TD N°5

Exercice 6 :

Donner le mgu des ensembles de termes.
mgu = "Most General Unifier" = "Unificateur le plus général".
Algorithme de Robinson (1965).

1.
{ g(f (x), f (y)) = g(f (f (a)), f (z)) } →(decompose)
{ f(x) = f(f(a)), f(y) = f(z) }→ (decompose)x 2
{x = f(a), y = z }

Le mgu = { x = f(a), y = z }= σ

σ(g(f (x), f (y))) = g(f(f (a)), f(z))
σ(g(f (f (a)), f (z))) = g(f (f (a)), f (z))

2. {h(x, f(a), x) = h(h(a, b, y),f(y), h(a, b, a)} → (decompose)
{x = h(a,b,y), f(a) = f(y), x = h(a,b,a)} → (decompose)
{x = h(a,b,y), a = y, x = h(a,b,a)} → (swap)
{x = h(a,b,y), y = a, x = h(a,b,a)}→ (eliminate)
{h(a,b,a) = h(a,b,y), y = a, x = h(a,b,a)}→ (decompose)
{a=a , b=b ,a=y , y=a, x=h(a,b,a)}→ (delete) x 2
{a=y , y=a, x=h(a,b,a)}→ (swap)
{y=a, y=a, x=h(a,b,a)} = { y = a, x = h(a,b,a) }

Le mgu = { y = a, x = h(a,b,a) } =σ

3. {g(y, f(f(x))), g(f(a), y)}
{g(y, f(f(x))) = g(f(a), y)}→ (decompose)
{y = f(a), ffff(f(x)) = y} → (eliminate)
{y = f(a), f(f(x)) = f(a)} → (decompose)
{y = f(a), f(x) = a} →(conflict)
⊥

4.
{h(a, x, f(x))=h(a, y, y)} → (decompose)
{a=a,x=y,f(x)=y}→(delete)
{x=y, f(x)=y}→ (eliminate)
{x=y, f(y)=y }→ (swap)
{x=y, y = f(y) }→ (check)
⊥

5. {g(x, g(y, z)), g(g(a, b), x), g(x, g(a, z))}
{g(x, g(y, z)) = g(g(a, b), x), g(g(a, b), x) = g(x, g(a, z))} → (decompose) x 2

$\{x = g(a,b),\ g(y,z) = x,\ g(a,b)=x,\ x = g(a,z)\} \rightarrow$ (eliminate)
$\{x=g(a,b),\ g(y,z)=g(a,b),\ g(a,b)=g(a,b),\ g(a,b)=g(a,z)\}\rightarrow$(delete)
$\{x=g(a,b),\ g(y,z)=g(a,b),\ g(a,b)=g(a,z)\}\rightarrow$ (decompose) x 2
$\{x=g(a,b),\ y=a,\ z=b,\ a=a,\ b= z\}\rightarrow$ (delete)
$\{x=g(a,b) ,\ y=a ,\ z=b ,b=z\}\rightarrow$ (swap)
$\{x=g(a,b) ,\ y=a ,\ z=b,\ z=b\} = \{x=g(a,b) ,\ y=a ,\ z=b \}$ **pas de constante a gauche du =**)!!
mgu = $\{x=g(a,b) ,\ y=a ,\ z=b \} = \sigma$

TD N°6 (Résolution)

Exercice (supplémentaire)

Démontrer la validité des formules suivantes en utilisant la méthode de résolution.

Résolution :

- Nier la formule (méthode par réfutation)
- Skolémiser
- Clausifier
- Appliquer l'algorithme de résolution

1. $\forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.P (y) \lor Q(y)$
2. $(\exists x.P (x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P (x)) \lor (\exists x.Q(x))$
3. $(\forall x.P (x)) \land (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P (x) \land Q(x)$
4. $(\forall x.P (x) \land Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P (x)) \land (\forall x.Q(x))$
5. $(\forall x.\neg P (x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P (x))$
6. $\neg(\forall x.P (x)) \Rightarrow \exists x.\neg P (x)$

   1. $\neg(\forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.P (y) \lor Q(y))$

Skolémisation :

