Un système déductif complet: le calcul des séquents

On va présenter un système formel pour démontrer une formule, de sorte que les formules universellent valides seront exactement les formules démontrées.

Pour ce système on présentera un algorithme déterministe de recherche de démonstration qui en plus de dire si la formule est ou non une tautologie, fournit immédiatement

- toutes les valuations rendant la formule vraie
- toutes les valuations rendant la formule fausse
- une forme normale conjonctive
- une forme normale conjonctive

On manipule des expressions appelées sequents:

$$A_1, \ldots, A_k \vdash B_1, \ldots, B_l$$

- $A_1, \ldots, A_k$ sont des formules appelées hypothèses du séquent. Si $k = 0$, le séquent n'a pas d'hypothèse.

- $B_1, \ldots, B_l$ sont des formules appelées conclusions du séquent. Si $l = 0$, le séquent n'a pas de conclusion.

Un séquent $A_1, \dots, A_k \vdash B_1, \dots, B_l$
signifie que
la conjonction des $A_1, \dots, A_k$ *entraîne la disjonction des* $B_1, \dots, B_l$
ou encore
si toutes les formules de $A_1, \dots, A_k$ *sont vraies alors l'une au moins des formules* $B_1, \dots, B_l$ *est vraie.*

Conséquemment on appellera *formule associée au séquent* la formule

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (B_1 \vee \cdots \vee B_l)$$

[Si $k = 0$ alors $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) = \top$ et si $l = 0$ alors $(B_1 \vee \cdots \vee B_l) = \perp$]

Etant donnée une valuation, on dira dira qu'un séquent est vrai ou faux si et seulement si la formule associée l'est pour cette valuation.

On construit des preuves qui sont des arbres.

- Les feuilles sont des axiomes

- Les branchements sont des règles du calcul des séquents.

Nous utiliserons les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$.

Les axiomes sont tous les séquents de la forme: $\Gamma \vdash \Delta$ tel que Γ et Δ sont des suites de formules atomiques qui contiennent une même proposition atomique. [On peut également autoriser comme axiomes les séquents $\Gamma \vdash \Delta$ tel que Γ et Δ comportent une proposition (non nécessairement atomique) en commun.]

Les majuscules grecques désignent des suites de formules.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \vdash \Theta} \wedge_g$$

$$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A, \Delta \qquad \Theta \vdash \Gamma, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \wedge B), \Delta} \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Theta \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \vdash \Theta} \vee_g$$

$$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \vee B), \Delta} \vee_d$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta \qquad B, \Gamma, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta} \Rightarrow_g$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (A \Rightarrow B), \Theta} \Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta}{\Gamma, (\neg A), \Delta \vdash \Theta} \neg_g \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (\neg A), \Theta} \neg_d$$

Un exemple de démonstration

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{\mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t, t}}{q, p, (\neg q), p, s \vdash t, t}\,\neg_g}{q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t, t}\,\wedge g
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{r, \mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t}}{r, q, p, (\neg q), p, s \vdash t}\,\neg_g}{r, q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t}\,\wedge g
}{q, p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t}\,\Rightarrow_g
$$

Remarquons que les axiomes corrrespondent à des formules universellement valides, c.-à-d.

Propriété 8 *Un axiome*

$$a_1, \ldots, a_k \vdash b_1, \ldots, b_l$$

avec $a_i = b_j$ *(pour un* i *et un* j *t.q.* $1 \leq i \leq k$ *et* $1 \leq j \leq l$*) a une formule associée universellement valide —* $v((a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$ *pour toute valuation* v*.*

En effet,
— si $v(a_i) = v(b_j) = 1$ alors $v(b_1 \vee \cdots \vee b_l) = 1$ et donc $v((a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$.
— si $v(a_i) = v(b_j) = 0$ alors $v(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = 0$ et donc $v((a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$.

Puisqu'il s'agit d'un système déductif, il faut que pour toute valuation:

Propriété 9 *Etant donnée une valuation v,*
si tous les séquents prémisses de la règle R (1 ou 2 suivant R) valent 1,
alors le séquent conclusion de R vaut 1 aussi.

Cettte propriété, plus la validité des axiomes (prop. 8), entraîne que tous les séquents démontrables sont vrais pour toute valuation. En particulier si $\vdash F$ est démontrable alors F est une tautologie.

