Logique, quantificateurs et méthodes de raisonnement

Baptiste Arnaudo

Logic is the hygiene a mathematician practices to keep his ideas healthy and strong
Hermann Weyl, 1885 - 1955

Table des matières

1 Introduction

Si les mathématiques cherchent à trouver la vérité, la logique montre les chemins pour y parvenir. Par l'étude des *tables de vérité* des propositions, on déduit des méthodes de raisonnement générales, utiles dans tous les champs des mathématiques permettant de prouver des énoncés élaborés. Les quantificateurs et autres symboles, eux, formalisent le tout en un langage compréhensible par tous ceux qui y portent un peu d'intérêt.
Dans ce cours, nous présentons les éléments principaux de logique, comme la négation d'une proposition, le « ou » et le « et » mathématiques, les concepts d'implication, d'équivalence... avant de montrer les principales méthodes de raisonnement permettant de prouver un énoncé, utiles dans **tout** exercice mathématique. On définira aussi bien sûr les différents symboles employés.

2 Qu'est-ce qu'une proposition ?

Définition 1. ***De ce qu'est une proposition***
*Une proposition est un **énoncé** auquel sont attribuables deux **valeurs de vérité** : vrai ou faux.*

Par exemple, considérons la proposition suivante notée P :

$$P : \text{Pour tout } x \text{ réel positif, } x \text{ est plus grand que } 2^x$$

En langage mathématique, on écrirait :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq 2^x$$

(Attention à ne pas confondre « plus grand » , qui veut dire « supérieur ou égal » , et « strictement plus grand » ou « strictement supérieur » . Il convient d'éviter de dire « supérieur ou égal » car « plus grand » veut dire la même chose et est quand même vachement plus court !)

Définition 2. ***Quantificateur universel***
*Le symbole « $\forall$ » se lit « pour tout » ou bien « quelque soit » et est appelé **quantificateur universel**.*

Qu'en est-il de la valeur de vérité de P ? C'est « faux » bien sûr, car pour $x = 0$, on a bien x positif et $2^0 = 1 > 0 = x$, la valeur $x = 0$ met en défaut la proposition : c'est ce qu'on appelle un **contre-exemple**. Les contre-exemples servent à infirmer les propositions commençant par « Pour tout ..., » ,à condition que celles-ci soient infirmables donc fausses bien sûr. Par exemple, la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

est vraie, on ne pourra donc pas en trouver un contre-exemple. Idem pour l'inégalité très utile suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$$

que l'on invite le lecteur ou la lectrice à prouver par la méthode de son choix (une étude de fonction se fait très bien).

3 Tables de vérité et opérations sur les propositions

3.1 Tables de vérité et équivalence de propositions

Définition 3. ***Table de vérité***
Une table de vérité est un tableau que l'on associe à une proposition. Dans les colonnes de gauche figurent toutes les possibilités des valeurs de vérité des propositions dont la proposition étudiée dépend. Dans la colonne de droite, la valeur de vérité de la proposition étudiée en fonction des valeurs de vérité des propositions de gauche.

3.2 Négation d'une proposition

Donnons immédiatement l'exemple (et la définition) de la **négation** d'une proposition, qui correspond exactement à l'intuition qu'on peut s'en faire.

Définition 4. ***Négation d'une proposition***
La négation d'une proposition P, notée $\neg P$ ou $\bar{P}$ est la proposition définie par la table de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Dans la colonne de gauche se trouvent toutes les valeurs de vérité possibles de la proposition de départ, P, et à droite les valeurs de vérité correspondantes de $\neg P$. Elle traduit que $\neg P$ est la proposition qui est fausse quand P est vraie, et vraie quand P est fausse, i.e qui a toujours une valeur de vérité contraire à celle de P.

Le qualificatif « la » dans le texte précédent n'est pas anodin. Les tables de vérité permettent de caractériser entièrement une proposition. Si deux propositions P et Q ont les mêmes tables de vérité, elles sont vraies en même temps et fausses en même temps, autrement dit, elles portent tout le temps les mêmes valeurs de vérité. On dit qu'elles sont **équivalentes**. Alors, si Q est une proposition en apparence « différente » de $\neg P$ mais qui a la même table de vérité que $\neg P$, alors elle lui est équivalente : en exprimant ces propositions avec leurs tables de vérité, on constate que ce sont en fait « les mêmes » propositions, dans le sens que leurs tables sont les mêmes, d'où le qualificatif « la ».

Définition 5. ***Équivalence de deux propositions***
Deux propositions P et Q sont dites ***équivalentes*** *lorsqu'elles ont les mêmes valeurs de vérité. On note alors $P \Leftrightarrow Q$, et on a donc P si et seulement si on a Q. Dans une table de vérité faisant figurer P et Q, leurs deux colonnes sont donc les mêmes.*

Donnons nous un exemple simple de négation. Pour x réel, la négation de la proposition $(x > 1)$ est $(x \leq 1)$ car quand la proposition $(x > 1)$ est vraie, $(x \leq 1)$ est fausse, et quand $(x > 1)$ est fausse, $(x \leq 1)$ est vraie : on retrouve bien la table de vérité de la définition 4. Mais c'est aussi $(x - 1 \leq 0)$, où même $(\frac{e^x}{e} \leq 1)$ car toutes ces propositions sont équivalentes à $(x \leq 1)$.
Donnons-nous maintenant un exemple plus élaboré de négation d'une proposition.
Considérons la proposition :

P : Il existe un nombre premier entre tout entier naturel et son double

Cette proposition est un théorème, appelé postulat de Bertrand, formulé par le mathématicien français Joseph Bertrand (1822 - 1900) prouvé pour la première fois par Pafnouti Tchebytchev (1821 - 1894) en 1850. On aimerait écrire P en langage mathématique, on a donc besoin de traduire ce « il existe ».

Définition 6. *Quantificateur existentiel*
*Le symbole « $\exists$ » , appelé **quantificateur existentiel**, se lit « il existe ».*

En notant alors usuellement $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{P}, n \leq p \leq 2n$$

Comment exprimer ¬P ? Nous avons entrevu à travers l'exemple de la définition 2 que le concept de **contre-exemple** étant intimement lié à la négation d'une proposition commençant par « pour tout ». En effet, le postulat de Bertrand n'est faux que si on arrive à exhiber un entier naturel n tel qu'aucun nombre premier ne soit compris entre n et $2n$, i.e tel que pour tout nombre premier p, p ne soit compris entre n et $2n$. On obtient donc en français :

$\neg P$: Il existe un entier naturel n tel que pour tout nombre premier p, p est strictement inférieur à n ou p est strictement supérieur à $2n$.

On retiendra grossièrement que « la négation d'un "pour tout" est un "il existe" ».

Terminons avec deux propositions simples dont l'une montre comment utiliser les tables de vérité pour prouver des équivalences.

Proposition 1. *Double négation*
Si P est une proposition,

$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

Démonstration. Il suffit de dresser la table de vérité :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

Les colonnes des valeurs de vérité de P et de $\neg(\neg P)$ sont les mêmes : les propositions sont donc équivalentes. □

Proposition 2. *Si P et Q sont deux propositions, P et Q sont équivalentes si et seulement si leurs négations le sont.*

Démonstration. P et Q sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs de vérité, c'est-à-dire que leurs négations ont les mêmes valeurs de vérité également puisqu'il suffit de changer les « V » en « F » dans la table de vérité pour les obtenir. □

3.3 Le « et » et le « ou » logiques

Définition 7. ***Le « et » logique***
Si P, Q sont deux propositions, on définit la proposition $P \wedge Q$ (à lire P et Q) par la table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Comme on peut s'y attendre, $P \wedge Q$ n'est vraie que si P et Q le sont, et est fausse dans tous les autres cas.

Définition 8. ***Le « ou » logique***
Si P, Q sont deux propositions, on définit la proposition $P \vee Q$ (à lire P ou Q) par la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comme on peut s'y attendre, $P \vee Q$ n'est vraie que si au moins l'une des deux propositions P ou Q l'est, et fausse si les deux sont fausses.

Le « ou » et le « et » sont commutatifs, ce qui signifie que pour toute proposition P, Q, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ et $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$.

Proposition 3. ***Lois de Morgan***
Si P et Q sont deux propositions, alors :

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

Démonstration. On prouve la première équivalence, la deuxième est laissée en exercice au lecteur/à la lectrice (c'est exactement le même principe). On connaît déjà la table de vérité du « et » logique :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ainsi que celle de la négation :

H	$\neg H$
V	F
F	V

On les combine alors pour obtenir la table suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

De même, on connaît déjà la table de vérité du « ou » logique :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

que l'on combine avec la table de la négation pour obtenir :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

On constate que les colonnes des valeurs de vérité de $\neg P \vee \neg Q$ et $\neg(P \wedge Q)$ sont les mêmes : les deux propositions sont donc équivalentes ! $\square$

On retiendra que la négation d'un « ou » est le « et » des négations, et la négation d'un « et » est le « ou » des négations.

Si on reprend l'exemple du postulat de Bertrand et que l'on cherche à nier la proposition $(n \leq p \leq 2n)$, il convient de remarquer que : $(n \leq p \leq 2n) \Leftrightarrow (n \leq p) \wedge (p \leq 2n)$. On applique alors la première loi de Morgan pour obtenir :

$$\neg(n \leq p \leq 2n) \Leftrightarrow \neg(n \leq p) \vee \neg(p \leq 2n)$$

$$\Leftrightarrow (n > p) \vee (p > 2n)$$

On est en mesure d'écrire la négation du postulat de Bertrand en langage mathématique :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{P}, (n > p) \vee (p > 2n)$$

Énonçons maintenant une autre propriété du « ou » et du « et » :

Proposition 4. ***Associativité du « ou » et du « et »***
Si P, Q et R sont trois propositions,

$$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$$

On note alors $P \vee Q \vee R$ et $P \wedge Q \wedge R$ ces propositions, sans se soucier des parenthèses.

Démonstration. Pour la première proposition, comme à notre habitude on dresse les tables de vérité :

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Les deux colonnes de fin sont les mêmes, donc les propositions sont équivalentes.
Ainsi, pour **toutes** propositions P, Q, R :

$$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

Pour montrer la deuxième proposition, on se donne trois propositions P, Q et R et on applique ce que l'on vient de montrer à $\neg P$, $\neg Q$ et $\neg R$ (on peut puisque le résultat est valable pour tout triplet de propositions). On obtient :

$$(\neg P \vee (\neg Q \vee \neg R)) \Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R)$$

Reste à prendre la négation de ces propositions et utiliser la proposition 2 du cours pour obtenir :

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$$

et ce quelque soit le triplet de propositions P, Q, R choisi. $\square$

3.4 Implication de deux propositions

Définition 9. ***Implication de deux propositions***
Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication de P et Q, notée $P \implies Q$ la proposition définie par la table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Comme on peut s'y attendre, le « vrai ne peut impliquer que le vrai ». La ligne 3 peut surprendre, mais elle paraît moins étrange conjuguée à la dernière ligne : en fait le « faux » peut impliquer n'importe quoi.
Aux implications de propositions sont liés les concepts centraux de condition nécessaire, condition suffisante, et condition nécessaire et suffisante. Soient P et Q deux propositions telles que $P \implies Q$ soit vraie
Q est dite **condition nécessaire** à la réalisation de P, car si Q n'était pas vraie, alors P serait forcément fausse puisque si P était vraie, Q le serait aussi puisque $P \implies Q$ est vraie.
P est dite **condition suffisante** à la réalisation de Q car il suffit que P soit vraie pour que Q le soit.
Si on a en plus la **proposition réciproque** $Q \implies P$ alors on a $P \Leftrightarrow Q$ (voir infra proposition 6), et la réalisation de Q est une **condition nécessaire et suffisante** à la réalisation de P.

Proposition 5. *Si P et Q sont deux propositions, on a :*

$$(P \implies Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\neg(P \implies Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$$

Démonstration. Vous l'aurez deviné, on dresse les tables de vérité :

P	Q	¬P	¬P∨Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On constate que les colonnes des valeurs de vérité de ¬P∨Q et $(P \implies Q)$ sont les mêmes : les deux propositions sont donc équivalentes.

Pour la deuxième équivalence, on peut dresser les tables de vérité (on incite le lecteur ou la lectrice à le faire), mais on peut aussi remarquer que d'après la proposition 2 et ce que l'on vient de montrer :

$$\neg(P \implies Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$$

Or d'après la proposition 3 :

$$\neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg Q \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$$

□

Notons que ces équivalences sont « logiques » : pour la deuxième par exemple, si le fait que P soit vraie implique automatiquement que Q soit vraie, le contraire voudrait que P soit vraie sans que Q ne le soit.

Toutes ces équivalences donnent des moyens parfois plus simples de prouver une implication. On répertoriera les différents moyens de raisonnement en fin de cours, mais avant donnons encore quelques résultats **vraiment importants**.

Proposition 6. ***La contraposition***
Si P et Q sont deux propositions :

$$(P \implies Q) \Leftrightarrow (\neg Q \implies \neg P)$$

Démonstration. Avec la proposition 4 :

$$(P \implies Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg Q) \vee \neg P \Leftrightarrow (\neg Q \implies \neg P)$$

La dernière équivalence venant de la première équivalence de la proposition 4 en remplaçant P par ¬Q et Q par ¬ P. □

Démontrer $\neg Q \implies \neg P$ quand on veut prouver $P \implies Q$ s'appelle **raisonner par contraposition (ou par la contraposée)** (voir exercices !).

Proposition 7. ***La double implication***
Si P et Q sont des propositions :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \implies Q) \wedge (Q \implies P))$$

Démonstration. On dresse la table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$((P \implies Q) \wedge (Q \implies P))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

On constate que les colonnes des valeurs de vérité de P⇔Q et (P $\implies$ Q)∧(Q $\implies$ P) sont les mêmes : les deux propositions sont donc équivalentes. □

Cette équivalence fournit un nouveau moyen de prouver une équivalence ! Parfois (et même souvent) il est mal aisé de prouver $P \Leftrightarrow Q$ par une suite d'équivalence, par exemple quand il s'agit de résoudre des équations un peu élaborées. On préfère souvent raisonner par **double implication**, c'est-à-dire prouver $P \implies Q$ et $Q \implies P$, et ce par la méthode de notre choix, par exemple par contraposition ou en utilisant la première équivalence de la proposition 4 : les possibilités sont nombreuses !

