

# **Modell eines Insel-Callshops**

## **2. Projekt zu Modellierung und Simulation**

Daniel Graf, Dimitrie Diez, Arne Schöntag, Peter Müller

### **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2 Beschreibung des Modells</b>	<b>2</b>
<b>3 Anforderungen/Requirements</b>	<b>3</b>
<b>4 Softwaredesign</b>	<b>3</b>
<b>5 Überprüfung auf Exponentialverteilung</b>	<b>3</b>
5.1 Graphische Überprüfung . . . . .	3
5.2 Rechnerische Überprüfung . . . . .	4
<b>6 Auswertung der Ergebnisse</b>	<b>4</b>
6.1 Modell „Ein Telefon“ . . . . .	5
6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle . . . . .	5
6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems	6
6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000 . . . . .	6
6.1.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100 . . . . .	11
6.2 Modell „Bevorzugte VIP“ . . . . .	15
6.2.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100 . . . . .	15
6.2.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 500 . . . . .	15
6.2.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000 . . . . .	15
6.2.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1500 . . . . .	15
6.3 Modell „Zusätzliches VIP Telefon“ . . . . .	15
6.3.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100 . . . . .	15
6.3.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 500 . . . . .	15
6.3.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000 . . . . .	15
6.3.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1500 . . . . .	15
<b>7 Fazit</b>	<b>15</b>

## **1 Einführung**

Simulationen haben in der moderne einen sehr hohen Stellenwert erlangt, da durch sie zahlreiche, oftmals sehr genaue, Zukunftsprognosen erstellt werden können. Als Grundlage für die Simulationen dienen in der Regel Modelle, welche einen Ausschnitt der Wirklichkeit abbilden. Das Thema dieser Studienarbeit ist die Simulation eines Callshops, bzw. des Telefons in einem Callshop, in einem Inseldorf. Dieser wird für günstige Telefonate ins Ausland verwendet.

## **2 Beschreibung des Modells**

Für die Simulation des Insel-Callshops wird ein Warteschlagenmodell mit Clients und zunächst nur einem Server verwendet. Jede Person die den CallShop betritt wird durch einen neuen Client repräsentiert. Das Telefon des Shops ist durch den Server dargestellt. Möchte eine Person das Telefon zu einem Zeitpunkt benützen, zu dem bereits eine andere Person telefoniert, muss sie sich hinten anstellen und warten, bis die Person ihr Telefonat beendet hat. Im Modell wird dieses durch eine Warteschlage (Queue) realisiert, in die sich ankommende Clients einordnen und sobald der Server nichtmehr belegt ist nach dem FIFO (first in first out) Prinzip bedient werden.

Im Modell werden sowohl die Ankunftszeiten der Clients, als auch die Dauer der Telefonate durch eine negative Exponentialverteilung beschrieben, da diese sehr nah an den real beobachteten Verhalten liegt. Der mathematische Hintergrund liegt in der Eigenschaft der Exponentialfunktion zugrunde. Die Exponentialverteilung ist die einzige kontinuierliche Verteilung, welche zugleich die Markoveigenschaft, die sogenannte Gedächtnislosigkeit, erfüllt. Diese besagt, dass die seit dem letzten Ereignis vergangene Zeit (in diesem Beispiel Anrufer) keinen Einfluss auf die Verteilung der Zeit bis zum nächsten Ereignis (bis zum nächsten Anruf) hat. Quelle: <http://www.mathepedia.de/Exponentialverteilung.aspx>

Darüber hinaus wird ein zweites Modell betrachtet, in welchem die Bewohner des Inseldorfes (Einheimische) bevorzugt werden. Im weiteren Verlauf der Studienarbeit werden diese mit VIP bezeichnet.

In einem dritten Modell befindet sich ein weiteres Telefon im Callshop. Von den nun zwei Telefonen (zwei Server), behandelt eines alle ankommenden Personen (Clients) gleichberechtigt. Das zweite Telefon bevorzugt die VIPs und behandelt andere Personen nur, wenn kein VIP wartet.

### 3 Anforderungen/Requirements

### 4 Softwaredesign

### 5 Überprüfung auf Exponentialverteilung

Im Zuge dieses Kapitels erfolgt die Überprüfung der, im Zuge der implementierten Simulation, generierten Zufallszahlen. Diese sollen, wie in den Anforderungen definiert, negativ exponentialverteilt sein.

Die Überprüfung erfolgt zunächst graphisch mittels eines Histogramms und eines Quantil-Quantil-Plots. Im Anschluss erfolgt die rechnerische Überprüfung mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test.

#### 5.1 Graphische Überprüfung

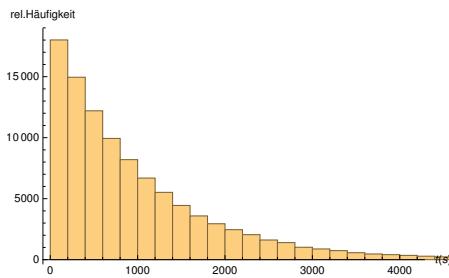


Abbildung 1: Histogramm der generierten Zufallszahlen

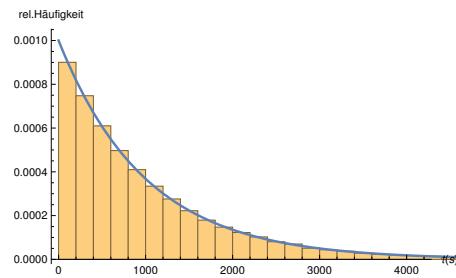


Abbildung 2: Histogramm einer Exponentialverteilung

Abbildung 1 zeigt die von der Simulation generierten Zufallszahlen in einem Histogramm. Zum besseren Vergleich zeigt Abbildung 2 das Histogramm einer Exponentialverteilung. Beide Abbildungen weisen einen nahezu identischen Verlauf auf, was ein Indiz für eine Exponentialverteilung der Daten darstellt.

