

Algorithmique : Résumé

Sylvain Julmy

12 janvier 2016

1. Pré-requis et introduction

1.1 Arbre de recherche binaire

Caractéristiques :

- Toutes les clés du sous-arbre gauche sont plus petites ou égales à la clé du parent
 - Toutes les clés du sous-arbre droit sont plus grandes que la clé du parent
 - Si les deux fils sont vides alors le nœud est appelé "feuille"
-
- Taille mémoire en $O(n)$
 - Profondeur en $O(\log(n))$
 - Insérer un élément en $O(\log(n))$
 - Recherche en $O(\log(n))$
 - Parcours en $O(n)$
 - Tri en $O(n \cdot \log(n))$

Algorithme 1 : Rechercher un élément dans un arbreDonnées : La racine r de l'arbre

Résultat : L'élément recherché

tant que *L'élément courant n'est pas l'élément recherché* **faire**

si *La clef de l'élément est plus petite* **alors**
 | L'élément courant vaut l'élément de gauche

```

sinon
| L'élément courant vaut l'élément de droite

```

fin

fin

```
Retourner l'élément trouvé ;           // Vaut NULL si l'élément n'existe pas
```

Algorithme 2 : Insérer un élément dans un arbre

Données : La racine r de l'arbre

Données : L'élément à insérer

Résultat : L'arbre avec l'élément

```
Rechercher l'élément à insérer ; // Vaudra NULL
```

Remplacer le pointeur vide par l'élément à insérer;

Algorithme 3 : Retirer un élément dans un arbre

```
Données : La racine  $r$  de l'arbre  
Données : L'élément à retirer  
Résultat : L'arbre sans l'élément  
Rechercher l'élément à insérer;  
si C'est une feuille alors  
| Supprimer la feuille  
fin  
si C'est un arbre avec un seule fils alors  
| Remplacer l'élément par le fils  
fin  
si C'est un arbre avec deux fils alors  
| Remplacer l'élément par celui le plus à gauche dans le sous-arbre droit;  
| Si l'élément à un fils, le remplacer par le fils; // N'a jamais deux fils  
fin
```

Un arbre peut potentiellement se déséquilibrer et se transformer en liste chaînée. Solutions :

- Si on connaît les éléments à l'avance, les insérer dans un ordre aléatoire (statistiquement c'est bon)
- Imposer un différence maximum de hauteur entre tous les sous-arbres frères.

1.2 Tas binaire

Un **tas max** est un arbre binaire équilibré, complet sur la gauche et où la clé n'est pas plus petite que la clé de ses fils. Le maximum des éléments se trouve donc à la racine.

- Taille mémoire en $O(n)$
- Insertion d'un élément en $O(\log(n))$
- Recherche quelconque en $O(n)$
- Recherche du max en $O(1)$
- Parcours en $O(n)$

Algorithme 4 : Insérer un élément dans un tas

```
Données : La racine  $r$  du tas  
Données : L'élément à insérer  
Résultat : Le tas avec l'élément  
Rechercher l'élément à insérer; // Dernier élément du parcours en largeur  
Remplacer le pointeur vide par l'élément;  
tant que Le parent est plus grand que l'élément faire  
| Inverser le parent avec l'élément courant  
fin
```

Algorithme 5 : Retirer le max dans un tas**Données :** La racine r du tas**Résultat :** Le tas sans l'élément

Rechercher le dernier éléments du tas par un parcours en largeur;

Supprimer le max;

tant que L' élément est plus grand qu'un des fils **faire**

| L'inverser avec le fils le plus grand

fin

1.3 Complexité algorithmique

Soient $f(x)$ et $g(x)$, on dit que f est d'ordre inférieur ou égale à g si : $f(x) \leq c \cdot g(x) \forall x \geq x_0$, $x_0 > 0$, $c > 0$. On écrit alors $f \in O(g)$.

- f est dominé par g ($f \in O(g)$) si il existe une constante c tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $c \cdot g(n) \geq f(n)$
- L'inverse se dit f domine g (dans le cas ci-dessus c'est g qui domine f)
- Si f est borné dessus et dessous par g : c_1, c_2 où $\forall n \geq n_0$ on a $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

1.4 Théorème général de récurrence

Temps pour résoudre un problème de taille n récursivement : $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ avec $a \geq 1$ et $b > 1$. On doit résoudre a sous-problème de même type que le problème initial qui est découpé en b parties. Il faut $f(n)$ pour rassembler b .