Cette règle consiste à dire que si "on a montré B avec une hypothèse A", alors "on a montré $A \Rightarrow B$ *sans* l'hypothèse A."

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta, \Theta \quad \mathbf{P}}{\Gamma \vdash \Delta, (A \Rightarrow B), \Theta \quad \mathbf{C}} \Rightarrow_d$$

Soit v une valuation. Si $v(\mathbf{P}) = 1$ alors l'une des formules de B, Δ, Θ vaut 1 (a) ou l'une des formules de A, Γ vaut 0 (b).

(a) Dans le premier cas, si $v(B) = 1$ alors $v(A \Rightarrow B) = 1$ et l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B), \Theta$ vaut 1, donc **C** vaut 1. Si $v(B) = 0$ alors une formule de Δ, Θ vaut 1 et donc une formule de $\Delta, (A \Rightarrow B), \Theta$ vaut 1 et finalement C vaut 1.

(b) Dans le second cas, si $v(A) = 0$ alors $v(A \Rightarrow B) = 1$ et l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B), \Theta$ vaut 1, donc **C** vaut 1. Sinon, une des formules de Γ vaut 0, et par conséquent **C** vaut 1.

Cette règle est moins intuitive.

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta \quad \textbf{P1} \qquad\qquad B, \Gamma, \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{P2}}{\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_g$$

Soit v une valuation, supposons que $v(\textbf{P1}) = 1$ et $v(\textbf{P2}) = 1$. On sait donc que

(a) (l'une des formules de Γ, Δ vaut 0 (a1) OU l'une des formules de A, Θ vaut 1 (a2))
ET (b)(l'une des formules de B, Γ, Δ vaut 0 (b1) ou l'une des formule de Θ vaut 1 (b2)).

Si l'une des formule de Θ vaut 1 alors **C** vaut 1.

Si l'une des formules de Γ, Δ vaut 0, alors **C** vaut 0.

Il reste à examiner la valeur de **C** lorsque toutes les formules de Γ, Δ valent 1 (I) et toutes les formules de Θ valent 0 (II).
D'après (a) et (I), on a nécessairement (a2), et d'après (II) on a $v(A) = 1$.
D'après (b) et (II), on a nécessairement (b1), et d'après (I) $v(B) = 0$.
Par conséquent $v(A \Rightarrow B) = 0$, l'une des formules de Γ, $(A \Rightarrow B)$, Δ vaut 0, et **C** vaut donc 1.

Propriété 10 (validité) *Si un séquent est démontrable, alors la formule correspondante est une tautologie.*

Cette propriété se vérifie aisément par récurrence sur la hauteur de l'arbre de démonstration à partir des propriétés 8 et 9.

Considérons une valuation v.
Les axiomes correspondent à des formules vraies pour v (puisque ce sont des tautologies, cf. 8).
Or on sait d'après la prop. 9 que si les prémisses d'une règle sont vraies pour v alors la conclusion de la règle est vraie pour v.
Donc la formule associée au séquent conclusion de la démonstration est vraie pour v.
Comme l'argument fonctionne pour tout v, le séquent associé à la conclusion de la démonstration est vrai pour toute valuation.

Chaque règle R du calcul des séquents vérifie en outre la propriété suivante:

Propriété 11 *Etant donnée une valuation v, si le séquent conclusion de la règle R est vrai, alors les séquents prémisses de la règle R sont vrais.*

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta \quad \textbf{P1} \qquad\qquad B, \Gamma, \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{P2}}{\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_g$$

Soit v une valuation. Si le séquent conclusion de la règle est vrai pour v, c'est que l'une des formules de $\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta$ est fausse ou que l'une des formules de Θ est vraie.

Si l'une des formules de Γ, Δ est fausse, alors **P1** est vrai, et **P2** aussi. Si l'une des formules de Θ est vraie, alors **P1** est vrai, et **P2** aussi. On se amène donc au cas où toutes les formules de Γ, Δ sont vraies, où toutes les formules de Θ sont fausses, et où $A \Rightarrow B$ est faux. On a donc A vrai et B faux. Comme A est vrai **P1** est vrai et comme B est faux, **P2** est vrai.

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta, \Theta \quad \mathbf{P}}{\Gamma \vdash \Delta, (A \Rightarrow B), \Theta \quad \mathbf{C}} \Rightarrow_d$$

Soit v une valuation. Si **C** est vrai, c'est que l'une des formules de Γ est fausse ou que l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B), \Theta$ est vraie.