Par exemple, sur $\mathbb{N}$, $(2|n) \wedge (3|n) \Leftrightarrow (6|n)$. En effet, si $2|n$ et $3|n$, alors puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, un corollaire du théorème de Gauss donne que $2 \times 3 = 6$ divise n : on a prouvé l'implication directe.
Si $6|n$ alors puisque 2 et 3 le divisent, on a bien $2|n$ et $3|n$: on a bien prouvé l'implication réciproque ce qui prouve la proposition annoncée.

Terminons enfin avec deux résultats importants dont la démonstration passe encore par les tables de vérité (décidément...).

Proposition 8. ***Distributivité du « et » (resp. du « ou ») sur le « ou » (resp. sur le « et »)***
Si P, Q et R sont trois propositions, alors :

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Démonstration. On dresse les tables de vérité :

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Cette première table prouve la première équivalence (les colonnes 4 et 8 sont les mêmes).

En avant pour la deuxième :

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Celle-ci prouve la seconde équivalence pour la même raison. □

4 Inventaire des méthodes de raisonnement

Fort heureusement, dans la pratique on ne dresse pas une table de vérité quand il s'agit de prouver un énoncé. Nous allons maintenant présenter les différentes méthodes, agrémentées d'un exemple qu'on invite le lecteur ou la lectrice à chercher au préalable.

4.1 Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse et essayer d'aboutir à une absurdité, c'est-à-dire à la négation d'une proposition dont on sait qu'elle est vraie. Pour qu'un tel raisonnement puisse fonctionner, il est nécessaire que le fait de nier P nous apporte quelque chose avec lequel on pourra travailler. Par exemple, en niant une proposition de la forme « $\forall x, P(x)$ » (où $P(x)$ est une proposition qualifiant x, on appelle cela un *prédicat* de x) nous donne l'existence d'un x tel que

$\neg P(x)$, avec lequel on pourra peut-être travailler pour exhiber une absurdité.

En effet, le raisonnement par l'absurde consiste à montrer que $\neg P \implies (Q \wedge \neg Q)$ pour une certaine proposition Q. Ceci est équivalent à $(\neg Q \vee Q) \implies P$ (contraposition), et puisque $\neg Q \vee Q$ est toujours vraie (on appelle cela une *tautologie*), on en conclut que P est vraie.

L'un des raisonnements par l'absurde les plus célèbres intervient dans la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, qui selon la légende, a valu à son auteur Hipphase de Métaponte de mourir jeté à la mer par ses condisciples pythagoriciens vers 530 avant Jésus-Christ tant la découverte de ce nombre irrationnel était un scandale.

Exercice : Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Solution : Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. **Alors**, on peut l'écrire sous sa forme irréductible $\frac{p}{q}$ où donc $\text{PGCD}(p,\ q) = 1$ (le raisonnement par l'absurde est ici utile car il nous apporte cette écriture avec laquelle on pourra travailler). Alors, $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. Cela implique que p est pair, car s'il était impair, alors p^2 le serait aussi, ce qui n'est pas (voici ici un raisonnement à remarquer). On peut donc écrire p sous la forme $2k$. Mais alors, on a $2q^2 = p^2 = 4k^2$ et donc $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q aussi. C'est absurde, car p et q sont censés être premiers entre eux. On en déduit donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4.2 Le raisonnement par équivalence

Pour prouver une proposition de la forme $P \Leftrightarrow Q$, on peut partir de P (resp. de Q) et essayer d'arriver à Q (resp. à P) par une suite **d'équivalences**. Attention, dans tous les cas il est primordial que **toutes** les étapes soient des équivalences, i.e que l'on puisse « remonter » le raisonnement (voir premier exemple).
Pour prouver une proposition P, on peut aussi la transformer en une proposition dont on sait qu'elle est vraie à l'aide **d'équivalences** : P aura alors les mêmes valeurs de vérité, i.e sera vraie (voir le deuxième exemple). C'est en pratique rarement faisable, et quand ce n'est pas possible, on emploie souvent la double implication (voir prochaine sous-section).

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $i^n = 1 \Leftrightarrow 4|n$.

Solution : Sachant que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on a :

$$i^n = 1 \Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ n\frac{\pi}{2} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k \Leftrightarrow 4|n$$

Exercice : Soient x et y deux réels positifs. Montrer que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Ce résultat, appelé *inégalité arithmético-géométrique* traduit que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est toujours plus grande que leur moyenne géométrique, définie comme étant le membre de droite de l'inégalité.

Solution : On raisonne par équivalence.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

On reconnaît alors la forme développée de $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$, qui est bien positif : on en déduit que l'inégalité de départ est bien vraie.

4.3 La double implication

Pour montrer une proposition de la forme $P \Leftrightarrow Q$, on peut montrer que $P \implies Q$ et que $Q \implies P$ (de la manière que l'on veut, voir ci-dessous les méthodes de démonstration d'implications). Il arrive souvent que l'on montre $P \implies Q$ et $\neg P \implies \neg Q$.

Exercice : Soient a, b, c dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(a|b) \wedge (a|c) \Leftrightarrow (a|\text{PGCD}(b,c))$.

Solution : Notons $d = \text{PGCD}(b,c)$.
Supposons que $a|d$. a divise donc un diviseur de b, donc divise b, et idem a divise c. On a ainsi prouvé le sens réciproque (lors de doubles implications, il est bon de commencer par le sens qui nous inspire le plus).

Supposons que $a|b$ et $a|c$. D'après l'identité de Bezout,

$$\exists u, v \in \mathbb{Z}, uc + vb = d$$

Or, $a|b$ donc $a|vb$, et idem $a|uc$ donc $a|uc + bv = d$: on a prouvé le sens direct, ce qui conclut.

4.4 La contraposition

Pour prouver une proposition de la forme $P \implies Q$, on peut montrer que $\neg Q \implies \neg P$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n l'est aussi.

Solution : On raisonne par contraposée.
Notons P la proposition « n^2 est pair », et Q la proposition « n est pair ». On veut montrer $P \implies Q$ par contraposée en montrant en fait que $\neg Q \implies \neg P$. Supposons donc $\neg Q$, à savoir que n est impair. Alors il s'écrit de la forme $2k+1$. Mais donc,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

est impair. On a donc montré $\neg P$ et terminé notre raisonnement par contraposition.

4.5 Prouver une proposition en « ou »

Pour prouver une proposition de la forme $P \vee Q$ (cela arrive peu souvent en pratique), on utilise la proposition 4 dans laquelle on remplace P par $\neg P$ pour remarquer que $P \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \implies Q)$. On se ramène donc à montrer que $\neg P \implies Q$.

Exercice : Soit $x \in]-\pi; \pi[$. Montrer que $(2|\cos(\frac{x}{2})| \geq 1) \vee (2|\cos(x)| \geq 1)$.

Solution : Supposons $2|\cos(x)| < 1$. D'après ce qui a été dit précédemment, il s'agit de montrer que $2|\cos(\frac{x}{2})| \geq 1$.

Puisque $2|\cos(x)| \leq 1$ on a $\frac{-1}{2} < \cos(x) < \frac{1}{2}$ et donc $x \in \left]\frac{-2\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$ soit donc $\frac{x}{2} \in \left]\frac{-\pi}{3}; \frac{-\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[$ donc $|\cos(\frac{x}{2})| \in \left]\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ et ainsi $2|\cos(\frac{x}{2})| \geq 1$.

4.6 Le raisonnement par analyse - synthèse

Le raisonnement par analyse - synthèse intervient souvent dans les exercices du type : « trouver les x tels que $P(x)$ » où P est une proposition dépendant de x. En attaquant un tel exercice, on ne connaît a priori pas ces x en question : vient alors la phase d'**analyse**, où l'on suppose l'existence d'un tel x de laquelle on déduit des conditions nécessaires qu'il doit vérifier. Bien souvent, ces conditions que doit nécessairement vérifier x obtenues à l'issue de l'analyse permettent de restreindre les solutions possibles à un petit nombre, dont on peut alors vérifier à la main qu'elles vérifient bel et bien $P(x)$.

Le schéma logique est important : on montre que **si** x vérifie $P(x)$, **alors** il vérifie des conditions telles qu'il ne peut valoir que certaines « valeurs » : mais **ce n'est pas une équivalence** ! Certaines valeurs de x possibles obtenues à la fin de l'analyse peuvent ne pas vérifier $P(x)$, il faut donc **vérifier** que réciproquement, ces valeurs conviennent, c'est l'étape de **synthèse** : on a alors bien une équivalence et on a ainsi déterminé tous les x vérifiant $P(x)$.

Montrons, à titre d'exemple, que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors elle s'écrit **de façon unique** comme une somme de fonction impaire i et d'une fonction paire p.
A priori, on ne sait pas où trouver ces fonctions i et p : on va donc raisonner par analyse - synthèse.

Analyse : Supposons que f s'écrive $p + i$ avec p paire et i impaire. Alors d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)$$

et d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

En sommant ces deux relations on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2p(x) = f(x) + f(-x)$$

c'est-à-dire que,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

De la même manière, en faisant la différence des deux relations on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ainsi, si p et i existent, ce sont nécessairement ces deux fonctions : p et i sont uniques sous réserve que les fonctions mises en exergue conviennent, vérifions cela dans la synthèse.

Synthèse : Soient $p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Tout d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$

donc p est paire.
De même :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$$
donc i est impaire.
Enfin :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$
donc on a bien $f = p + i$: p et i conviennent

Ainsi, de telles fonctions p et i existent d'après la synthèse, et sont les uniques d'après l'analyse, ce qui conclut.

4.7 Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence s'énonce comme tel :

Proposition 9. ***Le principe de récurrence***
Soit P_n une proposition dépendant de n. Si P_0 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \implies P_{n+1}$ alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En pratique pour montrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie quelque soit n, on commence par montrer qu'elle est vraie pour $n = 0$ (c'est **l'initialisation**). Ensuite on montre que la propriété est **héréditaire** en montrant que si P_n est vraie pour un entier n quelconque, alors P_{n+1} l'est aussi.
Ainsi, le principe de récurrence permettra de conclure que P_n est vraie quelque soit n.

Attention : P_n est un prédicat de n, c'est-à-dire une proposition qualifiant n, il ne doit donc pas commencer par « $\forall n$ » en tant qu'il ne s'applique qu'à n seul.

Voyons un exemple. On donne ici la rédaction type d'un raisonnement par récurrence.
On établit pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
que l'on va démontrer par récurrence.
Pour $n = 0$:
$$\sum_{k=0}^{0} k = 0\frac{0 \times (0+1}{2} = 0$$
ainsi P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque. D'après l'hypothèse de récurrence :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc :
$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
Ainsi, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi.
Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si certains voient les premières traces du raisonnement par récurrence dans les *Éléments* d'Euclide (environ 300 av. J-C), la première utilisation qui ressemble à celle que l'on en fait est dûe à Blaise Pascal (1623 - 1662) qui l'écrivît en 1654 dans son *Traité du triangle arithmétique.*

Comme vu dans l'exercice 49, il se peut qu'une propriété ne soit héréditaire qu'à partir d'un certain rang n_0. Heureusement, le raisonnement par récurrence est applicable en initialisant à n_0, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 10. ***Récurrence à partir d'un certain rang***
Soit P_n un prédicat de n. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, P_{n_0} est vraie et $\forall n \geq n_0$, $P_n \implies P_{n+1}$ alors $\forall n \geq n_0$, P_n est vraie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à $Q_n = P_{n+n_0}$. □

Par exemple, on aimerait comparer n^2 et 2^n. Après calcul des premières valeurs, on remarque que $n^2 > 2^n$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$ mais que pour $n \geq 4$, 2^n semble être supérieur à n^2. On va montrer que cela est effectivement le cas, par récurrence, mais on initialisera à 4.

On établit pour $n \geq 4$ la propriété P_n : $2^n \geq n^2$.
$2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$: P_4 est vraie.
Supposons P_n pour $n \geq 4$ donné. Alors,
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Or, toujours d'après l'hypothèse de récurrence,
$$2^n \geq n^2$$
et $n^2 \geq 2n + 1$ pour $n \geq 4$ (étudier $x \mapsto x^2 - 2x - 1$) donc $2^n \geq 2n + 1$ d'où :
$$(n+1)^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$
Ainsi, P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

Toutefois, les récurrences peuvent aussi être « finies » comme le montre la proposition suivante :

Proposition 11. ***Récurrence finie***
Soient $n \leq m$ et soit P un prédicat défini sur $[\![n, m]\!]$. Si P_n est vraie et :
$$\forall k \in [\![n, m-1]\!],\ (P_k \implies P_{k+1})$$
alors $\forall k \in [\![n, m]\!],\ P_k$ est vraie.

Démonstration. Voir exercice 40 ! □

En guise d'exemple, fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la propriété P_k définie pour $k \in [\![1, n]\!]$ par :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

On a $1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ d'où P_1.
Supposons P_k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ donné. Alors :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n}\right)^k &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(k^2 + k + \frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

Or, $n \geq 1$ donc $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ donc $k^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) k \leq k^2 + 2k \leq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ donc :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \leq 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}$$

d'où P_{k+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence (finie),

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

Énonçons maintenant un « autre » principe de récurrence bien connu. En réalité, il n'y a qu'un principe de récurrence (le premier que l'on a introduit) et tous les autres en découlent.

Proposition 12. ***Récurrence double***
Soit P_n un prédicat de n. Si P_0 et P_1 sont vraies et que $\forall n \in \mathbb{N}, \ (P_n \wedge P_{n+1}) \implies P_{n+2}$ alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à $Q_n = (P_n \wedge P_{n+1})$. □

Bien sûr, on peut remplacer 0 et 1 par $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 + 1$ en vertu de la proposition 10. De même, on peut imaginer des récurrences triple, quadruple, etc.

En guise d'exemple, présentons l'illustre suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien du XII$^{\text{ème}}$ siècle Leonardo Fibonacci qui la présenta dans son ouvrage *Liber abaci* pour modéliser une population de lapins.