In Abbildung 3 werden die generierten Zufallszahlen in einem Quantil-Quantil-Diagramm dargestellt. Die blaue, gestrichelte Ursprungsgerade zeigt den Verlauf einer Exponentialverteilung im Quantil-Quantil-Diagramm. Die generierten Daten werden durch die blaue Linie repräsentiert. Die Abbildung zeigt somit, dass beide Linien nahezu deckungsgleich sind und es nur eine sehr geringe Abweichung gibt. Das Quantil-Quantil-Diagramm liefert ist einen weiteres Indiz, dass die generierten Zufallszahlen tatsächlich exponentialverteilt sind.

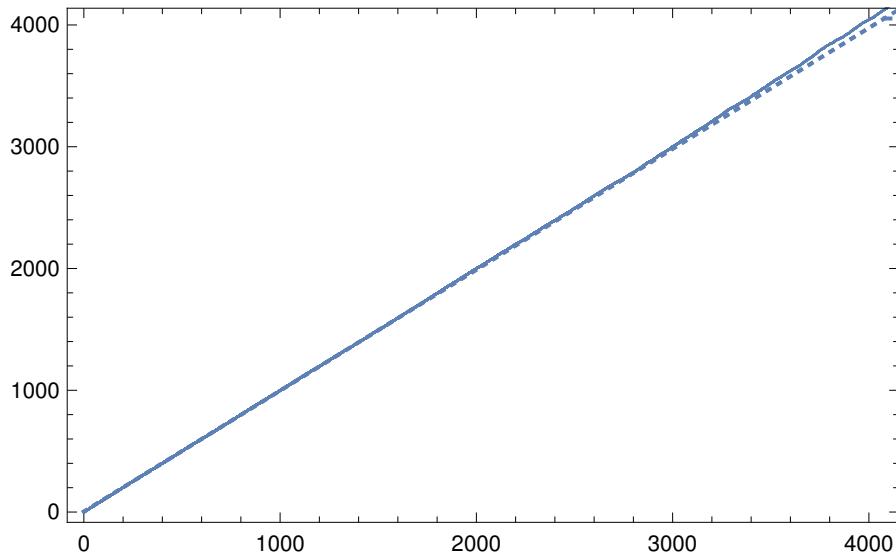


Abbildung 3: Quantil-Quantil-Diagramm der generierten Zufallszahlen

## 5.2 Rechnerische Überprüfung

Für eine weitere Überprüfung werden die generierten Daten mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test auf eine Exponentialverteilung überprüft. Die Hypothese  $H_0$  lautet hierbei:

$H_0$  : Die generierten Zufallszahlen sind exponentialverteilt, Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$   
Die Ergebnisse der einzelnen Tests sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Statistic	P-Value
Anderson-Darling	0.482866	0.764349
Cramér-von Mises	0.0690154	0.757621
Kolmogorov-Smirnov	0.00201837	0.80994
Kuiper	0.00390365	0.478494
Pearson $\chi^2$	191.088	0.643726
Watson $U^2$	0.0689189	0.503982

Laut dem Shapiro-Wilk-Test kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, da der p-Wert mit 0,80994 deutlich über dem Signifikanzniveau von 0,05 liegt. Ebenso kann die Nullhypothese bei den Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Tests nicht abgelehnt werden, da der p-Wert hier ebenso mit 0,764349 bzw. 0,0764349 deutlich über dem Signifikanzniveau liegt. Durch die Tests kann somit eine Exponentialverteilung der generierten Zufallszahlen nicht widerlegt werden. In Kombination mit der graphischen Überprüfung ist es plausibel, wenn von exponentialverteilten Werten ausgegangen wird. Ein entgültiger Beweis kann nicht erbracht werden.

## 6 Auswertung der Ergebnisse

Im Zuge dieses Kapitels werden alle Ergebnisse der Simulation und die daraus errechneten Werte erläutert. Zusätzlich werden relevante Größen durch Plots veranschaulicht.

### 6.1 Modell „Ein Telefon“

Für den in Kapitel ?? REFERENZAUFANFORDERUNG aufgelisteten ersten Betriebsmodus (ein Server, welcher alle Clients bedient) werden im folgenden die Auswertungen aufgeführt. Exemplarisch werden vier verschiedene durchschnittliche Ankunftszeiten für die Clients verwendet. Zunächst wird eine durchschnittliche Ankunftszeit von 1500 angenommen, was bei einer durchschnittlichen Telefonierdauer (Dauer der Serverbelegung) einer sehr geringen Serverauslastung entspricht. Anschließend werden mit den durchschnittlichen Ankunftszeiten von 1000, 500 und 100 die Auswirkungen von höherer Serverauslastung auf das Ergebnis der Simulation erläutert.