Si l'une des formules de Γ est fausse, **P** est vrai. Si l'une des formules de Γ, Δ est vraie, **P** est vrai.

Si aucun de ces deux cas ne s'applique, c'est que $A \Rightarrow B$ est vrai. Si A est faux, **P** est vrai. Si A est vrai, B l'est aussi, et donc **P** est vrai.

En combinant les prop. 11 et 9 on obtient:

Propriété 12 *Soit v une valuation; alors pour toute règle R du calcul des séquents:*

(i) tous les séquents prémisses de la règle R (1 ou 2 suivant R) valent 1*,*

si et seulement si

(ii) le séquent conclusion de R vaut 1*.*

si (i) alors (ii) est la prop. 9

si (ii) alors (i) est la contraposée de la prop. 11.

Algorithme 13 *On construit un arbre de séquents de sorte que les branchements soient des règles. Si les feuilles sont des axiomes, alors la formule est démontrable, et sinon on peut produire une valuation qui rend la formule fausse.*

1. *L'arbre est initialisé au séquent à démontrer/réfuter.*

2. *Si toutes les feuilles ne contiennent que des propositions atomiques, c'est fini.*

3. *Si une feuille est un séquent qui contient une proposition composée, écrire en dessus les prémisses de la règle qui fabrique cette formule, et on retourne en 2*

Une fois choisie la formule à décomposer, les prémisses sont totalement déterminées, et ce choix n'influe pas sur le fait qu'on obtienne ou non une démonstration.

Propriété 14 *L'algorithme appliqué à un un séquent* $a_1, \ldots, a_k \vdash b_1, \ldots, b_l$ *s'arrête*

(1) soit sur une démonstration et pour toute valuation $v((a_1, \ldots, a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$

(2) soit sur un arbre de séquents dont les branchements sont des règles, et dont au moins une feuille n'est pas un axiome, et il existe une valuation v *telle que* $v((a_1, \ldots, a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 0$

L’arbre construit ne peut avoir de branche infinie: le nombre de connecteurs dans une prémisse d’une règle est toujours moindre que le nombre de connecteurs dans la conclusion de la règle.

Lorsque l’algorithme est fini, toutes les feuilles sont des séquents ne contenant que des propositions atomiques,

(1) soit qui sont toutes des axiomes (et on aune démonstration)

(2) soit dont l’une au moins n’est pas un axiome

(1) Si toutes les feuilles sont des axiomes, on a une démonstration et la formule correspondant au séquent démontré est donc une tautologie d'après la prop. 10.

(2) Si l'une au moins des feuilles $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ n'est pas un axiome, c'est que $p_i \neq q_j$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$. On définit une valuation v par $v(p_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq k$ et $v(q_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq l$ (ce n'est pas contradictoire: il n'y a pas de proposition atomique qui soit à la fois l'un des p_i et l'un des q_j). Pour cette valuation v la formule $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k) \Rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_l)$ associée au séquent $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ vaut 0. D'après la proposition 12 le séquent en dessous est faux, celui encore en dessous aussi, et donc le séquent racine (que l'on cherchait à démontrer) est faux pour cette valuation.

Propriété 15 (complétude) *Si la formule correspondant à un séquent est une tautologie, alors le séquent est démontrable.*

En effet en lui appliquant l'algorithme 13 on obtient un arbre de séquents de type (1) ou de type (2). D'après la prop. 14 s'il était de type (2) il existerait une valuation qui rende faux ce séquent, il est donc de type (1) c.-à-d.démontrable.

En combinant cela avec la prop. 10 on a:

Propriété 16 *Une formule F est une tautologie si et seulement si $\vdash F$ est démontrable.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t, t}{q, p, (\neg q), p, s \vdash t, t}\,\neg_g}{q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t, t}\,\wedge g \qquad \dfrac{\dfrac{r, \mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t}{r, q, p, (\neg q), p, s \vdash t}\,\neg_g}{r, q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t}\,\wedge g}{q, p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t}\,\Rightarrow_g$$