On considère la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (α est communément noté φ et est appelé « nombre d'or ») et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En remarquant que ces deux nombres sont racines de $X^2 - X - 1$, montrons par récurrence (double) la propriété P_n : $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$.

(Pour « remarquer » que α et β vérifient l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ on a utilisé le fait que si x et y sont deux réels, alors ils sont racine de $X^2 - (x+y)X + xy$: on a simplement remplacé x par α et y par β).

$F_0 = 0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}}$ d'où P_0.
$\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$ d'où P_1.
Supposons P_n et P_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ donné.
Alors :

$$\begin{aligned} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1} + \alpha^n - (\beta^{n+1} + \beta^n)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Or, $\alpha^2 = \alpha + 1$ d'où en multipliant par α^n pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+1} + \alpha^n = \alpha^{n+2}$ et idem pour β, donc :

$$F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

et ainsi P_{n+2} est vraie.
D'après le principe de récurrence (double), la propriété est vraie à tout ordre.

Présentons maintenant un « autre » principe de récurrence fréquemment utilisé.

Proposition 13. ***Récurrence forte***
Soit P_n un prédicat de n. On suppose que P_0 est vraie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (P_0 \wedge \cdots \wedge P_n \implies P_{n+1})$$

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à $Q_n = P_0 \wedge \cdots \wedge P_n$. □

Bien sûr, on peut remplacer 0 par $n_0 \in \mathbb{N}$ quelconque.

En guise d'exemple, montrons la propriété P_n établie pour $n \geq 2$: n s'écrit comme un produit de nombres premiers.
2 étant premier, c'est bien un produit de nombres premiers, d'où P_2.
Supposons $P_2, \ldots, P_n$ pour $n \geq 2$ donné.

Si $n+1$ est premier, c'est un produit de nombres premiers.

Sinon, il admet un diviseur $k \in [\![2, n]\!]$, notons $k' = \frac{n+1}{k}$, on a alors aussi $k' \in [\![2, n]\!]$. On peut appliquer P_k et $P_{k'}$: k et k' s'écrivent comme produit de nombres premiers, et puisque $n+1 = kk'$, il en va de même pour $n+1$, d'où P_{n+1}.

Ainsi, d'après le principe de récurrence (forte), tout nombre entier plus grand que 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers.
On invite le lecteur/la lectrice à utiliser ses connaissances en arithmétique des entiers pour montrer

qu'une telle décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Tous les exemples vus jusqu'à présent présentent des récurrences « ascendantes » où on déduit la véracité de P_{n+1} à partir de la véracité de propositions antérieures. Présentons maintenant le « principe de récurrence descendante ».

Proposition 14. ***Récurrence descendante finie***
Soient $n \leq m$ et P un prédicat défini sur $[\![n, m]\!]$. Si P_m est vraie et que :

$$\forall k \in [\![n+1, m]\!],\ P_k \implies P_{k-1}$$

alors P_k est vraie quelque soit $k \in [\![n, m]\!]$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que $\{i \in [\![n, m]\!],\ \neg P_i\}$ est non vide : puisque cet ensemble est majoré, il admet un plus grand élément noté i_0. Alors, $i_0 < m$ car P_m est vraie. Par suite, $i_0 + 1 \in [\![n+1, m]\!]$, et puisque $i_0 + 1 > i_0$, par maximalité de i_0, P_{i_0+1} est nécessairement vraie. Mais alors, puisque $P_{i_0+1} \implies P_{i_0}$, P_{i_0} est vraie : c'est absurde.
Ainsi, $\forall k \in [\![n, m]\!],\ P_k$ est vraie. □

Pour un exemple d'application de ce type de récurrence, voir exercice 42.

Laissons-maintenant place aux exercices, le terrain de jeu du mathématicien/de la mathématicienne dans lequel celui-ci ou celle-ci emploie pleinement sa logique implacable. Ces petits ou grands problèmes sont nécessaires, et ce n'est pas moi qui le dis, c'est le génial André Weil !

Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes
André Weil, 1906 - 1998

5 Exercices :

La difficulté des exercices est indiquée par un chiffre entre 1 et 5. S'il y a des pré-requis à connaître, ceux-ci seront renseignés.

5.1 Tables de vérité et logique

Exercice 1 : (1)
On définit le « ou exclusif » , que l'on notera XOR, par le fait que pour toutes propositions P et Q, P XOR Q n'est vrai que si une et une seule des propositions P, Q est vraie. Cet opérateur est notamment utilisé en cryptographie mais également en électronique par exemple.

Dresser sa table de vérité, puis montrer que :

$$(P \text{ XOR } Q) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q))$$

La première expression est une mise sous *forme normale conjonctive* de XOR : une forme normale conjonctive est une expression de la forme $(P_{1,1} \vee \cdots \vee P_{1,k_1}) \wedge (P_{2,1} \vee \cdots \vee P_{2,k_2}) \wedge \cdots \wedge (P_{l,1} \vee \cdots \vee P_{l,k_l})$. La seconde expression est une mise sous *forme normale disjonctive* de XOR : une forme normale disjonctive est une expression de la forme $(P_{1,1} \wedge \cdots \wedge P_{1,k_1}) \vee (P_{2,1} \wedge \cdots \wedge P_{2,k_2}) \vee \cdots \vee (P_{l,1} \wedge \cdots \wedge P_{l,k_l})$

Chaque P_{j,k_i} est appelé un *littéral*. Ces formes permettent de déterminer facilement la *satisfaisabilité* d'une proposition, i.e s'il existe une distribution de valeurs de vérité aux P_{j,k_i} qui satisfasse la proposition. Par exemple, si P et Q sont vraies et R est fausse, la formule mise sous forme normale disjonctive $(P \wedge Q) \vee R$ est satisfaite (elle est vraie). Le lecteur ou la lectrice intéressé(e) pourra se renseigner sur le problème SAT, problème central de l'informatique.

Exercice 2 : (2)
Montrer les équivalences suivantes pour toutes propositions P, Q et R :
a) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q))$
b) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg(\neg P \wedge \neg Q))$
c) $(P \wedge (P \implies Q)) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ (raisonnement déductif)
d) $\neg P \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q))$
e) $(P \implies Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee (P \wedge Q))$
f) $(P \implies (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \implies Q) \wedge (P \implies R))$
g) $((P \wedge Q) \implies R) \Leftrightarrow (P \implies (Q \implies R))$

Exercice 3 : (1)
(Pré-requis : généralités sur les suites pour les questions b), c), f)).
Écrire en langage mathématique les propositions suivantes (f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :
a) Tout nombre pair plus grand que 4 est somme de deux nombres premiers.
(Cette proposition, énoncée par le mathématicien prussien Christian Goldbach (1690 - 1764) vers 1740 porte le nom de *conjecture* de Goldbach et pour cause, on ne sait à ce jour pas comment la démontrer ! Si vous vous sentez inspirés c'est le moment de vous manifester ; une vérification a été faite pour les entiers pairs jusqu'à 4×10^8, tout semble donc indiquer qu'elle est vraie, mais la communauté est toujours en attente d'une preuve).
b) (u_n) est croissante.

c) (u_n) est bornée.
d) La fonction f est constante.
e) Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels (on dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$).
On indique que si E est un ensemble, l'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.
f) (u_n) est périodique.
g) La fonction f est périodique.
h) La fonction f est strictement décroissante.

Exercice 4 : (2)
Nier les propositions précédentes.

Exercice 5 : (2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Énoncer en langage courant chacune des propositions suivantes. Peut-on trouver une fonction qui satisfait la proposition ? Qui ne la satisfait pas ?
a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) < f(y)$
b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(x+T)$
c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

5.2 Raisonnement par l'absurde

Exercice 6 : (1)
Soient a, $b \in \mathbb{Q}$. Montrer que si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$. En déduire que si a, b, c, d sont des rationnels, alors :

$$(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}) \implies ((a = c) \wedge (b = d))$$

Le premier résultat que l'on montre ici peut s'exprimer en disant que $(1, \sqrt{2})$ est $\mathbb{Q}$-libre. Pour préciser ces termes, il faudrait disposer de la notion « d'espace vectoriel » et de « corps ». Patience ! Dans le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, une famille de réels $(x_0, \dots, x_n)$ est dite $\mathbb{Q}$-libre si :

$$\forall q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q},\ (q_1x_1 + \cdots + q_nx_n = 0) \implies (q_1 = \cdots = q_n = 0)$$

Exercice 7 : (1 - 2 pour la fin)
Montrer que si l'on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs alors au moins un tiroir a au moins 2 chaussettes. En application, déduire que si $x_0 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ réels de $[0,1]$, alors $\exists i \in [\![0, n-1]\!], |x_i - x_{i+1}| \leq \frac{1}{n}$.

Ce principe, appelé *principe des tiroirs de Dirichlet*, a de nombreuses applications, notamment en approximation de réels par des rationnels (le lecteur ou la lectrice intéressé(e) pourra se renseigner sur le théorème d'approximation de Dirichlet, qui approxime simultanément plusieurs réels par des rationnels).

Exercice 8 : (2)
Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 9 : (2)
(Pré-requis pour la deuxième partie de l'exercice : théorème fondamental de l'arithmétique, qui stipule que tout entier se décompose de manière unique en produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs).
Montrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$. Généraliser en remplaçant 2 et 3 par deux nombres premiers distincts p et q.

Exercice 10 : (2)
Montrer que exp n'est pas un polynôme.

Exercice 11 : (3)
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 12 : (4)
(Pré-requis : congruences pour la deuxième partie de l'exercice).
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers, et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 (i.e de la forme $4k+3$, où $k \in \mathbb{N}$).

Cela constitue un cas particulier simple du *théorème de la progression arithmétique* de Dirichlet (du nom de Peter-Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805 - 1859, mathématicien prussien), qui l'a prouvé en 1837 en appliquant des outils élaborés d'analyse complexe à la théorie des nombres, créant alors la théorie analytique des nombres, qui est encore un domaine de recherche riche et mystérieux. Ce théorème stipule que si a et b sont des entiers naturels premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak+b$ ou $k \in \mathbb{N}$.

5.3 Raisonnement par contraposée

Exercice 13 : (1)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2+1 est pair alors n est impair.

Exercice 14 : (2)
(Pré-requis : définition de la limite d'une suite).
Soit (u_n) une suite de réels positifs qui converge vers une limite l. Montrer que $l \geq 0$.

En topologie, on dit qu'un ensemble $E \subset F$ est *un fermé de* F si pour toute suite à valeurs dans E qui converge dans F, sa limite est en fait dans E. L'exercice ci-dessus montre donc en fait que $\mathbb{R}^+$ est un fermé de $\mathbb{R}$! Par contre, $\mathbb{R}^{+*}$ ne l'est pas, car $(\frac{1}{n+1})$ est à valeurs strictement positives, mais converge vers $0 \notin \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 15 : (2)
(Pré-requis : tables de congruences).
Soient x, $y \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$((7 \nmid x) \vee (7 \nmid y)) \implies (7 \nmid x^2 + y^2)$$

Exercice 16 : (3)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$(8 \nmid n^2 - 1) \implies (2|n)$$

Exercice 17 : (3)
Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont appelés *nombres de Mersenne*, du nom du mathématicien français Marin Mersenne (1588 - 1648). En 1732, Leonhard Euler (1707 - 1783) montra que la réciproque était fausse : $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier, bien que 11 le soit. En 1878, Édouard Lucas (1842 - 1891), mathématicien français, mit au point un test de primalité permettant de déterminer algorithmiquement si $2^n - 1$ était premier ou non, test qui fût amélioré en 1930 par Derrick Henry Lehmer (1905 - 1991), mathématicien américain. Grâce à ce test, on a pu déterminer de grands nombres premiers, chose utile notamment en cryptographie. En effet, le système RSA, utilisé de nos jours, repose sur la difficulté que l'on a à factoriser algorithmiquement en produit de facteurs premiers des produits de grands nombres premiers.

5.4 Raisonnement par analyse - synthèse/Détermination de conditions nécessaires

Exercice 18 : (1)
Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3}$

Exercice 19 : (2)
(Pré-requis : savoir ce qu'est une primitive).
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 20 : (2)
(Pré-requis : primitives usuelles)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

Exercice 21 : (2)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Exercice 22 : (2)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Exercice 23 : (3)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1 - x) = 1 + x$$

Exercice 24 : (3)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x) + x + f(f(y) - x) = y$$

Exercice 25 : (4)
(Pré-requis : lemme de Gauss, qui stipule que si a, b et c sont des entiers tels que $a|bc$ et a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$).
Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients entiers de degré $n \geq 1$.
Trouver une condition nécessaire sur $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ pour que $\frac{p}{q}$ soit racine de P.
Application : Montrer que pour n dans $\mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est un carré parfait.

Exercice 26 : (5)
(Pré-requis : récurrence simple ; densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: tout réel est limite d'une suite de rationnels).
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Indication : Commencer par montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$, puis étendre ce résultat à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$, puis enfin à $\mathbb{R}$ en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette équation s'appelle *équation fonctionnelle de Cauchy*, du nom du mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857). Elle figure parmi les équations fonctionnelles les plus simples, et beaucoup d'équations s'y ramènent, par exemple celle de l'exercice 20 (le montrer !).

5.5 Raisonnement par récurrence

5.5.1 Récurrence simple

Exercice 27 : (1)
Soit (u_n) suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel fixé.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Une telle suite est appelée *suite arithmétique*, sa *raison* est r.

Exercice 28 : (1)
Soit (u_n) suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ où q est un réel fixé.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Une telle suite est appelée *suite géométrique*, sa *raison* est q.

Exercice 29 : (2)
Cet exercice ne fait pas appel au raisonnement par récurrence mais explique comment exprimer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Soient $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Résoudre l'équation $x = ax + b$, on note l la solution.
Montrer que $(u_n - l)$ est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de a, b et u_0.

