Exercices

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,2]$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,2]$. Préciser la limite simple éventuelle f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,2]$.
2. Que remarquez-vous du point de vue de la continuité ?

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$ par

$$f_n(x) = n^2 x^n$$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1[$.
2. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
3. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?