Exemple: l'algo 13 pour une formule non démontrable

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{p \vdash r, s}{\vdash r, s, (\neg p)}\ \neg_d
    }{(\neg r) \vdash s, (\neg p)}\ \neg_g
  }{\vdash (\neg p), ((\neg r) \Rightarrow s)}\ \Rightarrow_d
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{q \vdash r, s}{(\neg r), q \vdash s}\ \neg_g
  }{q \vdash ((\neg r) \Rightarrow s)}\ \Rightarrow_d
}{
  \dfrac{((\neg p) \Rightarrow q) \vdash ((\neg r) \Rightarrow s)}{\vdash ((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)}\ \Rightarrow_d
}\ \Rightarrow_g
$$

$$
\begin{aligned}
&(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)) \\
&\equiv (((\neg q) \vee r \vee s) \wedge ((\neg p) \vee r \vee s))
\end{aligned}
$$

Exemple bis: l'algo 13 pour un séquent non démontrable

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{\vdash p, q}{(\neg p) \vdash q}\,\neg_g}{\vdash ((\neg p) \Rightarrow q)}\,\Rightarrow_d
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{r \vdash}{\vdash (\neg r)}\,\neg_d \quad s \vdash}{((\neg r) \Rightarrow s) \vdash}\,\Rightarrow_g
}{(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)) \vdash}\,\Rightarrow_g
$$

$$
(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s))
$$
$$
\equiv s \vee r \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))
$$

L'algorithme 13 calcule une forme normale conjonctive d'une formule A en l'appliquant à $\vdash A$ — A est la formule associée au séquent $\vdash A$.

Si A est démontrable, $A \equiv p \vee (\neg p)$.

Si A n'est pas démontrable, d'après la propriété 12, une valuation rend A vrai exactement quand toutes les feuilles qui ne sont pas des axiomes sont vraies. Une telle feuille $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ est vraie lorsque la formule

$$(\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \cdots \vee (\neg p_k) \vee q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_l$$

est vraie.

Donc A équivaut à la conjonction de toutes ces formules.

L'algorithme 13 calcule une forme normale disjonctive d'une formule A en l'appliquant à $A \vdash$ — $\neg A$ est la formule associée au séquent $A \vdash$.

Si $A \vdash$ est démontrable, A est faux et $A \equiv p \wedge (\neg p)$.

Si $A \vdash$ n'est pas démontrable, d'après la propriété 12, une valuation rend A vrai (c.-à-d.$A \vdash$ faux) exactement quand l'une au moins des feuilles qui ne sont pas des axiomes est fausse. Une telle feuille $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ est fausse lorsque la formule

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge (\neg q_1) \wedge (\neg q_2) \wedge \cdots \wedge (\neg q_l)$$

est fausse.

Donc A équivaut à la disjonction de toutes ces formules.

On précente maintenant une méthode pour montrer qu'une formule est inconsistante (ou contradictoire). Pour cela on suppose que la formule est sous forme normale conjonctive.

On appelle *littéral* une proposition atomique ou la négation d'une proposition atomique :
$p, (\neg p), q, (\neg q), s, (\neg s) \ldots$

Une *clause* est une disjonction de littéraux :
$(p \vee (\neg q) \vee s), (p \vee q \vee (\neg s)), \ldots$

Un ensemble de clause est compris comme la conjonction des clauses; c'est donc une formule en forme normale conjonctive, par ex.
$(p \vee (\neg q) \vee s) \wedge (p \vee q \vee (\neg s)) \wedge (s \vee (\neg t))$

Le principe de la résolution est l'équivalence suivante:

[1] $(A \vee p) \wedge (B \vee (\neg p))$
$\equiv (A \vee p) \wedge (B \vee (\neg p)) \wedge (A \vee B)$ [2]

[1] entraîne [2]. Il suffit de montrer que
$F = ((A \vee p) \wedge (B \vee (\neg p)) \Rightarrow (A \vee B)) \equiv \top$.
$F[\top/p] \equiv (((A \vee \top) \wedge (B \vee \bot)) \Rightarrow (A \vee B))$
$\equiv (B \Rightarrow (A \vee B)) \equiv \top$
$F[\bot/p] \equiv (((A \vee \bot) \wedge (B \vee \top)) \Rightarrow (A \vee B))$
$\equiv (A \Rightarrow (A \vee B)) \equiv \top$.
Donc $(F \Rightarrow (A \vee B)) \equiv \top$.

[2] entraîne [1] est une évidence.

