

Contrôle TD 3

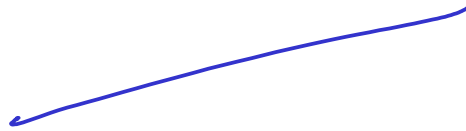
Nom :

Prénom :

Classe :

Questions de cours

1. Soit f continue sur $]a, b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et non définie en a et b . Soit $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t) dt$ diverge. Que peut-on en déduire quant à la nature de $\int_a^b f(t) dt$? Justifiez rigoureusement votre réponse.



2. Soient E un \mathbb{R} -ev et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelez les définitions précises avec les quantificateurs de φ positive et φ définie.

φ positive : $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$

φ définie : $\forall u \in E, \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$

Exercice 1

1. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$.

Soit $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}$. f est continue sur $]0, +\infty[$

* I_1 : Borne impropre $+\infty$. En $+\infty$, $|f(t)| \sim \frac{1}{t^{5/2}} = \frac{1}{t^{5/2}} > 0$ (signe constant)

Donc I_1 a la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{5/2}} dt$ qui converge ($5/2 > 1$)

* I_2 : Bornes impropres 0 et $+\infty$. Et I_1 converge.

En 0, $|f(t)| \sim \frac{1}{t^{1/2}} > 0$ donc $\int_0^1 f(t) dt$ a la nature de $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$ (CV)

Donc I_2 converge.

2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ et de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

I_1 : La fonction $t \mapsto 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{2t^2} > 0$.

Donc I_1 a la nature de $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ qui converge

I_2 : La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0, 1]$.

$\forall t \in]0, 1], \left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leq 1$ et $\int_0^1 1 dt$ converge. Donc

$\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| dt$ converge et I_2 converge absolument

donc converge.

Exercice 2

Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$. Via le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer I .

* Bornes pour u : $\sqrt{1} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty$

* $t = u^2 \Rightarrow \frac{dt}{du} = 2u \Rightarrow dt = 2u du$

* $I = \int_1^{+\infty} \frac{2u du}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_1^{+\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du$

Donc $I = 2 \left[\arctan(u) \right]_1^{+\infty} = 2 \left(\underbrace{\lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan(u)}_{\pi/2} - \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} \right)$
 $= \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

Déterminer, via une intégration par parties, la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$. $= I$

Posons $\begin{cases} u = \ln(x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$

On obtient $I = \left[x \ln(x) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dx$

Avec $\left[x \ln(x) \right]_0^1 = \underbrace{1 \ln(1)}_0 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)}_0 = 0$

D'où $I = - \int_0^1 1 dx = - \left[x \right]_0^1 = -1$.

