

Modell eines Insel-Callshops

2. Projekt zu Modellierung und Simulation

Daniel Graf, Dimitrie Diez, Arne Schöntag, Peter Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
2 Beschreibung des Modells	2
3 Anforderungen/Requirements	3
3.1 Allgemeines	3
3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten	3
3.3 Verteilung der Telefonierzeiten	3
3.4 Zeitmodelierung	3
3.5 Berechnungen	4
3.6 Reports	4
3.7 Parameter	4
3.8 Betriebsmodi	5
3.9 Werte für die Auswertung	5
4 Softwaredesign	5
5 Überprüfung auf Exponentialverteilung	5
5.1 Graphische Überprüfung	6
5.2 Rechnerische Überprüfung	6
6 Auswertung der Ergebnisse	8
6.1 Modell „Ein Telefon“	8
6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle	8
6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems	9
6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s	9
6.1.4 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s	15
6.1.5 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s	20
6.2 Modell „Bevorzugte VIP“	29
6.2.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	29
6.2.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	29

6.2.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	29
6.3	Modell „Zusätzliches VIP Telefon“	29
6.3.1	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	29
6.3.2	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	29
6.3.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	29
7	Fazit	29

1 Einführung

Simulationen haben in der moderne einen sehr hohen Stellenwert erlangt, da durch sie zahlreiche, oftmals sehr genaue, Zukunftsprognosen erstellt werden können. Als Grundlage für die Simulationen dienen in der Regel Modelle, welche einen Ausschnitt der Wirklichkeit abbilden. Das Thema dieser Studienarbeit ist die Simulation eines Callshops, bzw. des Telefons in einem Callshop, in einem Inseldorf. Dieser wird für günstige Telefonate ins Ausland verwendet.

2 Beschreibung des Modells

Für die Simulation des Insel-Callshops wird ein Warteschlagenmodell mit Clients und zunächst nur einem Server verwendet. Jede Person die den CallShop betritt wird durch einen neuen Client repräsentiert. Das Telefon des Shops ist durch den Server dargestellt. Möchte eine Person das Telefon zu einem Zeitpunkt benützen, zu dem bereits eine andere Person telefoniert, muss sie sich hinten anstellen und warten, bis die Person ihr Telefonat beendet hat. Im Modell wird dieses durch eine Warteschlage (Queue) realisiert, in die sich ankommende Clients einordnen und sobald der Server nichtmehr belegt ist nach dem FIFO (first in first out) Prinzip bedient werden.

Im Modell werden sowohl die Ankunftszeiten der Clients, als auch die Dauer der Telefonate durch eine negative Exponentialverteilung beschrieben, da diese sehr nah an den real beobachteten Verhalten liegt. Der mathematische Hintergrund liegt in der Eigenschaft der Exponentialfunktion zugrunde. Die Exponentialverteilung ist die einzige kontinuierliche Verteilung, welche zugleich die Markoveigenschaft, die sogenannte Gedächtnislosigkeit, erfüllt. Diese besagt, dass die seit dem letzten Ereignis vergangene Zeit (in diesem Beispiel Anrufer) keinen Einfluss auf die Verteilung der Zeit bis zum nächsten Ereignis (bis zum nächsten Anruf) hat [2].

Darüber hinaus wird ein zweites Modell betrachtet, in welchem die Bewohner des Inseldorfes (Einheimische) bevorzugt werden. Im weiteren Verlauf der Studienarbeit werden diese als VIP oder resident bezeichnet. Der grundlegende Ablauf verläuft wie beim ersten Modell. Allerdings wird, bevor der nächste Client (FIFO Prinzip) telefonieren darf, die

Queue nach einem VIP durchsucht. Befindet sich ein VIP in der Queue, wird dieser bevorzugt und darf zuerst telefonieren.

In einem dritten Modell befindet sich ein weiteres Telefon im Callshop. Von den nun zwei Telefonen (zwei Server), behandelt eines alle ankommenden Personen (Clients) gleichberechtigt (analog zum ersten Modell). Das zweite Telefon bevorzugt die VIPs und behandelt andere Personen nur, wenn kein VIP wartet (analog zum zweiten Modell).

3 Anforderungen/Requirements

3.1 Allgemeines

Die Software soll die Simulation eines Warteschlangensystems durchführen. Zu Beginn der Simulation wird davon ausgegangen, dass die Warteschlange keine Elemente enthält, da sich auch in der Realität beim Öffnen eines Ladens noch keine Personen in einer Warteschlange im Laden befinden.

3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten

Die Zwischenankunftszeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll eine negative Exponentialverteilung aufweisen. Die Exponentialverteilung für eine zufällige Zwischenankunftszeit x ist erfüllt falls sie folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die mittlere Zwischenankunftszeit hat den Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Die mittlere Zwischenankunftszeit soll parametrisierbar sein.

3.3 Verteilung der Telefonierzeiten

Die Telefonierzeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll analog zur Zwischenankunftszeiten eine Exponentialverteilung aufweisen. Die mittlere Telefonierzeit soll ebenfalls parametrisierbar sein.

3.4 Zeitmodellierung

Die Applikation unterliegt keinen harten Echtzeitanforderungen. Die Simulation soll für die gesamte Simulationsdauer so schnell wie möglich durchgeführt werden. Es soll keine Globale Uhr modelliert werden.

3.5 Berechnungen

Die Grundfunktion der Applikation ist die Simulation eines Warteschlangenmodells und die Ausgabe relevanter Rohdaten für weitere Berechnungen. Die Berechnungen selbst werden von der Applikation und mit Hilfe von Mathematica durchgeführt.

3.6 Reports

Alle errechneten Ergebnisse sollen über Reports ausgeleitet werden. Die Reports sollen im .CSV format ausgeleitet werden um eine gute Weiterverarbeitung der Ergebnisse zu gewährleisten. Folgende Reports sollen ausgeleitet werden:

- arrival.csv enthält alle Arrival-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
begin.csv enthält alle Begin-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
- finish.csv enthält alle Finish-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
- queue.csv enthält die Länder der Warteschlange und die Anzahl der Personen im System mit Zeitstempel.
- arrival_distribution.csv enthält alle zufällig generierten Zahlen für die Zwischenankunftszeiten.
- serve_distribution.csv enthält alle zufällig generierten Zahlen für die Dauer der Telefongebrauchszeit.

3.7 Parameter

Die Tabelle 1 zeigt alle möglichen Parameter, welche die Software steuern. Alle Parameter sind optional.

Parameter	Beschreibung	Default
-a	durschnittliche Zwischenankunftszeit der Besucher in Sekunden [s]	1000
-c	durschnittliche Telefonierdauer in Sekunden [s]	100
-d	Dauer der Simulation in Sekunden [s]	100.000.000
-vip	Anteil der Inselbewohner an den Besuchern in Prozent [%]	10
-conf	Betriebsmodus (1, 2, oder 3)	1
-o	Ausgabepfad zur Reporterstellung	../data/

Tabelle 1: Parameter und Defaultwerte

3.8 Betriebsmodi

Die Software hat drei Betriebsmodi:

Betriebsmodus 1: In diesem Modus gibt es ein Telefon und eine Warteschlange. Alle Personen in der Warteschlange werden gleichberechtigt behandelt.

Betriebsmodus 2: In diesem Modus gibt es ein Telefon und eine Warteschlange. Die Personen werden jedoch unterschieden nach Einheimischen (VIP) und Touristen. Einheimische werden bevorzugt behandelt. Befindet sich ein Einheimischer in der Warteschlange, wird dieser zuerst telefonieren, sobald das Telefon frei ist. Befinden sich mehrere Einheimische in der Warteschlange, wird der erste zuerst abgearbeitet. Das Verhältnis von Einheimischen zu Touristen kann mittels des Parameters percVIP geregelt werden.

Betriebsmodus 3: In diesem Modus gibt es eine Warteschlange und zwei Telefone. Das erste Telefon behandelt die Warteschlange analog zu Betriebsmodus 2. Das zweite Telefon behandelt die Warteschlange der Reihe nach unabhängig davon, ob es sich um einen Touristen oder einen Einheimischen handelt.

3.9 Werte für die Auswertung

Alle in der Tabelle 2 aufgeführten Werte sollen auf Basis der Simulation ermittelt und ausgewertet werden.

Ermittelte Werte	Beschreibung
Mittlere Warteschlangenlänge	Durchschnittliche Anzahl der anstehenden Kunden
Mittlere Anstehzeit	Durchschnittliche Wartezeit eines Kunden
Mittlere Verweildauer im Shop	Mittlere Anstehzeit + Mittlere Telefonierdauer
Mittlere Serverauslastung	Anteil an der Gesamtzeit, in der das Telefon belegt ist

Tabelle 2: Werte für die Auswertung

4 Softwaredesign

5 Überprüfung auf Exponentialverteilung

Im Zuge dieses Kapitels erfolgt die Überprüfung der, im Zuge der implementierten Simulation, generierten Zufallszahlen. Diese sollen, wie in den Anforderungen definiert, negativ exponentialverteilt sein.

Die Überprüfung erfolgt zunächst graphisch mittels eines Histogramms und eines Quantil-Quantil-Plots. Im Anschluss erfolgt die rechnerische Überprüfung mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test.

