Численное исследование уравненения Бонгоффера – Ван дер Поля.

Оглавление

Постановка задачи

Дано:

$$x' = -a(\frac{x^3}{3} - x) + ay$$

$$y' = -x - by + c$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

Здесь $1 \leq a \leq 10^3$, $0 < c < 1$.

Задача:
Провести исследование поведения решений в зависимости от значений «большого» параметра a.

Методы решения

Для поиска первообразных было выбрано пять численных метода: *явный метод Эйлера*, *явный метод Рунге-Кутты 4го и 5го порядка*, *неявный метод эйлера 1го порядка* и *неявный метод Рунге-Кутты 4го порядка*.

Явный метод Эйлера

Имеем отрезок времени $[T_0, T_{\text{fin}}]$. Разобьем его точками $t_0, t_1, \ldots, t_{\text{n}}$, где $t_1 = T_0$ и $t_n = T_{\text{fin}}$. $\o_i = t_i - t_{i-1}$ Для каждой i-ой точки найдем (x_{i}, y_{i}) $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Имеем

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau_i} = x(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad \text{и} \quad \frac{y_i - y_{i-1}}{\tau_i} = y(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Получим уравнения:

$$\text{x}_i = \begin{cases} x_0 & \text{, при i} = 0 \\ x(x_{i-1}, y_{i-1})\tau_i + x_{i-1} & \text{, иначе} \end{cases}$$

и

$$y_i = \begin{cases} y_0 & \text{, при i} = 0 \\ y(x_{i-1}, y_{i-1})\tau_i + y_{i-1} & \text{, иначе} \end{cases}$$

Применение его к данной задаче:

$$\text{x}_i = \begin{cases} 2 & \text{, при i} = 0 \\ (-a(\frac{x_{i-1}^3}{3} - x_{i-1}) + ay_{i-1})\tau_i + x_{i-1} & \text{, иначе} \end{cases}$$

и

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{, при i} = 0 \\ (-x_{i-1} - by_{i-1} + c)\tau_i + y_{i-1} & \text{, иначе} \end{cases}$$

По этим значениям и будем строить график.

Неявный метод эйлера

Отличается от явного метода Эйлера тем, что мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_i = x(x_i, y_i)\tau_i + x_{i-1} \\ y_i = y(x_i, y_i)\tau_i + x_{i-1} \end{cases}$$

Применений к нашей задаче:

$$\begin{cases} x_i = (-a(\frac{x_i^3}{3} - x_i) + ay_i)\tau_i + x_i \\ y_i = (-x_i - by_i + c)\tau_i + y_i \end{cases}$$

Будем численно искать решение этой системы с помощью метода Ньютона. С помощью него будем искать x_i. Рассмотрим функцию
$f(x_i) = -x_i + (-a(\frac{x_i^3}{3} - x_i) + ay_i)\tau_i + x_i = 0$. Суть метода ньютона найти такое $\tilde{x}_n$, такую что $f(\tilde{x}_n) \approx 0$, где n - число итераций алгоритма, а $\tilde{x}_n$ - точка приближения. Зададим начальную точку приближения $\tilde{x}_0 = x_{i-1}$.

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} - \frac{f(\tilde{x}_{i-1})}{f'(\tilde{x}_{i-1})}(1 \leqslant i \leqslant n)$$

Таким образом находим n-ую точку приближения и считаем, что она равна x_i. Чем больше итераций будет сделано, тем ближе эта точка будет к настоящему решению, но делать их слишком много тоже не имеет смысла.
После того, как мы найдем таким образом x_i подставляем ее в уравнение для y_i. Так мы получаем точки (x_i, y_i), по ним и строим график.