Calcul formet et numérique en ingénierie : Résumé du cours

Sylvain Julmy, Arnaud Sautaux

1 Interpolation et splines

On donne $n+1$ points (x_i, y_i) où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On cherche un polynôme de degré n : $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}^{n+1} + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}(0 \leq i \leq n)$, tel que $p_n(x_i) = y_i$.

2 Polynôme d'interpolation de Lagrange

On sait qu'il existe **exactement un** polynôme d'interpolation de degrés n ou inférieur qu'on appelle **polynôme d'interpolation**. Avec $n = 3$: $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$. $l_0(x)$ est un polynôme cubique avec les propriétés suivantes : $l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = l_0(x_2) = l_0(x_3) = 0$. On calcule ensuite $l_1(x)$,$l_2(x)$ et $l_3(x)$ avec :

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
l_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

Le polynôme d'interpolation est donnée par :

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

On désire évaluez x :

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
\lambda_1 &= \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
\lambda_3 &= \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

On définis $\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$, $(0 \leq i \leq 3)$, on peut maintenant mettre $p_3(x)$ sous la forme :

$$p_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3)$$

Si tous les y_i sont égaux à 1, il en découle que $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \frac{1}{\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3}$. On peut donc écrire $p_3(x)$ comme suit :

$$p_3(x) = \frac{y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3}{\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

3 Polynôme d'interpolation de Newton

$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$$
\begin{aligned}
p_3(x_0) &= c_0 && = y_0 \\
p_3(x_1) &= c_0 + c_1(x-x_0) && = y_1 \\
p_3(x_2) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) && = y_2 \\
p_3(x_3) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \\
& c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) && = y_3
\end{aligned}
$$

On utilise la notation $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ et on définit les polynômes de degrés 0 : $q_i(x) = y_i = f[x_i]$, $0 \leq 1 \leq 3$. On peut ensuite construire un tableau T :

$$
\begin{array}{c|llll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}
$$

avec $T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j}}{x_{i-1} - x_i}$, $T_{1,1} = f[x_0, x_1]$. i est la auteur (ligne) et j la colonne.

4 Erreur d'interpolation

Si on approche une fonction $y = f(x)$ par le polynôme qui interpole les points $x_i, (0 \leq i \leq n)$. Si la fonction $f(x)$ est $n+1$ fois continûment dérivable et si $x_0 \leq x \leq x_n$, alors on a la borne suivante pour l'erreur :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$$

$$M_{n+1} := \max_{\epsilon \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\epsilon)|$$

Si les nœuds sont équipartitis et si $n \in \{1, 2, 3\}$:

Interpolation linéaire : $x_1 = x_0 + h$

$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2, x \in [x_0, x_1]$

Interpolation quadratique : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3, x \in [x_0, x_2]$

Interpolation cubique : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$

$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4, x \in [x_1, x_2]$

$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4, x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3]$

Si le degrés est trop grand, ne pas utiliser des nœuds équidistants, mais plutôt utiliser les abscisses de Tchebychev : $x_i = 5\cos(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi)$, $0 \leq i \leq n$.

5 Spline cubique

On définit $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, ..., n-1$, le spline cubique $s(x)$ sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_i + 1]$ est un polynôme cubique :

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$
$$s_i' = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i(x - xi)$$
$$s_i'' = 6a_i(x - x_i) + 2b_i(x - x_i)$$

On a pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$s_i(x_i) = d_i \qquad = y_i$$
$$s_i(x_{i+1}) = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \qquad = y_{i+1}$$
$$s_i'(x_i) = c_i$$
$$s_i'(x_{i+1}) = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i$$
$$s_i''(x_i) = 2_b i \qquad = y_i''$$
$$s_i''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i \qquad = y_{i+1}''$$

On en ressort les coefficients suivants :

$$a_i = \frac{1}{6h_i}(y_{i+1}'' - y_i'')$$
$$b_i = \frac{1}{2}y_i''$$
$$c_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}hi(y_{i+1}'' + 2y_i'')$$
$$d_i = y_i$$

Avec $n = 5$ on obtient le système suivant :

y_1''	y_2''	y_3''	y_4''	1
4	1			$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - y_0''$
1	4	1		$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1)$
	1	4	1	$\frac{6}{h^2}(y_4 - 2y_3 + y_2)$
		1	4	$\frac{6}{h^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) - y_5''$

