Chapitre 3
L'intégrale de Wiener

Pascal Moyal

4 juin 2021

Table des matières

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions essentielles du calcul stochastique et pour commencer, nous définissons une intégrale par rapport aux variations du mouvement brownien, l'intégrale de Wiener.

1 Motivations en mathématiques financières

Nous allons modéliser l'évolution d'un portefeuille à temps discret. On suppose que le marché est constitué par

1. un actif non risqué, rémunéré par le taux actuariel r ;
2. d actifs risqués, aussi appelés *sous-jacents*, dont les prix respectifs à chaque instant sont aléatoires.

Notons les quantités suivantes,

— $S_0^0 \equiv 1$ valeur du numéraire à n $= 0$;
— Pour tout $n \in [\![0, T]\!]$, $S_n^0 = (1+r)^n$, la valeur du numéraire à l'instant n ;
— Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, S_0^i, la valeur (déterministe, connue) à 0 de l'actif risqué i ;
— Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et tout $n \in [\![0, T]\!]$, S_n^i, la valeur (aléatoire) de l'actif risqué i à l'instant n.

1.1 Portefeuille à temps discret

Définition.

Un portefeuille $H = (H_n^0, \dots, H_n^d)_{n \in [\![0,T]\!]}$ est un ensemble d'unités de ces actifs, dont la composition évolue dans le temps. Pour tout $n \in [\![0, T]\!]$ et tout $i \in [\![0, d]\!]$, H_n^i désigne le nombre d'unités de l'actif i dans le portefeuille à l'instant n. La valeur du portefeuille à l'instant n est alors donnée par

$$V_n(H) = \sum_{i=0}^{d} H_n^i S_n^i.$$

Définition.

Un portefeuille $H = (H_n^0, \dots, H_n^d)_{n \in [\![0,T]\!]}$ est dit *autofinancé* si

1. Pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, H_0^i est intégrable ;
2. Pour tout n, $H_n^i, i = 0, \dots, d$ sont mesurables par rapport à la tribu $(\mathscr{F}_n)$, où
$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_k^i,\, k \in [\![0, n]\!],\, i \in [\![1, d]\!]\right), \quad n \in [\![0, T]\!];$$
3. Pour tout n,
$$\sum_{i=0}^{d} H_{n-1}^i S_n^i = \sum_{i=0}^{d} H_n^i S_n^i = V_n(H),$$
ce qui signifie que le capital ne peut qu'être réinvesti et redistribué à tout instant, sans ajout ni perte d'actifs depuis l'extérieur.

Définition.

Soit n $\in [\![0,T]\!]$, la valeur actualisée du portefeuille H à l'instant n est donnée par

$$\widetilde{V}_n(H) = \frac{V_n(H)}{S_n^0} = (1+r)^{-n} V_n(H),$$

et pour tout i, la valeur actualisée de l'actif i à l'instant n est donnée par

$$\widetilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{S_n^0} = (1+r)^{-n} S_n^i.$$

Ce sont donc respectivement les valeurs du portefeuille et d'une unité d'actif i, en argent constant.

Proposition.

Soit H un portefeuille autofinancé, alors pour tout $n \in [\![1,T]\!]$ on a

$$\widetilde{V}_n(H) = V_0(H) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}^i (\widetilde{S}_k^i - \widetilde{S}_{k-1}^i).$$

Démonstration. Pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_1(H) = \frac{V_1(H)}{S_1^0} = \frac{1}{S_1^0}(H_0^0 S_1^0 + \sum_{i=1}^{d} H_0^i S_i^i) = H_0^0 + \sum_{i=1}^{d} H_0^i \widetilde{S}_1^i \\ = V_0(H) - \sum_{i=1}^{d} H_0^i S_0^i + \sum_{i=1}^{d} H_0^i \widetilde{S}_1^i = V_0(H) + \sum_{i=1}^{d} H_0^i (\widetilde{S}_1^i - \widetilde{S}_0^i),\end{aligned}$$

