Exercice 10 :

1. E infini dénombrable. Il existe une bijection entre les parties de E et les fonctions totales de $E \to Bool$

$F = \{ \text{fonctions de } E \to Bool \}$

Montrons que F n'est pas dénombrable

Supposons que l'ensemble F des parties de E est dénombrable, $F = \{ f_0, f_1, \dots, f_i, \dots \}$

$\forall i \quad g(i) = \neg f_i(i)$

$f_0(0) = \text{vrai} \Rightarrow g(0) = \text{faux}$

$f_1(1) = \text{faux} \Rightarrow g(1) = \text{vrai}$

$f_2(2) = \text{faux} \Rightarrow g(2) = \text{vrai} \dots$

g est une fonction totale de $E \to Bool$

donc $g \in F$.

Donc $\exists j$ tq $g = f_j$

$g(j) = \neg f_j(j)$ par définition

$g(j) = f_j(j)$ car $g = f_j$

contradiction.

Donc F n'est pas dénombrable.

Donc $\mathcal{P}(E)$ en bijection avec F n'est pas dénombrable.

2. Un programme se code avec des 0 et des 1, donc l'ensemble des programmes est dénombrable

L'ensemble des fonctions n'est pas dénombrable.

(démonstration 1.)

3. $|E| = n$

$|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ avec $2^n > n$

Exercice 12 :

$\forall i \; E_i \subset \mathbb{N}$, trouver $F \subset \mathbb{N}$ tq

$\forall i \; E_i \neq F$: $F = \{ i \mid i \in E_i \}$

Supposons $\exists E_j$ tq $E_j = F$

Si $j \in E_j$ alors $j \notin F$ alors

$E_j \neq F$. contradiction

Si $j \notin E_j$ alors $j \in F$ alors

$E_j \neq F$ contradiction.

Exercice 13 :

$x \in [0,1[$

$x = \sum a_k \times 10^{-k}$ où $a_k \in [\![0,9]\!]$.

Supposons que I est dénombrable :

$I = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$

Trouver $y \neq x_i \ \forall i$ et $y \in [0,1[$

$y = \sum b_k 10^{-k}$

Posons $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}02$, $x_3 = 0{,}003$

$y = 0{,}211$

$b_k \neq a_k^{(k)}$ si $a_k^{(k)} = 1$ $b_k = 2$

sinon $b_k = 1$

C'est la preuve qu'on ne peut pas coder tous les réels entre 0 et 1 quelque soit la manière de coder.

Exercice 15 :

Un ensemble est fini si on ne peut pas le mettre en bijection avec une partie stricte de lui même.

Il est infini sinon.

$\mathbb{N}$ est infini

$f : x \to 2x$ $\quad$ $f : \mathbb{N} \to$ Entiers Pairs

$f(x)$ est unique, y est un entier pair tq

$\exists!\, x,\ f(x) = y$

Excercice 18 :

1. fonction totale = définie sur l'entièreté de son domaine de définition.

non calculable = aucune procédure ne le calcule.

2. $g(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) + n$

$g(n-1) = \sum f(i) + (n-1)$

g strictement croissante : $g(n) - g(n-1)$

$= f(n) + 1 > 0$

Supposons qu'une procédure g calcule g

```
int procédure f (int n):
        if (n == 0)
                return procédure g (0)
        else return procédure g(n) - procédure g
(n-1) - 1;
```

g(0) = f(0) contradiction, donc l'hypothèse procédure g est fausse ■

Excercice 19 :

f est totale car bijective.

```
int f ( int n) { ... }
```

$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x = g(y)$

```
int g (int y) {
    Pour (x = 0; ;x++) :
        Si f(i) = y :
            renvoyer i
}
```

Ce programme ne bouck pas car f est bijective.

Excercice 20 :

f est totale $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et calculable ssi son graphe est décidable.

$\Rightarrow$ Supposons f calculable. Soit Pf la procédure qui calcule f :

```
int fc ( int x , int y) {
        return Pf(x) == y ;
  }
```

$\Leftarrow$ Supposons fc car G est décidable, montrons que f est calculable :

```
int f(int x) {
    for (int y = 0; ; y++):
        if (fc(x, y)):
            return y;
}
```

Exercice 21 :

$$\Phi(n) = \left| \{ x \mid x \in E \text{ et } x < n \} \right|$$

ϕ est calculable ssi E est décidable

$\Leftarrow$ Soit Pfc la procédure qui calcule la fonction caractéristique de E.

On calcule int phy(int n).

```
int phy (int n) {
        cpt = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++){
            if (Pfc(i))
                cpt++
        }
        return cpt;
}
```

l'algo ne boucle pas grâce à la définition de la fonction caractéristique.

=>

```
int Pfc (int x) {
        return phy(n+1) != phy(n);
}
```