1 Interpolation et splines

On donne $n+1$ points (x_i, y_i) où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On cherche un polynôme de degré n : $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}^{n+1} + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}(0 \leq i \leq n)$, tel que $p_n(x_i) = y_i$.

2 Polynôme d'interpolation de Lagrange

On sait qu'il existe **exactement un** polynôme d'interpolation de degrés n ou inférieur qu'on appelle **polynôme d'interpolation**. Avec $n = 3$: $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$. $l_0(x)$ est un polynôme cubique avec les propriétés suivantes : $l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = l_0(x_2) = l_0(x_3) = 0$. On calcule ensuite $l_1(x)$,$l_2(x)$ et $l_3(x)$ avec :

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
l_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}$$

Le polynôme d'interpolation est donnée par :

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

On désire évaluez x :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
\lambda_1 &= \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
\lambda_3 &= \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}$$

On définis $\mu_i = \frac{\lambda_i}{x-x_i}$, $(0 \leq i \leq 3)$, on peut maintenant mettre $p_3(x)$ sous la forme :

$$p_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3)$$

Si tous les y_i sont égaux à 1, il en découle que $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \frac{1}{\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3}$. On peut donc écrire $p_3(x)$ comme suit :

$$p_3(x) = \frac{y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

3 Polynôme d'interpolation de Newton

$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$$\begin{aligned}
p_3(x_0) &= c_0 && = y_0 \\
p_3(x_1) &= c_0 + c_1(x-x_0) && = y_1 \\
p_3(x_2) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) && = y_2 \\
p_3(x_3) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \\
&c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) && = y_3
\end{aligned}$$

On utilise la notation $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ et on définit les polynômes de degrés 0 : $q_i(x) = y_i = f[x_i]$, $0 \leq 1 \leq 3$. On peut ensuite construire un tableau T :

$$\begin{array}{c|llll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
\end{array}$$

avec $T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j}}{x_{i-1} - x_i}$, $T_{1,1} = f[x_0, x_1]$. i est la auteur (ligne) et j la colonne.

4 Erreur d'interpolation

Si on approche une fonction $y = f(x)$ par le polynôme qui interpole les points $x_i, (0 \leq i \leq n)$. Si la fonction $f(x)$ est $n+1$ fois continûment dérivable et si $x_0 \leq x \leq x_n$, alors on a la borne suivante pour l'erreur :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)|$$

$$M_{n+1} := \max_{\epsilon \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\epsilon)|$$

Si les nœuds sont équipartitis et si $n \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
&\text{Interpolation linéaire : } x_1 = x_0 + h \\
&|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2, x \in [x_0, x_1] \\
&\text{Interpolation quadratique : } x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h \\
&|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3, x \in [x_0, x_2] \\
&\text{Interpolation cubique : } x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h \\
&|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4, x \in [x_1, x_2] \\
&|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4, x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3]
\end{aligned}$$

Si le degrés est trop grand, ne pas utiliser des nœuds équidistants, mais plutôt utiliser les abscisses de Tchebychev : $x_i = 5\cos(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi)$, $0 \leq i \leq n$.

5 Spline cubique

On définit $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$, le spline cubique $s(x)$ sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_i + 1]$ est un polynôme cubique :

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \\
s_i' &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i(x - xi) \\
s_i'' &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i(x - x_i)
\end{aligned}$$

On a pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
&s_i(x_i) = d_i && = y_i \\
&s_i(x_{i+1}) = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i && = y_{i+1} \\
&s_i'(x_i) = c_i && \\
&s_i'(x_{i+1}) = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i && \\
&s_i''(x_i) = 2_b i && = y_i'' \\
&s_i''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i && = y_{i+1}''
\end{aligned}$$

On en ressort les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{6h_i}(y_{i+1}'' - y_i'') \\
b_i &= \frac{1}{2} y_i'' \\
c_i &= \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6} hi(y_{i+1}'' + 2y_i'') \\
d_i &= y_i
\end{aligned}$$

Avec $n = 5$ on obtient le système suivant :

y_1''	y_2''	y_3''	y_4''	1
4	1			$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - y_0''$
1	4	1		$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1)$
	1	4	1	$\frac{6}{h^2}(y_4 - 2y_3 + y_2)$
		1	4	$\frac{6}{h^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) - y_5''$

6 Paramétrisation d'une courbe

On a $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ et $t \to (x(t), y(t))$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions. Par exemple, le cercle unitaire possède comme paramétrisation $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ et $t \to (\cos(t), \sin(t))$.
On donne n points (x_i, y_i), on approche les deux inconnues $x(t), y(t)$ par deux splines naturelles. On prend comme distance $t_{i+1} - t_i$ comme la distance entre les points (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) et $t_0 = 0$.