car pour tout i, $S_0^i = \widetilde{S}_0^i$. Si l'on suppose maintenant que la relation est vraie pour $n-1 \in [\![0, T-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_n(H) = H_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^{d} H_{n-1}^i \widetilde{S}_n^i &= \widetilde{V}_{n-1}(H) - \sum_{i=1}^{d} H_{n-1}^i \widetilde{S}_{n-1}^i + \sum_{i=1}^{d} H_{n-1}^i \widetilde{S}_n^i \\ &= V_0(H) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{d} H_k^i (\widetilde{S}_k^i - \widetilde{S}_{k-1}^i) + \sum_{i=1}^{d} H_{k-1}^i (\widetilde{S}_n^i - \widetilde{S}_{n-1}^i) \\ &= V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} H_{k-1}^i (\widetilde{S}_k^i - \widetilde{S}_{k-1}^i).\end{aligned}$$

□

Définition.

Un portefeuille autofinancé $H = ((H_n^0, H_n), n \in [0,T])$ constitue une *opportunité d'arbitrage* (OA) si

1. $V_0(H) = 0$ (valeur initiale nulle) ;
2. $\forall n \in [\![0,T]\!], V_n(H) \geq 0$ p.s. ;
3. $\mathbb{P}(V_T(H) > 0) > 0$.

Une opportunité d'arbitrage est donc un portefeuille ayant une valeur possiblement positive à l'échéance, partant d'une valeur nulle ; autrement dit, c'est une opportunité de gagner de l'argent artificiellement, sans investissement initial. C'est donc quelque chose qu'un marché financier sain veut éviter.

Jusqu'à la fin de la section, on suppose que $d = 1$, *i.e.* il n'y a qu'un seul unique actif risqué (qui peut lui-même représenter un groupe d'actifs, un portefeuille, un fonds, etc.). On note alors pour tout n, S_n et $\widetilde{S}_n$, le prix et le prix actualisé de l'actif risqué considéré.

Théorème (Théorème fondamental de la modélisation financière)**.**

Le marché est sans OA si et seulement si il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω sous laquelle $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq T}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. $\mathbb{P}$ est alors appelée probabilité risque neutre.

Corollaire.

Soit H un portefeuille autofinancé. Sous l'hypothèse d'absence d'OA, $\widetilde{V}_n(H)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$.

Démonstration. Tout d'abord, $\widetilde{V}_1(H)$ est une fonction mesurable de $\widetilde{S}_0$ et de $\widetilde{S}_1$, elle est donc $\mathcal{F}_1$-mesurable. D'autre part, comme $\widetilde{S}_0$ et $\widetilde{S}_1$ sont intégrables, $\widetilde{V}_1(H)$ l'est aussi. On raisonne ensuite par récurrence. Si pour un certain $n-1 \leq T-1$, $V_{n-1}(H)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et intégrable, alors $V_n(H)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable, puisque

$$V_n(H) = H^0_{n-1}S^0_n + H_{n-1}S_n = H^0_nS^0_n + H_nS_n.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{V}_{n+1}(H)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_0(H) + \sum_{k=1}^{n+1} H_{k-1}(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}|\mathcal{F}_n)] &= V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}) + H_n\mathbb{E}[\widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n|\mathcal{F}_n] \\ &= V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}) = \widetilde{V}_n(H), \quad \text{p.s..}\end{aligned}$$

□

1.2 Simulation des actifs conditionnels

Définition.

On appelle *actif conditionnel* ξ de maturité T, une v.a. p.s. positive ou nulle, et $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Par exemple, une option d'achat ou de vente sur l'actif de prix $(S_n)_{0\leq n\leq T}$ est un actif conditionnel.

Définition.

On dit que l'actif ξ de maturité T est simulable si il existe un portefeuille autofinancé H tel que $V_T(H) = \xi$ p.s.

Simuler un actif ξ (i.e. trouver le bon Portefeuille auto-financé le simulant) revient donc à déterminer une stratégie de couverture pour ξ, c'est-à-dire, pour pouvoir payer à T le prix que vaudra cet actif à cet instant.

Proposition.

