

Chapitre 1

Le mouvement Brownien

Pascal Moyal

4 juin 2020

Table des matières

1	Variables, vecteurs et processus gaussiens	2
1.1	Les variables aléatoires gaussiennes réelles	2
1.2	Les vecteurs gaussiens	3
1.3	Processus gaussiens	4
1.4	La convergence en loi et le théorème central limite	5
2	Définition du mouvement brownien	5
2.1	Définitions	6
2.2	Construction comme limite de marche aléatoire	7
3	Propriétés du mouvement brownien	9
3.1	Quelques mouvements browniens simples	9
3.2	Le mouvement brownien est un processus de Markov	9
3.3	Propriétés trajectorielles	10
3.4	Temps d'atteinte	11

Dans ce chapitre, nous introduisons un processus stochastique à l'importance centrale : le mouvement brownien.

1 Variables, vecteurs et processus gaussiens

1.1 Les variables aléatoires gaussiennes réelles

Définition.

Une v.a. réelle G est dite gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{N}(0, 1)$ cette distribution de probabilité. On a alors $\mathbb{E}[G] = 0$ (i.e. G est centrée) et $\text{Var}(X) = 1$ (i.e. G est réduite). On note en général Φ , la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Définition.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. Une v.a. X est dite gaussienne de paramètres μ et σ^2 si $X = \mu + \sigma G$, avec G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Par construction, on a alors $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$. X a pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer les propriétés suivantes,

Proposition.

Soit G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathbb{E}[e^{zX}] = e^{z^2/2}$. En particulier la fonction caractéristique φ de G est donnée par $\varphi_G(t) := E(e^{itX}) = e^{-t^2/2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, la v.a. G admet un moment d'ordre n et on a

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(2m)!}{m! 2^m} & \text{si } n \text{ est pair, } n = 2m. \end{cases}$$

3. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \exp\left\{it\mu - \frac{t^2}{2}\sigma^2\right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposition.

Soient Y_1 et Y_2 deux v.a. gaussiennes indépendantes, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Alors $Y_1 + Y_2$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

- Remarque.** 1. Si Y_1 et Y_2 sont seulement deux v.a. gaussiennes, la somme peut ne pas être gaussienne.
2. La Proposition 1.1 se généralise par récurrence au cas de n v.a. Soient Y_1, \dots, Y_n des v.a. gaussiennes indépendantes, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $1 \leq i \leq n$. Alors, $Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

1.2 Les vecteurs gaussiens

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est une application mesurable de Ω dans \mathbb{R}^d . On notera alors X_1, \dots, X_d , les d coordonnées de X (qui sont donc des v.a. réelles). On identifiera \mathbb{R}^d avec l'espace des matrices lignes à d composantes, i.e. on notera $X = (X^1 X^2 \dots X^d)'$, où A' désigne la matrice transposée de A . On rappelle également que l'espérance du vecteur aléatoire X , noté par abus de langage $\mathbb{E}[X]$, est l'élément de \mathbb{R}^d donné par $(\mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] \dots \mathbb{E}[X_d])'$ et que la matrice de variance-covariance Γ_X est la matrice carrée de taille d symétrique telle que pour tous i, j , $\Gamma_X(i, j) = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

Définition.

X est appelé vecteur gaussien de loi centrée réduite, si les v.a. réelles X^1, \dots, X^d sont indépendantes et suivent chacune la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. X est un vecteur gaussien si pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle u, X \rangle = u'X = \sum_{k=1}^d u_k X^k$$

est une v.a. réelle gaussienne, ou en d'autres termes, si toute combinaison des coordonnées de X est une v.a. gaussienne.

Remarque. En particulier, en prenant pour u les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d , on voit que si X est un vecteur gaussien, alors pour tout i , la coordonnée X_i est une v.a. gaussienne.

Proposition.

Soit X un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^d , de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance-covariance Γ .

