TD N°2 (Sémantique)

Exercice 1

- $P(x) \equiv$ x a réussi son examen ;
- $Q(x,y) \equiv$ x a posé des questions à y.

1. Modéliser les phrases suivantes :

- (1) Quelqu'un a raté l'examen et n'a été questionné par personne

$\exists x.(\neg P(x) \land \forall y.\neg Q(y, x))$

- (2) Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont posé des questions à quelqu'un

$\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x,y)$

- (3) Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été questionnés par quelqu'un

- $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(y, x)$

- (4) Personne n'a posé de question à tous ceux qui ont réussi à l'examen

$\neg(\exists x .\forall y. P(y) \Rightarrow Q(x,y))$

- (5) Tous ceux qui ont posé des questions à quelqu'un, ont posé des questions à quelqu'un qui a réussi l'examen

$\forall x.(\exists y.Q(x,y)) \Rightarrow \exists z.Q(x,z) \land P(z)$

-

2. DI = {Anatole, Boris, Catarina, Diana} = {A, B, C, D} (pour aller plus vite).

Dans cette interprétation, seuls Boris et Catarina ont réussi l'examen. Les garçons (Anatole et Boris) ont posé des
questions aux filles (Catarina et Diana), Diana a posé des questions à Boris, Catarina à Diana et ce sont les seuls cas d'entraide.

Définir I(P) et I(Q).

I(P) : DI -> *B* = {T, F}
I(P) = {(A,F),(B,T),(C,T),(D,F)}

I(Q) : DI^2 -> *B*
I(Q) = {((A, C),T),((A, D),T),((B, C),T),((B, D),T),((D, B), T),((C, D),T), ...}

Donner l'interprétation des phrases modélisées :

(1)
$[\![\exists x.(\neg P(x) \land \forall y.\neg Q(y, x))]\!]\rho$

$= V(v\in DI)\llbracket(\neg P(x) \wedge \forall y.\neg Q(y, x))\rrbracket[v/x]$

$= V(v\in DI)\llbracket\neg P(x)\rrbracket[v/x] \wedge_B \llbracket\forall y.\neg Q(y, x))\rrbracket[v/x]$

$= V(v\in DI)(\neg_B\llbracket P(x)\rrbracket[v/x] \wedge_B (\wedge(v'\in DI)\llbracket(\neg Q(y, x))\rrbracket[v'/y][v/x]))$

$= V(v\in DI)(\neg_B (I(P)\llbracket x\rrbracket[v/x]) \wedge_B (\wedge(v'\in DI)\neg_B\llbracket Q(y, x)\rrbracket[v'/y][v/x]))$

$= V(v\in DI)(\neg_B (I(P)(v)) \wedge_B (\wedge(v'\in DI)\neg_B(I(Q)(\llbracket y\rrbracket[v'/y][v/x], \llbracket x\rrbracket[v'/y][v/x]))))$

$= V(v\in DI)(\neg_B I(P)(v) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',v)))$

$= F1$

$$\begin{aligned}
F1 = {} & (\neg_B I(P)(A) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',A))) \vee_B \\
& (\neg_B I(P)(B) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',B))) \vee_B \\
& (\neg_B I(P)(C) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',C))) \vee_B \\
& (\neg_B I(P)(D) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',D)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F1 &= (\neg_B(F) \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',A))) \vee_B \ldots \\
&= (T \wedge_B (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',A))) \vee_B \ldots \\
&= (\wedge(v'\in DI) \neg_B I(Q)(v',A)) \vee_B \ldots \\
&= (\neg_B I(Q)(A,A) \wedge_B \neg_B I(Q)(B,A) \wedge_B \neg_B I(Q)(C,A) \wedge_B \neg_B I(Q)(D,A)) \vee_B \ldots \\
&= (\neg_B (F) \wedge_B \neg_B (F) \wedge_B \neg_B (F) \wedge_B \neg_B (F)) \vee_B \ldots = (T \wedge_B T \wedge_B T \wedge_B T) \vee_B \ldots = T \vee_B \ldots = T
\end{aligned}$$

(2) $\llbracket\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x,y)\rrbracket\rho = \wedge(v\in DI)\ I(P)(v) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(v,v')) = F2$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & (I(P)(A) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(A,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(B) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(B,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(C) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(C,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(D) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(D,v')))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & (F \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(A,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(B) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(B,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(C) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(C,v'))) \wedge_B \\
& (F \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(D,v')))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & T \wedge \\
& (I(P)(B) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(B,v'))) \wedge_B \\
& (I(P)(C) \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(C,v'))) \wedge_B \\
& T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & (T \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(B,v'))) \wedge_B \\
& (T \Rightarrow_B (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(C,v')))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(B,v')) \wedge_B \\
& (V\ (v'\in DI)\ I(Q)(C,v'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 = {} & (I(Q)(B,A)\ v_B\ I(Q)(B,B)\ v_B\ I(Q)(B,C)\ v_B\ I(Q)(B,D)) \wedge_B \\
& (I(Q)(C,A)\ v_B\ I(Q)(C,B)\ v_B\ I(Q)(C,C)\ v_B\ I(Q)(C,D))
\end{aligned}$$