Cet exercice montre une chose importante : si (u_n) est une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, il est intéressant de connaître les *points fixes* de f, i.e les solutions de l'équation $f(x) = x$. Dans l'exemple des suites arithmético-géométriques ci-dessus, l est un point fixe de $f : x \mapsto ax + b$. Mais l'étude des point fixes de f peut aussi être intéressante pour déterminer des limites éventuelles. En effet, si (u_n) converge, disons vers x, alors (u_{n+1}) aussi, et puisque f est continue,

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x)$$

puis par unicité de la limite, $x = f(x)$: x est nécessairement un point fixe de f.
Toutes ces considérations s'inscrivent dans une branche des mathématiques appelée *étude de systèmes*

dynamiques dont les applications sont innombrables puisque notre monde est fait de systèmes dynamiques (météo, dynamiques de population, cours de la bourse...).

Exercice 30 : (2)
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

Ce type de fonction intervient notamment lorsque l'on étudie des suites : dans ce cadre là, elles sont nommées *extractrices*. En effet, supposons que l'on dispose d'une telle fonction et d'une suite (u_n), alors la suite $(u_{f(n)})$ est une *suite extraite* de (u_n), ou sous-suite : c'est la suite dont les termes sont $u_{f(0)}, u_{f(1)}, \ldots$. Par exemple, si $f : n \mapsto 2n$ et $(u_n) = (\frac{1}{n+1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, alors $(u_{f(n)}) = (\frac{1}{2n+1}) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots)$.

Un résultat extrêmement puissant d'analyse est le théorème de Bolzano-Weierstrass, du nom du mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848) et du mathématicien prussien Karl Weierstrass (1815-1897), est le suivant : si (u_n) est une suite de réels bornée, alors il en existe une sous-suite convergente. Par exemple, $(u_n) = ((-1)^n)$ est bornée, et (u_{2n}) est bien une sous-suite convergente (elle est constante, valant 1). Pour cette suite, le résultat était évident, mais pour $(\sin(n))$ par exemple, cela l'est moins.

Exercice 31 : (2)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Il existe une formule générale pour le nombre :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m$$

où $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Celle-ci fait intervenir les fascinants nombres de Bernoulli, du nom du mathématicien suisse Jakob Bernoulli (1654-1705), notés B_n, définis par $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

On montrera dans l'exercice 50 la formule :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

Ces nombres sont tout bonnement fascinants, et ont des propriétés mathématiques et arithmétiques profondes. Ils interviennent dans les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs, cette fonction étant « définie » par :

$$\zeta : x \mapsto \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Mais encore faut-il que cette somme infinie ait un sens, i.e que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x})$ converge.
Ils sont aussi liés au *développement en série entière* de la fonction tangente, ce qui veut dire que pour x assez petit on a :

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_{2n}| 2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

Ils apparaissent également en algèbre... bref, ces nombres sont merveilleux et regorgent de mystères.

Exercice 32 : (2)
On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n.

Exercice 33 : (3)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{3n}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

On sait que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ est croissante, or de la deuxième inégalité on en déduit qu'elle est majorée : elle converge donc vers un réel x. En passant à la limite dans l'inégalité, on en déduit que $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$.

En fait,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934$$

Le calcul de cette somme infinie s'appelle *problème de Bâle*, du nom de la ville suisse. Il fût posé par Pietro Mengoli (1626-1686), mathématicien italien, en 1644, et étudié par Jakob Bernoulli 40 ans plus tard. Aucun des mathématiciens de l'époque ne parvint à le résoudre. En 1730, James Striling (1692-1770), parvint à montrer que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 \binom{2n}{n}}$$

expression avec laquelle il trouva une bonne approximation décimale de x mais ne reconnût pas $\frac{\pi^2}{6}$. Il faudra attendre 1741 pour qu'Euler fournisse une preuve rigoureuse du résultat, après en avoir eu une première intuition en 1735 à l'aide d'une preuve informelle utilisant un développement en produit infini de sin (factorisation de Weierstrass).

Exercice 34 : (3)
(Pré-requis : trigonométrie, inégalité triangulaire)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Exercice 35 : (3)
Trouver une expression pour la dérivée n-ième du logarithme népérien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 36 : (3)
(Pré-requis : formule de Pascal, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$).
Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Cette formule est appelée *formule du binôme de Newton* et est extrêmement utile en plus d'être d'une grande généralité. En effet, celle-ci est valable sur tout une classe d'ensembles commutatifs munis d'une « addition » et d'une « multiplication », appelés *anneaux commutatifs*, et pas seulement $\mathbb{C}$! « Commutatif » signifie vérifier $ab = ba$ pour tous a, b.

Exercice 37 : (4)
Soit c > 0, soit $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.
Déterminer une formule générale pour f^n la composée n-ième de f.

5.5.2 Récurrences multiples (mais pas que !)

Exercice 38 : (1)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que $(u_n) = (2^n + 3^n)$.

Ce genre de suites, où le $n+2$-ième terme est combinaison à coeffcients constants des $n+1$-ième et n-ième termes est appelée *suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.*

Exercice 39 : (1)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que $(u_n) = (2^{n+1} - 1)$.

Exercice 40 : (2)
Prouver la proposition 11 en s'inspirant de la preuve de la proposition 14.

Exercice 41 : (2)
Cet exercice ne fait a priori pas intervenir de raisonnement par récurrence (quoiqu'il pourrait) mais fait intervenir la suite de Fibonacci introduite dans le cours.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$. En déduire la limite de $(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}})$ après en avoir trouvé une expression plus simple.

Exercice 42 : (3)
Soit $N \geq 2$. Montrer que $\forall m \in [\![2, N]\!]$:

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{N}}}} < m+1$$

et en déduire que :

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{N}}}} < 3$$

Exercice 43 : (3)
On considère l'ensemble E des suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont des réels tels que l'équation $x^2 = ax + b$ ait deux solutions réelles distinctes λ et μ.
(Cette équation est appelée *équation caractéristique* de u).

Montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \in E$.

Justifier que si u est dans E, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(u_0 = \alpha + \beta) \wedge (u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu)$, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

On comprend alors d'où sortent les valeurs $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dont on s'est servies pour l'étude de la suite de Fibonacci : ce ne sont rien d'autre que les solutions de $x^2 = x + 1$, équation que l'on a étudiée car la suite de Fibonacci vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 44 : (3)
On reprend les notations de l'exercice 41 mais on suppose cette fois que a et b sont tels que l'équation $x^2 = ax + b$ n'ait qu'une seule solution réelle λ non nulle.
En s'inspirant de la méthode de l'exercice 41, montrer que cette fois :

$$E = \{((\alpha + \beta n)\lambda^n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 45 : (4)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite (ε_n) à valeurs dans $\{0;1\}$ telle que $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$. On fera bien attention à justifier que cette somme est finie.

En notant p le plus grand entier tel que $\varepsilon_p \neq 0$, on a $n = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \cdots + 2^p \varepsilon_p$. L'écriture $\varepsilon_p \dots \varepsilon_0$ n'est autre que *l'écriture binaire* de n. On peut généraliser en remplaçant 2 par un entier naturel b au moins égal à 2 quelconque, on obtient alors *l'écriture en base* b de n (notons qu'alors les ε_k sont dans $\{0, \dots, b-1\}$). L'écriture des nombres que l'on connaît est l'écriture en base $b = 10$.

Exercice 46 : (4)
(Pré-requis : être à l'aise sur les manipulations de somme)
Soient u et v deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$$

Montrer par « récurrence forte » que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k$$

Cette formule s'appelle *formule d'inversion de Pascal*, du nom du mathématicien français Blaise Pascal (1623-1662). Elle possède de nombreuses applications dans des problèmes de dénombrement classiques comme le calcul du nombre de surjections d'un ensemble fini vers un autre par exemple (une surjection est une application telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée ait au moins un antécédent dans l'ensemble de départ).

Exercice 47 : (4)
On note encore (F_n) la suite de Fibonacci.
Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall q \in \mathbb{N},\ F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q = F_{p+q}$$

Cet exercice montre à quel point il est important de bien poser son hypothèse de récurrence.

Exercice 48 : (5)
On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'une fois écrit sous forme irréductible, pour $n \geq 2$, H_n est toujours une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur pair.

La suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ est appelée *série harmonique*. Et contrairement à ce qu'on pourrait penser, elle diverge ! Ceci dit, elle diverge très lentement, à la même vitesse que $(\ln(n))$ environ. Par contre, la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n))$, elle, converge vers une limite communément notée γ et qui s'appelle *constante d'Euler - Mascheroni*, du nom du mathématicien italien Lorenzo Mascheroni (1750-1800). Cette constante intervient à beaucoup d'endroits, mais on ne sait rien d'elle, on ne sait même pas si elle est rationnelle ! En revanche, on sait que si elle était rationnelle, le dénominateur de sa fraction irréductible aurait plus de 242 080 chiffres... Tout laisse donc à penser qu'elle est irrationnelle, mais personne n'en est sûr !

Exercice 49 : (5)
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n+5 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note f^k la composée k-ième de f pour $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(n) \in \{1; 5\}$$

Cet énoncé n'est pas sans rappeler *la conjecture de Syracuse*, énoncée pour la première fois par le mathématicien allemand Lothar Collatz (1910 - 1990). Celle-ci énonce que si on considère la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(n) = 1$ où f^k désigne la composée k-ième de f.
Ce problème constitue un autre exemple d'énoncé pourtant facile à comprendre mais dont la preuve se fait rude ; car oui, il n'existe encore à ce jour pas de preuve de cette conjecture !

Exercice 50 : (5)
(Pré-requis : aimer le calcul et les sommes)
On définit la suite (B_n) des nombres de Bernoulli par $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

Montrer que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$$

On renseigne ici les premières valeurs des nombres de Bernoulli : $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = \frac{-1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42} \dots$

On peut montrer à l'aide de la *fonction génératrice* (voir ci-dessous) de $(\frac{B_n}{n!})$ que $B_n = 0$ pour n impair

plus grand que 3, et que B_{2k} est du signe de $(-1)^{k-1}$.
Vulgairement, si (u_n) est une suite de complexes, on appelle fonction génératrice de u la fonction « définie » par $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ lorsque cela a un sens, i.e que $|x|$ est assez faible.

Cette fonction transcrit beaucoup de propriétés de u : par exemple, si elle est paire (resp. impaire) alors $(u_{2n+1}) = (0)$ (resp. $(u_{2n}) = (0)$) (et réciproquement).

La fonction génératrice de $(\frac{B_n}{n!})$ est $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ et puisque $x \mapsto \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ est paire on en déduit que les B_n sont nuls pour n impair différent de 1.

6 Solutions

Solution de l'exercice 1 :
Sachant que P XOR Q n'est vraie que si une seule des deux propositions P, Q est vraie, on a la table :

P	Q	P XOR Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Pour prouver les deux équivalences restantes, on peut également dresser les tables de vérité des propositions :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
V	V	F	F	F
V	F	V	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

Les colonnes sont les mêmes : les propositions sont donc équivalentes !

Solution de l'exercice 2 :
a) D'après les lois de Morgan,

$$(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \Leftrightarrow ((\neg(\neg P)) \wedge (\neg(\neg Q)))$$

Or pour toute proposition P, $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ (proposition 1) d'où le résultat.
b) Idem d'après les lois de Morgan,

$$(\neg(\neg P \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow (\neg(\neg P) \vee \neg(\neg Q)) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

On aurait pu aussi appliquer le résutat de a) à $\neg P$ et $\neg Q$, puis se servir du fait que pour toutes propositions P et Q, $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$.
c) D'après la proposition 4, $(P \implies Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ donc :

$$(P \wedge (P \implies Q)) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q))$$

d'après la distributivité de « et » sur « ou ». Or, $P \wedge \neg P$ n'est jamais vraie donc

$$((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$$

ce qui conclut.
d) Sachant que $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$, on a :

$$(\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$$

la dernière équivalence étant conséquence des règles de distributivité.
Or, $Q \vee \neg Q$ est toujours vraie (c'est une tautologie), d'où :

$$(\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P$$

e) Par distributivité,

$$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q))$$

Or $\neg P \vee P$ est une tautologie donc :

$$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \implies Q)$$

d'après le proposition 4.
f) D'après la proposition 4,

$$(P \implies (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R))$$

Par distributivité,

$$(\neg P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R))$$

D'après la proposition 4,

$$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \implies Q)$$

et idem pour la proposition de droite.
Ainsi,

$$(P \implies (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \implies Q) \wedge (P \implies R))$$

g) D'après la proposition 4,

$$((P \wedge Q) \implies R) \Leftrightarrow ((\neg(P \wedge Q)) \vee R)$$

Or d'après les lois de Morgan,

$$(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

d'où,

$$((\neg(P \wedge Q)) \vee R) \Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee R)$$

Mais,

$$((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \implies (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \implies (Q \implies R))$$

où l'on a utilisé l'associativité du « ou » et deux fois la proposition 4.

Solution de l'exercice 3 :
a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ 2|n,\ \exists p, q \in \mathbb{P},\ n = p + q$

On pourrait aussi écrire :

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ (2|n) \implies (\exists p, q \in \mathbb{P},\ n = p + q)$

b) $\forall n, n' \in \mathbb{N},\ (n \leq n') \implies (u_n \leq u_{n'})$

c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$

d) $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$
Traduit en langage français : il existe une constante c telle que tout x réel ait c comme image par f.