Exemple : TODO

7 Formule du Trapèze

Approximation d'une intégrale par l'aire du trapèze :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h := \frac{b-a}{n}$, les extrémités sont données par $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, 2, ..., n$ et ont additionne les aires de chaque trapèze (pour n=4) :

$$h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)]$$

et la formule générale :

$$T(h) = h[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)]$$

8 Formule du point du milieu

On approche l'aire par (avec $x_i = a + \frac{h(2i+1)}{2}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$)

$$M(h) = h[f(x_{0.5} + f(x_{1.5} + f(x_{2.5} + f(x_{3.5}]$$

On a aussi

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$$

Pour le calcule de $T(h)$, on prend les extrémités au départ (pour $n = 4$) : $T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + f_4)$. Puis on prend le milieu pour $M(h) = hf_2$ puis $M(\frac{h}{2}) = \frac{h}{2}[f_1 + f_3]$...

9 Majorant de l'erreur (Trapèze)

Si la fonction à intégrer est deux fois continûment dérivable, alors on peut majorer l'erreur :

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - T(h)\Big| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Exemple

On veut calculer avec la formule composite l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$$

avec une erreur limité par 0.00002. Quel est la valeur de n ?

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin(x)\\
&f''(x) = -\sin(x)\\
&\text{Puisse que sin est bornée par 1 :}\\
&\Big|\int_a^b f(x)dx - T(h)\Big| \leq \frac{h^2\pi}{12}\\
&\text{On déduit que}\\
&h \leq \Big(\frac{0.00002 \cdot 12}{\pi}^{\frac{1}{2}}\Big) = 0.00874039
\end{aligned}$$

La méthode du trapèze est optimale si :
- La fonction est périodique
- La fonction est infiniment dérivable
- On intègre sur une période

10 Méthode de simpson

Le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ pour les 3 nœuds équirépartis $x_0 = a, x_1 = \frac{b+a}{2}, x_2 = b$ est donné par :

$$\begin{aligned}
p_2(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_0\\
&+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_1\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}f_1\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}f_2\\
\text{où } h = &\frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

On obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Cette méthode intègre les polynômes de degrés 2 et 3 exactement.

11 Majorant de l'erreur (Simpson)

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S\Big| \leq \frac{(b-a)^5}{90} \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

12 Formule de Simpson composite

On applique Simpson sur des sous-intervalles, on prend $n = 6$:

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2h}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{2h}{6}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{2h}{6}(f_4 + 4f_5 + f_6) \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6] \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_6 + 2(f_2 + f_3 + f_4 + 2f_5)] \end{aligned}$$

et avec $2n$ sous-intervalles :

$$S_c = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})]\Big)$$

avec $h = \frac{b-a}{2}$.

13 Erreur de la formule composite de Simpson

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S\Big| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

14 Formule de Newton-Cotes

On peut généraliser Simpson en utilisant un polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$ avec $(0 \leq i \leq n)$ où $x_i = x_0 + ih$.
Les formules pour $n = 3$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx &= \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + \\ & 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\epsilon) \\ \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx &= \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) \\ & + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ & - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\epsilon) \end{aligned}$$

avec $x_0 \leq \epsilon \leq x_{3,4}$.
La formule de Newton-Cotes associée à une valeur **paire** de n intègre un polynôme de degré $n + 1$ exactement. Ce n'est pas conseillé d'utiliser cette formule avec des polynômes de degré élevé.

15 Intégration de Romberg

$$\begin{array}{llllll} T_{0,0} \\ T_{1,0} & T_{1,1} \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} \\ T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \\ T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} \\ T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} \end{array}$$

avec

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

$$\begin{aligned} T_{0,0} &= \frac{1}{2}(a-b)(f(a) + f(b)) \\ T_{n,0} &= \mathbf{T}(2^n) \end{aligned}$$

où $T(h)$ est la méthode du trapèze composite. 12 Banach TODO
Banach est un résultant théorique, en pratique c'est compliqué de trouvé un bon D.
Matrice de Jacobi : On dérive F et G par rapport à x et y, on obtient donc une matrice 2x2
Norme matriciel : racine de la somme des éléments au carré

$$\sqrt{\sum M_{i,j}}$$

F est une contraction de D si

$$max_{(x,y\in D)}||J(x,y)|| < 1$$

On cherche donc le maximum de l'expression $||\mathbf{J}(x,y)||$

16 Exemple

On à

$$||\mathbf{J}(x,y)|| = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y^2+1 & 2xy \end{pmatrix}$$

on obtient donc la norme matricielle

$$||\mathbf{J}(x,y)|| = \frac{1}{10}\sqrt{4x^2+4y^2+(y^2+1)+4x^2y^2}$$

Le vecteur d'erreur est donné par

$$e_k = x_k - r = \begin{pmatrix} x_k - r \\ y_k - s \end{pmatrix} = \binom{\varepsilon_k}{\delta_k}$$

Si $\mathbf{J}(r,s)$ est nulle : convergence quadratique, sinon linéaire.
Courbes de Bézier

17 Algorithme de Casteljo

On donne trois point b_0,b_1 et b_2 et on calcule les interpolations linéaires :

$$\begin{aligned} b_0^1 &= (1-t)\cdot b_0 + t\cdot b_1 \\ b_1^1 &= (1-t)\cdot b_1 + t\cdot b_2 \\ b_0^2 &= (1-t)\cdot b_0^1 + t\cdot b_1^1 \end{aligned}$$