Für jede durchschnittliche Ankunftszeit werden zunächst die zu erwartenden Werte, basierend auf den Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle ermittelt. Die einzelnen Formeln sind im folgenden Kapitel aufgeführt. Betrachtet werden hierbei, wie in den ?? erläutert die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System, durchschnittliche Warteschlangenlänge, durchschnittliche Verweildauer im System und die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange. Die berechneten Größen werden als Erwartungswerte betrachtet gegen die durch die Simulation ermittelten Werte geprüft werden.

Sowohl die Maßnahmen für die Verifikation der implementierten Simulation, als auch für die Validierung der errechneten Durchschnittswerte, werden in den Kapitel (REFERENZ AUF DIE ZWEI KAPITEL) näher beschrieben. In den folgenden Abbildungen wird die durchschnittliche Zwischenankunftszeit mit „MeanAr“ abgekürzt.

#### 6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle

Die im folgenden aufgeführten Formeln gelten für M/M/1 Warteschlangenmodelle. Mit  $L_s$  wird die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System bezeichnet.  $L_q$  gibt die durchschnittliche Länge der Warteschlange an.  $W_s$  definiert die durchschnittliche Verweildauer der einzelnen Kunden im System und  $W_q$  die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (1)$$

$$L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2)$$

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (3)$$

$$Wq = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (4)$$

In den einzelnen Gleichungen beschreibt  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\rho$  wie folgt definiert:  $\lambda$  beschreibt die durchschnittliche Ankunftszeit der Kunden pro Zeiteinheit.  $\mu$  definiert die durchschnittliche Telefonierdauer der Kunden pro Zeiteinheit. Und  $\rho$  beschreibt die durchschnittliche Auslastung des Telefons. Quelle: <http://www.business.uzh.ch/dam/jcr:00000000-0451-792f-ffff-fffffe13aac9/ServiceManagementwarteschlangenmodelle.pdf>

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

### 6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems

Laut dem Theorem von Little muss die durchschnittliche Anzahl von Kunden in einem Warteschlangensystem gleich dem Produkt aus der durchschnittlichen Ankunftsrate ( $\Lambda$ ) und der durchschnittlichen Verweildauer ( $Ws$ ) im System sein, wenn das System sich in einem eingeschwungenen Zustand befindet.

$$Ls = \lambda * Ws \quad (6)$$

Stellt man die Formel um, muss im eingeschwungenen Zustand gelten:

$$\lambda * Ws - Ls = 0 \quad (7)$$

Anhand dieser Gleichung werden im weiteren Verlauf der Studienarbeit die einzelnen Auswertungen validiert.

### 6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000

**6.1.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell** Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000 ( $\lambda = \frac{1}{1000}$ ,  $\mu = \frac{1}{100}$ ) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 0,111111 \quad (8)$$

$$Lq = 0,0111111 \quad (9)$$

$$Ws = 111,111 \quad (10)$$

$$Wq = 11,1111 \quad (11)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Plots durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

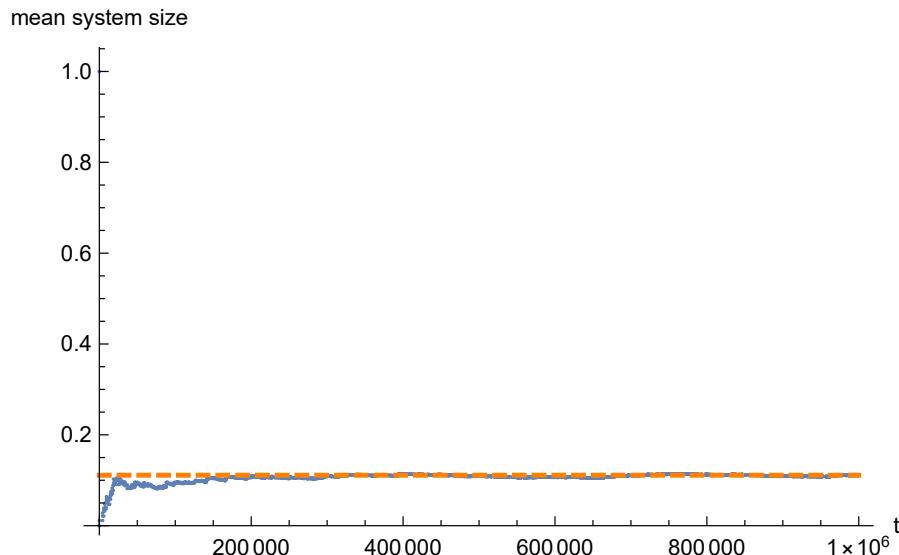


Abbildung 4: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000

#### 6.1.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 4 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 200000 liegt diese konstant bei 0.111111, was mit dem Erwartungswert übereinstimmt und somit ein Indiz für die Richtigkeit der Simulation darstellt. Durch die Vergleichsweise kurze Telefonierzeit und lange Zwischenankunftszeit befinden sich über den Zeitverlauf nur wenige Kunden im System.

Betrachtet man Abbildung 5, wird deutlich, dass die durchschnittliche Verweildauer im System bis zu einer Simulationszeit von 300000 noch stark variiert. Anschließend ändert sie sich nur noch geringfügig, bleibt jedoch unter dem erwarteten Wert von 111.111. Der Grund hierfür könnte entweder eine Ungenauigkeit aufgrund von Runden bei der Division oder ein Fehler in der Berechnung sein.