Soit un marché sans OA, soit ξ un actif de maturité T et H simulant ξ. On a alors la formule dite de la *moyenne actualisée* :

$$V_n(H) = \frac{S_n^0}{S_T^0}\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{n-T}\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n], \quad n \in [\![0, T]\!].$$

Démonstration. Le processus $(\widetilde{V}_n(H))_{0\leq n\leq T}$ est une $\mathcal{F}_n$ - martingale, on peut donc écrire pour tout n que

$$\widetilde{V_n}(H) = \mathbb{E}\left[\widetilde{V_T}(H)|\mathscr{F}_n\right] \text{ p.s.},$$

ce qui implique trivialement le résultat. □

1.3 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

On introduit dans cette section un modèle possible pour l'évolution du prix de l'actif risqué $(S_n)_{0\leq n\leq T}$.

Définition.

Le modèle de CRR est un modèle binomial pour lequel, à chaque instant, le rendement R_n de l'actif risqué ne peut prendre que 2 valeurs. Formellement, on note pour tout $n \in [\![0, T-1]\!]$,

$$R_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n},$$

de sorte que

$$S_n = S_0 \prod_{i+1}^{n}(1 + R_i).$$

On suppose alors que pour tout tout $n \in [\![0, T-1]\!]$, R_n ne peut prendre que deux valeurs h ("haut") et b ("bas").

On peut alors montrer le résultat suivant,

Théorème.

Le modèle de CRR est sans OA si, et seulement si
- $b < r < h$
- les v.a. $(R_n)_{1\leq n\leq T}$ sont i.i.d. de la loi suivante sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(R_n = b) = \frac{h-r}{h-b}; \qquad \mathbb{P}(R_n = h) = 1 - \frac{h-r}{h-b} = \frac{r-b}{h-b}.$$

Démonstration. "$\Longleftarrow$" On a pour tout n,

$$\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[R_{n+1}] = b\frac{h-r}{h-b} + h\frac{r-b}{h-b}, = r\frac{h-b}{h-b} = r$$

et donc

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n(1+R_n)|\mathcal{F}_n] = S_n\mathbb{E}[1+R_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n(1+\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = S_n(1+r), \text{ p.s.}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[\widetilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}}S_n(1+r) = \frac{S_n}{(1+r)^n} = \widetilde{S}_n \text{ p.s.},$$

ce qui montre que $((\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq T})$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. Le marché est donc sans OA.

"$\Longrightarrow$" Supposons maintenant que l'on a un marché sans OA. Alors, d'une part, posons pour tout $n \in [\![0,T]\!]$, $H_n = 1$, et $H_n^0 = -S_0$. Alors,

— $V_0(H) = -S_0 \times 1 + (1 \times S_0) = 0$;
— H est auto-financé car ses coefficients sont contants ;
— Pour tout n,

$$\begin{aligned} V_n(H) = H_n^0(1+r)^n + H_nS_n = -S_0(1+r)^n + S_0\prod_{i=1}^n(1+R_i) &= S_0(\prod_{i=1}^n(1+R_i) - (1+R)^n) \\ &\geq S_0((1+b)^n - (1+r)^n). \end{aligned}$$

Par conséquent, $r < b$ impliquerait que $V_n(H) > 0$ pour tout n et $r = b$ impliquerait

$$\mathbb{P}(V_T(H) > 0) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^T\{R_i = h\}\right] \geq \mathbb{P}(R_1 = h) > 0.$$

Dans les deux cas, on aurait une opportunité d'arbitrage, une absurdité. On raisonne symétriquement si $r \geq h$.
D'autre part, pour tout $n \in [\![0,T-1]\!]$ on a

$$\mathbb{E}[\widetilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \widetilde{S}_n = (1+r)S_n, \text{ p.s.}$$

