TD N°5

Manipulations syntaxiques : formes prénexes, formes de Skolem/Herbrand.
Un peu de clausification.

Exercice 1

1. $F_1 = (\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists y.P(y)$
$F_1 = \exists x.(P(x) \Rightarrow \exists y.P(y))$
$F_1 = \exists x.(\exists y.(P(x) \Rightarrow P(y)))$
$F_1 = \exists x,y.P(x) \Rightarrow P(y)$

2. $F_2 = (\forall x.\exists y.R(x, y)) \Rightarrow \exists x.\forall y.R(x, y)$
$F_2 = (\forall x.\exists y.R(x, y)) \Rightarrow \exists z.\forall t.R(z,t)$
$F_2 = \exists x.((\exists y.R(x, y)) \Rightarrow \exists z.\forall t.R(z,t))$
$F_2 = \exists x.\forall y.(R(x,y) \Rightarrow \exists z.\forall t.R(z,t))$
$F_2 = \exists x.\forall y.\exists z.(R(x,y) \Rightarrow \forall t.R(z,t))$
$F_2 = \exists x.\forall y.\exists z.\forall t.(R(x,y) \Rightarrow R(z,t))$

Autre version (en changeant l'ordre de "remontée" des quantificateurs) :

$F_2 = \exists z.((\forall x.\exists y.R(x, y)) \Rightarrow \forall t.R(z, t))$
$F_2 = \exists z.\forall t.((\forall x.\exists y.R(x, y)) \Rightarrow R(z, t))$
$F_2 = \exists z.\forall t.\exists x.((\exists y.R(x, y)) \Rightarrow R(z, t))$
$F_2 = \exists z.\forall t.\exists x.\forall y.(R(x,y) \Rightarrow R(z, t))$

3. $F_3 = (\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall x.\exists y.R(x, y)$
Elle n'est pas polie non plus : $(\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(z, t)$
Soit $F_3 = (\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(z, t)$

$F_3 = \forall x.((\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(z, t))$
$F_3 = \forall x.\exists y.(R(x, y) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(z, t))$
$F_3 = \forall x.\exists y.\forall z.(R(x, y) \Rightarrow \exists t.R(z, t))$
$F_3 = \forall x.\exists y.\forall z.\exists t.(R(x, y) \Rightarrow R(z, t))$

4. $F_4 = (P(x) \Rightarrow \forall x.Q(x)) \Rightarrow ((\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.Q(x))$
Elle n'est pas polie du coup :'(non il existe et pour tout x + x libre est lié
$F_4 = (P(x) \Rightarrow \forall y.Q(y)) \Rightarrow ((\exists z.P(z)) \Rightarrow \forall t.Q(t))$
$F_4 = (\forall y.(P(x) \Rightarrow Q(y))) \Rightarrow ((\exists z.P(z)) \Rightarrow \forall t.Q(t))$
$F_4 = \exists y.((P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow ((\exists z.P(z)) \Rightarrow \forall t.Q(t)))$
$F_4 = \exists y.((P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\forall z.(P(z) \Rightarrow \forall t.Q(t))))$
$F_4 = \exists y.\forall z.((P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (P(z) \Rightarrow \forall t.Q(t)))$
$F_4 = \exists y.\forall z.((P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall t.(P(z) \Rightarrow Q(t)))$
$F_4 = \exists y.\forall z.\forall t.((P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (P(z) \Rightarrow Q(t)))$

5. À faire à la maison.

5. $(\exists x.\forall y.(\exists z.S(x, y, z)) \land R(x, y)) \Rightarrow \exists y.(\forall x.S(x, y, z)) \land \exists x.R(x, y)$.
$(\exists x.\forall y.(\exists z.S(x, y, z)) \land R(x, y)) \Rightarrow \exists t.(\forall h.S(h, t, z)) \land \exists u.R(u, t)$.
$\forall x.\exists y.\forall z.\exists t.S(x, y, z) \land R(x, y) \Rightarrow \forall h.\exists u.(S(h, t, z) \land \exists u.R(u, t))$.
$\forall x.\exists y.\forall z.\exists t.S(x, y, z) \land R(x, y) \Rightarrow \forall h.\exists u.(S(h, t, z) \land \exists u.R(u, t))$
$\forall x,h,z.\exists y,u,t(S(x, y, z) \land R(x, y) \Rightarrow (S(h, t, z) \land \exists u.R(u, t))$

Exercice 4

Skolémiser, puis clausifier.