5.1 Graphische Überprüfung

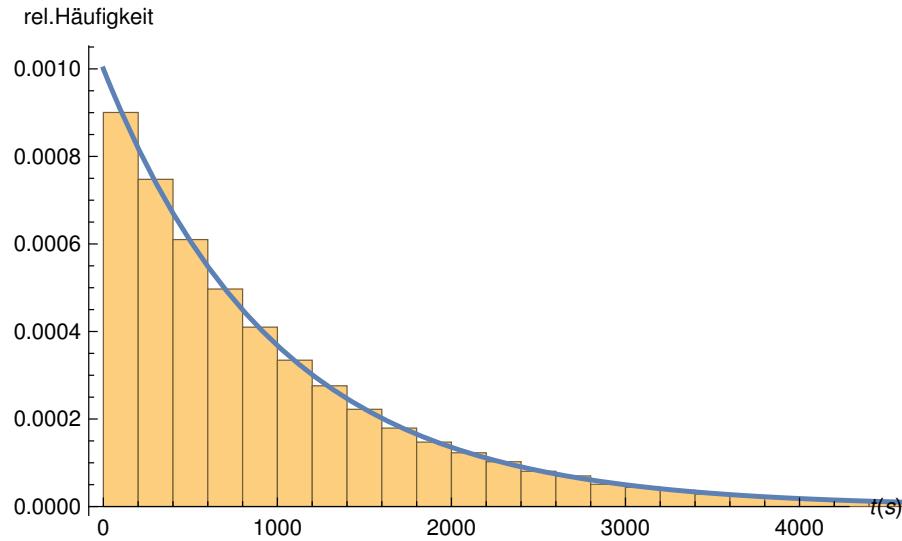


Abbildung 1: Histogramm der generierten Zufallszahlen

Abbildung 1 zeigt die von der Simulation generierten Zufallszahlen in einem Histogramm. Die blaue Linie stellt den Graph einer Exponentialverteilung dar. Der Verlauf des Histogramms ist nahezu identisch mit dem Verlauf der Exponentialverteilung, was ein Indiz für eine Exponentialverteilung der Daten darstellt.

In Abbildung 2 werden die generierten Zufallszahlen in einem Quantil-Quantil-Diagramm dargestellt. Die blaue, gestrichelte Ursprungsgerade zeigt den Verlauf einer Exponentialverteilung im Quantil-Quantil-Diagramm. Die generierten Daten werden durch die blaue Linie repräsentiert. Die Abbildung zeigt somit, dass beide Linien nahezu deckungsgleich sind und es nur eine sehr geringe Abweichung gibt. Das Quantil-Quantil-Diagramm liefert somit einen weiteres Indiz dahingehend, dass die generierten Zufallszahlen tatsächlich exponentialverteilt sind.

5.2 Rechnerische Überprüfung

Für eine weitere Überprüfung werden die generierten Daten mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test auf eine Exponentialverteilung überprüft. Die Hypothese H_0 lautet hierbei:

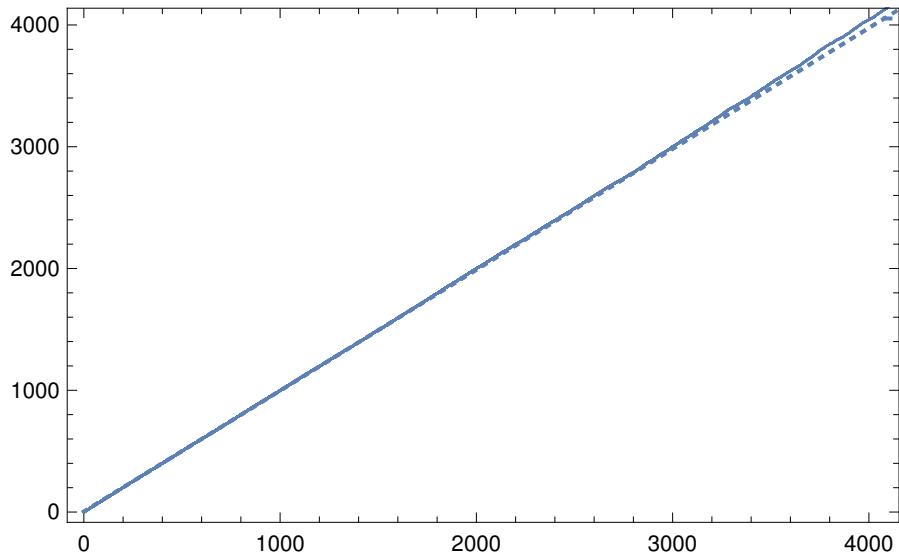


Abbildung 2: Quantil-Quantil-Diagramm der generierten Zufallszahlen

H_0 : Die generierten Zufallszahlen sind exponentialverteilt, Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$
Die Ergebnisse der einzelnen Tests sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Statistic	P-Value
Anderson-Darling	0.482866	0.764349
Cramér-von Mises	0.0690154	0.757621
Kolmogorov-Smirnov	0.00201837	0.80994
Kuiper	0.00390365	0.478494
Pearson χ^2	191.088	0.643726
Watson U^2	0.0689189	0.503982

Laut dem Shapiro-Wilk-Test kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, da der p-Wert mit 0,80994 deutlich über dem Signifikanzniveau von 0,05 liegt. Ebenso kann die Nullhypothese bei den Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Tests nicht abgelehnt werden, da der p-Wert hier ebenso mit 0,764349 bzw. 0,0764349 deutlich über dem Signifikanzniveau liegt.

Durch die Tests kann somit eine Exponentialverteilung der generierten Zufallszahlen nicht widerlegt werden. In Kombination mit der graphischen Überprüfung ist es plausibel, wenn von exponentialverteilten Werten ausgegangen wird. Ein entgültiger Beweis kann nicht erbracht werden.

6 Auswertung der Ergebnisse

Im Zuge dieses Kapitels werden alle Ergebnisse der Simulation und die daraus errechneten Werte erläutert. Zusätzlich werden relevante Größen durch Plots veranschaulicht. Die einzelnen Auswertungen werden mit Hilfe des Theorems von Little validiert.

Die Anzahl und damit die Kombinationsmöglichkeiten der unterschiedlichen Parameter ist sehr groß. Im Verlauf dieser Studienarbeit werden ausschließlich die Auswirkungen verschiedene Werte für den Parameter durchschnittliche Zwischenankunftszeit auf den Verlauf der Simulation ausgewertet. Weitere Simulationen mit anderen Parameterwerten können durchgeführt werden. Die unterschiedlichen Parameter sind in der Tabelle 1 aufgelistet.

6.1 Modell „Ein Telefon“

Für den in Kapitel 3 aufgelisteten ersten Betriebsmodus (ein Server, welcher alle Clients bedient) werden im folgenden die Auswertungen aufgeführt. Exemplarisch werden vier verschiedene durchschnittliche Ankunftszeiten für die Clients verwendet. Zunächst wird eine durchschnittliche Ankunftszeit von $1000s$ angenommen, was bei einer durchschnittlichen Telefonierdauer von $100s$ (Dauer der Serverbelegung) einer sehr geringen Serverauslastung entspricht. Anschließend werden mit den durchschnittlichen Ankunftszeiten von $400s$ und $100s$ die Auswirkungen von höherer Serverauslastung auf das Ergebnis der Simulation erläutert.

Für jede durchschnittliche Ankunftszeit werden zunächst die zu erwartenden Werte, basierend auf den Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle ermittelt. Die einzelnen Formeln sind im folgenden Kapitel aufgeführt. Betrachtet werden hierbei, wie in den 3 erläutert die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System, durchschnittliche Warteschlangenlänge, durchschnittliche Verweildauer im System und die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange. Die berechneten Größen werden als Erwartungswerte betrachtet gegen die die durch die Simulation ermittelten Werte geprüft werden.

Die Maßnahmen für die Verifikation der implementierten Simulation werden im Kapitel (REFERENZ AUF DIE UNITTEST KAPITEL) näher beschrieben. In den folgenden Abbildungen wird die durchschnittliche Zwischenankunftszeit mit „MeanAr“ abgekürzt.

6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle

Die im folgenden aufgeführten Formeln gelten für M/M/1 Warteschlangenmodelle im eingeschwungenen Zustand. Mit L_s wird die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System bezeichnet. L_q gibt die durchschnittliche Länge der Warteschlange an. W_s definiert die durchschnittliche Verweildauer der einzelnen Kunden im System und W_q die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (1)$$

$$L_q = \frac{\rho \lambda}{\mu - \lambda} \quad (2)$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (3)$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (4)$$

In den einzelnen Gleichungen sind λ , μ und ρ wie folgt definiert: λ beschreibt die durchschnittliche Ankunftszeit der Kunden pro Sekunde. μ definiert die durchschnittliche Telefonierdauer der Kunden pro Sekunde. Und ρ beschreibt die durchschnittliche Auslastung des Telefons [1].

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems

Laut dem Theorem von Little muss die durchschnittliche Anzahl von Kunden in einem Warteschlangensystem gleich dem Produkt aus der durchschnittlichen Ankunftsrate (Λ) und der durchschnittlichen Verweildauer (W_s) im System sein, wenn das System sich in einem eingeschwungenen Zustand befindet.

$$L_s = \lambda * W_s \quad (6)$$

Stellt man die Formel um, muss im eingeschwungenen Zustand gelten:

$$\lambda * W_s - L_s = 0 \quad (7)$$

Anhand dieser Gleichung werden im weiteren Verlauf der Studienarbeit die einzelnen Auswertungen validiert.

