Correction des exercices de TD

1 Calculabilité

1.1 Divers

Exercice 1 – Paradoxe

Montrer que les problèmes suivants engendrent un paradoxe

1. Le conseil municipal d'un village vote un arrêté municipal qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.
2. Un crocodile s'empare d'un bébé et dit à la mère : « si tu devines ce que je vais faire, je te rends le bébé, sinon je le dévore. »
En supposant que le crocodile tienne parole, que doit dire la mère pour que le crocodile rende l'enfant à sa mère ?
Une réponse usuelle de la mère est : « Tu vas le dévorer ! »

1. Le barbier est un habitant masculin. Il doit donc se raser. Seulement, s'il se rase, alors c'est une personne qui se rase elle-même. Il n'a donc plus le droit de se raser.
Le barbier doit donc se raser et ne pas se raser dans le même temps on a $\neg A$ et A en même temps ce qui est un paradoxe.
2. De même pour ce problème. Si la mère dit « Ta vas me rendre mon bébé », alors le crocodile va le manger et la mère n'avait pas bien deviné.
Mais si la mère dit « Tu vas le dévorer » alors si le crocodile le dévore, c'est que la mère avait bien deviné et le crocodile doit donc rendre l'enfant. Mais dans ce cas, la mère s'est trompée et le crocodile devrait le manger... Au final le crocodile devrait plutôt manger la mère, y a sans doute plus à manger.

Exercice 2 – Une preuve incorrecte

Nous considérons la fonction suivante donné par l'algorithme 1 :

Algorithm 1 La fonction de Collatz

```
while n ≠ 1 do
    if n mod 2 = 0 then
        n := n/2
    else
        n := 3 × n + 1
    end if
end while
```

Actuellement nous ne savons pas si cette fonction termine $\forall n$.
Est-ce que vous êtes d'accord avec la preuve suivante ?
« Si le problème de l'arrêt était décidable il suffirait de l'appliquer à ce programme pour savoir si son exécution s'arrête. Or, on ne sait pas si son exécution s'arrête. D'où la contradiction »

Cette preuve est étrange parce qu'elle ne prouve rien. Le but est de démontrer que le problème de l'arrêt est indécidable ou que la fonction de Collatz ne peut pas s'arrêter ?

Dans tous les cas, il manque la deuxième hypothèse avec « Sinon, le problème de l'arrêt est indécidable et donc ... ». Sinon tous les cas ne sont pas traité. On sait d'ailleurs que le problème de l'arrêt est indécidable et donc la totalité de la première phrase est complètement inutile.

La deuxième phrase est également étrange car « on ne sait pas si son exécution s'arrête » ne veut rien dire. Cette proposition équivaut à $\top$ car c'est $A \vee \neg A$ – soit oui, soit non.

1.2 Variations sur le codage

Exercice 3 – Codage de couples d'entiers

Soit $Rang : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $Rang(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$.

1. Donner une version récursive de la fonction $Rang$.
2. Donner la fonction inverse
3. Calculer $Rang(4, 5)$. Donner le couple pour lequel la valeur du codage est 8.

Tout d'abord, comprenons pourquoi la fonction $Rang$ est une bonne bijection entre les couples d'entiers et $\mathbb{N}$. En fait, il faut s'imaginer l'ensemble des couples comme une grille en deux dimensions. On parcourt cette grille de diagonales en diagonales en commençant à l'origine, comme le montre la figure 1. En suivant cet ordre et en incrémentant de 1 à chaque fois, nous arrivons aisément à notre bijection avec $\mathbb{N}$.

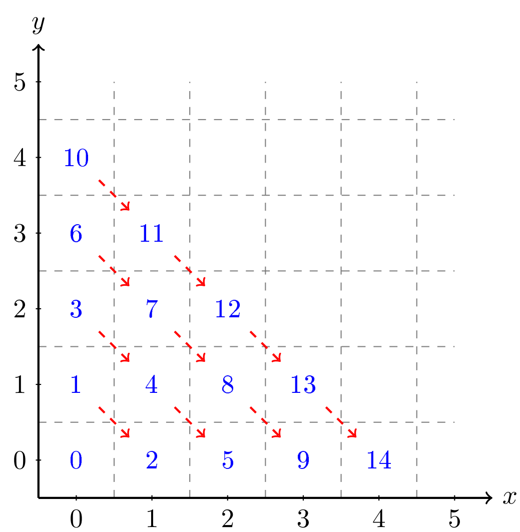


FIGURE 1 – Représentation des couples sur une grille

Maintenant essayons de comprendre le calcul de $Rang$. Il faut d'abord s'apercevoir d'une chose : tout couple (x, y) qui se situe sur la même diagonale a exactement la même somme que les autres. Par exemple, les couples $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$ sont sur la même diagonale et les sommes de leurs éléments sont toutes égales à 2.

De plus, si on ajoute 1 à cette somme, on tombe sur le nombre d'éléments de la diagonale (3 dans notre exemple).

On arrive du coup aisément à la conclusion que le nombre d'élements de toutes les diagonales jusqu'à la n-ième est équivalent à la somme i allant de 1 à n que nous connaissons bien :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour tout couple (x, y), le numéro de sa diagonale est $x+y+1$. La diagonale inférieure est donc $x+y$. Sur la figure 2, on voit que pour connaître le $Rang$ du couple (x, y), il faut déjà connaître le nombre d'éléments qui le précède. Et tout ceux des diagonales inférieures sont avant lui (en rouge sur la figure).

