

Modell eines Insel-Callshops

2. Projekt zu Modellierung und Simulation

Daniel Graf, Dimitrie Diez, Arne Schöntag, Peter Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
2 Beschreibung des Modells	3
3 Anforderungen/Requirements	3
3.1 Allgemeines	3
3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten	4
3.3 Verteilung der Telefonierzeiten	4
3.4 Zeitmodelierung	4
3.5 Berechnungen	4
3.6 Reports	4
3.7 Parameter	6
3.8 Betriebsmodi	6
3.9 Werte für die Auswertung	8
4 Softwaredesign	8
4.1 Package time	9
4.2 Package queue	11
4.3 Package distribution	12
4.4 Package domain	13
4.5 Package calculation, log	14
4.6 Package config, modellbildung	15
5 Überprüfung auf Exponentialverteilung	15
5.1 Graphische Überprüfung	16
5.2 Rechnerische Überprüfung	16
6 Auswertung der Ergebnisse	17
6.1 Modell „Ein Telefon“	18
6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle	18
6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems	19

6.1.3	Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s	19
6.1.4	Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s	25
6.1.5	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s	30
6.1.6	Vergleich der Telefonauslastungen	35
6.1.7	Erhöhung der Simulationsdauer	35
6.2	Modell „Bevorzugung der Einheimischen (VIP)“	36
6.2.1	Annahme	36
6.2.2	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	40
6.2.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	46
6.2.4	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	50
6.2.5	Eingeschwungener Zustand Littles Gesetz	53
6.3	Modell „Zusätzliches VIP Telefon“	59
6.3.1	Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle	59
6.3.2	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	59
6.3.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	62
6.3.4	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	66
6.3.5	Vergleich von Betriebsmodus 3 (Zwei Telefone) und Betriebsmodus 1 (Ein Telefon)	70
7	Softwaretest	71
7.1	Verifikation	71
7.2	Validation	71
8	Ausblick und Fazit	71
8.1	Abweichung von theoretischen Werten	71
8.2	Auswirkung der unterschiedlichen Betriebsmodi auf die Wartezeiten für die Kunden	72
8.3	Unberücksichtigte Simulationen	72
8.4	Ausblick	72

1 Einführung

Simulationen haben in der moderne einen sehr hohen Stellenwert erlangt, da durch sie zahlreiche, oftmals sehr genaue, Zukunftsprognosen erstellt werden können. Als Grundlage für die Simulationen dienen in der Regel Modelle, welche einen Ausschnitt der Wirklichkeit abbilden. Das Thema dieser Studienarbeit ist die Simulation eines Callshops, bzw. des Telefons in einem Callshop, in einem Inseldorf. Dieser wird für günstige Telefonate ins Ausland verwendet.

2 Beschreibung des Modells

Für die Simulation des Insel-Callshops wird ein Warteschlagenmodell mit Clients und zunächst nur einem Server verwendet. Jede Person die den CallShop betritt wird durch einen neuen Client repräsentiert. Das Telefon des Shops ist durch den Server dargestellt. Möchte eine Person das Telefon zu einem Zeitpunkt benützen, zu dem bereits eine andere Person telefoniert, muss sie sich hinten anstellen und warten, bis die Person ihr Telefonat beendet hat. Im Modell wird dieses durch eine Warteschlage (Queue) realisiert, in die sich ankommende Clients einordnen und sobald der Server nichtmehr belegt ist nach dem FIFO (first in first out) Prinzip bedient werden.

Im Modell werden sowohl die Ankunftszeiten der Clients, als auch die Dauer der Telefonate durch eine negative Exponentialverteilung beschrieben, da diese sehr nah an den real beobachteten Verhalten liegt. Der mathematische Hintergrund liegt in der Eigenschaft der Exponentialfunktion zugrunde. Die Exponentialverteilung ist die einzige kontinuierliche Verteilung, welche zugleich die Markoveigenschaft, die sogenannte Gedächtnislosigkeit, erfüllt. Diese besagt, dass die seit dem letzten Ereignis vergangene Zeit (in diesem Beispiel Anrufer) keinen Einfluss auf die Verteilung der Zeit bis zum nächsten Ereignis (bis zum nächsten Anruf) hat [2].

Darüber hinaus wird ein zweites Modell betrachtet, in welchem die Bewohner des Inseldorfes (Einheimische) bevorzugt werden. Im weiteren Verlauf der Studienarbeit werden diese als VIP oder resident bezeichnet. Der grundlegende Ablauf verläuft wie beim ersten Modell. Allerdings wird, bevor der nächste Client (FIFO Prinzip) telefonieren darf, die Queue nach einem Einheimischen durchsucht. Befindet sich ein Einheimischer in der Queue, wird dieser bevorzugt und darf zuerst telefonieren. Alle restlichen Kunden in der Queue (im folgenden als Touristen bezeichnet) müssen warten bis sich kein Einheimischer mehr in der Warteschlange befindet.

In einem dritten Modell befindet sich ein weiteres Telefon im Callshop. Von den nun zwei Telefonen (zwei Server), behandelt eines alle ankommenden Personen (Clients) gleichberechtigt (analog zum ersten Modell). Das zweite Telefon bevorzugt die Einheimischer und behandelt Touristen nur, wenn kein Einheimischer wartet (analog zum zweiten Modell).

3 Anforderungen/Requirements

3.1 Allgemeines

Die Software soll die Simulation eines Warteschlangensystems durchführen. Zu Beginn der Simulation wird davon ausgegangen, dass die Warteschlange keine Elemente enthält, da sich auch in der Realität beim Öffnen eines Ladens noch keine Personen in einer Warteschlange im Laden befinden.

3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten

Die Zwischenankunftszeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll eine negative Exponentialverteilung aufweisen. Die Exponentialverteilung für eine zufällige Zwischenankunftszeit x ist erfüllt falls sie folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die mittlere Zwischenankunftszeit hat den Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Die mittlere Zwischenankunftszeit soll parametrisierbar sein.

3.3 Verteilung der Telefonierzeiten

Die Telefonierzeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll analog zur Zwischenankunftszeiten eine Exponentialverteilung aufweisen. Die mittlere Telefonierzeit soll ebenfalls parametrisierbar sein.

3.4 Zeitmodellierung

Die Applikation unterliegt keinen harten Echtzeitanforderungen. Die Simulation soll für die gesamte Simulationsdauer so schnell wie möglich durchgeführt werden. Es soll keine Globale Uhr modelliert werden.

3.5 Berechnungen

Die Funktion der Applikation ist die Simulation eines Warteschlangenmodells und die Berechnung relevanter Daten. Alle Werte werden mit Hilfe der Java Klasse BigDecimal berechnet. Für die Division werden 32 Nachkommastellen berücksichtigt und als Rundungsmodus wird Half_Even verwendet, da dieser kumulative Fehler bei sich wiederholenden Berechnungen minimiert. Die Auswertung und grafische Darstellung der Daten erfolgt mit Mathematica.

3.6 Reports

Alle errechneten Ergebnisse sollen über Reports ausgeleitet werden. Die Reports sollen im .csv Format ausgeleitet werden um eine gute Weiterverarbeitung der Ergebnisse zu gewährleisten. Folgende Reports sollen ausgeleitet werden:

- arrival-delta.csv enthält alle Zwischenankunftszeiten einer Simulation
- serve-delta.csv enthält alle Telefonierzeiten

- little-system-all.csv enthält alle Werte für die Gleichung 7
- little-system-normal.csv enthält die Werte der Touristen für die Gleichung 7
- little-system-resident.csv enthält die Werte der Einheimischen für die Gleichung 7
- mean-phone-size-all.csv enthält die durchschnittliche Auslastung des Telefons
- mean-queue-size-all.csv enthält die durchschnittliche Warteschlangenlänge
- mean-queue-size-normal.csv enthält die durchschnittliche Warteschlangenlänge der Touristen
- mean-queue-size-resident.csv enthält die durchschnittliche Warteschlangenlänge der Einheimischen
- mean-system-size-all.csv enthält die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System
- mean-system-size-normal.csv enthält die durchschnittliche Anzahl an Touristen im System
- mean-system-size-resident.csv enthält die durchschnittliche Anzahl an Einheimischen im System
- mean-queue-time-all.csv enthält die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden
- mean-queue-time-normal.csv enthält die durchschnittliche Wartezeit der Touristen
- mean-queue-time-resident.csv enthält die durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen
- mean-system-time-all.csv enthält die durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System
- mean-system-time-normal.csv enthält die durchschnittliche Verweildauer der Touristen im System
- mean-system-time-resident.csv enthält die durchschnittliche Verweildauer der Einheimischen im System
- queue-size-all.csv enthält die Länge der gesamten Warteschlange zu den jeweiligen Zeitpunkten
- queue-size-tourist.csv enthält die Länge der Touristen-Warteschlange zu den jeweiligen Zeitpunkten
- queue-size-resident.csv enthält die Länge der Einheimischen-Warteschlange zu den jeweiligen Zeitpunkten

3.7 Parameter

Die Tabelle 1 zeigt alle möglichen Parameter, welche die Software steuern. Alle Parameter sind optional.

Parameter	Beschreibung	Default
-a	durschnittliche Zwischenankunftszeit der Besucher in Sekunden [s]	1000
-c	durschnittliche Telefonierdauer in Sekunden [s]	100
-d	Dauer der Simulation in Sekunden [s]	100.000.000
-vip	Anteil der Inselbewohner an den Besuchern in Prozent [%]	10
-conf	Betriebsmodus (1, 2, oder 3)	1
-o	Ausgabepfad zur Reporterstellung	../data/

Tabelle 1: Parameter und Defaultwerte

3.8 Betriebsmodi

Die Software hat drei Betriebsmodi:

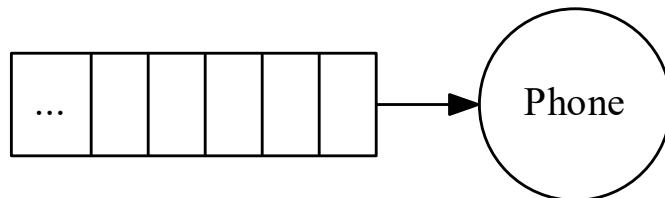


Abbildung 1: Modell des Betriebsmodus 1

Betriebsmodus 1: In diesem Modus gibt es ein Telefon und eine Warteschlange, wie in Abbildung 1 zu sehen ist. Alle Personen in der Warteschlange werden gleichberechtigt behandelt.

Betriebsmodus 2: In dem Modus, der in Abbildung 2 dargestellt ist, gibt es ein Telefon und eine Warteschlange. Die Personen werden jedoch unterschieden nach Einheimischen (VIP) und Touristen. Einheimische werden bevorzugt behandelt. Befindet sich ein Einheimischer in der Warteschlange, wird dieser zuerst telefonieren, sobald das Telefon frei ist. Befinden sich mehrere Einheimische in der Warteschlange,

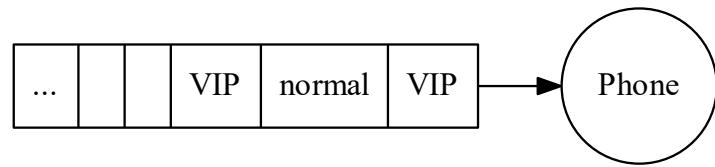


Abbildung 2: Modell des Betriebsmodus 2

wird der erste zuerst abgearbeitet. Das Verhältnis von Einheimischen zu Touristen kann mittels des Parameters percVIP geregelt werden.

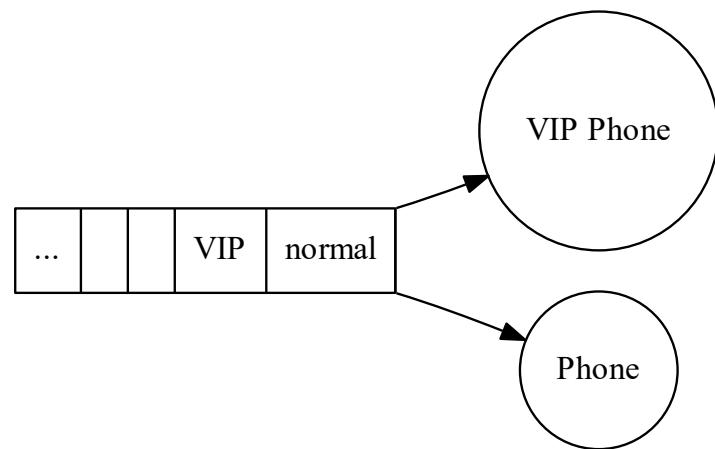


Abbildung 3: Modell des Betriebsmodus 3

Betriebsmodus 3: In diesem Modus gibt es eine Warteschlange und zwei Telefone. Das erste Telefon behandelt die Warteschlange analog zu Betriebsmodus 2. Das zweite Telefon behandelt die Warteschlange der Reihe nach unabhängig davon, ob es sich um einen Touristen oder einen Einheimischen handelt. Siehe dazu Abbildung 3.

3.9 Werte für die Auswertung

Alle in der Tabelle 2 aufgeführten Werte sollen auf Basis der Simulation ermittelt und ausgewertet werden.

Ermittelte Werte	Beschreibung
Mittlere Warteschlangenlänge	Durchschnittliche Anzahl der anstehenden Kunden
Mittlere Anstehzeit	Durchschnittliche Wartezeit eines Kunden
Mittlere Verweildauer im Shop	Mittlere Anstehzeit + Mittlere Telefonierdauer
Mittlere Serverauslastung	Anteil an der Gesamtzeit, in der das Telefon belegt ist

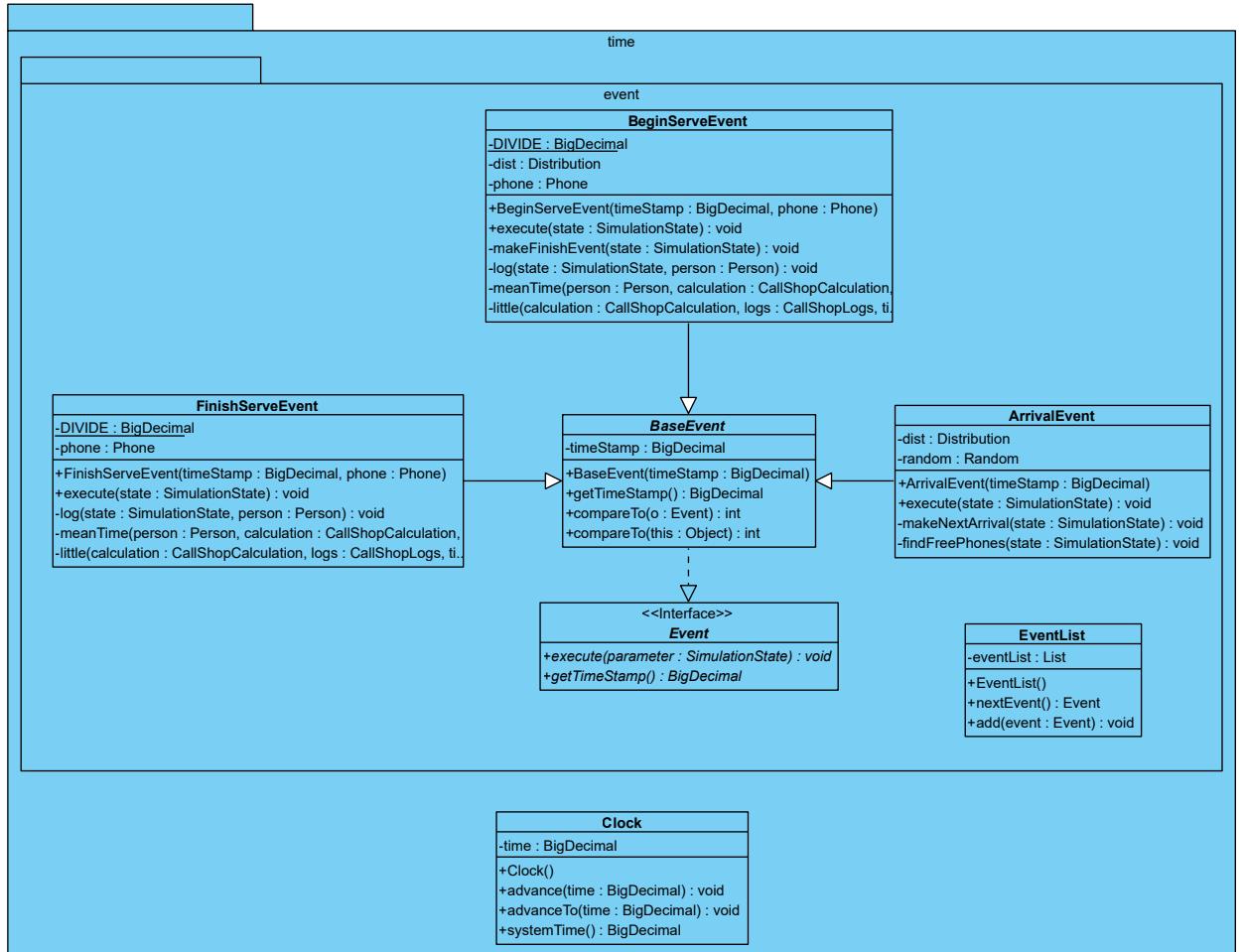
Tabelle 2: Werte für die Auswertung

4 Softwaredesign

Der Aufbau der Anwendung wurde im Team diskutiert und anschließend mittels UML spezifiziert.

Grundsätzlich wurde eine Ereignisorientierte Simulation (Discrete Event Simulation) mit einer Eventliste gewählt. Ursprünglich war geplant die Berechnung mit Mathematica auszuführen. Dies stellte sich aber als nicht performant und komplizierter als notwendig heraus. Alle geforderten Berechnungen wurden dann ebenfalls in das Java Programm eingeplant.

4.1 Package time



In diesem Unterpaket finden sich alle notwendigen Klassen für die Ereignisorientierte Simulation. Die **Clock** hält die Simulationszeit und kann nur vorgestellt werden.

Das Interface **Event** definiert ein Ereignis in der Simulation. Jedes Ereignis hat einen Zeitpunkt, an dem es auftritt, sowie Logik, die zu diesem Zeitpunkt ausgeführt werden soll und potentiell den ganzen Zustand der Simulation verändern kann. Die **EventList** kann Ereignisse aufnehmen und immer das nächste Event mit den frühesten Zeitpunkt liefern.

Die konkreten Events **Arrival**, **BeginServe**, **FinishServe** beschreiben die Ereignisse in der Callshop Problemstellung.

Abbildung 4 zeigt den Verlauf des Ereignisses für Arrival. Zunächst werden freie Telefone gesucht. Wird ein freies Telefon gefunden, wird ein BeginServeEvent mit aktueller Zeit erstellt. Eine neue Person wird erstellt, ihre Ankunftszeit gespeichert, und die Person

wird in die Schlange eingefügt. Zum Schluss wird das nächste ArrivalEvent erstellt, um fortlaufend neue Ankünfte zu haben.

Der Verlauf von BeginServe ist in Abbildung 5 zu sehen. Die nächste (VIP oder normale) Person wird je nachdem, ob es sich um ein VIP Phone oder nicht handelt, aus der Liste geholt. Die Zeit vom Bearbeitungsbeginn wird für die Person gespeichert. Das FinishEvent wird direkt ermittelt und in die EventList eingetragen.

Das Ereignis FinishServe ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Person wird aus dem Phone entfernt. Ihre Endzeit wird gespeichert. Ist die Warteschlange nicht leer, wird direkt ein neues BeginServeEvent erstellt.

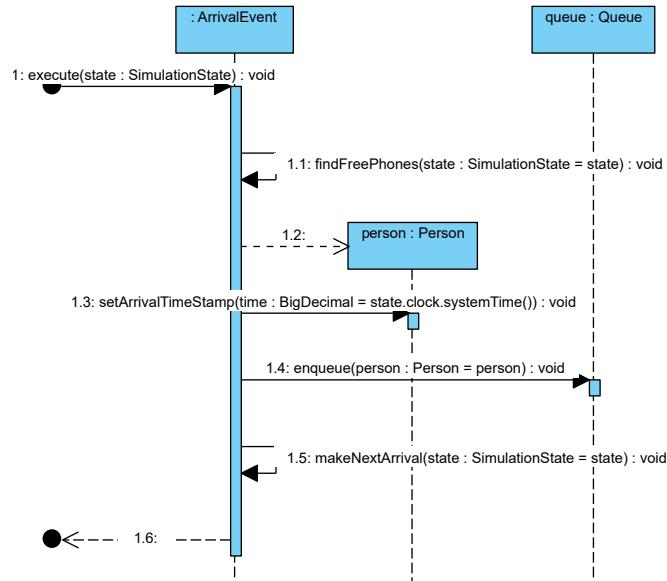


Abbildung 4: Sequenzdiagramm für die Ausführung eines ArrivalEvent

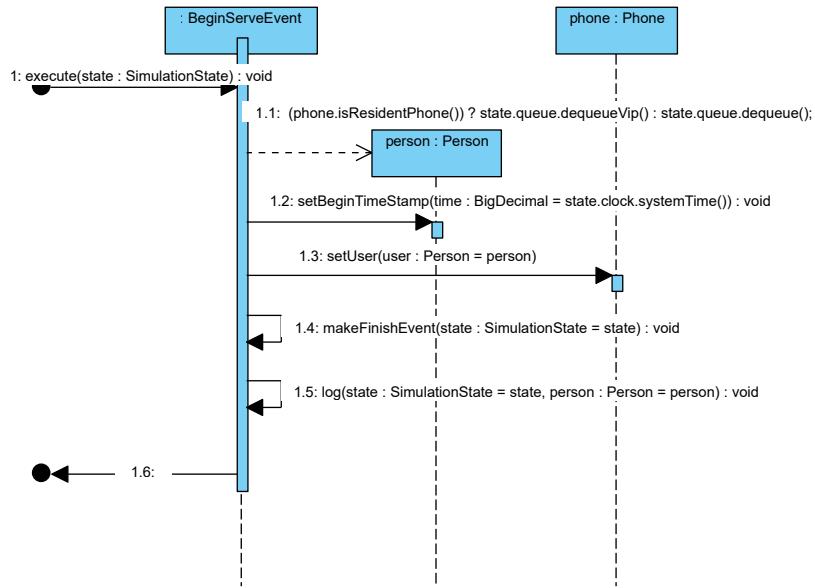
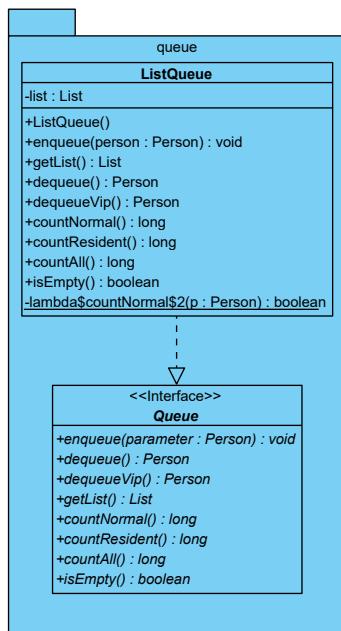


Abbildung 5: Sequenzdiagramm für die Ausführung eines BeginServeEvent

4.2 Package queue



Die `Queue` ist eine FIFO-Warteschlange mit zugehörigen Operationen. Optional kann direkt auch der erste Resident (VIP) aus der Schlange entfernt werden.

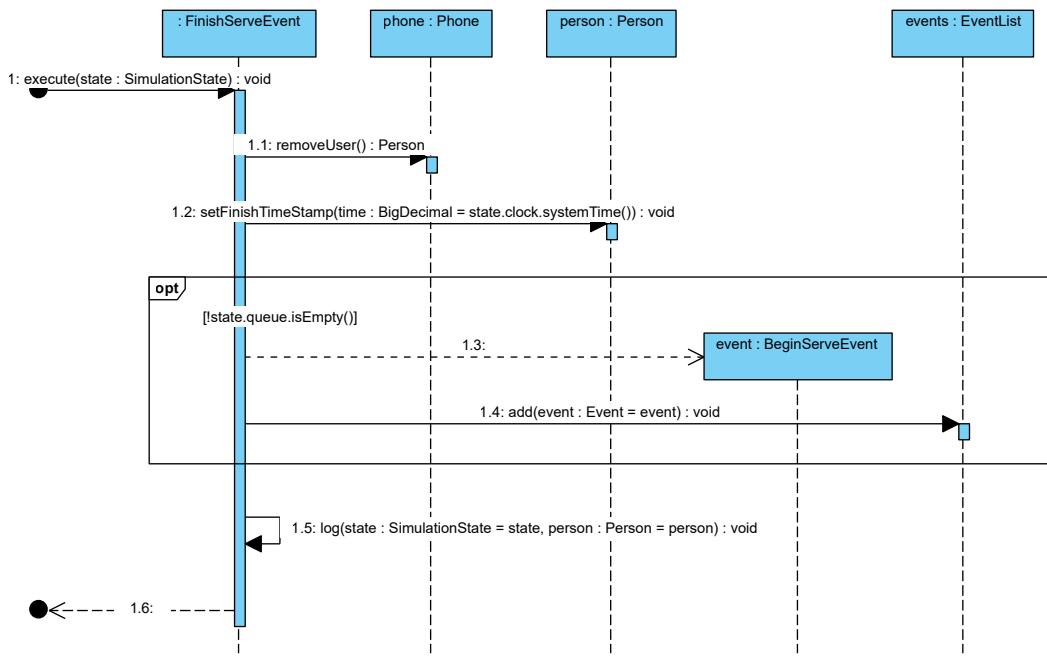
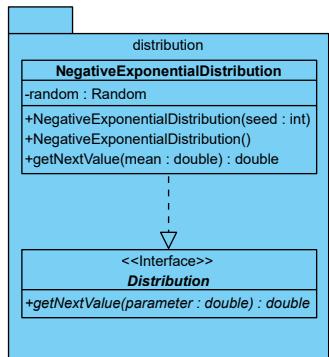


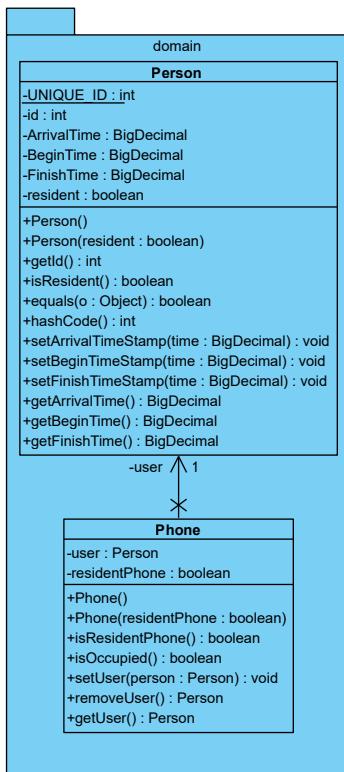
Abbildung 6: Sequenzdiagramm für die Ausführung eines FinishServeEvent

4.3 Package distribution



Die Verteilung ist grundsätzlich eine negative Exponentialverteilung. Die Zufallszahlen können über einen Seed erstellt werden.