6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s

6.1.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,111111 \quad (8)$$

$$Lq = 0,0111111 \quad (9)$$

$$Ws = 111,111 \quad (10)$$

$$Wq = 11,1111 \quad (11)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

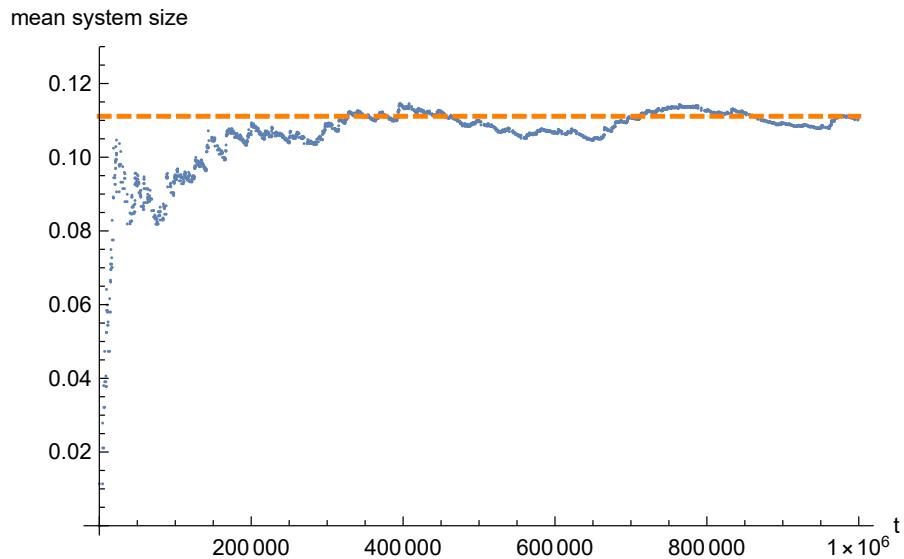


Abbildung 3: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000s

Abbildung 3 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 200000s liegt diese durchschnittlich bei 0,11, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation um ca. 0,01. Der Erwartungswert von 0,111111 wird durch die Simulation nicht exakt erreicht. Ursache hierfür könnte ein systematischen Fehler von ca. 0,01 bei der Berechnung sein. Alternativ würde ein noch nicht vollständig eingeschwungenes System das Verhalten ebenfalls erklären. Weitere Erkenntnisse liefert die Validierung mit Hilfe des Little Theorems. Allgemein zeigt dieser Plot, dass die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System sehr gering ist. Durch die Vergleichsweise kurze Telefonierzeit in Kombination mit einer lange Zwischenankunftszeit ist dieser Wert plausibel.

Betrachtet man Abbildung 4, wird deutlich, dass die durchschnittliche Verweildauer im System bis zu einer Simulationszeit von 200000s stark variiert. Doch auch mit steigender Simulationszeit bleibt sie unter dem erwarteten Wert von 111.111 bei durchschnittlich. Der Grund hierfür könnte wiederum ein systematischer Fehler in der Berechnung,

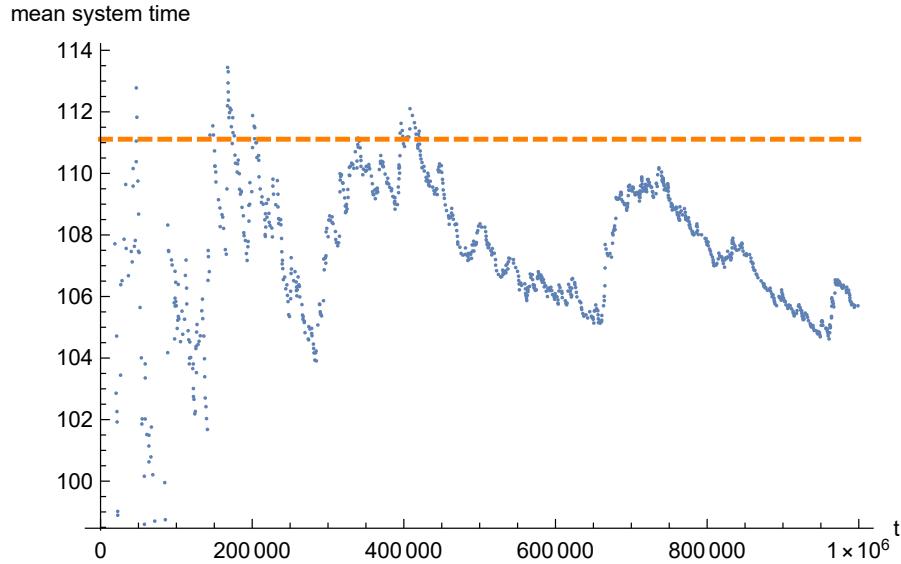


Abbildung 4: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

beispielsweise aufgrund von Ungenauigkeiten durch Runden sein, oder ein noch nicht vollständig eingeschwungenes System.

Bei der Betrachtung der in Abbildung 5 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge fällt auf, dass die Werte wiederum bis zu einer Simulationsdauer von 200000s stark variieren schwanken. Anschließend nähern sich die Werte dem Erwartungswert von 0,011111 an, bleiben jedoch unterhalb. Es handelt sich hierbei um eine Abweichung von ca. 0,0015, was wiederum durch einen systematischen Fehler, oder ein nicht vollständig eingeschwungenes System erzeugt werden könnte.

Die in Abbildung 6 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 5 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Gegen Ende der Simulation nähert sich die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange dem Erwartungswert von 11,1111 an, bleibt jedoch mit einer Abweichung von ca. 1,51 unterhalb.

Die Abbildung 7 zeigt die einzelnen Werte für die Warteschlangenlänge über die Simulationszeit. Diese Abbildung ist nicht aussagekräftig. Hintergrund dafür ist die Implementierung der Simulation. Im Warteschlangenmodell wird zwischen drei verschiedenen Events unterschieden. Betritt ein neuer Kunde den Telefonshop, wird ein Arrival Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 erhöht. Ist das Telefon frei, wird ein Begin Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 reduziert. Hat ein Kunde sein Telefonat beendet, wird ein Finish Event ausgelöst, was wiederum ein Begin Event auslöst, da das Telefon frei ist. Ein Problem gibt es hierbei für den Fall, dass kein Kunde im Laden steht und somit auch die Warteschlange leer und das Telefon

