrable pour n'importe quel type d'impédance. Ainsi pour le montage de la figure A.4 droite), la relation qui lie V_1 à V_{tot} est :

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V_{tot} \quad (9)$$

En effectuant des calculs similaires, nous pouvons démontrer de nombreuses relations très utiles. Par exemple, quand on dispose de N impédances en série, l'impédance équivalente est la somme des impédances.

$$Z_{eq-serie} = \sum_{i=1}^N Z_i \quad (10)$$

Ainsi pour le montage de la figure A.5 gauche),

$$Z_{eq-serie} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{Cj\omega} = \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega} \quad (11)$$

Dans le cas de composants en parallèle, la relation est donnée par

$$\frac{1}{Z_{eq-parallele}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i} \quad (12)$$

Ainsi pour le montage de la figure A.5 droite),

$$\frac{1}{Z_{eq-parallele}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/Cj\omega} \implies Z_{eq-parallele} = \frac{R}{RCj\omega + 1} \quad (13)$$

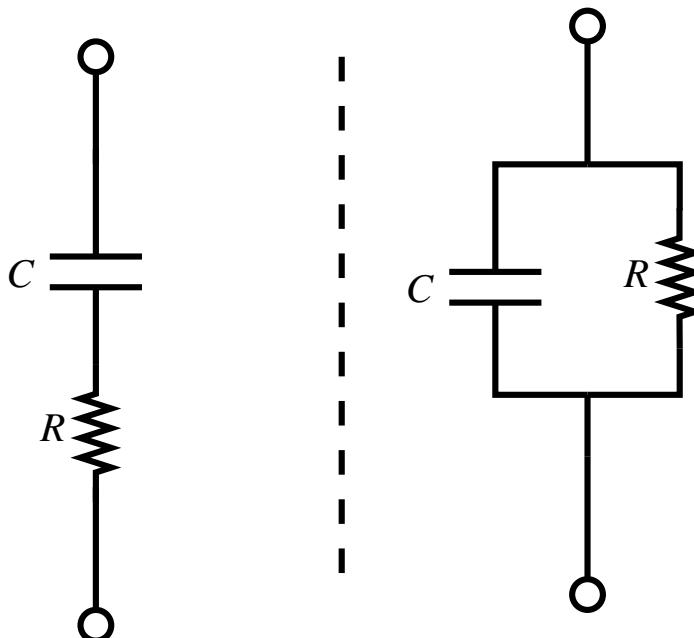


FIGURE A.5 – Impédance équivalente : gauche) Série droite) Parallèle

Toutes ces analyses sont généralisables à l'aide des deux lois de Kirchhoff :

- Loi des noeuds : La somme des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
- Loi des mailles : Dans une maille ou boucle fermée, la somme algébrique des différences de potentiel est nulle.

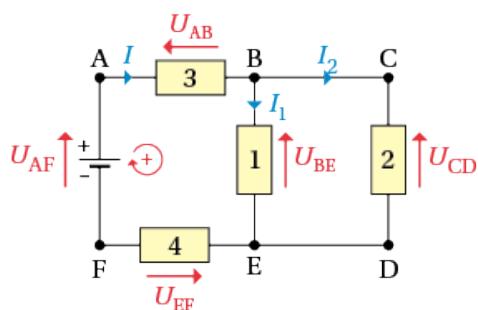


FIGURE A.6 – Loi des mailles et des noeuds

Notation Française	Notation Anglaise	Notation Instruments	Définition	Pour $x(t) = A \cos(\omega t)$
Moyenne	Average	Offset	Moyenne du signal	0
Crête	Peak	V_p	Différence entre la moyenne et le maximum	A
Crête à crête	Peak to Peak	V_{pp}	Différence entre le max le min.	2A
Valeur Efficace	Root Mean Square (RMS)	V_{RMS}	Moyenne quadratique	$\frac{A}{\sqrt{2}}$

TABLE A.1 – Définition des amplitudes

Sur le circuit de la Figure A.6, l'application de la loi des mailles sur la boucle AFEB nous donne :

$$U_{FA} + U_{EF} + U_{BE} + U_{AB} = 0 \implies U_{AF} = U_{EF} + U_{BE} + U_{AB} \quad (14)$$

Sur la maille ou boucle BEDC

$$U_{BE} + U_{DC} = 0 \implies U_{BE} = U_{CD} \quad (15)$$

La loi des noeuds nous donne :

$$I = I_1 + I_2 \quad (16)$$

En utilisant les relations trouvées sur les impédances en série et en parallèle, on peut montrer que l'impédance équivalente des impédances 1, 2, 3 et 4 est

$$Z_{eq1234} = Z_3 + Z_{eq12} + Z_4 = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_4 \quad (17)$$

A.1.4 Amplitude crête, crête à crête, moyenne, RMS, AC/DC

Les variations d'un signal alternatif est caractérisée par plusieurs grandeurs. Les principales sont l'amplitude crête dite également l'amplitude tout court, l'amplitude crête à crête, la tension moyenne et la tension efficace. La table A.1 donne la définition de ces 4 grandeurs. Pour mieux les expliciter, prenons un exemple avec le signal sinusoïdal simple :

$$x(t) = A \cos(\omega t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (18)$$

Ce signal a une période T et donc nous pouvons faire le calcul de la moyenne et de la moyenne quadratique sur cette période.

La tension moyenne du signal dite *offset* en anglais est tout simplement :

$$offset = \int_0^T A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \frac{AT}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^T = 0 \quad (19)$$

La tension crête dite *peak* en anglais est donnée par :

$$V_p = max(x(t)) - offset = A \quad (20)$$

La tension crête à crête dite *peak to peak* en anglais est donnée par :

$$V_{pp} = max(x(t)) - min(x(t)) = 2A \quad (21)$$

La tension efficace dite *RMS* en anglais est légèrement plus complexe à calculer. C'est la moyenne quadratique du signal définie par :

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt} \quad (22)$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt} \quad (23)$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{A^2}{2T} \left[\underbrace{\int_0^T 1 \cdot dt}_T + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t) \cdot dt}_0 \right]} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