1. X admet une densité si et seulement si Γ est inversible. Lorsqu'il en est ainsi, la densité f de X est définie par la relation suivante :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)' \Gamma^{-1} (x - \mu) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} [\exp\{iu'X\}] = \exp \left\{ iu'\mu - \frac{1}{2}u'\Gamma u \right\}. \quad (1)$$

Remarque. 1. L'identité (1) implique qu'une v.a. gaussienne X d -dimensionnelle, de moyenne μ et de matrice de variance-covariance Γ a sa loi entièrement déterminée par μ et Γ . On note $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$ cette distribution multivariée sur \mathbb{R}^d . Dans le cas $d = 1$ nous utiliserons $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$.

2. Si X est une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d , dont les d composantes sont de carré intégrable et telle que la fonction caractéristique vérifie (1) alors $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$, où $\mu = E(X)$ et Γ est la matrice de variance-covariance de X .

Il est aisé de vérifier que l'image d'un vecteur gaussien par une transformation affine reste un vecteur gaussien,

Proposition.

Soit $X = (X^1, \dots, X^d)'$ un vecteur gaussien. Alors $AX + B$ est un vecteur gaussien, où A est une matrice $m \times d$ et B est un vecteur unicolonne de taille m .

On peut engendrer simplement un vecteur gaussien à l'aide de sa moyenne μ et sa matrice de variance-covariance Γ ,

Proposition.

Soit μ un vecteur de \mathbb{R}^d et Γ une matrice carré $d \times d$, symétrique et 1/2-définie positive. Soit C une racine carré de Γ , i.e. vérifiant $\Gamma = CC'$. Soient Y_1, \dots, Y_d une famille i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $Y = (Y_1 Y_2, \dots, Y_d)'$. Alors le vecteur $X := \mu + CY$ suit la loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$.

Le résultat précédent est particulièrement utile pour simuler un vecteur gaussien d'espérance et de variance-covariance données. Il suffit en pratique de calculer C , par exemple à partir de l'algorithme de Choleski. Rappelons finalement que dans le cas de variables gaussiennes, indépendance et dé-corrélation sont équivalentes. Autrement dit,

Proposition.

$X = (X^1 \dots X^d)'$ un vecteur gaussien. Alors les v.a. réelles X^1, \dots, X^d sont indépendantes si et seulement si la matrice de variance-covariance de X est diagonale.

1.3 Processus gaussiens

On note $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$, ou plus simplement \mathcal{C}_T , l'espace vectoriel normé des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme uniforme $\|f\|_T = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$, pour tout f continue de $[0, T]$ dans \mathbb{R} . Il est possible de construire à partir des normes $\|\cdot\|_T$, $T > 0$, une distance sur l'espace $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . Muni de cette distance, \mathcal{C} est un espace métrique complet séparable. L'espace $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions càdlàg (i.e., continues à droite, et admettant une limite à gauche en tout point) de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} peut également être muni d'une distance, appelée distance de Skorokhod, qui lui confère également une structure d'espace métrique complet et séparable.

Définition.

Pour tout $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on appelle processus aléatoire càdlàg réel, indexé sur $[0, T]$, une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{D}_T .

Autrement dit, un processus aléatoire $X := (X_t, t \geq 0)$ est une application mesurable de Ω dans \mathcal{D}_T dont toute réalisation $X(\omega)$ est une fonction càdlàg de $[0, T]$ dans \mathbb{R} . Moralement, X représente l'évolution dans le temps d'une grandeur, qui évolue en fonction du hasard. Les éléments $t \in [0, T]$ sont appelés les *instants* et pour tout instant t , X_t est donc une variable aléatoire réelle.

Définition.

On dit que le processus X est gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille d'instant $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ de taille n , le vecteur $(X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_n})'$ est gaussien.

1.4 La convergence en loi et le théorème central limite

On termine cette section introductive par quelques brefs rappels concernant la convergence en loi des suites de v.a. On conserve les notations relatives aux vecteurs aléatoires,

Définition.

Une suite $(X_n; n \geq 1)$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d converge en loi ou en distribution vers le vecteur aléatoire X si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

Proposition.