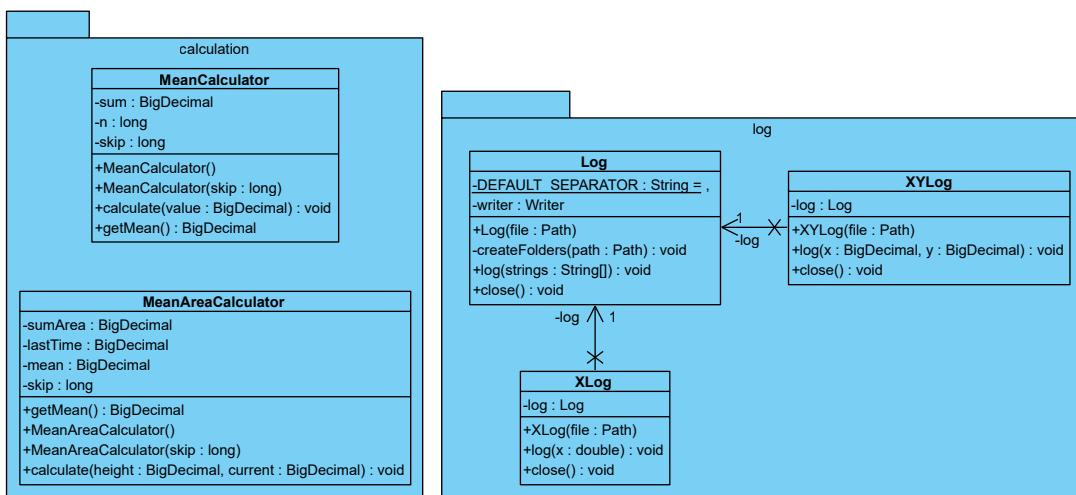
4.4 Package domain



domain beschreibt alle notwendigen Datenstrukturen aus der Domäne des Callshops. Hier gibt es Personen und Telefone. Jede neue Person hat eine einzigartige ID und im Laufe der Simulation merkt sie sich ihre persönlichen Zeitpunkte.

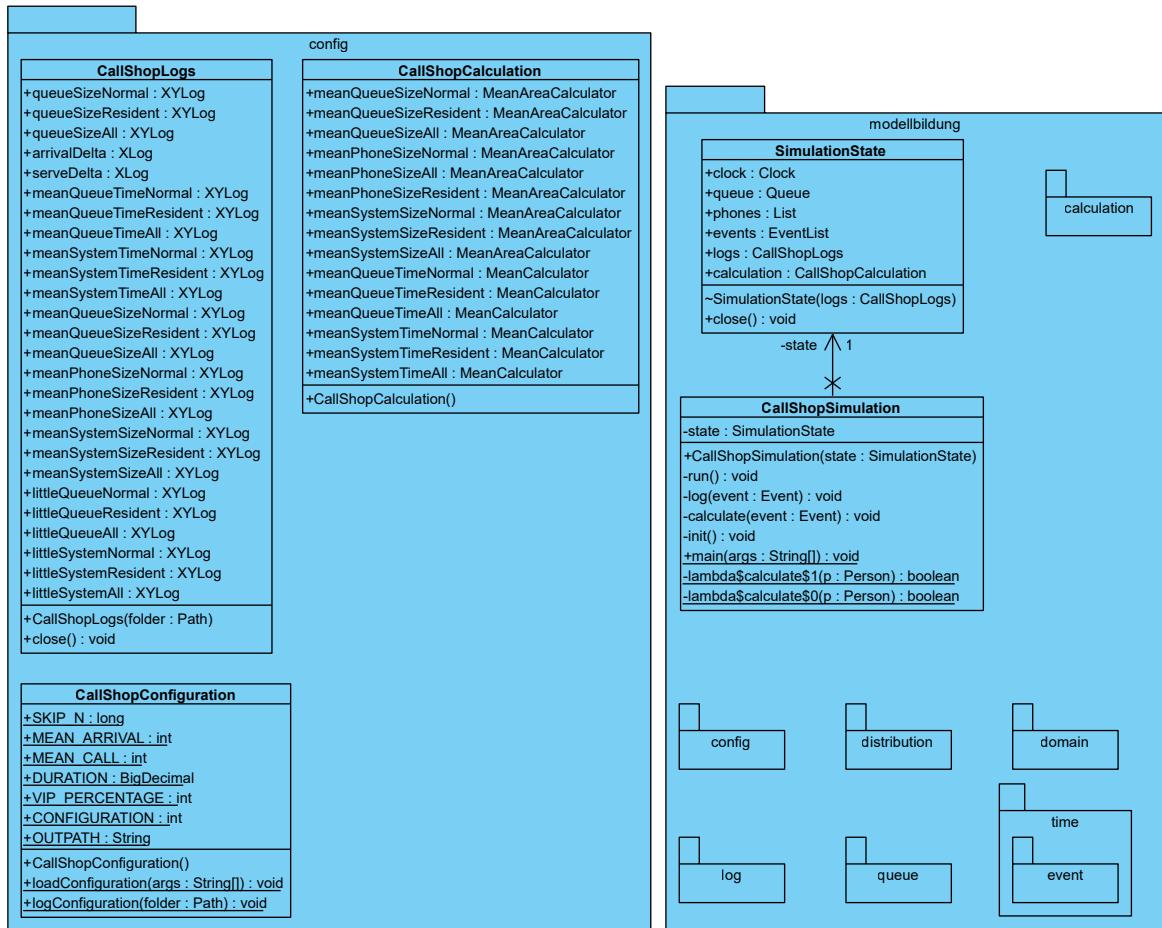
Eine Person kann optional ein Resident (Vip) sein. Ein Telefon kann optional nur Residents (VIPs) annehmen.

4.5 Package calculation, log



Die allgemeine Berechnung für Mittelwerte ist in **calculation** gelöst. Mit **log** können Ergebnisse in ein CSV Dokument gespeichert werden.

4.6 Package config, modellbildung



In `config` ist die Konfiguration der Simulation zu finden. Die Logs und Mittelwert-Rechner für die aktuelle konkrete Simulation sind ebenfalls hier definiert.

Das Paket `modellbildung` beinhaltet alle zuvor beschriebenen Pakete und enthält die Simulationsklasse zum Starten sowie den groben Ablauf der Simulation. Der `SimulationState` hält den aktuellen Zustand der Simulation.

5 Überprüfung auf Exponentialverteilung

Im Zuge dieses Kapitels erfolgt die Überprüfung der, im Zuge der implementierten Simulation, generierten Zufallszahlen. Diese sollen, wie in den Anforderungen definiert, negativ exponentialverteilt sein.

Die Überprüfung erfolgt zunächst graphisch mittels eines Histogramms und eines Quantil-Quantil-Plots. Im Anschluss erfolgt die rechnerische Überprüfung mittels Shapiro-Wilk-,

Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test.

5.1 Graphische Überprüfung

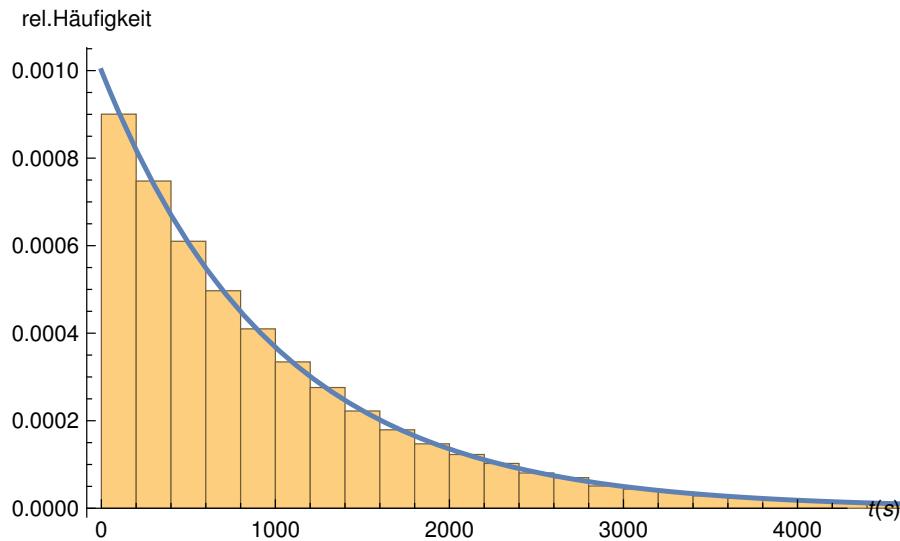


Abbildung 7: Histogramm der generierten Zufallszahlen

Abbildung 7 zeigt die von der Simulation generierten Zufallszahlen in einem Histogramm. Die blaue Linie stellt den Graph einer Exponentialverteilung dar. Der Verlauf des Histogramms ist nahezu identisch mit dem Verlauf der Exponentialverteilung, was ein Indiz für eine Exponentialverteilung der Daten darstellt.

In Abbildung 8 werden die generierten Zufallszahlen in einem Quantil-Quantil-Diagramm dargestellt. Die blaue, gestrichelte Ursprungsgerade zeigt den Verlauf einer Exponentialverteilung im Quantil-Quantil-Diagramm. Die generierten Daten werden durch die blaue Linie repräsentiert. Die Abbildung zeigt somit, dass beide Linien nahezu deckungsgleich sind und es nur eine sehr geringe Abweichung gibt. Das Quantil-Quantil-Diagramm liefert somit einen weiteres Indiz dahingehend, dass die generierten Zufallszahlen tatsächlich exponentialverteilt sind.

5.2 Rechnerische Überprüfung

Für eine weitere Überprüfung werden die generierten Daten mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test auf eine Exponentialverteilung überprüft. Die Hypothese H_0 lautet hierbei:

H_0 : Die generierten Zufallszahlen sind exponentialverteilt, Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$

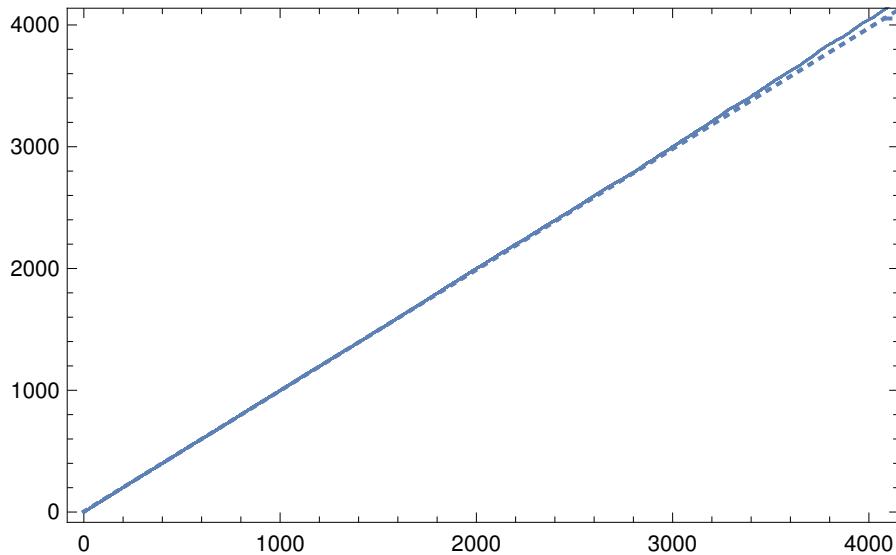


Abbildung 8: Quantil-Quantil-Diagramm der generierten Zufallszahlen

Die Ergebnisse der einzelnen Tests sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Statistic	P-Value
Anderson-Darling	0.482866	0.764349
Cramér-von Mises	0.0690154	0.757621
Kolmogorov-Smirnov	0.00201837	0.80994
Kuiper	0.00390365	0.478494
Pearson χ^2	191.088	0.643726
Watson U^2	0.0689189	0.503982

Laut dem Shapiro-Wilk-Test kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, da der p-Wert mit 0,80994 deutlich über dem Signifikanzniveau von 0,05 liegt. Ebenso kann die Nullhypothese bei den Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Tests nicht abgelehnt werden, da der p-Wert hier ebenso mit 0,764349 bzw. 0,0764349 deutlich über dem Signifikanzniveau liegt.

Durch die Tests kann somit eine Exponentialverteilung der generierten Zufallszahlen nicht widerlegt werden. In Kombination mit der graphischen Überprüfung ist es plausibel, wenn von exponentialverteilten Werten ausgegangen wird. Ein entgültiger Beweis kann nicht erbracht werden.

6 Auswertung der Ergebnisse

Im Zuge dieses Kapitels werden alle Ergebnisse der Simulation und die daraus errechneten Werte erläutert. Zusätzlich werden relevante Größen durch Plots veranschaulicht. Die

einzelnen Auswertungen werden mit Hilfe des Theorems von Little validiert. Die Anzahl und damit die Kombinationsmöglichkeiten der unterschiedlichen Parameter ist sehr groß. Im Verlauf dieser Studienarbeit werden ausschließlich die Auswirkungen verschiedene Werte für den Parameter durchschnittliche Zwischenankunftszeit auf den Verlauf der Simulation ausgewertet. Weitere Simulationen mit anderen Parameterwerten können durchgeführt werden. Die unterschiedlichen Parameter sind in der Tabelle 1 aufgelistet.

6.1 Modell „Ein Telefon“

Für den in Kapitel 3 aufgelisteten ersten Betriebsmodus (ein Server, welcher alle Clients bedient) werden im folgenden die Auswertungen aufgeführt. Exemplarisch werden vier verschiedene durchschnittliche Ankunftszeiten für die Clients verwendet. Zunächst wird eine durchschnittliche Ankunftszeit von $1000s$ angenommen, was bei einer durchschnittlichen Telefonierdauer von $100s$ (Dauer der Serverbelegung) einer sehr geringen Serverauslastung entspricht. Anschließend werden mit den durchschnittlichen Ankunftszeiten von $400s$ und $100s$ die Auswirkungen von höherer Serverauslastung auf das Ergebnis der Simulation erläutert.

Für jede durchschnittliche Ankunftszeit werden zunächst die zu erwartenden Werte, basierend auf den Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle ermittelt. Die einzelnen Formeln sind im folgenden Kapitel aufgeführt. Betrachtet werden hierbei, wie in den 3 erläutert die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System, durchschnittliche Warteschlangenlänge, durchschnittliche Verweildauer im System und die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange. Die berechneten Größen werden als Erwartungswerte betrachtet gegen die durch die Simulation ermittelten Werte geprüft werden.

Die Maßnahmen für die Verifikation der implementierten Simulation werden im Kapitel (REFERENZ AUF DIE UNITTEST KAPITEL) näher beschrieben. In den folgenden Abbildungen wird die durchschnittliche Zwischenankunftszeit mit „MeanAr“ abgekürzt.

6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle

Die im folgenden aufgeführten Formeln gelten für M/M/1 Warteschlangenmodelle im eingeschwungenen Zustand. Mit L_s wird die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System bezeichnet. L_q gibt die durchschnittliche Länge der Warteschlange an. W_s definiert die durchschnittliche Verweildauer der einzelnen Kunden im System und W_q die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (1)$$

$$Lq = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2)$$

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (3)$$

$$Wq = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (4)$$

In den einzelnen Gleichungen sind λ , μ und ρ wie folgt definiert: λ beschreibt die durchschnittliche Ankunftszeit der Kunden pro Sekunde. μ definiert die durchschnittliche Telefonierdauer der Kunden pro Sekunde. Und ρ beschreibt die durchschnittliche Auslastung des Telefons [1].

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems

Laut dem Theorem von Little muss die durchschnittliche Anzahl von Kunden in einem Warteschlangensystem gleich dem Produkt aus der durchschnittlichen Ankunftsrate (Λ) und der durchschnittlichen Verweildauer (Ws) im System sein, wenn das System sich in einem eingeschwungenen Zustand befindet.

$$Ls = \lambda * Ws \quad (6)$$

Stellt man die Formel um, muss im eingeschwungenen Zustand gelten:

$$\lambda * Ws - Ls = 0 \quad (7)$$

Anhand dieser Gleichung werden im weiteren Verlauf der Studienarbeit die einzelnen Auswertungen validiert.

6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s

6.1.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 0,111111 \quad (8)$$

$$Lq = 0,0111111 \quad (9)$$

$$Ws = 111,111 \quad (10)$$

$$Wq = 11,1111 \quad (11)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

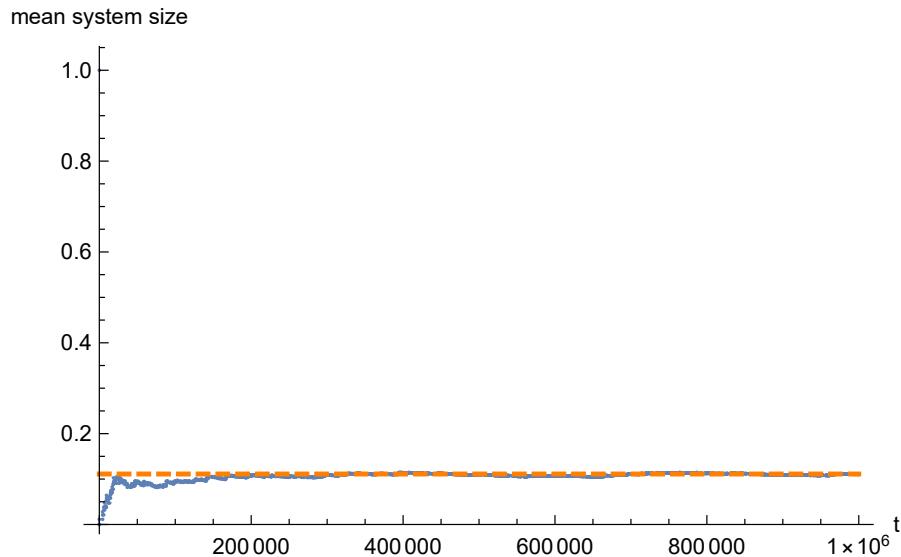


Abbildung 9: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000s

Abbildung 9 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 200000s liegt diese durchschnittlich bei 0.11, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation um ca. 0,01. Der Erwartungswert von 0, 111111 wird durch die Simulation nicht exakt erreicht. Ursache hierfür könnte ein systematischen Fehler, beispielsweise aufgrund von Rundungsfehlern, von ca. 0,01 bei der Berechnung sein. Alternativ würde ein noch nicht vollständig eingeschwungenes System das Verhalten ebenfalls erklären. Weitere Erkenntnisse liefert die Validierung mit Hilfe des Little Theorems. Allgemein zeigt dieser Plot, dass die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System sehr gering ist. Durch die Vergleichsweise kurze Telefonierzeit in Kombination mit einer lange Zwischenankunftszeit ist dieser Wert plausibel.

Betrachtet man Abbildung 10, wird deutlich, dass die durchschnittliche Verweildauer im System bis zu einer Simulationszeit von 200000s stark variiert. Doch auch mit steigender Simulationszeit bleibt sie unter dem erwarteten Wert von 111.111 bei durchschnittlich. Der Grund hierfür könnte wiederum ein systematischer Fehler in der Berechnung, beispielsweise aufgrund von Ungenauigkeiten durch Runden sein, oder ein noch nicht vollständig eingeschwungenes System.

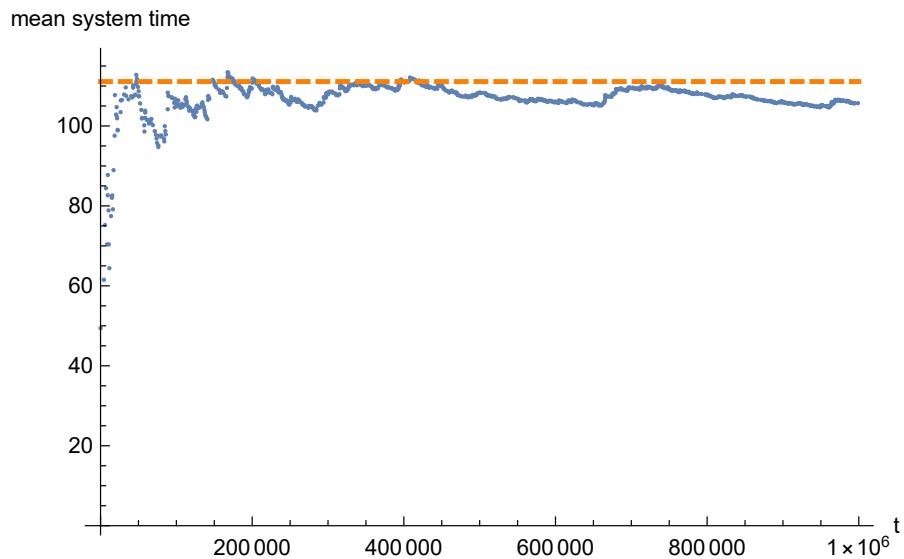


Abbildung 10: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

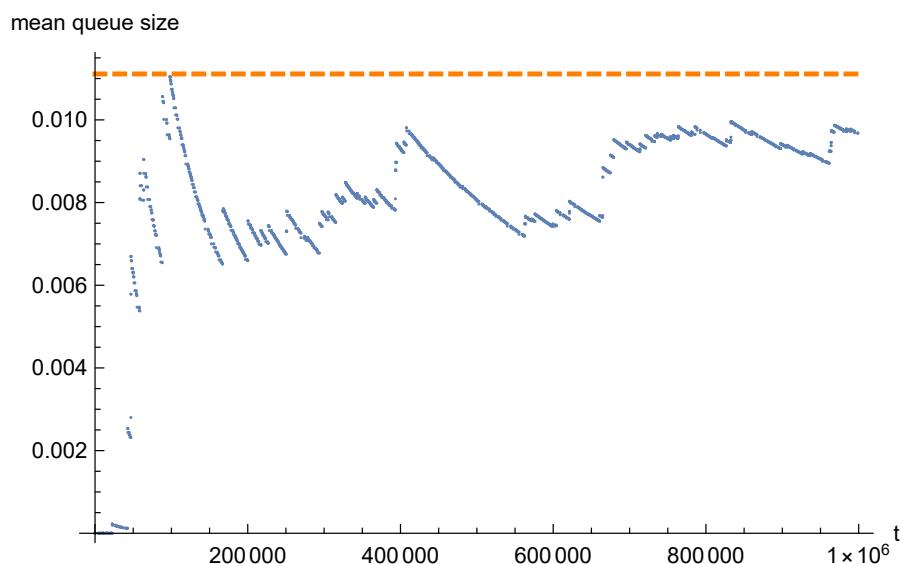


Abbildung 11: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000s

Bei der Betrachtung der in Abbildung 11 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge fällt auf, dass die Werte wiederum bis zu einer Simulationsdauer von 200000s stark variieren schwanken. Anschließend nähern sich die Werte dem dem Erwartungswert von 0,011111 an, bleiben jedoch unterhalb. Es handelt sich hierbei um eine Abweichung von ca. 0,0015. Ursache dafür könnte, wie bereits erwähnt ein systematischen Fehler, oder ein nicht vollständig eingeschwungenes System sein.

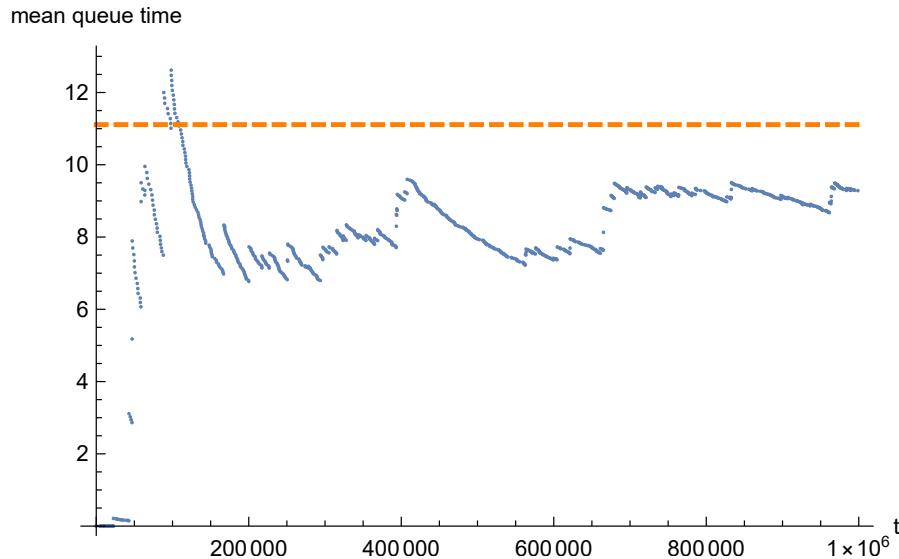


Abbildung 12: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

Die in Abbildung 12 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 11 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Gegen Ende der Simulation nähert sich die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange dem Erwartungswert von 11,1111 an, bleibt jedoch mit einer Abweichung von ca. 1,51 unterhalb.