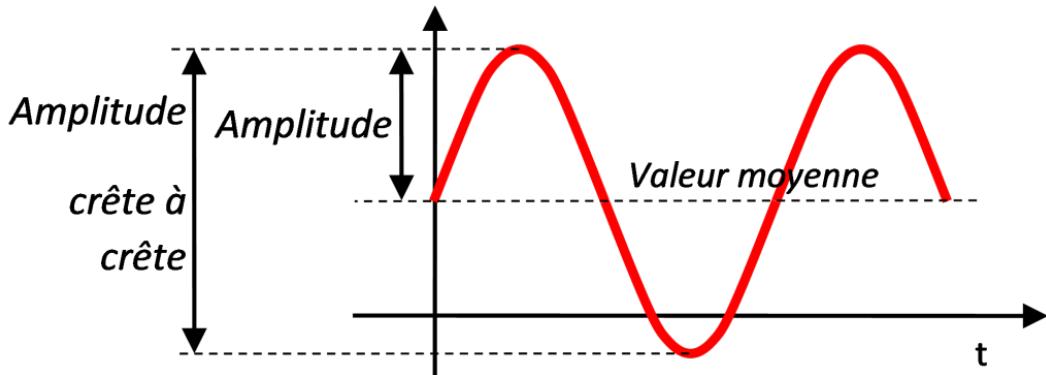


FIGURE A.7 – Caractéristique en amplitude d'un signal

Sur les instruments de mesure, les termes AC et DC² sont très largement utilisés. C'est les initiales de *Alternating Current* ou courant alternatif et *Direct Current* ou courant direct. Ainsi quand on mesure une valeur en AC, on aura une mesure de la variation du signal plus particulièrement de sa tension efficace. La mesure DC correspond à la mesure de la tension moyenne du signal.

A.2 Décibel, module, phase, Pole, Zéro

A.2.1 Les Décibels

Le décibel est une unité sans dimension utilisé pour exprimer des grandeurs avec des dynamiques très élevées. La puissance en dB d'une puissance linéaire P par rapport à une puissance de référence P_R est donnée par :

$$\left(\frac{P}{P_R} \right)_{dB} = 10 \log \left(\frac{P}{P_R} \right) \quad (25)$$

log est le logarithme base 10. Si on souhaite exprimer une puissance dans le système des dB, il faut la référencer à une puissance de référence connue. Il est par exemple assez courant de

2. Le groupe de rock AC/DC a été baptisé ainsi par la soeur des frères young , après avoir vu le sigle « AC/DC » sur un aspirateur ou une machine à coudre.

référencer les puissances à $P_R = 1$ W, l'unité dans ce cas est les dBW ou les référencer à 1 mWet dans ce cas là, la puissance est exprimée en dBm.

$$P_{dBm} = 10 \log \left(\frac{P}{10^{-3}} \right) = P_{dBW} + 30 \quad (26)$$

Il est cependant intéressant de mentionner qu'assez souvent, on exprime, à tort, des puissances en dB. Par exemple, dans les bars et restaurants, il arrive qu'on exprime la puissance sonore en dB alors qu'on devrait l'exprimer en dBA³.

Afin de garantir une conversion cohérente entre tension et puissance et comme la puissance est proportionnelle à une tension au carré⁴, la conversion des fonctions en tension se fait en appliquant $20 \log$.

- Le décibel est une unité sans dimension utilisée pour exprimer des grandeurs avec de grande dynamique tels que les gains, atténuations ou rapports signal à bruit.
- Si les données étudiées sont des rapports de puissance par exemple un rapport signal à bruit $SNR = \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}}$, la conversion se fait comme suit : $SNR_{dB} = 10 \log(SNR)$
- Si les données étudiées sont des rapports de tension ou d'intensité par exemple une fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$, la conversion se fait comme suit : $H(\omega)_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|)$

A.2.2 Le Module et la phase

Le module d'une fonction de transfert est donné par :

$$|H(j\omega)| = \sqrt{Reel(H(j\omega))^2 + Imag(H(j\omega))^2} \quad (27)$$

où $Reel$ et $Imag$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire. Dans le cas où $H(\omega)$ est un rapport de deux fonctions :

$$|H(j\omega)| = \frac{| \text{Numérateur}-H(j\omega) |}{| \text{Dénominateur}-H(j\omega) |} \quad (28)$$

La phase d'une fonction de transfert est donnée par :

$$\phi(H(j\omega)) = -\arctan \left(\frac{Imag(H(j\omega))}{Reel(H(j\omega))} \right) \quad (29)$$

où \arctan est la fonction réciproque de la fonction tangente. De même si $H(j\omega)$ est un rapport de deux fonctions :

$$\phi(H(j\omega)) = \phi(\text{Numérateur}-H(j\omega)) - \phi(\text{Dénominateur}-H(j\omega)) \quad (30)$$

Il est important de rappeler que toute fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$H(j\omega) = \underbrace{H(j\omega)}_{\text{Module}} e^{j \overbrace{\phi(j\omega)}^{\text{Phase}}} \quad (31)$$

3. Unité de mesure pour la puissance acoustique.

4. Par exemple dans le cas d'une résistance $P = \frac{V^2}{R}$

A.2.3 Poles

Les pôles d'une fonction de transfert sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert.⁵ Prenons le cas simple très simple suivant :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (32)$$

On peut facilement démontrer que le pôle est donné par $\omega = \omega_c$ et que pour cette valeur, le gain est infini. Cependant, ce genre de fonction est très peu courante. En pratique, on est bien plus souvent confronté à des fonctions comme la suivante :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (33)$$

L'expression du pôle dans ce cas est donnée par $\omega = j\omega_c$. Bien évidemment, la pulsation en pratique ne peut pas être imaginaire. Ainsi si on analyse le système pour $\omega = \omega_c$, on peut montrer que le module est donné par :

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_c}{\omega_c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H(\omega_c)_{dB} = 20 \log(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3 \text{ dB} \quad (34)$$

Ainsi pour ce cas où la racine du dénominateur est $\omega = j\omega_c$, le gain n'est pas infini mais égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou -3 dB. La pulsation ω_c est appelée la pulsation de coupure.