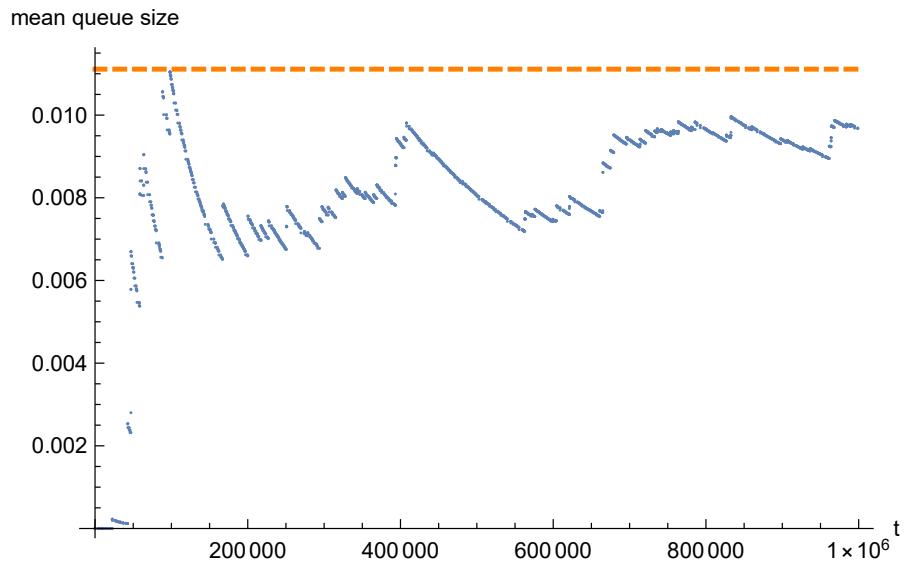


Abbildung 5: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000s

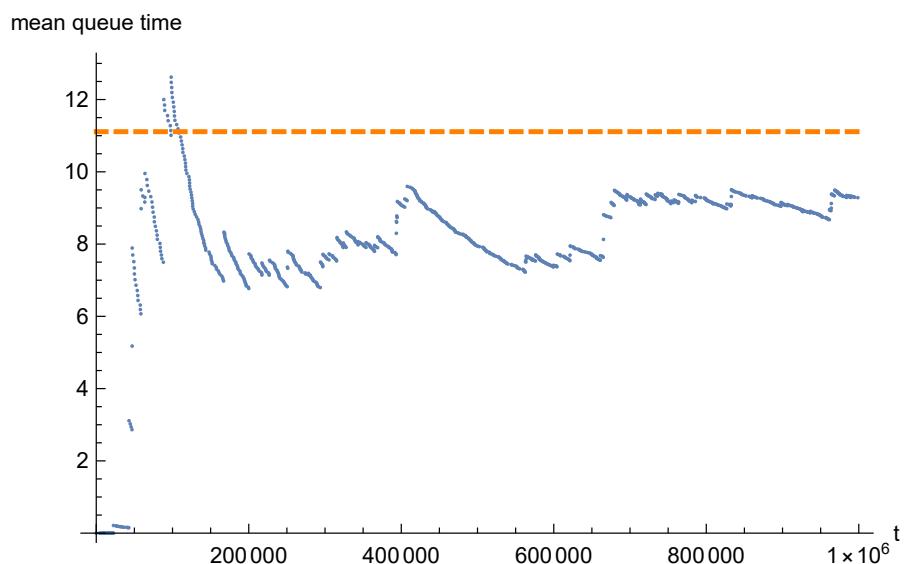


Abbildung 6: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

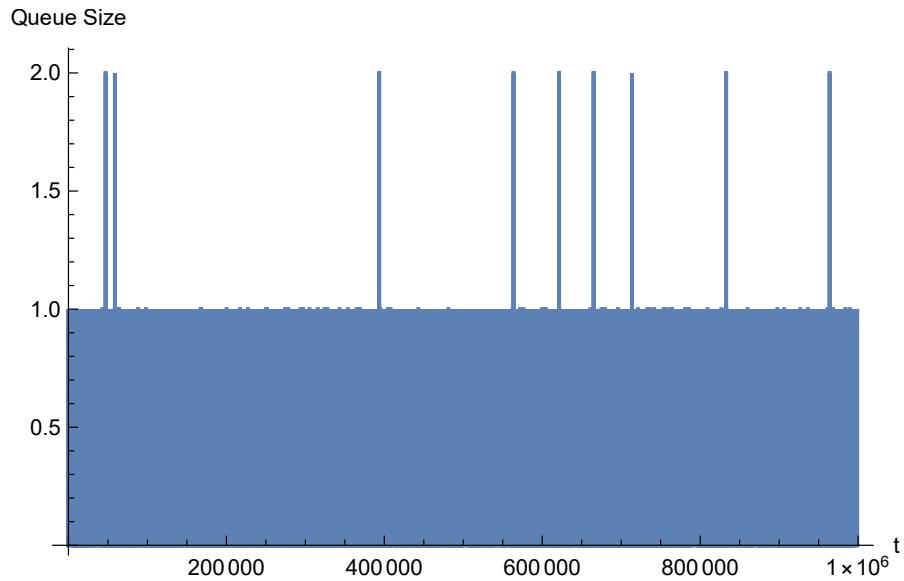


Abbildung 7: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 1000s

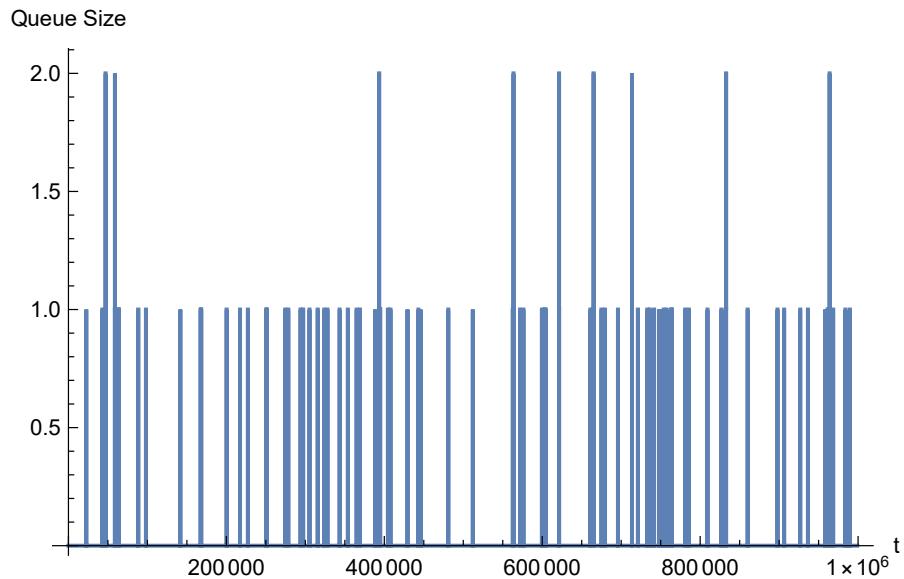


Abbildung 8: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 1000s

frei ist. Betritt nun ein neuer Kunde den Laden, wird ein Arrival Event ausgelöst und direkt anschließend ein Begin Event, da das Telefon frei ist und der Kunde sein Telefonat sofort beginnen kann. Er befindet sich somit für 0s in der Warteschlange. Aufgrund der Events wird die Warteschlangenlänge jedoch trotzdem erhöht und direkt wieder gesenkt. Es gibt somit für den gleichen Zeitstempel zwei unterschiedliche Warteschlangenlängen. Abbildung 8 zeigt die gleiche Situation ohne die eben erläuterte Situation. Es wird hierbei nur eine Warteschlangenlänge angezeigt, wenn auch wirklich ein Kunde länger als 0s in der Warteschlange wartet. Da das System nur sehr gering ausgelastet ist, ist die geringe Warteschlangenlänge plausibel.

6.1.3.3 Validierung der Simulation

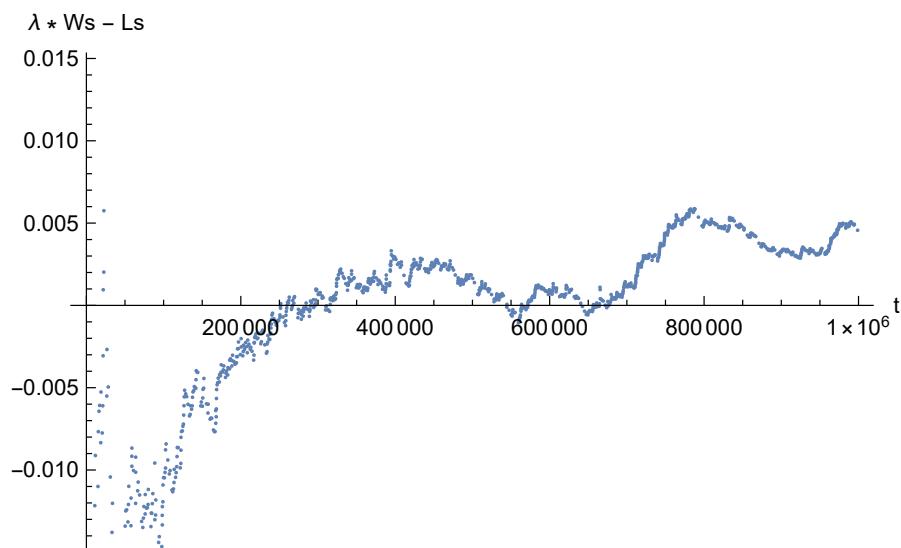


Abbildung 9: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

In Abbildung 9 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 350000s liegt der Wert sehr nah an dem geforderten Erwartungswert von 0, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation im Bereich von 0,004. Da die Differenz zum Erwartungswert sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System wird entweder um 0,004 zu gering angenommen, oder die Verweildauer der Kunden im System um 0,004 zu lang. Ebenso ist eine Kombination der beiden Fehler möglich. Insgesamt deckt sich diese Aussage mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten

Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.011111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 9 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System ab einer Simulationszeit von ca. 400000s den für ein eingeschwungenes System erforderlichen Wert von 0 näherungsweise erreicht, kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.1.4 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s

6.1.4.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 400s ($\lambda = \frac{1}{400}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,333333 \quad (12)$$

$$L_q = 0,0833333 \quad (13)$$

$$W_s = 133,333 \quad (14)$$

$$W_q = 33,3333 \quad (15)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.4.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 10 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 400000s schwankt diese nur noch sehr gering, liegt jedoch über dem Erwartungswert von 0,333333. Es ist von einem systematischen Fehler von 0,01, oder einem nicht vollständig eingeschwungenen System auszugehen.

Auch die in Abbildung 11 dargestellte durchschnittliche Verweildauer im System schwankt bis zu einer Simulationsdauer von ca. 400000s stark. Anschließend schwankt sie um ca. 2 um den erwarteten Wert von 133,333.

