

# Calcul formet et numérique en ingénierie : Résumé du cours

Sylvain Julmy, Arnaud Sautaux

## 1 INTERPOLATION ET SPLINES

On donne  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)$  où  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ . On cherche un polynôme de degré  $n$  :  $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$  où  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq i \leq n$ ), tel que  $p_n(x_i) = y_i$ .

## 2 POLYNÔME D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

On sait qu'il existe **exactement un** polynôme d'interpolation de degrés  $n$  ou inférieur qu'on appelle **polynôme d'interpolation**. Avec  $n = 3$  :  $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$ .  $l_0(x)$  est un polynôme cubique avec les propriétés suivantes :  $l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = l_0(x_2) = l_0(x_3) = 0$ . On calcule ensuite  $l_1(x), l_2(x)$  et  $l_3(x)$  avec :

$$\begin{aligned}l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\l_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\end{aligned}$$

Le polynôme d'interpolation est donnée par :

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

On désire évaluer  $x$  :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ \lambda_1 &= \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\end{aligned}$$

On définit  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{x-x_i}$ , ( $0 \leq i \leq 3$ ), on peut maintenant mettre  $p_3(x)$  sous la forme :

$$p_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3)$$

Si tous les  $y_i$  sont égaux à 1, il en découle que  $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$ . On peut donc écrire  $p_3(x)$  comme suit :

$$p_3(x) = \frac{y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

## 3 POLYNÔME D'INTERPOLATION DE NEWTON

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned}p_3(x_0) &= c_0 &= y_0 \\ p_3(x_1) &= c_0 + c_1(x_1-x_0) &= y_1 \\ p_3(x_2) &= c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= y_2 \\ p_3(x_3) &= c_0 + c_1(x_3-x_0) + c_2(x_3-x_0)(x_3-x_1) + c_3(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) &= y_3\end{aligned}$$

On utilise la notation  $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  et on définit les polynômes de degrés 0 :  $q_i(x) = y_i = f[x_i], 0 \leq i \leq 3$ . On peut ensuite construire un tableau  $T$  :

$x_0$	$f[x_0]$			
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
$x_3$	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

avec  $T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j}}{x_{i-1} - x_i}, T_{1,1} = f[x_0, x_1]$ .  $i$  est la auteur (ligne) et  $j$  la colonne.

## 4 ERREUR D'INTERPOLATION

Si on approche une fonction  $y = f(x)$  par le polynôme qui interpole les points  $x_i, (0 \leq i \leq n)$ . Si la fonction  $f(x)$  est  $n + 1$  fois continûment dérivable et si  $x_0 \leq x \leq x_n$ , alors on a la borne suivante pour l'erreur :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \right|$$

$$M_{n+1} := \max_{\epsilon \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\epsilon)|$$

Si les nœuds sont équiartitis et si  $n \in \{1, 2, 3\}$  :

Interpolation linéaire :  $x_1 = x_0 + h$

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2, x \in [x_0, x_1]$$

Interpolation quadratique :  $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3, x \in [x_0, x_2]$$

Interpolation cubique :  $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4, x \in [x_1, x_2]$$

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4, x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3]$$

Si le degrés est trop grand, ne pas utiliser des nœuds équidistants, mais plutôt utiliser les abscisses de Tchebychev :  $x_i = 5 \cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right), 0 \leq i \leq n$ .

## 5 SPLINE CUBIQUE

On définit  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , le spline cubique  $s(x)$  sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  est un polynôme cubique :

$$\begin{aligned}s_i(x) &= a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \\s'_i &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i) \\s''_i &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i(x - x_i)\end{aligned}$$

On a pour chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned}s_i(x_i) &= d_i & &= y_i \\s_i(x_{i+1}) &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i & &= y_{i+1} \\s'_i(x_i) &= c_i \\s'_i(x_{i+1}) &= 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i \\s''_i(x_i) &= 2b_i & &= y''_i \\s''_i(x_{i+1}) &= 6a_i h_i + 2b_i & &= y''_{i+1}\end{aligned}$$

On en ressort les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{1}{6h_i}(y''_{i+1} - y''_i) \\b_i &= \frac{1}{2}y''_i \\c_i &= \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}h_i(y''_{i+1} + 2y''_i) \\d_i &= y_i\end{aligned}$$

Avec  $n = 5$  on obtient le système suivant :