Analysons à présent la phase à $\omega = \omega_c$

$$\phi(H(\omega_c)) = \phi(\text{Numérateur}) - \phi(\text{Dénominateur}) = 0 - \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (35)$$

A.2.4 Zéros

Les zéros d'une fonction de transfert sont les racines du numérateur de la fonction de transfert. Toute l'analyse faite pour les pôles peut se faire à l'identique pour les zéros. Ainsi, il est très facile de démontrer que pour la fonction suivante⁶ :

$$H(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \quad (36)$$

$$H(\omega_c)_{dB} = +3 \text{ dB} \quad ; \quad \phi(H(\omega_c)) = +\frac{\pi}{4} \quad (37)$$

A.3 Diagramme de Bode

A.3.1 Fonction de base et pente de -1, -20 dB/dec ou -6 dB/oct

Le diagramme de Bode est une représentation asymptotique de la réponse fréquentielle d'un système. Il permet de visualiser rapidement les tendances du module et de la phase d'une fonction de transfert. Prenons la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (38)$$

Son module est :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \Rightarrow H(\omega)_{dB} = -10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right) \quad (39)$$

5. Nous allons ici se contenter du domaine de Fourier mais sachez que dans le domaine de Laplace, le calcul des pôles nous permet d'avoir des données plus complètes, notamment sur la stabilité des systèmes

6. Fonction pas réaliste car en pratique, ce n'est pas possible d'avoir une fonction sans pôle

Analysons d'abord le comportement pour $\omega \ll \omega_c$, on peut facilement démontrer que le module tend vers 1 donc 0 dB. Pour $\omega \gg \omega_c$, le module

$$H(\omega)_{dB} \simeq -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_c) \quad (40)$$

Ainsi si on trace le module sur un axe logarithmique en $\log(\omega)$, la fonction s'approxime à une droite. Donc asymptotiquement, le module est égal à 0 dB pour $\omega < \omega_c$ et à la droite $-20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_c)$ pour $\omega > \omega_c$. On peut faire les mêmes analyses pour la phase dans les 2 régimes asymptotiques $\omega \ll \omega_c$ et $\omega \gg \omega_c$, on obtient respectivement 0 et $-\frac{\pi}{2}$. Donc asymptotiquement, la phase est égale à 0 pour $\omega < \omega_c$ et à $-\frac{\pi}{2}$ pour $\omega > \omega_c$. La figure A.8 illustre le diagramme de Bode et le tracé réel de $H(\omega)$. Comme on peut le constater le diagramme de Bode est une très bonne approximation de la fonction $H(j\omega)$ quand on est loin de la pulsation du pôle. A ω_c , le module est de -3 dB et la phase de $-\frac{\pi}{4}$ comme prévu dans le paragraphe précédent.

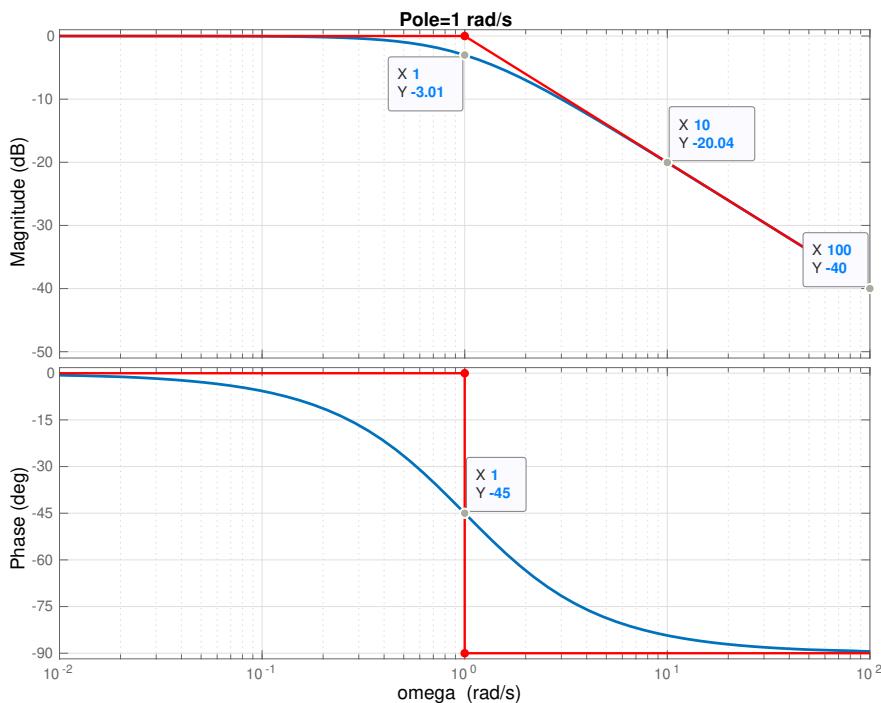


FIGURE A.8 – Diagramme de Bode pour filtre passe bas

Pour exprimer la pente de la décroissance, prenons $\omega' = 10\omega \gg \omega_c$. Par des calculs simples, on peut facilement démontrer que :

$$H(\omega')_{dB} \simeq H(\omega)_{dB} - 20 \log(10) = H(\omega)_{dB} - 20 \quad (41)$$

Ainsi la décroissance est de 20 dB quand la pulsation est multipliée par 10. On parle donc d'une pente de -20 dB/decade.

On peut aussi appliquer le même raisonnement à une pulsation $\omega'' = 2\omega \gg \omega_c$.

$$H(\omega'')_{dB} \simeq H(\omega)_{dB} - 20 \log(2) = H(\omega)_{dB} - 6 \quad (42)$$

La décroissance est de 6 dB quand la pulsation est multipliée par 2. On parle ainsi d'une pente à -6 dB/octave.

Pour les systèmes polynomiaux classiques, toutes les pentes (dans le régime asymptotique) sont des multiples de ± 20 dB/decade ou 6 dB/octave. Pour simplifier les notations, on désigne ces pentes par ± 1 . Ainsi la pente d'un système avec une décroissance de -40 dB/decade peut être aussi qualifiée d'une pente de -2 .

A.3.2 Diagramme de bode : filtre 2ème ordre

Pour illustrer la méthodologie pour généraliser le tracé d'un diagramme de Bode, prenons l'exemple suivant :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_z}}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}})(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p2}})} = \underbrace{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_z}\right)}_{H_A(j\omega)} \underbrace{\frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}})}}_{H_B(j\omega)} \underbrace{\frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p2}})}}_{H_C(j\omega)} \quad (43)$$

Le module de $H(j\omega)$ peut donc être exprimé comme suit :

$$|H(\omega)| = |H_A(\omega)| \cdot |H_B(\omega)| \cdot |H_C(\omega)| \quad (44)$$

\implies

$$H(\omega)_{dB} = 20 \log(|H(\omega)|) = H_A(\omega)_{dB} + H_B(\omega)_{dB} + H_C(\omega)_{dB} \quad (45)$$

En conséquence, le diagramme de Bode de $H(j\omega)$ est la somme des 3 diagrammes de Bode des 3 sous fonctions.