1.5 Graphe

- Une boucle est une arête $e = (v_0, v_0)$ incidente au même sommet
- Un sommet isolé est de degré 0
- Un sommet de degré 1 est dit "pendant"

1.5.1 Non-orienté

On note un graphe non-orienté $G = (V, E)$ avec un ensemble V de sommet ($|V| = n$) et un ensemble E d'arête ($|E| = m$). A chaque arête est associé une paire de sommet appelée les extrémités. Deux sommets sont adjacent si il existe une arête entre eux. Une arête qui relie les sommets u et v est dit incidente à u et v .

- Le degré d'un somme v noté $deg(v)$ est le nombre de d'arête incidents à v
- Une chaîne est une suite alternée de sommet et d'arête, commençant et finissant par un sommet. Une chaîne est dit simple si chaque **arête** y apparait une fois au plus. Une chaîne est dit élémentaire si chaque **sommet** y apparait une fois au plus. La longueur

d'une chaîne est égal au nombre d'arête qu'elle contient. Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondus et qui contient au moins une arête.

Le théorème d'Euler nous dit que $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$ et qu'il y a un nombre pair de sommets de degré pair.

1.5.2 Orienté

On note un graphe orienté $G = (V, E)$ avec un ensemble V de sommet ($|V| = n$) et un ensemble E d'arête ($|E| = m$). A chaque arête est associé une paire de sommet appelée les extrémités. Deux sommets u et v sont adjacent si il existe une arête (u, v) entre eux. u est l'extrémité initiale et v terminale.

- Le degré extérieur $\deg^+(v)$ est la somme des arêtes dont l'extrémité initiale est v
- Le degré intérieur $\deg^-(v)$ est la somme des arêtes dont l'extrémité terminale est v
- Le degré \deg vaut $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$
- Un chemin est une chaîne mais dont les orientations concordent
- Un circuit est un cycle avec la même contrainte que ci-dessus

Le théorème d'Euler nous dit que $\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$

1.6 DCEL

Une graphe DCEL est un type de graphe particulier qui est représenter un ensemble de liste chaîné.

- Chaque sommet s possède des coordonnées (s_x, s_y) et un ensemble de pointeur $A(v)$ vers chaque arc dont il est l'extrémité initiale.
- Chaque face f possède un arc incident $E(f)$ à son bord extérieur, une liste d'arc $I(f)$ incidents à ses composantes intérieurs (pour représenter les trous).
- Chaque arc a est orienté et possède un sommet-origine $O(a)$, un arc jumeau $J(a)$, une face incidente $F(a)$ et deux arcs $S(a)$ qui est l'arc suivant et $P(a)$ qui est l'arc précédent (on appelle l'arc suivant, l'arc qui suit dans le parcours de l'intégralité de la face incidente).

La figure 1.1 montre un exemple de DCEL.

