

Sémantique de la logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2021-2022

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{N}$:
 - ▶ Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $m(f) = 2$;
 - ▶ Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble \mathcal{T} t.q. :
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
 - ▶ Si $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble \mathcal{F} t.q. :
 - ▶ Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}$;
 - ▶ $\perp, \top \in \mathcal{F}$;
 - ▶ Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg \Phi \in \mathcal{F}$;
 - ▶ Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x. \Phi, \exists x. \Phi \in \mathcal{F}$.

Logique classique

- Une formule est toujours vraie ou fausse ;
- Que je puisse en démontrer la validité ou non ;
- Logique bi-valuée (vrai, faux) ;
- Logique du « tiers exclu » : $A \vee \neg A$.

Logique intuitionniste ou constructive

- Une formule est vraie, fausse, ou « on ne sait pas » ;
- Si on ne sait en démontrer la validité, alors « on ne sait pas » ;
- Logique tri-valuée d'une certaine manière ;
- Le « tiers exclu » n'est pas admis dans cette logique.

Sémantique (classique)

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I , appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers \mathcal{B} pour chaque symbole de prédicat P d'arité n .

Affectation

- Une affectation ρ est une application de \mathcal{V} vers D_I ;
- Pour toute affectation ρ , $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v .

Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

Sémantique (classique)

Termes

- Dans une interprétation I , et modulo l'affectation ρ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ alors $\llbracket x \rrbracket_\rho^I = \rho(x)$;
 - ▶ Si $c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ d'arité 0 (constante) alors $\llbracket c \rrbracket_\rho^I = I(c)$.

Sémantique (classique)

Prédicats

- Dans une interprétation I , et modulo l'affectation ρ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
 - ▶ Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors
$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\rho}^I = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_{\rho}^I, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\rho}^I);$$

Sémantique (classique)

Formules propositionnelles

- Dans une interprétation I , et modulo l'affectation ρ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
 - ▶ $\llbracket \top \rrbracket_{\rho}^I = T$, $\llbracket \perp \rrbracket_{\rho}^I = F$;
 - ▶ Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\llbracket \neg \Phi \rrbracket_{\rho}^I = \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I$;
 - ▶ Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
 - ★ $\llbracket \Phi \wedge \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \vee \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \vee_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \Rightarrow \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \Leftrightarrow \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$.
 - ▶ où $\neg_{\mathcal{B}}$, $\wedge_{\mathcal{B}}$, $\vee_{\mathcal{B}}$, $\Rightarrow_{\mathcal{B}}$, et $\Leftrightarrow_{\mathcal{B}}$ sont les fonctions d'interprétation de la logique propositionnelle.

Sémantique (classique)

Quantificateurs

- Dans une interprétation I , et modulo l'affectation ρ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
 - ★ $\llbracket \forall x. \Phi \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket'_{\rho[v/x]}$;
 - ★ $\llbracket \exists x. \Phi \rrbracket'_\rho = \bigvee_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket'_{\rho[v/x]}$.
 - ▶ où \bigwedge est la conjonction distribuée et \bigvee la disjonction distribuée :
 - ★ $\bigwedge_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \wedge_{\mathcal{B}} f(v_1) \wedge_{\mathcal{B}} \dots$, avec $v_0, v_1, \dots \in D_I$;
 - ★ $\bigvee_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \vee_{\mathcal{B}} f(v_1) \vee_{\mathcal{B}} \dots$, avec $v_0, v_1, \dots \in D_I$.

Sémantique (classique)

Définition

- Dans une interprétation I , et modulo l'affectation ρ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ alors $\llbracket x \rrbracket_\rho^I = \rho(x)$;
 - ▶ Si $c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ d'arité 0 (constante) alors $\llbracket c \rrbracket_\rho^I = I(c)$;
 - ▶ Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_\rho^I, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_\rho^I)$;
 - ▶ $\llbracket \top \rrbracket_\rho^I = T$, $\llbracket \perp \rrbracket_\rho^I = F$;
 - ▶ Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\llbracket \neg \Phi \rrbracket_\rho^I = \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I$;
 - ▶ Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
 - ★ $\llbracket \Phi \wedge \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \vee \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \vee_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \Rightarrow \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$;
 - ★ $\llbracket \Phi \Leftrightarrow \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$.
 - ▶ Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
 - ★ $\llbracket \forall x. \Phi \rrbracket_\rho^I = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho[v/x]}^I$;
 - ★ $\llbracket \exists x. \Phi \rrbracket_\rho^I = \bigvee_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho[v/x]}^I$.

Sémantique (classique)

Remarque

- La sémantique donnée est valable pour des formules closes ou non ;
- Si une formule Φ est close, sa sémantique $\llbracket \Phi \rrbracket'_\rho$ ne dépend pas de ρ ;
- Pour une formule close Φ , sa sémantique sera donc notée $\llbracket \Phi \rrbracket'$;
- Par la suite, nous ne considérerons que des formules closes.