1. $F_1 = \forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.\forall x.R(x, y)$

$F_1 = \forall x.(P (x) \Rightarrow \exists y.\forall t.R(t, y))$

$s(F_1) = s(\forall x.P (x) \Rightarrow \exists y.\forall t.R(t, y))$
$= s(P(x) \Rightarrow \exists y.\forall t.R(t, y)) =$
$h(P(x)) \Rightarrow s(\exists y.\forall t.R(t, y)) =$
$P(x) \Rightarrow s(\forall t.R(t, y))[c / y] =$
$P(x) \Rightarrow s(R(t,y))[c / y] =$
$P(x) \Rightarrow R(t,y)[c / y] =$
$P(x) \Rightarrow R(t,c)$

Forme de Skolem : $\forall x.\forall t.P(x) \Rightarrow R(t,c)$
“c” est appelé symbole de Skolem.

Clausification :
- On élimine les quantificateurs en tête : $P(x) \Rightarrow R(t,c)$
- On applique toutes les règles de clausification de la logique propositionnelle : $\neg P(x) \vee R(t,c)$
- Ensemble des clauses : $S = \{ \neg P(x) \vee R(t,c) \}$

Autre méthode (on met en forme prénexe d'abord) :
$F_1 = \forall x.(P (x) \Rightarrow \exists y.\forall t.R(t, y)) =$
$\forall x.\exists y.\forall t.(P(x) \Rightarrow R(t,y))$

Forme de Skolem de F_1 :
$\forall x.\forall t.P(x) \Rightarrow R(t,f(x))$
“f” est également appelé symbole de Skolem

2. $F_2 = (\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall y.\exists x.R(x, y)$

$F_2 = (\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall s.\exists t.R(t, s)$

$s(F_2) = s((\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall s.\exists t.R(t, s))$
$= h((\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow s(\forall s.\exists t.R(t, s))$
$= h(\forall y.R(x, y)) \Rightarrow s(\exists t.R(t, s))$
$= h(R(x, y))[f(x) / y] \Rightarrow s(R(t, s))[g(s) / t]$
$= R(x,y) [f(x) / y] \Rightarrow R(t,s) [g(s) / t]$
$= R(x,f(x)) \Rightarrow R(g(s),s)$

Forme de Skolem :
$\forall x.\forall s.R(x,f(x)) \Rightarrow R(g(s),s)$

Clausifier :

- On enlève les quantificateurs : $R(x,f(x)) \Rightarrow R(g(s),s)$
- $S = \{ \neg R(x,f(x)) v\ R(g(s),s) \}$

Autre version en passant par la forme prénexe :

$F2 = (\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall y.\exists x.R(x, y)$

On la rend propre :
$(\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(t, z)$

On met en forme prénexe d'abord :

$(\exists x.\forall y.R(x, y)) \Rightarrow \forall z.\exists t.R(t, z)$
$\forall x.\exists y.\forall z.\exists t. (R(x,y) \Rightarrow R(t, z))$

Forme de Skolem :
$\forall x.\forall z.(R(x,f(x)) \Rightarrow R(g(x,z), z))$

3. $F_3 = ((\exists x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \forall y.P(y)) \wedge \forall x.\exists y.Q(y) \Rightarrow P (x)$
$F_3 = ((\exists x.P (x) \Rightarrow Q(x)) \vee \forall y.P (y)) \wedge \forall t.\exists z.Q(z) \Rightarrow P(t)$