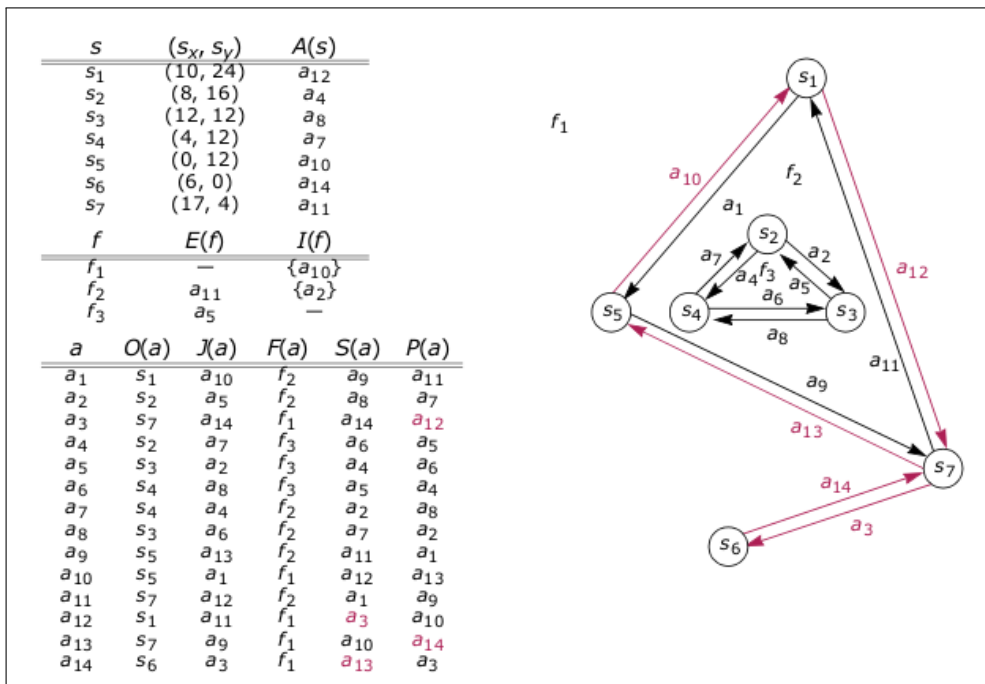


FIGURE 1.1 – Exemple de DCEL

2. Paradigmes de construction

2.1 Enveloppe convexe

Algorithme 6 : Recherche de l'enveloppe convexe
--

<p>Données : Un ensemble P de points du plan Résultat : Une liste L contenant les sommets dans l'ordre horaire Supprimer les points identiques; Trier les points par coordonnées x croissantes puis y croissantes; Mettre les points p_1 et p_2 dans une liste L_{sup}, p_1 en premier; pour $i = 3..n$ faire Joindre p_i à L_{sup}; tant que L_{sup} contient plus de deux points et les trois derniers points de L_{sup} ne tourne pas à droite faire Effacer l'avant-dernier point de L_{sup}; fin fin Mettre les points p_n et p_{n-1} dans une liste L_{inf}, p_n en premier; pour $i = n - 2..1$ faire Joindre p_i à L_{inf}; tant que L_{inf} contient plus de deux points et les trois derniers points de L_{inf} ne tourne pas à droite faire Effacer l'avant-dernier point de L_{inf}; fin fin Effacer p_n et p_1 de L_{inf}; Joindre L_{inf} et L_{sup} pour obtenir L;</p>
--

L'algorithme 6 est dans la complexité suivante :

- $O(n \log(n))$ pour le tri
- $O(n)$ pour les deux boucles **for**
- $O(1)$ pour l'effacement dans les listes

Au total on a un algorithme en $O(n \log(n)) + O(n)$.

2.1.1 Diviser pour régner (EC)

La méthode générale est composé de trois parties :

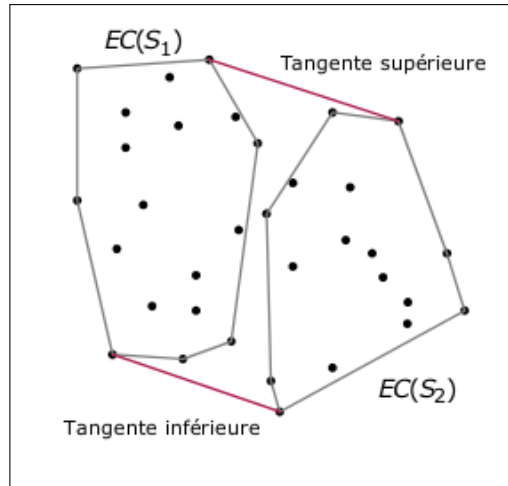


FIGURE 2.1 – Enveloppe convexe avec la méthode de diviser pour régner

1. Diviser le problème en petite partie
2. Résoudre chaque partie récursivement (jusqu'au cas trivial)
3. Fusionner les parties pour obtenir une solution complète

Pour l'enveloppe convexe on pourrait avoir l'algorithme suivant :

Algorithme 7 : Enveloppe convexe avec la méthode **EC**

Données : Un ensemble P de points du plan
Résultat : Une liste L contenant les sommets dans l'ordre horaire
 Diviser S par une ligne verticale en deux sous-ensembles S_1 et S_2 ;
 Calculer $EC(S_1)$ et $EC(S_2)$;
 Trouver les tangentes supérieures et inférieures (voir figure 2.1);
 Fusionner $EC(S_1)$ et $EC(S_2)$;

Pour l'algorithme 7, on a la recherche de tangente supérieures et inférieures en $O(n)$. On a donc $T(n) \leq 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) \rightarrow O(n \log(n))$.