$F2 = (F \vee_B F \vee_B T \vee_B T) \wedge_B$
$\quad (F \vee_B F \vee_B F \vee_B T) = T \wedge_B T = T$

3. $[\![\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(y, x)]\!]$
$= [\![\forall x.P(x)]\!] \Rightarrow_B [\![\exists y.Q(y, x)]\!]$
$= \wedge(v1 \in DI)\ (\ I(P)(v1) \Rightarrow_B \vee(v2 \in DI)\ (I(Q)(v2, v1)) =$ Formule

$(M = \wedge(v1 \in DI)\ (\ I(P)(v1)) \Rightarrow_B (N = \vee(v2 \in DI)\ (I(Q)(v2, v1)).$
Pour $M = F$, Formule $= T$
Pour $N = I(Q)(B, C)$, on a suffisance car disjonction donc Formule $= T$

4.
$[\![\neg(\exists x .\forall y. P(y) \Rightarrow Q(x,y))]\!]\rho$
$= \neg_B \vee(v \in DI)\ \bigwedge(v' \in DI)\ (I(P)(v') \Rightarrow_B I(Q)(v,v')) = F4$

$F4 = \neg_B \vee(v \in DI)\ ((I(P)(A) \Rightarrow_B I(Q)(v,A)\ ) \wedge_B$
$\quad (I(P)(B) \Rightarrow_B I(Q)(v,B)) \wedge_B$
$\quad (I(P)(C) \Rightarrow_B I(Q)(v,C)) \wedge_B$
$\quad (I(P)(D) \Rightarrow_B I(Q)(v,D)))$

$F4 = \neg_B \vee(v \in DI)\ (\ I(Q)(v,B) \wedge_B I(Q)(v,C)\ )$

$F4 = \neg_B (\ (I(Q)(A,B) \wedge_B I(Q)(A,C)) \vee_B$
$\quad (I(Q)(B,B) \wedge_B I(Q)(B,C)) \vee_B$
$\quad (I(Q)(C,B) \wedge_B I(Q)(C,C)) \vee_B$
$\quad (I(Q)(D,B) \wedge_B I(Q)(D,C))\ )$

$F4 = \neg_B (\ (F \wedge_B T) \vee_B$
$\quad (F \wedge_B T)) \vee_B$
$\quad (F \wedge_B F) \vee_B$
$\quad (T \wedge_B F\ )\ )$

$F4 = \neg_B (\ F \vee_B F \vee_B F \vee_B F) = \neg_B F = T$
$F4 = T$

(5) $[\![\forall x.(\exists y.Q(x,y)) \Rightarrow \exists z.Q(x,z) \wedge P(z)\ ]\!]\rho$
$= \Lambda(v \in DI)\ \ \vee(v' \in DI)\ (I(Q)(v,v') \Rightarrow_B \vee(v'' \in DI)\ I(Q)(v,v'')\ \Lambda_B\ I(P)(v'')\ ) = F5$

À faire à la maison.

Bonus

$I(P) \in P(DI^n)$
Si $P \in S_P$ d’arité n et $t1, \dots, tn \in T$ alors $[\![P(t1, \dots, tn)]\!]\rho = ([\![t1]\!]\rho, \dots, [\![tn]\!]\rho) \in_B I(P)$;

Exemple (exercice 1) :

$I(P) = \{B, C\}$
$I(Q) = \{(A, C),(A, D),(B, C),(B, D),(D, B),(C,D)\}$

Quelques propriétés intéressantes :

$[\![\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]\rho = \bigwedge(v \in DI)(v \in_B I(P) \Rightarrow_B v \in_B I(Q)) = (I(P) \subseteq I(Q))$
$[\![\exists x.P(x) \wedge Q(x)]\!]\rho = \bigvee(v \in DI)(v \in_B I(P) \wedge_B v \in_B I(Q)) = (I(P) \cap I(Q) \neq \emptyset)$

Exercice 2

1. Trouver des interprétations pour les cas suivants :

(1) La formule $P(a)$ soit vraie et la formule $\exists x.P(x)$ soit vraie

$DI = \{a0\}$
$I(P) = \{a0\}$
$I(a) = a0$

$[\![P(a)]\!]\rho = [\![a]\!]\rho \in_B I(P) = I(a) \in_B I(P) = a0 \in_B I(P) = T$
$[\![\exists x.P(x)]\!]\rho = \bigvee(v \in DI)(v \in_B I(P)) = a0 \in_B I(P) = T$