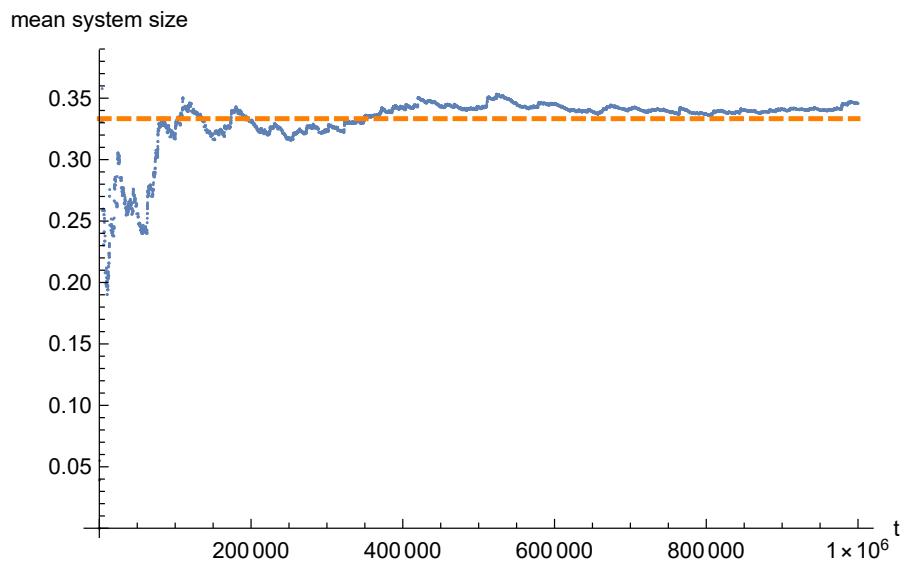


Abbildung 10: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 400s

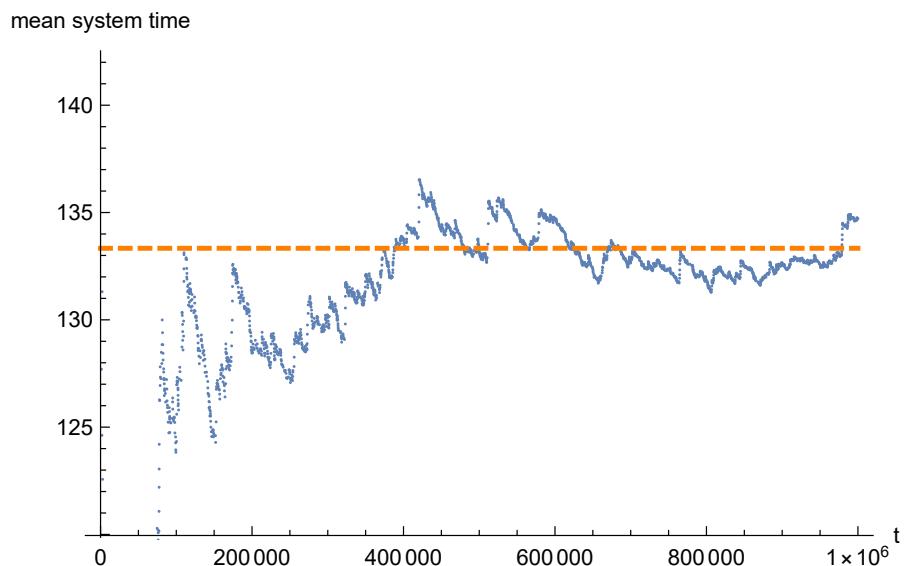


Abbildung 11: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 400s

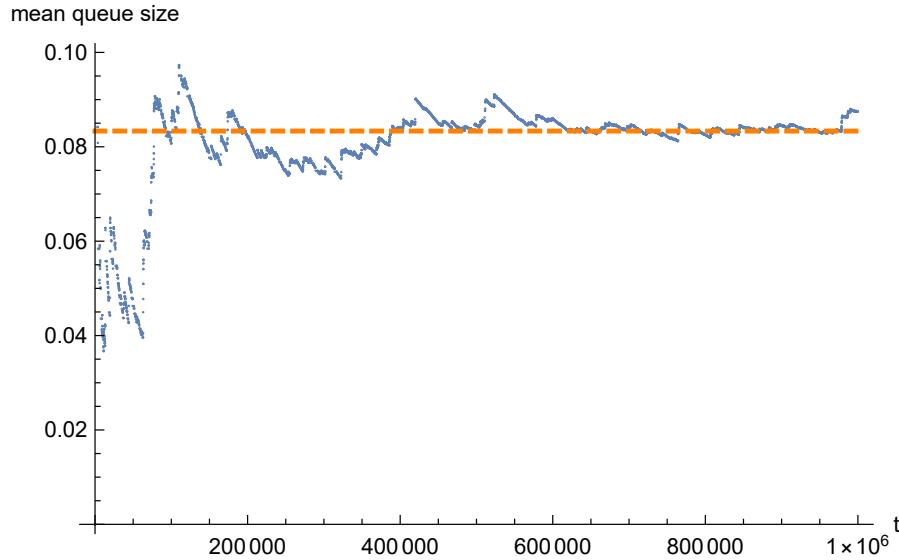


Abbildung 12: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 400s

Die in Abbildung 12 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge schwankt ebenso ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s nur noch um ca. 0,001 um den erwarteten Wert von 0,0833333.

Die in Abbildung 13 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 12 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Beide Werte schwanken ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s um den Erwartungswert. Die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange schwankt um ca. 2 um den Erwartungswert von 33,3333.

Abschließend sind in den Abbildungen 14 und 15 jeweils die Länge der Warteschlange dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, ist die tatsächliche Länge in der Abbildung 15 gefiltert besser zu sehen. Die Warteschlangenlänge ist größer als bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s, doch das Telefon ist noch nicht zu voll ausgelastet, da die Warteschlangenlänge phasenweise noch immer 0 ist.

6.1.4.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 16 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s schwankt der Wert nur noch geringfügig. Die Werte liegen jedoch bis zum Ende der Simulation bei durchschnittlich ca. 0,009. Wie auch