Die Abbildung 13 zeigt die einzelnen Werte für die Warteschlangenlänge über die Simulationszeit. Diese Abbildung ist nicht aussagekräftig. Hintergrund dafür ist die Implementierung der Simulation. Im Warteschlangenmodell wird zwischen drei verschiedenen Events unterschieden. Betritt ein neuer Kunde den Telefonshop, wird ein Arrival Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 erhöht. Ist das Telefon frei, wird ein Begin Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 reduziert. Hat ein Kunde sein Telefonat beendet, wird ein Finish Event ausgelöst, was wiederum ein Begin Event auslöst, da das Telefon frei ist. Ein Problem gibt es hierbei für den Fall, dass kein Kunde im Laden steht und somit auch die Warteschlange leer und das Telefon frei ist. Betritt nun ein neuer Kunde den Laden, wird ein Arrival Event ausgelöst und direkt anschließend ein Begin Event, da das Telefon frei ist und der Kunde sein Telefonat sofort beginnen kann. Er befindet sich somit für 0s in der Warteschlange. Aufgrund der

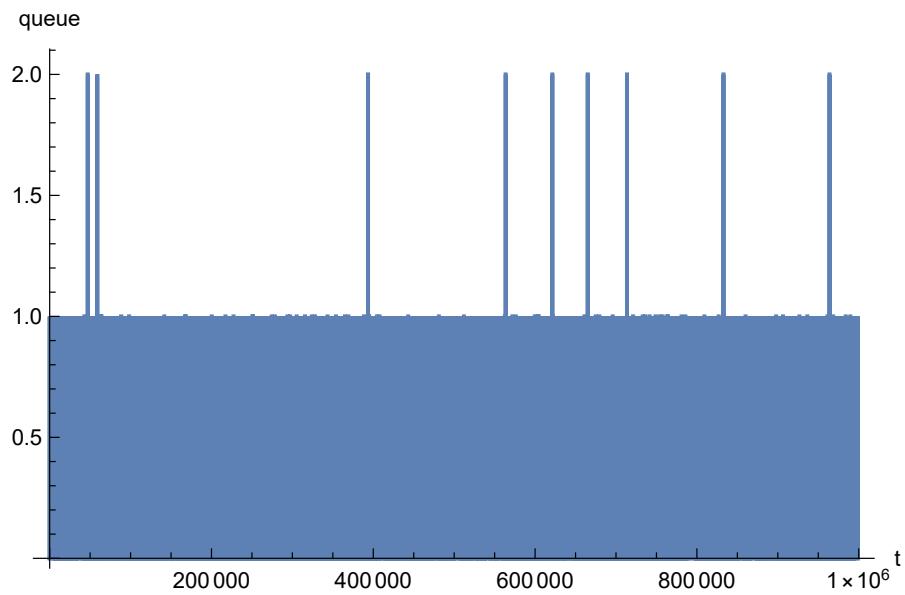


Abbildung 13: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 1000s

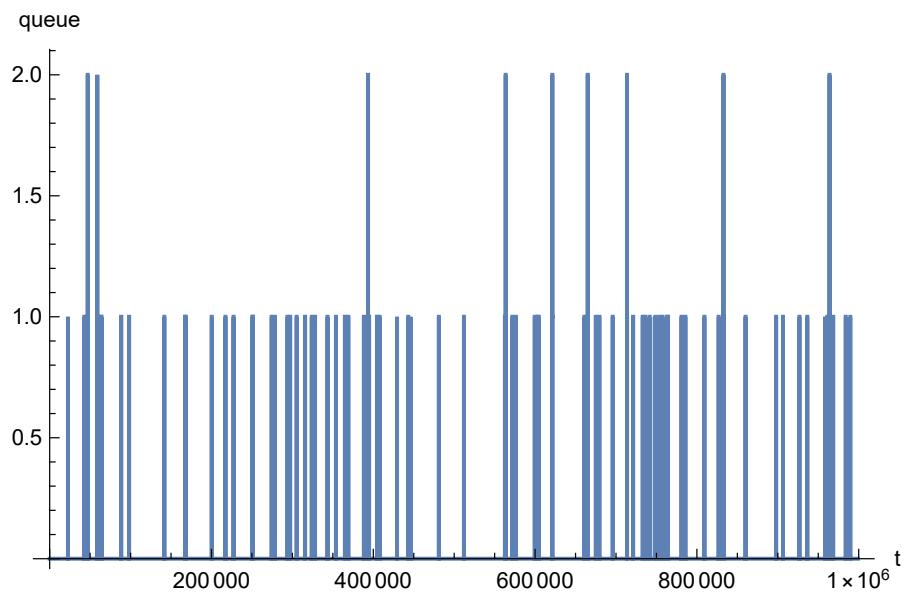


Abbildung 14: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 1000s

Events wird die Warteschlangenlänge jedoch trotzdem erhöht und direkt wieder gesenkt. Es gibt somit für den gleichen Zeitstempel zwei unterschiedliche Warteschlangenlängen. Abbildung 14 zeigt die gleiche Situation ohne die eben erläuterte Situation. Es wird hierbei nur eine Warteschlangenlänge angezeigt, wenn auch wirklich ein Kunde länger als 0s in der Warteschlange wartet. Da das System nur sehr gering ausgelastet ist, ist die geringe Warteschlangenlänge plausibel.

6.1.3.3 Validierung der Simulation

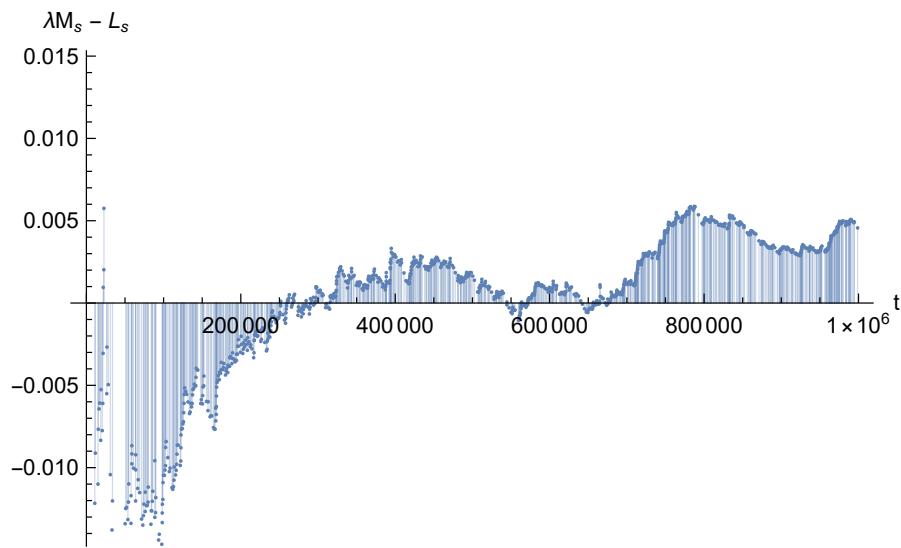


Abbildung 15: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

In Abbildung 15 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 350000s liegt der Wert sehr nah an dem geforderten Erwartungswert von 0, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation im Bereich von 0,004. Da die Differenz zum Erwartungswert sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System wird entweder um 0,004 zu gering angenommen, oder die Verweildauer der Kunden im System um 0,004 zu lang. Ebenso ist eine Kombination der beiden Fehler möglich. Insgesamt deckt sich diese Aussage mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden

theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.0111111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 15 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System ab einer Simulationszeit von ca. 400000s den für ein eingeschwungenes System erforderlichen Wert von 0 näherungsweise erreicht, kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.1.4 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s

6.1.4.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 400s ($\lambda = \frac{1}{400}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,333333 \quad (12)$$

$$L_q = 0,0833333 \quad (13)$$

$$W_s = 133,333 \quad (14)$$

$$W_q = 33,3333 \quad (15)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.4.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 16 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 400000s schwankt diese nur noch sehr gering, liegt jedoch über dem Erwartungswert von 0,333333. Es ist von einem systematischen Fehler von 0,01, oder einem nicht vollständig eingeschwungenen System auszugehen.

Auch die in Abbildung 17 dargestellte durchschnittliche Verweildauer im System schwankt bis zu einer Simulationsdauer von ca. 400000s stark. Anschließend schwankt sie um ca. 2 um den erwarteten Wert von 133,333.

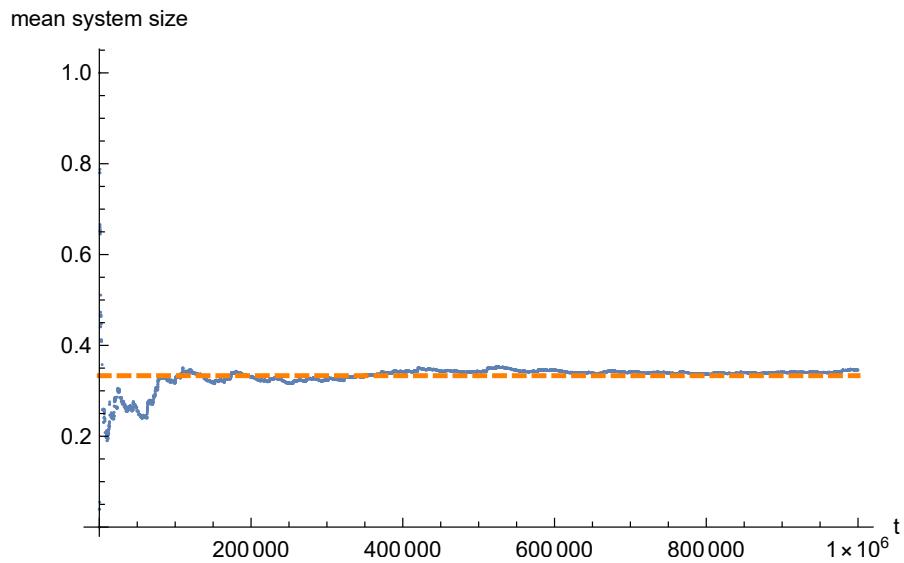


Abbildung 16: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 400s

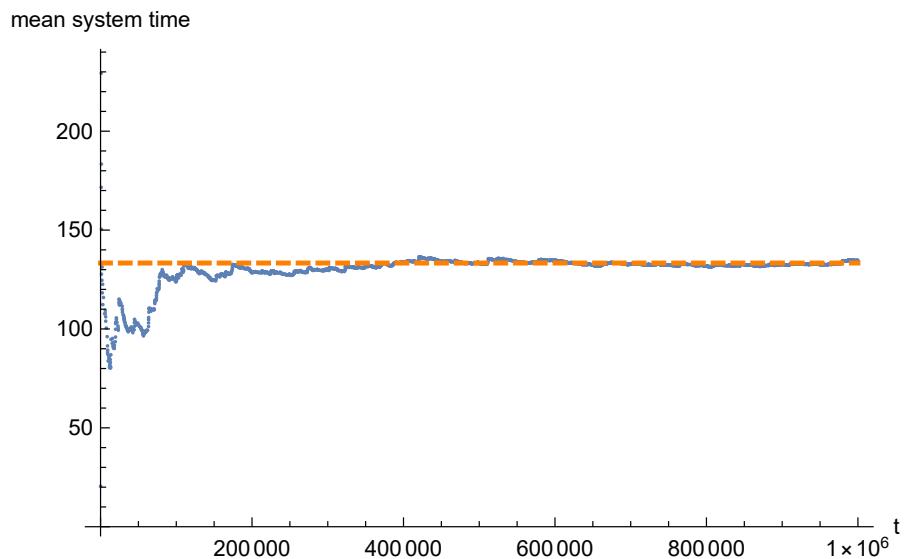


Abbildung 17: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 400s

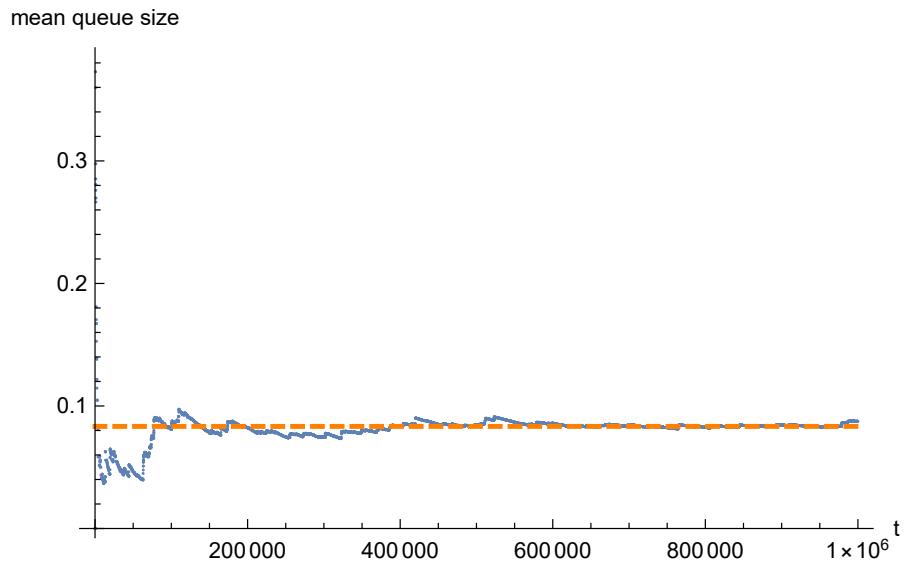


Abbildung 18: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 400s

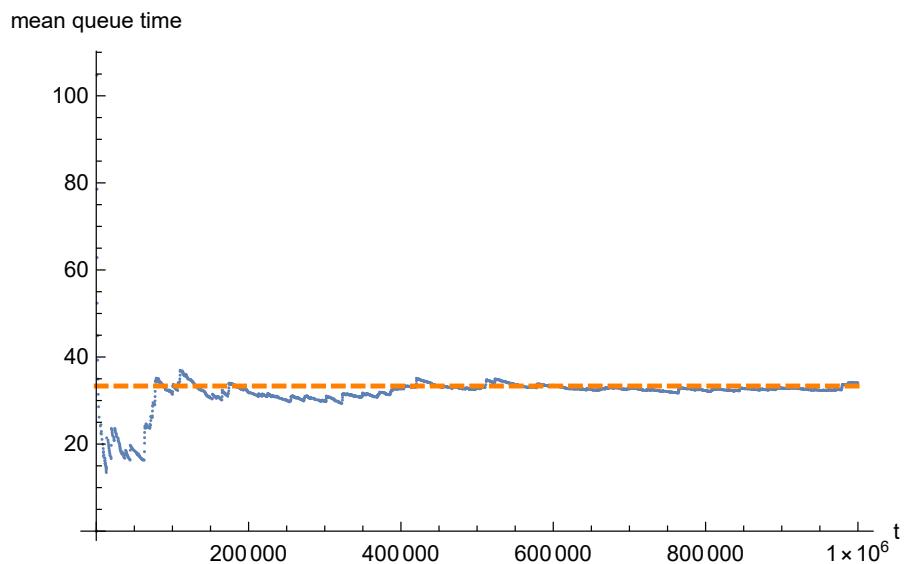


Abbildung 19: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 400s

Die in Abbildung 18 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge schwankt ebenso ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s nur noch um ca. 0,001 um den erwarteten Wert von 0,0833333.

Die in Abbildung 19 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 18 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Beide Werte schwanken ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s um den Erwartungswert. Die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange schwankt um ca. 2 um den Erwartungswert von 33,3333.

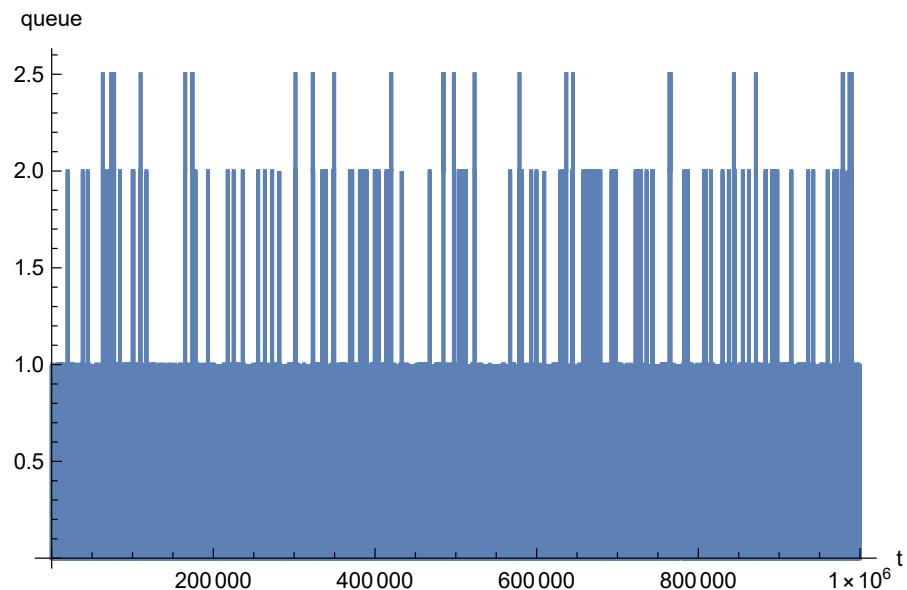


Abbildung 20: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 400s

Abschließend sind in den Abbildungen 20 und 21 jeweils die Länge der Warteschlange dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, ist die tatsächliche Länge in der Abbildung 21 gefiltert besser zu sehen. Die Warteschlangenlänge ist größer als bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s, doch das Telefon ist noch nicht zu voll ausgelastet, da die Warteschlangenlänge phasenweise noch immer 0 ist.

6.1.4.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 22 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s schwankt der Wert nur noch geringfügig. Die Werte liegen jedoch bis zum Ende der Simulation bei durchschnittlich ca. 0,009. Wie auch

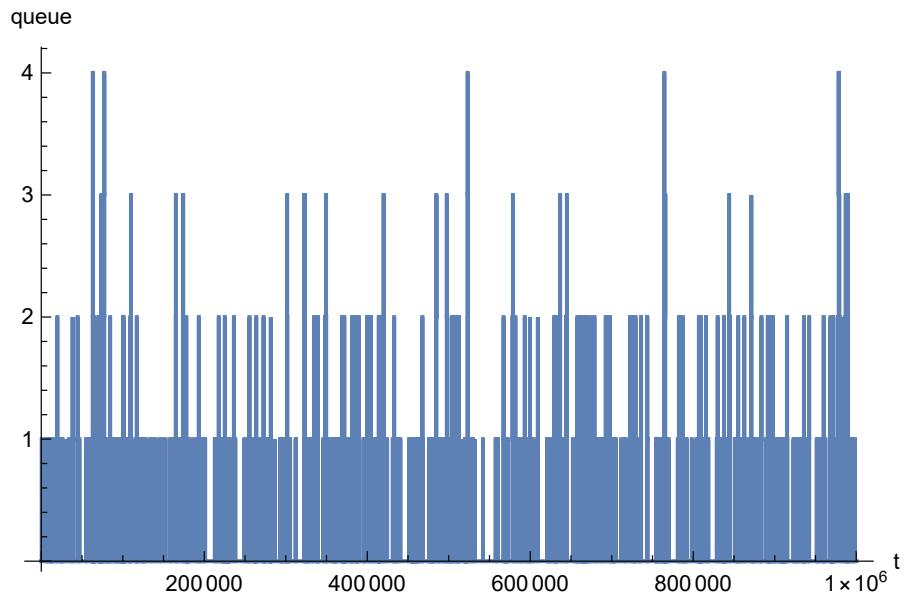


Abbildung 21: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 400s

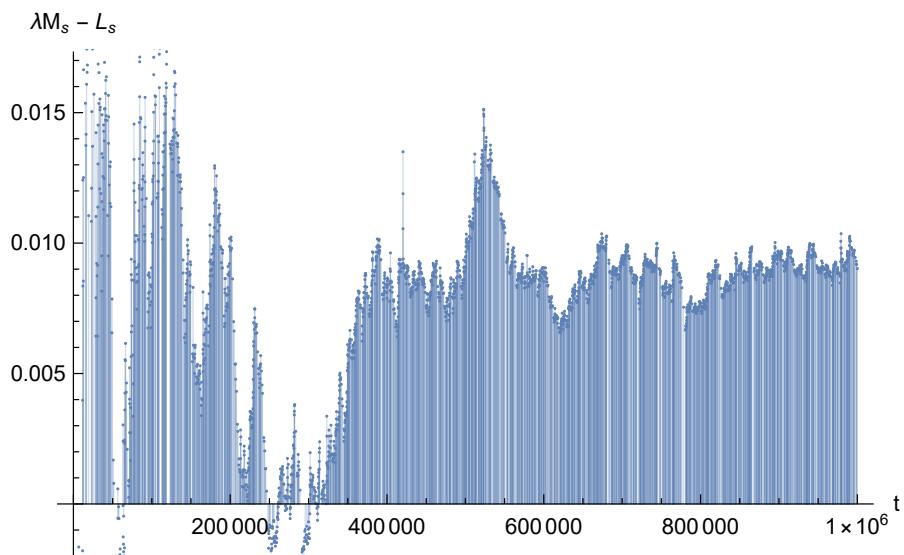


Abbildung 22: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

bei der Auswertung der Simulation mit einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $1000s$, kann hier wiederum von einem systematischen Fehler von $0,009$ mit den selben Ursachen ausgegangen werden. Die Abweichung ist hier größer, da aufgrund der niedrigeren Zwischenankunftszeit deutlich mehr Kunden den Laden besucht haben und somit mehr Zeiten verrechnet wurden. Insgesamt deckt sich dieser Fehler mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.011111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. $400000s$ sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Das in Abbildung 22 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. $600000s$ der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) ab einer Simulationsdauer von $600000s$ erreicht wurde.

6.1.5 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s

6.1.5.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Für durchschnittliche Zwischenankunftszeit und durchschnittliche Telefonierdauer $100s$ ($\lambda = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{100}$), lassen sich die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System nicht berechnen. Die Warteschlangenlänge steigt aufgrund der zu hohen Auslastung des Telefons gegen unendlich. Somit steigt auch die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System gegen unendlich, da diese sich aus den Kunden in der Warteschlange und dem Kunden am Telefon zusammensetzt. Bei einer unendlich langen Warteschlange ist folglich auch die Wartezeit unendlich lang. Außerdem folgt aus einer unendlichen Anzahl von Kunden im System auch, dass die durchschnittliche Zeit im System unendlich lang wird.

6.1.5.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 23 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Durch die großen Schwankungen kann nicht von einem eingeschwungenen System ausgegangen werden. Für eine genauere Beurteilung müsste die Simulation hierfür mit einer längeren

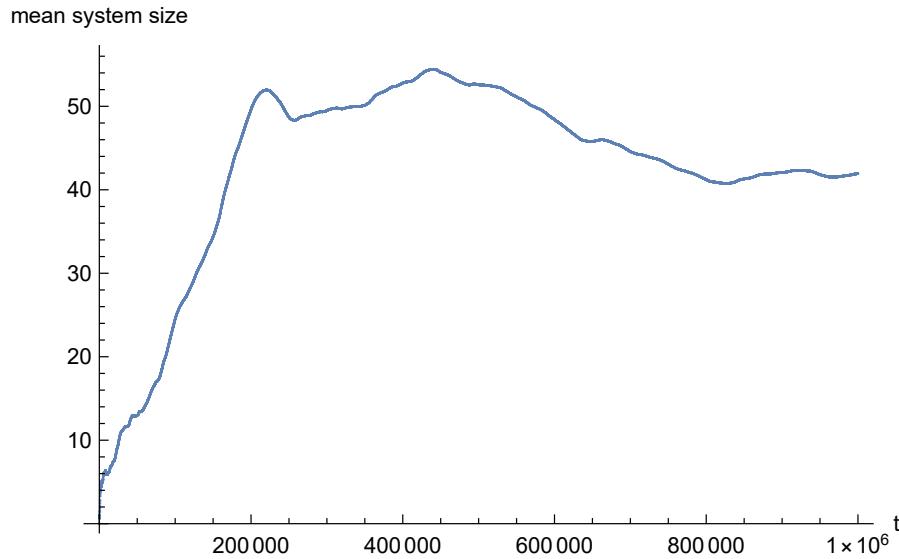


Abbildung 23: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s

Simulationsdauer erneut durchgeführt werden. Ob die durchschnittliche Anzahl der Kunden an Kunden im System gegen den erwarteten Wert von unendlich steigt, kann erst dann analysiert werden.

Abbildung 24 zeigt die durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System. Wiederum kann davon ausgegangen werden, dass das System noch nicht eingeschwungen war, bzw. nicht einschwingen wird.

Die Abbildungen 25 und 26 und auch weisen einen ähnlichen Verlauf auf wie 24. Die Werte schwanken ebenfalls bis zum Ende der Simulation stark.

Abschließend sind in den Abbildungen 27 und 28 jeweils die Länge der Warteschlange dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, zeigt Abbildung 21 wiederum die gefilterten Werte. Die Werte in beiden Abbildungen schwanken jedoch so stark, dass kein Unterschied mehr ersichtlich ist. Gegen Ende der Simulation steigen die Werte deutlich an. Ob sie gegen den erwarteten Wert von unendlich ansteigen lässt sich nur im Zuge einer erneuten Simulation mit einer längeren Simulationsdauer ermitteln.