2.2 Balayage du plan

Méthode générale :

- Commencer avec une structure vide
- Remplir une queue de priorité avec des événements-points
- Déplacer une ligne de balayage sur tous les objets du plan
- Lors de chaque événement, mettre à jour la structure géométrique et la queue d'événements

Paire de point la plus proche en $O(n \log(n))$ et en $O(n)$ pour la mémoire.

3. Exercices 1

1.1 Il n'est pas possible de réaliser ce problème, si on compte le nombre d'intersection total pour chaque segment, on arrive à $5 * 3 = 15$, or, lors de chaque intersections, cela rajoute à chaque fois 2 intersections, donc on arrive jamais à 15 puisque 15 est impair.

Avec 301 segments qui doivent en couper exactement 201 autres, cela nous donne $301 * 201 = 60501$, c'est impair donc impossible.

Pour résoudre ce problème on peut modéliser sous la forme d'un graphe : 5 sommets connectés à exactement 3 autres sommets.

1.2 Ajouter des nœuds supplémentaires avec un arbre de Steiner, l'arbre de Steiner se construit à partir du diagramme de Voronoï.

1.4 Un problème est donnée par une matrice de flot F et une matrice de distance D . Si la matrice D est plus grande que F (si il y a plus de place que d'éléments à placer), alors on peut modifier la matrice F avec des éléments quelconque dont le coût est l'élément neutre.

1.5 x_i in $\{0, 1\}$ avec $\sum i \cdot x_i = 1170$ et $\prod i \cdot (1 - x_i) = 36000$ et donc on peut définir la fonction d'utilité $\min(|\sum i \cdot x_i - 1170| - |\prod i \cdot (1 - x_i) - 36000|)$

1.6 On peut modéliser ce problème comme un problème de coloration de graphe.

1.9

4. Méthodes constructives

4.1 Construction aléatoire

Tirer aléatoirement une solution dans l'espace des solutions admissibles. L'avantage est que la méthode est très facile à implémenter mais la qualité de la solution est déplorable et un tirage aléatoire uniforme n'est pas évident à réaliser.

σ : permutation aléatoire 1.. n

σ_i : ième ville visité

$D = (d_{ij})$

minimiser $(\sum_{i=1}^{n-1} d_{\sigma_i \sigma_{i+1}}) + d_{\sigma_n \sigma_1}$

ou bien minimiser avec s_i est la ville qui suit la ville i

$$\sum_{i=1}^n d_{is_i}$$

Données : Tableau de n element L

Résultat : Une permutation aléatoire de L

Définir l comme la longueur du tableau;

pour i allant de 1 à n **faire**

 Tirer aléatoirement $j \in [i; n]$;

 Permuter $L[j]$ avec $L[l]$;

$l = l - 1$;

fin

4.2 Méthode gloutonne

L'idée est de construire une solution élément par élément en ajoutant, à chaque pas, un élément approprié. Cela est optimal pour certain problème.

On part d'une solution s vide ou trivial. On a une fonction de coût incrémental qui mesure empiriquement l'adéquation d'ajouter l'élément e à s . Le fait d'ajouter un élément peut ajouter des contraintes sur les prochains éléments à ajouter.

```

; /* Algorithme glouton en  $O(n^2)$  */
Données : Une solution partielle minimal  $s$  // en général  $\emptyset$ 
Données :  $R = E$  // Ensemble des éléments pouvant être ajoutés à  $s$ 
Résultat : Une solution gloutonne
tant que  $s$  n'est pas une solution complète faire
    Calculer  $c(e, s) \forall e \in R$ ;
    Choisir un  $e'$  optimisant  $c(e, s)$ ;
     $s = s \cup e'$ ;
    ; // propagation des contraintes
    Supprimer de  $R$  tout les éléments qui ne peuvent être ajoutés à  $s$ ;
fin

```

Il existe d'autre algorithme :

4.2.1 Regret maximum

Lors de chaque étape, choisir la ville e qui maximise la fonction

$$c(s, e) = \min_{j, k \in R} d_{je} + d_{ek} - \min_{j \in R} d_{ie} + d_{ej}$$

4.2.2 Meilleur insertion

Choisir la ville e qui minimise la fonction

$$c(s, e) = \text{coût d'insertion minimal de la ville } e \text{ avec la tournée partiel } s$$

possible en maximisant : insertion de la ville la plus éloignée. Les deux méthodes sont en $O(n^2)$