Soit $(X_n; n \geq 1)$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_n; n \geq 1)$ converge en loi vers X .
2. Il y a convergence des fonctions caractéristiques :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{iu'X_n}] = \mathbb{E}[e^{iu'X}], \quad \forall u' := (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

3. Dans le cas $d = 1$, il y a convergence des fonctions de répartition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq t) = P(X \leq t)$$

pour tout t tel que $P(X = t) = 0$.

Théorème (Théorème central limite).

Soit $(X_n; n \geq 1)$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d , indépendantes, de même loi et possédant un moment d'ordre deux. On note μ (resp. Γ) l'espérance commune (resp. la matrice de covariance commune) des X_i . Alors, $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}}$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^d , centré et de matrice de variance-covariance Γ .

Remarque. Lorsque $d = 1$, le théorème est souvent énoncé sous la forme suivante : $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une v.a. gaussienne réelle réduite centrée, σ^2 désignant la variance commune des X_i .

2 Définition du mouvement brownien

Le mouvement brownien doit son nom au botaniste anglais R. Brown, qui appelait ainsi le mouvement de particules de pollen dans un liquide. La principale caractéristique de ce mouvement, telle qu'observée par Brown, était sa grande imprévisibilité, due aux chocs et interactions incessantes entre le Pollen et les molécules, beaucoup, plus petites, du liquide considéré. Ces chocs sont observés très fréquemment dans de petits intervalles de temps, indépendamment d'un intervalle sur l'autre, et de façon comparable entre intervalles de même durée, et les effets "locaux" des chocs sont négligeables par rapport à la forme macroscopique du mouvement observé. Le processus ainsi obtenu, en tant que fonction du temps et du hasard, a été formellement modélisé par Einstein en 1905, qui suggère que le mouvement brownien doit avoir les propriétés suivantes :

1. il a des incréments indépendants, i.e. le nombre de chocs dans chaque intervalle de temps est indépendant des intervalles précédents,
2. le nombre de chocs dans chaque intervalle suit une distribution gaussienne,
3. le mouvement de chaque particule, malgré les chocs incessants, est une fonction continue du temps.

Par la suite, de très nombreux phénomènes physiques (prix des actions, dynamique des populations, trafic dans les réseaux), ont mis en évidence des propriétés similaires. Nous allons dans la suite de ce chapitre, donner les fondements de la construction du mouvement brownien, et ses principales propriétés. Le mouvement brownien (m.b. en abrégé) sera vu comme un **processus stochastique**, c'est à dire, une grandeur réelle (par ex. la position d'une particule de pollen sur un repère mono-dimensionnel) qui évolue en fonction du temps et du hasard.

2.1 Définitions

Définition.

On appelle mouvement brownien standard, un processus aléatoire $B = (B_t, t \geq 0)$ tel que

1. $B_0 = 0$ p.s.,
2. B est un processus continu, i.e. la fonction $t \mapsto B_t$ est presque sûrement un élément de \mathcal{C} ,
3. pour tout $t \geq 0$, $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$;
4. B a des accroissements indépendants : pour tout n et toute famille d'instants $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
5. B a des accroissements *stationnaires* : pour tous s et t tels que $0 < s < t$, $B_t - B_s$ a la même loi que B_{t-s} , i.e. la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

On peut en fait montrer que l'assertion 2. ci-dessus est inutile : en réalité, l'hypothèse sur la loi des $B_t, t \geq 0$ est superflue, et l'on a la définition équivalente suivante :

Proposition (et Définition).

Le mouvement brownien standard est l'unique processus aléatoire $B = (B_t, t \geq 0)$ tel que

1. $B_0 = 0$ p.s.,
2. B est un processus continu,
3. B est un processus de Lévy, c'est-à-dire, un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Remarque. Un autre exemple de processus de Lévy couramment rencontré en pratique est le processus de Poisson, i.e. le processus ponctuel sur \mathbb{R}^+ dont les points sont espacés par des écarts i.i.d. de loi exponentielle. Mais ce processus n'est pas à trajectoires continues : c'est un processus à valeurs dans \mathcal{D} .

Le mouvement brownien est également caractérisé par la troisième définition équivalente suivante :

Proposition (et Définition).