L'analyse de phase se fait de manière similaire, on peut aussi facilement démontrer :

$$\phi H(\omega) = \phi H_A(\omega) + \phi H_B(\omega) + \phi H_C(\omega) \quad (46)$$

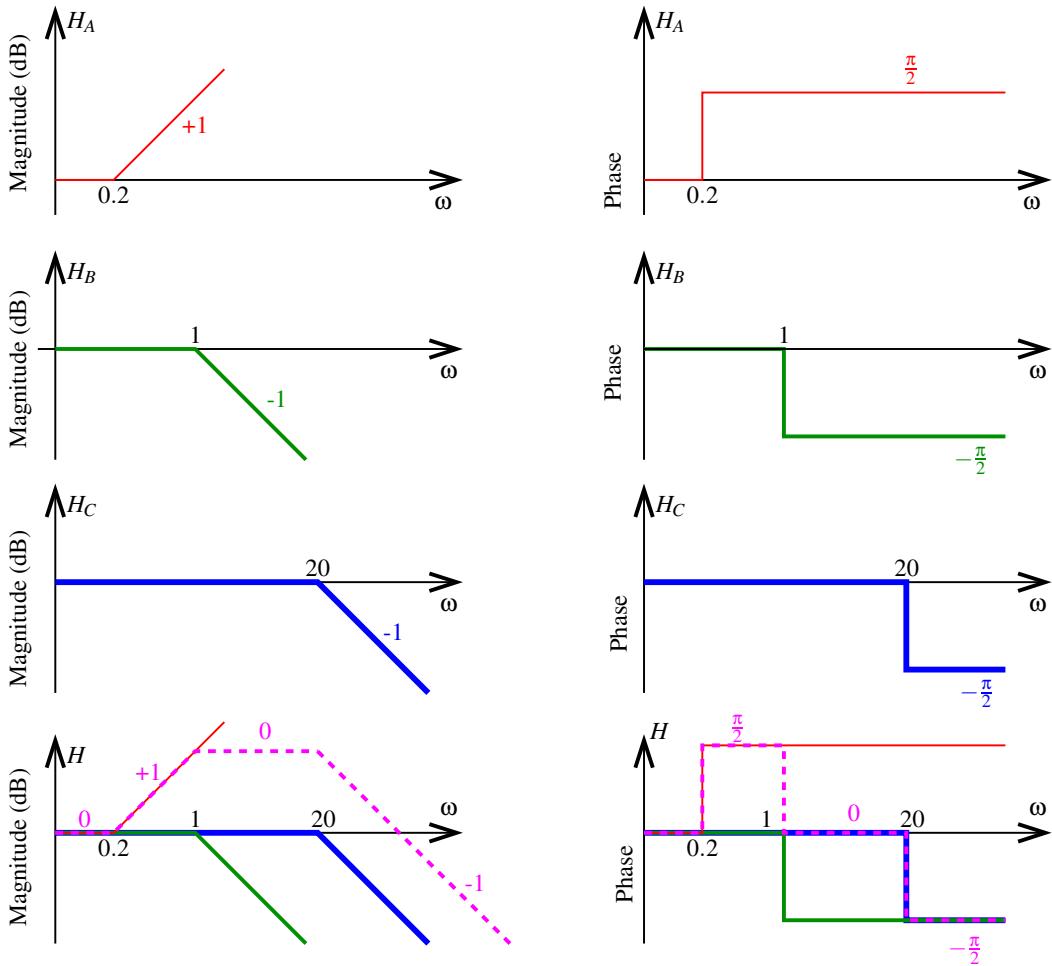
Ainsi le diagramme de Bode de la phase de $H(j\omega)$ est la somme des diagrammes de Bode des 3 fonctions. La figure A.9 illustre la construction du diagramme de Bode de la fonction $H(j\omega)$ pour le cas $\omega_z < \omega_{p1} < \omega_{p2}$. Le tracé des diagrammes du module et de la phase des 3 fonctions de H_A , H_B et H_C est simple. Comme indiqué dans les sections précédentes, un zéro se traduit par une pente de $+1$ et un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ et un pôle par une pente de -1 et un déphasage de $\frac{\pi}{2}$. Le tracé de H est la somme des 3. Pour le module :

- pour $\omega < \omega_z$, la pente des 3 fonctions H_A , H_B et H_C est égal à 0 donc la pente de $H = 0$. Pour la valeur du module, vu que le module vaut 0 dB à $\omega = 0$, il le sera aussi à $\omega = \omega_z$.
- pour $\omega_z < \omega < \omega_{p1}$, H_A a une pente de $+1$, $H_B = H_C = 0$ donc H aura une pente de $+1$.
- pour $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$, H_A a une pente de $+1$, H_B de -1 et H_C de 0 donc H aura une pente de 0 .
- pour $\omega_{p2} < \omega$, H_A a une pente de -1 , H_B et H_C de -1 , H aura donc une pente de -1 .
- pour la valeur du module entre $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$, par un calcul très simple, on peut démontrer qu'il vaut $20 \log\left(\frac{\omega_{p1}}{\omega_z}\right) = 20 \log\left(\frac{1}{0.2}\right) = 14$ dB.

Pour la phase

- pour $\omega < \omega_z$, les 3 fonctions $\phi H_A(\omega)$, $\phi H_B(\omega)$ et $\phi H_C(\omega)$ sont nulles donc $\phi H(\omega) = 0$.
- pour $\omega_z < \omega < \omega_{p1}$, $\phi H_A(\omega) = +\frac{\pi}{2}$, $H_B = H_C = 0$ donc $\phi H(\omega) = +\frac{\pi}{2}$.
- pour $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$, $\phi H_A(\omega) = +\frac{\pi}{2}$, $H_B = -\frac{\pi}{2}$ et $H_C = 0$ donc $\phi H(\omega) = 0$.
- pour $\omega_{p2} < \omega$, $\phi H_A(\omega) = +\frac{\pi}{2}$, $H_B = H_C = -\frac{\pi}{2}$ donc $\phi H(\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

Les figures A.10, A.11 et A.12 illustrent les diagrammes de Bode tracés par logiciel pour les 3 cas : $\omega_z < \omega_{p1} < \omega_{p2}$, $\omega_{p1} < \omega_z < \omega_{p2}$ et $\omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_z$. On peut ainsi constater que la construction faite dans la figure A.9 est cohérente avec le résultat de la simulation. L'utilité du diagramme de Bode est qu'il nous permet très rapidement d'anticiper le comportement fréquentiel de la fonction étudiée. Ainsi dans le cas $\omega_z < \omega_{p1} < \omega_{p2}$, la fonction $H(j\omega)$ réalise un filtre passe bande alors que dans les 2 autres cas, on réalise un filtre passe bas.