6.1.5.3 Validierung der Simulation In Abbildung 29 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Im Vergleich zu den beiden Auswertungen mit Zwischenankunftszeiten von $1000s$ bzw. $400s$ wird deutlich, dass die Abweichung vom den geforderten Wert 0 in dieser Abbildung erheblich größer ist.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte schwanken bis zum Ende der Simulation deutlich. Das in Abbildung 29 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System während

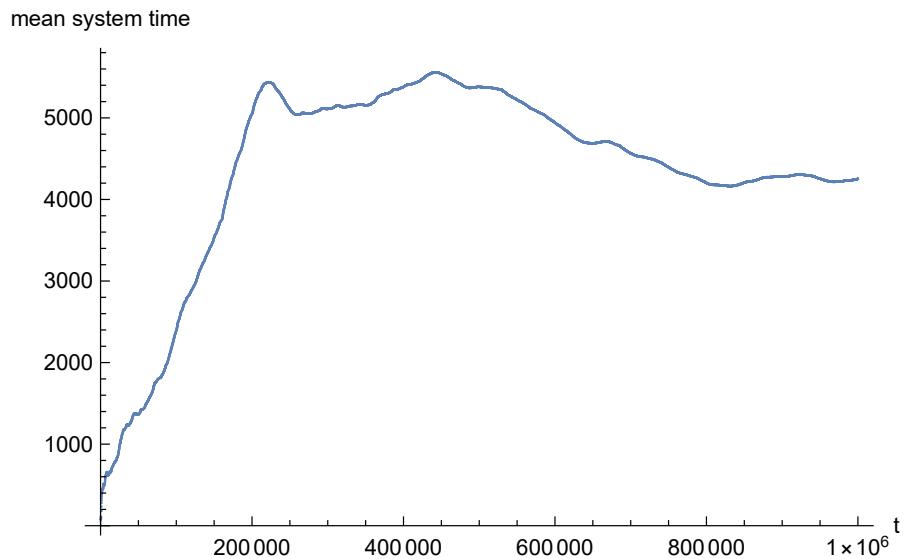


Abbildung 24: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100

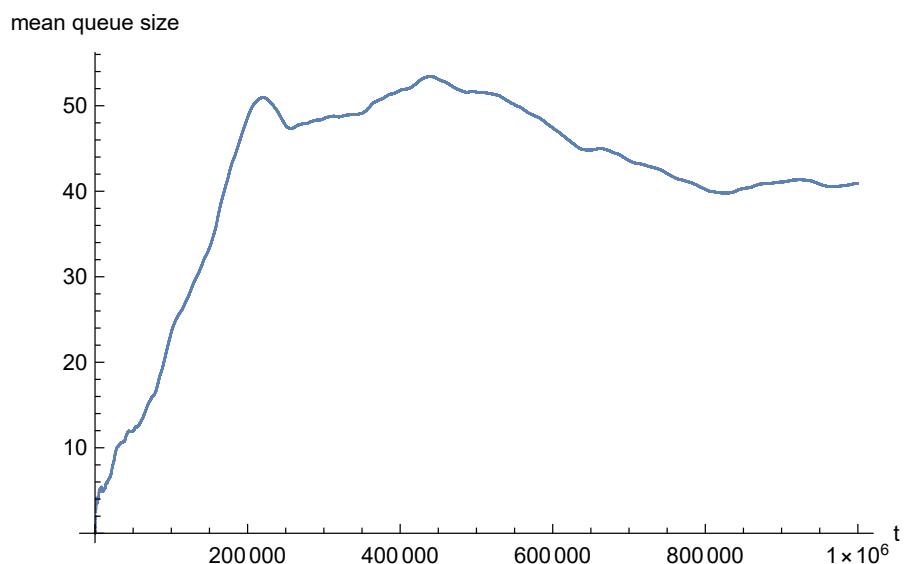


Abbildung 25: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100

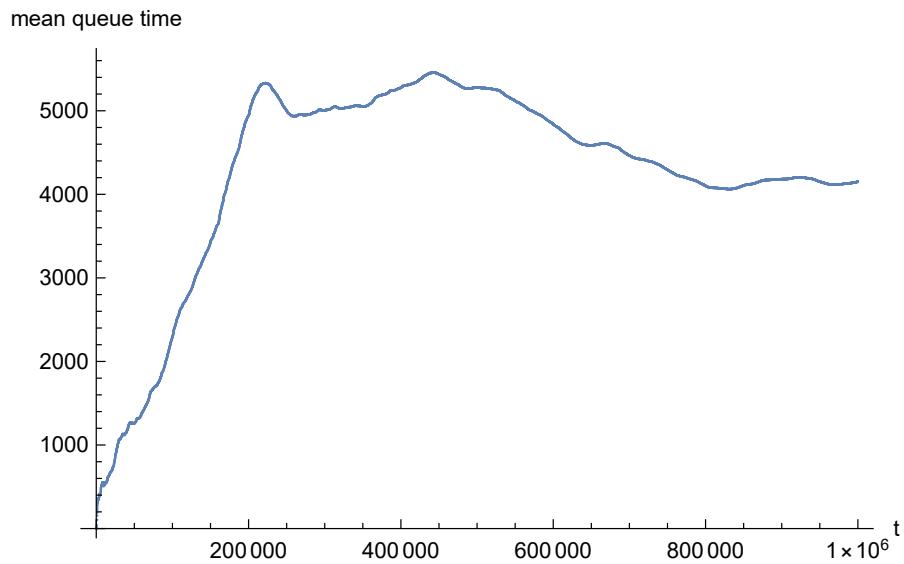


Abbildung 26: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100

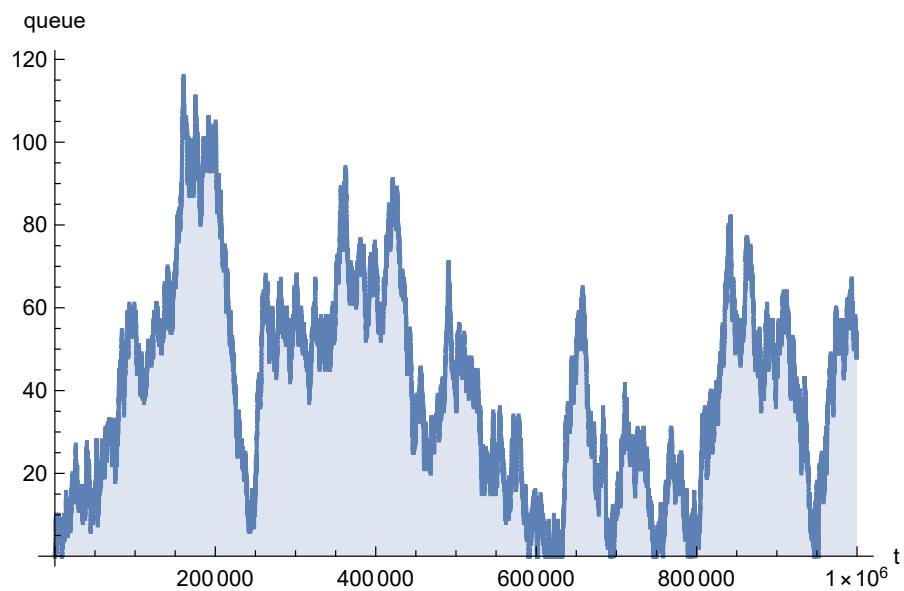


Abbildung 27: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 100

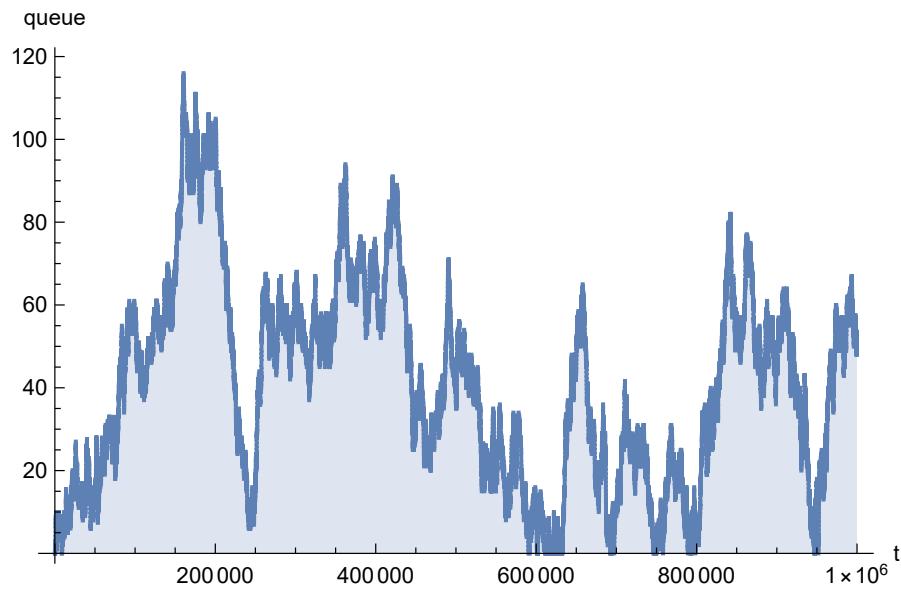


Abbildung 28: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100

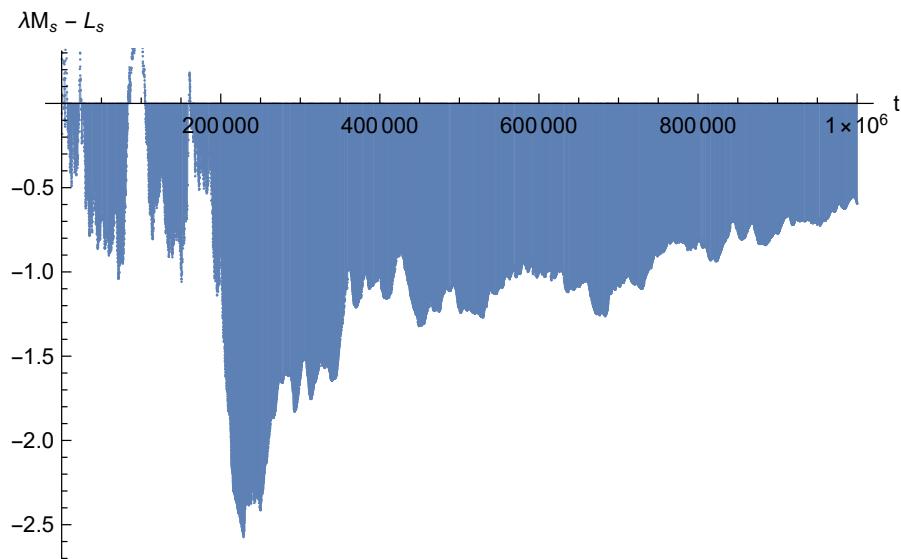


Abbildung 29: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

der gesamten Simulationsdauer den für ein eingeschwungenes System erforderlichen Wert von 0 nicht erreicht. Aufgrund der großen Abweichung kann davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) in dieser Simulation nicht erreicht wurde.

Das beschriebene Verhalten des implementierten Modells stimmt somit mit der Theorie überein, welche besagt, dass wenn die durchschnittliche Zwischenankunftszeit gleich der durchschnittlichen Bediendauer ist, das System nie einschwingen kann. Ein Beweis, dass das System auch bei einer längeren Simulationsdauer nicht einschwingen würde, kann nicht erbracht werden.

6.1.6 Vergleich der Telefonauslastungen

Bisher wurden die durchschnittlichen Verweildauern betrachtet. Die Auslastung des Telefons wurde dabei unberücksichtigt. Die durchschnittliche Auslastung des Telefons berechnet sich mit der Formel:

$$\text{Auslastung}(t) = \frac{\sum \text{Telefonierdauer}}{t}$$

Eine Auslastung von 1 bedeutet, dass das Telefon zu 100 % ausgelastet ist. In Abbildung 30 werden die Auslastungen über der Zeit für verschiedene Ankunftsrate dargestellt. Es fällt auf, dass bei Ankunftszeiten von 1500 s bis 800 s nur wenig Unterschied besteht. Das Telefon ist in allen drei Fällen ca. 15 % ausgelastet. Bei einer Ankunftszeit von 400 s gibt es einen deutlichen Anstieg in der Auslastung auf über 20 %. Das Telefon ist zu 100 % ausgelastet bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 100 s. Da die durchschnittliche Telefonierzeit ebenfalls 100 s beträgt, ist dieses Ergebnis zu erwarten. Es ist zu bemerken, dass die durchschnittliche Telefonauslastung und die Zwischenankunftszeiten keinen linearen Zusammenhang haben. Ein exponentieller Zusammenhang kann aufgrund der fünf Simulationen vermutet, jedoch nicht eindeutig gezeigt werden.

Für ein aussagekräftigeres Ergebnis wurde die Simulation erneut mit einer längeren Simulationsdauer durchgeführt. Die Ergebnisse sind im folgenden Abschnitt beschrieben.

6.1.7 Erhöhung der Simulationsdauer

Die bisherigen Ergebnisse sind bei einer Simulationsdauer von 10^6 s entstanden. Bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s zeigt sich eine Tendenz zu einer immer weiter ansteigenden Warteschlangenlänge. Um dies besser zu verdeutlichen wird die Simulationsdauer auf 10^7 s erhöht. Die Abbildung 31 zeigt die Warteschlangenentwicklung über die gesamte Zeit. Es wird deutlich, dass die Warteschlangenlänge sehr schwankt. Aus den Abbildungen 34 und 32 ist für die durchschnittliche Warteschlangenlänge ein klarer Trend nach oben zu erkennen. Auch bei der Betrachtung der Verweildauern im System und in der Warteschlange, wie in Abbildungen 35 und 33 zu sehen ist, zeigt sich eine

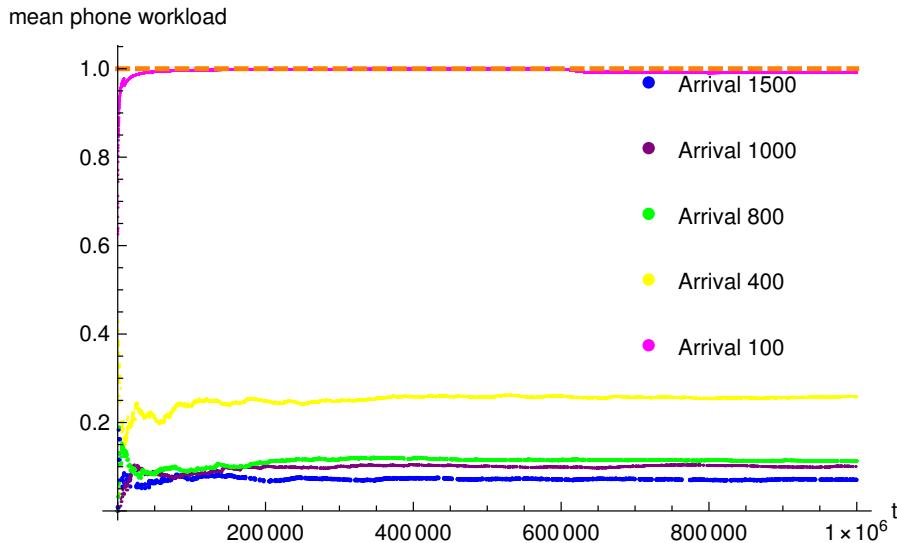


Abbildung 30: Darstellung der Telefonauslastung für verschiedene Ankunftszeiten

Aufwärtsbewegung.

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Werte keiner Parallelen zur Zeitachse annähern. Das System erreicht während der gesamten Simulationsdauer keinen stabilen Zustand. Bei einer weiteren Erhöhung der Simulationsdauer ist davon auszugehen, dass Werte noch weiter ansteigen werden.

Abbildung 36 zeigt die Gleichung des Little Theorems für die Simulation mit erhöhter Simulationsdauer. Auch bei längerer Simulationsdauer wird der Wert von 0 nicht erreicht. Die Abweichung wird mit steigender Simulationsdauer größer. Das System schwingt somit auch bei einer längeren Simulationsdauer nicht ein, was bei dieser Konstellation von durchschnittlicher Zwischenankunftszeit und durchschnittlicher Telefonierdauer plausibel und gefordert ist.

6.2 Modell „Bevorzugung der Einheimischen (VIP)“

Im zweiten Betriebsmodus werden die ankommenden Kunden unterschieden, ob es sich um Touristen, oder Einheimische (VIP) handelt. Befindet sich ein Einheimischer in der Warteschlange, wird dieser bevorzugt. Wie im Betriebsmodus 1 werden auch hier drei verschiedene mittleren Zwischenankunftszeiten betrachtet.

6.2.1 Annahme

Es wird angenommen, dass die im Abschnitt 6.1.4.1 aufgeführten Formeln für den Betriebsmodus 1 auch für diesen Betriebsmodus gelten. Da sich im Shop weiterhin nur

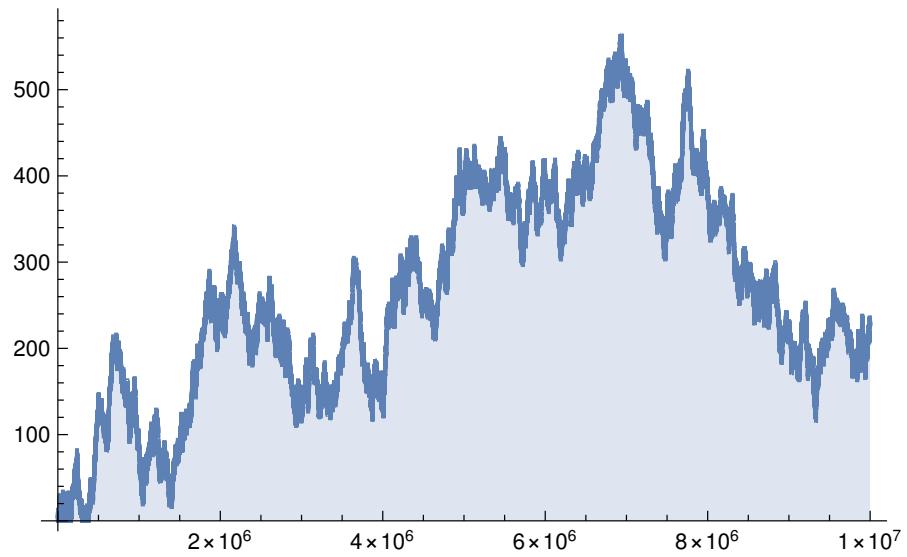


Abbildung 31: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

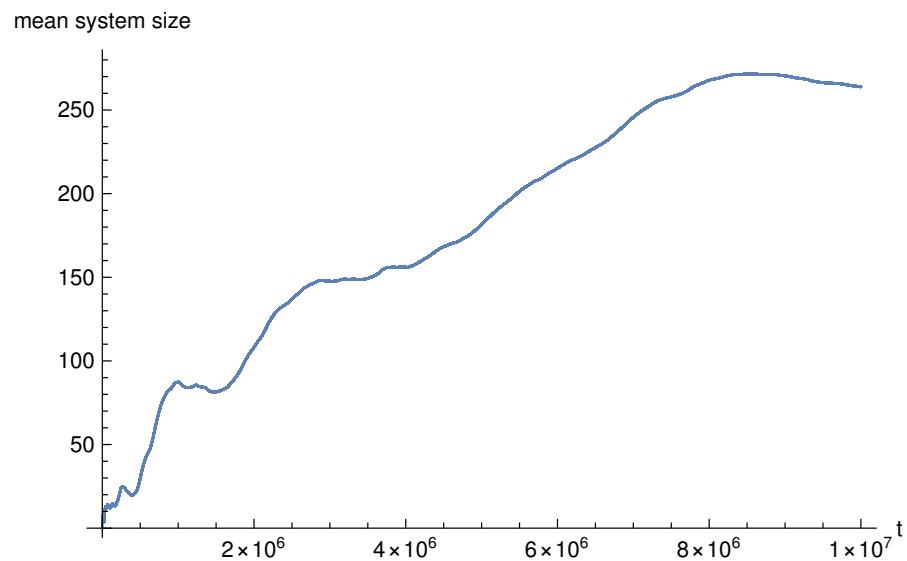


Abbildung 32: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s, Dauer = 10^7 s

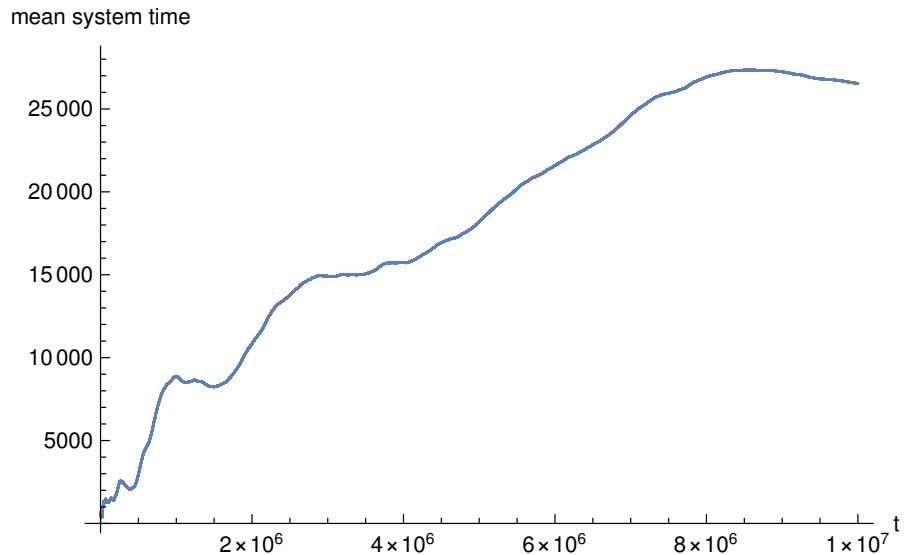


Abbildung 33: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

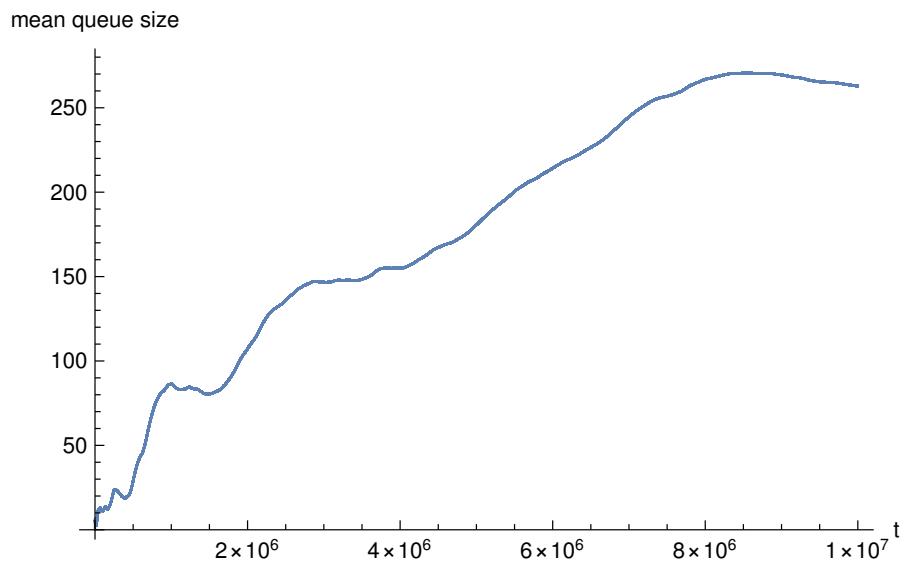


Abbildung 34: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

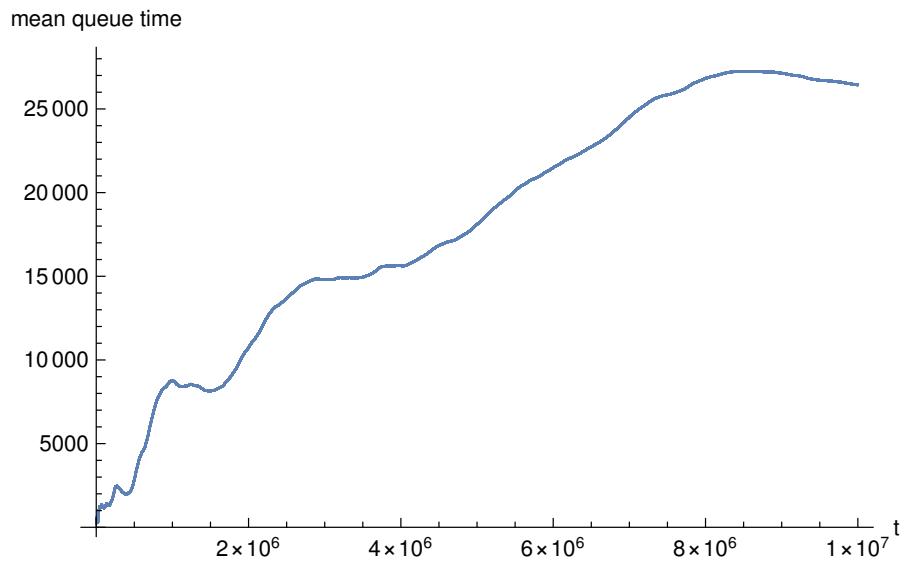


Abbildung 35: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100, Dauer = 10^7 s

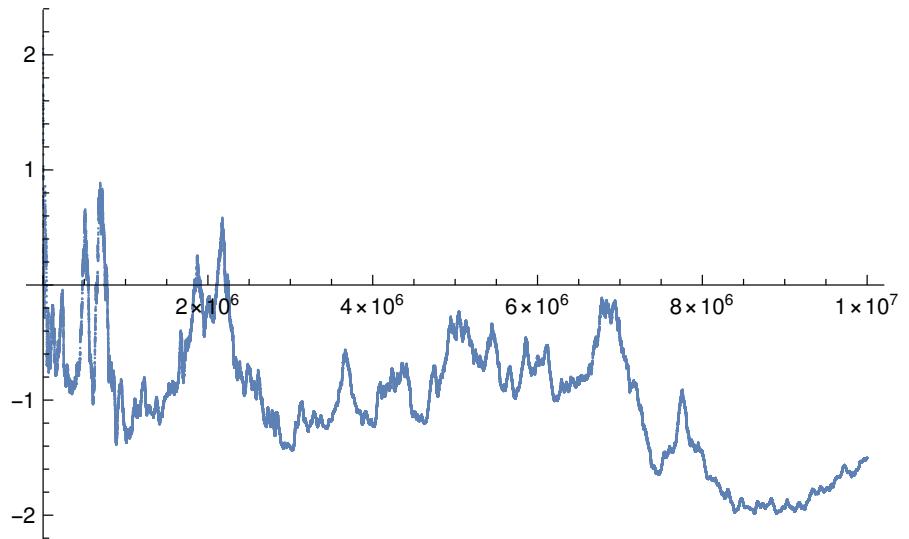


Abbildung 36: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem für die erhöhte Simulationsdauer)

ein Telefon befindet, ist es für die Berechnung der Durchschnittswerte für das System (durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, durchschnittliche Warteschlangenlänge, durchschnittliche Zeit im System, durchschnittliche Zeit in der Warteschlange) irrelevant, ob bestimmte Kunden bevorzugt werden. Beispielsweise die durchschnittliche Zeit in der Warteschlange, welche bei den VIP durch die Bevorzugung geringer ist, ist bei den Touristen dementsprechend höher, sodass sie insgesamt gleich der Zeit im Betriebsmodus 1 ist.