Le mouvement brownien est l'unique processus gaussien $(X_t, t \geq 0)$, centré, à trajectoires continues, et tel que pour tous $s, t \geq 0$,

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t. \quad (2)$$

Démonstration. Nous ne démontrons que la première implication, la réciproque sera démontrée dans l'Exercice 4 de la feuille de TD 1. On note B le m.b.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Nous souhaitons prouver que le vecteur $\mathbf{B} := (B_{t_1} \dots B_{t_n})$ est gaussien. Pour cela, fixons $u \in \mathbb{R}^n$. On a alors, en posant $B_{t_0} = B_0 = 0$,

$$\sum_{i=1}^n u_i B_{t_i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n u_j \right) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

qui est une v.a. gaussienne en tant que combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes, d'après l'indépendance des accroissements. Donc le vecteur est gaussien. Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est donc gaussien. Il est centré et à trajectoires continues par définition. Calculons finalement sa structure de covariance : soient $s < t \in \mathbb{R}_+$. On a alors

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \text{Cov}(B_s, B_t - B_s) + \text{Cov}(B_s, B_s) = \text{Cov}(B_s, B_s) = \text{Var}(B_s) = s,$$

où la deuxième égalité découle de l'indépendance des accroissements. \square

Remarque. D'après le théorème de caractérisation de Kolmogorov, pour tout $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, la loi d'un processus $(X_t, t \in [0, T])$ à valeurs dans \mathcal{D}_T est entièrement caractérisée par les fonctions cylindriques, c'est à dire, par la donnée des

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})], \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T.,$$

en d'autres termes, deux processus $(X_t, t \in [0, T])$ et $(Y_t, t \in [0, T])$ ont même loi si et seulement si

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})] = \mathbb{E}[f(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})], \quad \text{pour tous } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T..$$

La proposition précédente indique donc que ces deux définitions d'un mouvement brownien caractérisent un *unique* processus, c'est à dire une unique mesure de probabilité sur l'ensemble \mathcal{C}_T . En effet, la Proposition 2.1 caractérise toutes les lois fini-dimensionnelles, qui sont celles de vecteurs gaussiens centrés et de matrice de variance-covariance induite par la relation (2).

Nous généralisons maintenant la définition du mouvement brownien à un processus non issu de 0, et donc non centré.

Définition.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *mouvement brownien issu de a* , et l'on note $(B_t^a, t \geq 0)$, un processus pouvant s'écrire $B_t^a = B_t + a$, où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien "standard" (i.e., issu de 0).

Remarque. On peut facilement vérifier que $(B_t^a, t \geq 0)$ est un processus gaussien, continu, de structure de covariance identique à celle du m.b. standard $(B_t, t \geq 0)$. Sa valuation à t , B_t^a , est clairement de loi $\mathcal{N}(a, t)$.

Nous terminons par la définition d'un m.b. multi-dimensionnel,

Définition.

Soit $d \geq 1$. On dit que le processus aléatoire d -dimensionnel $B := (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ est un mouvement brownien d -dimensionnel, si les processus $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ sont d m.b. standards (i.e., issus de 0) indépendants.

2.2 Construction comme limite de marche aléatoire

On a donc défini (de manière unique, en loi) un processus, dont nous n'avons pas encore vérifié l'existence-même. Elle est garantie par la construction suivante : on considère la suite $\{\varepsilon_i; i \in \mathbb{N}^*\}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathbb{P}[\varepsilon_1 = 1] =$

$\mathbb{P}[\varepsilon_1 = -1] = 1/2$. On considère la marche aléatoire $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ d'incrémentes $\{\varepsilon_i; i \in \mathbb{N}^*\}$, c'est-à-dire que l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