FIGURE A.9 – Construction du diagramme de Bode pour $\omega_z < \omega_{p1} < \omega_{p2}$

A.3.3 Diagramme de bode : méthode générale

L'approche décrite peut être généralisée à n'importe quelle fonction de transfert polynomiale. Le tracé du diagramme de Bode se fait donc comme suit :

- Le module :
 - On commence par placer les pulsations des pôles et des zéros sur l'axe des abscisses
 - La valeur à $\omega \rightarrow 0$ est égale à $20 \log(H_0)$ où H_0 est le gain pour $\omega = 0$.
 - La pente est nulle sauf si on a un zéro à $\omega = 0$. Dans ce cas, on commence par une pente $+1$ ou $+20$ dB/decade. Dans le cas d'un zéro double, la pente est $+2$...
 - On maintient la fonction initiale jusqu'à la première pulsation caractéristique, si cette pulsation correspond à un pôle, on retranche 1 de notre pente. Ainsi si la pente est nulle avant, on aura une pente de -1 après. Si la pulsation correspond à un zéro, on rajoute $+1$. Ainsi si la pente est nulle avant, on aura une pente de $+1$ après.
 - Si le pôle ou le zéro est double, on retranche/ajoute $+2$...
 - On continue à accumuler les ± 1 jusqu'à la dernière pulsation caractéristique.
- La phase :
 - On commence par placer les pulsations des pôles et des zéros sur l'axe des abscisses
 - La valeur à $\omega \rightarrow 0$ est égale à la phase pour $\omega = 0$.
 - On maintient la valeur initiale jusqu'à la première pulsation caractéristique, si cette pulsation correspond à un pôle, on retranche $\frac{\pi}{2}$ de notre valeur. Ainsi si la valeur est nulle avant, on aura une phase de $-\frac{\pi}{2}$ après. Si la pulsation correspond à un zéro, on rajoute $+\frac{\pi}{2}$. Ainsi si la phase est nulle avant, on aura une phase égale à $\frac{\pi}{2}$ après.

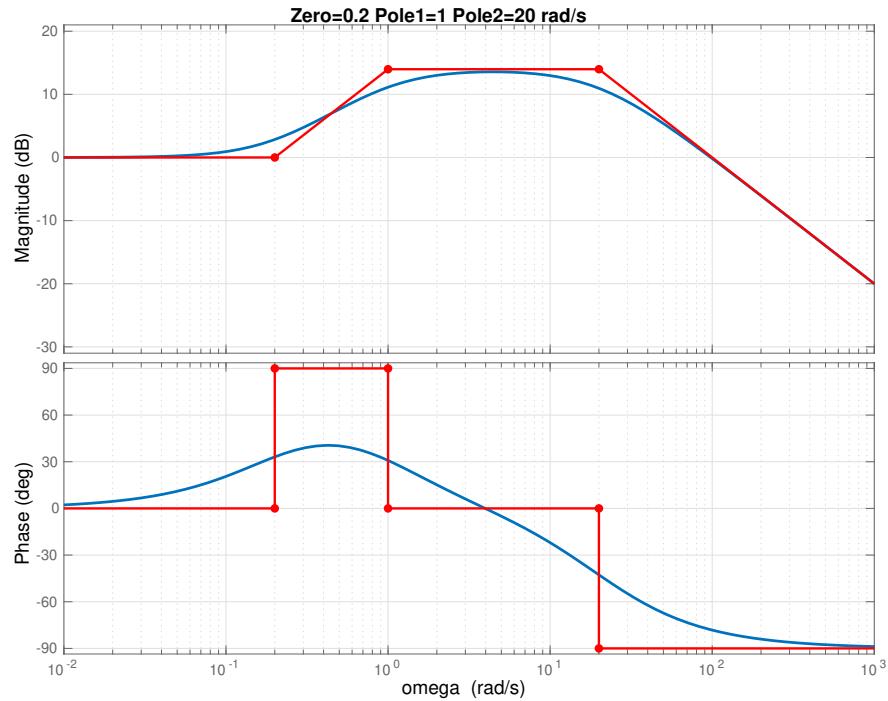
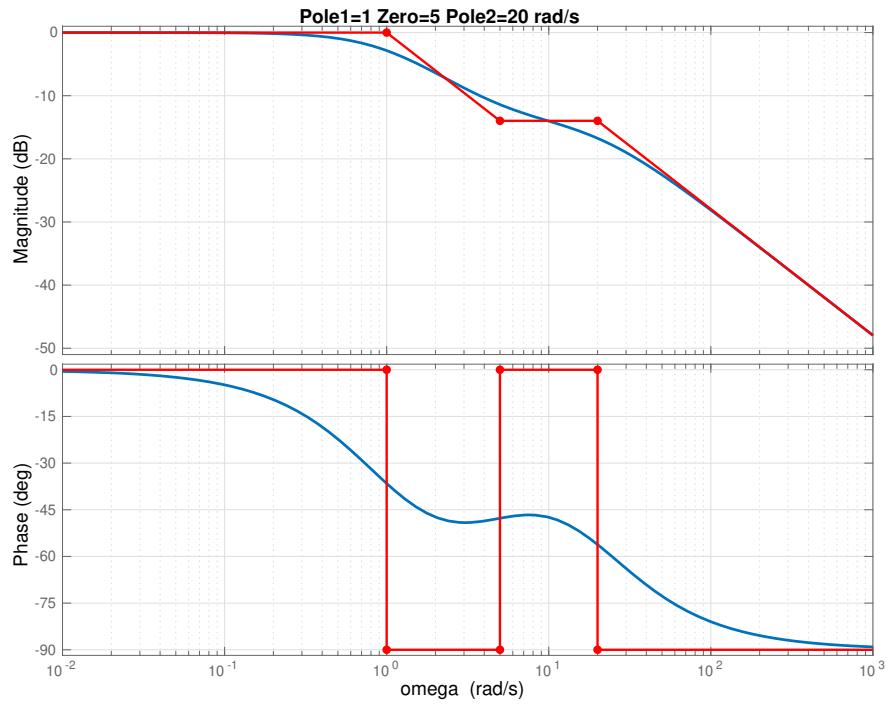
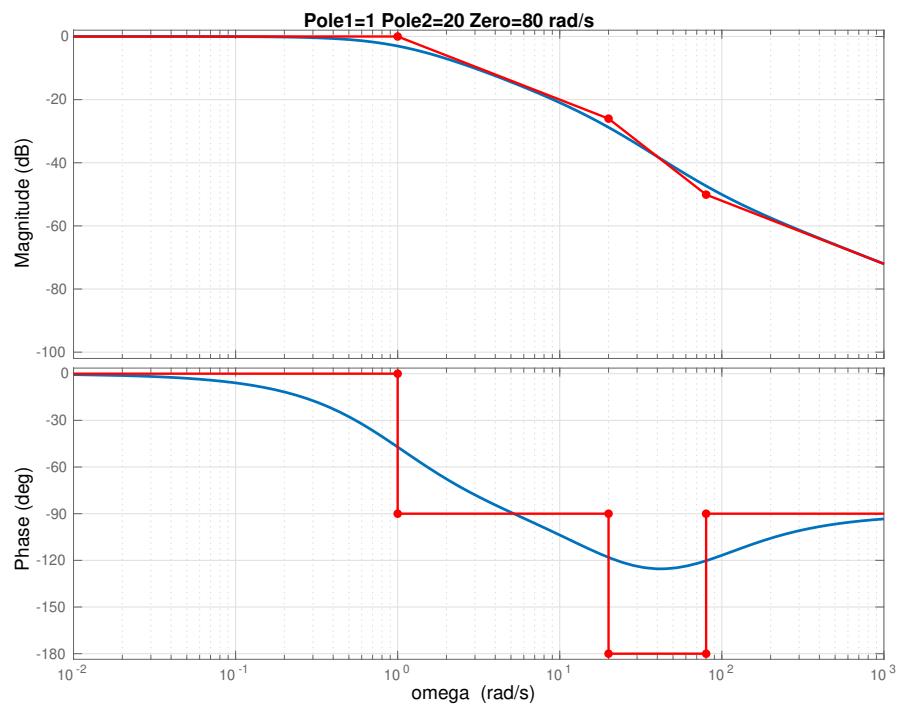