Si les nœuds ne sont pas équidistants :

y_1''	y_2''	y_3''	y_4''	1
$2(h_0 + h_1)$	h_1			[1]
h_1	$2(h_1 + h_2)$	h_2		[2]
	h_2	$2(h_2 + h_3)$	h_3	[3]
		h_3	$2(h_3 + h_4)$	[4]

Si les nœuds sont équidistants :

y_1''	y_2''	y_3''	y_4''	1
4	1			$\frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) - h_0 y_0''$ [1]
1	4	1		$\frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1)$ [2]
	1	4	1	$\frac{6}{h_3}(y_4 - y_3) - \frac{6}{h_2}(y_3 - y_2)$ [3]
		1	4	$\frac{6}{h_4}(y_5 - y_4) - \frac{6}{h_3}(y_4 - y_3) - h_4 y_5''$ [4]

6 Paramétrisation d'une courbe

On a $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ et $t \to (x(t), y(t))$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions. Par exemple, le cercle unitaire possède comme paramétrisation $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ et $t \to (\cos(t), \sin(t))$.
On donne n points (x_i, y_i), on approche les deux inconnues $x(t), y(t)$ par deux splines naturelles. On prend comme distance $t_{i+1} - t_i$ comme la distance entre les points (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) et $t_0 = 0$.

Exemple :

7 Formule du Trapèze

Approximation d'une intégrale par l'aire du trapèze :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h := \frac{b-a}{n}$, les extrémités sont données par $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, 2, ..., n$ et ont additionne les aires de chaque trapèze (pour n=4) :

$$h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)]$$

et la formule générale :

$$T(h) = h[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)]$$

8 Formule du point du milieu

On approche l'aire par (avec $x_i = a + \frac{h(2i+1)}{2}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$)

$$M(h) = h[f(x_{0.5} + f(x_{1.5} + f(x_{2.5} + f(x_{3.5}]$$

9 Formule du trapèze composite

$h = b - a$ pour le départ.

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$$

Pour le calcule de $T(h)$, on prend les extrémités au départ (pour $n = 4$) : $T(h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$. Puis on prend le milieu pour $M(h) = hf(\frac{b-a}{2})$ puis $M(\frac{h}{2}) = \frac{h}{2}[f_1 + f_3]$...

Marche à suivre :

— On démarre avec $h = b - a$
— On calcule $T(h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$
— On calcule $M(h) = hf(\frac{b-a}{2})$
— On calcule $T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$
— Diviser le pas par 2 après le calcul de chaque T
— Pour le calcule de $M(\frac{h}{2})$ on prend les points des milieux de chaque sous-intervalles et $M(h/2) = h \cdot$ [somme des évaluations de f avec les millieux]
— On calcule $T(\frac{h}{4})$ avec les M et T d'avant et on continue

10 Majorant de l'erreur (Trapèze)

Si la fonction à intégrer est deux fois continûment dérivable, alors on peut majorer l'erreur :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Exemple

On veut calculer avec la formule composite l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$$

avec une erreur limité par 0.00002. Quel est la valeur de n ?

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

Puisse que sin est bornée par 1 :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h)\right| \leq \frac{h^2\pi}{12}$$

On déduit que

$$h \leq \left(\frac{0.00002 \cdot 12}{\pi}^{\frac{1}{2}}\right) = 0.00874039$$

La méthode du trapèze est optimale si :

- La fonction est périodique
- La fonction est infiniment dérivable
- On intègre sur une période

11 Méthode de simpson

Le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ pour les 3 nœuds équirépartis $x_0 = a, x_1 = \frac{b+a}{2}, x_2 = b$ est donné par :

$$\begin{aligned} p_2(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f_0 \\ &+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} f_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f_2 \\ \text{où } h = &\frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

On obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Cette méthode intègre les polynômes de degrés 2 et 3 exactement.

12 Majorant de l'erreur (Simpson)

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \frac{(b-a)^5}{90} \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

13 Formule de Simpson composite

On applique Simpson sur des sous-intervalles, on prend $n = 6$:

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2h}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{2h}{6}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{2h}{6}(f_4 + 4f_5 + f_6) \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6] \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_6 + 2(f_2 + f_3 + f_4 + 2f_5)] \end{aligned}$$

et avec $2n$ sous-intervalles :

$$S_c = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})]\right)$$

avec $h = \frac{b-a}{2}$.