Forme de Skolem de F_3:
$s(F_3) = s(((\exists x.P (x) \Rightarrow Q(x)) \vee \forall y.P(y)) \wedge \forall t.\exists z.Q(z) \Rightarrow P(t))$
$= s(((\exists x.P (x) \Rightarrow Q(x)) \vee \forall y.P(y))) \wedge s(\forall t.\exists z.Q(z) \Rightarrow P(t)))$
$= \mathbf{(}\ s(\ \exists x.(P (x) \Rightarrow Q(x))) \vee s(\forall y.P(y))\ \mathbf{)} \wedge s(\exists z.Q(z) \Rightarrow P(t)))$
$= \mathbf{(}\ s(P (x) \Rightarrow Q(x))[c/x]\ \ \vee s(P(y))\ \mathbf{)}\ \ \wedge s(Q(z) \Rightarrow P(t))[\ \ f(t)\ \ / z]$
$= \mathbf{(}h(P(x)) \Rightarrow s(Q(x)))[c/x] \vee\ P(y)\ \mathbf{)} \wedge (h(Q(z) \Rightarrow s(P(t))[\ [\ f(t) / z]$
$= \mathbf{(}\ (P(x) \Rightarrow Q(x)\ )[c/x] \vee P(y)\ \mathbf{)} \wedge (Q(z) \Rightarrow P(t))[f(t)/z]$
$s(F_3) = \mathbf{(}\ (P(c) \Rightarrow Q(c)) \vee P(y)\mathbf{)} \wedge (Q(f(t)) \Rightarrow P(t))$

Forme de Skolem : $F_3 = \forall y.\forall t.\mathbf{(}\ (P(c) \Rightarrow Q(c)) \vee P(y)\mathbf{)} \wedge (Q(f(t)) \Rightarrow P(t))$

Clausifier :

$\mathbf{(}(P(c) \Rightarrow Q(c)) \vee P(y)\mathbf{)} \wedge (Q(f(t)) \Rightarrow P(t))$
$S = \{ \mathbf{(}\ \neg P(c) \vee\ \ Q(c) \vee P(y)\ \mathbf{)}, (\neg Q(f(t)) \vee P(t)) \}$

Exercice 5

$F = (\forall x.P (x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P (x)) \Rightarrow \exists x.Q(x)$
Version propre :;, <
$F = (\ \forall x.P (x) \Rightarrow Q(x)\ ) \Rightarrow (\ (\exists y.P (y)) \Rightarrow \exists z.Q(z)\ )$

1. **Herbrandisation de F :**

$h(F) = s(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow h((\exists y.P(y)) \Rightarrow \exists z.Q(z))$
$= s(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (s(\exists y.P(y)) \Rightarrow h(\exists z.Q(z)))$
$= (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(y)[c/y] \Rightarrow Q(z))$
$h(F) = (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)) =$ **F'**

Forme de Herbrand :

$F' = \exists x.\exists z.((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))$

Preuve dans LK de F' :

--ax
$(P(c) \Rightarrow Q(c)) \vdash (P(c) \Rightarrow Q(c))$
-- $\Rightarrow$ right
$\vdash (P(c) \Rightarrow Q(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))$
-- $\exists$ right
$\vdash \exists z.((P(c) \Rightarrow Q(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))$
-- $\exists$ right
$\vdash \exists x.\exists z.((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))$

2. **Skolémisation de ¬F :**

$s(\neg F) = \neg h(F) = \neg F' = \neg ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))$

Forme de Skolem de ¬F :
$G = (\forall x.\forall z.(\neg((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))))$

Preuve dans LK de ¬G : (Comme G est insatisfiable)

-- ax
$P(c) \Rightarrow Q(c) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)$
-- $\Rightarrow$ right
$\vdash (P(c) \Rightarrow Q(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))$
-- $\neg$ left
$\neg((P(c) \Rightarrow Q(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))) \vdash$
-- $\forall$ left
$\forall z.(\neg((P(c) \Rightarrow Q(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))) \vdash$
-- $\forall$ left
$\forall x.\forall z.(\neg((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))) \vdash$
-- $\neg$ right x 2
$\vdash \neg (\forall x.\forall z.(\neg((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(z)))))$