1 Interpolation et splines

On donne $n+1$ points (x_i, y_i) où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On cherche un polynôme de degré n : $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}^{n+1} + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}(0 \leq i \leq n)$, tel que $p_n(x_i) = y_i$.

2 Polynôme d'interpolation de Lagrange

On sait qu'il existe **exactement un** polynôme d'interpolation de degrés n ou inférieur qu'on appelle **polynôme d'interpolation**. Avec $n = 3$: $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$. $l_0(x)$ est un polynôme cubique avec les propriétés suivantes : $l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = l_0(x_2) = l_0(x_3) = 0$. On calcule ensuite $l_1(x)$,$l_2(x)$ et $l_3(x)$ avec :

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Le polynôme d'interpolation est donnée par :

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

On désire évaluez x :

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

On définis $\mu_i = \frac{\lambda_i}{x-x_i}$, $(0 \leq i \leq 3)$, on peut maintenant mettre $p_3(x)$ sous la forme :

$$p_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot(y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3)$$

Si tous les y_i sont égaux à 1, il en découle que $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \frac{1}{\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3}$. On peut donc écrire $p_3(x)$ comme suit :

$$p_3(x) = \frac{y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3}{\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

3 Polynôme d'interpolation de Newton

$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$$\begin{aligned}
p_3(x_0) &= c_0 && = y_0\\
p_3(x_1) &= c_0 + c_1(x-x_0) && = y_1\\
p_3(x_2) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) && = y_2\\
p_3(x_3) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + &&\\
&c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) && = y_3
\end{aligned}$$

On utilise la notation $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0,x_1], c_2 = f[x_0,x_1,x_2], c_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ et on définit les polynômes de degrés 0 : $q_i(x) = y_i = f[x_i]$, $0 \leq 1 \leq 3$. On peut ensuite construire un tableau T :

$$\begin{array}{c|llll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

avec $T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j}}{x_{i-1} - x_i}$, $T_{1,1} = f[x_0,x_1]$. i est la auteur (ligne) et j la colonne.

4 Erreur d'interpolation

Si on approche une fonction $y = f(x)$ par le polynôme qui interpole les points $x_i, (0 \leq i \leq n)$. Si la fonction $f(x)$ est $n+1$ fois continûment dérivable et si $x_0 \leq x \leq x_n$, alors on a la borne suivante pour l'erreur :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$$
$$M_{n+1} := \max_{\epsilon\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\epsilon)|$$

Si les nœuds sont équipartitis et si $n \in \{1,2,3\}$:

Interpolation linéaire : $x_1 = x_0 + h$

$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8}M_2h^2, x \in [x_0, x_1]$

Interpolation quadratique : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27}M_3h^3, x \in [x_0, x_2]$

Interpolation cubique : $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$

$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128}M_4h^4, x \in [x_1, x_2]$

$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24}M_4h^4, x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3]$

Si le degrés est trop grand, ne pas utiliser des nœuds équidistants, mais plutôt utiliser les abscisses de Tchebychev : $x_i = 5\cos(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi)$, $0 \leq i \leq n$.

5 Spline cubique

On définit $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$, le spline cubique $s(x)$ sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_i + 1]$ est un polynôme cubique :

$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$
$$s_i' = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i(x-xi)$$
$$s_i'' = 6a_i(x-x_i) + 2b_i(x-x_i)$$

On a pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
s_i(x_i) &= d_i && = y_i\\
s_i(x_{i+1}) &= a_ih_i^3 + b_ih_i^2 + c_ih_i + d_i && = y_{i+1}\\
s_i'(x_i) &= c_i &&\\
s_i'(x_{i+1}) &= 3a_ih_i^2 + 2b_ih_i + c_i &&\\
s_i''(x_i) &= 2_bi && = y_i''\\
s_i''(x_{i+1}) &= 6a_ih_i + 2b_i && = y_{i+1}''
\end{aligned}$$

On en ressort les coefficients suivants :

$$a_i = \frac{1}{6h_i}(y''_{i+1} - y''_i)$$
$$b_i = \frac{1}{2}y''_i$$
$$c_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}hi(y''_{i+1} + 2y''_i)$$
$$d_i = y_i$$

Avec $n = 5$ on obtient le système suivant :

y''_1	y''_2	y''_3	y''_4	1
4	1			$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - y''_0$
1	4	1		$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1)$
	1	4	1	$\frac{6}{h^2}(y_4 - 2y_3 + y_2)$
		1	4	$\frac{6}{h^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) - y''_5$

6 Paramétrisation d'une courbe

On a $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ et $t \to (x(t), y(t))$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions. Par exemple, le cercle unitaire possède comme paramétrisation $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ et $t \to (\cos(t), \sin(t))$.