La suite $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est aussi appelée *processus de Cox, modèle binomial*, c'est une suite aléatoire décrivant la fortune d'un joueur qui peut gagner ou perdre 1 euro à chaque itération de jeu, de façon équiprobable. On reviendra à cette interprétation dans les applications en finance. On construit un processus à partir de $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$, de la façon suivante : pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_{\frac{n}{N}}^N = \frac{1}{\sqrt{N}} S_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (3)$$

et pour tout $t \geq 0$,

$$S_t^N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(S_{\frac{n}{N}}^N + \left(t - \frac{n}{N} S_{\frac{n+1}{N}}^N \right) \right), \quad \frac{n}{N} \leq t < \frac{n+1}{N}. \quad (4)$$

En d'autres termes, (3) signifie que pour tout N la suite $\{S_{\frac{n}{N}}^N; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une version de la suite $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ qui est

- “accélérée en temps” par un facteur multiplicatif N , dans le sens où l'on voit à l'instant n/N ce que l'on voyait à l'instant n dans la suite originale, de la suite $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$;
- “normalisée en espace” par un facteur multiplicatif $1/\sqrt{N}$, pour compenser l'accélération du temps.

De plus, d'après (4), le processus $(S^N, t \geq 0)$ est construit simplement en interpolant linéairement entre les valeurs $S_{\frac{n}{N}}^N, n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, c'est un processus à valeurs dans \mathcal{C} . On a le résultat suivant,

Théorème (Théorème de Donsker).

La suite de processus $\{(S_t^N, t \geq 0); n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi, quand N tend vers l'infini, vers le mouvement brownien.

Dans le Théorème de Donsker, la convergence en loi au sens des processus de \mathcal{C} signifie précisément la convergence en loi de toute marginale fini-dimensionnelle, i.e., que pour tout n et toute famille d'instants $t_1 < \dots < t_n$, la suite de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n $\{(S_{t_1}^N, S_{t_2}^N, \dots, S_{t_n}^N)'; N \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi, au sens défini en sous-section 1.4, vers le vecteur gaussien $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})'$.

éléments de preuve du Théorème de Donsker. Nous n'allons pas donner la démonstration intégrale de la convergence, mais plutôt des éléments pour comprendre pourquoi les propriétés fondamentales du m.b. (indépendance et stationnarité des accroissements) sont vérifiées à la limite. Remarquons déjà que pour tout t rationnel, disons $t = p/q$, la limite en loi de la suite $\{S_t^N; N \in \mathbb{N}^*\}$, si elle existe, est une gaussienne $\mathcal{N}(0, t)$. Pour le vérifier, remarquons que

$$S_t^{Nq} = S_{\frac{Np}{Nq}}^{Nq} = \frac{1}{\sqrt{Nq}} \sum_{i=1}^{Np} \varepsilon_i = \sqrt{\frac{Np}{Nq}} \frac{1}{\sqrt{Np}} \sum_{i=1}^{Np} \varepsilon_i = \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{Np}} \sum_{i=1}^{Np} \varepsilon_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{Loi}} \sqrt{t} G,$$

où $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, en vertu du Théorème Central Limite. Cette limite en loi suit donc la loi $\mathcal{N}(0, t)$. Par unicité des valeurs d'adhérence en loi, cette limite est nécessairement la loi de la valuation en l'instant t de la limite en loi (au sens des processus) de la suite $\{(S_t^N, t \geq 0); n \in \mathbb{N}^*\}$. La généralisation de ce raisonnement aux familles fini-dimensionnelles $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})'$, pour t_1, \dots, t_n rationnels, est immédiate. \square

L'interprétation du Théorème précédent nous permet de comprendre les propriétés de base des trajectoires browniennes. La marche aléatoire de départ est un processus erratique qui monte de 1 et descend de 1 de manière équiprobable et “chaotique”, i.e. sans jamais tenir compte de ses valeurs passées. Le m.b. est une version “macroscopique” de ce phénomène, en accélérant le temps : des variations infinitésimales chaotiques mais centrées (i.e. d'espérance nulle), et une variance totale, de l'ordre de la valeur de l'instant courant.

3 Propriétés du mouvement brownien

3.1 Quelques mouvements browniens simples

Dans toute la suite, B désigne un mouvement brownien standard. Nous commençons par montrer que de nombreuses fonctions simples de B sont elles-aussi des mouvements browniens. On a tout d'abord la proposition suivante,

Proposition.