Et on simplifie b_0^2 avec b_0^1 et b_1^1 :

$$b_0^2 = (1-t^2)b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2$$

On peut représenter cela sous une forme d'une matrice de vecteur triangulaire : tout ce qui se trouve au dessus de la diagonale est ignoré :

$$\begin{matrix} [b_0^0] & & \\ [b_1^0] & [b_0^1] & \\ [b_2^0] & [b_1^1] & [b_0^2] \end{matrix}$$

Où les éléments de la première colonne sont donnés et que le calcul de b_n^m est donné par

$$b_n^m = (1-t)\cdot b_n^{m-1} + t\cdot b_{n+1}^{m-1}$$

avec t donné.

Exemple

$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,$b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$,$b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$: calculé b_0^3 avec $t = 0.5$.

Solution

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

18 Les polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont donnés par la formule suivante :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \text{ , pour } i = 0,1,..,n$$

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	$B_0^0 = 1$			
1	$B_0^1 = 1-t$	$B_0^1 = t$		
2	$B_0^2 = (1-t)^2$	$B_0^2 = 2t(1-t)$	$B_0^2 = t^2$	
3	$B_0^3 = (1-t)^3$	$B_1^3 = 3t(1-t)^2$	$B_1^3 = 3t^2(1-t)$	$B_3^3 = t^3$

19 Courbe de Bézier et polynômes de Bernstein

En prenant 3 points : $b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, on veut donner la paramétrisation de la courbe de Bézier associée à ces points de contrôles en utilisant les polynômes de Bernstein :

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \vec{b}_0^2(t) \\
&= B_0^2(t)\vec{b_0} + B_1^2(t)\vec{b_1} + B_2^2(t)\vec{b_2} \\
&= (1-t)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot t \cdot (1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou bien avec 4 points :

$$x(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t)$$

Exemple

Donner la paramétrisation de la courbe de Bézier associée aux points de contrôle :

$$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , b_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\begin{aligned}
x(t) = b_0^2(t) &= \sum_{j=0}^{n} b_{i+j} B_j^r(t) \\
&= b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (1-t)^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2t(1-t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \cdot t^2
\end{aligned}$$

20 Exercice 1

20.1 a

$$\begin{matrix}
\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} & & & \\
\begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.50 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.50 \\ 1.50 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.875 \\ 1.5 \end{bmatrix}
\end{matrix}$$

20.2 b

voir corrigé du cours

20.3 c

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) = \vec{b}_0^3(t) &= B_0^3(b)\vec{b}_0 + B_1^3(b)\vec{b}_1 + B_2^3(b)\vec{b}_2 \\
&= (1-t)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3t(1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

21 Exercice 2

(a)

i	0	1	2	3
x_i	0.0	1.5	3.0	3.0
y_i	1.0	1.0	0.6	0.0

On souhaite que les deux points suivent la direction de la tangente,

(b)

$$\begin{bmatrix}0.0\\1.0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1.5\\1.0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1.125\\1.000\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}3.0\\0.6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2.625\\0.700\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2.25000\\0.77500\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}3.0\\0.0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3.000\\0.150\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2.90625\\2.90625\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2.742\\0.409\end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} x(t) &= b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t) \\ &= \begin{bmatrix}0.0\\1.0\end{bmatrix} \cdot (1-t)^3 + \begin{bmatrix}1.5\\1.0\end{bmatrix} \cdot 3t(1-t)^2 + \begin{bmatrix}3.0\\0.6\end{bmatrix} \cdot 3t^2(1-t) + \begin{bmatrix}3.0\\0.0\end{bmatrix} \cdot t^3 \end{aligned}$$

22 Exercice 3

23 Exercice 4

24 Exercice 5

Systèmes linéaires On cherche à résoudre $Ax = b$ avec A une matrice (m, n), $b \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on suppose que x existe et on utilise des matrices de taille (n, n).
Opérations autorisées :

- Multiplier une équation par une constante
- Ajouter une équation à une autre

Exemple

$$\begin{array}{cccc} 10x_1 & -7x_2 & 0 & = 7 \\ -3x_1 & 2x_2 & 6x_3 & = 4 \\ 5x_1 & -x_2 & 5x_3 & = 6 \end{array}$$

On peut l'écrire

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

On va travailler uniquement avec la matrice A

25 Décomposition de la matrice

a_{11} est le pivot du premier pas, on calcule les multiplicateurs l_{21} et l_{31} en effectuant :

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

On change ensuite chaque ligne de A avec les deux multiplicateurs :

$$\begin{pmatrix} L_1 = L_1 \\ L_2 = L_2 - l_{21} \cdot L_1 \\ L_3 = L_3 - l_{31} \cdot L_1 \end{pmatrix}$$

et pour le deuxième pas, le pivot est a_{22} on calcule donc $l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$ et on effectue la nouvelle matrice avec le multiplicateur :

$$\begin{pmatrix} L_1 = L_1 \\ L_2 = L_2 - l_{21} \cdot L_1 \\ L_3 = L_3 - l_{31} \cdot L_1 = (L_3 - l_{31} \cdot L_1) - l_{32} L_2 \end{pmatrix}$$

On peut exprimer A sous la forme $A = LU$, en reprenant A de l'exemple précédent :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -25 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{pmatrix}$$

L est la matrice des multiplicateurs et U la matrice des coefficients finaux.