$y''_1$	$y''_2$	$y''_3$	$y''_4$	1
4	1			$\frac{6}{h_1^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - y''_0$
1	4	1		$\frac{6}{h_2^2}(y_3 - 2y_2 + y_1)$
		1	4	$\frac{6}{h_3^2}(y_4 - 2y_3 + y_2)$
			1	$\frac{6}{h_4^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) - y''_5$

Si les nœuds ne sont pas équi-distants :

$y''_1$	$y''_2$	$y''_3$	$y''_4$	1
$2(h_0 + h_1)$	$h_1$			[1]
$h_1$	$2(h_1 + h_2)$	$h_2$		[2]
	$h_2$	$2(h_2 + h_3)$	$h_3$	[3]
		$h_3$	$2(h_3 + h_4)$	[4]

Si les nœuds sont équi-distants :

$y''_1$	$y''_2$	$y''_3$	$y''_4$	1
4	1			$\frac{6}{h_1^2}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0^2}(y_1 - y_0) - h_0 y''_0$ [1]
1	4	1		$\frac{h_2}{h_1^2}(y_3 - y_2) - \frac{h_1}{h_2^2}(y_2 - y_1)$ [2]
	1	4	1	$\frac{h_3}{h_2^2}(y_4 - y_3) - \frac{h_2}{h_3^2}(y_3 - y_2)$ [3]
		1	4	$\frac{h_4}{h_3^2}(y_5 - y_4) - \frac{h_3}{h_4^2}(y_4 - y_3) - h_4 y''_5$ [4]

## 6 PARAMÉTRISATION D'UNE COURBE

On a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  avec  $x(t)$  et  $y(t)$  des fonctions. Par exemple, le cercle unitaire possède comme paramétrisation  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ .

On donne  $n$  points  $(x_i, y_i)$ , on approche les deux inconnues  $x(t), y(t)$  par deux splines naturelles. On prend comme distance  $t_{i+1} - t_i$  comme la distance entre les points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  et  $t_0 = 0$ .

Exemple :

## 7 FORMULE DU TRAPÈZE

Approximation d'une intégrale par l'aire du trapèze :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

On divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles de même longueur  $h := \frac{b-a}{n}$ , les extrémités sont données par  $x_j = a + jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  et on additionne les aires de chaque trapèze (pour  $n=4$ ) :

$$h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)]$$

et la formule générale :

$$T(h) = h[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)]$$

## 8 FORMULE DU POINT DU MILIEU

On approche l'aire par (avec  $x_i = a + \frac{h(2i+1)}{2}$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

$$M(h) = h[f(x_{0.5}) + f(x_{1.5}) + f(x_{2.5}) + f(x_{3.5})]$$

## 9 FORMULE DU TRAPÈZE COMPOSITE

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$$

Pour le calcul de  $T(h)$ , on prend les extrémités au départ (pour  $n = 4$ ) :  $T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + f_4)$ . Puis on prend le milieu pour  $M(h) = hf_2$  puis  $M(\frac{h}{2}) = \frac{h}{2}[f_1 + f_3]$ ...

## 10 MAJORANT DE L'ERREUR (TRAPÈZE)

Si la fonction à intégrer est deux fois continûment dérivable, alors on peut majorer l'erreur :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Exemple

On veut calculer avec la formule composite l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$$

avec une erreur limitée par 0.00002. Quel est la valeur de  $n$  ?

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

Puisque  $\sin$  est bornée par 1 :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2\pi}{12}$$

On déduit que

$$h \leq \left( \frac{0.00002 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.00874039$$

La méthode du trapèze est optimale si :

- La fonction est périodique
- La fonction est infiniment dérivable
- On intègre sur une période

## 11 MÉTHODE DE SIMPSON

Le polynôme d'interpolation  $p_2(x)$  pour les 3 nœuds équirépartis  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{b+a}{2}$ ,  $x_2 = b$  est donné par :

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_0 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}f_2$$

où  $h = \frac{b-a}{2}$

On obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Cette méthode intègre les polynômes de degrés 2 et 3 exactement.

## 12 MAJORANT DE L'ERREUR (SIMPSON)

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{(b-a)^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

## 13 FORMULE DE SIMPSON COMPOSITE

On applique Simpson sur des sous-intervalles, on prend  $n = 6$  :

$$S_c = \frac{2h}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{2h}{6}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{2h}{6}(f_4 + 4f_5 + f_6)$$

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_6 + 2(f_2 + f_3 + f_4 + 2f_5)]$$

et avec  $2n$  sous-intervalles :

$$S_c = \frac{h}{3} \left( f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} [f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})] \right)$$

avec  $h = \frac{b-a}{2}$ .