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ q_n \to x$

f) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+N}$

g) $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$
Si $f = \sin$ par exemple, n'importe quel $T \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ convient.

h) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x < y) \implies (f(x) < f(y))$

Solution de l'exercice 4 :
a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ 2|n,\ \forall p, q \in \mathbb{P},\ n \neq p + q$
Eh oui ! La proposition à nier était de la forme « pour tout n vérifiant ... » suivi d'un prédicat sur n : sa négation est donc qu'il existe n vérifiant ...mais qui ne vérifie pas le prédicat en question.

b) $\exists n, n' \in \mathbb{N},\ (n \leq n') \wedge (u_n > u_{n'})$
Le raisonnement est le même que pour a), ce qui tient essentiellement au fait qu'on aurait aussi pu écrire la question a) de l'exercice 3 avec une implication.

c) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$
Ce qui en français signifie que (u_n) prend des valeurs arbitrairement grandes !

d) $\forall c \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq c$

e) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall (q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ q_n \not\to x$

f) $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_{n+N}$

g) $\forall T \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(x+T)$

h) $\exists x, y \in \mathbb{R},\ (x < y) \wedge (f(x) \geq f(y))$

Solution de l'exercice 5 :
a) Traduisons un première fois à la volée : quelque soit x réel, il existe un réel y dont l'image par f excède strictement celle de x. Cela signifie exactement que f n'a pas de maximum ! Par exemple, $f : x \mapsto x^2$ ou $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x^2}$ satisfont cette proposition, mais $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ non : elle a un maximum de 1 en 0.

b) Cette assertion signifie que toutes les valeurs prises par f sont prises au moins deux fois : pour n'importe quel x réel, on va pouvoir trouver un réel non nul T tel que x et $x+T$ aient la même image. Par exemple, n'importe quelle fonction périodique vérifie cette propriété, disons cos ou même $x \mapsto \{x\}$ où $\{x\}$ est la *partie fractionnaire* de x, différence de x et de sa partie entière (cette fonction est 1-périodique, le montrer !)

c) Cette affirmation dit qu'il existe x réel dont l'image par f est $\mathbb{R}$ tout entier : c'est impossible ! Aucune fonction ne la satisfait.

Solution de l'exercice 6 :
L'idée est de se servir de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $b \neq 0$. Alors :

$$(a + b\sqrt{2} = 0) \Leftrightarrow (\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q})$$

C'est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, $b = 0$, et puisque $a + b\sqrt{2} = 0$ on obtient $a = 0$.
Maintenant, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

$$(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}) \Leftrightarrow ((a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0)$$

et en vertu de ce qui précède, $a - c = b - d = 0$ d'où $a = c$ et $b = d$.

Solution de l'exercice 7 :
Supposons que tous les tiroirs aient au plus une chaussette. Puisqu'il y en a n, le nombre de chaussettes est majoré par n, i.e $n + 1 < n$: c'est absurde.
Ainsi, au moins un tiroir a au moins deux chaussettes.

Pour l'application, il suffit de considérer les tiroirs $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $0 \leq k < n$.
D'après ce qui précède, il existe un tiroir contenant deux chaussettes, i.e :

$$\exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \exists i < j \in [\![0; n-1]\!],\ \frac{k}{n} \leq x_i \leq x_j \leq \frac{k+1}{n}$$

et donc $|x_i - x_{i+1}| = x_{i+1} - x_i \leq x_j - x_i \leq \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 8 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $\sqrt{1+n^2}$ soit un entier, qu'on notera d. Alors,

$$1 = d^2 - n^2 = (d - n)(d + n)$$

donc $n + d | 1$, puisque c'est un entier naturel, il n'est pas égal à -1 donc $n + d = 1$, et alors $d - n = 1$. On en déduit en faisant la demi-somme de ces égalités que $d = 1$ et donc que $n = 0$, or n avait justement été choisi non nul.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{1+n^2} \notin \mathbb{N}$

Solution de l'exercice 9 :
Supposons que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ soit rationnel, écrivons-le sous forme irréductible $\frac{p}{q}$. Alors,

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q\ln(3) = \ln(3^q) = p\ln(2) = \ln(2^p)$$

$$\Leftrightarrow 3^q = 2^p$$

Or le côté gauche est impair, tandis que le côté droit est pair (à part si $p = 0$ mais ce n'est clairement pas le cas) : c'est absurde. Ainsi, $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$
Remplaçons 2 et 3 par des nombres premiers r et s distincts. On a alors :

$$\frac{\ln(r)}{\ln(s)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow r^q = s^p$$

ce qui est absurde par unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
Ainsi, si r et s sont des nombres premiers distincts, $\frac{\ln(r)}{\ln(s)} \notin \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 10 :
Supposons que exp soit un polynôme :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

On sait qu'un polynôme de degré n dérivé $n+1$ fois est nul. Or puisque $\exp' = \exp$, en dérivant $n+1$ fois la relation du dessus on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = 0$$

ce qui est bien sûr absurde.
Ainsi, exp n'est pas un polynôme.

Solution de l'exercice 11 :
Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ soit un rationnel, notons-le r.
Alors :

$$r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

et donc :

$$\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$$

Écrivons alors $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ sous forme irréductible (avec donc p et q premiers entre eux).
On a $p^2 = 6q^2$ donc 2 divise p^2 et donc 2 divise p.
Alors, $\exists k \in \mathbb{Z},\ p = 2k$ donc $4k^2 = 6q^2$ i.e $2k^2 = 3q^2$ donc 2 divise $3q^2$ mais 2 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le lemme de Gauss, $2|q^2$ c'est-à-dire $2|q$: en contradiction avec le fait que p et q soient premiers entre eux.
Ainsi, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Solution de l'exercice 12 :
Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers notés $p_1, \ldots, p_r$.

L'idée est de construire un nombre qui ne pourra pas avoir de diviseur premier dans la liste $\{p_1, \dots, p_r\}$ à moins d'engendrer une absurdité (ce qui nous donnera donc notre absurdité finale).

Considérons $N = p_1 \dots p_r + 1$. N étant strictement plus grand que p_r, il n'est pas premier (sinon il serait dans la liste) : il admet un diviseur premier noté p_k qui est dans la liste $\{p_1, \dots, p_r\}$ par hypothèse. Or, p_k divise $p_1 \dots p_r$ donc p_k divise $N - p_1 \dots p_r = 1$: c'est absurde.
Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers.

Notons que cette démonstration montre que si p_n désigne le n-ième nombre premier, alors $p_{n+1} \leq p_1 \dots p_n + 1$: le $n+1$-ème nombre premier ne peut pas être « trop grand ». Pourtant, on peut trouver des suites de nombres successifs arbitrairement grandes telles qu'aucun ne soit premier : il suffit de considérer $n\,! + 2, n\,! + 3, \dots, n\,! + n$ qui est une suite de longueur $n - 1$ de nombres successifs tous composés (car $\forall k \in [\![2, n]\!],\ n\,! + k = k(1 + 1 \times \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n)$.
Déroutant !

Montrons maintenant qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 : idem, supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini r et notons les $p_1, \dots, p_r$. Inspirons-nous de la preuve précédente pour construire un entier N qui aura nécessairement un diviseur premier congru à 3 modulo 4 qui ne sera pas dans la liste sans que cela soit absurde.
On remarque qu'un produit de nombres congrus à 1 modulo 4 est congru à 1 modulo 4, donc si notre nombre N est congru à 3 modulo 4, il aura nécessairement un diviseur premier congru à 3 modulo 4 !

Ces considérations ainsi que l'idée de la question précédente nous amènent à poser $N = 4p_1 \dots p_r - 1$, qui est congru à 3 modulo 4 donc admet un diviseur premier congru à 3 modulo 4, qui fait partie de la liste par hypothèse, notons le p_k. Puisque p_k divise $p_1 \dots p_r$, il divise $4p_1 \dots p_r - N = 1$: absurde !
Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Solution de l'exercice 13 :
On raisonne par contraposée : si n est pair, alors n^2 l'est aussi car n peut s'écrire $2k$ et donc $n^2 = 2 \times 2k^2$ est pair. Alors, $n^2 + 1$ est impair : on a bien prouvé la proposition voulue par contraposition !

Solution de l'exercice 14 :
On raisonne par contraposition en supposant que $l < 0$, montrons donc que (u_n) n'est pas à termes positifs, i.e qu'au moins un des termes est strictement négatif. En mathématiques, et en particulier dans ce genre d'exercices où la visualisation est primordiale, il est impératif de faire des **dessins**.
Par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{-l}{2} > 0$.

Alors, d'après la définition,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| < \frac{-l}{2}$$

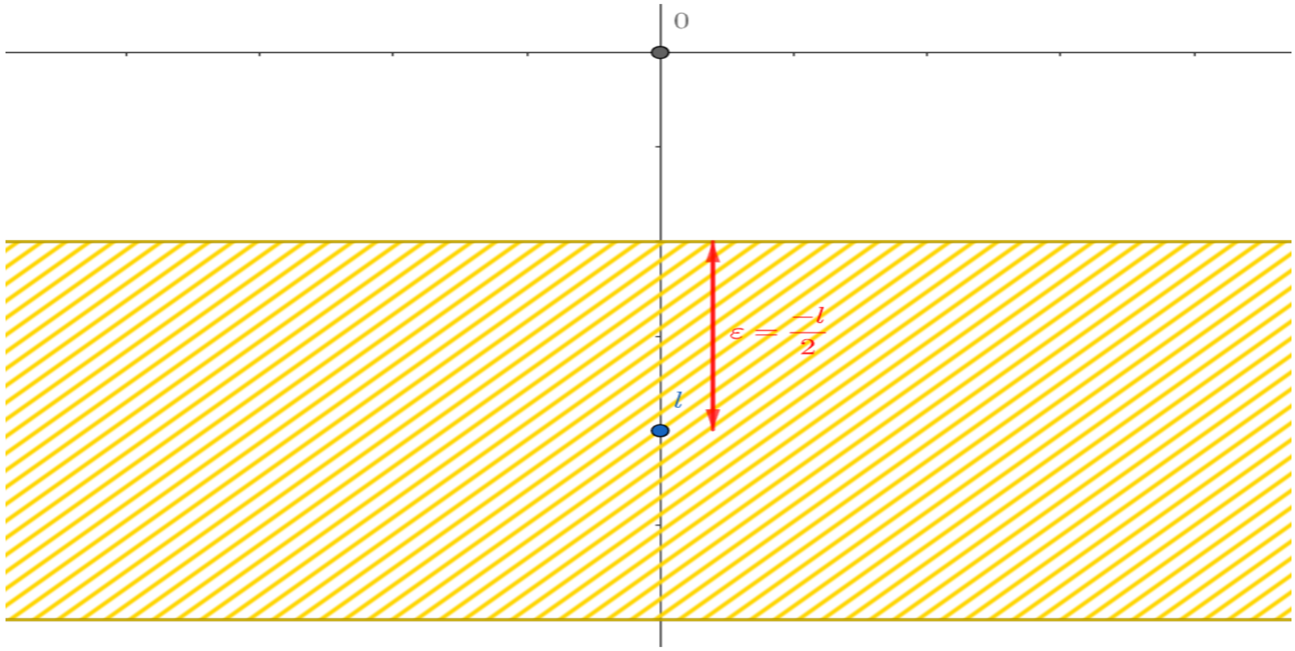

FIGURE 1 – Dessin

En choisissant ε de cette manière, on est sûr que pour $n \geq N$, les u_n seront tous dans la zone jaune, et donc seront strictement négatifs.
En particulier,

$$u_N - l \leq |u_N - l| < \frac{-l}{2}$$

et donc $u_N < \frac{l}{2} < 0$ ce qui conclut !

Solution de l'exercice 15 :
On raisonne par contraposée en montrant que :

$$(7|x^2 + y^2) \implies ((7|x) \wedge (7|y))$$

Pour ce faire, on peut construire un tableau à double entrée donnant le résidu modulo 7 de $x^2 + y^2$ en fonction de ceux de x et de y.

y mod 7 / x mod 7	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	5	1	6	6	1	5
3	2	3	6	4	4	3	3
4	2	3	6	4	4	6	3
5	4	5	1	3	6	1	5
6	1	2	5	3	3	5	2

où on constate que

$$(7|x^2 + y^2) \Leftrightarrow ((7|x) \wedge (7|y))$$

On a en particulier prouvé la proposition voulue.

Solution de l'exercice 16 :
On raisonne par contraposée en supposant que n est impair et on montre que $8|n^2-1$

On sait que $n^2-1=(n-1)(n+1)$ et puisque n est impair, $n-1$ et $n+1$ sont pairs.
Si $n=1$, on a clairement $8|n^2-1$.
Sinon, $n \geq 3$ et donc $n-1$ et $n+1$ sont deux nombres pairs plus grands que 2 et distants de 2 : l'un au moins est divisible par 4. En effet, si $n=2k+1$ et que l'on suppose que $n-1=2k$ n'est pas divisible par 4, alors k est impair, de la forme $2k'+1$ et donc $n+1=2(2k'+1)+2=4(k'+1)$: $n+1$ est divisible par 4.
De la même manière, si $n+1$ n'est pas divisible par 4, $n-1$ l'est.

Puisque $n^2-1=(n-1)(n+1)$ et qu'un des deux facteurs est divisible par 2 tandis que l'autre est divisible par 4, n^2-1 est divisible par $2\times 4=8$: on a prouvé la proposition voulue par contraposition.

Solution de l'exercice 17 :
On raisonne par contraposée en supposant n composé : il admet donc un diviseur différent de 1, noté a.
On peut donc écrire n de la forme ab avec $a,b\geq 2$.
On connait la formule valable pour tout complexe x,y et tout entier n :

$$x^n-y^n=(x-y)\sum_{k=0}^{n-1}x^ky^{n-1-k}$$

d'où l'on déduit que :

$$2^n-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)\sum_{k=0}^{b-1}2^{ka}$$

Or, $a\neq 1$ donc $2^a-1\neq 1$, et $b\neq 1$ donc a fortiori $a\neq n$ et donc $2^a-1\neq 2^n-1$.
Ainsi, on a montré par l'égalité du dessus que 2^a-1 était un diviseur de 2^n-1 mais qui n'était ni 1 ni 2^n-1, ce qui signifie que 2^n-1 est composé : on a prouvé la proposition voulue par contraposition.

Solution de l'exercice 18 :
Nous sommes tentés de résoudre une telle équation par équivalence comme à notre habitude, mais la présence de la racine carrée nous empêche de « remonter » le raisonnement : nous sommes donc naturellement amenés à raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons l'existence de $x\in\mathbb{R}$ vérifiant l'équation donnée.
Alors, une condition nécessaire pour que les racines existent bel et bien est que $2x+1\geq 0$ et $x-3\geq 0$, i.e $x\geq 3$.
Si x est solution, **alors** $2x+1=x-3$ (ce n'est pas une équivalence mais une **implication**, car on a élevé au carré : on ne peut pas remonter le raisonnement en prenant simplement la racine, car pour $y\in\mathbb{R}$, $\sqrt{y^2}=|y|$ et non y ! Attention à cette erreur fréquente).