26 Résolution de $Ax = b$

- $Ax = b \longleftrightarrow LUx = b$
- $y = Ux$
- Résoudre $Ly = b$: on trouve y par substitution avant
- Résoudre $Ux = y$: on trouve x par substitution arrière

26.1 Exercice

Résoudre le système

$$\begin{matrix} 10x_1 & -7x_2 & 0 & = 7 \\ -3x_1 & 2.099x_2 & 6x_3 & = 3.901 \\ 5x_1 & -x_2 & 5x_3 & = 6 \end{matrix}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

on calcule

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-3}{10} = -0.3$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{5}{10} = 0.5$$

ce qui nous donne

$$A' = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.0010 & 6.0000 \\ 0 & 2.5000 & 5.0000 \end{pmatrix}$$

on calcule

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2.5}{-0.0010} = -2500$$

ce qui donne

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.0010 & 6.0000 \\ 0 & 0 & 1.5005 \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2500 & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et on résout $Ly = b$ et $Ux = y$:

$$\begin{aligned} & y_1 = b_1 = 7 \\ & y_2 = b_2 - -0.3 \cdot y_1 = 6.001 \\ & y_3 = b_3 - 0.5 \cdot y_1 - -2500 \cdot y_2 = 15005 \\ & \rightarrow \\ & y_1 = b_1 \\ & y_2 = b_2 - L_{12} \cdot b_1 \\ & y_3 = b_3 - L_{13} \cdot b_1 - L_{23} \cdot b_2 \end{aligned}$$

Résidus et erreurs On veut résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation $PA = LU$ sur :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & \pi \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il y aura des erreurs :

- représentation machine de A
- représentation machine de b
- résolution de $PA = LU$

27 Norme vectorielle

La fonction $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est appelée norme vectorielle si $\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge \alpha \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes sont respectés :

- $||x|| \geq 0$
- $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
- $||x + y|| \geq ||x|| + ||y||$

28 Norme matricielle

Soit la fonction $||\cdot||_v$ donnée comme la norme vectorielle, une norme matricielle est une fonction $||\cdot|| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n et \alpha \in \mathbb{R}$ satisfait à :
- $||A \geq 0||$
- $||A|| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$
- $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$
- $||A + B|| \geq ||A|| + ||B||$
- $||AB|| \geq ||A|| \cdot ||B||$
- $||Ax||_v \geq ||A|| \cdot ||x||_v$

Comment calculer la norme matricielle ? Propositions :
- $\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i}$, on voit la matrice comme un vecteur
- Un préfère des normes matricielles induites par des vecteurs : $max(\frac{||A\vec{x}||}{||\vec{x}||})$ c'est incalculable en pratique sauf pour $p \in 1, 2, \infty$

29 Perturbation sur b

x est la solution exacte de $Ax = b$, δb est la petite perturbation sur b. $x + \delta x_b$ est la solution exacte du système perturbé

$$A(x + \delta x_b) = b + \delta b$$

On obtient donc

$$\frac{||\delta x_b||}{||x||} \geq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||\frac{\delta b}{b}||$$

Conclusion : un petit $||\delta b||/||b|| \Rightarrow$ un petit $||\delta x_b||/||x||$ seulement si $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ n'est pas trop grand. C'est la même chose pour une petite perturbation sur A. Donc on obtient la solution exacte du système par $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$:

$$\frac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \geq \frac{||A|| \cdot ||A^{-1}||}{1 - ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}} \cdot (\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta b||}{||b||})$$

Conclusion : un petit $||\delta b||/||b||$ et un petit $||\delta A||/||A|| \Rightarrow$ un petit $||\delta x_b||/||x||$ seulement si $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ n'est pas trop grand. Si $||A|| \cdot ||A^{-1}|| >> 1$ alors on dit que la matrice A est mal conditionnée.x

30 Calcule des normes vectoriels

La norme $||x||_1$ se calcule en prenant $max(|x|)$.
La norme $||x||_2$ se calcule en prenant $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
La norme $||x||_\infty$ se calcule en prenant $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

31 Calcule des normes matriciels

La norme $||A||_1$ se calcule en prenant

32 Exercices

(1)

$$\begin{array}{ccc} ||a||_1 = 4 & ||a||_2 = 9 & ||a||_\infty = \sqrt{29} \\ ||b||_1 = 7 & ||b||_2 = 16 & ||b||_\infty = \sqrt{90} \\ ||c||_1 = 4 & ||c||_2 = 10 & ||c||_\infty = \sqrt{30} \end{array}$$

