Corrigés des exercices

Exercice 1

1. On a $f_n(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1[$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   D'autre part $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ et pour $x \in]1, 2]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   En effet pour tout $x \in]1, 2]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 2]$ vers $f : \begin{cases} [0,2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1,2] \end{cases} \end{cases}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont continues sur $[0, 2]$ mais f est discontinue sur $[0, 2]$.

Exercice 2

1. $f_n(0) = 0$ et si $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = n^2x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$.

2. $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 n^2x^n\mathrm{d}x = n^2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

   Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f_n(0) = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\,\mathrm{d}x$ ne présente aucun problème en 0.

   Au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\,\mathrm{d}x$ converge également d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\,\mathrm{d}x$ converge.

3. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\left[e^{-x\sqrt{n}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\,\mathrm{d}x = 0$.

   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.