6.2.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.2.2.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $1000s$ ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,111111 \quad (16)$$

$$L_q = 0,0111111 \quad (17)$$

$$W_s = 111,111 \quad (18)$$

$$W_q = 11,1111 \quad (19)$$

6.2.2.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

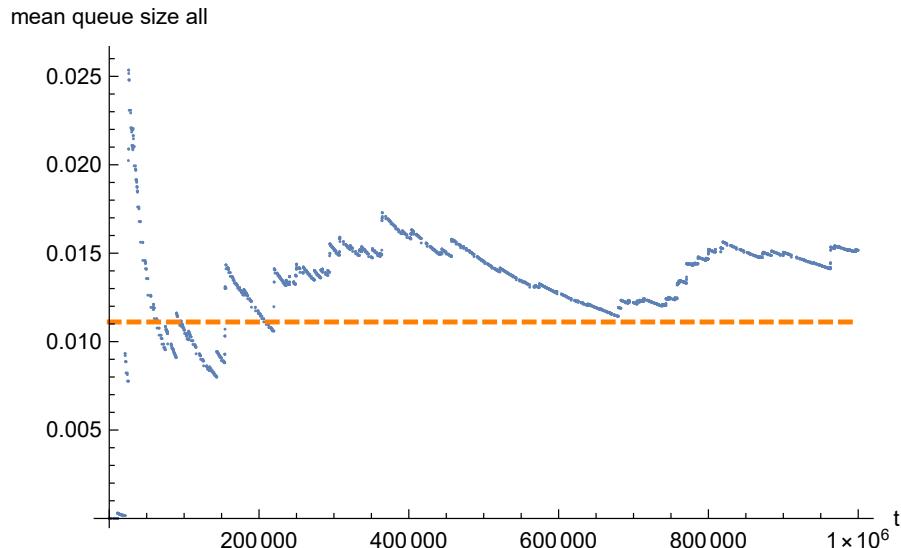


Abbildung 37: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000

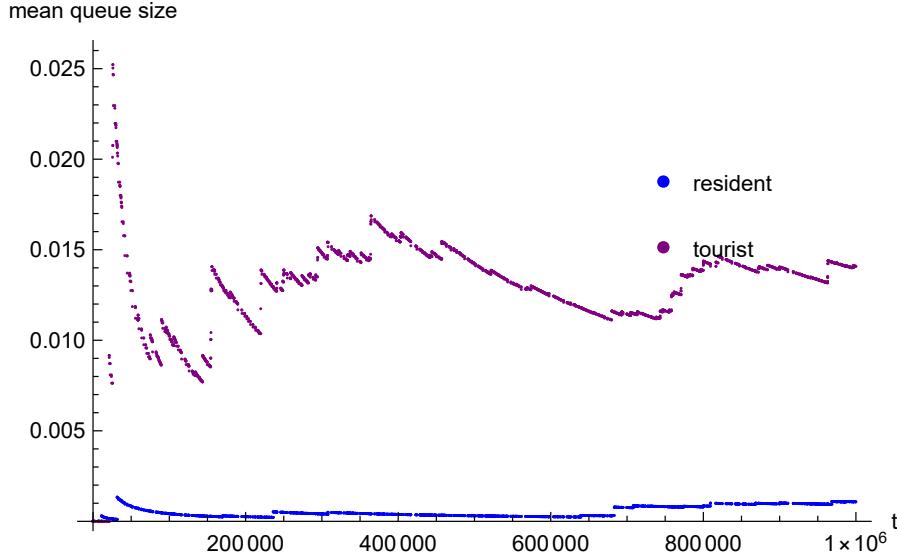


Abbildung 38: Durchschnittliche Warteschlangenlängen von Touristen und VIP, MeanAr = 1000

Abbildung 37 zeigt die durchschnittliche Warteschlangenlänge. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 38 die Zusammensetzung der Warteschlangenlänge aus den zwei unterschiedlichen Gruppen. Es wird deutlich, dass die Wartezeit der Touristen deutlich länger ist als die der Einheimischen, was aufgrund der Bevorzugung plausibel ist. Die durchschnittliche Warteschlangenlänge insgesamt liegt gegen Ende der Simulation um ca. 0,004 über dem erwarteten Wert von 0.111111 (gelbe Linie). Doch neben der Bevorzugung spielt auch der Anteil der Einheimischen an der insgesamten Kundenanzahl (lediglich 0,1) eine Rolle. Es kommen somit deutlich mehr Touristen in den Telefonshop als Einheimische.

In der Abbildung 39 sieht man die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden insgesamt. Im Vergleich dazu wird in der Abbildung 40 zwischen Touristen und Einheimischen unterschieden. Durch die Bevorzugung ist auch hier der Wert der Einheimischen deutlich geringer als der der Touristen. Auffallend ist ebenfalls, dass bei Simulationsdauer von ca. 680000s die Anzahl der wartenden Einheimischen leicht ansteigt. In etwa zur gleichen Zeit steigt die durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen ebenfalls an. Da jedoch durch die geringe Auslastung des Telefons die insgesamte Wartezeit beider Gruppen sehr gering ist, scheint die durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen zu diesem Zeitpunkt deutlich drastischer anzusteigen als die Anzahl. Dies liegt jedoch lediglich an der feineren Skalierung und wäre auch nicht plausibel.

Abbildung 41 zeigt die durchschnittliche Verweildauer aller Kunden im System insgesamt. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 42 die Zusammensetzung aus den zwei unterschiedlichen Gruppen. Die durchschnittliche Verweildauer insgesamt liegt wiederum im Bereich des Erwartungswertes (Abweichung ca. 10s). Interessant ist hingegen die Aufteilung zwischen den Touristen und Einheimischen. Obwohl die Werte für die Verweildauer in

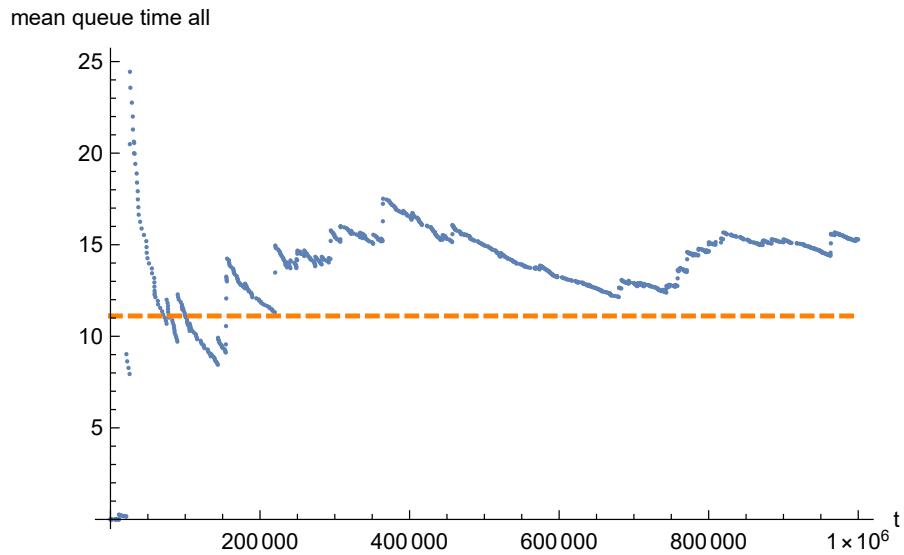


Abbildung 39: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange, MeanAr = 1000

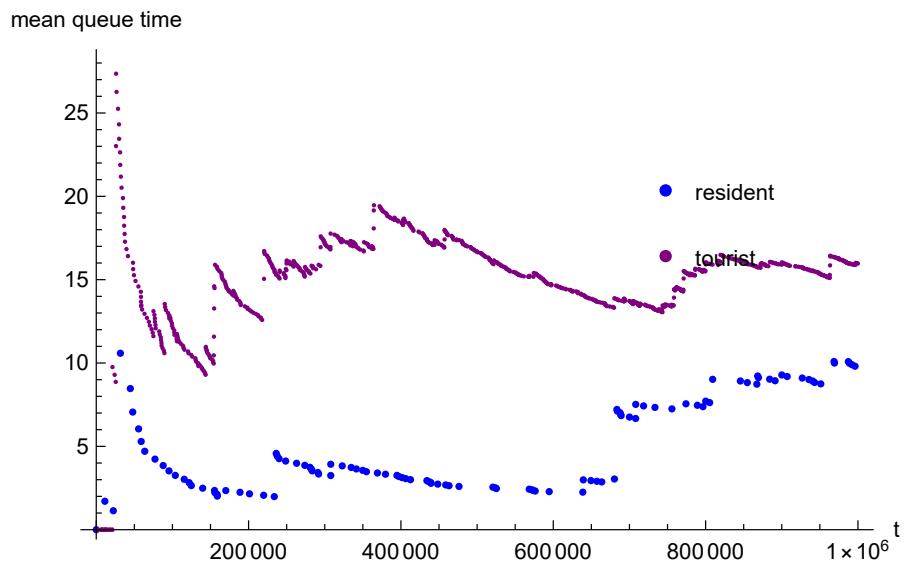


Abbildung 40: Durchschnittliche Verweildauer der Touristen und Einheimische in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

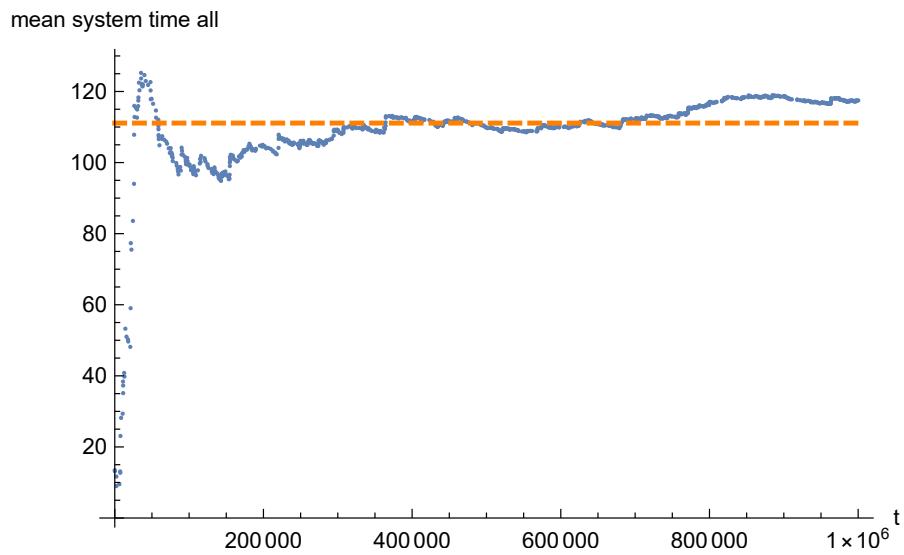


Abbildung 41: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

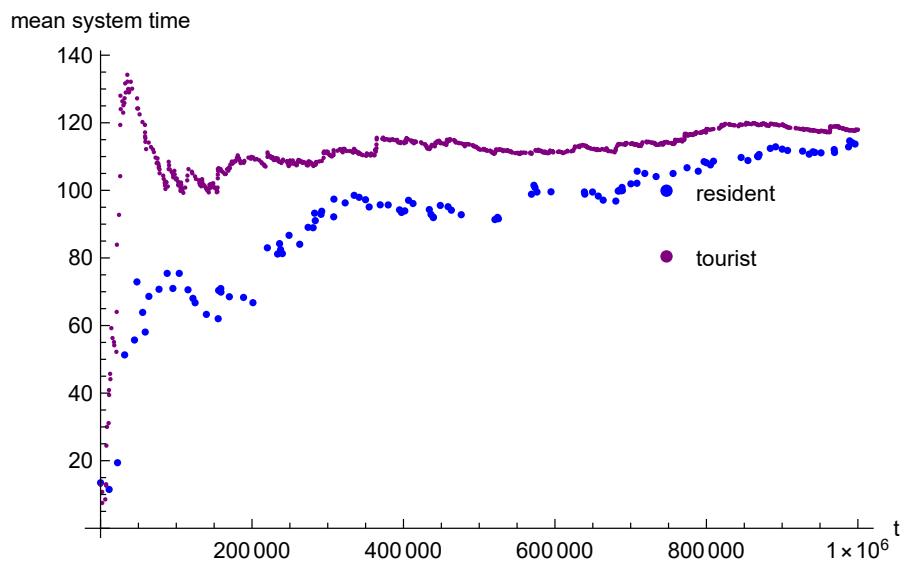


Abbildung 42: Durchschnittliche Verweildauer der Einheimischen und Touristen im System, MeanAr = 1000s

der Warteschlange und auch für die Warteschlangenlänge bei den Einheimischen deutlich niedriger waren, als bei den Touristen, liegen die Werte in diesem Fall, vor allem gegen Ende der Simulationszeit, sehr nah beieinander. Die Ursache hierfür liegt in der geringen Auslastung des Telefons. Durch die durchschnittliche Telefonierdauer von $100s$ liegt die durchschnittliche Verweildauer im System ohne Wartezeit ebenfalls bei $100s$. Da auch die bevorzugten Einheimischen warten müssen, bis ein belegtes Telefon wieder frei ist, bevor sie telefonieren können, liegt der Wert hier etwas über $100s$. Da jedoch das Telefon nur gering ausgelastet ist, müssen auch die Touristen durchschnittlich nur eine sehr kurze Zeit warten und haben daher auch nur eine durchschnittliche Verweildauer im System von ca. $118s$.

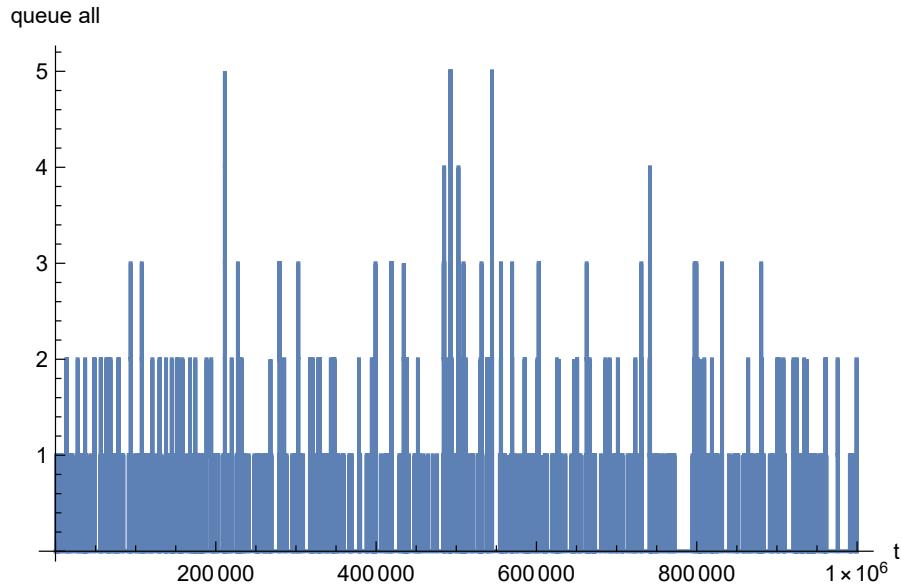


Abbildung 43: Warteschlangenlänge insgesamt (gefiltert), MeanAr = $400s$

Die Abbildungen 53, 54 und 55 zeigen die absoluten Warteschlangenlängen zu den unterschiedlichen Systemzeiten. Über die gesamte Simulationszeit ist die maximal auftretende Warteschlangenlänge lediglich 5. Es warten jedoch, wie Abbildung 55 zeigt zu keinem Zeitpunkt zwei Einheimische gleichzeitig. Dies belegt die geringe durchschnittliche Verweildauer der Einheimischen im System und in der Warteschlange.

6.2.2.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 46 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. $250000s$ schwankt der Wert nur noch um einen Wert von ca. $0,005$. Gegen Ende der Simulation steigt der Wert in Richtung Nulllinie an und liegt am Ende bei ca. $-0,001$. Diese sehr geringe Abweichung zeigt, dass das System mit

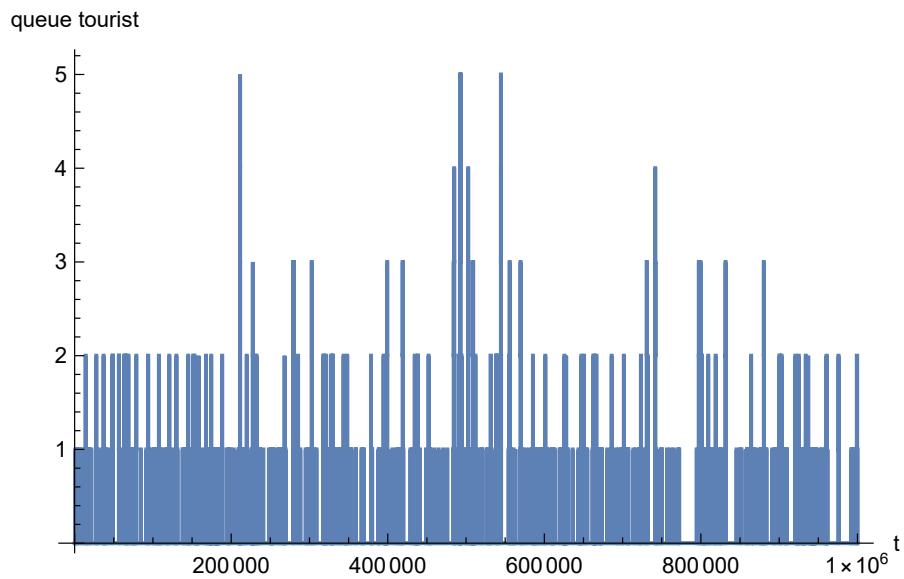


Abbildung 44: Warteschlangenlänge der Touristen (gefiltert), MeanAr = 400s

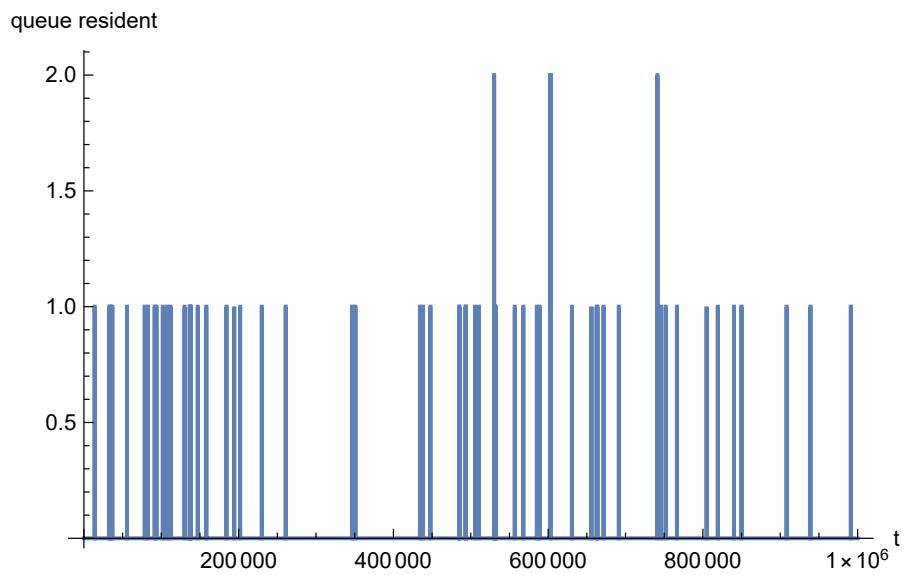


Abbildung 45: Warteschlangenlänge der Einheimischen (gefiltert), MeanAr = 400s

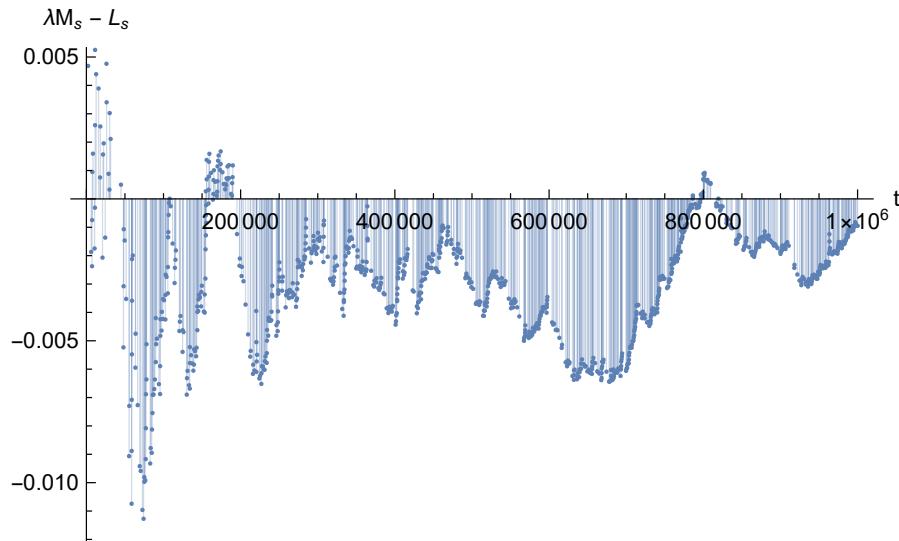


Abbildung 46: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

großer Wahrscheinlichkeit eingeschwungen ist. Die Abweichung von 0,001 ist sehr gering und auf kleinere Rundungsfehler bei der Berechnung zurückzuführen.

6.2.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.2.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 400s ($\lambda = \frac{1}{400}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 0,333333 \quad (20)$$

$$Lq = 0,0833333 \quad (21)$$

$$Ws = 133,333 \quad (22)$$

$$Wq = 33,3333 \quad (23)$$

6.2.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 47 zeigt die durchschnittliche Warteschlangenlänge. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 48 die Zusammensetzung der Warteschlangenlänge aus den zwei unterschiedlichen Gruppen. Wie bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s, fällt auch hier auf, dass sich deutlich weniger Einheimische in der Warteschlange befinden als

mean queue size all

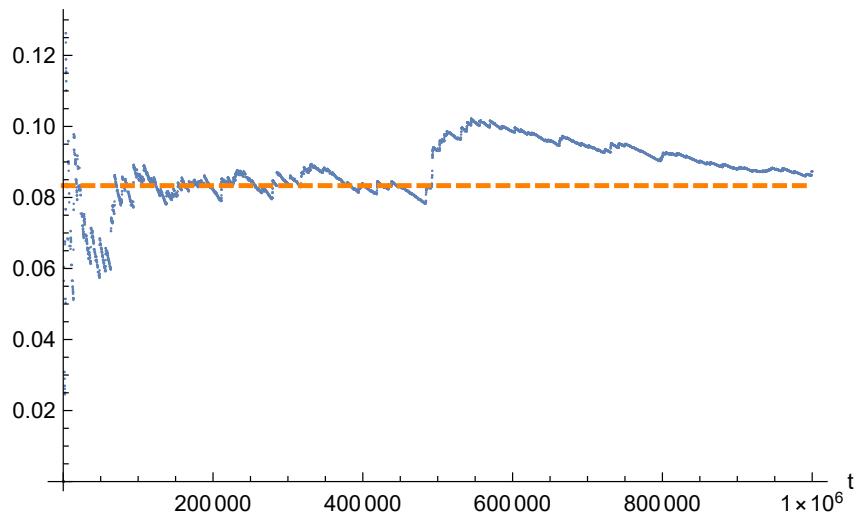


Abbildung 47: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 400

mean queue size

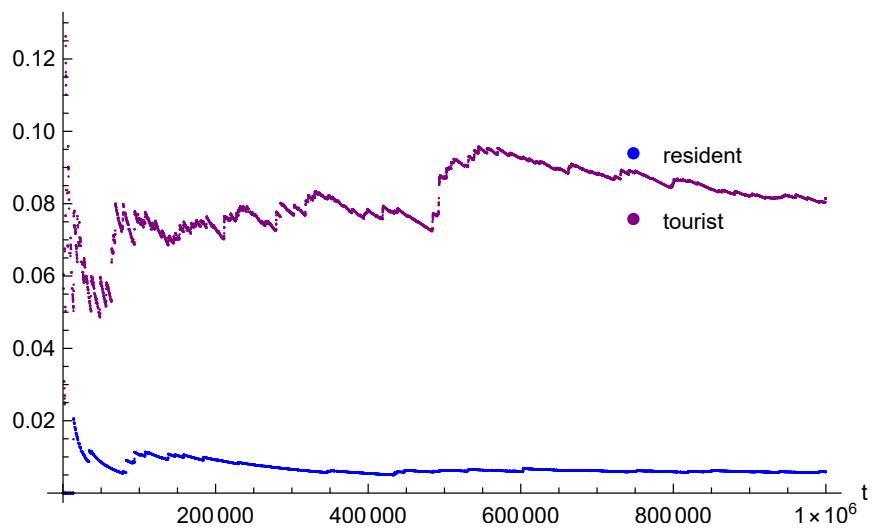


Abbildung 48: Durchschnittliche Warteschlangenlängen von Touristen und VIP, MeanAr = 400s

Touristen. Beide Werte sind jedoch höher als bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $1000s$, was aufgrund der höheren Auslastung des Telefons plausibel ist. Der Wert von beiden Gruppen zusammengenommen schwankt um den erwarteten Wert von $0,0833333$ und nähert sich diesem gegen Ende der Simulation immer weiter an. Am Ende liegt eine Abweichung von ca. $0,007$ vor.