## 14 ERREUR DE LA FORMULE COMPOSITE DE SIMPSON

Si la fonction est 4 fois continûment dérivable :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

## 15 FORMULE DE NEWTON-COTES

On peut généraliser Simpson en utilisant un polynôme de degré  $n$  passant par les points  $(x_i, f(x_i))$  avec  $(0 \leq i \leq n)$  où  $x_i = x_0 + ih$ . Les formules pour  $n = 3$  et  $n = 4$  :

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\epsilon)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\epsilon)$$

avec  $x_0 \leq \epsilon \leq x_{3,4}$ .

La formule de Newton-Cotes associée à une valeur **paire** de  $n$  intègre un polynôme de degré  $n + 1$  exactement. Ce n'est pas conseillé d'utiliser cette formule avec des polynômes de degré élevé.

## 16 INTÉGRATION DE ROMBERG

$$\begin{matrix} T_{0,0} \\ T_{1,0} & T_{1,1} \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} \\ T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \\ T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} \\ T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} \end{matrix}$$

avec

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}(a-b)(f(a) + f(b))$$

$$T_{n,0} = \mathbf{T}(2^n)$$

où  $T(h)$  est la méthode du trapèze composite.

## 17 MÉTHODE DE LA BISSECTION

Si  $f(x)$  est continue et si  $f(a) \cdot f(b) < 0$  alors il existe un zéro pour cette fonction.

**Exemple :**  $f(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 2x - 3 = 0$ , comme  $f(1) \cdot f(2) = -4 \cdot 17 < 0$  on sait qu'il existe une solution  $r$  dans l'intervalle  $]1, 2[$ . On pose donc  $a = 1$  et  $b = 2$  et on calcule  $x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$ . Puis on choisit entre les intervalles  $[a, x_0]$  et  $[x_0, b]$  lequel contient  $r$  et on continue.

**Ordre de convergence : 1.**

## 18 REGULA FALSI

Au lieu de prendre le milieu de l'intervalle  $[x_0, x_1]$  on prend l'intersection de la sécante avec l'axe  $Ox$ . L'équation de la droite est  $y = y_0 + (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ . On calcule donc  $x_2$  :

$$x_2 = x_0 - y_0 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

Et on continue jusqu'à ce que  $|y_i| < \epsilon$  avec  $\epsilon$  choisit. On détermine l'intervalle de la même manière que pour la méthode de la bisection.

**Ordre de convergence : 1.**

## 19 MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Idem que Regula falsi sauf que on choisit toujours l'intervalle  $x_i$  et  $x_{i-1}$  pour calculer  $x_{i+1}$ .

**Ordre de convergence : 1.618.**

$$x_{k+1} = x_k - y_k \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## 20 MÉTHODE DE NEWTON

On considère  $x_0$  comme une approximation de  $r$  et on utilise la formule de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Ordre de convergence : 2** si  $f''(r) \neq 0$ .

## 21 THÉORÈME DE BANACH

Une équation est sous la forme du point fixe si  $f(x) = x$ . Sous certaines conditions la suite  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  converge vers  $r$ .

Si  $f'(r) \neq 0$  l'ordre de convergence vaut 1.

Si  $f'(r) = 0 \cap f''(r) \neq 0$  l'ordre de convergence vaut 2.

**Théorème :** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé où  $I = \mathbb{R}$ . Soit  $F : I \rightarrow I$  une fonction possédant la propriété

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

où  $0 < L < 1$  est une constante (**constante de Lipschitz**). Alors :

1. L'équation  $x = F(x)$  possède une solution unique  $r$  dans  $I$ . On appelle  $r$  un point fixe de la fonction  $F(x)$ .
2. Pour une valeur initiale quelconque  $x_0 \in I$  la suite

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

converge vers le point fixe  $r$ .

**Estimation a priori :**  $|r - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

**Estimation a posteriori :**  $|r - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_k - x_{k-1}|$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

La constante de Lipschitz optimale sur l'intervalle  $I$  est donnée par

$$L := \max_{x \in I} |F'(x)|$$

## 22 MÉTHODE DE NEWTON DU POINT FIXE

On considère l'équation  $f(x) = 0$  avec la solution  $r$ . L'itération de Newton est définie par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

On définit  $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  on a  $F(r) = r - \frac{f(r)}{f'(r)} = r$  Newton est donc une méthode de point fixe.

