Exercices de probabilités
MDI104
1. Probabilités discrètes

2023–2024

Exercice 1 (Conditionnement)**.** On dispose de deux dés dont un truqué : il donne deux fois plus de 6 que la normale, les autres faces étant équiprobables. Vous lancez un dé, choisi au hasard.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. Si vous obtenez un 6, quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. Si vous obtenez un 6, quelle est la probabilité d'obtenir à nouveau un 6 avec le même dé ?

Exercice 2 (Lois uniformes)**.** Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, avec $N \geq 1$. On note $M = \max(X, Y)$.

1. Calculer $P(M \leq n)$, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$.
2. En déduire l'espérance de M.

Exercice 3 (Permutation)**.** Soit σ une permutation de $n \geq 1$ éléments, choisie de manière aléatoire et uniforme. Combien d'éléments restent inchangés en moyenne ?

Exercice 4 (Mélange)**.** On note $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit I une variable aléatoire sur $[\![1, n]\!]$ indépendante de $X_1, \ldots, X_n$, de loi $(p_1, \ldots, p_n)$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = X_I$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer la covariance entre X et X_1.
3. Calculer la probabilité que $I = 1$ sachant $X = 0$.

Exercice 5 (Loi binomiale négative)**.** Vous jouez à un jeu jusqu'à obtenir n victoires, avec $n \geq 1$, la probabilité de victoire étant égale à $p > 0$. On note X le nombre de défaites.

1. Donner la loi de X.
2. En déduire la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} q^k = \frac{1}{(1-q)^n}, \quad 0 < q < 1.$$

3. Calculer la fonction génératrice de X.
4. En déduire son espérance et sa variance.
5. Quelle est la probabilité d'avoir gagné le premier jeu, sachant $X = k$?

Exercice 6 (Lois de Bernoulli)**.** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $p > 0$. On note X le maximum de ces variables.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer la covariance entre X et X_1.

Exercice 7 (Nombres binaires aléatoires)**.** Soit X, Y deux vecteurs aléatoires de n bits, indépendants et de loi uniforme sur $\{0,1\}^n$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
2. Calculer la probabilité que $X = Y$.
3. En déduire la probabilité que $X \geq Y$.
4. Quelle est la probabilité que $X_1 = 1$ (bit fort) sachant $X \geq Y$?
5. Quelle est la probabilité que $X_n = 1$ (bit faible) sachant $X \geq Y$?

Exercice 8 (Loi multinomiale)**.** On tire n cartes dans un jeu de 52 cartes, avec remise. On note $X \in \mathbb{N}^4$ le nombre de cartes de chaque couleur (trèfle, carreau, cœur, pique).

1. Donner la loi de X.
2. Donner les lois marginales.
3. Calculer la fonction génératrice de X.
4. En déduire la covariance entre X_1 et X_2.

Exercice 9 (Somme aléatoire)**.** Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Poisson de paramètre λ, et N une variable aléatoire indépendante de loi géométrique de paramètre $p > 0$. On note :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1. Calculer l'espérance de S.
2. Calculer la variance de N, puis celle de S.
3. Calculer la covariance entre N et S.
4. Quelle est la limite du coefficient de corrélation entre N et S lorsque p tend vers 0 ?

Exercice 10 (Espérance conditionnelle)**.** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi Poisson de paramètre λ, avec $n \geq 1$. On note :

$$Z = \mathrm{E}(X_1 | X_1 + \dots + X_n).$$

1. Montrer que $Z = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de Z.
3. Calculer l'espérance et la variance de $X_1 - Z$.