14 Erreur de la formule composite de Simpson

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

15 Formule de Newton-Cotes

On peut généraliser Simpson en utilisant un polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$ avec $(0 \leq i \leq n)$ où $x_i = x_0 + ih$. Les formules pour $n = 3$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = &\frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + \\ &3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\epsilon) \\ \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = &\frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) \\ &+ 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ &- \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\epsilon) \end{aligned}$$

avec $x_0 \leq \epsilon \leq x_{3,4}$.

La formule de Newton-Cotes associée à une valeur **paire** de n intègre un polynôme de degré $n+1$ exactement. Ce n'est pas conseillé d'utiliser cette formule avec des polynômes de degré élevé.

16 Intégration de Romberg

$$\begin{array}{llllll} T_{0,0} & & & & & \\ T_{1,0} & T_{1,1} & & & & \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & & & \\ T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & & \\ T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & \\ T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} \end{array}$$

avec

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}(a-b)(f(a) + f(b))$$

$$T_{n,0} = \mathbf{T}(2^n)$$

où $T(h)$ est la méthode du trapèze composite.

17 Méthode de la bissection

Si $f(x)$ est continue et si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe un zéros pour cette fonction.

Exemple : $f(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 2x - 3 = 0$, comme $f(1) \cdot f(2) = -4 \cdot 17 < 0$ on sait qu'il existe une solution r dans l'intervalle $]1, 2[$. On pose donc $a = 1$ et $b = 2$ et on calcule $x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$. Puis on choisit entre les intervalles $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ lequel contient r et on continue.

Ordre de convergence : 1.

18 Regula falsi

Au lieu de prendre le milieu de l'intervalle $[x_0, x_1]$ on prend l'intersection de la sécante avec l'axe Ox. L'équation de la droite est $y = y_0 + (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. On calcule donc x_2 :

$$x_2 = x_0 - y_0 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

Et on continue jusqu'à ce que $|y_i| < \epsilon$ avec ϵ choisit. On détermine l'intervalle de la même manière que pour la méthode de la bissection.
Ordre de convergence : 1.

19 Méthode de la sécante

Idem que Regula falsi sauf que on choisit toujours l'intervalle x_i et x_{i-1} pour calculer x_{i+1}.
Ordre de convergence : 1.618.

$$x_{k+1} = x_k - y_k \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \ k = 1, 2, 3, ...$$

20 Méthode de Newton

On considère x_0 comme une approximation de r et on utilise la formule de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Ordre de convergence : 2 si $f''(r) \neq 0$.

21 Théorème de Banach

Une équation est sous la forme du point fixe si $f(x) = x$. SOus certaine conditions la suite $x_{k+1} = f(x_k), \ k = 0, 1, 2, ...$ converge vers r.
Si $f'(r) \neq 0$ **l'ordre de convergence vaut** 1.
Si $f'(r) = 0 \cap f''(r) \neq 0$ **l'ordre de convergence vaut** 2.

Théorème : Soit $I \subset R$ un intervalle fermé où $I = R$. Soit $F : I \to I$ une fonction possédant la propriété

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \ \forall x_1, x_2 \in I$$

où $0 < L < 1$ est une constante (**constante de Lipschitz**). Alors :

1. L'équation $x = F(x)$ possède une solution unique r dans I. On appelle r un point fixe de la fonction $F(x)$.
2. Pour une valeur initiale quelconque $x_0 \in I$ la suite

   $$x_{k+1} = F(x_k), \ k \in N_0$$

   converge vers le point fixe r.

Estimation à priori : $|r - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|, \ k = 1, 2, 3, ...$

Estimation à posteriori : $|r - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_k - x_{k-1}|, \ k = 1, 2, 3, ...$
La constante de Lipschitz optimale sur l'intervalle I est donnée par

$$L := \max_{x \in I} |F'(x)|$$

22 Méthode de Newton du point fixe

On considère l'équation $f(x) = 0$ avec la solution r. L'itération de Newton est définis par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

On définit $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ on a $F(r) = r - \frac{f(r)}{f'(r)} = r$ Newton est donc une méthode de point fixe.

$$F'(x) = \frac{f''(x) f(x)}{f'(x)^2}$$

La constante de proportionnalité est donnée par $\frac{1}{2} F''(r) = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$.