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

La constante de proportionnalité est donnée par  $\frac{1}{2}F''(r) = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$ .

## 23 CRITÈRES D'ARRÊT

**1 :**  $|f(x_k)| < \epsilon$  si  $r$  est un 0 simple, on calcule l'erreur par  $|e_k| \lesssim \frac{1}{|f'(r)|} |f'(x_k)|$ . Donc si

- $|f'(r)| \simeq 1$ , alors  $e_k \simeq \epsilon$ ; le critère est satisfaisant
- $|f'(r)| \ll 1$ , on sous-estime l'erreur
- $|f'(r)| \gg 1$ , on surestime l'erreur

**2 :**  $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$ , on appelle  $|x_{k+1} - x_k|$  l'incrément. Si  $x_k$  est proche de  $r$ , on a

$$e_k \simeq \frac{1}{1 - F'(r)} (x_{k+1} - x_k)$$

ce n'est pas satisfaisant si  $F'(r)$  est proche de 1. C'est optimal pour les méthode d'ordre 2 (Newton...). C'est également satisfaisant si  $-1 < F'(r) < 0$ .

## 24 SYSTÈME D'ÉQUATION LINÉAIRE

On considère deux équations de deux variables dans la forme de point fixe

$$x = F(x, y)$$

$$y = G(x, y)$$

un point  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$r = F(r, s)$$

$$s = G(r, s)$$

s'appelle un **point fixe** de l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définis par

$$F(x) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

**Exemple :** Mettre un système sous forme de point fixe :

$$x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$

$$xy^2 + x - 10y + 5 = 0$$

→

$$x = \frac{1}{10}(x^2 + y^2 + 8) = F(x, y)$$

$$y = \frac{1}{10}(xy^2 + x + 5) = G(x, y)$$

## 25 THÉORÈME DE BANACH (2)

### Théorème (de Banach)

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  fermé et

$$F : D \rightarrow D$$

une **contraction**. Il existe donc une constante  $L$ ,  $0 < L < 1$ , telle que

$$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}')\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in D$$

où

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est la **norme euclidienne**. Alors :  $F$  possède un **seul point fixe**  $\mathbf{r} = (r, s) \in D$ . En outre, la suite

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = G(x_k, y_k) \end{cases}$$

converge pour tout  $(x_0, y_0)$  vers le point fixe  $\mathbf{r} = (r, s)$ .

### Théorème (suite)

Il existe des estimations suivantes pour la suite  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$  :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L}{1-L} \cdot \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

On appelle (11) une **estimation a priori** et (12) une **estimation a posteriori**.

**Exemple :** Considérons la fonction  $F$  suivante :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(x^2 + y^2 + 6) \\ \frac{1}{10}(xy^2 + x + 5) \end{pmatrix}, \text{ avec } x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi est donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy \end{pmatrix}$$

La norme matricielle est donnée par

$$\|J(x, y)\| = \frac{1}{10} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + (y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$$

Si  $\max_{(x, y) \in D} \|J(x, y)\| < 1$  alors  $F$  est une contraction.

Banach est un résultat théorique, en pratique c'est compliqué de trouver un bon  $D$ .

Le vecteur d'erreur est donné par

$$e_k = x_k - r = \begin{pmatrix} x_k - r \\ y_k - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \delta_k \end{pmatrix}$$

Si  $J(r, s)$  est nulle : convergence quadratique, sinon linéaire.

## 26 COURBE DE BÉZIER

### 26.1 L'algorithme de De Casteljau

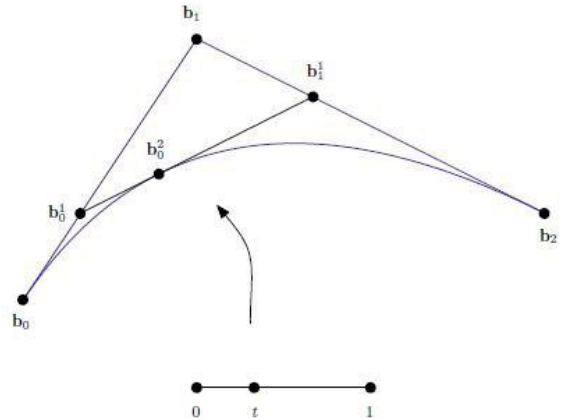
#### 26.1.1 Courbe de Bézier degré 2

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + t \cdot b_1$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + t \cdot b_2$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1 + t \cdot b_1^1$$

$$b_0^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t) \cdot b_1 + t^2 b_2$$