Les deux processus suivants sont des mouvement browniens standards :

1. Le processus X défini par $X_t = -B_t$ pour tout t (**réflexion**) ;
2. Pour tout $c > 0$, le processus Y^c défini par $Y_t^c = \frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}$ pour tout t (**changement d'échelle**).

Démonstration. La démonstration de cette proposition est le sujet de l'Exercice 5 de la première feuille de TD. \square

La deuxième assertion ci-dessus est cohérente avec la construction du m.b. donnée dans le théorème de Donsker : à une croissance linéaire du temps correspond une échelle en “racine carrée” en espace. Ce phénomène, intrinsèquement lié au TLC, est constamment observé dans de nombreuses propriétés du mouvement brownien.

3.2 Le mouvement brownien est un processus de Markov

Notons à partir de maintenant, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0) := (\mathcal{F}_t^B, t \geq 0)$, la filtration naturelle du mouvement brownien, c'est-à-dire, pour tout t on pose

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \leq t),$$

l'ensemble des informations données par la connaissance de toutes les valeurs de B jusqu'à l'instant t .

Proposition (Propriété de Markov simple).

Le mouvement brownien standard satisfait la propriété de Markov simple : pour tout $b \geq 0$, le processus X^b défini par $X_t^b = B_{b+t} - B_b$, $t \geq 0$, est un mouvement brownien standard, indépendant de \mathcal{F}_b .

Démonstration. On va utiliser la caractérisation donnée par la Proposition 2.1. Fixons l'instant b . Tout d'abord, le processus X^b est clairement à trajectoires continues car B l'est, et issu de 0 par construction. C'est un processus centré puisque pour tout t , $\mathbb{E}[X_t^b] = \mathbb{E}[B_{b+t}] - \mathbb{E}[B_b] = 0$. C'est également un processus gaussien, puisque toute combinaison linéaire d'une famille finie de valeurs de X^b est une combinaison linéaire d'une famille finie de valeurs de B , donc une gaussienne. Il reste à vérifier la structure de covariance. Soient deux instants $s \geq 0$ et $t \geq 0$. On a alors bien

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s^b, X_t^b) &= \text{Cov}(B_{b+s} - B_b, B_{b+t} - B_b) = \text{Cov}(B_{b+s}, B_{b+t}) - \text{Cov}(B_{b+s}, B_b) - \text{Cov}(B_b, B_{b+t}) + \text{Var}(B_b) \\ &= b + (s \wedge t) - b + b - b = s \wedge t. \end{aligned}$$

X^b est donc bien un m.b. standard. Quant à la propriété d'indépendance, le théorème de classes monotones indique qu'il suffit de montrer que pour tout b et tout t , X_t^b est indépendant de tout vecteur aléatoire $(B_{t_1} \dots B_{t_n})'$, où $t_1 < \dots < t_n \leq b$. Mais ceci est clairement équivalent à dire que $X_t^b = B_{b+t} - B_b$ est indépendant de $(B_{t_2} - B_{t_1} \dots B_b - B_{t_n})'$, puisque l'application qui à un vecteur associe l'autre est linéaire, donc mesurable. Cette dernière propriété d'indépendance est vraie en vertu de l'hypothèse d'indépendance des accroissements de B . \square

Remarque. La propriété de Markov revient à dire que pour tout b , le processus Z^b défini par $Z_t^b = B_{b+t}$ pour tout t est un m.b. issu de B_b .

La propriété de Markov a un sens concret très clair : en “remettant à zero” l’origine des temps en partant de l’instant b , et en recentrant éventuellement le processus en retranchant la valeur du m.b. à l’instant b , on retrouve un mouvement brownien. On a même une propriété plus forte. Rappelons qu’un temps d’arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est une v.a. τ à valeurs dans \mathbb{R}_+ (à penser comme un “instant aléatoire”) telle que pour tout $t \geq 0$, l’événement $\{\tau \leq t\}$ appartient à \mathcal{F}_t . Ceci revient à dire que la connaissance de l’histoire du processus B jusqu’à l’instant t suffit à savoir si l’instant aléatoire τ a déjà eu lieu à t ou non.