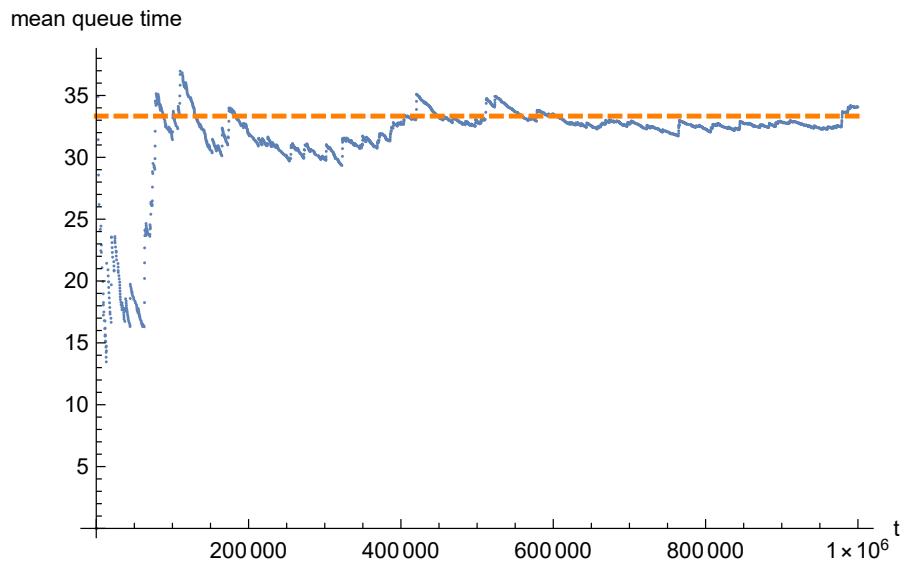


Abbildung 13: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 400s

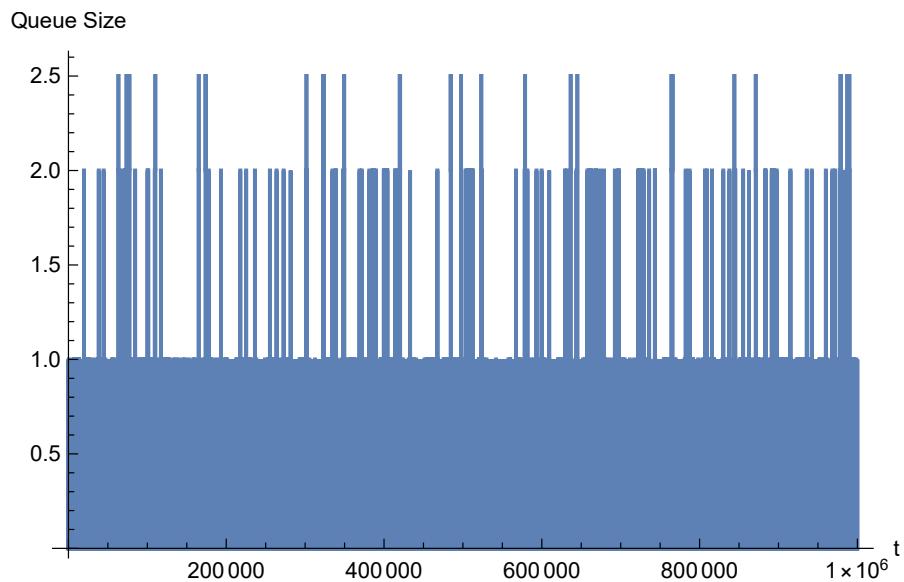


Abbildung 14: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 400s

Queue Size

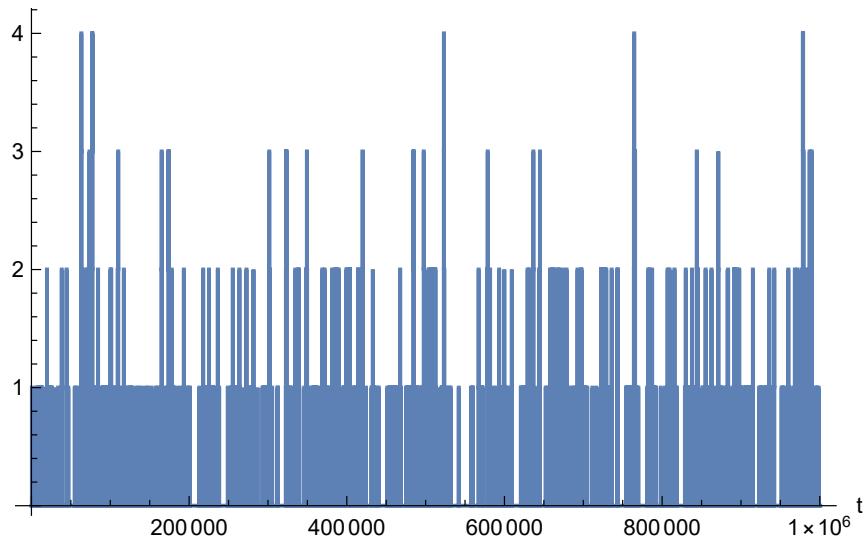


Abbildung 15: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 400s

$\lambda * Ws - Ls$

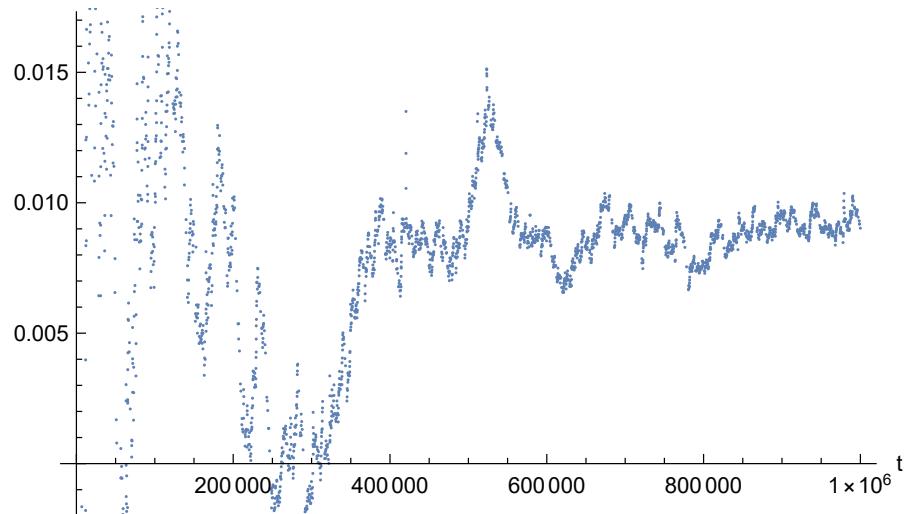


Abbildung 16: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

bei der Auswertung der Simulation mit einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $1000s$, kann hier wiederum von einem systematischen Fehler von $0,009$ mit den selben Ursachen ausgegangen werden. Die Abweichung ist hier größer, da aufgrund der niedrigeren Zwischenankunftszeit deutlich mehr Kunden den Laden besucht haben und somit mehr Zeiten verrechnet wurden. Insgesamt deckt sich dieser Fehler mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.011111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. $400000s$ sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Das in Abbildung 16 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. $600000s$ der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) ab einer Simulationsdauer von $600000s$ erreicht wurde.

6.1.5 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s

6.1.5.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Für durchschnittliche Zwischenankunftszeit und durchschnittliche Telefonierdauer $100s$ ($\lambda = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{100}$), lassen sich die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System nicht berechnen. Die Warteschlangenlänge steigt aufgrund der zu hohen Auslastung des Telefons gegen unendlich. Somit steigt auch die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System gegen unendlich, da diese sich aus den Kunden in der Warteschlange und dem Kunden am Telefon zusammensetzt. Bei einer unendlich langen Warteschlange ist folglich auch die Wartezeit unendlich lang. Außerdem folgt aus einer unendlichen Anzahl von Kunden im System auch, dass die durchschnittliche Zeit im System unendlich lang wird.

6.1.5.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 17 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Durch die großen Schwankungen kann nicht von einem eingeschwungenen System ausgegangen werden. Für eine genauere Beurteilung müsste die Simulation hierfür mit einer längeren

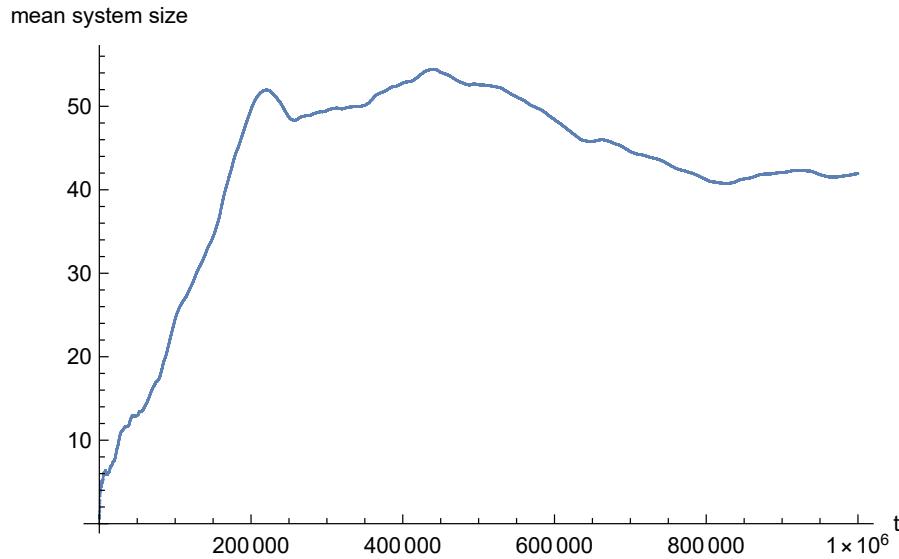


Abbildung 17: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s

Simulationsdauer erneut durchgeführt werden. Ob die durchschnittliche Anzahl der Kunden an Kunden im System gegen den erwarteten Wert von unendlich steigt, kann erst dann analysiert werden.

Abbildung 18 zeigt die durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System. Wiederum kann davon ausgegangen werden, dass das System noch nicht eingeschwungen war, bzw. nicht einschwingen wird.

Die Abbildungen 19 und 20 und auch weisen einen ähnlichen Verlauf auf wie 18. Die Werte schwanken ebenfalls bis zum Ende der Simulation stark.

Abschließend sind in den Abbildungen 21 und 22 jeweils die Länge der Warteschlange dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, zeigt Abbildung 15 wiederum die gefilterten Werte. Die Werte in beiden Abbildungen schwanken jedoch so stark, dass kein Unterschied mehr ersichtlich ist. Gegen Ende der Simulation steigen die Werte deutlich an. Ob sie gegen den erwarteten Wert von unendlich ansteigen lässt sich nur im Zuge einer erneuten Simulation mit einer längeren Simulationsdauer ermitteln.

6.1.5.3 Validierung der Simulation In Abbildung 23 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Im Vergleich zu den beiden Auswertungen mit Zwischenankunftszeiten von 1000s bzw. 400s wird deutlich, dass die Abweichung vom den geforderten Wert 0 in dieser Abbildung erheblich größer ist.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte schwanken bis zum Ende der Simulation deutlich. Das in Abbildung 23 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System während