(2) Moindres carrés
Idée : on dispose d'un nuage de point dans un graphe et o cherche une fonction linéaire qui permet de représenter approximativement ces points. On dispose donc d'un modèle linéaire $y = at + b$.
On minimise la somme des carrés résidus :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (at_i + b))^2 = min$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

On obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i t_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

33 Généralisation

Mesures : $(t_1, y_1), ..., (t_m, y_m)$
Modèles : $y(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varnothing_i(t)$ avec $n < m$
On obtient

$$\begin{cases} y_1 \approx \beta_1 \varnothing_1(t_1) + ... + \beta_n \varnothing_n(t_1) \\ ... \\ y_m \approx \beta_1 \varnothing_1(t_m) + ... + \beta_n \varnothing_n(t_m) \end{cases}$$

Forme matricielle : $y \approx Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \varnothing_1(t_1) & \varnothing_2(t_1) & ... & \varnothing_n(t_1) \\ \varnothing_1(t_2) & \varnothing_2(t_2) & ... & \varnothing_n(t_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varnothing_1(t_m) & \varnothing_2(t_m) & ... & \varnothing_n(t_m) \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, n \leq m$$

34 Solution

On cherche x tel que $Ax \approx y$, on définit $r = y - Ax$. $||r||_2^2$ est minimal $\iff (A^T A)x = A^T y$. Et on obtient $\kappa_2(A^T A) \approx [\kappa_2(A)]^2$.

35 Exemple : population des USA

$$A = \begin{pmatrix} 1950 & 1 \\ 1960 & 1 \\ 1970 & 1 \\ 1980 & 1 \\ 1990 & 1 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 150.697 \\ 179.323 \\ 203.212 \\ 226.505 \\ 249.633 \\ 281.422 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 23405500 & 11850 \\ 11850 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 2553753.44 \\ 1290.792 \end{pmatrix}$$

Maintenant il suffit de résoudre $A^T A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A^T y$ et on trouve

$$\beta_1 = 2.53671 \text{ et } \beta_2 = -4794.86743$$

36 Matlab : population des USA

```
A = [1950,1;1960,1;1970,1;1980,1;1990,1;2000,1];
y = [150.697;179.323;203.212;226.505;249.633;281.422];

At = A';
AtA = At * A;
Aty = At * y;

beta = [2.5367;-4.7949e3];

printmat(beta);
printmat(AtA \ Aty);
```

37 Autre modèle

$$y(t) = Ke^{\lambda t}$$

On utilise une transformation logarithmique :

$$log(y) \approx log(K) + \lambda t = \beta_2 + \beta_1 t$$

avec

$$\beta_2 = log(K) et \beta_1 = \lambda \longrightarrow K = e^{\beta_2}, \ \lambda = \beta_1$$

38 Trouver les polynômes

Afin de trouver des polynômes de régression de degrés n, on commence par construire notre matrice A de hauteur $m = n - 1$ (nombre de point) comme suit, les points sont données par le vecteur $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\}$ et le vecteur $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_m\}$:

$$A = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^1 & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^1 & x_1^0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1}^n & x_{m-1}^{n-1} & \cdots & x_{m-1}^1 & x_{m-1}^0 \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m^1 & x_m^0 \end{pmatrix}, \ y = \mathbf{y}$$

puis on résous le système $A^T A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^T y$

et pour finir on trouve notre polynôme $f(t) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot t^i$

39 Exercices

7(a) : le polynôme trouvé vaut $-40.02t + 10.49$ la somme des moindres carrés $\sum_i r_i^2 = 4865.64$

7(b) : la valeur du polynôme en $x = 2.5$ vaut : $f(x) = -40.02t + 10.49$ $f(2.5) = -89.56$

7(c - 2) : le polynôme de degrés 2 vaut $f(t) = 32.93 + t^2 - 7.09t + -22.44$, la somme des carrés des résidus vaut 529.42 et la valeur du polynôme en $x = 2.5$ vaut : $f(x) = 32.93 + x^2 - 7.09x - 22.44$ $f(2.5) = 165.6088$.

7(c - 3) : le polynôme de degrés 3 vaut $f(t) = -17.15t^3 + 7.20t^2 + 15.20t + -7.00$, la somme des carrés des résidus vaut 0 et la valeur du polynôme en $x = 2.5$ vaut : $f(x) = -17.15x^3 + 7.20x^2 + 15.20x - 7.00$ $f(2.5) = -191.56$.

7(d) : Non, si on désire obtenir un polynôme de degré 4, il faut absolument avec $n + 1$ points différents, où n est le degrés du polynôme recherché.
Méthode QR

Buts : Transformer une matrice A (quelconque) en une matrice triangulaire supérieur R. Où la norme des colonnes est préservée.

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R$$

Solution : $A = QR$, Q orthogonal : $Q^{-1} = Q^T$ avec $Q^T = H_n H_{n-1} ... H_2 H_1$. H_i : matrice de Householder (orthogonal, une par colonne de A).