Ceci revient à dire que pout tout $n \in [\![0,T-1]\!]$,

$$\mathbb{E}[S_n(1+R_{n+1})|\mathcal{F}_n] = (1+r)S_n, \text{ p.s.},$$

ou encore,

$$\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n] = r, \text{ p.s..}$$

Donc pour tout $n \in [\![0,T-1]\!]$, R_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$ (car cette espérance conditionnelle est déterministe). En particulier, on a pour tout n, $\mathbb{E}(R_{n+1}) = r$, soit

$$b\mathbb{P}(R_{n+1} = b) + b(1 - \mathbb{P}(R_{n+1} = b)) = r.$$

Ceci implique que que

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = b) = \frac{h-r}{h-b}.$$

□

1.4 Passage au temps continu

On va se rapprocher d'un contexte plus réaliste, où la gestion du portefeuille peut se faire *à tout instant* sur l'intervalle continu $[0,T]$, en passant à une limite d'échelle. On procède pour cela à la même normalisation que pour le Théorème de Donsker : pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_{\frac{n}{N}}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}}S_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

et pour tout $t \geq 0$,

$$S_t^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(S_{\frac{n}{N}}^{(N)} + \left(t - \frac{n}{N}S_{\frac{n+1}{N}}^{(N)}\right)\right), \quad \frac{n}{N} \leq t < \frac{n+1}{N}. \tag{2}$$

Le Théorème de Donsker implique que

Théorème.

La suite de processus $\left\{\left(S_t^{(N)},\, t \geq 0\right)\,;\, N \in \mathbb{N}^*\right\}$ converge en loi, quand N tend vers l'infini, vers un mouvement brownien géométrique $(S_t,\, t \geq 0)$.

Par exemple, on peut facilement construire un cas particulier (symétrique) du modèle de CRR convergeant vers le processus de Black & Scholes. On remarque en particulier que sous cette limite d'échelle, la valeur actualisée du numéraire à tout instant $t \leq T$ est donnée par $S_t^0 = e^{rt}$, et donc que la valeur actualisée de l'actif risqué de Black et Scholes, donné par

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt} S_t,\, t \leq T,$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale, où $(\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien de référence. En particulier, on a vu qu'une stratégie de couverture pour un actif conditionnel ξ (construit à partir de l'actif risqué de prix $(S_n)_{0 \leq n \leq T}$) à T, c'est-à-dire, (la valeur actualisée d') un portefeuille autofinancé sur $[\![0,T]\!]$ simulant ξ, était donnée par une martingale $\left(\widetilde{V_n}(H)\right)_{0 \leq n \leq T}$ de la forme

$$\widetilde{V}_n(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}), \quad n \in [\![0,T]\!].$$

Il est donc tentant de vouloir passer à la limite d'échelle dans l'équation précédente, et d'écrire, en un sens à préciser, que la valeur actualisée du portefeuille en temps continu $\left(\widetilde{V}_t(H),\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale, et que

$$\widetilde{V}_t(H) = V_0(H) + \int_0^t H_u \;\mathrm{d}\widetilde{S_u}, \quad t \in [0,T],$$

où le sens de l'intégrale ci-dessus est à préciser. L'objectif de ce chapitre est de construire rigoureusement cet objet.

2 Processus à variation finie

2.1 Fonction à variation finie

Dans toute la section, on fixe $T > 0$.

Définition.

On dit que la fonction continue $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, nulle en 0, est *à variation finie* ("à VF") sur $[0,T]$ si il existe une mesure μ signée (i.e., s'écrivant comme différence de deux mesures finies positives) telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, $a(t) = \mu([0,t])$. On note alors $[\mu|$ la somme de ces deux mesures finies positives, et pour toute fonction mesurable $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{[0,T]} f(s)\,|\mu|(\,\mathrm{d}s) < \infty$, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\int_0^t f(s) \;\mathrm{d}a(s) = \int_{[0,t]} f(s)\,\mu(\,\mathrm{d}s).$$

Proposition.

Une fonction continue, nulle en 0, est à VF sur $[0,T]$ si et seulement si elle peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes et continues sur $[0,T]$, et nulles en 0.

Démonstration. L'application

$$\begin{cases} \{\text{Fonctions croissantes c.à.d. : } [0,T] \to \mathbb{R}\} & \longrightarrow \text{Mesures positives finies sur } [0,T] \\ f & \longmapsto \mu \text{ telle que } \mu([0,t]) = f(t) \text{ pour tout } 0 \le t \le T. \end{cases}$$

est bijective. □

Définition.

on dit que la fonction continue $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, nulle en 0, est à variation finie, si pour tout T la restriction de a à l'intervalle $[0,T]$ est à variation finie sur $[0,T]$.