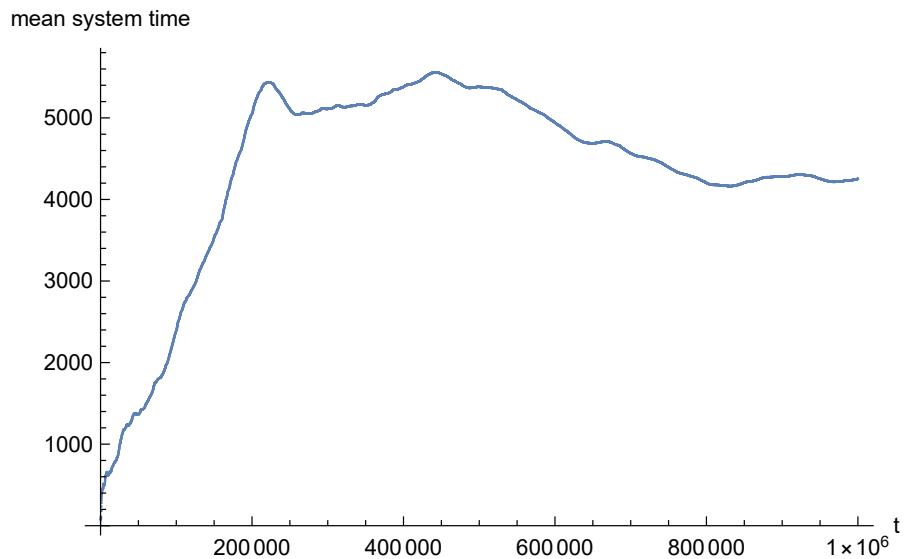


Abbildung 18: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100

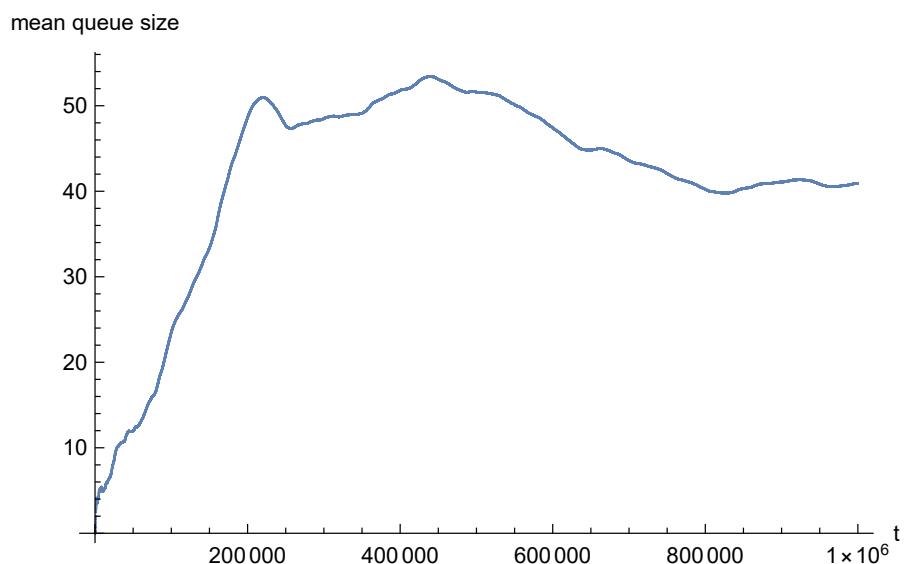


Abbildung 19: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100

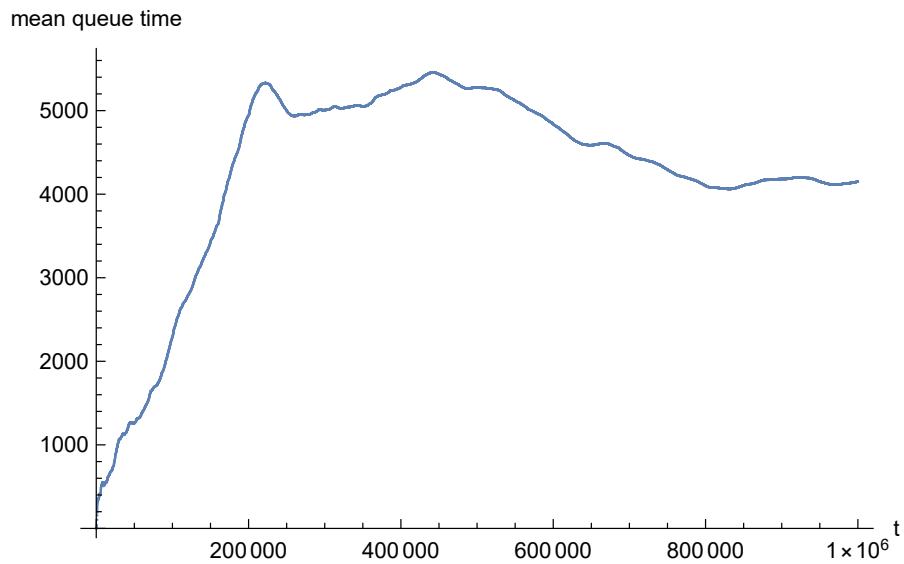


Abbildung 20: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100

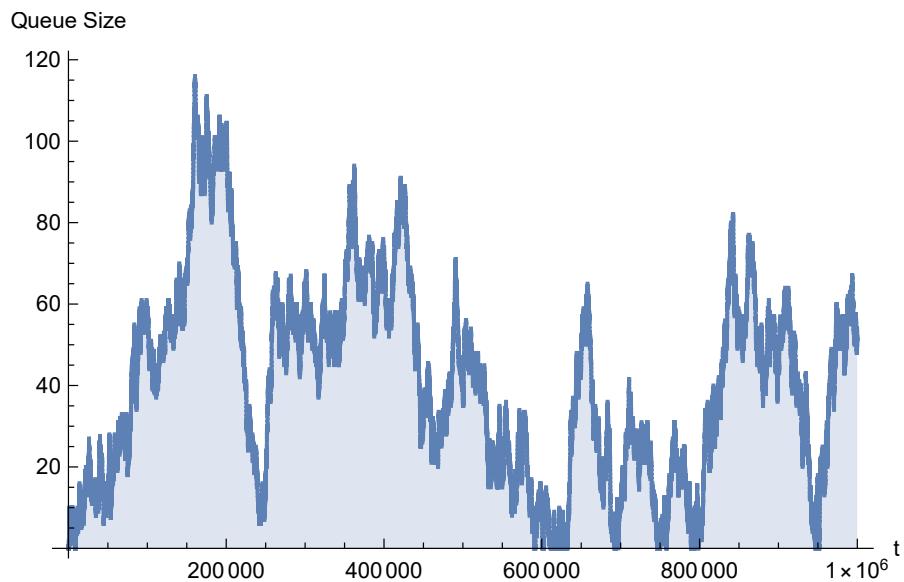


Abbildung 21: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 100

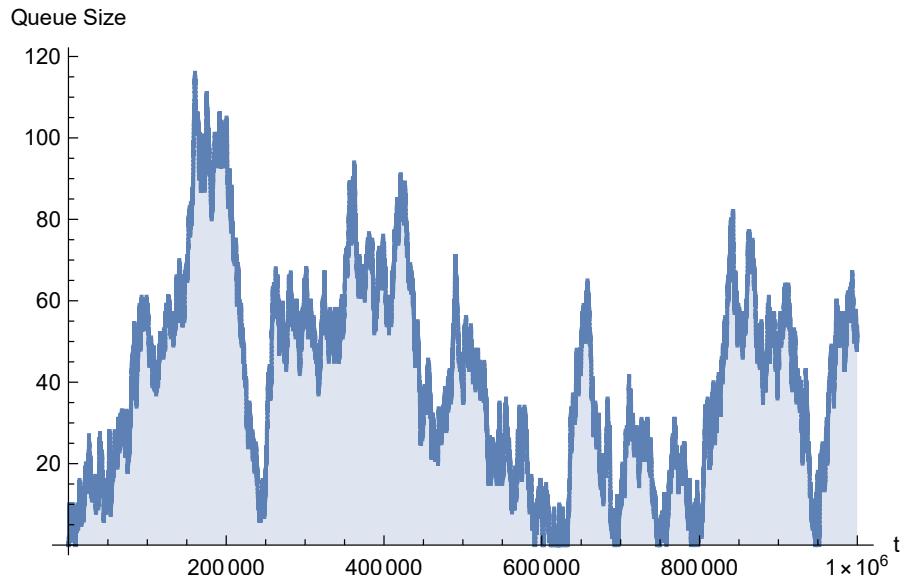


Abbildung 22: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100

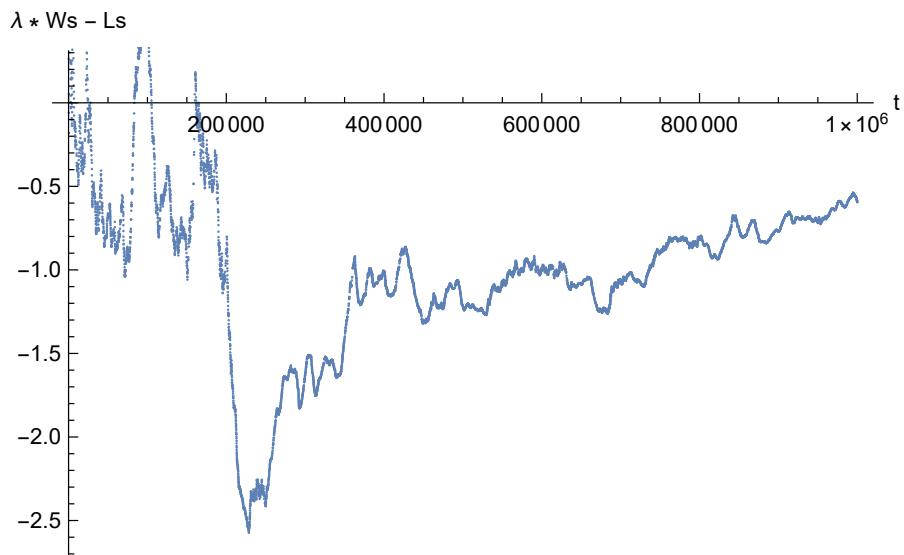


Abbildung 23: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

der gesamten Simulationsdauer den für ein eingeschwungenes System erforderlichen Wert von 0 nicht erreicht. Aufgrund der großen Abweichung kann davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) in dieser Simulation nicht erreicht wurde.

Das beschriebene Verhalten des implementierten Modells stimmt somit mit der Theorie überein, welche besagt, dass wenn die durchschnittliche Zwischenankunftszeit gleich der durchschnittlichen Bediendauer ist, das System nie einschwingen kann. Ein Beweis, dass das System auch bei einer längeren Simulationsdauer nicht einschwingen würde, kann nicht erbracht werden.

Für ein aussagekräftigeres Ergebnis wurde die Simulation erneut mit einer längeren Simulationsdauer durchgeführt. Die Ergebnisse sind im folgenden Abschnitt beschrieben.

6.1.5.4 Erhöhung der Simulationsdauer

Die bisherigen Ergebnisse sind bei einer Simulationsdauer von 10^6 s entstanden. Bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s zeigt sich eine Tendenz zu einer immer weiter ansteigenden Warteschlangenlänge. Um dies besser zu verdeutlichen wird die Simulationsdauer auf 10^7 s erhöht. Die Abbildung 24 zeigt die Warteschlangenentwicklung über die gesamte Zeit. Es wird deutlich, dass die Warteschlangenlänge sehr schwankt. Aus den Abbildungen 27 und 25 ist für die durchschnittliche Warteschlangenlänge ein klarer Trend nach oben zu erkennen. Auch bei der Betrachtung der Verweildauern im System und in der Warteschlange, wie in Abbildungen 28 und 26 zu sehen ist, zeigt sich eine Aufwärtsbewegung.

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Werte keiner Parallelen zur Zeitachse annähern. Das System erreicht während der gesamten Simulationsdauer keinen stabilen Zustand. Bei einer weiteren Erhöhung der Simulationsdauer ist davon auszugehen, dass Werte noch weiter ansteigen werden.

