Exercices sur les intégrales stochastiques

incluant la formule d'Itô

30 mai 2017

1 Enoncés

Exercice 1.1.– Soit A un processus à variation finie et M une martingale de carré intégrable.

1. Montrer que $\langle A, X\rangle_t = 0$.

Soit X et Y deux semi-martingales continues de carré intégrable.

2. Montrer que

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s)\ \mathrm{d}Y(s) + \int_0^t Y(s)\ \mathrm{d}X(s) + \langle X, Y\rangle_t$$

Exercice 1.2.– Soit f une fonction déterministe continue sur $[0, T]$.

1. Montrer que $t \mapsto \int_0^t f(s)\ \mathrm{d}B(s)$ est un processus gaussien centré.
2. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[B(t)\int_0^T f(s)\ \mathrm{d}B(s)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}s\right].$$

Exercice 1.3 (Pont brownien).– On admet l'existence et l'unicité d'un processus X continu tel que

$$X(t) = \int_0^t \frac{X(s)}{s-1}\ \mathrm{d}s + B(t),\ 0 \le t < 1. \tag{1}$$

1. Montrer que le processus

$$Y(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\ \mathrm{d}B(s), t \in [0,\ 1[$$

   est solution de (1).
2. Montrer que Y est un processus gaussien dont on précisera la moyenne et la covariance.
3. Montrer que $Y(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 1.

4. Montrer que Y a même loi que le processus $Z(t) = B(t) - tB(1)$.

EXERCICE 1.4.– Trouver la décomposition des semi-martingales suivantes :
— $B(t)^2$
— $t + e^{B(t)}$
— $B(t)^3 - 3tB(t)$
— $\exp(t/2)\sin(B(t))$

EXERCICE 1.5.– Soit u continue, adapté de carré tel que

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t u(s)^2 \ \mathrm{d}s\right] < +\infty.$$

Soit

$$M(t) = \exp(\int_0^t u(s) \ \mathrm{d}B(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u(s)^2 \ \mathrm{d}s). \tag{2}$$

1. Montrer que M est solution de l'équation

$$M(t) = 1 + \int_0^t M(s)u(s) \ \mathrm{d}B(s).$$

On pose pour $x \in \mathbf{R}$, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$. Par exemple,

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = x^2 - 1,\ H_3(x) = x^3 - 3x$$
$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3,\ \ H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x.$$

2. Montrer que pour tous α, x réels,

$$e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k}{k!} H_n(x). \tag{3}$$

3. Montrer qu'on peut définir le polynôme d'Hermite généralisé tel que pour tous α, x, t réels,

$$e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} t} = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k}{k!} H_n(x,t).$$

4. Que vaut

$$\mathbf{E}\left[e^{\alpha B_t} | \mathcal{F}_s\right]?$$

5. En déduire une expression de $\mathbf{E}\left[B_t^k | \mathcal{F}_s\right]$ en fonction du polynôme d'Hermite d'ordre k.

EXERCICE 1.6 (Formule de Kailath-Segall).– Soit $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = B(t)$ et

$$P_{n+1}(t) = \int_0^t P_n(s) \ \mathrm{d}B(s).$$

1. Montrer que tous les P_n sont bien définis.
2. Montrer que
$$\langle P_n,\, B\rangle_t = \int_0^t P_{n-1}(s)\ \mathrm{d}s$$
3. Montrer que pour $n \geq 2$,
$$nP_n(t) = B(t)P_{n-1}(t) - tP_{n-2}(t) \tag{4}$$

On admet que les polynômes d'Hermite satisfont la relation de récurrence

$$H_n(x) = \frac{1}{n}(xH_{n-1}(x) - H_{n-2}(x)),\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1). \tag{5}$$

4. En déduire que
$$P_n(t) = t^{n/2} H_n(t^{-1/2}B(t)).$$

Exercice 1.7.– Soit

$$X(t) = X(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-\tau(t-s)}\ \mathrm{d}B(s),$$

où $X(0)$ et B sont indépendantes.

1. Montrer que $X(t) - X(0)e^{-t}$ suit une loi gaussienne dont on précisera la moyenne et la variance.
2. Comment choisir la loi de $X(0)$ pour que X soit stationnaire.
3. Montrer que
$$X(t) - X(0) = -\tau \int_0^t X(s)\ \mathrm{d}s + B(t).$$