Exemple 1. Pour tout $a > 0$ l’instant

$$\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t \geq a\},$$

c’est à dire, le premier instant de franchissement par le bas du niveau a par B est un temps d’arrêt, mais l’instant

$$\tilde{\tau}_a = \sup\{t > 0 : B_t \geq a\},$$

i.e. le *dernier* instant de franchissement par le haut du niveau a , n’en est pas un.

Soit $\mathcal{F}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t$. Pour tout temps d’arrêt τ , on peut définir la tribu suivante,

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \text{for all } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

On a le résultat suivant, qui est énoncé sans démonstration,

Théorème (Propriété de Markov forte).

Soit τ un temps d’arrêt presque sûrement fini. Alors le processus X^τ défini par $X_t^\tau = B_{\tau+t} - B_\tau$, $t \geq 0$, est un mouvement brownien standard, indépendant de \mathcal{F}_τ .

Cette dernière propriété signifie que pour toute famille finie d’instant $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et toute fonction continue bornée de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , l’on a

$$\mathbb{E} [F((B_{\tau+t_1} - B_\tau \dots B_{\tau+t_n} - B_\tau)')] = \mathbb{E} [F((B_{t_1} \dots B_{t_n})')].$$

Elle est très utile en pratique : on peut remettre à zero l’horloge des temps à un instant aléatoire, comme le premier instant où l’on dépasse ou atteint un certain niveau, et reconstruire un m.b. à partir de là comme si l’on partait de l’origine. L’indépendance est une propriété d’absence de mémoire : peut importe comment, et quand, on en est arrivé à la valeur B_τ , on peut oublier tout le passé avant cela et retrouver une trajectoire brownienne.

3.3 Propriétés trajectorielles

Terminons par quelques propriétés trajectorielles du m.b. standard. Comme on l’a vu, ces jouissent de bonnes propriétés de régularité ; en particulier, elles sont continues p.s.. Mais elles ne le sont en fait pas tant que ça : on a vu que la construction du m.b. traduisait l’idée intuitive d’une évolution erratique et chaotique, sans mémoire (penser au processus de Cox sous-jacent !). On peut démontrer que les trajectoires browniennes ne sont **nullement partiellement dérivables**. Le résultat suivant donne la propriété de régularité la plus forte que l’on puisse montrer,

Proposition.

Pour tout $\alpha < 1/2$, les trajectoires du m.b. standard sont α -Hölderiennes, i.e. pour tout $T > 0$ et il existe une constante $C_{\alpha,T}$ telle que

$$|B_t - B_s| \leq C(\alpha, T) |t - s|^\alpha, \quad s, t \in [0, T]. \quad (5)$$

En revanche, (5) est fausse pour tout $\alpha \geq 1/2$, et en particulier $t \mapsto B_t$ ne peut p.s. pas être de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration. La première partie est admise. La deuxième partie, i.e. le cas $\alpha \geq 1/2$, est montrée dans l'Exercice 6 de TD. \square

On conclut par le résultat suivant, démontré dans l'Exercice 7 de TD,

Proposition.

Le mouvement brownien standard n'est pas un processus à variations finies (défini proprement plus tard). En particulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} (B_{i2^{-n}} - B_{(i-1)2^{-n}})^2 = 1, \quad \text{p.s..}$$

3.4 Temps d'atteinte

Nous commençons par montrer que le mouvement brownien issu de 0 passe p.s. par toute valeur réelle. On a tout d'abord le résultat suivant,

Proposition.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0 \right] = 1.$$

Démonstration. Voir la première partie de la preuve du Corollaire 2.3 du livre de Le Gall. \square

On en déduit que

Corollaire.

Le mouvement brownien visite presque sûrement toute valeur positive : pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$.