$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$b_0^1(t) = (1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$b_1^1(t) = (1-t) \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

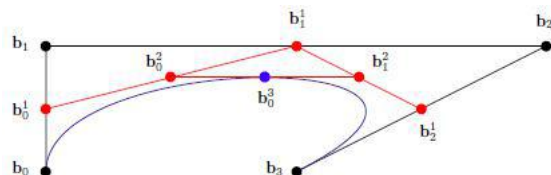
$$b_0^2(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2t(1-t) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$b_0^2(t) = \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 \\ 1 + 3t + 2.5t^2 \end{bmatrix}$$

Représentations des vecteurs :

$b_0$		
$b_1$	$b_0^1$	
$b_2$	$b_1^1$	$b_0^2$

#### 26.1.2 Courbe de Bézier degré 3



Représentations des vecteurs :

$b_0$			
$b_1$	$b_0^1$		
$b_2$	$b_1^1$	$b_0^2$	
$b_3$	$b_2^1$	$b_1^2$	$b_0^3$

## 26.2 Polynôme de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, (i = 0, 1, \dots, n)$$

Facteur binomiale :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

n	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1 - t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

## 26.3 Relation entre les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein

$$b_0^1(t) = b_0 B_0^1(t) + t \cdot b_1$$

$$b_1^1(t) = b_1 B_0^1(t) + t \cdot b_2$$

$$b_0^2(t) = b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t)$$

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t), 1 \leq r \leq r, 0 \leq i \leq n-r$$

Si  $r = n$  :

$$b_i^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t)$$

**Tangente aux extrémité**  $x'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_j^{n-1}(t)$

## 26.4 Courbes de Bézier composées

TODO :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.0004 & 1 \end{pmatrix}$$

Résoudre  $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$  et  $U \cdot \vec{x} = \vec{y}$ .

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.002 \end{pmatrix}$$

## 28 MÉTHODE A=QR

**Buts :** Transformer une matrice A (quelconque) en une matrice triangulaire supérieure R. Où la norme des colonnes est préservée.  $A =$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} = R$$

### 28.1 Matrice de Householder

$$\rho = \text{sign}(x_1) \|\vec{x}\|_2, \quad \vec{v} = \vec{x} + \rho \vec{e}_1, \quad \gamma = \frac{\|\vec{v}\|_2^2}{2} = \rho v_1$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Normalement nous n'aurons pas besoin de calculer la matrice de Householder

$$H = \begin{cases} I, & \text{si } v = 0 \\ I - \frac{vv^T}{\gamma} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

**Exemple :**  $x = (-2, 2, 1)^T$

$$\rho = -\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = -3$$

$$v = (-2, 2, 1) + (-3, 0, 0) = (-5, 2, 1)$$

$$\gamma = \frac{(-5)^2 + 2^2 + 1^2}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

et on calcule H

$$\begin{aligned} H &= I - \frac{vv^T}{\gamma} = \frac{(-5, 2, 1) \cdot (-5, 2, 1)^T}{15} \\ &= I - \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Calcul de  $H\vec{a}$  :**  $\tau = \frac{\vec{v}^T \vec{a}}{\gamma}$

$$H\vec{a} = \vec{a} - \tau \vec{v}$$

**Exemple :**  $a = (1, 0, 2)^T, \rho = -3, v = (-5, 2, 1)^T, \gamma = 15$   
 $\tau = -\frac{18}{15}, Ha = (-2, \frac{12}{5}, \frac{16}{5})^T$

## 27 MÉTHODE DE GAUSS

**Exemple :**  $A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.059 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\iff \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.059 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{3} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$$

$$L_2 - l_{21} \cdot L_1 \quad L_3 - l_{31} \cdot L_1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot de la ligne 3 est plus grand que celui de la ligne 2, les deux lignes doivent être interverties.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array} \right) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = -0.0004 \quad L_3 - l_{32} \cdot L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.002 & 6.002 \end{array} \right) \quad U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{pmatrix}$$

