Contrôle TD 3

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Questions de cours

1. Soit f continue sur $]a,b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$)et non définie en a et b. Soit $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ diverge. Que peut-on en déduire quant à la nature de $\int_a^b f(t)\,dt$? Justifiez rigoureusement votre réponse.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappelez les définitions précises avec les quantificateurs de φ positive et φ définie.

φ positive : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geqslant 0$

φ définie : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u)=0 \Rightarrow u = 0_E$

Exercice 1

1. Déterminer la nature de $\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt}_{I_1}$ et de $\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt}_{I_2}$.

Soit $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}$. f est continue sur $]0,+\infty[$

* I_1 : Borne impropre $+\infty$. En $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}\,t^2} = \frac{1}{t^{5/2}} \geqslant 0$ (signe constant)

Donc I_1 a la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{5/2}}\,dt$ qui converge ($5/2 > 1$)

* I_2 : Bornes impropres 0 et $+\infty$. Et I_1 converge.

En 0, $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ a la nature de $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ (CV)

Donc I_2 converge.

2. Déterminer la nature de $\underbrace{\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt}_{I_1}$ et de $\underbrace{\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}_{I_2}$.

I_1 : La fonction $t \longmapsto 1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$.

En $+\infty$, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{2t^2} \geqslant 0$.

Donc I_2 a la nature de $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ qui converge

I_2 : La fonction $t \longmapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall t \in]0,1]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leqslant 1$ et $\int_0^1 1\,dt$ converge. Donc $\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| dt$ converge et I_2 converge absolument donc converge.

Exercice 2

Soit $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}$. Via le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer I.

* Bornes pour u : $\sqrt{1} = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$

* $t = u^2 \Rightarrow \frac{dt}{du} = 2u \Rightarrow dt = 2u\,du$

* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2u\,du}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_1^{+\infty} \frac{2u\,du}{u(1+u^2)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$

Donc $I = 2\left[\arctan(u)\right]_1^{+\infty} = 2\Big(\underbrace{\lim_{u \to +\infty} \arctan(u)}_{\pi/2} - \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4}\Big)$

$= \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

Déterminer, via une intégration par parties, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. $= I$

Posons $\begin{cases} u = \ln(x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$

On obtient $I = \left[x\ln(x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1\,dx$

Avec $\left[x\ln(x)\right]_0^1 = \underbrace{1\ln(1)}_{0} - \underbrace{\lim_{x \to 0} x\ln(x)}_{0} = 0$

D'où $I = -\displaystyle\int_0^1 1\,dx = -\left[x\right]_0^1 = -1$.