Démonstration. On a d'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{s \geq 0} B_s > 1 \right] &= \lim_{c \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq \frac{1}{c}} B_s > 1 \right] \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq \frac{1}{c}} \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} > 1 \right] \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \sqrt{c} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > 0 \right] = 1, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la continuité monotone des probabilités dans la première et la quatrième égalité, et la propriété d'invariance en loi du mouvement brownien par changement d'échelle dans la deuxième. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_a < +\infty] &= \mathbb{P}\left[\sup_{s \geq 0} B_s > a\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{s \geq 0} B_{a^2 s} > a\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\sup_{s \geq 0} \frac{1}{a} B_{a^2 s} > 1\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\sup_{s \geq 0} B_s > 1\right] = 1.\end{aligned}$$

□

Notons maintenant pour tout $a > 0$,

$$\tau_{-a} = \inf\{t > 0 : B_t \leq -a\}.$$

En se rappelant que $(-B_t, t \geq 0)$ a même loi que $(B_t, t \geq 0)$, et en remplaçant a par $-a$ on en déduit que

Corollaire (Récurrence du mouvement brownien).

Le mouvement brownien visite presque sûrement toute valeur réelle : pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$.

On a le résultat suivant, très important dans les applications ; il permet de déterminer la loi des temps d'atteinte τ_a , $a > 0$, et du maximum d'une trajectoire brownienne sur un intervalle. On notera à partir de maintenant, pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s,$$

le maximum du mouvement brownien standard $(B_t, t \geq 0)$ sur l'intervalle $[0, t]$. On a le résultat suivant,

Proposition.

Pour tout a, b tels que $a \geq 0$ et $a \geq b$ on a

$$\mathbb{P}[\{M_t \geq a\} \cap \{B_t \leq b\}] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b].$$

Démonstration. D'après la propriété de récurrence du mouvement brownien, τ_a est fini presque sûrement. Rappelons la notation

$$X_t^{\tau_a} = B_{t+\tau_a} - B_{\tau_a} = B_{t+\tau_a} - a, t \geq 0.$$

On a alors

$$\mathbb{P}[\{M_t \geq a\} \cap \{B_t \leq b\}] = \mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{B_t \leq b\}] = \mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{X_{t-\tau_a}^{\tau_a} \leq b - a\}].$$

Or, d'après la propriété de Markov forte, le processus $(X^{\tau_a}, t \geq 0)$, et donc le processus $(-X^{\tau_a}, t \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de τ_a . La probabilité précédente vaut donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{-X_{t-\tau_a}^{\tau_a} \leq b - a\}] &= \mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{X_{t-\tau_a}^{\tau_a} \geq a - b\}] \\ &= \mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{B_t - a \geq a - b\}] = \mathbb{P}[\{\tau_a \leq t\} \cap \{B_t \geq 2a - b\}] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b].\end{aligned}$$

□

On en déduit que

Corollaire (Principe du maximum).

Pour tout t , M_t a même loi que $|B_t|$.

Démonstration. Il suffit d'écrire que pour tout a ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[M_t \geq a] &= \mathbb{P}[\{M_t \geq a\} \cap \{B_t \geq a\}] + \mathbb{P}[\{M_t \geq a\} \cap \{B_t \leq a\}] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq a] + \mathbb{P}[B_t \geq 2a - a] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq a] + \mathbb{P}[-B_t \leq -a] \\ &= \mathbb{P}[|B_t| \geq a],\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition précédente dans la deuxième égalité. □

Corollaire.

Pour tout $a > 0$, τ_a admet pour densité

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(\frac{-a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t).$$

Démonstration. Nous montrons en fait que τ_a a même loi que $a^2/(B_1^2)$. Pour le vérifier, remarquons que pour tout t ,

$$\mathbb{P}[\tau_a \leq t] = \mathbb{P}[M_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a] = \mathbb{P}[B_t^2 \geq a^2] = \mathbb{P}[tB_1^2 \geq a^2] = \mathbb{P}\left[\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right].$$

La densité de τ_a s'en déduit aisément par changement de variable. □

Remarque. En appliquant le corollaire précédent à $(-B_t, t \geq 0)$, on retrouve naturellement que τ_{-a} a même loi que τ_a pour tout $a > 0$.