23 Critères d'arrêt

1 : $|f(x_k)| < \epsilon$ si r est un 0 simple, on calcule l'erreur par $|e_k| \lesssim \frac{1}{|f'(r)|} |f'(x_k)|$. Donc si

- $|f'(r)| \backsimeq 1$, alors $e_k \backsimeq \epsilon$; le critère est satisfaisant
- $|f'(r)| << 1$, on sous-estime l'erreur
- $|f'(r)| >> 1$, on surestime l'erreur

2 : $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$, on appelle $|x_{k+1} - x_k|$ l'incrément. Si x_k est proche de r, on a

$$e_k \backsimeq \frac{1}{1 - F'(r)} (x_{k+1} - x_k)$$

ce n'est pas satisfaisant si $F'(r)$ est proche de 1. C'est optimal pour les méthode d'ordre 2 (Newton...). C'est également satisfaisant si $-1 < F'(r) < 0$.

24 Système d'équation linéaire

On considère deux équations de deux variables dans la forme de point fixe

$$x = F(x, y)$$
$$y = G(x, y)$$

un point $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$r = F(r, s)$$
$$s = G(r, s)$$

s'appelle un **point fixe** de l'application $F : R \to R^2$ définis par

$$F(x) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Exemple : Mettre un système sous forme de point fixe :

$$x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$
$$xy^2 + x - 10y + 5 = 0$$

$\longrightarrow$

$$x = \frac{1}{10}(x^2 + y^2 + 8) = F(x, y)$$
$$y = \frac{1}{10}(xy^2 + x + 5) = G(x, y)$$

25 THÉORÈME DE BANACH (2)

Théorème (de Banach)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ fermé et

$$F : D \to D$$

*une **contraction**. Il existe donc une constante L, $0 < L < 1$, telle que*

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad , \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in D$$

où

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

*est la **norme euclidienne**. Alors : F possède **un seul point fixe** $\mathbf{r} = (r, s) \in D$. En outre, la suite*

$$\begin{cases} x_{k+1} &= F(x_k, y_k) , \\ y_{k+1} &= G(x_k, y_k) \end{cases}$$

converge pour tout (x_0, y_0) vers le point fixe $\mathbf{r} = (r, s)$.

Théorème (suite)

Il existe des estimations suivantes pour la suite $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$:

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (11)$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L}{1-L} \cdot \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (12)$$

*On appelle (11) une **estimation a priori** et (12) une **estimation a posteriori**.*

Exemple : Considérons la fonction F suivante :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(x^2 + y^2 + 6) \\ \frac{1}{10}(xy^2 + x + 5) \end{pmatrix}, \text{ avec } x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi est donnée par :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy \end{pmatrix}$$

La norme matricielle est donnée par

$$||J(x,y)|| = \frac{1}{10}\sqrt{4x^2 + 4y^2 + (y^2+1)^2 + 4x^2y^2}$$

Si $\max\limits_{(x,y) \in D} ||J(x,y)|| < 1$ alors F est une contraction.

Banach est un résultant théorique, en pratique c'est compliqué de trouvé un bon D.

Le vecteur d'erreur est donné par

$$e_k = x_k - r = \begin{pmatrix} x_k - r \\ y_k - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \delta_k \end{pmatrix}$$

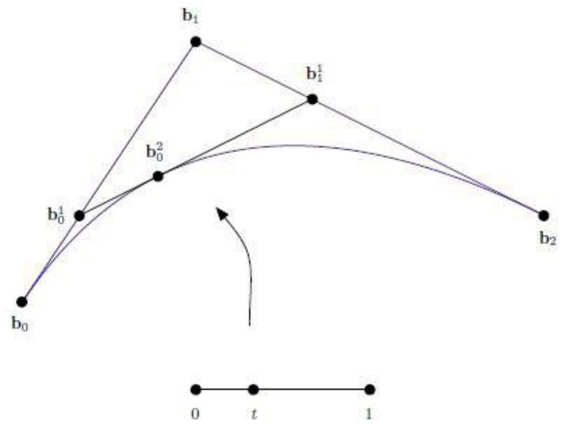
Si $\mathbf{J}(r, s)$ est nulle : convergence quadratique, sinon linéaire.