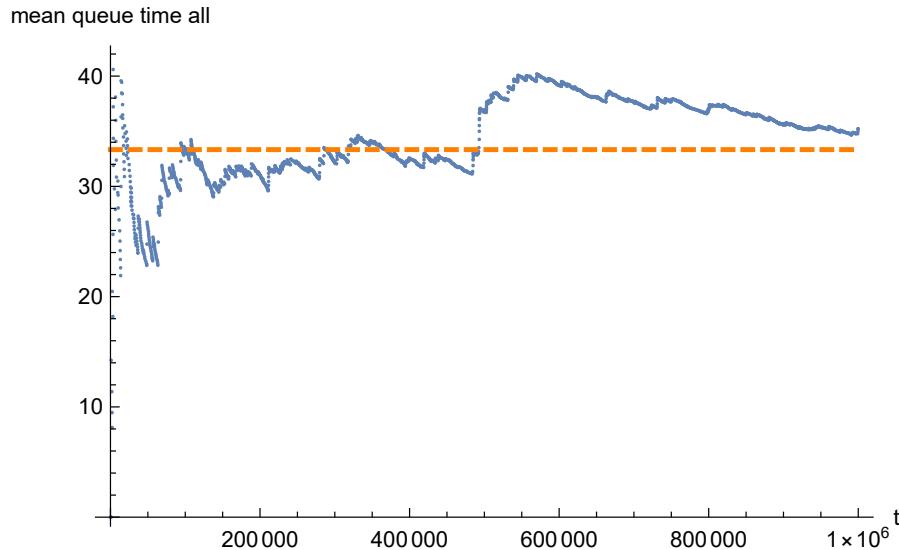


Abbildung 49: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange, MeanAr = $400s$

In der Abbildung 49 sieht man die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden insgesamt. Im Vergleich dazu wird in der Abbildung 50 zwischen Touristen und Einheimischen unterschieden. Ab einer Simulationsdauer von ca. $300000s$ ist, aufgrund der Bevorzugung, auch hier der Wert der Einheimischen deutlich geringer als der der Touristen. Auffallend ist, dass der Wert der Einheimischen zu Beginn der Simulation kurzzeitig höher ist als der der Touristen. Hintergrund dürfte hierbei ein nicht eingeschwungenes System sein, infolge dessen einzelne Kunden noch eine große Veränderung des durchschnittswertes bewirken. Gegen Ende der Simulation nähert sich der errechnete Wert immer weiter dem Erwartungswert von $33,3333$ an. Am Ende der Simulation ist eine Abweichung von ca. $1,5$ anzumerken.

Abbildung 41 zeigt die durchschnittliche Verweildauer aller Kunden im System insgesamt. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 42 die Zusammensetzung aus den zwei unterschiedenen Gruppen. Wiederum zeigt sich, dass der Wert der Einheimischen zu Beginn der Simulation kurzzeitig höher ist als der der Touristen. Dies stimmt mit Abbildung 50 überein, spricht jedoch für ein (bis zu diesem Zeitpunkt) nicht eingeschwungenes System. Der Wert der Einheimischen liegt ab einer Simulationsdauer von $400000s$ bei ca. $125s$. Dies setzt sich aus einer durchschnittlichen Telefonierdauer von $100s$ und der durchschnittlichen Verweildauer ca. $25s$ zusammen (siehe Abbildung 50) und ist somit plausibel. Die durchschnittliche Verweildauer beider Gruppen zusammen nähert sich ab einer Simulationsdauer von ca.

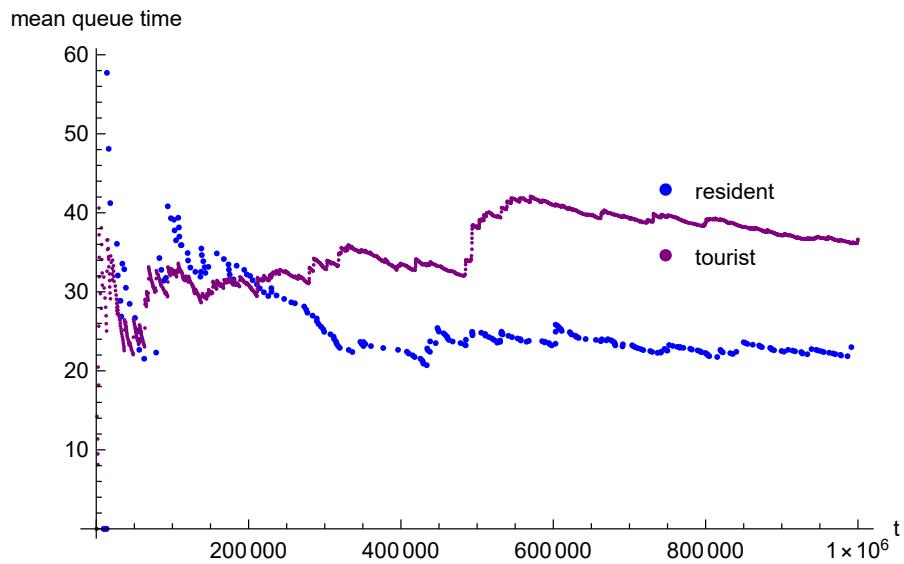


Abbildung 50: Durchschnittliche Verweildauer der Touristen und Einheimische in der Warteschlange , MeanAr = 400s

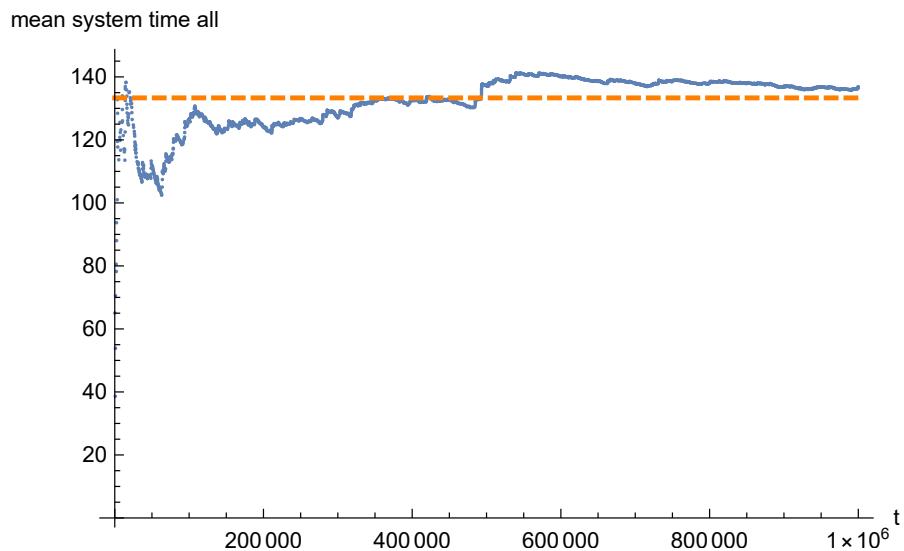


Abbildung 51: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 400s

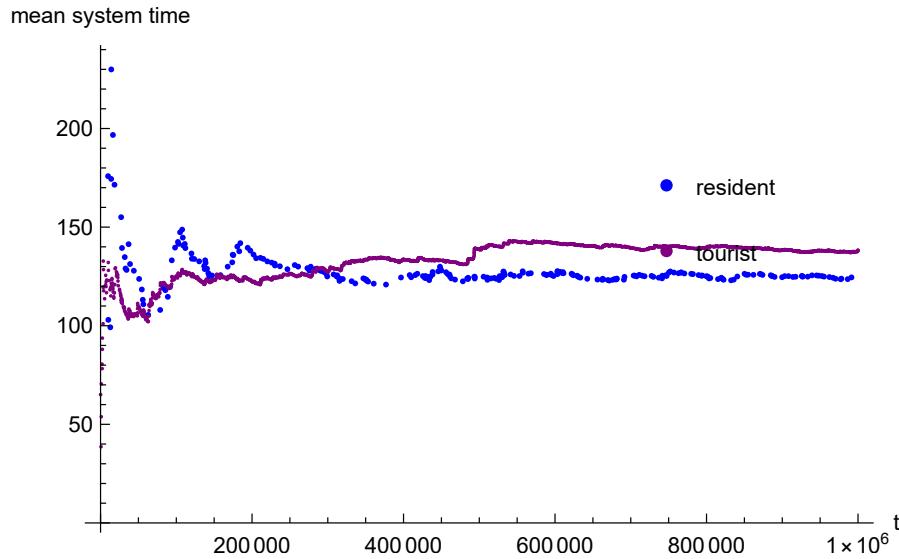


Abbildung 52: Durchschnittliche Verweildauer der Einheimischen und Touristen im System, MeanAr = 400s

400000s dem erwarteten Wert von 133,333 immer weiter an. Gegen Ende der Simulation ist eine Abweichung von ca. 3s festzustellen.

6.2.3.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 56 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 450000s schwankt der Wert nur noch um einen Wert von ca. 0,01. Gegen Ende der Simulation schwankt der Wert um die Nulllinie und weicht am Ende nur noch um ca. 0,002 ab. Diese sehr geringe Abweichung zeigt, dass das System mit großer Wahrscheinlichkeit eingeschwungen ist. Die Abweichung von 0,002 ist sehr gering und auf kleinere Rundungsfehler bei der Berechnung zurückzuführen.

6.2.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

Es wird eine Simulation durchgeführt, mit einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 100 s. Dabei wird zwischen den Einheimischen und den Touristen unterschieden. Die Einheimischen stellen 10 % der Besucher dar. Da die Einheimischen bevorzugt behandelt werden, ist anzunehmen, dass die durchschnittlichen Verweildauern im System und in der Warteschlange niedriger sind. Wie bereits aus vorherigen Simulationen hervorgegangen ist, laufen die Verweildauern und die Warteschlangenlänge gegen Unendlich. Es ist zu untersuchen, wie sich die Verweildauern für Einheimische verhalten. Die Abbildungen 57 und 58 zeigen, dass sich die durchschnittliche Warteschlangenlänge von Touristen

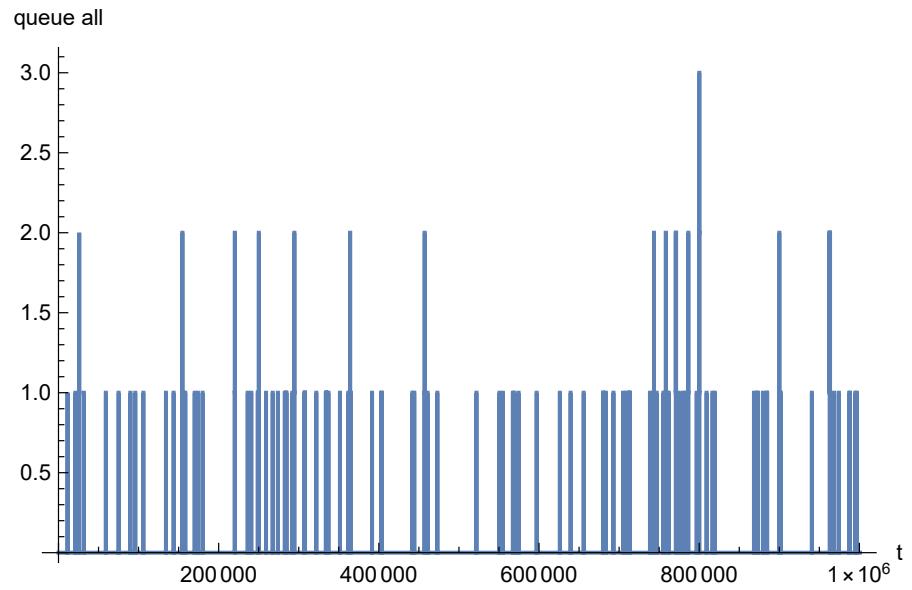


Abbildung 53: Warteschlangenlänge insgesamt (gefiltert), MeanAr = 1000s

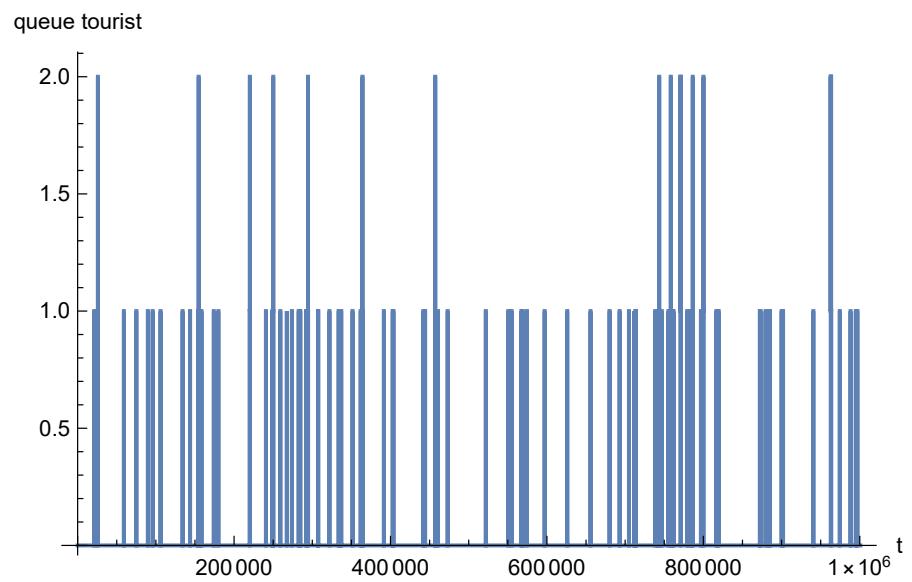


Abbildung 54: Warteschlangenlänge der Touristen (gefiltert), MeanAr = 1000s

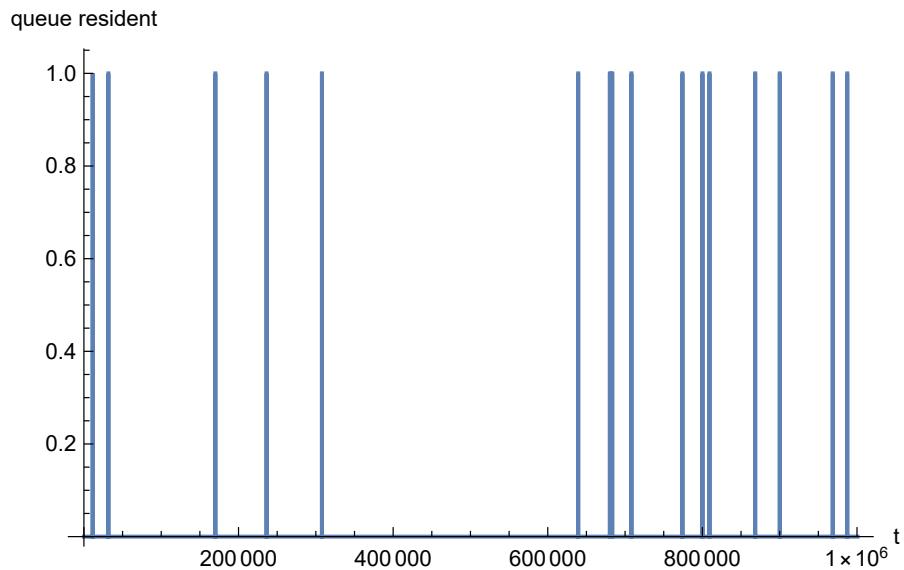


Abbildung 55: Warteschlangenlänge der Einheimischen (gefiltert), MeanAr = 1000s

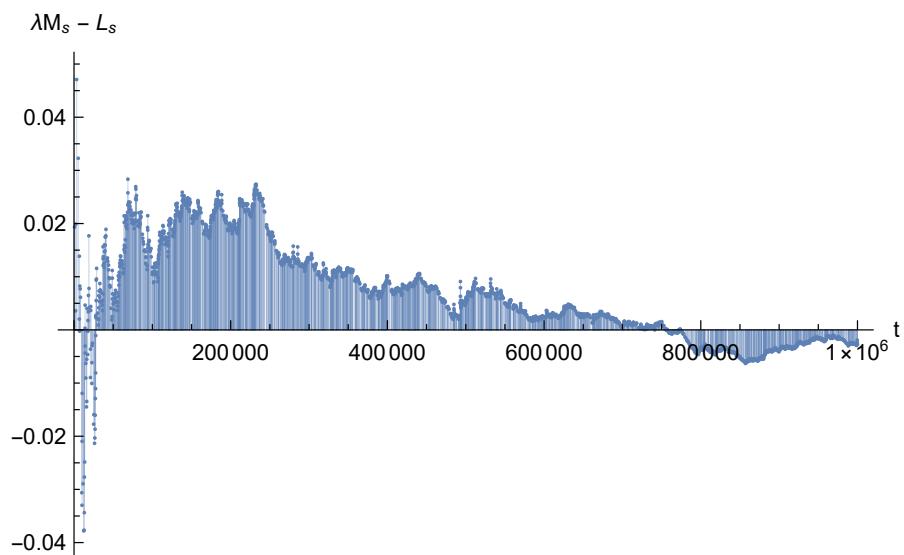


Abbildung 56: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

und Einheimischen deutlich unterscheiden. Die durchschnittliche Warteschlangenlänge der Einheimischen geht ungefähr gegen 0.1, während die der Touristen gegen unendlich steigt. Die Abbildung 59 verdeutlicht nochmals diesen Zusammenhang.

Ähnlich sieht es auch bei den Verweildauern aus. Die durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen beträgt ungefähr 110 s, während die Wartezeit der Touristen gegen unendlich läuft. Dieser Zusammenhang ist in den Abbildungen 60 und 61. Die Abbildung 62 vergleicht die Wartezeiten miteinander. Es ist logisch zu erklären, dass sich die Wartezeit der Einheimischen auf den Wert nahe an 100 s einpendelt. Einheimische werden nur bevorzugt, wenn das Telefon frei ist. Ist das Telefon besetzt, müssen auch die Einheimischen warten. Da die durchschnittliche Telefonierdauer 100 s beträgt, müssen die Einheimischen mindestens diese Zeit abwarten. Der Wert ist etwas größer als 100, da die Einheimischen auch warten müssen, wenn sich weitere Einheimische in der Warteschlange befinden.

Interessant ist die Tatsache, dass die Wartezeit der Einheimischen bis ca. 100.000 s Simulationsdauer nahezu 0 beträgt und danach Sprunghaft ansteigt. Die ist damit zu erklären, dass ab dieser Zeit die Warteschlange sprunghaft ansteigt wie in Abbildung 64 zu sehen ist. Auch die Betrachtung der Telefonauslastung bestätigt diese Vermutung. Die Abbildung 65 zeigt, wie sich die Auslastung zunächst verringert und nach 100.000 s Simulationsdauer ansteigt.

Die Abbildung 63 zeigt, dass sich die durchschnittliche Systemzeit der Einheimischen bei ungefähr 200 einpendelt. Das ist logisch, da sich die Systemzeit aus der Wartezeit und der Telefonierzeit zusammensetzt. Muss ein Einheimischer im Schnitt 100 s warten und 100 s telefonieren, dann verbleibt er im Schnitt 200 s im System.

Da Einheimische bevorzugt behandelt werden und einen Anteil von 10 % der Besucher ausmachen, kommen die Einheimischen durchschnittlich alle 1000 s an. Dies könnte zum Irrtum führen, dass die Verweildauern der Einheimischen ähnlich zu betrachten sind, als würde man die eine Simulation ohne Bevorzugung für eine Ankunftszeit von 1000 s durchführen. Die ist jedoch nicht richtig. Obwohl die Einheimischen bevorzugt werden, ist ihre Wartezeit direkt von der Telefonauslastung abhängig. Ist das Telefon voll Ausgelastet, müssen die Einheimischen im Schnitt 100 s warten. Also rund das zehnfache, als die Werte in Abbildung 12. Anders würde das Ergebnis aussehen, wenn Touristen ihr Telefonat unterbrechen müssten, sobald ein Einheimischer die Warteschlange betritt.

6.2.5 Eingeschwungener Zustand Littles Gesetz

Die Abbildung 66 zeigt den Verlauf der Gleichung 7. Es ist deutlich zu erkennen, dass es noch große Schwankungen gibt und das System sich in einem nicht stabilen Zustand befindet. Es ist anzunehmen, dass bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit die gleich der durchschnittlichen Telefonierdauer ist, sich das System nicht in einem stabilen Zustand befinden kann.

