CORRIGÉ TD 1

Exercice 1

1) Soient $s, t \geq 0$.

. Comme B_s et B_t sont centrées, on a

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t.$$

. $\forall \lambda, \mu$, $\mathbb{E}[\exp(i\lambda B_s + i\mu B_t)]$ ← supposons $s < t$.

$$= \mathbb{E}\Big[\big(\exp(i(\lambda+\mu)B_s)\big)\big(\exp(i\mu(B_t - B_s))\big)\Big]$$

indép. des incréments

$$= \mathbb{E}[\exp(i(\lambda+\mu)B_s)]\,\mathbb{E}[\exp(i\mu(B_t - B_s))]$$

$$= \mathbb{E}[\exp(i(\lambda+\mu)B_s)]\,\mathbb{E}[\exp(i\mu(B_{t-s}))]$$

$$= \varphi_{B_s}(\lambda+\mu)\,\varphi_{B_{t-s}}(\mu)$$

$$= \exp\left(-\frac{(\lambda+\mu)^2}{2}s\right)\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}(t-s)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\lambda+\mu)^2 s + \mu^2(t-s)\right)\right).$$

. $\forall \lambda, \mu$, $\mathbb{E}[(\lambda B_s + \mu B_t)^2]$

$$= \mathbb{E}[\lambda^2 B_s^2] + \mathbb{E}[\mu^2 B_t^2] + 2\lambda\mu\,\mathbb{E}[B_s B_t]$$

$$= \lambda^2 s + \mu^2 t + 2\lambda\mu\, t \wedge s.$$

Notons $Z = \lambda B_s + \mu B_t$.

2) Pour tout x, on a

$$\varphi_Z(x) = \mathbb{E}\left[e^{i(\lambda B_s + \mu B_t)x}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i(\lambda x)B_s + i(\mu x)B_t}\right]$$

Calcul précédent

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\lambda x + \mu x)^2 s + (\mu x)^2 (t-s)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} x^2 \left\{ (\lambda+\mu)^2 s + \mu^2 (t-s) \right\}\right)$$

On ~~retrouve~~ reconnaît la fonction caractéristique de la $\mathcal{N}\left(0, (\lambda+\mu)^2 s + \mu^2(t-s)\right)$.

2

3) $\forall \lambda, \mu$, $\lambda B_s + \mu B_t$

$$= \lambda B_s + \mu (B_t - B_s) + \mu B_s$$
$$= (\lambda+\mu) B_s + \mu (B_t - B_s)$$
$$\sim \mathcal{N}\left(0, (\lambda+\mu)^2 s + \mu^2 (t-s)\right).$$

C'est donc un vecteur Gaussien.

4) Cours : $(B_s\ B_t)'$ est un vecteur gaussien centré et de variance-covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} s & s\wedge t \\ s\wedge t & t \end{pmatrix}$

$\det \Gamma = st - (s\wedge t)^2$

Densité $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{st - (s\wedge t)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x' \Gamma^{-1} x\right\}$.

Exercice 2

le processus $(\sqrt{t}B_1, t \geq 0)$ est clairement Gaussien, centré et à trajectoires continues.

Or, $\forall s, \forall t$, $\operatorname{Cov}(\sqrt{s}B_1, \sqrt{t}B_1)$

$$= \sqrt{s}\sqrt{t}\operatorname{Cov}(B_1, B_1)$$
$$= \sqrt{st}\operatorname{Var}(B_1)$$
$$= \sqrt{st} \neq s \wedge t.$$

Ce n'est pas un mouvement Brownien.