40 Matrice de Householder

On veut obtenir H de telle sorte que

$$x = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \rightarrow Hx = \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $||x||_2 = ||Hx||_2$: la norme est préservé.

Algorithme : on choisit ρ, v et γ comme

$$\rho = sign(x_1)||x||_2, \quad v = x + \rho e_1, \quad \gamma = \frac{||v||_2^2}{2} = \rho v_1$$

e_n est le vecteur unitaire en n et on résous

$$H = \begin{cases} I, & \text{si } v = 0 \\ I - \frac{vv^T}{\gamma} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

Exemple : $x = (-2, 2, 1)^T$

$$\begin{aligned}
\rho &= -\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = -3 \\
v &= (-2, 2, 1) + (-3, 0, 0) = (-5, 2, 1) \\
\gamma &= \frac{(-5)^2 + 2^2 + 1^2}{2} = \frac{30}{2} = 15
\end{aligned}$$

et on calcule H

$$\begin{aligned}
H &= I - \frac{vv^T}{\gamma} = \frac{(-5,2,1)\cdot(-5,2,1)^T}{\gamma} = I - \frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de Ha : on veut calculer H mais pour le vecteur a : $\tau = \frac{v^T a}{\gamma}$ et on obtient $Ha = a - \tau v$

Exemple : $a = (4, 0, 2)^T, \rho = -3, v = (-5, 2, 1)^T, \gamma = 15$ ici $\tau = -\frac{18}{15}$ et on trouve $Ha = (-2, \frac{12}{5}, \frac{16}{5})^T$

Calcule de HA pour une matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (a_1|a_2|a_3)$$

Exemple : on reprend les algorithmes précédents et on calcule :

$$\rho_1 = 3, v_1 = (5, -1, 2)^T, \gamma_1 = 15$$

puis on peut obtenir les éléments suivants :

$$\tau_2 = \frac{v_1^T a_2}{\gamma_1} = \frac{8}{5}, \quad \tau_3 = \frac{v_1^T a_3}{\gamma_1} = \frac{4}{5}$$

et donc

$$\begin{aligned}
Ha_2 &= a_2 - \tau_2 v_1 = (-4, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5})^T \\
Ha_3 &= a_3 - \tau_3 v_1 = (-2, -\frac{16}{5}, -\frac{13}{5})^T
\end{aligned}$$

et obtient HA :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

41 Méthode QR 1

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (a_1|a_2|a_3)$$

On a $H_1 A$ suivante :

$$H_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

et on travail sur B :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} = (b_2|b_3)$$

on cherche à obtenir $\widetilde{H}_2 B$:

$$\begin{aligned}
&\rho_2 = 2, v_2 = (\frac{18}{5}, -\frac{6}{5})^T, \gamma_2 = \frac{36}{5} \\
&\tau_4 = \frac{v_2^T b_3}{\gamma} = -\frac{7}{6} \\
&\widetilde{H}_2 b_3 = b_3 - \tau_4 v_2 = (1, 4)^T \\
&H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{H}_2 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

42 Résolution de Ax=b

si A est carré : $A = QR$ et $Q^{-1} = Q^T$ donc $Ax = b \leftrightarrow QRx = b \leftrightarrow Rx = Q^T b$

si A est rectangulaire : $A = QR$ et $Q^{-1} = Q^T$, $A^T Ax = A^T b$ donc $A^T Ax = A^T b \leftrightarrow Rx = Q^T b$
Dans les deux cas, on ne construit pas Q. On applique l'algorithme de calcule de HA pour une matrice A.

43 Itération de Jacobi

On veut résoudre $Ax = b$ par itération :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) \; ; 1 \leq i \leq n$$

Sous forme matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} U = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A = D - L - U$$

$$x^{k+1} = D^{-1} b + D^{-1}(L+U)x^k$$

44 Exercices

(1) : $x = (4,4,2)^T$

$$\begin{aligned}
&\rho = +\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6 \\
&v = x + (6,0,0)^T = (4,4,2)^T + (6,0,0)^T = (10,4,2)^T \\
&\gamma = 10^2 + 4^2 + 2^2 = 0.5(100 + 16 + 4) = 60 \\
&H = I - \frac{vv^T}{\gamma} \\
&vv^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (10,4,2) = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 20 \\ 40 & 16 & 8 \\ 20 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
&\frac{vv^T}{\gamma} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 100 & 40 & 20 \\ 40 & 16 & 8 \\ 20 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \\
&I - \frac{vv^T}{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) : On peut voir $x' = (3,4,4,2)$ comme un sur-ensemble de $x = 4,4,2$ et comme on cherche juste à avoir un vecteur $(3,\star,0,0)$ il suffit de reproduire la matrice H de l'exercice précédent :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