5. Méthodes d'amélioration

Pseudo code d'une méthode d'amélioration locale :

```
; /* Trame d'une méthode d'amélioration locale */
Données : Une solution donnée (par exemple, à partir d'une construction gloutonne
Résultat : Une solution équivalente ou meilleure
do
    Essayer de trouver une amélioration;
    Faire l'amélioration trouver;
while Une amélioration est effectué;
```

Exemple de modification :

- Remplacer deux arêtes d'une tournée par deux autres
- **2-Opt** : inverser le sens de parcours d'une sous-chaîne (remplacer deux arêtes par deux autres)
- **3-Opt** : déplacer un chemin ailleurs dans la tournée (remplacer trois arcs par trois autres)
- **Or-Opt** : Déplacer une sous-chaîne de r sommet ailleurs dans la tournée avec $r = 3$ puis 2 puis 1 etc...

3.1 On arrive deux fois à -4 pour le premier chemin améliorant.

6. Méthodes aléatoires

6.1 Choix du prochain élément

Il existe plusieurs technique pour ce choix :

- GRASP : on calcule c_{min} et c_{max} (coût d'insertion) et on choisit l'élément parmi un sous-ensemble R de E où E est l'ensemble des éléments disponibles et R est $\{r \in E | c_r \in [c_{min}; \alpha(c_{max} - c_{min})]\}$
- colonie de fourmie : le choix est inversement proportionnel au coût et les coûts sont modifiés en fonction des solutions construites précédemment
- technique du bruitage : bruitage du coût en fonction d'une loi

6.2 Recherches locales aléatoires

6.3 Exercices

4.1 :

7. Méthodes de décomposition

En général, utiliser pour résoudre des problèmes de très grandes tailles (entre 10^3 et 10^7 d'ordre de grandeur).

- Jouet : énumération complète
- Petit : Méthodes exactes
- Moyen : Méta-heuristique (limite de la mémoire en $O(n^2)$)
- Grand : Méthode de décomposition
- Très grand : Bases de données distribuées

7.1 Recherche dans de grand voisinage

Cette technique est applicable typiquement dans un problème de programmation par contrainte avec plusieurs milliers de variables. L'idée est de fixer les valeurs de toutes les variables sauf un certain sous-ensemble. On optimise le sous-ensemble et on peut recommencer avec un autre sous-ensemble une fois cela fait.

7.2 Popmusic : méthode de décomposition générique

Idée générale de Popmusic :

```
/* Algorithme Popmusic */
Données : Une solution donnée (par exemple, à partir d'une construction gloutonne
Résultat : Une solution équivalente ou meilleure
pour Chaque sous-ensemble de la solution faire
|   Optimiser le sous-ensemble;
fin
```

La difficulté est que les sous-ensembles ne sont peut-être pas indépendants les uns des autres.

```

; /* Algorithme plus précis pour Popmusic */
Données : Une solution  $S = s_1 \vee s_2 \vee \dots \vee s_p$ 
Données :  $O = \emptyset$ 
Résultat : Une solution équivalente ou meilleure
tant que  $S \neq O$  faire
    Choisir un élément  $S_i \notin O$ ;
    Créer un sous-problème  $R$  composée de  $r_i \in S$  les plus proches de  $s_i$ ;
    Optimiser  $R$ ;
    si  $R$  est amélioré alors
        |  $O \leftarrow O \setminus R$ 
    sinon
        |  $O \leftarrow O \vee s_i$ 
    fin
fin

```

```

; /* Grand voisinage pour le VRP */
Données : Une solution  $S$  initial
Résultat : Une solution équivalente ou meilleure
À partir de  $S$ , supprimer  $n$  point de la solution;
Réinsérer les clients au mieux;

```

7.2.1 Popmusic pour la classification non-supervisée

Les parties sont les éléments d'une même classe, on calcule la dissimilarité moyenne entre les éléments de classes différentes et la distance entre les centroïdes, puis on optimise la solution en déplacement progressivement des centres et on recalcule le tout avec l'algorithme K-means.