Exercice 3

$$\forall n, \quad I^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} f(B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right)^2$$
$$\leq n \sum_{k=1}^{n} \left(f(B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right)^2$$
$$\leq n \|f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})}_{\mathcal{N}(0, t_{k+1}-t_k)}{}^2$$

Donc I^2 est intégrable et

$$\mathbb{E}[I^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} f(B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \sum_{l=1}^{n} f(B_{t_l})(B_{t_{l+1}} - B_{t_l})\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}\left[f(B_{t_k})f(B_{t_l})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{l+1}} - B_{t_l})\right]}_{A_{k,l}}.$$

• $\forall k, \ell$ si $\ell \neq k$, on a

$$A_{k,\ell} = \mathbb{E}\Big[\, \mathbb{E}\big[f(B_{t_k}) f(B_{t_\ell}) (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{\ell+1}} - B_{t_\ell}) \,\big|\, \mathcal{F}_{t_k \vee t_\ell} \big] \Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\overbrace{f(B_{t_k}) f(B_{t_\ell})}^{\mathcal{F}_{t_{k\wedge\ell}}} \overbrace{(B_{t_{k\wedge\ell+1}} - B_{t_{k\wedge\ell}})}^{\text{- mesurables}} \underbrace{\mathbb{E}\big[B_{t_{k\vee\ell+1}} - B_{t_{k\vee\ell}} \,\big|\, \mathcal{F}_{t_{k\vee\ell}} \big]}_{0} \Big]$$

par l'indépendance des accroissements.

• $\forall k$, si $\ell = k$ on a

$$A_{k,k} = \mathbb{E}\Big[(f(B_{t_k}))^2 \, \mathbb{E}\big[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_k} \big] \Big]$$

$$= \mathbb{E}\big[(f(B_{t_k}))^2 \big] \, \mathbb{E}\big[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \big]$$

$$= \mathbb{E}\big[(f(B_{t_k}))^2 \big] (t_{k+1} - t_k),$$

d'où le résultat. $\square$

Exercice 4

1) Pour tout t, X_t est une gaussienne puisque le processus (X_t) est gaussien. De plus,

$\mathbb{E}[X_t] = 0$ car le processus est centré, et ~~Var(Xt)~~

$Var(X_t) = Cov(X_t, X_t) = t$ par hypothèse.

Donc $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

2) <u>Rq</u> On peut prendre $t_2 = t_3$.

On a $Cov(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3})$

$= Cov(X_{t_2}, X_{t_4}) - Cov(X_{t_2}, X_{t_3}) - Cov(X_{t_1}, X_{t_4}) + Cov(X_{t_1}, X_{t_3})$

$= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.$

<u>Donc</u> les v.a. $X_{t_2} - X_{t_1}$ et $X_{t_4} - X_{t_3}$ sont décorélées. Comme elles sont gaussiennes, elles sont indépendantes.

On peut généraliser ce raisonnement à tout couple d'intervalles qui n'intersectent éventuellement qu'en leurs frontières : le processus est à accroissements indépendants.

3) $\forall s < t$, $X_t - X_s$ est une gaussienne (combi. linéaire d'un vecteur gaussien), centrée de Variance

$Var(X_t - X_s) = Cov(X_t - X_s, X_t - X_s)$

$= Cov(X_t, X_t) - 2Cov(X_s, X_t) + Cov(X_s, X_s)$

$= t - 2s + s = t - s.$

Donc $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, et donc

$$X_t - X_s \overset{loi}{=} X_{t-s}.$$

3) le proc. (X_t) satisfait donc la déf. première du mouvement brownien.

Exercice 5 On utilise la caractérisation de l'exercice 4 :

- le processus $(-B_t)$ est continu, gaussien, centré et

$\forall s < t$, $Cov(-B_s, -B_t) = Cov(B_s, B_t) \underset{\uparrow}{=} s \wedge t$.

C'est donc un mouvement brownien. (B_t) est un m.b.

$\forall a > 0$

- le processus $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)$ est gaussien (clair : toute combinaison linéaire finie de ses valeurs instantanées est une combi. linéaire finie de (B_t)), centré, continu.

Calculons sa structure de covariance :

$\forall s < t$, $Cov\left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{as}, \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)$

$$= \frac{1}{a} Cov(B_{as}, B_{at})$$

(B_t) est un m.b.

$$= \frac{1}{a}(as \wedge at)$$

$$= \frac{1}{a} a (s \wedge t) = s \wedge t.$$

C'est donc un mouvement brownien.