FIGURE A.10 – Diagramme de Bode pour $\omega_z < \omega_{p1} < \omega_{p2}$

- Si le pôle ou le zéro est double, on retranche/ajoute π ...
- On continue à accumuler les $\pm\frac{\pi}{2}$ jusqu'à la dernière pulsation caractéristique.

FIGURE A.11 – Diagramme de Bode pour $\omega_{p1} < \omega_z < \omega_{p2}$ FIGURE A.12 – Diagramme de Bode pour $\omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_z$

Annexe B

TP de rappels

B.1 Introduction

L'objectif de ce TP est de prendre en main les 4 instruments de mesure principaux utilisés en électronique :

- Alimentation stabilisée
 - Génère des tensions DC constantes
 - Dispose souvent de plusieurs sorties permettant de générer des tensions indépendantes ou dépendantes
- Générateur de fonctions
 - Génère des signaux AC, par exemple sinusoïdal, carré, triangulaire, ...
 - La fréquence, amplitude, offset sont réglables
 - Génère aussi des signaux modulés (AM, FM)
- Oscilloscope
 - Permet de visualiser les signaux sur 2 voies en temporel
 - Permet de réaliser une multitude de mesures : fréquence, tension, offset ...
 - La synchronisation se fait grâce à un trigger
- Multimètre
 - Permet de réaliser une multitude de mesures :
 - Voltmètre : mesure de tension
 - Ampermètre : mesure de courant
 - Ohmètre : mesure de résistance
 - Et bien d'autres..
 - Le branchement dépend de la mesure
 - Le multimètre est plus précis qu'un oscilloscope

Pour connecter les composants et les instruments entre eux, on utilise 2 principaux types de cordons ou de câbles

- Fiche banane
 - Transporte un seul signal
 - On utilise des cordons rouge pour l'alimentation et noirs pour la masse
 - Existe sous forme mini-banane avec un plus petit diamètre
- Bayonet Neill-Concelman connector ou BNC
 - Cable coaxial avec un signal (central) et une masse (ext.)
 - Se verrouille d'où le nom Bayonet

B.2 Pont diviseur

Nous allons implémenter le circuit de la figure B.3. On rappelle qu'un potentiomètre est une résistance variable dont la valeur peut être ajustée, le cas échéant par une vis qu'on tournera en utilisant un tournevis. Nous souhaitons que la tension au point A soit égale à 2 V.



FIGURE B.1 – instruments de mesure : haut gauche) Alimentation stabilisée, haut droite) Multimètre, bas gauche) Oscilloscope, bas droite) Générateur de fonction ou générateur basse fréquence (GBF).

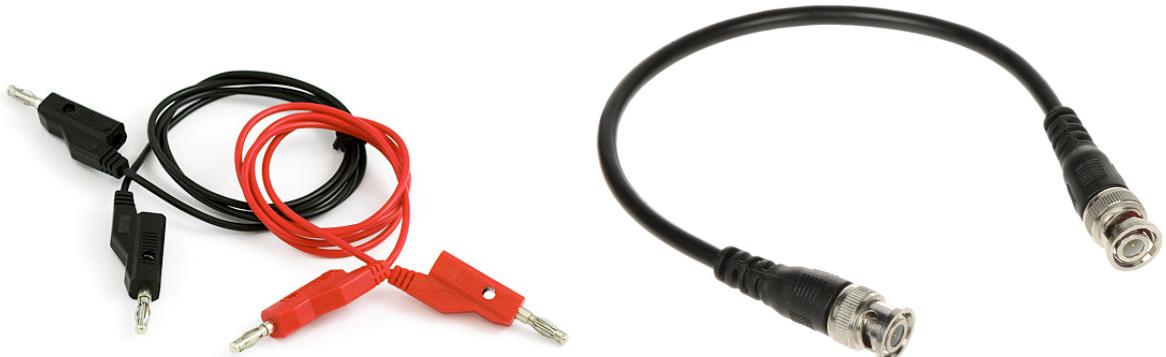


FIGURE B.2 – Cordons ou fil gauche) banane, droite) Bayonet Neill-Concelman connector ou BNC

Question B.2.1. Déterminer théoriquement la valeur de R_{pot} qui permet d'obtenir un V_A de 2 V.

Réaliser le montage sur la plaquette. Pour ce faire :

- Placer vos composants sur la maquette
- Connecter les entre eux et au noeud d'alimentation Vdd et à la masse Gnd de la maquette
- Fixer la sortie 6 V de l'alimentation stabilisée à 5 V
- Connecter la masse de la maquette Gnd à la masse de l'alimentation stabilisée COM puis Vdd de la maquette au +6V de l'alimentation.

Nous allons à présent mesurer la tension V_A à l'aide d'un multimètre. Pour ce faire :

- Appuyer sur la touche "DC V" pour précier qu'on souhaite faire une mesure de tension continue
- Connecter la masse du multimètre à la masse de l'alimentation
- Connecter l'entrée V au noeud V_A

Question B.2.2. A l'aide de votre tournevis, modifier la valeur de R_{pot} pour ajuster V_A à 2 V.