(3,a) : Comme on veut que les deux dernière composantes soient à zero, il faut calculer les paramètres pour la matrice $(8,4,1)$:

$$\begin{aligned}
&\rho = 9 \\
&v = (17,4,1)^T \\
&\gamma = 153
\end{aligned}$$

(3,b) : Idem :

$$\begin{aligned}
&\rho = -3 \\
&v = (-5,-1,2)^T \\
&\gamma = 15
\end{aligned}$$

(4,a) : On applique l'algorithme classique avec un vecteur de longueur 4 :

$$\rho_1 = 6$$
$$v_1 = (9, 1, 1, 5)^T$$
$$\gamma_1 = 54$$

(4,b) :

$$\tau_2 = \frac{1}{54}(9, 1, 1, 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{27 + 1 - 5 - 5}{54} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{54}(9, 1, 1, 5) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-18 + 1 + 1 + 10}{54} = \frac{-6}{54} = -\frac{1}{9}$$

(7,a) : $x_{1a} = 1$, $x_{2a} = 1$, $x_{1b} = 1$, $x_{2b} = 1$

(7,b) :

$$x^{(0)} = (0, 0)^T$$
$$x^{(1)} = (\frac{1}{10} \cdot \left(11 - \right),)^T$$
$$x^{(2)} = 1$$
$$x^{(3)} = 2$$
$$x^{(4)} = 3$$

Résolution numérique d'EDO
On veut résoudre $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ avec $y(t_0) = y_0$. On recherche dont l'inconnue $y(t) = ...$
Si $f(t, y)$ obéit à une condition de Lipschitz $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, $t_0 < t \leq t_f$. Pour tout y_1 et y_2, alors $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ admet une solution unique sur $[t_0, t_f]$.

45 Solution numérique

On va créer une suite de valeur pour t et y : $t = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ et $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ et on souhaiterais $\forall y_i \in y : y_i \approx y(t_i)$ et donc $y_n \approx y(t_n) = y(t_f)$.

46 Méthode d'Euler

On utilise la pente en (t_n, y_n) pour calculer y_{n+1} (Runge-Kutta à 1 étage) :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hs_1, \quad n = 0, 1, 2, ... \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Exemple : On veut résoudre $\frac{dy}{dt} = t + y$, $y(0) = 2$, $0 \leq t \leq 1$:

```
%% Euler example h=0.5
h = 0.5;
t = 0:h:1;
f_ty = @(f,t) f + t;
y = 2;

for tn = t
    s = f_ty(tn,y);
    fprintf('t=%4.2f , y=%4.2f\n',tn,y);
    y = y + h * s;
end
```

```
t=0.00 , y=2.00
t=0.50 , y=3.00
t=1.00 , y=4.75
```

```
%% Euler example h=0.2
h = 0.2;
t = 0:h:1;
f_ty = @(f,t) f + t;
y = 2;

for tn = t
    s = f_ty(tn,y);
    fprintf('t=%4.2f , y=%4.2f\n',tn,y);
    y = y + h * s;
end
```

```
t=0.00 , y=2.00
t=0.20 , y=2.40
t=0.40 , y=2.92
t=0.60 , y=3.58
t=0.80 , y=4.42
t=1.00 , y=5.46
```

47 Méthode du point du millieu

Il s'agit ici d'une méthode de Runge-Kutta à 2 étages :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n) \\ s_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hs_1) \\ y_{n+1} = y_n + hs_2 \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Exemple : On veut résoudre $\frac{dy}{dt} = t + y$, $y(0) = 2$, $0 \leq t \leq 1$:

```
%% Midlle point example
h = 0.2;
t = 0:h:1;
f_ty = @(f,t) f + t;
y = 2;

for tn = t
    s1 = f_ty(tn,y);
    s2 = f_ty(tn+0.5*h,y+0.5*h*s1);
    fprintf('t=%4.2f , y=%4.2f\n',tn,y);
    y = y + h * s2;
end
```

```
t=0.00 , y=2.00
t=0.20 , y=2.46
t=0.40 , y=3.07
t=0.60 , y=3.85
t=0.80 , y=4.85
t=1.00 , y=6.11
```

48 Méthode du trapèze

Il s'agit aussi d'une méthode de Runge-Kutta à 2 étages :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n) \\ s_2 = f(t_n + h, y_n + hs_1) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot (\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Exemple : On veut résoudre $\frac{dy}{dt} = t + y$, $y(0) = 2$, $0 \leq t \leq 1$:

```
%% Trapeze method
h = 0.2;
t = 0:h:1;
f_ty = @(f,t) f + t;
y = 2;

for tn = t
    s1 = f_ty(tn,y);
    s2 = f_ty(tn+h,y+h*s1);
    fprintf('t=%4.2f , y=%4.2f\n',tn,y);
    y = y + h * (0.5*s1 + 0.5*s2);
end
```

```
t=0.00 , y=2.00
t=0.20 , y=2.46
t=0.40 , y=3.07
t=0.60 , y=3.85
t=0.80 , y=4.85
t=1.00 , y=6.11
```