$s(\neg(\forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.P (y) \lor Q(y)))$
$=\neg\ h(\forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.P (y) \lor Q(y))$
$= \neg\ (h(P (x) \Rightarrow \exists y.P (y) \lor Q(y))[\ c/x\ ])$
$= \neg\ ((P(x)) \Rightarrow h(\exists y.P (y) \lor Q(y))[\ c/x\ ])$
$= \neg\ (P(x\ ) \Rightarrow h(\ \exists y.P (y)) \lor h(Q(y))[\ c/x\ ])$
$= \neg\ (P(x) \Rightarrow h(P(y)) \lor h(Q(y))[\ c/x\ ])$
$= \neg\ (P(x) \Rightarrow P (y) \lor Q(y))[\ c/x\ ])$
$= \neg\ (P(c) \Rightarrow P (y) \lor Q(y))$

Clausification :

$\neg\ (P(c) \Rightarrow P (y) \lor Q(y))$
$= \neg(\ \neg P(c) \lor P(y) \lor Q(y))$

$= P(c) \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(y)$

Clauses :

$S = \{ P(c) , \neg P(y) , \neg Q(y)\}$

Résolution :

- Résolution entre $P(c)$ et $\neg P(y)$ ($\sigma = \{ y = c \}$) : □

S est donc insatisfiable et la formule initiale est donc valide!!

5.$(\forall x.\neg P (x)) \Rightarrow \neg(\exists y.P (y))$

Skolémisation :

$s(\neg(\forall x.\neg P (x)) \Rightarrow \neg(\exists y.P (y)))$
$= \neg h((\forall x.\neg P (x)) \Rightarrow \neg(\exists y.P (y)))$
$= \neg(s(\forall x.\neg P (x)) \Rightarrow h(\neg(\exists y.P (y))))$
$= \neg(s(\neg P(x)) \Rightarrow \neg s((\exists y.P (y)))$
$= \neg(\neg h(P(x)) \Rightarrow \neg s(P(y))[c / y])$
$= \neg(\neg P(x) \Rightarrow \neg P(y)[c/y])$
$= \neg(\neg P(x) \Rightarrow \neg P(c))$

Clausification :

$\neg(\neg P(x) \Rightarrow \neg P(c))$
$= \neg(P(x) \vee \neg P(c))$
$= \neg P(x) \wedge P(c)$

Clauses :

$S = \{ \neg P(x), P(c) \}$

Résolution :

- Résolution entre $P(c)$ et $\neg P(x)$ ($\sigma = \{ x = c \}$) : □

S est donc insatisfiable et la formule initiale est donc valide.

Exercice A :

Démontrer que la formule suivante est valide :

$\forall y. \exists x. \exists z.((P(x) \wedge (P(y) \Rightarrow R(y)) \wedge Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \wedge \neg S(z)) \vee (Q(z) \wedge S(z))))$

Skolémisation :

$s(\neg \forall y. \exists x. \exists z.((P(x) \land (P(y) \Rightarrow R(y)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))))$
$= \neg h(\forall y. \exists x. \exists z.((P(x) \land (P(y) \Rightarrow R(y)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))))$
$= \neg h(\exists x. \exists z.((P(x) \land (P(y) \Rightarrow R(y)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))))$ [c/y]
$= \neg h(((P(x) \land (P(y) \Rightarrow R(y)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))))$ [c/y]
$= \neg ((P(x) \land (P(c) \Rightarrow R(c)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z))))$

Clausification :

$\neg ((P(x) \land (P(c) \Rightarrow R(c)) \land Q(x)) \Rightarrow ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))$
$= \neg (\neg(P(x) \land (P(c) \Rightarrow R(c)) \land Q(x)) \lor ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))$
$= ((P(x) \land (P(c) \Rightarrow R(c)) \land Q(x)) \land \neg ((R(z) \land \neg S(z)) \lor (Q(z) \land S(z)))$
$= ((P(x) \land (\neg P(c) \lor R(c)) \land Q(x)) \land ((\neg R(z) \lor S(z)) \land (\neg Q(z) \lor \neg S(z)))$
$= P(x) \land (\neg P(c) \lor R(c)) \land Q(x) \land (\neg R(z) \lor S(z)) \land (\neg Q(z) \lor \neg S(z))$

Clauses :

$S = \{ P(x), \neg P(c) \lor R(c), Q(x) , \neg R(z) \lor S(z), \neg Q(z) \lor \neg S(z) \}$

Résolution :

- Résolution entre $P(x)$ et $\neg P(c) \lor R(c)$ ($\sigma = \{ x = c \}$) : $R(c)$
- Résolution entre $R(c)$ et $\neg R(z) \lor S(z)$ ($\sigma = \{ z = c \}$) : $S(c)$
- Résolution entre $S(c)$ et $\neg Q(z) \lor \neg S(z)$ ($\sigma = \{ z = c \}$) : $\neg Q(c)$
- Résolution entre $Q(x)$ et $\neg Q(c)$ ($\sigma = \{ x = c \}$) : $\square$

S est donc insatisfiable et la formule initiale est donc valide.