On en déduit alors que $x = -4$. Or une condition nécessaire pour que x soit solution était que $x \geq 3$: on déduit de cette analyse que l'équation proposée n'a pas de solution !

Solution de l'exercice 19 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même vérifiant l'équation proposée.
En substituant 0 à x et y on obtient $f(0) = 2f(0)$ c'est-à-dire $f(0) = 0$ (une condition nécessaire pour que f soit solution est que $f(0) = 0$).
Fixons $x \in \mathbb{R}$ **quelconque**. Dérivons la fonction $y \mapsto f(x+y) = f(x) + f(y)$ (on peut car f est dérivable). On a alors :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(x+y) = f'(y)$$

Or ceci vaut quelque soit le réel x fixé, donc si l'on considère un réel y quelconque et que l'on substitue $-y$ à x dans l'égalité du dessus, on obtient que $\forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = f'(0)$: f' est constante.
Or compte tenu du fait que $f(0) = 0$, on en déduit que f est linéaire.
Ainsi, une condition nécessaire pour que f soit solution est qu'elle soit linéaire. Montrons que cette condition est suffisante dans la synthèse.

Synthèse : Soit $f : x \mapsto ax$ où a est un réel quelconque.
Alors f est dérivable et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Ainsi, les fonctions linéaires sont solutions et d'après l'analyse ce sont les seules.

Solution de l'exercice 20 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant l'équation donnée.
Inspirons-nous de l'exercice 19 et fixons un réel strictement positif y quelconque. Dérivons alors $x \mapsto f(xy) = f(x) + f(y)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ yf'(xy) = f'(x)$$

Or, ceci valant pour tout x réel strictement positif, en évaluant en 1 il vient $yf'(y) = f'(1)$ i.e $f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$, et cela vaut quelque soit le réel strictement positif y choisi. En intégrant, on en déduit que :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(y) = f'(1)\ln(y) + c$$

Or, en substituant 1 à x et y dans l'équation de départ, on obtient $2f(1) = f(1)$ i.e $f(1) = 0$ et donc $c = 0$.
Ainsi, une condition nécessaire pour que f soit solution est d'être proportionnelle au logarithme népérien. Vérifions dans la synthèse que c'est une condition suffisante.

Synthèse : Soit $f : x \mapsto a\ln(x)$ pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
Alors, f est dérivable et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ f(xy) = a\ln(xy) = a\ln(x) + a\ln(y) = f(x) + f(y)$$

Ainsi, les fonctions proportionnelles au logarithme sont solutions et d'après l'analyse ce sont les seules.

Solution de l'exercice 21 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même vérifiant l'équation donnée. Fixons un réel x quelconque et substituons le réel $f(x)$ à y, il vient :

$$f(0) = 2 - x - f(x)$$

i.e $f(x) = 2 - x - f(0)$ et ce quelque soit x réel. En substituant 0 à x il vient $f(0) = 2 - f(0)$ i.e $f(0) = 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x$

Synthèse : Soit $f : x \mapsto 1 - x$. Alors,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 1 - y + f(x) = 2 - y - x$$

Ainsi, la solution de cette équation est $x \mapsto 1 - x$

Solution de l'exercice 22 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même vérifiant l'équation donnée.
En évaluant x et y en 1 on obtient $f(1) = 2f(1)$ c'est-à-dire $f(1) = 0$.
Ensuite, en évaluant en $y = 1$ on obtient :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(1 - x) = 0)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ f(x) = 0)$$

Finalement, compte tenu que $f(1) = 0$, on obtient que f est identiquement nulle.

Synthèse : Réciproquement, on vérifie immédiatement que la fonction nulle est solution.
Ainsi, seule la fonction nulle est solution.

Solution de l'exercice 23 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même solution de l'équation donnée.
On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1 - x) = 1 + x$$

Ceci valant pour tout x réel, on obtient en remplaçant x par $1 - x$ pour x réel quelconque :

$$f(1 - x) + (1 - x)f(x) = 2 - x$$

En multipliant par x la deuxième relation et en faisant la différence des deux, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(1 - x + x^2) = 1 - x + x^2$$

Or le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $-3 < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 \neq 0$ d'où :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1)$$

Ainsi, si f est solution, elle est constante, égale à 1.

Synthèse : Réciproquement, on vérifie immédiatement que la fonction constante égale à 1 convient.
Ainsi, la seule solution est la fonction constante égale à 1.

Solution de l'exercice 24 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation donnée.
On se donne $y \in \mathbb{R}$ quelconque. En substituant $f(y)$ à x dans l'équation on obtient :

$$2f(f(y)) + f(y) + f(0) = y$$

et donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(f(y)) = \frac{y - f(y) - f(0)}{2}$$

Dès lors, en substituant cette fois 0 à x, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(0) + f(f(y)) = y$$

et en utilisant l'expression de f o f déterminée ci-dessus,

$$(\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(0) + \frac{y - f(y) - f(0)}{2} = y) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = -y + 3f(0))$$

Et en évaluant en $y = 0$, on obtient que $f(0) = 0$ soit que $f : x \mapsto -x$

Synthèse : Si $f : x \mapsto -x$ alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2f(x) + x + f(f(y) - x) = -2x + x - (-y - x) = y$$

Ainsi, la seule solution à l'équation donnée est $f : x \mapsto -x$

Solution de l'exercice 25 :
Supposons que $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$ soit racine de $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.
Alors,

$$a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \cdots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0 \implies q^n a_0 + q^{n-1} a_1 p + \cdots + q a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n = 0$$

où l'on a multiplié par q^n.

Alors,

$$-a_n p^n = q(q^{n-1} a_0 + q^{n-2} a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1})$$

donc $q| - a_n p^n$, or $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ donc $\mathrm{PGCD}(p^n, q) = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, $q|a_n$.
Or, on a aussi :

$$p(a_1 q^{n-1} + \cdots + q a_{n-1} p^{n-2} + a_n p^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Et par le même raisonnement, on en déduit que $p|a_0$.

Ainsi, une condition nécessaire pour que $\frac{p}{q}$, $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ soit racine d'un polynôme P à coefficients entiers non constant est que le numéraeur p divise son coefficient constant, et que le dénominateur q divise son coefficient dominant.

Ce critère nous permet de savoir rapidement si un polynôme a ou non des racines évidentes : considérons le polynôme $X^3 - 2X^2 + 7$. Si celui-ci avait une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (forme irréductible), alors q diviserait 1, i.e vaudrait -1 ou 1, et p diviserait 7, i.e vaudrait -7, 7, 1 ou -1 : les seules racines rationnelles possibles sont donc 7, -7, 1 ou -1 et on vérifie qu'elles ne sont pas racines du polynôme, on n'a donc pas besoin de chercher plus longtemps.

Répondons maintenant à la deuxième partie de l'exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que $\sqrt{n}$ est racine de $X^2 - n$: d'après le critère précédent, si $\sqrt{n}$ était rationnel, de la forme irréductible $\frac{p}{q}$, alors q diviserait 1, donc vaudrait 1 ou -1, donc $\sqrt{n}$ serait entier et n serait un carré parfait. Réciproquement, si n est un carré parfait, $\sqrt{n}$ est entier, donc rationnel.

Ainsi, tous les nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$ sont irrationnels.

Solution de l'exercice 26 :
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continue** vérifiant l'équation donnée.
On établit pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : f(n) = nf(1)$
En évaluant l'équation vérifiée par f en $x = 0$ et $y = 0$ on obtient $f(0) = 2f(0)$ i.e $f(0) = 0$: P_0 est vraie.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donnée. Alors d'après la relation vérifiée par f :

$$f(n+1) = f(n) + f(1)$$

Or par hypothèse de récurrence, $f(n) = nf(1)$ d'où :

$$f(n+1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$.

Étendons ce résultat à $\mathbb{Z}$: il est déjà vrai pour les entiers positifs, soit donc $-n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ un entier strictement négatif.
On remarque d'abord que f est impaire. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque et qu'on substitue à y la valeur $-x$ dans l'équation vérifiée par f alors on obtient :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 0 = f(x) + f(-x)) \implies (\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x))$$

Dès lors, $f(n) = nf(1)$ d'une part mais aussi, $f(n) = f(-(-n)) = -f(-n)$ donc $f(-n) = -nf(1)$: on a bien étendu le résultat aux entiers strictement négatifs.

Étendons maintenant le résultat à $\mathbb{Q}$. Soit $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
Comme on l'a montré ci-dessus, on a d'une part $f(qr) = qf(r)$.
Mais, $f(qr) = f(p) = pf(1)$ toujours d'après ce que l'on a déjà montré. Ainsi, $qf(r) = pf(1)$ c'est-à-dire $f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$: on a bien étendu le résultat à $\mathbb{Q}$.

Étendons maintenant le résultat à $\mathbb{R}$ tout entier : soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\exists (q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \ \lim_{n\to\infty} q_n = x$$

D'après ce que l'on a montré, $\forall n \in \mathbb{N}, \ f(q_n) = q_n f(1)$ car (q_n) est à valeurs rationnelles.
Or, par continuité de f et puisque $q_n \to x$:

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(x)$$

D'où en passant à la limite, on obtient $f(x) = xf(1)$ et ce quelque soit le réel x considéré.
Ainsi, f est linéaire.

Synthèse : Réciproquement, on a déjà vérifié dans la synthèse de l'exercice 19 que les fonction linéaires vérifiaient bien la relation voulue, celles-ci sont continues.
Ainsi, les solutions de cette équation fonctionnelle sont les fonctions linéaires.

Le lecteur ou la lectrice ayant des notions d'algèbre générale aura sûrement remarqué que nous venons de déterminer l'ensemble des *morphismes de groupe continus* de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

Solution de l'exercice 27 :
On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : u_n = u_0 + nr$.
On a bien $u_0 = u_0 + 0 \times r$ d'où P_0.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.
Alors, $u_{n+1} = u_n + r$ par définition de u, mais $u_n = u_0 + nr$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$: P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{R}, \ u_n = u_0 + nr$.

On aurait pu se forger l'intuition de ce résultat en « descendant » de la façon suivante : on sait que $u_n = u_{n-1} + r$, mais $u_{n-1} = u_{n-2} + r$ donc $u_n = u_{n-2} + 2r$, et on continue ainsi de « descendre » jusqu'à u_0. Attention, ceci ne constitue pas une preuve, il faut nécessairement formuler proprement son raisonnement par récurrence. De plus, pour éviter de s'embrouiller et de se tromper dans les indices, il est bon d'identifier une quantité qui ne varie pas : lorsque l'on écrit $u_n = u_j + lr$, on remarque qu'à chaque fois que l'on décrémente j, on incrémente l : la quantité $l + r$ est donc constante et vaut n. Ainsi, à la fin, lorsque $j = 0$, l vaut n, et pas $n+1$ ou $n-1$ par exemple.

Solution de l'exercice 28 :

On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : u_n = q^n u_0$.
On a bien $u_0 = q^0 u_0$ d'où P_0.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors, par définition de u, $u_{n+1} = q u_n$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n = q^n u_0$, d'où $u_{n+1} = q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0$: P_{n+1} est vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.

Solution de l'exercice 29 :

Tout d'abord, la solution l de l'équation $x = ax + b$ est naturellement $l = \frac{b}{1-a}$ (on peut diviser par $1-a$ car a est différent de 1). Mais nous n'allons pas remplacer l par sa valeur tout de suite et simplement nous servir de la relation $l = al + b$.
Pour montrer que $(u_n - l)$ est géométrique, calculons $u_{n+1} - l$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$u_{n+1} - l = au_n + b - l = au_n + b - (al + b) = a(u_n - l)$$

La deuxième égalité provenant de la relation $l = al + b$.
Ainsi, $(u_n - l)$ est géométrique de raison a. D'après l'exercice précédent, on sait en exprimer explicitement le terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - l = a^n (u_0 - l)$$

On en déduit ainsi l'expression de u_n en fonction de n, u_0, a, b en remplaçant l par sa valeur :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

On sait maintenant exprimer explicitement le terme général de suites arithmético-géométriques !

Solution de l'exercice 30 :

On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : f(n) \geq n$.
f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc est à valeurs positives, donc $f(0) \geq 0$: P_0 est vraie.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.
f étant strictement croissante, $f(n+1) > f(n)$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $f(n) \geq n$, donc $f(n+1) > n$.
Or f est à valeurs entières, donc $f(n+1)$ est un entier strictement supérieur à n : il est donc au moins égal à $n+1$, donc $f(n+1) \geq n+1$.
Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Dès lors, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n$.

Solution de l'exercice 31 :

On établit pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Il est immédiat que P_0 est vraie, les deux membres de l'égalité étant nuls quand n l'est.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Or,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Et en remarquant que :

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

et donc P_{n+1} est vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On établit maintenant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

De même, P_0 est clairement vraie (les deux membres sont nuls quand $n = 0$).
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.
Alors,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Or,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Solution de l'exercice 32 :

On peut calculer rapidement les premiers termes : $u_1 = u_0^2$, $u_2 = u_1^2 = (u_0^2)^2 = u_0^4$, $u_3 = u_2^2 = u_0^8$.
Cela nous amène à établir pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : $u_n = u_0^{2^n}$
On a $u_0 = u_0^{2^0}$ donc P_0 est vraie.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors,

$$u_{n+1} = u_n^2 = (u_0^{2^n})^2 = u_0^{2^{n+1}}$$

d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{2^n}$$

Solution de l'exercice 33 :
On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n :

$$\frac{3n}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Pour $n = 1$, on a clairement $\frac{3\times 1}{2\times 1+1} = 1 \leq 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$ d'où P_1.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\frac{3n}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

d'où :

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3(n+1)}{2n+3}$$

et :

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Cette dernière inégalité est équivalente à :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

qui est clairement vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Après mise au même dénominateur, la première inégalité est équivalente à :

$$3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - 3(n+1)^3(2n+1) \geq 0$$

Or le membre de gauche vaut :

$$3(n+1)^2(n(2n+3)-(n+1)(2n+1))+(2n+1)(2n+3) = 3(n+1)^2(2n^2+3n-2n^2-3n-1)+(2n+1)(2n+3)$$

$$= (2n+1)(2n+3) - 3(n+1)^2 = n^2 + 2n$$

qui est clairement positif pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\frac{3(n+1)}{2n+3} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

d'où P_{n+1}.
En conclusion, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3n}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Solution de l'exercice 34 :
On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$
On a clairement $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(0 \times x)| = 0 \leq 0 \times |\sin(x)| = 0$ d'où P_0.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné.
On sait que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)|$$

Or par inégalité triangulaire, ceci est inférieur à :

$$|\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)|$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.
En majorant $|\cos(x)|$ et $|\cos(nx)|$ par 1 ci-dessus, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin((n+1)x)| \leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$$

D'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Solution de l'exercice 35 :
Détaillons le raisonnement au brouillon qui va nous amener à poser la bonne hypothèse de récurrence.
On commence par calculer les dérivées successives de ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)''(x) = \frac{-1}{x^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Il semblerait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists u_n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}u_n}{x^n}$$

Manifestement, $u_1 = 1$. Si n est un entier naturel non nul quelconque on a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+2}u_{n+1}}{x^{n+1}}$$

mais aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n+1)}(x) = ((\ln)^{(n)})'(x) = \frac{(-1)^{n+2}nu_n}{x^{n+1}}$$

(on a dérivé l'expression de $\ln^{(n)}$ conjecturée).
Ainsi, (u_n) vérifierait $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}*,\ u_{n+1} = nu_n$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (n-1)\,!$.