Proposition.

Soit a une fonction à VF sur $[0,T]$. Alors, pour tout $t \ge 0$ et toute suite $\{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = t,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ de subdivisions emboîtées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0,

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left|a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)\right| < +\infty$$

et $|\mu|([0,t])$ est le suprémum de la quantité précédente sur toutes les telles subdivisions. Par ailleurs, pour toute f continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}a(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_i^n)\left(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)\right).$$

Démonstration. Voir les preuves de la Proposition 4.1 et du Lemme 4.1 du Livre de J.F. Le Gall. □

2.2 Processus à variation finie

A partir de maintenant et pour tout le chapitre, on fixe un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une filtration de référence $(\mathscr{F}_t,\ 0 \le t \le \infty)$, satisfaisant aux conditions habituelles.

Définition.

On dit que le processus $\mathscr{F}_t$-adapté $(A_t,\ t \ge 0)$ est *à variation finie* si p.s. la fonction $t \mapsto A_t$ est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$.

Rappelons le résultat suivant (Exercice 7 de la feuille de TD1),

Proposition.

Soit $(B_t,\ t \ge 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2 = 1, \quad \text{p.s..}$$

Démonstration. Soit pour tout n, $S_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2$. On a clairement pour tout n,

$$\mathbb{E}\left[S_n\right] = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left(B_{2^{-n}}\right)^2\right] = 2^n 2^{-n} = 1;$$

$$\mathrm{Var}\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(\left(B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(2^{-n}G^2\right) = 2^n 2^{-2n}\mathrm{Var}\left(G^2\right) = 2^{-n}\mathrm{Var}\left(G^2\right),$$

d'après l'indépendance des accroissements, en notant G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ceci implique avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n,

$$\mathbb{P}\left[|S_n - 1| > \varepsilon\right] \leq \frac{2^{-n}\mathrm{Var}\left(G^2\right)}{\varepsilon^2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[|S_n - 1| > \varepsilon\right] \leq \frac{\mathrm{Var}\left(G^2\right)}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, on a donc

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \{|S_n - 1| > \varepsilon\}\right] = 0,$$

ce qui est exactement le résultat annoncé. □

Or, on a vu en MACS207b que ce résultat implique alors que la série $\sum_{i=1}^{2^n} \left|B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}}\right|$ diverge presque sûrement. Donc, d'après la proposition précédente appliquée à $f(.) \equiv 1$,

Le mouvement brownien $(B_t,\, t \geq 0)$ n'est *pas* un processus à VF.

Or, on voudrait définir des quantités telles que $\displaystyle\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}B_s(\omega)$, qui n'est pas défini trajectoire par trajectoire. On va construire un objet approchant cette quantité en approchant des sommes discrètes telles que

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_i^n)\left(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}\right),$$

pour des subdivisions emboîtées de $[0,T]$ et des fonctions f bien choisies.

C'est tout l'objectif de la construction de l'intégrale de Wiener (pour le mouvement brownien) et de l'intégrale stochastique (pour des martingales).

3 Construction de l'intégrale de Wiener

Dans toute cette section, $(B_t,\, t \geq 0)$ est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien.

3.1 Construction pour les processus élémentaires

Définition.

On appelle processus élémentaire, une processus $(H_t,\, t \geq 0)$ de la forme

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}\mathbf{1}_{[t_i, t_i+1[}(t), \quad t \geq 0,$$

où $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, et pour tout $i = 1, ..., n$, H_{t_i} est une v.a. $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable et de carré intégrable. On note $\mathscr{E}$, l'ensemble des processus élémentaires.

On a le résultat suivant,

Proposition.