Pour voir si un ensemble de clauses est contradictoire, on ajoute à l'ensemble de clauses de nouvelles clauses en appliquant le principe ci-dessus : si une clause C_1 contient p et une autre C_2 contient $(\neg p)$, on ajoute la clause C appelée *résolvant* et dont les termes sont ceux de C_1 moins p et ceux de C_2 moins $(\neg p)$.

Par exemple le résolvant de
$C_1 = (p \vee q \vee s \vee (\neg t))$ et $C_2 = (u \vee (\neg q) \vee v \vee (\neg t))$
est $C = (p \vee s \vee (\neg t) \vee u \vee v)$
— comme $(X \vee X) \equiv X$ il est inutile de répéter les littéraux communs.

D'après ce qui précède l'ensemble de clauses avant l'ajout d'un résolvant est équivalent à l'ensemble de clauses après ajout d'un résolvant.

S'il on obtient un résolvant vide à partir des clauses p et $(\neg p)$ on ajoute le résolvant $\perp$, et l'ensemble de clauses est clairement contradictoire.

Soit la formule F (déjà vue)
$$\Big(\big(s \Rightarrow (b\vee t)\big)\wedge\big((b\vee a) \Rightarrow (r\wedge m)\big)\wedge\neg r\Big) \Rightarrow (s \Rightarrow t)$$

Pour montrer que F est une tautologie, on va monter que $(\neg F)$ est contradictoire.

$$(\neg F) \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5 \wedge C_6 \wedge C_7 \wedge C_8$$

où les clause C_i $1 \leq i \leq 8$ sont:

$$\begin{array}{lcl}
C_1 & = & ((\neg s) \vee b \vee t) \\
C_2 & = & ((\neg b) \vee r) \\
C_3 & = & ((\neg b) \vee m) \\
C_4 & = & ((\neg a) \vee r) \\
C_5 & = & ((\neg a) \vee m) \\
C_6 & = & (\neg r) \\
C_7 & = & s \\
C_8 & = & (\neg t)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcll}
C_1 & = & ((\neg s) \vee b \vee t) & \\
C_2 & = & ((\neg b) \vee r) & \\
C_3 & = & ((\neg b) \vee m) & \\
C_4 & = & ((\neg a) \vee r) & \\
C_5 & = & ((\neg a) \vee m) & \\
C_6 & = & (\neg r) & \\
C_7 & = & s & \\
C_8 & = & (\neg t) & \\
\hline
 & & & \text{Résolution:} \\
C_9 & = & ((\neg s) \vee t \vee r) & \text{résolvant de } C_1 \text{ et } C_2 \\
C_{10} & = & ((\neg s) \vee t) & \text{résolvant de } C_{10} \text{ et } C_6 \\
C_{11} & = & t & \text{résolvant de } C_{11} \text{ et } C_7 \\
C_{12} & = & \perp & \text{résolvant de } C_{12} \text{ et } C_8 \\
 & & & \text{contradiction trouvée}
\end{array}
$$

Soit la formule $F = C_a \wedge C_b \wedge C_c$

$$
\begin{array}{rcl}
C_a & = & ((\neg u) \vee v \vee w) \\
C_b & = & (t \vee w) \\
C_c & = & ((\neg w) \vee u)
\end{array}
$$

			Résolution
C_d	$=$	$v \equiv (u \vee (\neg u) \vee v)$	résolution de C_a et C_c
C_e	$=$	$(u \vee w)$	résolution de C_b et C_c
C_f	$=$	$(v \vee w)$	résolution de C_e et C_a
			plus de résolution
			clauses consistantes

Cet algorithme termine toujours — grosso modo, quand on ajoute une clause on n'augmente pas les résolutions qui apparaissent étaient déjà possibles.

Lorsqu'il est terminé, soit la clause vide $\perp$ a été obtenue et l'ensemble de clauses de départ est contradictoire — comme on l'a vu, les clauses ajoutées sont conséquences logiques des clauses de départ.

Soit il n'y a plus de résolutions possibles, sans que la clause vide ne soit apparu. L'ensemble de clauses de départ est alors consistant. S'en convaincre est plus difficile: il faut pour cela faire une correspondance entre les résolutions et les démonstrations dans une variante LKR du calcul des séquents avec des séquents de la forme $C_1, \ldots, C_n \vdash$ et une seule règle. On montre alors que les démonstrations du calcul des séquents usuel LK correspondent à des démonstrations dans LKR et réciproquement, et la complétude de LK donne le résultat. Cela nécessiterait plus d'heures de cours.