

Künstliche Intelligenz

Christoph Benzmüller und Christoph Schommer

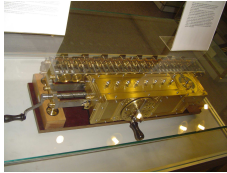
Freie Universität Berlin

Sommer 2019

Eine (sehr kurze und sehr unvollständige) Geschichte der Logik



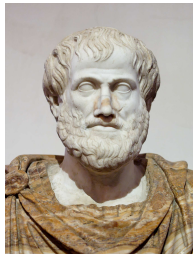
Aristoteles (384-322 BC)



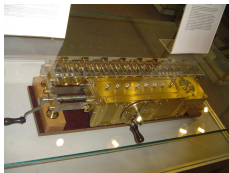
Rechenmaschinen



Leibniz (1646-1716)



Aristoteles (384-322 BC)



Rechenmaschinen



Leibniz (1646-1716)

Bsp.: Modus Barbara

Alle Rechtecke sind Vierecke

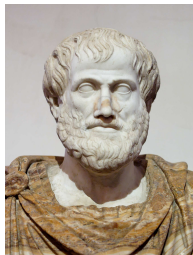
Alle Quadrate sind Rechtecke

Es folgt: Alle Quadrate sind Vierecke

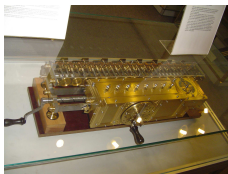
Alle A sind B

Alle C sind A

Es folgt: Alle C sind B



Aristoteles (384-322 BC)



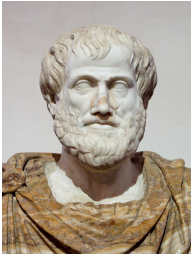
Rechenmaschinen



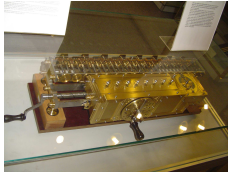
Leibniz (1646-1716)

Leibniz war (u.a.) auf der Suche nach einer *lingua characteristica* (Sprache in der das gesamte Wissen formal ausgedrückt werden konnte) und einem *calculus ratiocinator* (Kalkül zum allgemeinen Schließen).

Vision: Zwei streitende/argumentierende Philosophen sollten Streitfragen durch einfaches *rechnen* (Calculemus!) klären können. Dazu müssten sie sich lediglich auf eine Formalisierung des Problems in der *lingua characteristica* einigen und dann den *calculus ratiocinator* anwenden.



Aristoteles (384-322 BC)



Rechenmaschinen



Leibniz (1646-1716)



De Morgan (1806-1871)



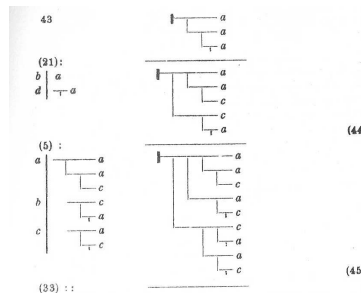
Boole (1815-1864)



Cantor (1845-1918)



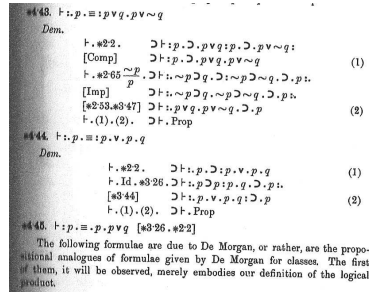
Gottlob Frege
(1848-1925)



- ▶ Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
 - ▶ Prädikatenlogik (höherer Stufe) als formale Sprache
- ▶ Logizismus: Mathematik lässt sich auf die Logik zurückführen
- ▶ Grundlagen der Arithmetik (1884)
- ▶ Grundgesetze der Arithmetik (1893,1903)



Bertrand Russell
(1872-1970)



- Findet Paradoxon in Frege's Prädikatenlogik (Russel's Paradox):

sei $R = \{x | x \notin x\}$; es gilt $x \in R \Leftrightarrow x \notin R$

- schlägt Lösung vor: Russel's Typentheorie
- (anderer Ausweg: Zermelo's Mengentheorie, Hilbert-Gruppe)
- Principia Mathematica (mit Whitehead, 1910, 1912, 1913)
 - verfolgt ähnliches Ziel wie Frege, vermeidet Paradoxien
 - Herleitung der Arithmetik aus der Logik, Basis für Mathematik



David Hilbert
(1862-1943)

Hilbert's twenty-three problems are:

Problem	Brief explanation
1st	The continuum hypothesis (that is, there is no set whose cardinality is strictly between that of the integers and that of the real numbers)
2nd	Prove that the axioms of arithmetic are consistent.
3rd	Given any two polyhedra of equal volume, is it always possible to cut the first into finitely many polyhedral pieces which can be reassembled to yield the second?
4th	Construct all metrics where lines are geodesics.