Bei der Betrachtung der in Abbildung 6 gezeigte durchschnittlichen Warteschlangenlänge fällt auf, dass die Werte zu Beginn der Simulation um ca. 0,004 schwanken. Auch gegen Ende der Simulation schwanken die Werte noch um ca. 0,0018. Während der gesamten Simulationsdauer liegen die Werte unter dem Erwartungswert von 0,0111111, nähern sich diesem jedoch gegen Ende der Simulationszeit immer weiter an. Grund hierfür könnte ein nicht vollkommen eingeschwungenes System sein. Die Simulation müsste hierfür erneut durchgeführt werden, mit einer größeren Simulationsdauer.

Die in Abbildung 7 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weist einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 6 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Gegen Ende der Simulation

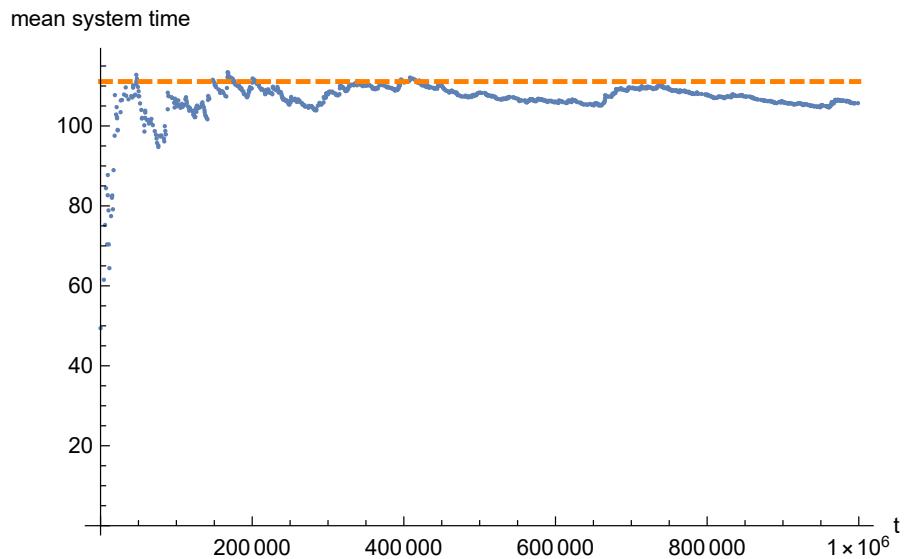


Abbildung 5: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000

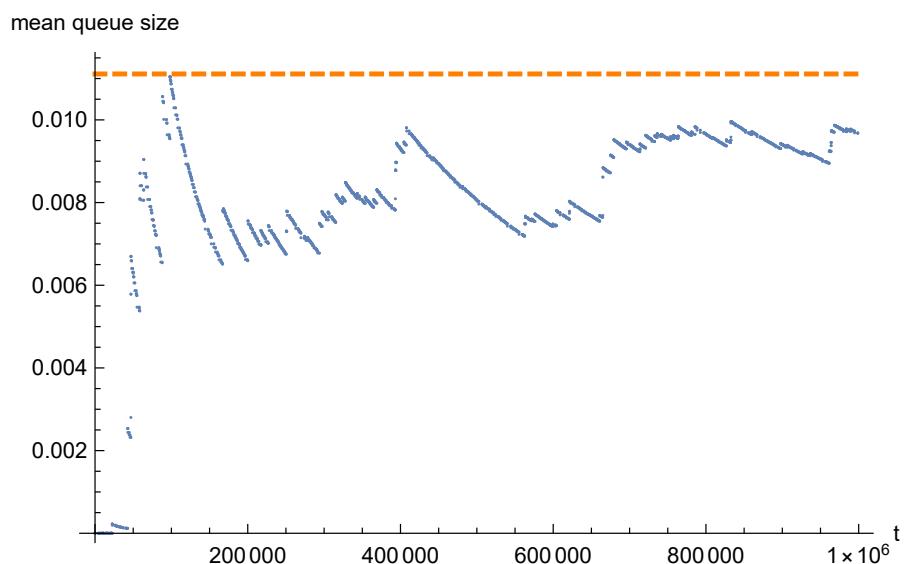


Abbildung 6: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000

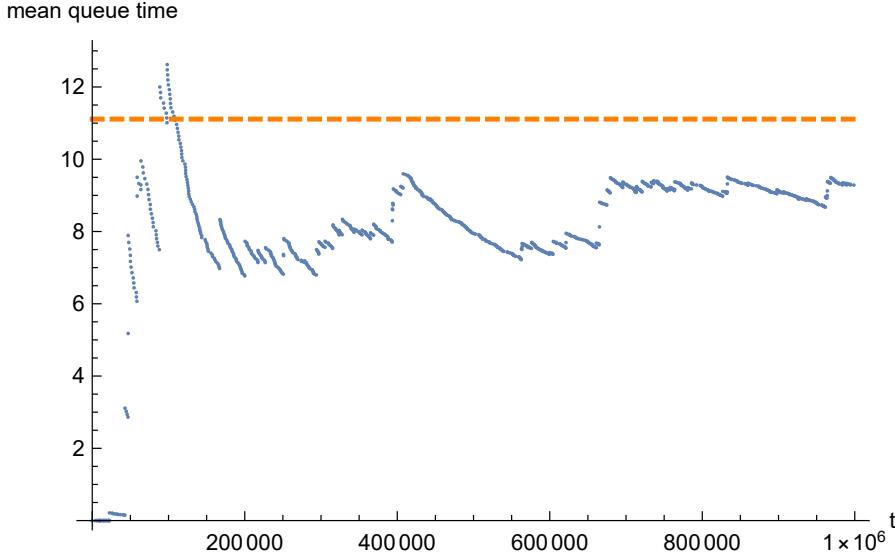


Abbildung 7: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000

näher sich die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange dem Erwartungswert von 11,1111 an, erreicht ihn jedoch nicht. Wie bereits erläutert müsste die Simulation für eine genauere Beurteilung erneut mit einer längeren Simulationsdauer durchgeführt werden.