Soit $H := (H_t,\, t \geq 0) \in \mathscr{E}$. On note pour tout t,

$$I(H)_t = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + H_{t_k}(B_t - B_{t_k}), & t_k \leq t < t_{k+1},\, 0 \leq k \leq n; \\ I(H)_{t_n}, & t \geq t_n. \end{cases}$$

Alors :

1. $(I(H)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale ;
2. Formule d'isométrie : pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[(I_t(H))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s)^2 \ \mathrm{d}s\right].$$
3. $\left((I(H)_t)^2 - \int_0^t (H_s)^2 \ \mathrm{d}s,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.

Démonstration. On pose pour tout $i = 0, ..., n-1$,

$$M_t^i := H_{t_i}\big(B_{(t\vee t_i)\wedge t_{i+1}} - B_{t_i}\big), \quad t \geqslant 0, \quad t \geq 0.$$

1. On a clairement que pour tout $t \geq 0$, $I(H)_t = \sum_{i=0}^{n-1} M_t^i$. La question 1 de l'exercice 4 de la feuille de TD 2 montre donc que $(I(H)_t,\, t \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale en tant que somme de n $\mathscr{F}_t$-martingales.
2. Découle du point 3 ;
3. Notons pour tout $t \geq 0$,
$$\begin{aligned} N(H)_t &= (I(H)_t)^2 - \int_0^t (H_s)^2 \ \mathrm{d}s, \\ N^i(H)_t &= (M_t^i)^2 - H_{t_i}^2(t \wedge t_{i+1} - t_i)\mathbf{1}_{t\geq t_i},\ i = 0, ..., n-1. \end{aligned}$$
On a clairement pour tout t,
$$N(H)_t = \sum_{i=0}^{n-1} N^i(H)_t + 2\sum_{i<j} M_t^i M_t^j.$$
Le processus $\left(\sum_{i=0}^{n-1} N^i(H)_t,\, t \geq 0\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale d'après la question 3 de l'exercice 4 du TD2. Il reste à traiter la deuxième partie. Fixons $i < j$. Il est immédiat de voir que pour tout t, $M_t^i M_t^j$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable et intégrable (même raisonnement que dans la question 2 de l'exercice 4 du TD2). Soient maintenant $s \leq t$. Nous distinguons les cas suivants :
— Si $t < t_j$, alors on a $M_t^i M_t^j = M_s^i M_s^j = 0$ p.s..
— Si $s < t_j$ et $t \geq t_j$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_{t_j}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_{t_j}\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big)\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\ &= 0 = M_s^i M_s^j \text{ p.s..} \end{aligned}$$

— Si maintenant $t_j \leq s < t_{j+1}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\mathbb{E}\left[\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\left(\mathbb{E}\left[\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_s\big) \mid \mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\big(B_s - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_s\right]\right) \\
&= H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\left(\mathbb{E}\left[B_{t\wedge t_{j+1}} - B_s\right] + \big(B_s - B_{t_j}\big)\right) \\
&= H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\left(B_s - B_{t_j}\right) \\
&= H_{t_i}\big(B_{(s\vee t_i)\wedge t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{(s\vee t_j)\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \\
&= M_s^i M_s^j \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

— Si finalement $t_{j+1} \leq s$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^i M_t^j | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= H_{t_i}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)H_{t_j}\big(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\big) \\
&= M_s^i M_s^j \text{ p.s..}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a donc

$$\mathbb{E}\left[2\sum_{i<j} M_t^i M_t^j \mid \mathscr{F}_s\right] = 2\sum_{i<j} M_s^i M_s^j, \quad \text{p.s.,}$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[N(H)_t \mid \mathscr{F}_s\right] = N(H)_s, \quad \text{p.s.,}$$

ce qui conclut la démonstration.

□

3.2 Généralisation

Fixons $T > 0$, et définissons les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_T &= \{\text{ processus élémentaires de } [0,T] \text{ dans } \mathbb{R}\}\,; \\
\mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T]) &= \left\{\text{processus progressifs } \ (H_t,\, t\in[0,T]) \ \text{ tels que } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \ \mathrm{d}s\right] < \infty\right\}; \\
\mathscr{M}_T &= \{\text{martingales de carrés intégrables sur } [0,T]\}\,.
\end{aligned}$$