7.2.2 Compression d'image par quantification de vecteur

On cherche à décomposer une image en blocs de b pixels (par exemple $b = 5 \times 3$). On cherche à trouver la meilleur palette de 2^k couleurs, vues comme des vecteurs de $3 \times b$ octets. Il s'agit d'un problème de classification composer de millions d'éléments en des milliers de groupes. On code chaque bloc par k bits.

7.3 Exercices

5.1 :

5.2 :

8. Fourmis artificielles et constructions aléatoires

Algorithme 8 : Système de fourmis pour le TSP

Données : Une matrice de distance entre les villes $D = (d_{ij} = \frac{1}{\eta_{ij}})$
Données : Une matrice de trace $T = (\tau_{ij})$
Données : Les paramètres $\alpha, \beta, \rho, \tau_0, Q$ et max_iter
Résultat : Une solution
Initialisation : Poser $\tau_{ij} = \tau_0$;
pour max_iter itérations **faire**
 $R = (r_{ij}) = 0$; // Renforcement des arêtes
 pour $k = \{1, \dots, m\}$ **faire**
 $L = 0$;
 Choisir une ville i au hasard;
 tant que *Toutes les villes ne sont pas visité* **faire**
 Choisir une ville j non-visitée avec P proportionnelle à $\tau_{ij}^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta$;
 $L = L + d_{ij}$;
 $i = j$;
 fin
 pour *tout les trajets (i, j) de la tournée* **faire**
 $r_{ij} = r_{ij} + Q/L$
 fin
 fin
 $T = (1 - \rho)T + R$; // Mise à jour des traces de phéromones
fin

9. Recherche avec tabous

Il s'agit d'une recherche locale avec la politique du meilleur mouvement sauf qu'elle possède certain ajout :

- Interdire de revenir à une solution déjà visité
- Interdire d'effectuer l'inverse d'un mouvement
- Pénaliser les mouvements fréquemment utilisés
- Forcer l'utilisation de mouvement jamais utilisés
- Lever une interdiction après un certain nombre d'itérations

Besoins :

- Une fonction d'aspiration : un mouvement interdits, qui améliore s^* , est accepté
- Intensification de la recherche : diminuer le nombre de mouvement interdits et repartir depuis la meilleure solution trouvée
- Diversification de la recherche : Fréquence des mouvements utilisés, mémoire des bonnes solutions (Chemin de liaison, construction de vocabulaire)

Algorithme 9 : Recherche avec tabous de base

Données : Solution initiale s
Données : Fonction utilité f à minimiser
Données : Ensemble M des mouvements applicables à toute solution
Données : Paramètres t (durée des interdictions), max_iter
Résultat : Une solution équivalente ou meilleure
Initialisation : $T = \emptyset$, $s^* = s$;
pour max_iter **faire**
 meilleur_voisin = ∞ ;
 pour $m \in M$, $m \notin T$ **faire**
 si meilleur_voisin $> f(s \oplus m)$ **alors**
 meilleur_voisin = $f(s \oplus m)$;
 meilleur_mouvement = m ;
 fin
 $s = s \oplus$ meilleur_mouvement;
 Remplacer dans T le plus ancien mouvement par $meilleur_mouvement^{-1}$;
 si meilleur_voisin $< f(s^*)$ **alors**
 $s^* = s$;
 fin
 fin
fin
Retourner s^* ;

9.1 Recherche avec tabous pour le QAP

Une solution est une permutation p de n éléments. Mouvement applicable à n'importe quelle : Transposer les objets i et j ($m = (i, j), 1 \leq i < j \leq n$). C'est à dire : l'objet i actuellement en position p_i est déplacé en position p_j et l'objet j est déplacé en p_i .

Inverse d'un mouvement : replacer simultanément l'objet i en p_i et l'objet j en p_j .

Mémoire :

- Matrice $T = t_{ir}$ de taille $n \times n$
- t_{ir} numéro d'itération où l'on peut à nouveau placer l'objet i en position r
- Le mouvement (i, j) est interdit à la solution p à l'itération $k \iff (t_{ip_j} > k) \wedge (t_{jp_i} > k)$
- Le statut d'un mouvement (i, j) peut être tester en temps constant

9.2 Durée des interdictions

La durée des interdictions influence énormément l'évolution de l'algorithme, si la durée est trop faible, on risque de revenir sur ses pas, faire des cycles ou encore d'être piéger dans un optimum local. Au contraire, si elle est trop grande, il y aura un nombre limité de mouvement réalisable et on risque fortement de ne pas voir "les bon chemins" car tout le temps une partie est interdite.