Vocabulaire

- Soit Φ une formule et I une interprétation ;
- I est un modèle de Φ ou I satisfait Φ , noté $I \models \Phi$, ssi $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$;
- Un ensemble G de formules entraîne Φ , noté $G \models \Phi$, ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les formules de G en même temps (les modèles de G) sont aussi des modèles de Φ , c'est-à-dire quand $I \models \Phi'$ pour tout $\Phi' \in G$ implique $I \models \Phi$;
- Φ est valide ssi Φ est vraie dans toute interprétation ($\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$ pour tout I , noté $\models \Phi$), et est invalide sinon ;
- Une formule valide est aussi appelée une tautologie ;
- Φ est satisfiable ssi elle est vraie dans au moins une interprétation ($\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$ pour un certain I , c'est-à-dire elle a un modèle), et est insatisfiable sinon.

Vocabulaire

- Toutes les formules valides sont satisfiables, et toutes les formules insatisfiables sont invalides ;
- Ceci divise l'espace des formules en trois catégories :
 - ▶ Les valides (toujours vraies) ;
 - ▶ Les insatisfiables (toujours fausses) ;
 - ▶ Les formules contingentes (parfois vraies, parfois fausses).
- La validité et l'insatisfiabilité se correspondent via négation : Φ est valide ssi $\neg\Phi$ est insatisfiable, Φ est insatisfiable ssi $\neg\Phi$ est valide.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \gg \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
 - ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \wedge_B I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_B T \wedge_B F = F. \end{aligned}$$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
 - ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
 - ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
 - ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
 - ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \models [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]_\rho^I = \\ & [P(a)]_\rho^I \Rightarrow_B [\exists x.P(x)]_\rho^I = I(P)([a]_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \models \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \models [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]^I = \models [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]_\rho^I = \\ & \models [P(a)]_\rho^I \Rightarrow_B \models [\exists x.P(x)]_\rho^I = I(P)([a]_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \models [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)_\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \models \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$

▷ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} &\triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = \\ &\quad \llbracket P(a) \rrbracket'_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket'_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ &\quad I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ &\quad I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &\quad I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ &\triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ &\quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ &\quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ &\quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket'_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket'_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
 - ★ $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
 - ★ $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

- $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
- $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

- $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
- $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

- $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
- $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

- $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
- $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$

- Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 &I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\
 &I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\
 &I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F};
 \end{aligned}$$

- Deux cas selon $I(P)(a_0)$:

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;$$

$$\begin{aligned}
 \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\
 &T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\
 &T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.
 \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\
 & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\
 & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\
 & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\
 & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\
 & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\
 & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\
 & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.
 \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\
 & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\
 & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\
 & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\
 & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\
 & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\
 & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\
 & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.
 \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I &= \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho} = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ &= \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ &= (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ &= (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\
 & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\
 & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\
 & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\
 & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\
 & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\
 & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\
 & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\
 & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T !$

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶ $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$

- $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★ $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $\llbracket t \rrbracket^I = v$ et $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T !$

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶ $H(x) \equiv x$ est un homme ;
- ▶ $M(x) \equiv x$ est mortel ;
- ▶ $s \equiv$ Socrate.

- ▶ $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)$ (\mathcal{H}_1) ;
- ▶ $H(s)$ (\mathcal{H}_2) ;
- ▶ $M(s)$ (\mathcal{H}_3).

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$.

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶ $H(x) \equiv x \text{ est un homme ;}$
- ▶ $M(x) \equiv x \text{ est mortel ;}$
- ▶ $s \equiv \text{Socrate.}$

- ▶ $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1) ;$
- ▶ $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2) ;$
- ▶ $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3).$

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3.$

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶ $H(x) \equiv x \text{ est un homme ;}$
- ▶ $M(x) \equiv x \text{ est mortel ;}$
- ▶ $s \equiv \text{Socrate.}$

- ▶ $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1) ;$
- ▶ $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2) ;$
- ▶ $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3).$

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3.$

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶ $H(x) \equiv x \text{ est un homme ;}$
- ▶ $M(x) \equiv x \text{ est mortel ;}$
- ▶ $s \equiv \text{Socrate.}$

- ▶ $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1) ;$
- ▶ $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2) ;$
- ▶ $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3).$

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3.$

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$:
 - * $\llbracket M(s) \rrbracket^I = \llbracket M(s) \rrbracket_\rho^I = I(M)(\llbracket s \rrbracket_\rho^I) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$:
 - * $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_\rho^I =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - * Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$:
 - * $\llbracket H(s) \rrbracket^I = \llbracket H(s) \rrbracket_\rho^I = I(H)(\llbracket s \rrbracket_\rho^I) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - * $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - * $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - * Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - * $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Syllogisme et conséquence logique

• Démonstration :

- ▶ Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
- ▶ On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$;
 - ★ Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
- ▶ $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$:
 - ★ $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).