26 COURBE DE BÉZIER

26.1 L'algorithme de De Casteljau

26.1.1 Courbe de Bézier degré 2

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + t \cdot b_1$$
$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + t \cdot b_2$$
$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1 + t \cdot b_1^1$$
$$b_0^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t) \cdot b_1 + t^2 b_2$$



$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$b_0^1(t) = (1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$b_1^1(t) = (1-t) \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

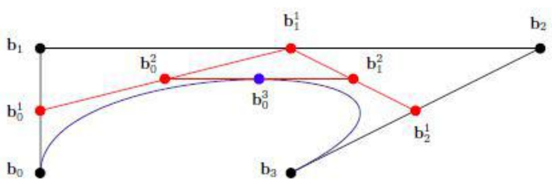
$$b_0^2(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2t(1-t) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$b_0^2(t) = \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 \\ 1 + 3t + 2.5t^2 \end{bmatrix}$$

Représentations des vecteurs :

$$\begin{matrix} b_0 & & \\ b_1 & b_0^1 & \\ b_2 & b_1^1 & b_0^2 \end{matrix}$$

26.1.2 Courbe de Bézier degré 3



Représentations des vecteurs :

$$\begin{matrix} b_0 & & & \\ b_1 & b_0^1 & & \\ b_2 & b_1^1 & b_0^2 & \\ b_3 & b_2^1 & b_1^2 & b_0^3 \end{matrix}$$

26.2 Polynôme de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

Facteur binonmiale :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1 - t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

26.3 Relation entre les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein

$b_0^1(t) = b_0 B_0^1(t) + t \cdot b_1$
$b_1^1(t) = b_1 B_0^1(t) + t \cdot b_2$
$b_0^2(t) = b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t)$
$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} b_{i+j} B_j^r(t), 1 \leq r \leq r, 0 \leq i \leq n - r$
Si $r = n$:
$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j B_j^n(t)$

Tangente aux extrémité $\quad x'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1-} - b_j) B_j^{n-1}(t)$

26.4 Courbes de Bézier composées

TODO :

27 Méthode de Gauss

Exemple : $\quad A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.059 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.059 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{3} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$
$L_2 - l_{21} \cdot L_1 \quad L_3 - l_{31} \cdot L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{-0.001} & 6 & 6.001 \\ 0 & \boxed{2.5} & 5 & 2.5 \end{array}\right) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le pivot de la ligne 3 est plus grand que celui de la ligne 2, les deux lignes dovent être intervertis.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{2.5} & 5 & 2.5 \\ 0 & \boxed{-0.001} & 6 & 6.001 \end{array}\right) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = -0.0004 \quad L_3 - l_{32} \cdot L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.002 & 6.002 \end{array}\right) \quad U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.0004 & 1 \end{pmatrix}$

Résoudre $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$ et $U \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.002 \end{pmatrix}$

28 Méthode A=QR

Buts : Transformer une matrice A (quelconque) en une matrice triangulaire supérieur R. Où la norme des colonnes est préservée. $A = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R$

28.1 Matrice de Householder

$\rho = sign(x_1)||\vec{x}||_2, \quad \vec{v} = \vec{x} + \rho\vec{e_1}, \quad \gamma = \frac{||\vec{v}||_2^2}{2} = \rho v_1$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

Normalement nous n'aurons pas besoin de calculer la matrice de Householder

$H = \begin{cases} I, & \text{si } v = 0 \\ I - \frac{vv^T}{\gamma} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$

Exemple : $\quad x = (-2, 2, 1)^T$

$$\rho = -\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = -3$$
$$v = (-2, 2, 1) + (-3, 0, 0) = (-5, 2, 1)$$
$$\gamma = \frac{(-5)^2 + 2^2 + 1^2}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

et on calcule H

$$H = I - \frac{vv^T}{\gamma} = \frac{(-5,2,1) \cdot (-5,2,1)^T}{\gamma}$$
$$= I - \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

Calcul de $H\vec{a}$: $\quad \tau = \frac{\vec{v}^T\vec{a}}{\gamma}$
$H\vec{a} = \vec{a} - \tau\vec{v}$

Exemple : $\quad a = (1, 0, 2)^T, \rho = -3, v = (-5, 2, 1)^T, \gamma = 15$
$\tau = -\frac{18}{15}, Ha = (-2, \frac{12}{5}, \frac{16}{5})^T$