On donne n points (x_i, y_i), on approche les deux inconnues $x(t), y(t)$ par deux splines naturelles. On prend comme distance $t_{i+1} - t_i$ comme la distance entre les points (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) et $t_0 = 0$.

Exemple : TODO

7 Formule du Trapèze

Approximation d'une intégrale par l'aire du trapèze :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h := \frac{b-a}{n}$, les extrémités sont données par $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, 2, ..., n$ et ont additionne les aires de chaque trapèze (pour n=4) :

$$h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)]$$

et la formule générale :

$$T(h) = h[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)]$$

8 Formule du point du milieu

On approche l'aire par (avec $x_i = a + \frac{h(2i+1)}{2}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$)

$$M(h) = h[f(x_{0.5} + f(x_{1.5} + f(x_{2.5} + f(x_{3.5}]$$

On a aussi

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$$

Pour le calcule de $T(h)$, on prend les extrémités au départ (pour $n = 4$) : $T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + f_4)$. Puis on prend le milieu pour $M(h) = hf_2$ puis $M(\frac{h}{2}) = \frac{h}{2}[f_1 + f_3]$...

9 Majorant de l'erreur (Trapèze)

Si la fonction à intégrer est deux fois continûment dérivable, alors on peut majorer l'erreur :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Exemple

On veut calculer avec la formule composite l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$$

avec une erreur limité par 0.00002. Quel est la valeur de n ?

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$

Puisse que sin est bornée par 1 :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2\pi}{12}$$

On déduit que

$$h \leq \left(\frac{0.00002 \cdot 12}{\pi}^{\frac{1}{2}} \right) = 0.00874039$$

La méthode du trapèze est optimale si :

- La fonction est périodique
- La fonction est infiniment dérivable
- On intègre sur une période

10 Méthode de Simpson

Le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ pour les 3 nœuds équirépartis $x_0 = a, x_1 = \frac{b+a}{2}, x_2 = b$ est donné par :

$$\begin{aligned} p_2(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f_0 \\ &+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} f_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} f_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f_2 \\ &\text{où } h = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

On obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Cette méthode intègre les polynômes de degrés 2 et 3 exactement.

11 Majorant de l'erreur (Simpson)

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{(b-a)^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

12 Formule de Simpson composite

On applique Simpson sur des sous-intervalles, on prend $n = 6$:

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2h}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{2h}{6}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{2h}{6}(f_4 + 4f_5 + f_6) \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6] \\ &= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_6 + 2(f_2 + f_3 + f_4 + 2f_5)] \end{aligned}$$

et avec $2n$ sous-intervalles :

$$S_c = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})]\Big)$$

avec $h = \dfrac{b-a}{2}$.

13 Erreur de la formule composite de Simpson

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S\Big| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

14 Formule de Newton-Cotes

On peut généraliser Simpson en utilisant un polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$ avec $(0 \leq i \leq n)$ où $x_i = x_0 + ih$. Les formules pour $n = 3$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + \\ 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\epsilon) \\ \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) \\ + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\epsilon) \end{aligned}$$

avec $x_0 \leq \epsilon \leq x_{3,4}$.

La formule de Newton-Cotes associée à une valeur **paire** de n intègre un polynôme de degré $n+1$ exactement. Ce n'est pas conseillé d'utiliser cette formule avec des polynômes de degré élevé.

15 Intégration de Romberg

$$\begin{matrix} T_{0,0} \\ T_{1,0} & T_{1,1} \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} \\ T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \\ T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} \\ T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} \end{matrix}$$

avec

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}(a-b)(f(a) + f(b))$$

$$T_{n,0} = \mathbf{T}(2^n)$$

où $T(h)$ est la méthode du trapèze composite.