49 Méthode de Runge-Kutta classique

La méthode la plus utilisé est la $RK4$ dite classique :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n) \\ s_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hs_1) \\ s_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hs_2) \\ s_4 = f(t_n + h, y_n + hs_3) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot (\frac{1}{6}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{6}s_4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Exemple : On veut résoudre $\frac{dy}{dt} = t + y$, $y(0) = 2$, $0 \leq t \leq 1$:

```
%% RK4 method
h = 0.2;
t = 0:h:1;
f_ty = @(f,t) f + t;
y = 2;

for tn = t
    s1 = f_ty(tn,y);
    s2 = f_ty(tn+0.5*h,y+0.5*h*s1);
    s3 = f_ty(tn+0.5*h,y+0.5*h*s2);
    s4 = f_ty(tn+h,y+h*s3);
    fprintf('t=%4.4f , y=%4.4f\n',tn,y);
    y = y + h * ((1/6)*s1 + (1/3)*s2 + (1/3)*s3 + (1/6)*s4);
end
```

```
t=0.0000 , y=2.0000
t=0.2000 , y=2.4642
t=0.4000 , y=3.0755
t=0.6000 , y=3.8663
t=0.8000 , y=4.8766
t=1.0000 , y=6.1548
```

50 Erreurs locale et globale de la méthode d'Euler

Pour Euler, on peut montrer que

- l'erreur locale vaut $|y(t_1) - y(1)| \approx C \cdot h^2$
- l'erreur globale vaut $|y(t_n) - y(n)| \approx C \cdot h$

Code source

9 - Exercice 7

```
%% Série 9
%Exercice 7
close all;
clear ;
format long g;

%% part a
data = [-2,128.6;-1,2.15;0,-7;1,-1.75];
t = data(:,1);
y = data(:,2);
m = size(data,1);

beta1 = (sum(t) * sum(y) - (m * sum(t .* y)))         / (sum(t)^2 - (m * sum(t .^ 2)));
beta2 = (sum(t) * sum(t .* y) -  sum(t .^ 2) * sum(y))/ (sum(t)^2 - m * (sum(t .^ 2)));

ft = @(t) beta1*t+beta2;

ri = feval(ft,t);
ri = y - ri;
r = sum(ri .* ri);

fprintf('Polynôme de degrés 1 : %d * t + %d\n',beta1,beta2);
fprintf('Somme des carrés des résidus : %d\n',r);
fprintf('Valeur du polynome en x=2.5 : f(2.5) = %d\n',feval(ft,2.5));
fprintf('For Latex\n\t%.2ft+%.2f\n\t%.2f\n\n',beta1,beta2,r);



figure;
scatter(t,y);
hold on;
plot(-3:0.01:3,feval(ft,-3:0.01:3));
scatter(2.5,feval(ft,2.5));

%% part b

A = [-2,1;-1,1;0,1;1,1];
A = [A(:,1) .^ 2,A];
y = [128.6;2.15;-7;-1.75];

At = A';
AtA = At * A;
Aty = At * y;
beta = AtA \ Aty;

figure;
scatter(t,y); hold on;
ft = @(t) beta(1) * t.^2 + beta(2) * t + beta(3);
plot(-3:0.01:3,feval(ft,-3:0.01:3));
scatter(2.5,feval(ft,2.5));
fprintf('\nPolynôme de degré 2 : %d * t^2 + %d * t + %d\n',beta(1),beta(2),beta(3));
fprintf('Valeur du polynome en x=2.5 : f(2.5) = %d\n',feval(ft,2.5));

ri = feval(ft,t);
ri = y - ri;
r = sum(ri .* ri);
fprintf('Somme des carrés des résidus : %d\n',r);
fprintf('Valeur du polynome en x=2.5 : f(2.5) = %d\n',feval(ft,2.5));
fprintf('For Latex\n\t%.2f+t^2%.2ft+%.2f\n\t%.2f\n\n',beta(1),beta(2),beta(3),r);

%% part c

A = [-2,1;-1,1;0,1;1,1];
A = [A(:,1) .^ 2,A];
A = [A(:,2) .^ 3,A];
y = [128.6;2.15;-7;-1.75];

At = A';
AtA = At * A;
Aty = At * y;
beta = AtA \ Aty;

figure;
scatter(t,y); hold on;
ft = @(t) beta(1) * t.^3 + beta(2) * t.^2 + beta(3) * t + beta(4);

ri = feval(ft,t);
ri = y - ri;
r = sum(ri .* ri);

plot(-3:0.01:3,feval(ft,-3:0.01:3));
scatter(2.5,feval(ft,2.5));
fprintf('\nPolynôme de degré 3 : %d * t^3 + %d * t^2 + %d * t + %d\n',beta(1),beta(2),beta(3),beta(4));
fprintf('Somme des carrés des résidus : %d\n',r);
fprintf('Valeur du polynome en x=2.5 : f(2.5) = %d\n',feval(ft,2.5));
fprintf('For Latex\n\t%.2ft^3+%.2ft^2+%.2ft+%.2f\n\t%.2f\n\n',beta(1),beta(2),beta(3),beta(4),r);
```