Dès lors, on établit pour $n \geq 1$ la propriété P_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)\,!}{x^n}$$

D'après les calculs du début, P_1 est vraie.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n+1)}(x) = \frac{-(-1)^{n+1}(n-1)\,!n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2}n\,!}{x^{n+1}}$$

d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)\,!}{x^n}$$

Solution de l'exercice 36 :
On raisonne par récurrence en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$$

d'où P_0.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence dans la dernière égalité.
Mais :

$$(x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

En effectuant un changement de variable $j = k+1$ dans la somme de gauche et en isolant le dernier terme, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k}$$

De plus, en isolant le premier terme de la somme de droite :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

d'où :

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k y^{n+1-k} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

où l'on a utilisé la formule de Pascal rappelée en pré-requis à l'avant-dernière égalité.
Ainsi, P_{n+1} est vraie.
En conclusion, d'après le principe de récurrence,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Pour la culture, citons son analogue pour la dérivation des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, appelée *formule de Leibniz*, qui peut se prouver de la même manière :

$$\text{Pour toutes fonctions de classe } \mathscr{C}^n,\ (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Solution de l'exercice 37 :
Notons que f est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + cx^2 > 0$ car $c > 0$.
Pour se donner une idée de la formule à conjecturer, calculons f o f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \text{ o } f(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + cf(x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + c\frac{x^2}{1+cx^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}} \times \sqrt{\frac{1+cx^2}{1+2cx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}$$

On est alors naturellement amené à établir pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Par convention, f^0 est l'identité, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^0(x) = x = \frac{x}{\sqrt{1+0\times cx^2}}$$

d'où P_0.
Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = \frac{f^n(x)}{\sqrt{1+cf^n(x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+c\frac{x^2}{1+ncx^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}} \times \frac{\sqrt{1+ncx^2}}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}$$

d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Solution de l'exercice 38 :

On raisonne par récurrence (double) en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : $u_n = 2^n + 3^n$
$2^0 + 3^0 = 2 = u_0$ donc P_0 est vraie.
$2^1 + 3^1 = 5 = u_1$ donc P_1 est vraie.
Supposons P_n et P_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n)$$

$$= 2^n(10-6) + 3^n(15-6) = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

d'où P_{n+2}.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Solution de l'exercice 39 :

On raisonne par récurrence (double) en établissant pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : $u_n = 2^{n+1} - 1$
$2^{0+1} - 1 = 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
$2^{1+1} - 1 = 3 = u_1$ donc P_1 est vraie.
Supposons P_n et P_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}(6-2) - 1 = 2^{n+3} - 1$$

d'où P_{n+2}.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} - 1$.

Solution de l'exercice 40 :
On raisonne par l'absurde en supposant que $\{i \in [\![n, m]\!],\ \neg P_i\}$ est non vide, notons i_0 son plus petit élément (il existe car c'est un ensemble d'entiers). Alors, $i_0 > n$ car P_n est vraie, donc $i_0 - 1 \in [\![n, m-1]\!]$. Par minimalité de i_0, P_{i_0-1} est nécessairement vraie, mais alors P_{i_0} aussi car $P_{i_0-1} \implies P_{i_0}$: c'est absurde.
Ainsi, $\forall k \in [\![n, m]\!],\ P_k$ est vraie.

Solution de l'exercice 41 :
Notons $\Delta_n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculons Δ_n pour quelques valeurs de n :

$$\Delta_1 = F_0F_2 - F_1^2 = 0 \times 2 - 1 = -1$$

$$\Delta_2 = F_1F_3 - F_2^2 = 1 \times 2 - 1 = 1$$

$$\Delta_3 = F_2F_4 - F_3^2 = 1 \times 3 - 4 = -1$$

Il semblerait que $(\Delta_n) = ((-1)^n)$ ce qui impliquerait que $(\Delta_{n+1}) = (-\Delta_n)$. Essayons de le montrer. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+1} = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2$$

On veut faire apparaître Δ_n, donc faire apparaître $F_{n-1}F_n$ et F_n^2. On va donc remplacer F_{n+2} par $F_{n+1} + F_n$ pour faire apparaître F_n^2, puis F_n par $F_{n+1} - F_{n-1}$ pour apparaître $F_{n-1}F_n$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+1} &= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= -\Delta_n\end{aligned}$$

Ainsi, (Δ_n) est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme -1, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = (-1)^n$.
Dès lors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{k+1}}{F_kF_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2}{F_kF_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right) = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - 1\end{aligned}$$

Or comme vu dans le cours, en notant $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}} = \frac{\varphi^{n+2} - \tilde{\varphi}^{n+2}}{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}} - 1 = \frac{\varphi - \frac{\tilde{\varphi}^{n+2}}{\varphi^{n+1}}}{1 - \frac{\tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^{n+1}}} - 1$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^n = 0 \text{ car } |\tilde{\varphi}| < 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \varphi^n = +\infty$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}}\right) = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Solution de l'exercice 42 :
On établit pour $m \in [\![2, N]\!]$ la propriété P_m :

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\dots\sqrt{N}}}} < m+1$$

que l'on va démontrer par récurrence descendante.
Si $m = N$, il s'agit de montrer que $\sqrt{N} < N+1$, ce qui est équivalent à $N < N^2 + 2N + 1$ ou encore à $N^2 + N + 1 > 0$ ce qui est évidemment vrai. Ainsi, P_N est vraie.
Supposons P_m pour $m \in [\![3, N]\!]$ et montrons que P_{m-1} est vraie. On a :

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\dots\sqrt{N}}}} < m+1$$

donc :

$$\sqrt{(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\dots\sqrt{N}}}}} < \sqrt{(m-1)(m+1)}$$

Il suffit donc de montrer que $\sqrt{(m-1)(m+1)} \leq m$ ce qui est équivalent à $m^2 - 1 \leq m^2$, inégalité qui est clairement vraie.
Dès lors :

$$\sqrt{(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\dots\sqrt{N}}}}} < \sqrt{(m-1)(m+1)} \leq m$$

d'où P_{m-1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence (descendante), la propriété est vraie pour tout $m \in [\![2, N]\!]$. En particulier, pour $m = 2$, on obtient :

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots\sqrt{N}}}} < 3$$

Il aurait été plus compliqué de montrer ce résultat par une récurrence sur N. Ici, la bonne idée était pour obtenir ce résultat était bien de montrer la première proposition, plus forte mais plus simple à démontrer !

Solution de l'exercice 43 :
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \in E$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) = \alpha(a\lambda^{n+1} + b\lambda^n) + \beta(a\mu^{n+1} + b\mu^n)$$

Or, λ et μ sont solutions de $x^2 = ax + b$ donc solutions de $x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n$ après multiplication par x^n pour $n \in \mathbb{N}$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) = \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}$$

ce qui prouve que $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \in E$ et ce quelque soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que E est inclus dans l'ensemble des suites de la forme $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)$. Soit $u \in E$. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu$. Pourquoi donc ? Car cela nous permettra d'initialiser notre récurrence double (u_0 et u_1 seront déjà de la forme $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n$).
On est amené à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
On a :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{u_1 - \mu u_0}{\lambda - \mu} \\ \beta = \frac{\lambda u_0 - \mu}{\lambda - \mu} \end{cases}$$

On peut diviser par $\lambda - \mu$ car $\lambda \neq \mu$ par hypothèse.
Ainsi, de tels α, β existent. Montrons alors par récurrence (double) la propriété P_n définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

$u_0 = \alpha + \beta = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ d'où P_0.
$u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ d'où P_1.
Supposons P_n et P_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Puisque $u \in E$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) = \alpha(a\lambda^{n+1} + b\lambda^n) + \beta(a\mu^{n+1} + b\mu^n)$$
$$= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}$$

d'où P_{n+2}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

Et en conclusion, on a bien montré par double inclusion que $E = \{(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solution de l'exercice 44 :
Montrons déjà que les suites de la forme $((\alpha + \beta n)\lambda^n)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sont dans E.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b(\alpha + \beta n)\lambda^n + a(\alpha + \beta(n+1))\lambda^{n+1} = \alpha(a\lambda^{n+1} + b\lambda^n) + \beta(bn\lambda^n + a(n+1)\lambda^{n+1})$$
$$= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n(b\lambda^n + a\lambda^{n+1}) + a\lambda^{n+1}) = \alpha\lambda^{n+2} + \beta n\lambda^{n+2} + \beta a\lambda^{n+1}$$

Toutes ces égalités étant conséquence du fait que $\lambda^2 = a\lambda + b$ donc $\lambda^{n+2} = a\lambda^n + b$.
Or, λ est racine double de $X^2 - aX - b$ donc $\lambda = \frac{a}{2}$ donc $a\lambda^{n+1} = \frac{a^{n+2}}{2^{n+1}} = 2\lambda^{n+2}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b(\alpha + \beta n)\lambda^n + a(\alpha + \beta(n+1))\lambda^{n+1} = \alpha\lambda^{n+2} + \beta n\lambda^{n+2} + 2\beta\lambda^{n+2} = (\alpha + (n+2)\beta)\lambda^{n+2}$$

ce qui prouve que $((\alpha+\beta n)\lambda^n) \in E$.

Montrons que réciproquement, toutes les suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ sont de la forme $((\alpha+\beta n)\lambda^n)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit u une suite vérifiant une telle relation de récurrence.
On s'inspire de l'exercice précédent en cherchant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = (\alpha+\beta)\lambda$ (les chercher de cette manière permettra d'initialiser la récurrence double), ce qui nous invite immédiatement à poser $\alpha = u_0$ et $\beta = \frac{u_1}{\lambda} - \alpha$ (on peut car $\lambda \neq 0$).

On établit maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P_n : u_n = (\alpha+\beta n)\lambda^n$
Par construction de α et β, P_0 et P_1 sont vraies.
Supposons P_n et P_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = a(\alpha+\beta(n+1))\lambda^{n+1} + b(\alpha+\beta n)\lambda^n = (\alpha+(n+2)\beta)\lambda^{n+2}$$

d'après les calculs précédents. Ainsi, P_{n+2} est vraie.
Dès lors, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha+\beta n)\lambda^n$$

On a ainsi montré que si $X^2 - aX - b$ a une racine double non nulle, l'ensemble des suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est exactement $\{((\alpha+\beta n)\lambda^n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solution de l'exercice 45 :
Montrons que si $n \in \mathbb{N}$ s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$ avec les ε_k dans $\{0;1\}$ alors cette somme est finie.
Notons m un entier naturel tel que $2^m > n$ (existe car $2^m \to \infty$). Alors, $\forall i \geq m,\ \varepsilon_i = 0$ car s'il existait $k \geq m$ tel que $\varepsilon_k = 1$ alors on aurait :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k \geq 2^i \geq 2^m > n$$

ce qui est absurde.
Ainsi, cette somme est finie.

Commençons par l'unicité d'une telle suite. Supposons que n s'écrive :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^k$$

et montrons que $(\varepsilon_k) = (\tilde{\varepsilon}_k)$.
Supposons le contraire et notons p le plus petit indice tel que $\varepsilon_p \neq \tilde{\varepsilon}_p$ (celui-ci existe car alors l'ensemble des indices k tels que $\varepsilon_k \neq \tilde{\varepsilon}_k$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$).
On a alors après simplification des termes en commun :

$$\sum_{k=p}^{\infty} \varepsilon_k 2^k = \sum_{k=p}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^k$$

c'est-à-dire, en divisant par 2^{p+1} :

$$\frac{\varepsilon_p}{2} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{k-p-1} = \frac{\tilde{\varepsilon}_p}{2} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^{k-p-1}$$

Or le terme de droite de chaque côté de l'égalité est entier, tandis que le terme de gauche est plus petit que $\frac{1}{2}$. On en déduit qu'en prenant la partie entière on obtient :

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{k-p-1} = \sum_{k=p+1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^{k-p-1}$$

et donc :

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{k} = \sum_{k=p+1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^{k}$$

d'où en revenant à l'égalité de départ :

$$\varepsilon_p = \tilde{\varepsilon}_p$$

c'est absurde.
Ainsi, $(\varepsilon_k) = (\tilde{\varepsilon}_k)$ et une telle écriture est unique.