Die Abbildung 8 zeigt die einzelnen Werte für die Warteschlangenlänge über die Simulationszeit. Diese Abbildung ist nicht aussagekräftig. Hintergrund dafür ist die Implementierung der Simulation. Im Warteschlangenmodell wird zwischen drei verschiedenen Events unterschieden. Betritt ein neuer Kunde den Telefonshop, wird ein Arrival Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 erhöht. Ist das Telefon frei, wird ein Begin Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 reduziert. Hat ein Kunde sein Telefonat beendet, wird ein Finish Event ausgelöst, was wiederum ein Begin Event auslöst, da das Telefon frei ist. Ein Problem gibt es hierbei für den Fall, dass kein Kunde im Laden steht und somit auch die Warteschlange leer und das Telefon frei ist. Betritt nun ein neuer Kunde den Laden, wird ein Arrival Event ausgelöst und direkt anschließend ein Begin Event, da das Telefon frei ist und der Kunde sein Telefonat sofort beginnen kann. Er befindet sich somit für 0s in der Warteschlange. Aufgrund der Events wird die Warteschlangenlänge jedoch trotzdem erhöht und direkt wieder gesenkt. Es gibt somit für den gleichen Zeitstempel zwei unterschiedliche Warteschlangenlängen. Abbildung ?? zeigt die gleiche Situation ohne die eben erläuterte Situation. Es wird hierbei nur eine Warteschlangenlänge angezeigt, wenn auch wirklich ein Kunde länger als 0s in der Warteschlange wartet. Da das System nur sehr gering ausgelastet ist, ist die geringe Warteschlangenlänge plausibel.

Abschließend sind im folgenden die berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit

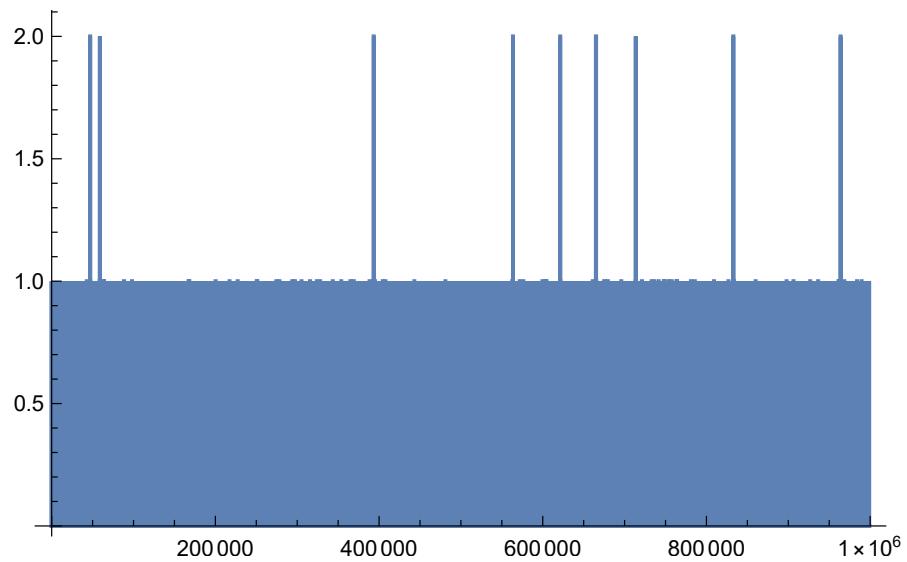


Abbildung 8: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 1000

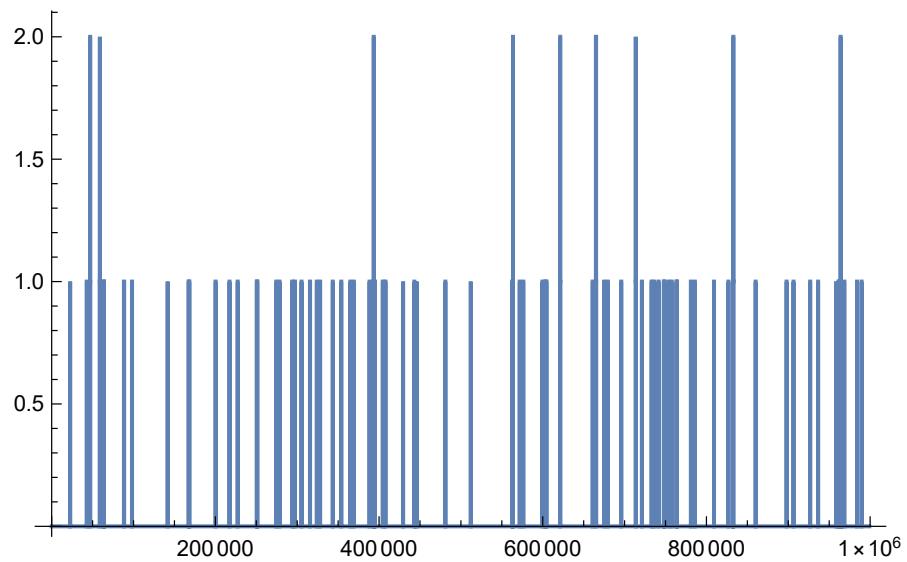


Abbildung 9: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 1000

im System aufgeführt: FEHLT !!!!!!!!!!!!!!!