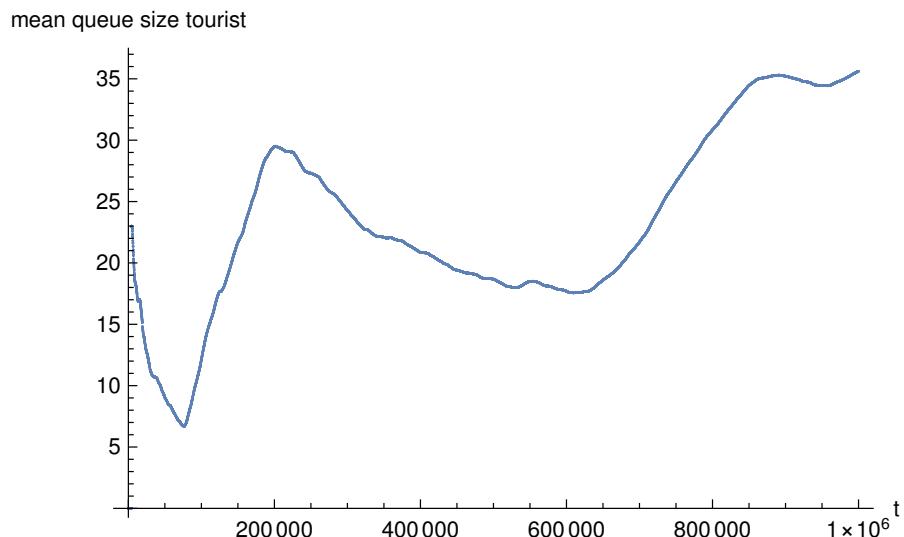


Abbildung 57: Durchschnittliche Warteschlangenlänge der Touristen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

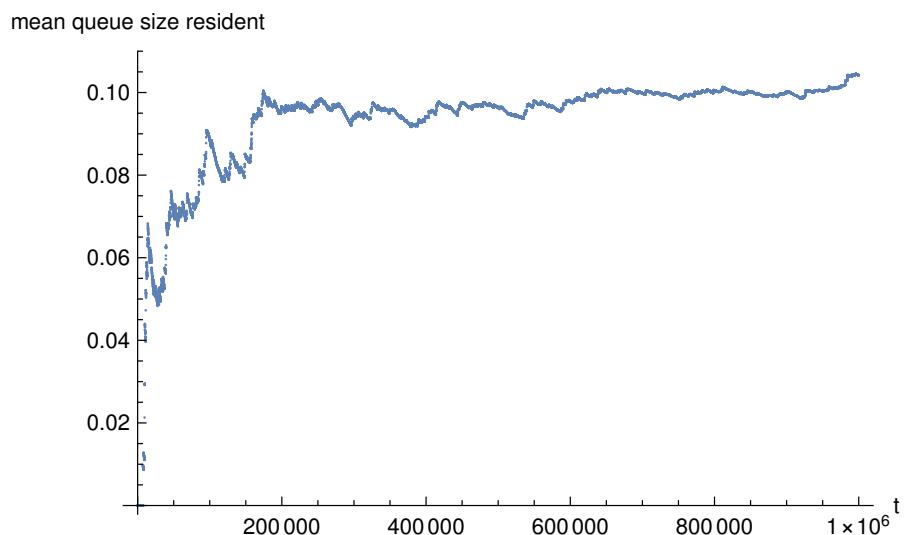


Abbildung 58: Durchschnittliche Warteschlangenlänge der Einheimischen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

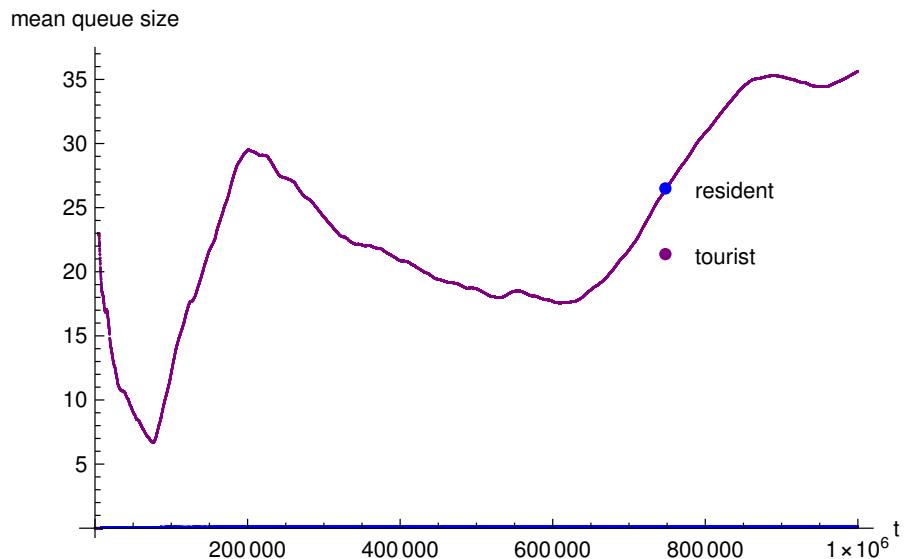


Abbildung 59: Durchschnittliche Warteschlangenlänge der Einheimischen und Touristen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

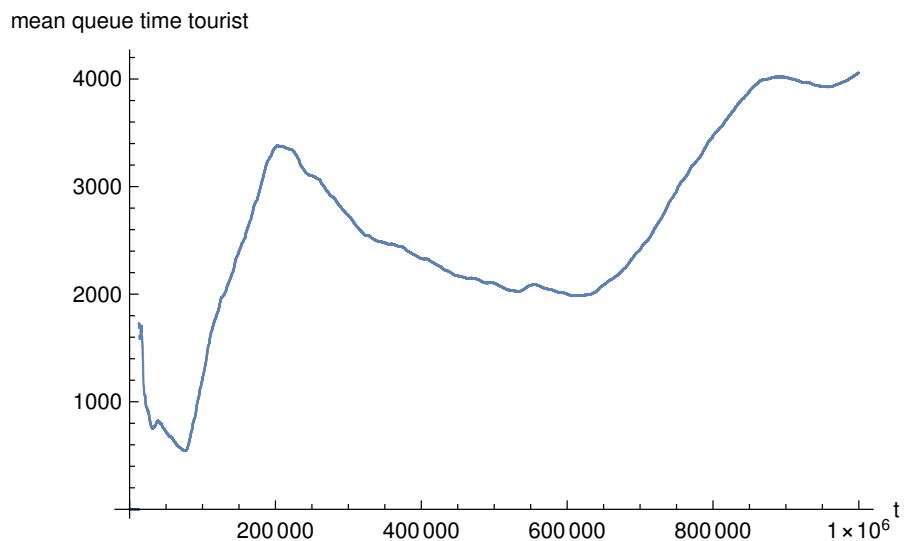


Abbildung 60: Durchschnittliche Wartezeit der Touristen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

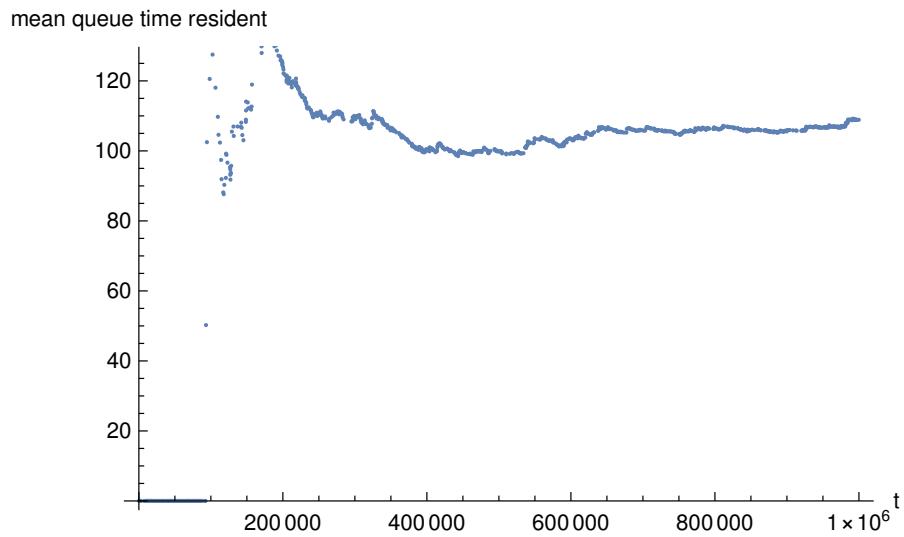


Abbildung 61: Durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

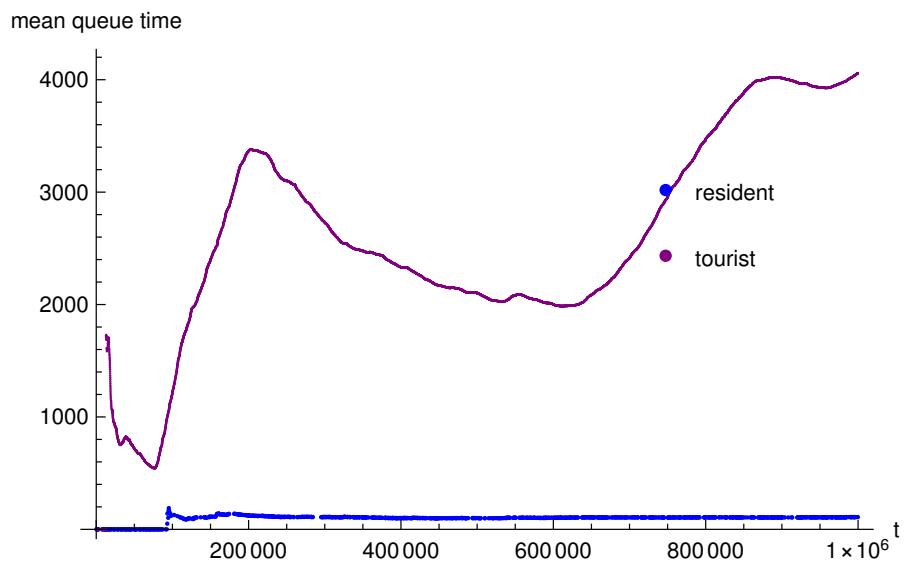


Abbildung 62: Durchschnittliche Wartezeit der Einheimischen und Touristen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

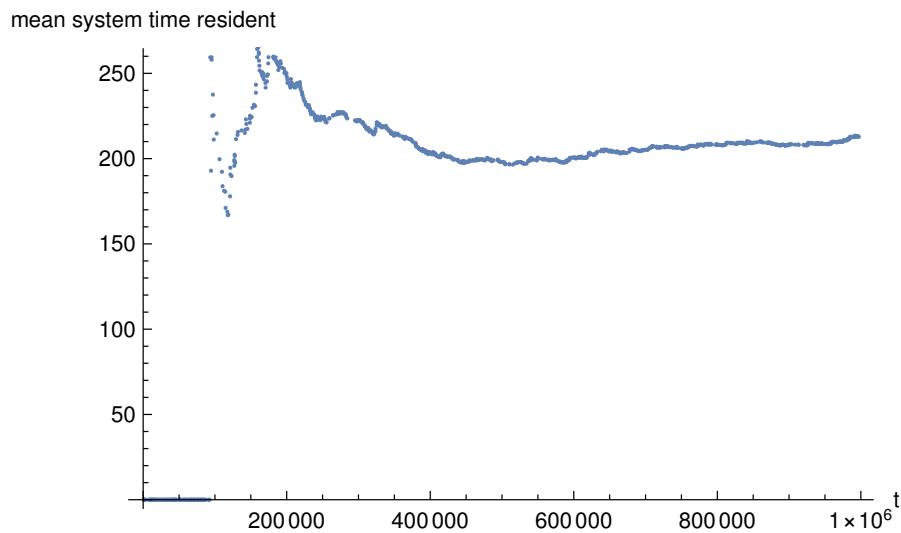


Abbildung 63: Durchschnittliche Systemzeit der Einheimischen bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

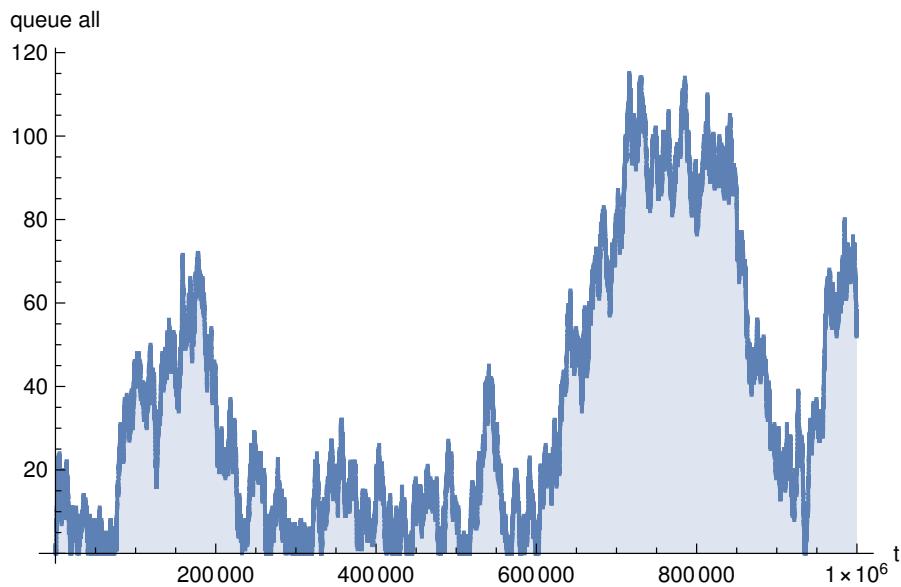


Abbildung 64: Warteschlange über den gesamten Simulationsverlauf bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

mean phone workload

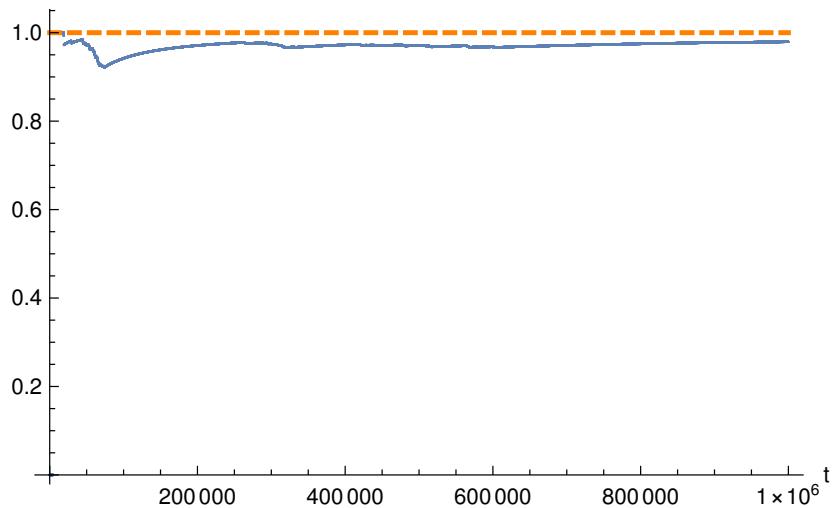


Abbildung 65: Durchschnittliche Auslastung des Telefons bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

$\lambda M_s - L_s$

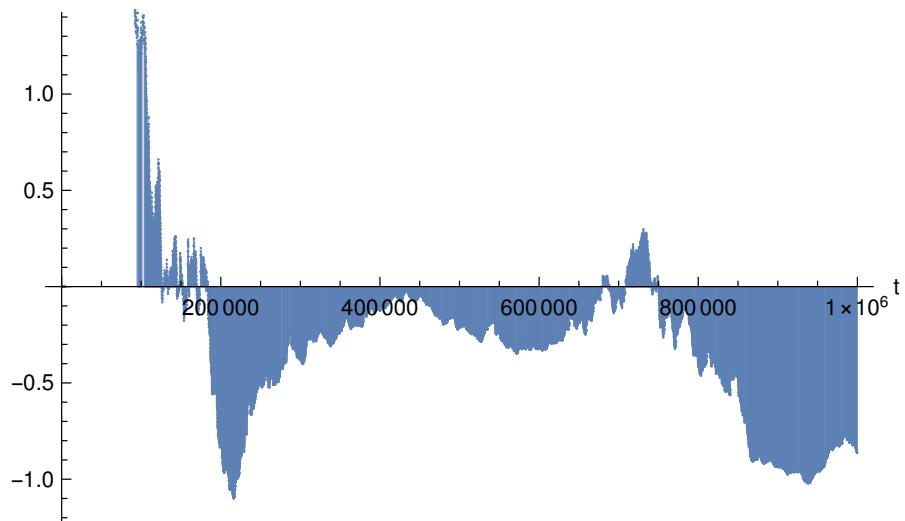


Abbildung 66: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem) bei einer Zwischenankunftszeit von 100 s

6.3 Modell „Zusätzliches VIP Telefon“

Im dritten Betriebsmodus wird zu einem Telefon wie im Betriebsmodus 1 ein VIP Telefon (Telefon, welches Einheimische bevorzugt) hinzugefügt. Wie vorhin werden auch hier die drei verschiedenen mittleren Ankunftszeiten betrachtet. In diesem Szenario werden die Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle verwendet.

6.3.1 Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle

Für die theoretischen Größen und Zeiten des Systems bzw. der Warteschlange werden folgende Formeln genutzt [3]. Dabei steht P_0 für die Wahrscheinlichkeit, dass sich keine Kunden im System befinden. Der Wert c steht für die Anzahl der Telefone. In diesem Betriebsmodus also $c = 2$.

$$P_0 = (1 + \rho + \rho^2 / (2 - \rho))^{-1} \quad (24)$$

$$L_s = \rho + \frac{P_0 * \rho^{c+1}}{(c - \rho)! (c - \rho)^2} \quad (25)$$

$$L_q = \frac{P_0 * \rho^{c+1}}{(c - 1)! (c - \rho)^2} \quad (26)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (27)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad (28)$$

6.3.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.3.2.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/2 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $1000s$ ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.3.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,100137 \quad (29)$$

$$L_q = 0,000250627 \quad (30)$$

$$W_s = 100,137 \quad (31)$$

$$W_q = 0,250627 \quad (32)$$

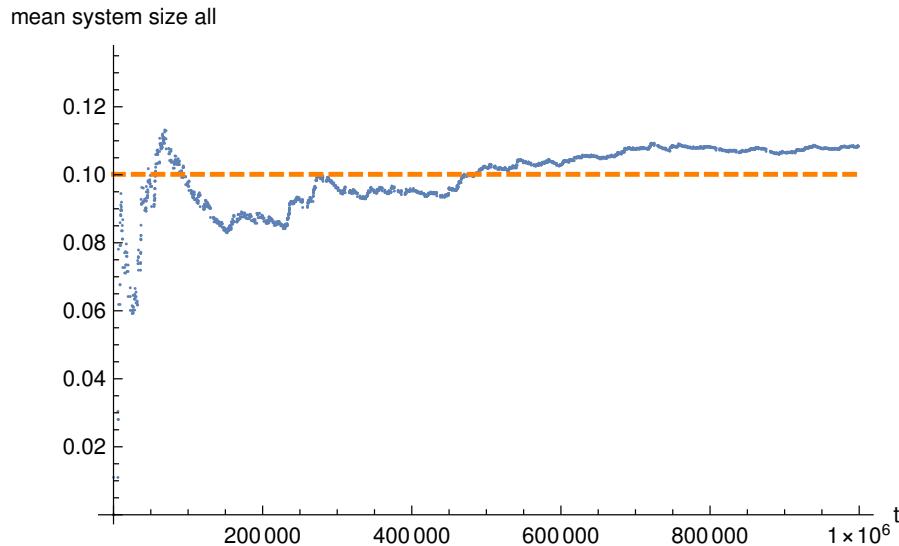


Abbildung 67: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000s

6.3.2.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 67 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 300000s liegt diese durchschnittlich bei 0.10, steigt jedoch bis zum Ende der Simulation um ca. 0, 01. Der Erwartungswert von 0, 100137 wird auch hier durch die Simulation nicht exakt erreicht. Auch in dieser Berechnung muss von einem systematischen Fehler von ca. 0, 01 ausgegangen werden. Die geringe Abweichung lässt anzunehmen, dass die Systemgröße für dieses Szenario plausibel ist.

Durch Betrachtung von Abbildung 68 lässt sich konstatieren, dass die Verweildauer im System sehr nah an dem erwarteten Wert von 100, 137 liegt. Jedoch steigt dieser über die Zeit minimal weiterhin an. Dies zeigt, dass es noch nicht ersichtlich ist, ob eine längere Systemzeit von Nöten wäre oder ob es sich um einen Fehler in der Berechnung handelt.

Bei der Betrachtung der in Abbildung 69 gezeigte, durchschnittliche Warteschlangenlänge fällt auf, dass bei dieser Simulation die Werte durchgehend unter dem erwarteten Wert von 0, 000250627 liegen. Im Verlauf steigen die Werte bis zu 0, 00020 an, was darauf schließen lässt, dass das System einschwingt. Ein systematischer Fehler von 0, 00005 ist wahrscheinlich.

Wie bereits bei der Untersuchung der mittleren Warteschlangenlänge ist die ermittelte durchschnittliche Verweildauer, wie in Abbildung 70 zu sehen ist in der Warteschlange unterhalb des erwarteten Wertes von 0, 25. Dabei nähert sich jedoch der Wert immer weiter dem erwarteten Wert an. Eine Abweichung von 0, 05 lässt sich gegen Ende der Simulation aber nicht ausgleichen.

mean system time all

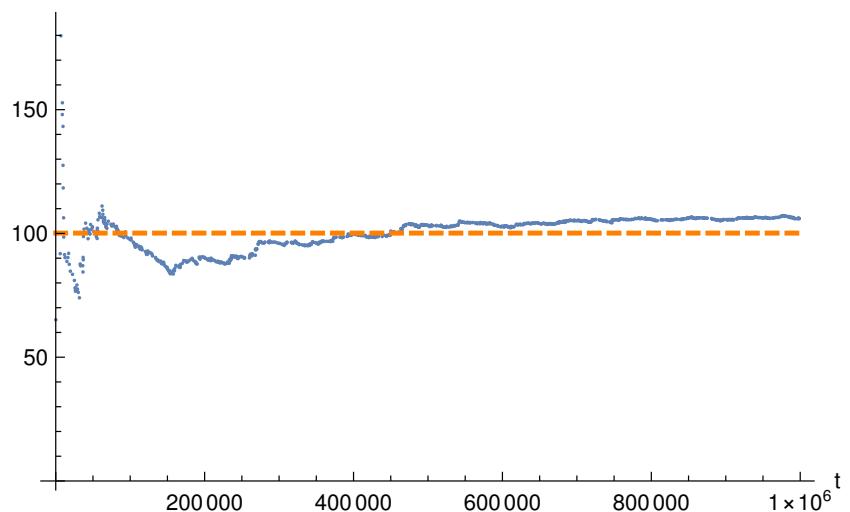


Abbildung 68: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

mean queue size all

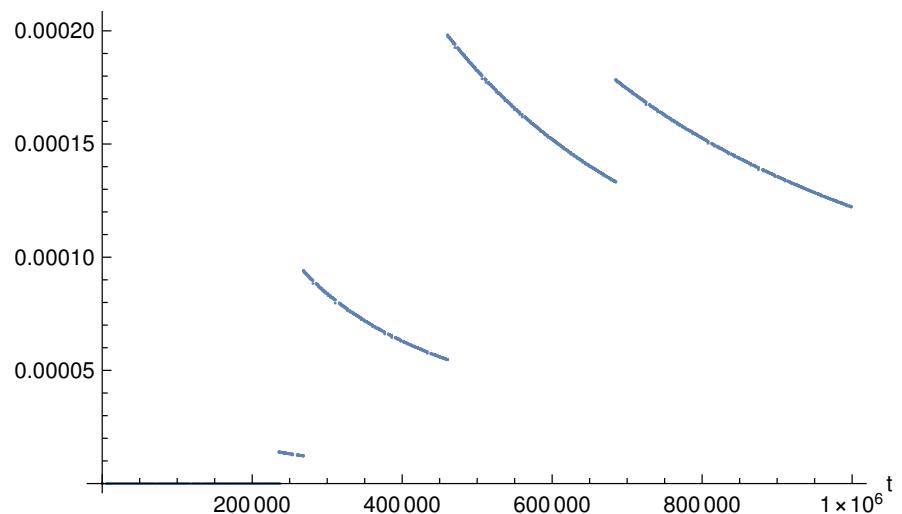


Abbildung 69: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000s

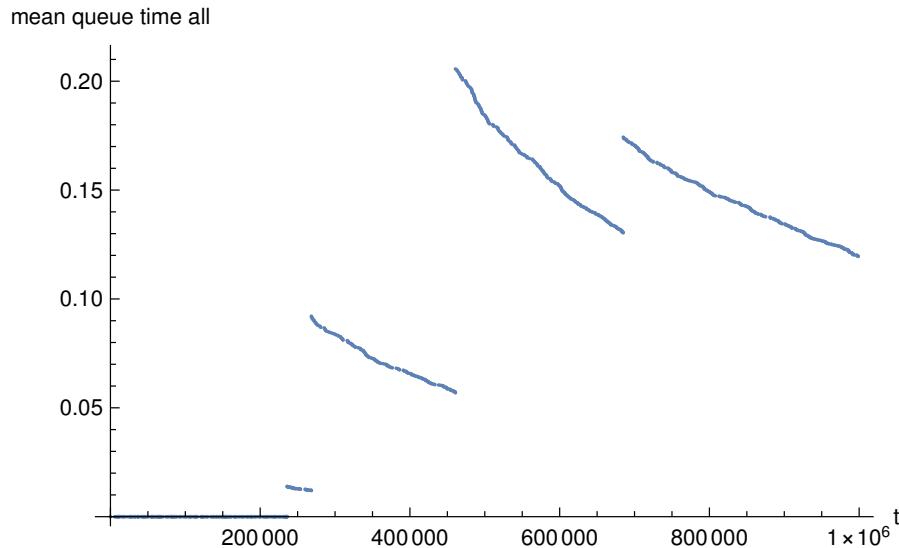


Abbildung 70: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

6.3.2.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 71 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Dieser Wert schwankt über die Simulationsdauer um bis zu 0,005. Da die Differenz zum Erwartungswert auch in diesem Betriebsmodus sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Betrachtet man diese Abbildung mit den vorherigen, dann weichen diese Aussagen nicht voneinander ab.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 71 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. 400000s der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.3.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.3.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/2 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 400 ($\lambda = \frac{1}{400}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.3.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$L_s = 0,252467 \quad (33)$$

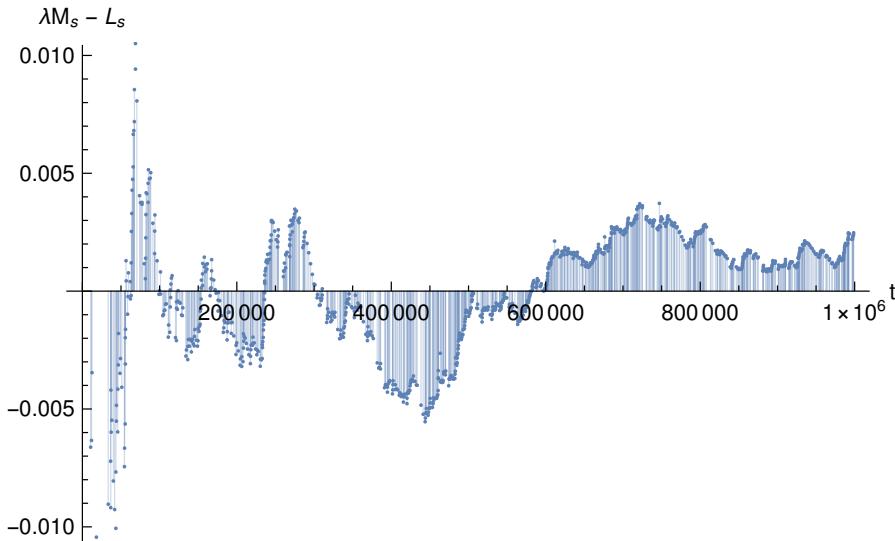


Abbildung 71: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

$$Lq = 0,00396825 \quad (34)$$

$$Ws = 100,987 \quad (35)$$

$$Wq = 1,5873 \quad (36)$$

6.3.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 72 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Bereits ab einer Simulationszeit von ca 100000s nähert diese immer näher an den erwarteten Wert an. Der Erwartungswert von 0,252467 wird dieses mal sehr gut genähert. Die minimale Abweichung lässt anzunehmen, dass die Systemgröße für dieses Szenario plausibel ist.

Die Abbildung 73 zeigt, dass die Verweildauer im System sehr nah an dem erwarteten Wert von 100,987 liegt. In der Simulation wird dieser Wert mit einer fast unerkennbaren Abweichung erreicht.

Auch bei der Betrachtung der in Abbildung 74 nähert sich der Wert immer weiter der theoretischen Warteschlangenlänge von 0,00396825. Jedoch lässt sich noch nicht erkennen, ob bei dieser Laufzeit der Wert noch weiter steigt oder nicht.

Wie bereits bei der Untersuchung der mittleren Warteschlangenlänge ist die ermittelte durchschnittliche Verweildauer, wie in Abbildung 75 zu sehen ist in der Warteschlange sehr nah an dem erwarteten Wert von 1,5873. Auch hier ist nicht bekannt ob sich der Wert über einen längeren Zeitraum genau so verhält.