Nous allons à présent mesurer la valeur de R_{pot} avec l'ohmmètre du multimètre. Pour ce faire :

- Débrancher votre potentiomètre, positionner le dans un autre emplacement de la maquette
- Activer le multimètre en mode ohmètre Ω
- Connecter les 2 bornes du potentiomètre en utilisant les mêmes entrées au niveau du multimètre.

Question B.2.3. Comparer la valeur obtenue à la valeur théorique.

On mesure jamais à l'ohmètre une résistance connectée à d'autres composants et encore moins alimentée. La mesure sera complètement faussée.

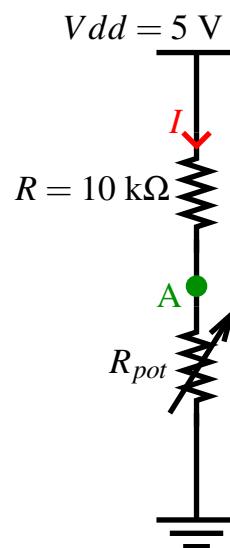


FIGURE B.3 – Diviseur résistif

B.3 Filtre passe haut

Nous allons analyser à présent un filtre passe haut C-R. Pour implanter votre filtre :

- Placer les composants nécessaire sur la maquette et connecter les entre eux
- Connecter l'entrée du filtre à une des entrées/sorties de la maquette S1 à S4

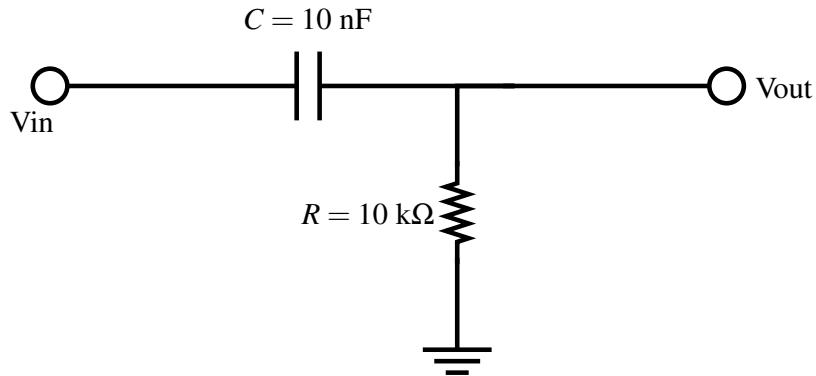


FIGURE B.4 – Filtre passe haut

— Faites la même chose pour la sortie

Nous allons à présent configurer le signal d'entrée créé par le générateur de fonction. Choisissez **Function -> Sine**, une amplitude de 1 V_{pp} , un offset nul et une fréquence de 1 kHz . Afin de vérifier le signal, nous allons d'abord le visualiser à l'oscilloscope. Utiliser le sélecteur BNC ou BNC-T, il vous permettra de connecter le signal d'entrée à la fois à l'oscilloscope et au circuit. Connecter le générateur avec un cordon BNC à l'oscilloscope. Activer la sortie du générateur en appuyant sur le bouton 'Channel On'.

Sur l'oscilloscope, on dispose de 2 contrôles principaux : le premier horizontal qui permet de régler le temps exprimé en seconde/division et le deuxième vertical qui permet de régler la tension exprimée en V/div . Ajuster l'oscilloscope pour l'obtention d'une visualisation de bonne qualité. Dans le futur, vous pourrez "tricher" en appuyant sur le bouton **Autoset**.

L'oscilloscope permet de réaliser des mesures automatiques grâce au menu **Meas**.

Question B.3.1. *Rajouter des mesures de tension crête à crête V_{pp} et de fréquence. Vérifier qu'elles sont cohérentes avec les indications du générateur.*

Maintenant qu'on a vérifié que le signal est conforme à nos attentes, connecter la deuxième sortie du BNC-T à l'entrée du filtre et sa sortie au deuxième canal de l'oscilloscope.

Question B.3.2. *Faites varier la fréquence pour trouver la fréquence de coupure du filtre. Pour cela, mesurer l'amplitude V_{pp} de la sortie et trouver la valeur de la fréquence qui permet d'avoir une chute de tension de -3 dB ou de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comparer la valeur obtenue à la valeur théorique.*

Question B.3.3. *A l'aide des curseurs, mesurer le déphasage entre les 2 signaux. Convertir la valeur en radians. Comparer à la valeur théorique.*

Question B.3.4. *Faites varier l'offset entre -2 V et 2 V du signal d'entrée. Quel est l'impact sur le signal de sortie ? Expliquer l'observation.*

Annexe C

Maquette de Prototypage

C.1 Maquette de prototypage générique

Pour les TP1 et TP3, nous utiliserons la maquette de prototypage illustrée dans la figure C.1. Cette maquette contient dans sa partie centrale 2 supports à circuits de 20 broches chacun. Les connecteurs mini-banane numérotés de 1 à 20 sur le bas et le haut de la maquette permettent de se connecter aux broches des circuits intégrés qu'on disposerait dans les supports à circuits. De part et d'autre des supports à circuits, vous disposez de 2 zones avec des connecteurs mini-banane que vous pourrez utiliser pour disposer vos composants (résistances, condensateurs, inductances...). Les connecteurs reliés par un trait en vert foncé sont connectés entre eux. Par ailleurs, tous les connecteurs partageant le même nom (**Vdd**, **Gnd** et **Vss**) sont déjà connectés entre eux. Enfin, pour interfaçer la carte avec les instruments de mesure, vous disposez de 4 entrées/sorties BNC (**S1**, **S2**, **S3** et **S4**). Ces connecteurs sont respectivement reliés aux connecteurs mini-banane qui se trouvent à leur proximité¹.