(2) La formule $P(a)$ soit fausse et la formule $\exists x.P(x)$ soit vraie

$DI = \{a0, a1\}$
$I(P) = \{a0\}$
$I(a) = a1$

$[\![P(a)]\!]\rho = I(a) \in_B I(P) = a1 \in_B I(P) = F$
$[\![\exists x.P(x)]\!]\rho = \bigvee(v \in DI)(v \in_B I(P)) = a0 \in_B I(P) \vee_B a1 \in_B I(P) = T \vee_B F = T$

(3) La formule $P(a)$ soit vraie et la formule $\exists x.P(x)$ soit fausse

$[\![P(a)]\!]\rho = T$ donc il existe une valeur v dans DI telle que $v \in_B I(P)$.
$[\![\exists x.P(x)]\!]\rho = \bigvee(v \in DI)(v \in_B I(P))$ est forcément vraie.

Donc impossible de trouver une interprétation dans ce cas.

(4) La formule $P(a)$ soit fausse et la formule $\exists x.P(x)$ soit fausse

$DI = \{a0\}$
$I(P) = \emptyset$
$I(a) = a0$

$[\![P(a)]\!]\rho = I(a) \in_B I(P) = a0 \in_B I(P) = F$
$[\![\exists x.P(x)]\!]\rho = \bigvee(v \in DI)(v \in_B I(P)) = a0 \in_B I(P) = F$

2. Interpréter les formules suivantes dans les interprétations précédentes :

$F1 = (\exists x.P(x)) \Rightarrow P(a)$;
$F2 = \forall x.P(x)$.

(1)
$DI = \{a0\}$
$I(P) = \{a0\}$
$I(a) = a0$

$[\![F1]\!]\rho = [\![\exists x.P(x)]\!]\rho \Rightarrow_B [\![P(a)]\!]\rho = T \Rightarrow_B T = T$

$[\![F2]\!]\rho = [\![\forall x.P(x)]\!]\rho = \bigwedge(v\in DI)\ v \in_B I(P) = a0 \in_B I(P) = T$

(2)
$DI = \{a0, a1\}$
$I(P) = \{a0\}$
$I(a) = a1$

$[\![F1]\!]\rho = [\![\exists x.P(x)]\!]\rho \Rightarrow_B [\![P(a)]\!]\rho = T \Rightarrow_B F = F$
$[\![F2]\!]\rho = [\![\forall x.P(x)]\!]\rho = \bigwedge(v\in DI)\ v \in_B I(P) = a0 \in_B I(P) \wedge_B a1 \in_B I(P) = T \wedge_B F = F$

(3) rien à faire (pas d'interprétation).

(4)
$DI = \{a0\}$
$I(P) = \emptyset$
$I(a) = a0$

$[\![F1]\!]\rho = [\![\exists x.P(x)]\!]\rho \Rightarrow_B [\![P(a)]\!]\rho = F \Rightarrow_B F = T$
$[\![F2]\!]\rho = [\![\forall x.P(x)]\!]\rho = \bigwedge(v\in DI)\ v \in_B I(P) = a0 \in_B I(P) = F$

F1 et F2 sont contingentes.

3.
$F1 = P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$
$F2 = P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$.

$[\![F1]\!]\rho = [\![P(a)]\!]\rho \Rightarrow_B [\![\exists x.P(x)]\!]\rho = I(a) \in_B I(P) \Rightarrow_B V(v\in DI)(v \in_B I(P))$:
2 cas :

- si $I(a) \in_B I(P) = F$ alors F1 est T
- sinon $I(a) \in_B I(P) = T$, $I(a) = a0 \in DI$

$V(v\in DI)(v \in_B I(P)) = (a0 \in_B I(P)) \vee_B ... = T \vee_B ... = T$
F1 est valide.

$[\![F2]\!]\rho = [\![P(a)]\!]\rho \wedge_B \neg_B [\![\exists x.P(x)]\!]\rho = I(a) \in_B I(P) \wedge_B \neg_B (V(v\in DI)(v \in_B I(P)))$

- **2 cas :**

- si $I(a) \in_B I(P) = F$, $[\![F2]\!]\rho = F$
- si $I(a) \in_B I(P) = T$, $[\![F2]\!]\rho = \neg_B (V(v\in DI)(v \in_B I(P)))$

- s'il existe un $a0 = I(a) \in_B I(P)$ alors $[\![F2]\!]\rho = \neg_B (a0 \in_B I(P) \vee_B ...) = \neg_B T = F$

F2 est insatisfiable.
c'est un ou non ?
c'est pour