Notons pour tout $H := (H_t,\, t \geq 0) \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}$, $\parallel H \parallel_2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \ \mathrm{d}s\right]$. Alors, on peut montrer que $(\mathscr{E}_T, \parallel . \parallel_T)$ est un espace de Banach dense dans l'espace de Banach $(\mathscr{L}^2_{\text{prog}}[0,T], \parallel . \parallel_T)$. De plus, $\mathscr{M}_T$ est lui-aussi un espace de Banach pour la norme définie pour toute $(M_t,\, t\in[0,T]) \in \mathscr{M}_T$ par

$$\parallel M \parallel_T = \mathbb{E}\left[(M_T)^2\right] = \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[(M_t)^2\right].$$

Le résultat fondamental est le suivant,

Théorème.

Pour tout $H := (H_t,\, t \in [0,T]) \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$, il existe une unique martingale de $\mathscr{M}_T$, notée $((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T]) = \left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s,\, t \in [0,T]\right)$ et appelée *intégrale de Wiener* de H sur $[0,T]$, ayant les propriétés suivantes :

1. Formule d'isométrie : pour tout $t \in [0,T]$,
$$\mathbb{E}\left[(H\cdot B)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s)^2 \, \mathrm{d}s\right].$$
2. Le processus $\left((H\cdot B)_t^2 - \int_0^t (H_s)^2 \, \mathrm{d}s,\, t\in[0,T]\right)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.
3. Si $(H_t,\, t\in[0,T]) \in \mathscr{E}_T$, alors les processus $((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T])$ et $(I(H)_t,\, t\in[0,T])$ sont indistinguables.
4. Pour toute suite de $\{H^n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ de processus de $\mathscr{E}_T$ convergeant vers $(H_t,\, t\in[0,T])$ dans $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$, la suite de processus $\{(I(H^n)_t,\, t\in[0,T])\,;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ converge dans $\mathscr{M}_T$ vers $((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T])$.

Par ailleurs, l'application

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T]) & \longmapsto \mathscr{M}_T; \\ H & \longmapsto ((H\cdot B)_t,\, t\in[0,T]) \end{array}\right. \tag{3}$$

est linaire et continue.

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'application

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathscr{E}_T & \longmapsto \mathscr{M}_T; \\ H & \longmapsto (I(H)_t,\, t\in[0,T]) \end{array}\right.$$

est une isométrie. Il est en effet immédiat que c'est une application linéaire, qui conserve la norme. Par densité, elle se prolonge donc en une unique isométrie de $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$ dans $\mathscr{M}_T$, d'où le point 3. En particulier, cette application est continue, d'où l'assertion 4, et l'on obtient l'assertion 2 par passage à la limite dans l'assertion 3 de la Proposition précédente, en considérant une suite de processus élémentaires $\{H^n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ convergeant vers H dans $(H,\, t\in[0,T]) \in \mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$. L'assertion 1 s'en déduit par la propriété de martingale. $\square$

Remarque. Si le processus progressif $(H_t,\, t\in[0,T])$ vérifie seulement

$$\int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s < \infty \text{ p.s.},$$

alors on peut définir une intégrale de Wiener en un sens plus faible. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe une suite croissante de $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt $\{\tau_n;\, n\in\mathbb{N}^*\}$ tels que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ p.s., et satisfaisant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} H_s^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty, \quad n\in\mathbb{N}.$$

On peut alors appliquer, pour tout n, le théorème précédent au processus

$$\left(\hat{H}^n_t,\, t\in[0,T]\right) := \left(H_t \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t),\, t\in[0,T]\right),$$

qui est un élément de $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$. Il entraîne alors que pour tout n, le processus $\left((\hat{H}^n\cdot B)_t,\, t\in[0,T]\right)$ est une martingale de $\mathscr{M}_T$. Remarquons en particulier que d'après le théorème d'arrêt, on a alors $\mathbb{E}\left[(\hat{H}^n\cdot B)_t\right] = 0$. De même, d'après l'assertion 2, le processus $\left(\left((\hat{H}^n \cdot B)_t\right)^2 - \int_0^{\tau_n \wedge t} H_s^2 \, \mathrm{d}s,\, t \in [0,T]\right)$ est une martingale. On peut alors définir une intégrale de Wiener en un sens plus faible, définie pour tout t par la limite presque-sûre