Occupons-nous maintenant de l'existence.
On établit pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\exists (\varepsilon_k) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}},\ n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$$

que l'on va démontrer par récurrence (forte).
Pour $n = 0$, il suffit de considérer $(\varepsilon_k) = (0)$ (la suite identiquement nulle). Ainsi, P_0 est vraie.
Pour les besoins de notre récurrence (voir ci-après) on a besoin d'initialiser jusqu'à 1 : pour $n = 1$, la suite (ε_k) définie par $\varepsilon_0 = 1$ et $\forall k \geq 1,\ \varepsilon_k = 0$ convient, d'où P_1.
Supposons $P_0, \ldots, P_n$ vraies pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.
On distingue selon la parité de n.
Si n est pair : d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\exists (\varepsilon_k) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}},\ n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$$

mais puisque n est pair, $\varepsilon_0 = 0$. En considérant la suite $(\tilde{\varepsilon}_k)$ définie par $\tilde{\varepsilon}_0 = 1$ et $\forall k \geq 1,\ \tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k$ on obtient :

$$n + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k 2^k$$

d'où P_{n+1}.
Si n est impair, $n + 1$ est pair. On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence à $\frac{n+1}{2}$ mais il faut s'assurer que $\frac{n+1}{2} \leq n$ et donc que $n \geq 1$: c'est pour cela que l'on a initialisé jusqu'à 1 !
On applique l'hypothèse de récurrence à $\frac{n+1}{2}$:

$$(\varepsilon_k) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}},\ \frac{n+1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$$

et donc :

$$n + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k-1} 2^k$$

et donc en posant $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$ et $\forall k \geq 1,\ \tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_{k-1}$, la suite $(\tilde{\varepsilon}_k)$ convient, d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (\varepsilon_k) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}},\ n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$$

Solution de l'exercice 46 :
On établit pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k$$

Par hypothèse, on sait que $u_0 = \binom{0}{0} = v_0$ donc on a bien $v_0 = (-1)^0 \times (-1)^0 \binom{0}{0} u_0 = u_0$: P_0 est vraie.
Supposons $P_0, \ldots, P_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} u_k = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} v_j = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} v_j$$

par définition de u.
Suivons notre instinct légendaire et intervertissons les deux sommes :

$$(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} u_k = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=j}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} v_j$$

On se retrouve bloqué car la deuxième somme porte sur k mais un des termes est $\binom{k}{j}$, on ne sait pas trop faire pour sommer des coefficients binomiaux quand c'est l'indice du haut qui varie. Faisons-le disparaître pour faire apparaître du $\binom{n+1-j}{k-j}$ ce qui arrangera bien le calcul de la somme de droite après changement d'indice $l = k - j$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} &= \frac{(n+1)\,!}{k\,!(n+1-k)\,!} \times \frac{k\,!}{j\,!(k-j)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{j\,!(n+1-j)\,!} \times \frac{(n+1-j)\,!}{(k-j)\,!(n+1-j-(k-j)\,!} \\ &= \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} \end{aligned}$$

et donc :

$$(-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=j}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} v_j = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} v_j \sum_{k=j}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1-j}{k-j}$$

En effectuant le changement d'indice $l = k - j$,

$$(-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} v_j \sum_{k=j}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1-j}{k-j} = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} v_j \sum_{l=0}^{n+1-j} (-1)^{l+j} \binom{n+1-j}{l}$$

$$= (-1)^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}v_j\sum_{l=0}^{n+1-j}(-1)^l\binom{n+1-j}{l}$$

Or d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{l=0}^{n+1-j}(-1)^l\binom{n+1-j}{l} = (1-1)^{n+1-j}$$

qui vaut 0 si $j \neq n+1$ et 1 sinon.
Ainsi, il ne reste que :

$$(-1)^{n+1}\times(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}v_{n+1} = v_{n+1}$$

et donc :

$$(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}u_k = v_{n+1}$$

d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_k$$

Solution de l'exercice 47 :
En approchant l'exercice, on constate que la proposition porte sur « deux variables » p et q. On se demande alors quelle récurrence faire pour « regrouper les deux ». On pourrait noter la propriété $P_{p,q}$ et essayer de montrer que $P_{p,q}$ implique $P_{p+1,q}$ et $P_{p,q+1}$ (montrer que c'est licite !), ou on pourrait raisonner par récurrence sur la valeur $p+q$ (on invite le lecteur ou la lectrice à s'essayer à ces méthodes), ou alors se débarrasser de la « dépendance en q » en l'incluant directement dans la propriété à démontrer, en énonçant la propriété Q_p :

$$\forall q\in\mathbb{N},\ F_pF_{q+1}+F_{p-1}F_q = F_{p+q}$$

On a bien $\forall q\in\mathbb{N},\ F_1F_{q+1}+F_0F_q = 1\times F_{q+1}+0\times F_q = F_{q+1}$ d'où Q_1.
Supposons Q_p pour $p\in\mathbb{N}^*$ donné. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\forall q\in\mathbb{N},\ F_pF_{q+1}+F_{p-1}F_q = F_{p+q}$$

et on aimerait montrer que :

$$\forall q\in\mathbb{N},\ F_{p+1}F_{q+1}+F_pF_q = F_{p+1+q}$$

La première propriété étant vraie quelque soit $q\in\mathbb{N}$, on peut se donner $q\in\mathbb{N}$ quelconque et l'appliquer à $q+1$. On obtient :

$$F_{p+(q+1)} = F_{p+1+q} = F_pF_{q+2}+F_{p-1}F_{q+1}$$

Reste à faire disparaître ce que l'on ne veut pas et apparaître ce que l'on veut en utilisant que $F_{q+2} = F_{q+1}+F_q$ et $F_{p-1} = F_{p+1}-F_p$:

$$F_{p+1+q} = F_p(F_{q+1}+F_q)+(F_{p+1}-F_p)F_{q+1} = F_pF_q+F_{p+1}F_{q+1}$$

d'où Q_{p+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall q \in \mathbb{N},\ F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_{p+q}$$

Solution de l'exercice 48 :
Lorsque l'on approche l'exercice au brouillon, on sent que la parité de n va être un problème. En effet, si on écrit $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair, alors $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$.
Puisque q_n est pair, $(n+1)q_n$ l'est. Cependant, le numérateur a la parité de $n+1$, car p_n est impair : on sent donc que l'on va devoir raisonner sur la parité de n au sein de la récurrence.

On établit pour $n \geq 2$ la propriété P_n :

$$\exists p_n, q_n \in \mathbb{N},\ p_n \text{ impair},\ q_n \text{ pair},\ H_n = \frac{p_n}{q_n},\ \text{PGCD}(p_n, q_n) = 1$$

Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$: P_2 est vraie.
Supposons $P_2, \ldots, P_n$ pour $n \geq 2$ donné. Suivant notre remarque préambule, on distingue la parité de n.
Si n est pair : on a vu que $H_{n+1} = \frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$ avec le numérateur impair et le dénominateur pair. Pour conclure que dans ce cas P_{n+1} est vraie, il faut encore que cette fraction soit sous forme irréductible. Le seul problème serait que le dénominateur ou le numérateur change de parité après division par le PGCD de ces deux nombres (i.e la mise sous forme irréductible). Or puisqu'ils sont de partié opposée, leur PGCD est impair, et donc la parité de ces deux nombres ne change pas après division par leur PGCD (si m s'écrit kl avec k impair alors m a la parité de l).
Ainsi, dans ce cas P_{n+1} est vraie.
Supposons n impair et écrivons le sous la forme $2k+1$. Cette fois, c'est un peu plus compliqué. L'idée est de séparer indices pairs et impairs dans la somme définissant H_{n+1} de manière à faire apparaître d'une part une fraction dont le dénominateur est impair comme produit d'impairs, et d'utiliser l'hypothèse de récurrence d'autre part (ce travail étant fait au brouillon, on aura au préalable remarqué la nécessité de poser une récurrence forte). On a :

$$H_{n+1} = H_{2k+2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k+2} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k+1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+2}\right)$$

En factorisant par $\frac{1}{2}$ la somme de droite, on remarque qu'il apparaît $H_{k+1} = H_{\frac{n+1}{2}}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{H_{k+1}}{2} = \frac{H_{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire H_{k+1} comme une fraction $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ qui convient.
D'autre part, si on met sur le même dénominateur la somme de gauche, on obtient une fraction de la forme $\frac{A}{B}$ avec B impair comme produit d'impairs. Dès lors,

$$H_{n+1} = \frac{A \times 2q_{k+1} + Bp_{k+1}}{2Bq_{k+1}}$$

Le numérateur a la parité de Bp_{k+1} qui est impair comme produit d'impair, le dénominateur est pair. En vertu de la remarque qui précède, la parité du numérateur et du dénominateur ne change pas après mise sous forme irréductible, d'où P_{n+1} dans ce cas.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

Solution de l'exercice 49 :
On remarque que la proposition se prouve bien par récurrence forte à condition que l'on « revienne en arrière » en itérant f : partons d'une valeur $n \in \mathbb{N}$ et supposons que pour toutes les valeurs strictement inférieures à n on retombe sur 1 ou 5 après un nombre suffisant de compositions par f. Alors, si au bout de m compositions de n par f on arrive sur un nombre strictement inférieur à n, on sait qu'après un nombre suffisant de compositions de ce nombre par f, disons k, on retombe sur 1 ou 5 : alors, après $m+k$ compositions de n par f on retombe sur 1 ou 5.
On remarque que si n est pair, on revient immédiatement en arrière après une itération par f, puisque $f(n) = \frac{n}{2} < n$ pour $n \geq 1$.
Si n est impair, alors $f(n) = n+5$: on ne revient pas en arrière. Cependant, $n+5$ est impair, et donc $f(f(n)) = \frac{n+5}{2}$. Sommes-nous revenus en arrière ? Pour le savoir, il suffit de résoudre l'inéquation $\frac{n+5}{2} < n$, qui est vérifiée pour tout $n \geq 6$. Ainsi, notre raisonnement par récurrence forte ne sera applicable qu'à partir de $n = 6$, on va donc devoir initialiser jusqu'à 6.

On établit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ f^k(n) \in \{1; 5\}$$

Pour $n = 1$: $f(1) = 6$, $f(f(1)) = 3$, $f(f(f(1))) = 8 = 2^3$ et donc on en déduit que $f^6(1) = 1$: P_1 est vraie.
Pour $n = 2$: $f(2) = 1$: P_2 est vraie.
Pour $n = 3$: $f(3) = 8 = 2^3$ donc $f^4(3) = 1$: P_3 est vraie.
Pour $n = 4$: $f^2(4) = 1$: P_4 est vraie.
Pour $n = 5$: $f^2(5) = 5$: P_5 est vraie.
Pour $n = 6$: $f(6) = 3$ donc avec les calculs précédents, $f^5(6) = 1$: P_6 est vraie.
Supposons $P_1, \ldots, P_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.
Si n est impair, $f(n+1) = \frac{n+1}{2} \leq n$ (car $n \geq 1$) donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f^k\left(\frac{n+1}{2}\right) = f^k(f(n+1)) = f^{k+1}(n+1) \in \{1; 5\}$$

donc P_{n+1} est vraie.
Si n est pair, alors si $n \leq 5$ on sait que P_{n+1} est vraie. Sinon, $n+1 \geq 6$ donc $f(f(n+1)) < n+1$ donc $f(f(n+1)) \leq n$ donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(f(f(n+1))) = f^{k+2}(n+1) \in \{1; 5\}$$

d'où P_{n+1}.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 50 :
Inspirons-nous de l'exercice 45 en établissant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$$

mais réécrivons immédiatement cette dernière somme :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^{k}$$

Pour $n = 1$:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{1-1} k^p = 0$$

car $p \geq 1$, et :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} = \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{1} B_p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=2}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k}$$

$$= B_p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} B_j$$

après changement d'indice $j = p + 1 - k$.
Par définition des nombres de Bernoulli, on obtient bien 0 : P_1 est vraie.
Supposons P_n pour $n \geq 1$ donné. Par hypothèse,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} n^{k}$$

On va se servir du fait que cette propriété soit valable **pour tout** $p \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} (n+1)^{k}$$

où p est un entier naturel non nul quelconque que l'on se donne.
Il va y avoir pas mal de calcul, l'important est d'être organisé. Calculons :

$$\frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} (n+1)^{k} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j$$

On a envie d'intervertir les sommes, pour cela on isole le premier terme de la somme de droite de sorte que les valeurs de départ des indices soient les mêmes :

$$\frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k} \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^j\right)$$

puis on sépare :

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k} + \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}n^j$$

D'après P_0, la somme de gauche est nulle. D'après les calculs menés dans l'exercice 44,

$$\binom{p+1}{k}\binom{k}{j} = \binom{p+1}{j}\binom{p+1-j}{k-j}$$

d'où :

$$\frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}n^j = \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{k=j}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k}\binom{k}{j}n^j$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{k=j}^{p+1}\binom{p+1}{j}\binom{p+1-j}{k-j}B_{p+1-k}n^j = \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^j\sum_{k=j}^{p+1}\binom{p+1-j}{k-j}B_{p+1-k}$$

puis après changement d'indice et isolement du premier terme de la somme de droite :

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^j\sum_{k=0}^{p-j+1}\binom{p+1-j}{k}B_{p-j+1-k}$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^j\left(B_{p-j+1} + \sum_{k=1}^{p-j+1}\binom{p+1-j}{k}B_{p-j+1-k}\right)$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^jB_{p+1-j} + \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^j\sum_{k=1}^{p-j+1}\binom{p+1-j}{k}B_{p-j+1-k}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}n^jB_{p+1-j} = \sum_{k=0}^{n-1}k^p$$

Intéressons-nous maintenant au terme de droite. Dans la somme de droite, si $p-j \neq 0$ on peut substituer $p-j$ à p (car la propriété est valable pour tout p non nul et on reconnaît le cas particulier $n=1$) et obtenir que :

$$\forall j \in [\![1; p+1]\!],\ j \neq p,\quad \sum_{k=1}^{p+1-j}\binom{p+1-j}{k}B_{p+1-j-k} = \frac{1}{p-j+1}\sum_{k=0}^{1-1}k^p = 0$$

car $p \geq 1$. Ainsi, seul le terme correspondant à $j=p$ n'est pas nul, il vaut :

$$\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{p}n^pB_0 = n^p$$

d'où :

$$\frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k}(n+1)^k = \sum_{k=0}^{n-1}k^p + n^p = \sum_{k=0}^{n}k^p$$

d'où P_{n+1} (enfin !).
Ainsi, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}B_{p+1-k}n^k$$