23 Probleme (1900)

- ▶ Einflussreichster Mathematiker seiner Zeit, breites Arbeitsspektrum
- ▶ Grundlagen der Geometrie (1899)
- ▶ Hilbert's Programm – Logische Fundierung der Mathematik
 - ▶ 1900–1917: Formuliert Programm; gewinnt Mitstreiter
 - ▶ 1917–1930: Vorlesungen mit Bernays und Behmann (1917-1921), Logik 1. Stufe, Arbeit am Programm (inkl. Widerspruchsfreiheit der Arithmetik), Lehrbuch Grundzüge der theoretischen Logik (1928, mit Ackermann)
 - ▶ nach 1931: Moderne Beweistheorie



Kurt Gödel (1906-1978)

- ▶ geboren 28.4.1906 in Brünn (Tschechien)
 - ▶ kränklich, schwächlich, introvertiert
 - ▶ Studium ab 1924 in Wien, Wiener Kreis
 - ▶ 1933/34 erste Reisen nach Princeton, USA
 - ▶ 1938 heiratet Adele Porkert (Kabaretttänzerin)
 - ▶ 1940 Flucht nach USA (über Russland/Japan)
 - ▶ Professor in Princeton, Freund von Einstein
 - ▶ Hungertod
-
- ▶ 1929/30 Dissertation: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls (Vollständigkeit der Logik 1. Stufe — Hilbert's Programm)
 - ▶ 6. Sep. 1930: Vortrag in Königsberg: Unvollständigkeitssätze "Die Logik wird nie mehr dieselbe sein." (John von Neumann)
 - ▶ 1931: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I (Unvollständigkeitsätze)
 - ▶ 1938: Wichtiger (negativer) Beitrag zur Beweisbarkeit der Kontinuumshypothese
 - ▶ Weiter interessante Arbeiten — aber: *"I do not fit in this century!"*

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

Natürliche Sprache

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Formale Logik

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isSonOf\ max\ chris)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

Natürliche Sprache

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Formale Logik

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isSonOf\ max\ chris)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

(weitere Konnektive: \neg , \vee , \leftrightarrow , \exists , $=$)

Natürliche Sprache

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Formale Logik

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isSonOf\ max\ chris)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

(so viele wie wir benötigen)

Natürliche Sprache

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Formale Logik

$(\textit{isBaby } \textcolor{green}{max}) \wedge (\textit{isBoy } \textcolor{green}{max})$

$(\textit{isSonOf } \textcolor{green}{max } \textcolor{green}{chris})$

$\forall X. (\textit{isBaby } X) \Rightarrow (\textit{isCute } X)$

Theorem $(\textit{isCute } \textcolor{green}{max})$

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

(so viele wie wir benötigen)

$$\frac{\Delta \wedge \Box}{\Delta} \quad \frac{\Delta \wedge \Box}{\Box} \quad \frac{\Delta \quad \Box}{\Delta \wedge \Box}$$

$$\frac{(isBaby \text{ max}) \wedge (isBoy \text{ max})}{(isBaby \text{ max})}$$

$$\frac{\forall X. \Box}{[t \rightarrow X] \Box} \quad \dots$$

$$\frac{\forall X. (isBaby X) \Rightarrow (isCute X)}{(isBaby \text{ max}) \Rightarrow (isCute \text{ max})}$$

$$\frac{\Delta \quad \Delta \Rightarrow \Box}{\Box} \quad \dots$$

$$\frac{(isBaby \text{ max}) \quad (isBaby \text{ max}) \Rightarrow (isCute \text{ max})}{(isCute \text{ max})}$$

Axiom (Axiomenschemata)

$$\Delta \vee \neg \Delta$$

$$(isBaby \text{ max}) \vee \neg (isBaby \text{ max})$$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen
(1909-1945)

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isBaby\ max)$

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

$(isBaby\ max)$

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

$(isBaby\ max)$

$(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)$

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

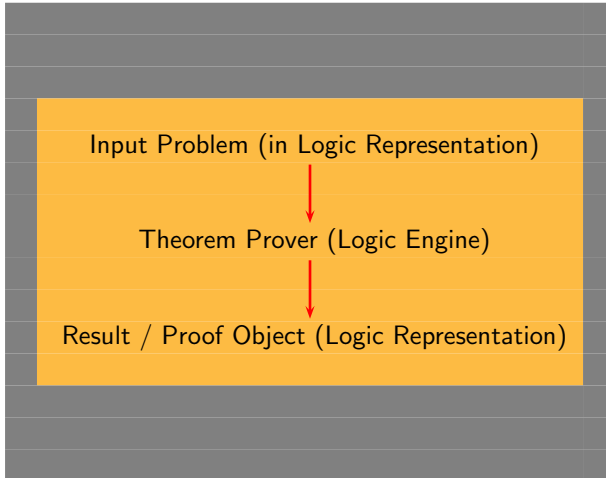
Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