### 6.1.3.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 10 ist der Verlauf der Gleichung 7

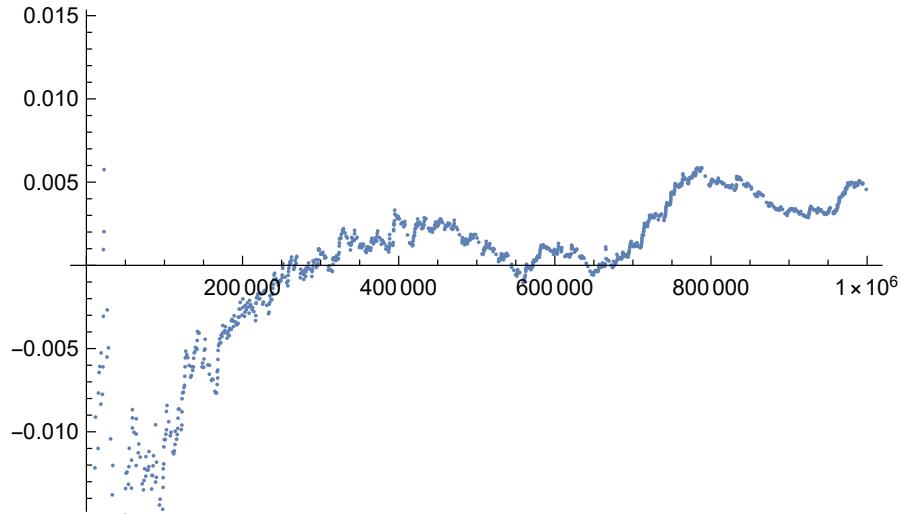


Abbildung 10: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000

über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 350000 liegt der Wert sehr nach an dem geforderten Erwartungswert von 0, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation im Bereich von 0,004. Darauf folgt, dass entweder ein Fehler in der Berechnung oder, was aufgrund der sehr geringen Abweichung vom Erwartungswert wahrscheinlicher ist, das System noch nicht vollständig eingeschwungen war. Für weitere Erkenntnisse müsste, wie bereits erwähnt die Simulation mit längerer Simulationsdauer erneut ausgeführt werden.

### 6.1.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

**6.1.4.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell** Für durchschnittliche Zwischenankunftszeit und durchschnittliche Telefonierdauer 100 ( $\lambda = \frac{1}{100}$ ,  $\mu = \frac{1}{100}$ ), lassen sich die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System nicht berechnen. Die Warteschlangenlänge steigt gegen unendlich. Somit steigen auch die anderen drei Größen mit zunehmender Simulationsdauer gegen unendlich.

### 6.1.4.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abschließend sind im folgenden die berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System aufgeführt: FEHLT !!!!!!!!!!!!!!!