Exercice D :

Modélisez en logique du premier ordre le raisonnement suivant :
— (H1) Certains étudiants aiment les films de Kubrick
— (H2) Aucun étudiant n'aime les navets
— (C) Donc aucun film de Kubrick n'est un navet
Ce raisonnement est-il correct ? Si oui vérifier par la méthode de résolution.

Prédicats :
$E(x)$ = x est étudiant
$K(x)$ = x est un film de Kubrick
$N(x)$ = x est un navet
$A(x,y)$ = x aime y
H1 : $\exists x.(E(x) \land (\forall y.K(y) \Rightarrow A(x,y)))$
H2 : $\forall x.(E(x) \Rightarrow \forall y.(N(y) \Rightarrow \neg A(x,y)))$
C : $\forall x.K(x) \Rightarrow \neg N(x)$

On doit démontrer que :

$H1, H2 \models C$

Donc on doit démontrer la validité de la formule :

$H1 \Rightarrow H2 \Rightarrow C$

On va utiliser la résolution et on doit démontrer que la formule :

$\neg(H1 \Rightarrow H2 \Rightarrow C)$ est insatisfiable.

$\neg(H1 \Rightarrow H2 \Rightarrow C)$ est équivalente à : $H1 \land H2 \land \neg C$

Skolémisation et clausification (skolémiser et clausifier H1, H2 et ¬C séparément) :

$$\begin{aligned}
s(H1) &= s(\exists x.(E(x) \land (\forall y.K(y) \Rightarrow A(x,y)))\\
&= s(E(x) \land \forall y.K(y) \Rightarrow A(x,y))[c/x]\\
&= (s(E(x)) \land s(\forall y.K(y) \Rightarrow A(x,y)))[c/x]\\
&= (E(x) \land s(K(y) \Rightarrow A(x,y)))[c/x]\\
&= (E(x) \land (K(y) \Rightarrow A(x,y)))[c/x]\\
&= E(c) \land (K(y) \Rightarrow A(c,y))
\end{aligned}$$

clauses : $S1 = \{ E(c), \neg K(y) \lor A(c,y) \}$

$$\begin{aligned}
s(H2) &= s(\forall x.E(x) \Rightarrow \forall y.N(y) \Rightarrow \neg A(x,y))\\
&= s(E(x) \Rightarrow \forall y.N(y) \Rightarrow \neg A(x,y))\\
&= h(E(x)) \Rightarrow s(\forall y.N(y) \Rightarrow \neg A(x,y)))\\
&= E(x) \Rightarrow s(N(y) \Rightarrow \neg A(x,y))\\
&= E(x) \Rightarrow N(y) \Rightarrow \neg A(x,y)
\end{aligned}$$

clauses : $S2 = \{\neg E(x) \lor \neg N(y) \lor \neg A(x,y)\}$
(renommage) $= \{\neg E(x) \lor \neg N(z) \lor \neg A(x,z)\}$

$$\begin{aligned}
s(\neg C) &= \neg(\forall x.K(x) \Rightarrow \neg N(x))\\
&= \neg h(\forall x.K(x) \Rightarrow \neg N(x)\\
&= \neg h(K(x) \Rightarrow \neg N(x))[b/x]\\
&= \neg(K(b) \Rightarrow \neg N(b))
\end{aligned}$$

Clauses : $S3 = \{K(b), N(b) \}$

$S = \{ E(c), \neg K(y) \lor A(c,y), \neg E(x) \lor \neg N(z) \lor \neg A(x,z), K(b), N(b) \}$

Résolution :

- Résolution entre $E(c)$ et $\neg E(x) \lor \neg N(z) \lor \neg A(x,z)$ $(\sigma = \{ x = c \})$:

  $\neg N(z) \lor \neg A(c,z)$

- Résolution entre $N(b)$ et $\neg N(z) \lor \neg A(c,z)$ $(\sigma = \{ z = b\})$: $\neg A(c,b)$
- Résolution entre $\neg K(y) \lor A(c,y)$ et $\neg A(c,b)$ $(\sigma = \{ y = b\})$: $\neg K(b)$
- Résolution entre $K(b)$ et $\neg K(b)$: $\square$