$$(H \cdot B)_t = \lim_{n\to\infty} (\hat{H}^n \cdot N)_t.$$

(On dit aussi que l'intégrale de Wiener définie dans le Théorème précédent est définie "au sens fort"). On peut alors facilement vérifier que pour tout n et tout t, $(\hat{H}^n \cdot N)_t = (H \cdot B)_{t\wedge\tau_n}$, autrement dit chaque intégrale de Wiener au sens fort est la version arrêtée de l'intégrale de Wiener au sens faible. Dans ce contexte, l'intégrale de Wiener au sens faible $((H \cdot B)_t,\, t \in [0,T])$ est appelée *martingale locale*, une notion qui sera généralisée dans le chapitre suivant.

3.3 Formule d'Itô : premier contact

Exemple 1. A tout instant $t \leq T$, pour tout n et toute subdivision $0 \leq t_1^n < ... < t_n^n = t$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0 avec n, on associe la variable aléatoire

$$U_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right).$$

Pour tout n, le processus étagé H^n sur $[0,t]$ égal à $B_{t_i^n}$ sur tout intervalle $[t_i, t_{i+1})$ est un élément de $\mathscr{E}_T$, et par continuité des trajectoires du mouvement brownien, il est facile de voir que la suite de ces processus tend vers le mouvement brownien $(B_t,\, t \in [0,T])$ dans $\mathscr{L}^2_{\text{prog}}([0,T])$. En particulier, on a pour tout t que, dans L^2,

$$\lim_{n\to\infty} U_t^n = \lim_{n\to\infty} I(H^n)_t = (B \cdot B)_t = \int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s.$$

Mais il est facile de voir que pour tout n et t, dans L^1,

$$U_t^n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left((B^2_{t_{i+1}^n} - B^2_{t_i^n}) + \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

En identifiant les limites, il vient que pour tout t,

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s + t.$$

Le théorème suivant généralise le résultat précédent,

Proposition (Formule d'Itô pour l'intégrale de Wiener).

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, on a pour tout $t \leq T$,

$$f(B_t) = \int_0^t f'(B_s) \, \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) \, \mathrm{d}s.$$

Démonstration. On a pour tout n, et toute subdivision $0 \leq t_1^n < ... < t_n^n = t$ de $[0,t]$ comme ci-dessus, d'après la formule de Taylor,

$$f(B_t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(B_{t_{i+1}^n}) - f(B_{t_i^n})\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i^n})\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i^n})\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)^2 + R^n,$$

où le reste intégral R^n tend en probabilité vers 0. Alors, en raisonnant comme dans l'exemple ci-dessus on a la convergence dans L^2

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i^n})\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f(B_s) \, \mathrm{d}B_s.$$

D'autre part, par la caractérisation limite des processus à variation finie, on a la convergence en probabilité

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f''(B_s) \ \mathrm{d}s.$$

Finalement, il suffit de remarquer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\mathbb{E}\left[(f''(B_{t_i^n})) \left(\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right)^2 \right] = (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \mathbb{E}\left[(f''(B_{t_i^n}))^2 (B_1^2 - 1) \right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

La formule précédente montre en particulier que pour toute fonction f de carré intégrable, le processus $(f(B_t),\, t \in [0,T])$ peut s'écrire sous la forme

$$f(B_t) = \int_0^t H_s \ \mathrm{d}B_s + \int_0^t K_s \ \mathrm{d}s, \quad t \in [0,T],$$

où $(H_s,\, t \in [0,T])$ et $(K_s,\, t \in [0,T])$ sont deux processus progressifs tels que $\int_0^T H_s^2 \ \mathrm{d}s < \infty$ et $\int_0^T |K_s| \ \mathrm{d}s < \infty$. Ce développement est unique à indistingabilité près. On dit alors que $(f(B_t),\, t \in [0,T])$ est une *semi-martingale* (pour l'intégrale de Wiener) sur $[0,T]$. Cette notion sera généralisée dans le chapitre suivant.