Solutions :

- Apprendre dynamiquement la durée des interdictions (augmenter la durée des interdictions si on visite 2 fois la même solution, diminuer la durée si on ne visite pas la même solution pendant un plusieurs itérations)
- Tirer aléatoirement la durée des interdictions : des mouvements sont interdits pendant longtemps mais la plupart sont juste inaccessible pendant un court instant

9.3 Mémoire à long terme

Pénalité sur les fréquences : Le but est d'éviter les mouvements de faibles coût en mémorisant la fréquence d'utilisation de chaque mouvement et en pénalisant de $F \cdot freq(m)$ le mouvement m .

Recherche locale guidée : Lorsqu'un optimum local est atteint, l'élément le plus couteux de la solution est pénalisé pour défavoriser son utilisation future.

Forcer des mouvements : Casser la structure d'une solution en identifiant les mouvements jamais choisis durant les K dernières itérations. Pour QAP, on lit cela directement dans la matrice T .

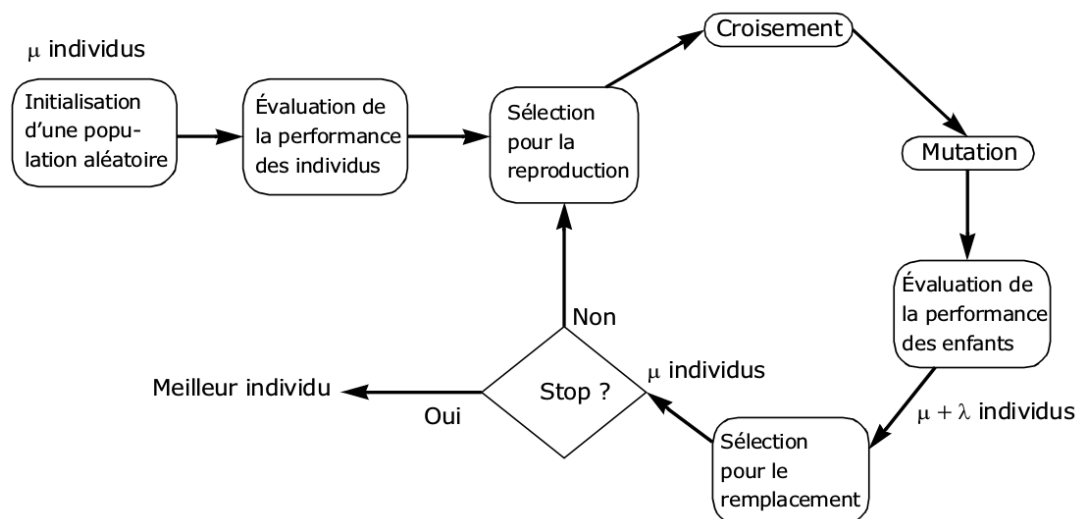
10. Algorithmes génétiques, recherche par dispersion et essaims particuliers

10.1 Population de solution

Il est facile d'obtenir beaucoup de solution différentes pour un problème. L'idée est de construire de nouvelles solutions précédemment obtenues et de disperser les solutions générées dans tout l'ensemble des solutions. On suppose que la combinaison des solutions peut sélectionner les bonnes caractéristiques de chacune.

10.2 Algorithmes évolutionnaires

Darwin : les êtres humains transmettent des caractéristiques utiles à leurs enfants. Le néo-darwinisme : la mutation génétique.



Algorithme 10 : Générer une population de μ solutions**répéter**

- Sélectionner des solutions pour la reproduction (parents);
- Combiner des solutions pour obtenir λ enfants provisoires;
- Appliquer un opérateur de mutation/réparation à chaque enfant;
- Évaluer la performance de chaque enfant;
- Parmi la population complète, sélectionner μ solutions pour la prochaine population;

jusqu'à *Jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait;*

10.2.1 Sélection aléatoire

La roulette : On attribue à chaque individu une valeur de performance, on somme toutes ces valeurs et on tire au hasard un nombre entre 0 et cette valeur pour tomber sur l'élément à sélectionner.

Échantillonnage stochastique universel : On tire à intervalle régulier chaque individu (on peut tomber deux fois sur le même!).