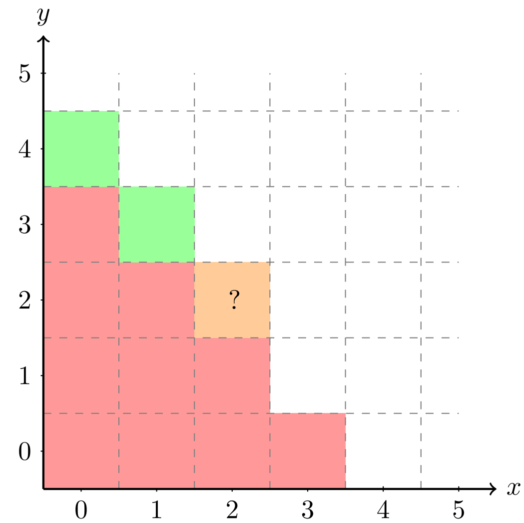


FIGURE 2 – Calcul de la valeur du couple $(2, 2)$

La somme de ces éléments, comme vu plus haut est égale à $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n = x + y$ ce qui donne $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.

Il ne reste plus qu'à compter le nombre d'élements de la même diagonale qui précèdent notre couple (en vert sur la figure). Il y en a exactement x puisque chaque colonne précédent x possède exactement 1 élement vert.

En conclusion, il y a $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ couples qui précèdent le notre. On aurait tendance à dire que notre couple est donc le suivant et ajouter 1, mais on se rappelle que $\mathbb{N}$ commence à 0 et possède donc un élément de plus. On a donc bien :

$$Rang(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$$

1. Maintenant que la fonction *Rang* est claire, passons à sa version récursive. On peut imaginer la version récursive comme étant : je vais chercher mon élément précédent et j'y ajoute 1. C'est ce que nous allons faire dans cette correction.

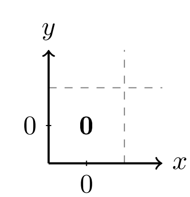
   Il y a alors 3 cas à connaître :

   (a) Le cas de base pour s'arrêter, c'est à dire le premier couple qui ne possède pas de précédent : $(0, 0)$.

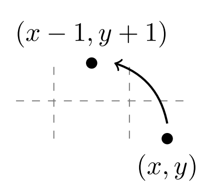
   (b) Le cas où $x > 0$, c'est à dire que l'élément précédent se situe sur la même diagonale. Si on reprend l'exemple de la figure 2, c'est lorsqu'il nous reste des cases vertes.

   (c) Enfin, le cas où $x = 0$ et où l'élément précédent se situe dans la diagonale du dessous.

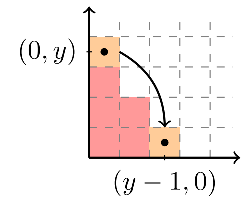
   Pour le cas (a), c'est simplement 0, la première valeur de $\mathbb{N}$



   Pour le cas (b), une simple visualition de la figure 1 montre que le prédécesseur est la case juste en haut à gauche de la case actuelle.



Pour le cas (c), on doit descendre sur la diagonale d'en dessous en partant du premier couple tout en bas de cette diagonale. Comme vu précédemment, le couple $(0, y)$ appartient à la diagonale numéro $y + 1$. On cherche alors x tel que le couple $(x, 0)$ appartienne à la colonne y. On a donc $x = y - 1$.



La version récursive de l'algorithme *Rang* se décompose donc en 3 cas :
— $RangRec(0, 0) = 0$
— $RangRec(0, y) = 1 + RangRec(y - 1, 0)$
— $RangRec(x, y) = 1 + RangRec(x - 1, y + 1)$

2. La fonction inverse c'est la fonction $RangInv(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui prend un entier et renvoie le couple qui, codé, donne l'entier n.

   Lorsqu'on regarde la figure 2, on s'aperçoit que « l'escalier rouge » est là dans tous les cas. On sait que notre couple est juste au dessus de cet escalier. On sait donc que n est supérieur ou égal (à cause du 0) au nombre de coordonnées de cet escalier mais est inférieur au nombre de coordonnées de l'escalier contenant la diagonale du dessus.

   Comme dit préalablement, on sait que (x, y) se situe sur la diagonale numéro $x + y + 1$, ce qui veut dire que la diagonale juste en dessous (la dernière diagonale rouge) est la diagonale numéro $x + y$. Si on trouve le numéro de cette diagonale, alors on trouve $x + y$.

   Le numéro de cette dernière est le plus grand t tel que $\frac{t(t+1)}{2} \leq n$. On peut alors facilement trouver x et y.

   On sait que $n = \frac{t(t+1)}{2} + x$ et donc logiquement $x = n - \frac{t(t+1)}{2}$.

   De là découle la valeur de y qui vaut $y = t - x$ et nous avons notre couple.

3. $Rang(4, 5) = \frac{(4+5)(4+5+1)}{2} + 4 = \frac{9 \times 10}{2} + 4 = 49$.

   Pour savoir le couple qui décodé donne 8, on cherche le plus grand t tel que $\frac{t(t+1)}{2} \leq 8$.
   — $t = 1 \to 1 \leq 8$
   — $t = 2 \to 3 \leq 8$
   — $t = 3 \to 6 \leq 8$
   — $t = 4 \to 10 > 8$

   On a donc $t = 3$.
   $x = 8 - \frac{t(t+1)}{2} = 8 - 6 = 2$.
   $y = t - x = 3 - 2 = 1$.

   Le couple pour lequel la valeur de codage est 8 est $(2, 1)$.