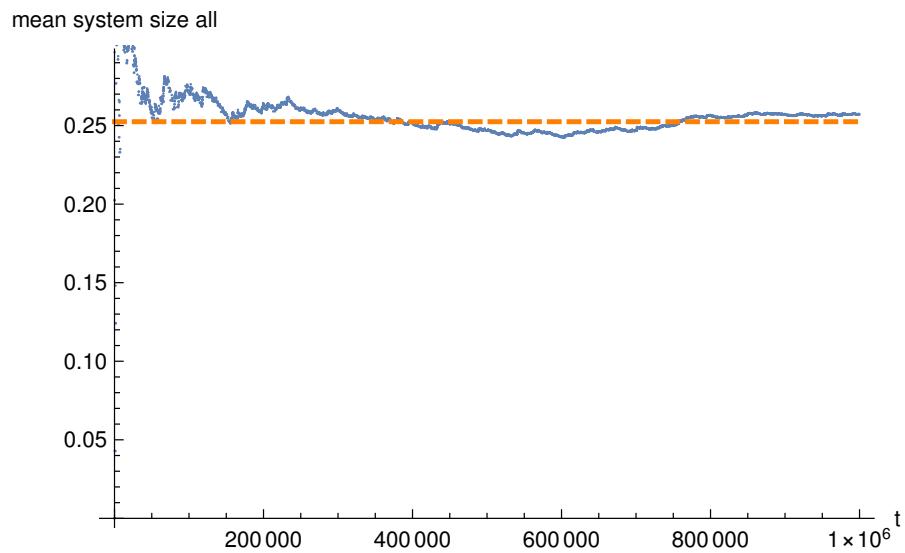


Abbildung 72: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 400s

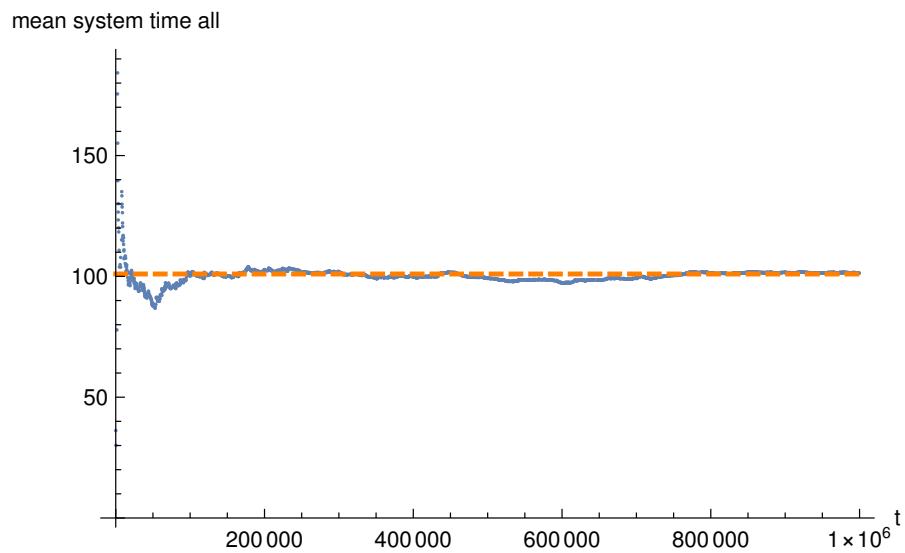


Abbildung 73: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 400s

mean queue size all

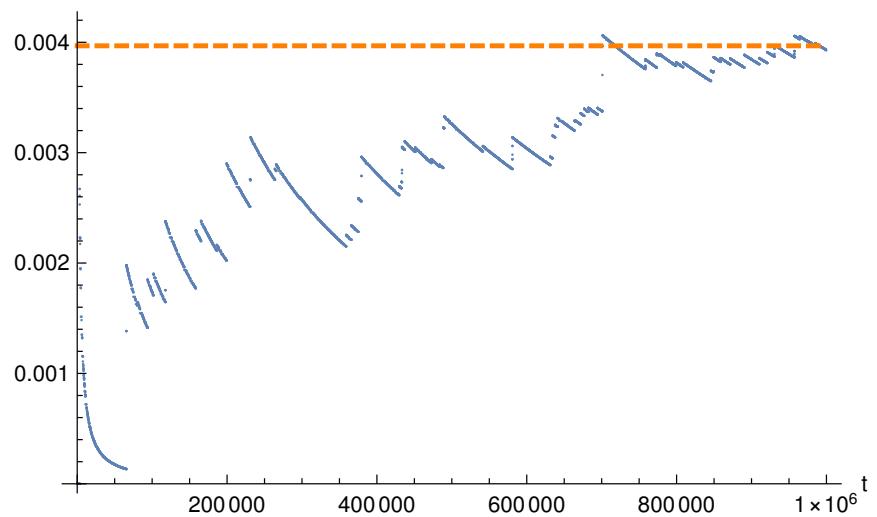


Abbildung 74: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 400s

mean queue time all

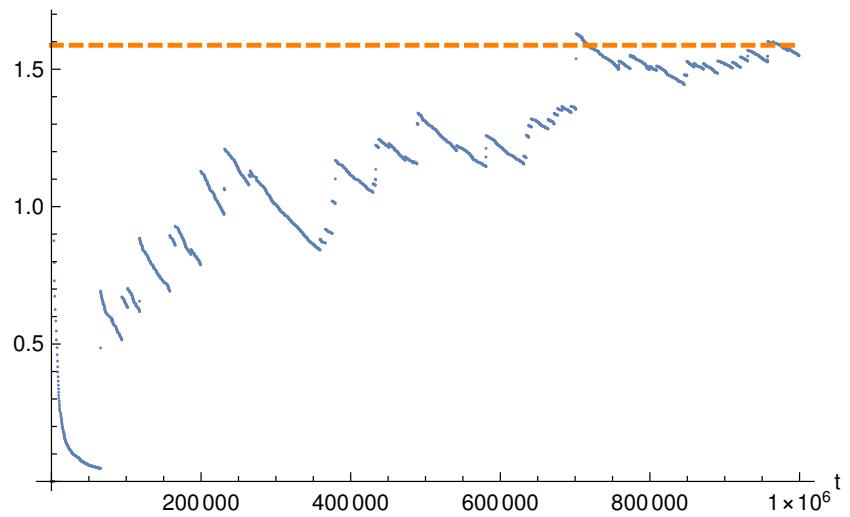


Abbildung 75: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 400s

6.3.3.3 Validierung der Simulation

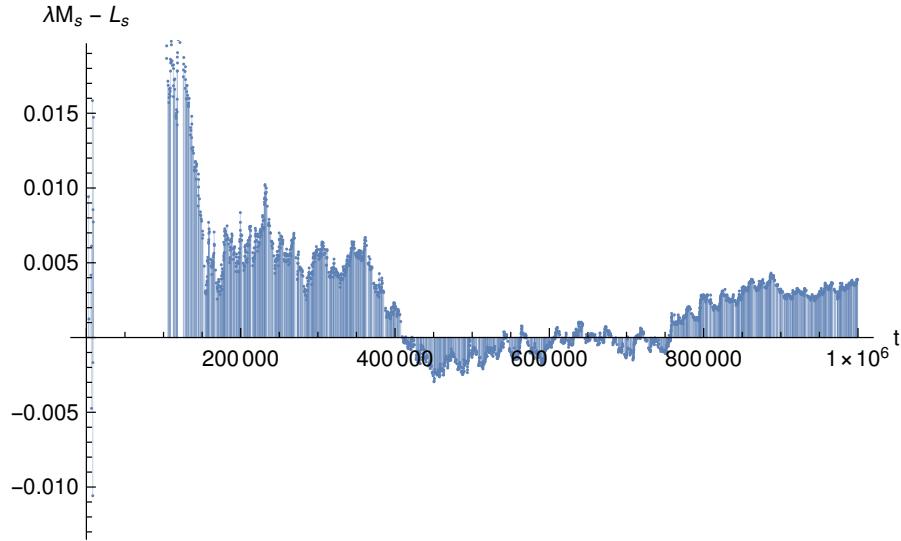


Abbildung 76: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

In Abbildung 76 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Dieser Wert schwankt über die Simulationsdauer um bis zu 0,005. Da die Differenz zum Erwartungswert auch in diesem Betriebsmodus sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Betrachtet man diese Abbildung mit den vorherigen, dann weichen diese Aussagen nicht voneinander ab.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 76 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. 400000s der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.3.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

6.3.4.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/2 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 100 ($\lambda = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.3.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 1,33333 \quad (37)$$

$$Lq = 0,333333 \quad (38)$$

$$Ws = 133,333 \quad (39)$$

$$Wq = 33,3333 \quad (40)$$

6.3.4.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

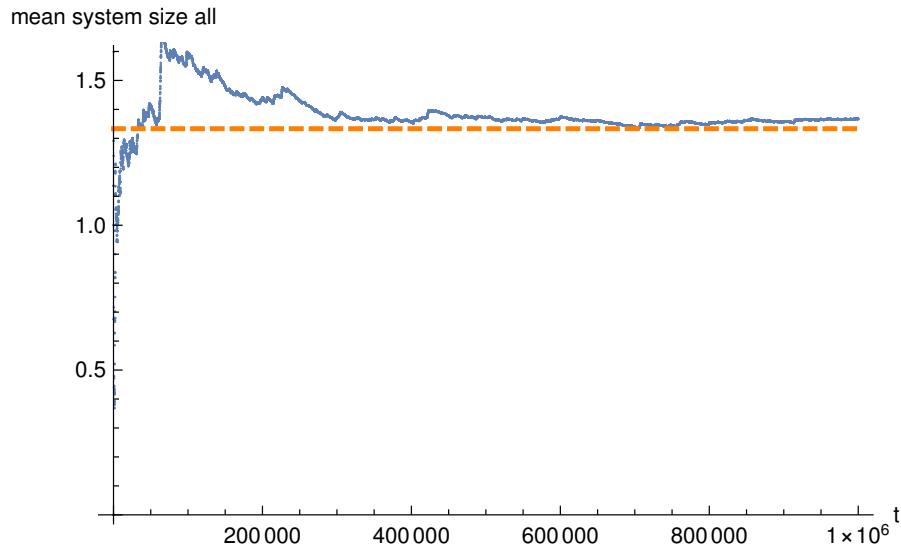


Abbildung 77: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s

In Abbildung 77 kann man erkennen, dass bei zwei Telefonen die durchschnittliche Systemgröße sich sehr gut an den erwarteten Wert annähert. Hingegen der vorherigen Betriebsmodi lässt die Abbildung auf ein eingeschwungenes System schließen.

Da durch zwei Telefone die Service Rate verdoppelt wird, ist in dieser Simulation μ ungleich λ . Folglich ist das erreichen eines Steady State nicht unplausibel.

Ein ähnlicher Schluss lässt sich ziehen bei Betrachtung der mittleren Systemzeit in Abbildung 78. Auch hier wird der erwartete Wert von 133,333 fast erreicht.

In den Abbildungen 79 und 80, welche die Größe und Verweildauer der Warteschlangen zeigen, lässt sich ein Einstrom des Systems ab ca. 200000s vermuten. Da diese Werte bis zum Ende der Simulation kaum schwanken, kann davon ausgegangen werden, dass sie es nicht bei einer längeren Simulationsdauer tun würden.

6.3.4.3 Validierung der Simulation

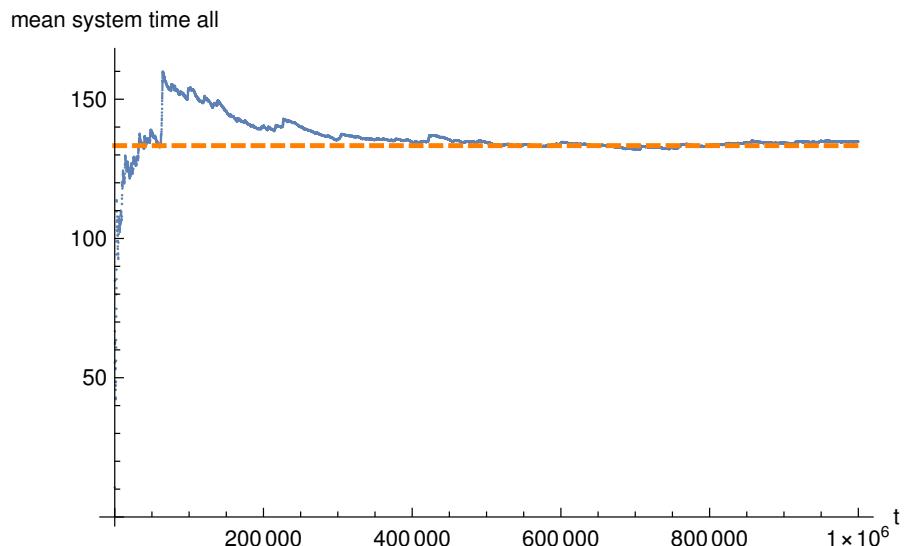


Abbildung 78: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100s

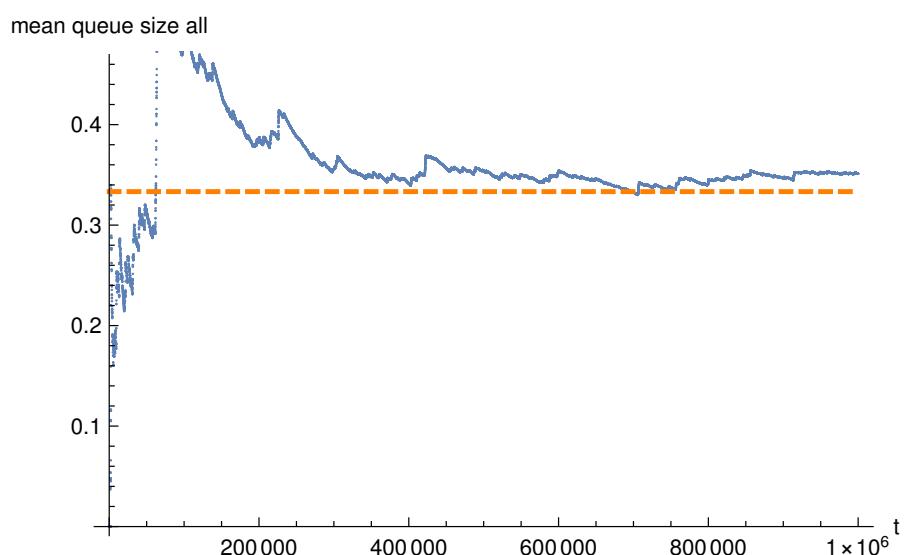


Abbildung 79: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100s

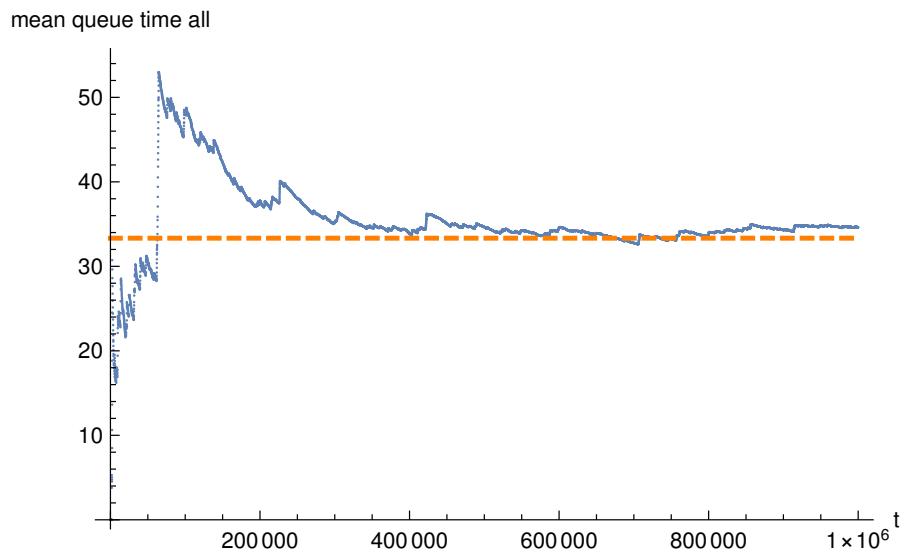


Abbildung 80: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100s

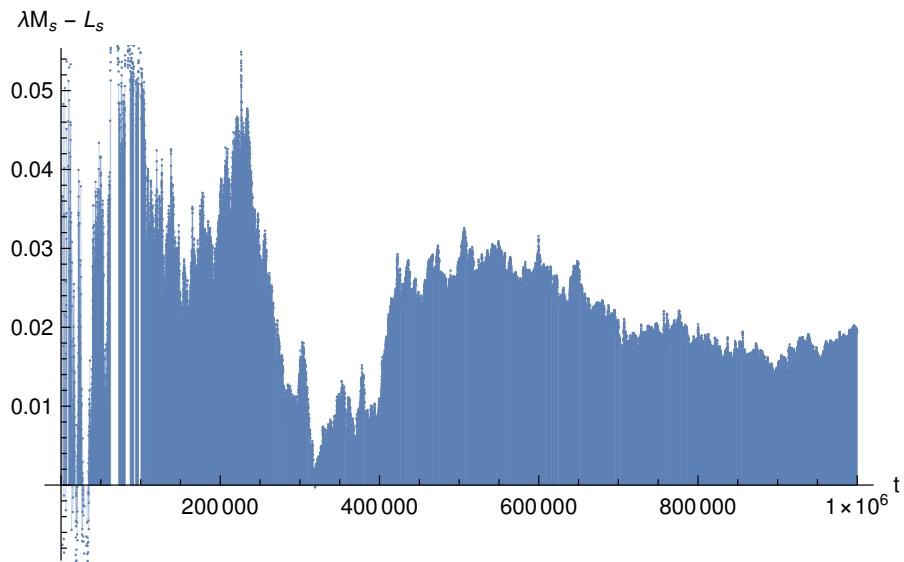


Abbildung 81: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

Anders als in den vorherigen Ankunftszeiten des Betriebsmodus 3, wie in Abbildung 81 zu sehen ist, liegt der Wert über die gesamte Simulationsdauer über 0. Zusätzlich schwankt der Wert bis zu einer Simulationszeit von ca. 225000s um 0,05 über dem erwarteten Wert. Ab dem Zeitpunkt von 400000s geht dieses Abweichung auf 0,03 herunter, ist aber im Vergleich zu den vorherigen Ankunftszeiten signifikant hoch. Folglich kann nur von einer sehr schwachen Aussagekraft der Messung und der Simulation ausgegangen werden. Ein Steady State kann nicht erwartet werden.

6.3.5 Vergleich von Betriebsmodus 3 (Zwei Telefon) und Betriebsmodus 1 (Ein Telefon)

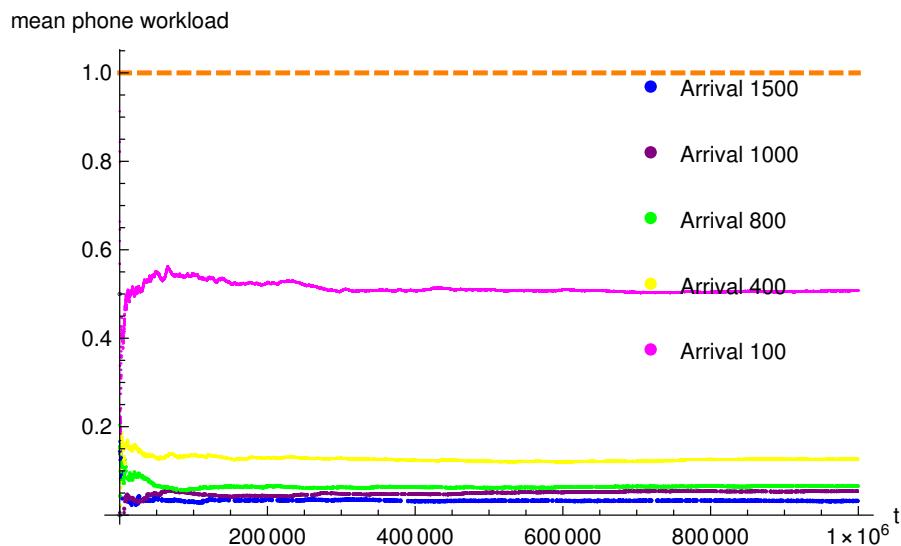


Abbildung 82: Darstellung der Telefonauslastung für verschiedene Ankunftszeiten

Betrachtet man nun die Auslastung der beiden Telefone in Abbildung 82 fällt auf, dass die Last über die Simulationszeit niedrig ist. In diesem Graph ist die Linie bei 2, da auch die Anzahl der Telefone verdoppelt hat. Nur bei einer Ankunftsrate von 100s übersteigt die Auslastung des Systems den Wert 1. Daher lässt sich schließen, dass in den anderen Szenarien das zweite Telefon überflüssig erscheint.

Wenn man jedoch Abbildung 30 betrachtet, dann ist das System bei einer Ankunftsrate von 100s komplett ausgelastet.

7 Softwaretest

7.1 Verifikation

Um unseren Code zu verifizieren wurden Unit-Tests erstellt. Die Zeit hat nicht ausgereicht eine vollständige Testabdeckung zu erreichen. Deshalb wurden für jede Änderung an der Code-Basis Reviews von in der Regel zwei bzw. mindestens einem anderen Teammitglied durchgeführt. Nach Ende der Implementierung wurde die Software nochmal komplett überprüft.

7.2 Validation

Tests wurden soweit möglich über das Theorem von Little und Vergleiche mit bewiesenen Formeln durchgeführt. Somit wurde gezeigt, dass die Software für eingeschwungene Systeme auch valide ist.

8 Ausblick und Fazit

8.1 Abweichung von theoretischen Werten

Im Zuge der Auswertung der durch die Simulation erzeugten Werte lässt sich beim Vergleich mit den theoretisch errechneten Werten feststellen, dass diese nie exakt erreicht wurden. Die Werte der Simulation nähern sich mit zunehmender Simulationsdauer stark an die theoretischen Werte an, doch es bleibt immer eine Abweichung bestehen. Diese Tatsache kann durch folgenden Gründe erklärt werden:

Sowohl die Zwischenankunftszeiten, als auch die Telefonierzeiten sind (auf Basis eines vorgegebenen Durchschnittswertes) einer Zufallsverteilung unterworfen. Diese erzielt immer eine gewissen Abweichung um den theoretischen Wert.

Andererseits können auch Rundungsfehler zu diesen Abweichungen führen. Für die Berechnung der einzelnen Durchschnittswerte sind zahlreiche Berechnungen notwendig. Doch gerade bei Divisionen treten in der Regel Ungenauigkeiten in den Nachkommastellen auf, welche auf Rundungsfehler zurückzuführen sind. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass ein anderer Rundungsmodus oder eine Berücksichtigung von mehr als 32 Nachkommastellen das Ergebnis verändern würde.

8.2 Auswirkung der unterschiedlichen Betriebsmodi auf die Wartezeiten für die Kunden

Es wurden drei unterschiedliche Betriebsmodi simuliert. Im ersten Betriebsmodus werden alle Kunden gleich behandelt. Bis zu einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von $400s$ (bei einer durchschnittlichen Telefonierzeit von $100s$) sind die Wartezeiten für die Kunden sehr gering.

Im Betriebsmodus 2 werden die Einheimische der Insel gegenüber den Touristen bevorzugt. Vermutlich würde dieser Betriebsmodus in der Realität zu Unzufriedenheit bei den Touristen führen. Die durchschnittlichen Wartezeiten der Einheimischen werden bei diesem Betriebsmodus stark reduziert. Hingegen steigen die Wartezeiten der Touristen an, sodass sich die durchschnittliche Gesamtwartezeit aller Kunden gegenüber dem Betriebsmodus 1 nicht verändert.

Zwei Telefone wie in Betriebsmodus 3 bewirken hingegen zu den vorherigen Modi eine signifikante Entlastung des Systems.

8.3 Unberücksichtigte Simulationen

Darüber hinaus wurde eine Simulation mit einer Simulationsdauer von 10^9s , was in etwa 31,7 Jahren entspricht, durchgeführt. Aufgrund der zu großen Datenmenge von ca. 50 GB kann dieser Datenstand nicht ausgewertet werden. Vor allem bei der grafischen Darstellung reichte die Kapazität der verwendeten Rechner nicht aus. Der Datenstand kann auf Wunsch vorgezeigt werden.

8.4 Ausblick

Die gewählte Implementierung der Simulation bietet zahlreiche Variationsmöglichkeiten der einzelnen Parameter. Je nach Wahl der Parameter kann das Ergebnis der Simulation deutlich anders verlaufen. Für die Auswertung im Zuge dieser Studienarbeit wurde vor allem der Parameter der durchschnittlichen Zwischenankunftszeit variiert. Es besteht jedoch die Möglichkeit weitere Simulationen mit unterschiedlichen Zwischenankunftszeiten, Telefonierzeiten oder einem anderen Verhältnis zwischen Einheimischen und Touristen ablaufen zu lassen.

Literatur

- [1] Prof. Dietl H. Warteschlangenmodelle. http://www.business.uzh.ch/dam/jcr:00000000-0451-792f-fffffe13aac9/ServiceManagement_Warteschlangenmodelle.pdf. Zugriff am 14.05.2017.

- [2] Steinfeld T. Exponentialverteilung. <http://www.mathepedia.de/Exponentialverteilung.aspx>. Zugriff am 14.05.2017.
- [3] faculty.ksu.edu.sa/9766/OR372/Lec13_MM_s_Queueing%20System2.pdf