Exercice 3 Black & Scholes

1) On a pour tout $0 \leq t \leq T$,

$e^{-rt} C_t = \mathbb{E}[e^{-rT} C_T \mid \mathcal{F}_t]$. D'après le résultat vu en cours, le processus $(e^{-rt} C_t, 0 \leq t \leq T)$ est donc une $\mathcal{F}_t$-martingale. (l'intégrabilité et l'adaptabilité sont vérifiées par hyp. sur le processus de Black & Scholes).

1

2)a) Rappelons le lemme suivant : Si f est une fonction intégrable, A est $\mathcal{A}$-mesurable et B est indépendante de $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{E}[f(A, B) \mid \mathcal{A}] = \Phi(A)$, où

$\Phi(x) = \mathbb{E}[f(x, B)]$.

Ici, on a $\forall t, C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t]$

$$= e^{-r(T-t)} \left[\left(S_0 e^{\sigma B_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

1

$$= e^{-r(T-t)} \left[\left(S_0 e^{\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\sigma (B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} \left[\left(S_t e^{\sigma (B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right],$$

et l'on est dans le cadre du lemme précédent pour $\mathcal{A} := \mathcal{F}_t$, $A = S_t$, $B = (B_T - B_t)$) A et B sont indép. par l'indép. des accroissements browniens et $f(x, y) = (x e^{y + (r - \frac{\sigma^2}{2})T - t} - K)^+$. On retrouve le résultat proposé. On a bien $f(T, x) = (x - K)^+$.

0.5

b) Comme $B_T - B_t \overset{(\mathcal{L})}{=} B_{T-t} \overset{(\mathcal{L})}{=} \sqrt{T-t}\,\mathcal{N}(0,1)$, 6

en posant $\theta = T-t$ et en appliquant la formule de transfert, on obtient

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-r\theta}\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{\theta}\,y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right) - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

1

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(x e^{\sigma\sqrt{\theta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

3. a) Immédiat en passant au log :

0.5

$$x\exp\left\{\sigma\sqrt{\theta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\theta\right\} > Ke^{-r\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \sigma\sqrt{\theta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\theta > \ln K - r\theta$$

$$\Leftrightarrow y > -\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right) =: -d_2.$$

b) Donc l'intégrande dans l'expression de $f(t,x)$ est non-nulle si et seulement si $y > -d_2$ et donc pour tous t, x,

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{\theta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

1

$$\overset{z=-y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \left(x e^{-\sigma\sqrt{\theta}\,z - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right) e^{-z^2/2}\,dz.$$

4. a) On déduit de la formule précédente que $\forall\, t, x$,

0.5

$$f(t,x) = -Ke^{-r\theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\,dy}_{\Phi(d_2)} + \underbrace{\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + 2\sigma\sqrt{\theta}z + \sigma^2\theta)}\,dz}_{I(t,x)}$$

b) On a donc $\forall\, t, x$,

$$I(t,x) = x \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z+\sigma\sqrt{\theta})^2} dz$$

$$\overset{y = z+\sigma\sqrt{\theta}}{=} x \int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

1

$$=: x\,\Phi(d_1) \quad \text{où } d_1(t,x) := d_2(t,x) + \sigma\sqrt{\theta}$$

c) On a bien démontré la formule de Black & Scholes qui, sous l'hypothèse que le prix actualisé $(\tilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ du sous-jacent est une martingale (ce qui implique que le prix actualisé du portefeuille qui finance le prix de l'option à T est une martingale, et donc
0.5 que le prix de vente ~~à~~ actualisé de l'option est une martingale, puisque les 2 dernières quantités coïncident $\forall t$), permet de calculer explicitement le prix auquel vendre l'option à tout instant t, connaissant le prix du sous-jacent à t, S_t :

$C_t = f(t, S_t)$, où $\forall x$,

$$\boxed{f(t,x) = x\,\Phi(d_1(t,x)) - Ke^{-r\theta}\,\Phi(d_2(t,x)),}$$

qui ne dépend que de S_t, K, t, T, r, σ.

Il s'agit bien du juste prix que le vendeur doit faire payer à l'acheteur de l'option pour financer un portefeuille finançant la valeur $(S_T - K)^+$ à T.