Rang : On trie les solutions et on calcule le rang r de l'individu choisi : $r = \mu \cdot (1 - \sqrt[p]{U(0.1)})$ ($U(n, m)$ tire un nombre au hasard entre n et m), avec :

- $p = 1$: sélection aléatoire uniforme
- $p > 1$: les meilleurs individu sont favorisés

10.2.2 Opérateurs de croisement génétique uniforme

Les solutions sont représentées par des vecteurs de taille donnée. On tire aléatoirement les composantes des nouvelles solutions, les "enfants" en copiant aléatoirement les composantes des deux parents.

Le croisement peut être partiel (par exemple si le vecteur doit respecter la contrainte que les éléments sont une permutations des nombres de 1 à n).

Croisement par vecteur : On coupe en 1, 2, ... et on prend l'un ou l'autre pour chaque partie de l'enfant.

Opérateur OX : respect des sous-séquences : on prend une sous-séquence et on recopie, à la suite, les éléments non pris.

10.2.3 Opérateurs de mutation

Vecteurs (0 – 1) : modifier chaque bit aléatoirement avec la même probabilité. Modifier un nombre donné de bits aléatoirement.

10.2.4 Gestion de la population

:

- **Remplacement générationnel** : Seules les enfants survivent d'une génération à l'autre ($\lambda = \mu$).
- **Stratégie évolutionnaire** : Seuls les μ meilleur enfants sont conservés ($\lambda > \mu$).
- **Remplacement stationnaire** : Remplacer aléatoirement λ parents par des enfants (λ est petit (1 ou 2)).
- **Stratégie élitiste** : De la population complète $\lambda + \mu$ on ne conserve que les μ meilleurs.

Plus une population est grande implique :

- Une plus grande diversité
- Des meilleurs solutions sont obtenus après convergence
- Un taux de convergence plus lent et de plus grand temps de calcul

10.3 Recherche par dispersion

Algorithme 11 : Recherche par dispersion

répéter

Créer une population diversifié;

Améliorer/réparer toutes les solutions de la populations;

Sélectionner un ensemble de référence avec des solutions diversifiées et élités;

répéter

pour *Chaque sous-ensembles de l'ensemble de référence* **faire**

Combiner les solutions du sous-ensemble;

Améliorer/réparer la solution combiné;

Inclure la nouvelle solution dans la population;

fin

Mettre à jour l'ensemble de référence (conserver les solutions les meilleurs et les plus diversifiées)

jusqu'à *L'ensemble de référence est modifié;*

jusqu'à *Jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait;*

Algorithme 12 : GRASP-PR

Générer une population de μ solutions différentes avec une recherche gloutonne randomisée et une recherche locale;
répéter
 Générer une nouvelle solution s avec une recherche gloutonne randomisée et une recherche locale;
 Sélectionner une solution aléatoire s' dans la population;
 Effectuer un chemin de liaison entre s et s' ;
 si la meilleure solution s^ trouvée sur le chemin est meilleur qu'une certaines solutions de la population* **alors**
 | s^* remplace une solution de la population plus mauvaise que s^* ;
 fin
jusqu'à *jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait*;

10.4 Méthodes à particules

Une particule est une solution (en principe un vecteur x de réels (position)). Les particules ont des interactions entre elles, elles n'en créent pas d'autres.

La particule i est attirée par une force f_{ij} vers la particule j . Les particules ont une vitesse et éventuellement une charge électrique. La nouvelle position d'une particule dépend de la force qui s'applique sur elle.

Algorithme 13 : Méthodes à particules

Générer une position aléatoire x_i pour chaque particule
// Pour les essais particulaires : + un vecteur de vitesse
répéter
 pour *Chaque particule i faire*
 | Effectuer une recherche locale
 | Calculer les forces f_{ij}
 | Déplacer i dans la nouvelle position x_i
 fin
jusqu'à *jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait*

10.5 Exercices

8.1 : Si on code un binaire on a des problèmes si on croise des nombres proches, par exemple 127 et 128. Solution : prendre un code de Gray.

8.2 : $(4, 2, 3, 0, 1, 0) : (4, 6, 2, 5, 1, 3), (0, 0, 3, 1, 2, 0) : (1, 2, , , 4, 3)...$ impossible. À l'élément i , on doit avoir un nombre plus petit ou égale à $n - i$.