6.1.5.5 Anwendung Gesetzes von Little

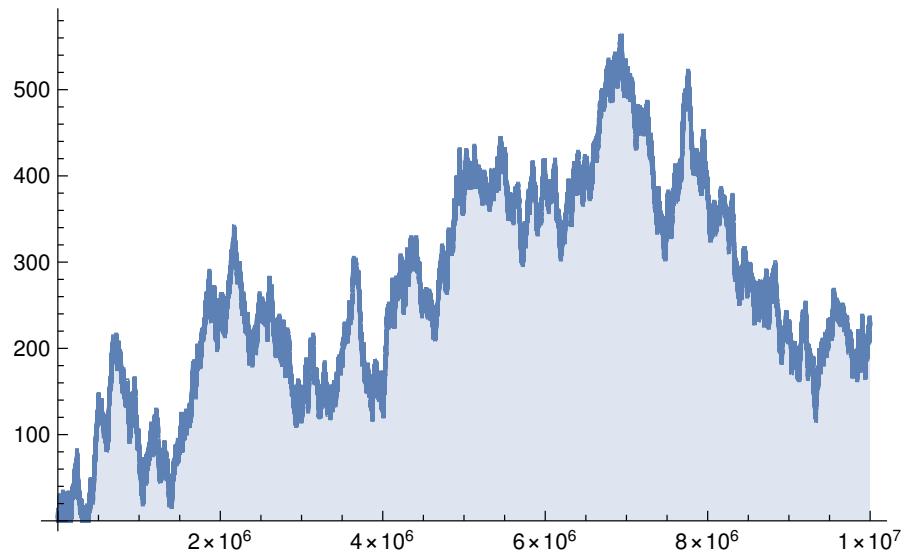


Abbildung 24: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

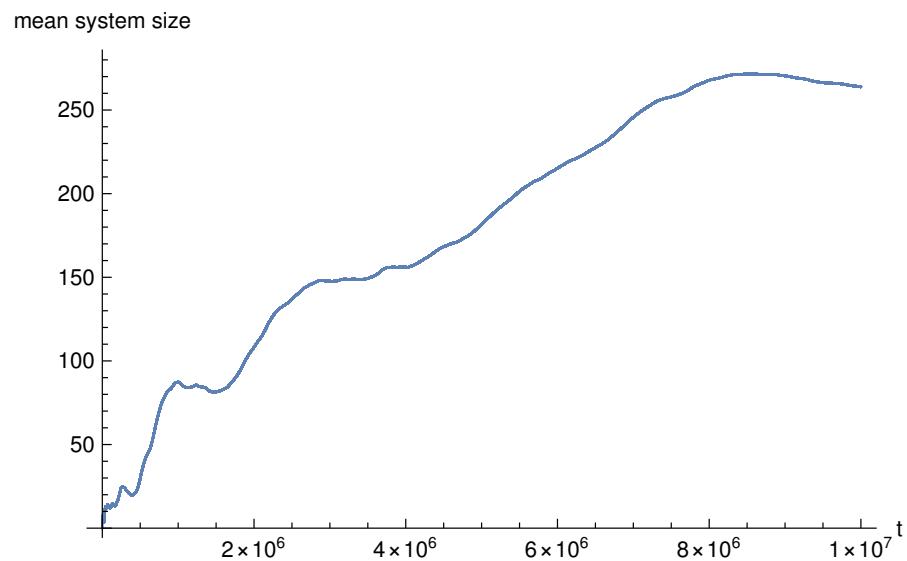


Abbildung 25: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s, Dauer = 10^7 s

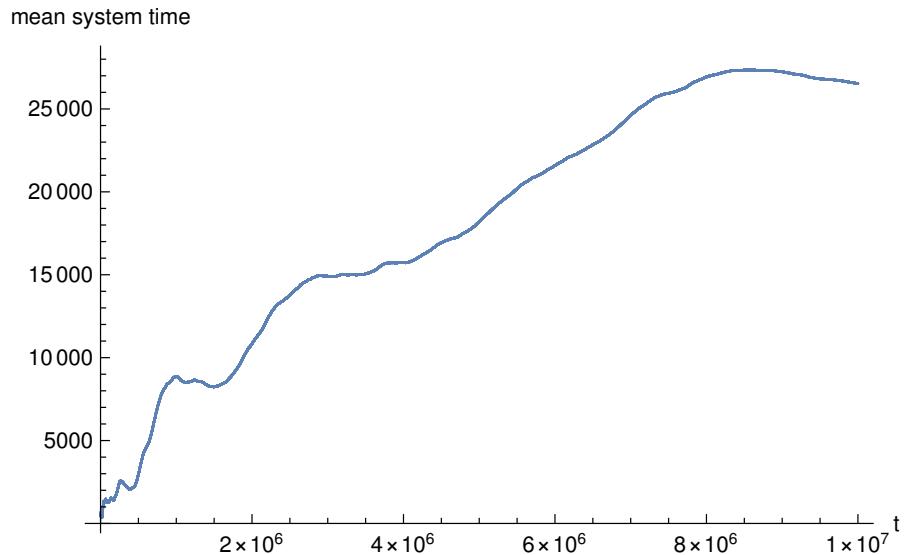


Abbildung 26: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

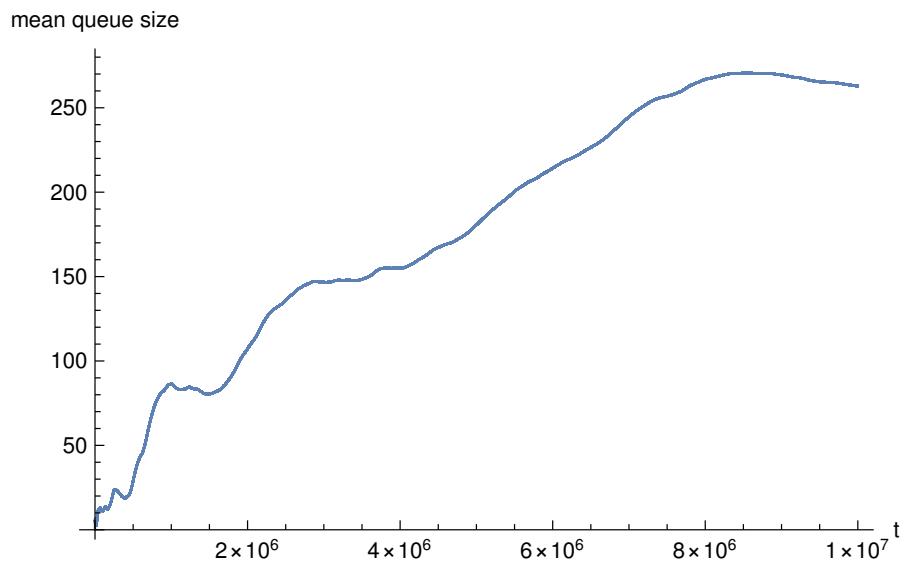


Abbildung 27: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

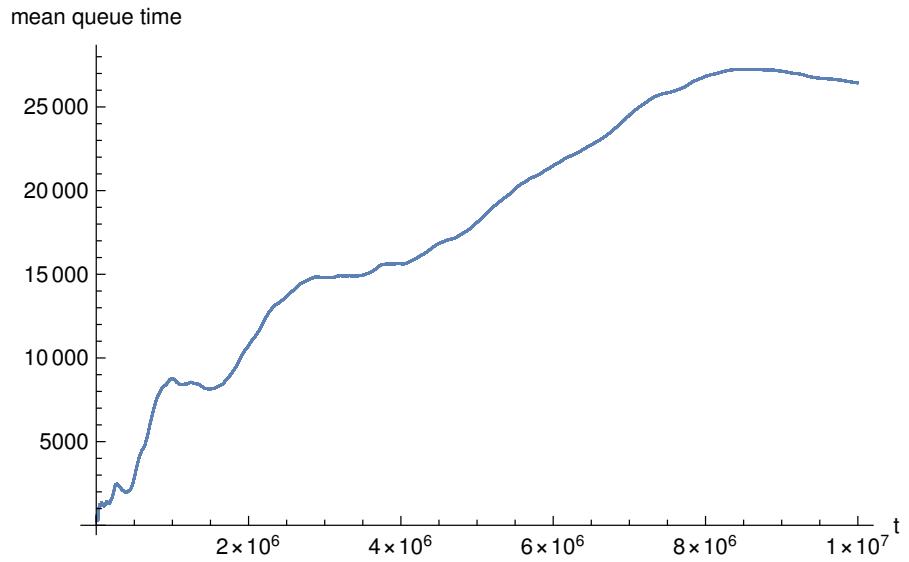


Abbildung 28: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

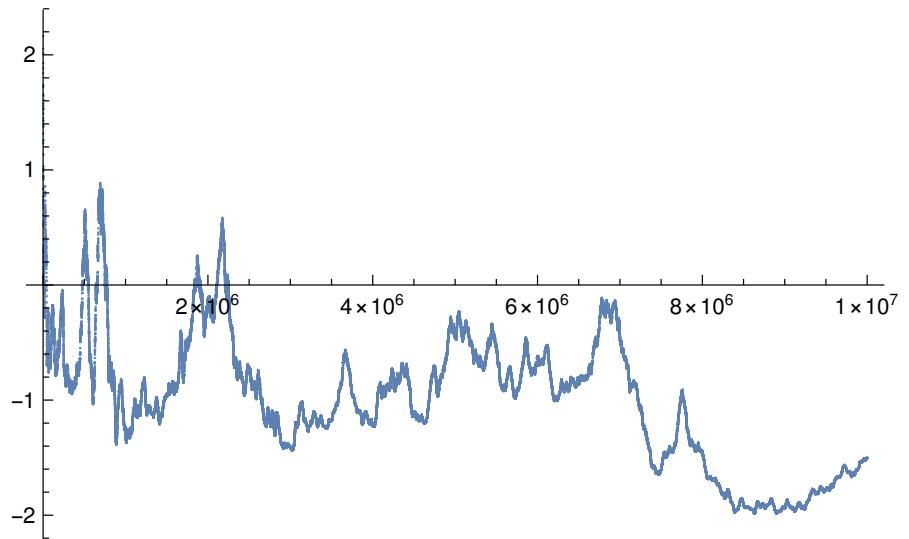


Abbildung 29: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

6.2 Modell „Bevorzugte VIP“

6.2.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.2.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.2.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

6.3 Modell „Zusätzliches VIP Telefon“

6.3.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.3.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.3.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

7 Fazit

Literatur

- [1] Prof. Dietl H. Warteschlangenmodelle. http://www.business.uzh.ch/dam/jcr:00000000-0451-792f-fffffe13aac9/ServiceManagement_Warteschlangenmodelle.pdf. Zugriff am 14.05.2017.
- [2] Steinfeld T. Exponentialverteilung. <http://www.mathepedia.de/Exponentialverteilung.aspx>. Zugriff am 14.05.2017.