Exemple de calcul de HA pour une matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a_1}|\vec{a_2}|\vec{a_3})$$

Exemple : on reprend les algorithmes précédents et on calcule :

$$\rho_1 = 3, v_1 = (5, -1, 2)^T, \gamma_1 = 15$$

puis on peut obtenir les éléments suivants :

$$\tau_2 = \frac{v_1^T a_2}{\gamma_1} = \frac{8}{5}, \quad \tau_3 = \frac{v_1^T a_3}{\gamma_1} = \frac{4}{5}$$

et donc

$$H\vec{a_2} = \vec{a_2} - \tau_2\vec{v_1} = (-4, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5})^T$$
$$H\vec{a_3} = \vec{a_3} - \tau_3\vec{v_1} = (-2, -\frac{16}{5}, -\frac{13}{5})^T$$

et obtient HA :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

28.2 Méthode QR 1

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a_1}|\vec{a_2}|\vec{a_3})$$

On a H_1A suivante :

$$H_1A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

et on travail sur B :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} = (\vec{b_2}|\vec{b_3})$$

on cherche à obtenir $\widetilde{H}_2B$:

$$\rho_2 = 2, \vec{v_2} = (\frac{18}{5}, -\frac{6}{5})^T, \gamma_2 = \frac{36}{5}$$
$$\tau_4 = \frac{\vec{v_2}^T\vec{b_3}}{\gamma} = -\frac{7}{6}$$
$$\widetilde{H}_2\vec{b_3} = \vec{b_3} - \tau_4\vec{v_2} = (1, 4)^T$$
$$H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{H}_2 \end{array}\right)$$

et on obtient :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

28.3 Résolution de Ax=b

si A est carré : $A = QR$ et $Q^{-1} = Q^T$ donc $Ax = b \leftrightarrow QRx = b \leftrightarrow Rx = Q^Tb$

si A est rectangulaire : $A = QR$ et $Q^{-1} = Q^T$, $A^TAx = A^Tb$ donc $A^TAx = A^Tb \leftrightarrow Rx = Q^Tb$

Dans les deux cas, on ne construit pas Q. On applique l'algorithme de calcule de HA pour une matrice A.

29 Résolutions d'équations différentielles

29.1 Systèmes d'équations différentielles

$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$
$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \cdots y_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

29.2 Méthode analytique

29.3 Méthode d'Euler

$t_0 = 0, t_1 = t_0 + h,...$
$y' = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

29.4 Erreur de troncature

29.5 Méthode à deux étages

29.5.1 Méthode du point milieu

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hs_1\right), \\ y_{n+1} = y_n + hs_2, \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

29.5.2 Méthode du trapèze

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + h, y_n + hs_1), \\ y_{n+1} = y_n + h\frac{s_1 + s_2}{2}, \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Forme générale d'une méthode de Runge-Kutta :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + c_2h, y_n + a_{21}hs_1), \\ y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 \end{array}$$

Pour la méthode du point milieu et du trapèze :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

En prenant c_2 comme paramètre libre :

$$\omega_1 + \omega_2 = 1, \omega_2 c_2 = 1/2, w_2 a_{21} = 1/2 \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_21 & \\ \hline & 1 - \dfrac{1}{2c_2} & \dfrac{1}{2c_2} \end{array}$$

29.6 Méthode à 3 étages

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h s_1\right), \\ s_3 = f\left(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} h s_1 + a_{32} h s_2\right), \\ y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 + \omega_3 s_3), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Tableau des paramètre :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array}$$

Exemples de tableau de différentes méthodes :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 3/9 & 4/9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

29.7 Méthode de Runge-Kutta classique

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2hs_1), \\ s_3 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2hs_2), \\ s_4 = f(t_n + h, y_n + hs_3), \\ y_{n+1} = y_n + h(1/6s_1 + 1/3s_2 + 1/3s_3 + 1/6s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

29.8 Méthode de Runge-Kutta Fehlberg

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2hs_1), \\ s_3 = f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4hs_2), \\ y_{n+1} = y_n + h/9(2s_1 + 3s_2 + 4s_3), s_4 = f(t_n + h, y_{n+1}), \\ e_{n+1} = \dfrac{h}{72}(-5s_1 + 6s_2 + 8s_3 - 9s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$