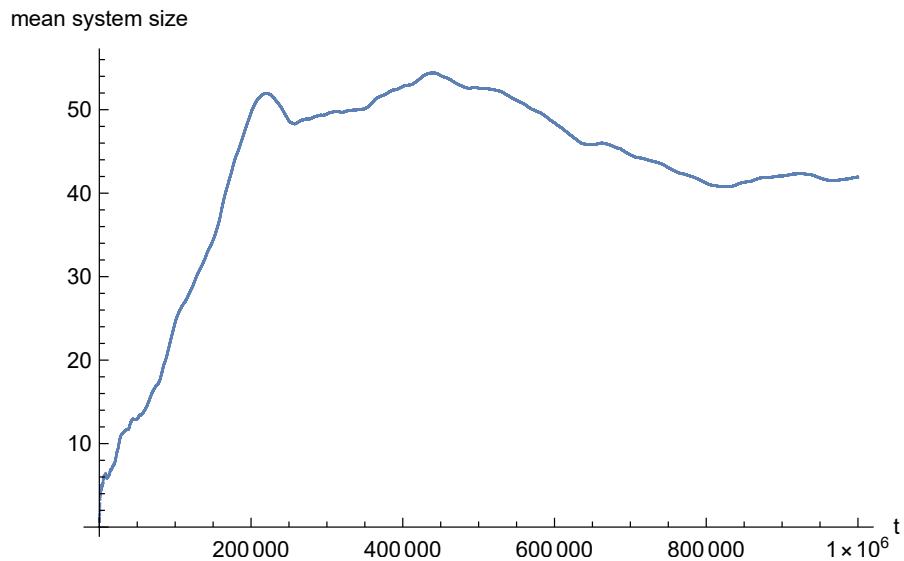


Abbildung 11: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100

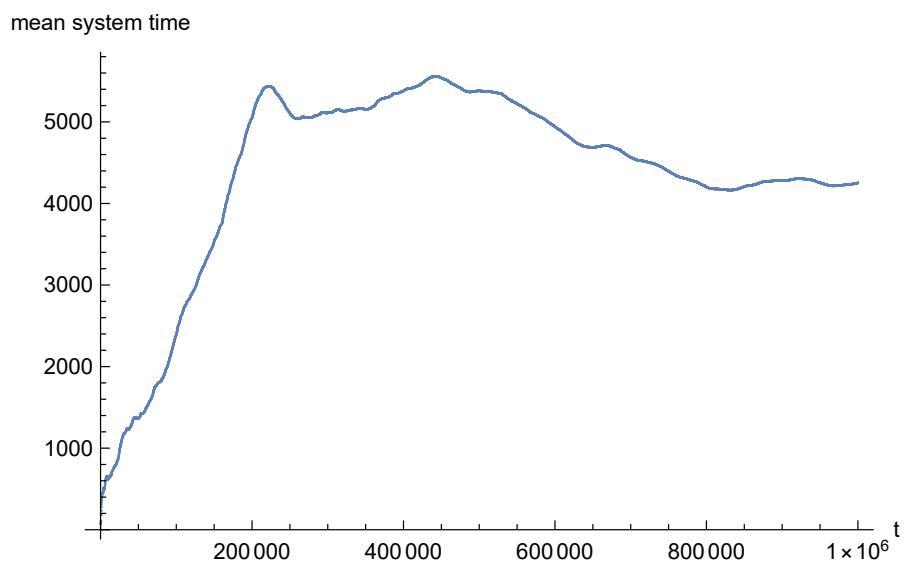


Abbildung 12: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100

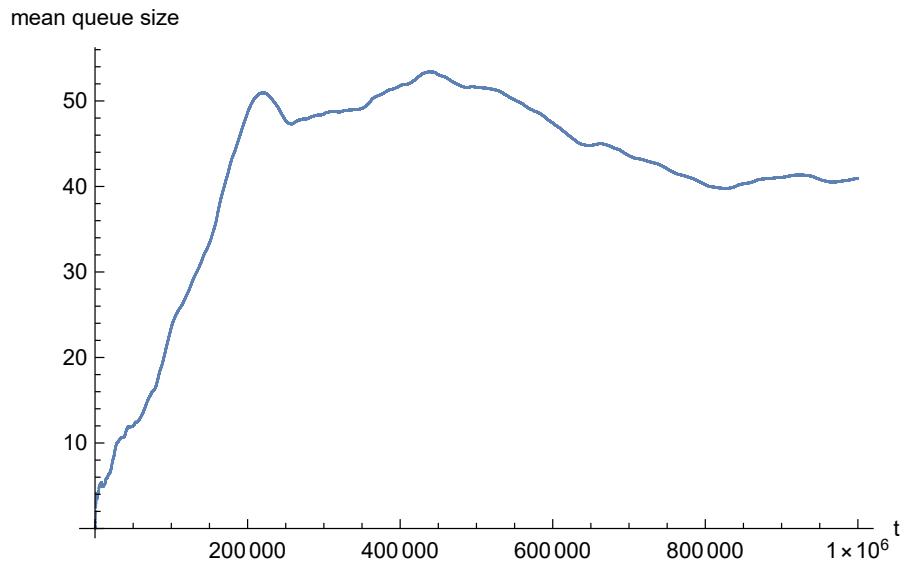


Abbildung 13: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100

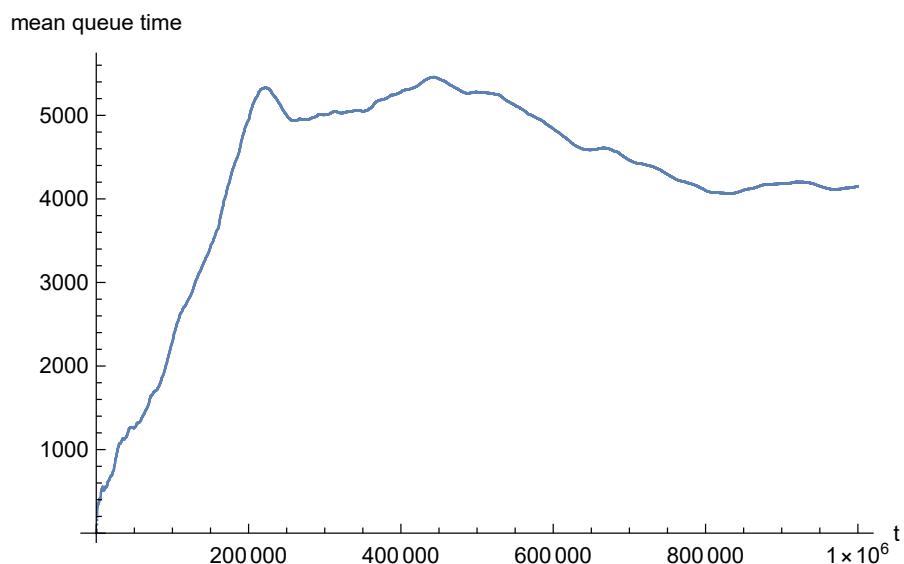


Abbildung 14: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100

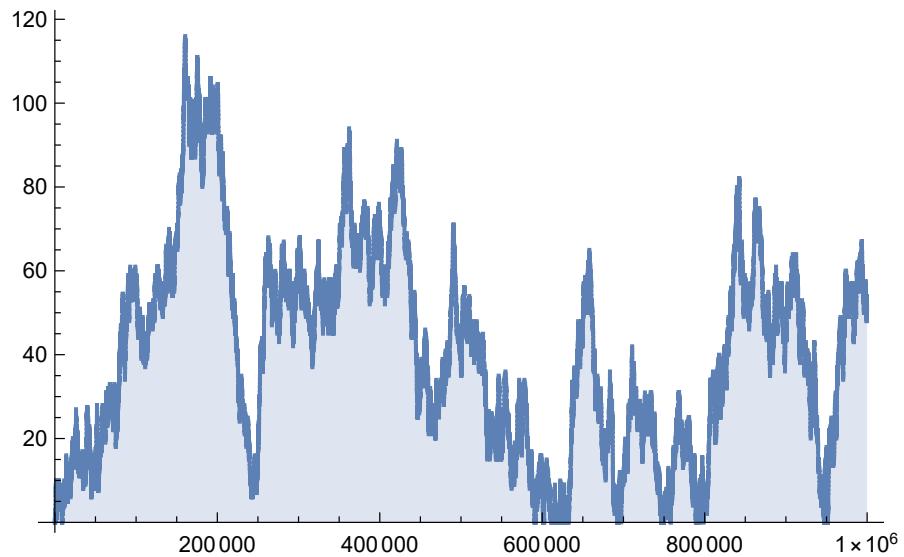


Abbildung 15: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 100

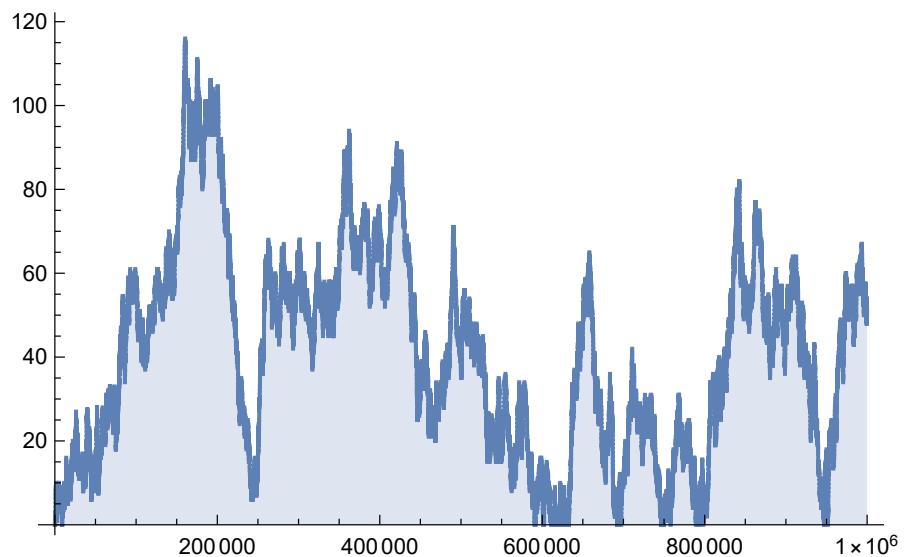


Abbildung 16: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100

**6.1.4.3 Validierung der Simulation** In Abbildung 10 ist der Verlauf der Gleichung 7

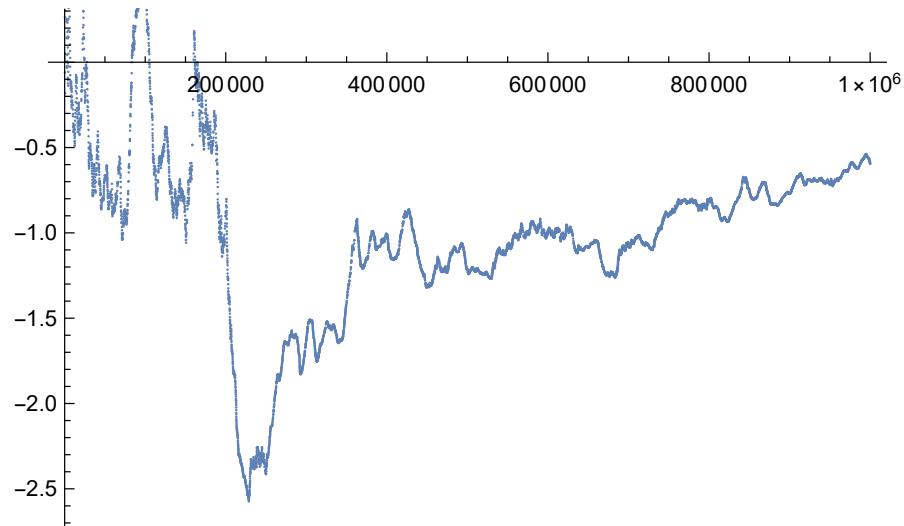


Abbildung 17: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000 über die Simulationszeit aufgeführt.

## 6.2 Modell „Bevorzugte VIP“

### 6.2.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

### 6.2.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 500

### 6.2.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

### 6.2.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1500

## 6.3 Modell „Zusätzliches VIP Telefon“

### 6.3.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

### 6.3.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 500

### 6.3.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

### 6.3.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1500

## 7 Fazit