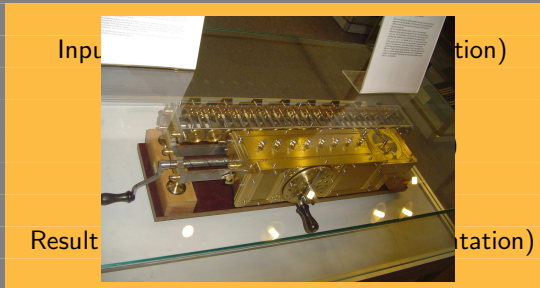
$$\frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)} \quad \frac{\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}$$

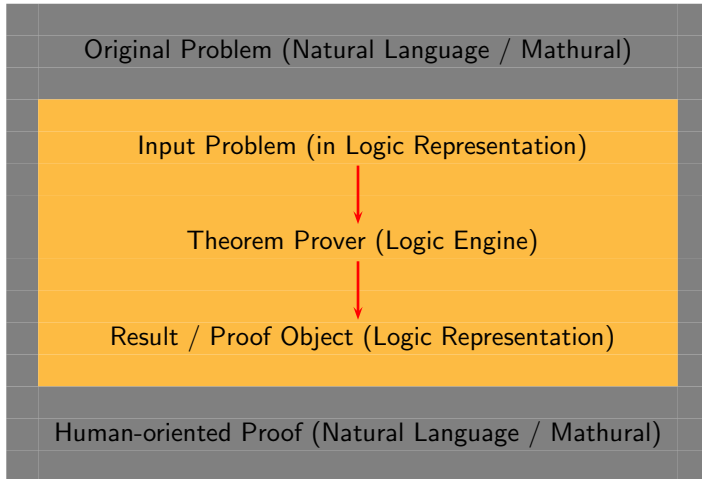
$$(isCute\ max)$$

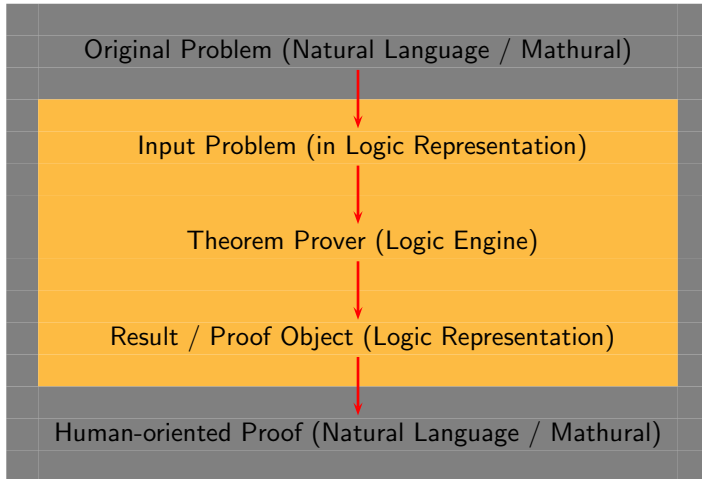
Artificial Intelligence



Artificial Intelligence







- ▶ Ausdrucksstärke der Sprache (Expressivität)
- ▶ Kalkül
 - ▶ Axiome
 - ▶ Schlussregeln
- ▶ Korrektheit und Widerspruchsfreiheit/Konsistenz:
Es gibt keine Formel Δ , so dass Δ und $\neg\Delta$ ableitbar sind.
- ▶ Entscheidbarkeit vs. Unentscheidbarkeit
- ▶ Vollständigkeit

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{aligned}$$

► Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & isHuman(socrates) \\ \wedge & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(socrates) \end{aligned}$$

► Logik höherer Stufe

$$\begin{aligned} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{aligned}$$

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{aligned}$$

► Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & isHuman(socrates) \\ \wedge & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(socrates) \end{aligned}$$

► Logik höherer Stufe

$$\begin{aligned} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{aligned}$$

entscheidbar

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{aligned}$$

► Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & isHuman(socrates) \\ \wedge & (\forall x.isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(socrates) \end{aligned}$$

► Logik höherer Stufe

$$\begin{aligned} & (\forall F.isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y.\exists x.y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x.x) \end{aligned}$$

unentscheidbar, vollständig

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{aligned}$$

► Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & isHuman(socrates) \\ \wedge & (\forall x.isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(socrates) \end{aligned}$$

► Logik höherer Stufe

$$\begin{aligned} & (\forall F.isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y.\exists x.y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x.x) \end{aligned}$$

unentscheidbar, unvollständig

The TPTP Problem (and System) Library for Automated Theorem Proving

www.tptp.org