### Exemple de calcul de HA pour une matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3)$$

**Exemple :** on reprend les algorithmes précédents et on calcule :

$$\rho_1 = 3, v_1 = (5, -1, 2)^T, \gamma_1 = 15$$

puis on peut obtenir les éléments suivants :

$$\tau_2 = \frac{v_1^T a_2}{\gamma_1} = \frac{8}{5}, \quad \tau_3 = \frac{v_1^T a_3}{\gamma_1} = \frac{4}{5}$$

et donc

$$H\vec{a}_2 = \vec{a}_2 - \tau_2 \vec{v}_1 = (-4, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5})^T$$

$$H\vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \tau_3 \vec{v}_1 = (-2, -\frac{16}{5}, -\frac{13}{5})^T$$

et obtient HA :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

### 28.2 Méthode QR 1

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3)$$

On a  $H_1 A$  suivante :

$$H_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

et on travail sur B :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} = (\vec{b}_2 | \vec{b}_3)$$

on cherche à obtenir  $\tilde{H}_2 B$  :

$$\rho_2 = 2, \vec{v}_2 = (\frac{18}{5}, -\frac{6}{5})^T, \gamma_2 = \frac{36}{5}$$

$$\tau_4 = \frac{\vec{v}_2^T \vec{b}_3}{\gamma} = -\frac{7}{6}$$

$$\tilde{H}_2 \vec{b}_3 = \vec{b}_3 - \tau_4 \vec{v}_2 = (1, 4)^T$$

$$H_2 = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{H}_2 \end{array} \right)$$

et on obtient :

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

### 28.3 Résolution de Ax=b

**si A est carré :**  $A = QR$  et  $Q^{-1} = Q^T$  donc  $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$

**si A est rectangulaire :**  $A = QR$  et  $Q^{-1} = Q^T$ ,  $A^T Ax = A^T b$  donc  $A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$

Dans les deux cas, on ne construit pas Q. On applique l'algorithme de calcul de HA pour une matrice A.

## 29 RÉOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### 29.1 Systèmes d'équations différentielles

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

### 29.2 Méthode analytique

### 29.3 Méthode d'Euler

$$t_0 = 0, t_1 = t_0 + h, \dots$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 29.4 Erreur de troncature

### 29.5 Méthode à deux étages

#### 29.5.1 Méthode du point milieu

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hs_1\right), \\ y_{n+1} = y_n + hs_2, \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

#### 29.5.2 Méthode du trapèze

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + h, y_n + hs_1), \\ y_{n+1} = y_n + h \frac{s_1 + s_2}{2}, \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Forme générale d'une méthode de Runge-Kutta :

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h s_1), \\ y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} & 0 & \\ \hline & c_2 & a_{21} \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 \end{array}$$

Pour la méthode du point milieu et du trapèze :

$$\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & & & 0 & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & 1 & & 1 \\ \hline & 0 & 1 & & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

En prenant  $c_2$  comme paramètre libre :

$$\omega_1 + \omega_2 = 1, \omega_2 c_2 = 1/2, w_2 a_{21} = 1/2 \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_2 1 & \\ \hline & 1 - \frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2c_2} \end{array}$$

## 29.6 Méthode à 3 étages

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h s_1), \\ s_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} h s_1 + a_{32} h s_2), \\ y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 + \omega_3 s_3), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Tableau des paramètre :

0		
$c_2$	$a_{21}$	
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$
	$\omega_1$	$\omega_2 \quad \omega_3$

Exemples de tableau de différentes méthodes :

0				0			
1/2	1/2			1/2	1/2		
1	-1	2		3/4	0	3/4	
	1/6	2/3	1/6		2/9	3/9	4/9
0							
2/3	2/3						
2/3	1/3	1/3					
	1/4	0	3/4				

## 29.7 Méthode de Runge-Kutta classique

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2h s_1), \\ s_3 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2h s_2), \\ s_4 = f(t_n + h, y_n + h s_3), \\ y_{n+1} = y_n + h(1/6 s_1 + 1/3 s_2 + 1/3 s_3 + 1/6 s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

## 29.8 Méthode de Runge-Kutta Fehlberg

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2h s_1), \\ s_3 = f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4h s_2), \\ y_{n+1} = y_n + h/9(2s_1 + 3s_2 + 4s_3), s_4 = f(t_n + h, y_{n+1}), \\ e_{n+1} = \frac{h}{72}(-5s_1 + 6s_2 + 8s_3 - 9s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$