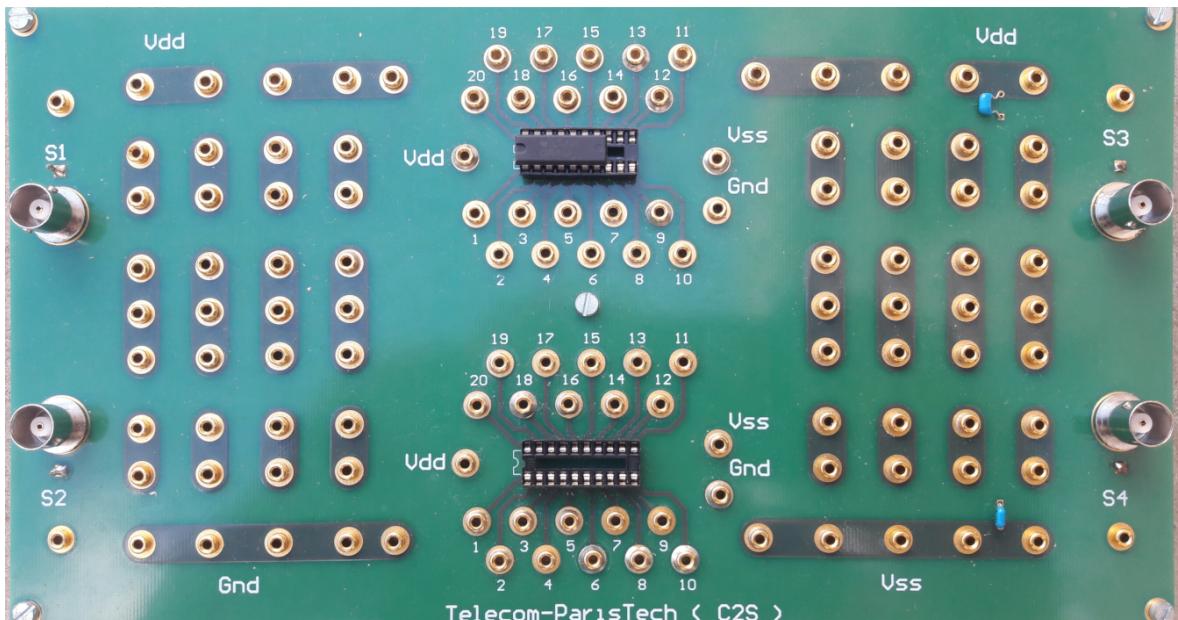


FIGURE C.1 – Maquette de prototypage générique

1. La masse de tous connecteurs BNC est connectée à la masse de la maquette (le noeud **Gnd**)

C.2 Maquette Convertisseur Analogique Numérique

Pour le TP4, nous utiliserons la maquette illustrée dans la figure C.2. Le composant principal de la maquette est la plateforme ADALM 1000. Cette plateforme comprend 2 Convertisseurs Analogiques Numériques du type SAR. Leurs entrées respectives sont les broches CH A et CH B. La plateforme ADALM 1000 intègre également une partie numérique (microcontrôleur et interface USB) qui permet de transférer les données numérisées à l'ordinateur. L'interface USB permet aussi d'alimenter la plateforme. Sur la partie basse de la plateforme, nous avons disposé une carte d'expérimentation (*breadboard*) qu'on utilisera pour mettre en oeuvre des circuits en amont du Convertisseur Analogique Numérique. Sur la partie gauche de la maquette, nous avons disposé 4 connecteurs BNC pour se connecter aux instruments de mesure. Les signaux des connecteurs BNC sont respectivement reliés aux fils de couleurs à proximité. Les masses des 4 connecteurs BNC sont connectées entre elles et sont reliées au fil noir. Ainsi pour faire une acquisition, il suffit de connecter le fil de couleur associé au connecteur BNC auquel vous vous êtes branchés, à l'entrée du CAN de votre choix (CH A ou CH B) et de connecter le fil noir à la masse de la carte, la broche Gnd.

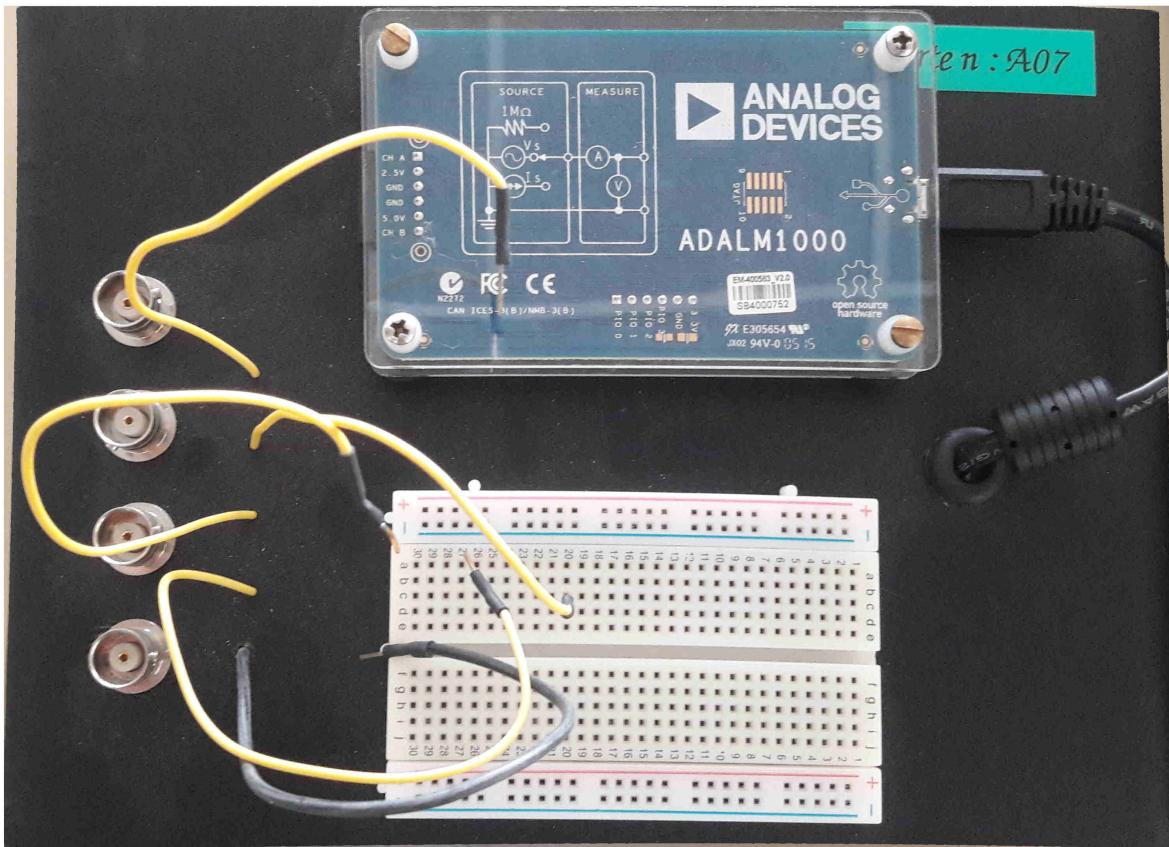


FIGURE C.2 – Maquette Convertisseur Analogique Numérique

