

Modell eines Insel-Callshops

2. Projekt zu Modellierung und Simulation

Daniel Graf, Dimitrie Diez, Arne Schöntag, Peter Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
2 Beschreibung des Modells	2
3 Anforderungen/Requirements	3
3.1 Allgemeines	3
3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten	3
3.3 Verteilung der Telefonierzeiten	3
3.4 Zeitmodelierung	3
3.5 Berechnungen	4
3.6 Reports	4
3.7 Parameter	4
3.8 Betriebsmodi	5
3.9 Werte für die Auswertung	5
4 Softwaredesign	5
5 Überprüfung auf Exponentialverteilung	5
5.1 Graphische Überprüfung	6
5.2 Rechnerische Überprüfung	7
6 Auswertung der Ergebnisse	7
6.1 Modell „Ein Telefon“	7
6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle	8
6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems	9
6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s	9
6.1.4 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s	14
6.1.5 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s	19
6.2 Vergleich der Telefonauslastungen	24
6.3 Modell „Bevorzugte VIP“	24
6.3.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	24

6.3.2	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	24
6.3.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	24
6.4	Modell „Zusätzliches VIP Telefon“	24
6.4.1	Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle	25
6.4.2	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000	25
6.4.3	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400	29
6.4.4	Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100	29
7	Fazit	29

1 Einführung

Simulationen haben in der moderne einen sehr hohen Stellenwert erlangt, da durch sie zahlreiche, oftmals sehr genaue, Zukunftsprognosen erstellt werden können. Als Grundlage für die Simulationen dienen in der Regel Modelle, welche einen Ausschnitt der Wirklichkeit abbilden. Das Thema dieser Studienarbeit ist die Simulation eines Callshops, bzw. des Telefons in einem Callshop, in einem Inseldorf. Dieser wird für günstige Telefonate ins Ausland verwendet.

2 Beschreibung des Modells

Für die Simulation des Insel-Callshops wird ein Warteschlagenmodell mit Clients und zunächst nur einem Server verwendet. Jede Person die den CallShop betritt wird durch einen neuen Client repräsentiert. Das Telefon des Shops ist durch den Server dargestellt. Möchte eine Person das Telefon zu einem Zeitpunkt benützen, zu dem bereits eine andere Person telefoniert, muss sie sich hinten anstellen und warten, bis die Person ihr Telefonat beendet hat. Im Modell wird dieses durch eine Warteschlage (Queue) realisiert, in die sich ankommende Clients einordnen und sobald der Server nichtmehr belegt ist nach dem FIFO (first in first out) Prinzip bedient werden.

Im Modell werden sowohl die Ankunftszeiten der Clients, als auch die Dauer der Telefonate durch eine negative Exponentialverteilung beschrieben, da diese sehr nah an den real beobachteten Verhalten liegt. Der mathematische Hintergrund liegt in der Eigenschaft der Exponentialfunktion zugrunde. Die Exponentialverteilung ist die einzige kontinuierliche Verteilung, welche zugleich die Markoveigenschaft, die sogenannte Gedächtnislosigkeit, erfüllt. Diese besagt, dass die seit dem letzten Ereignis vergangene Zeit (in diesem Beispiel Anrufer) keinen Einfluss auf die Verteilung der Zeit bis zum nächsten Ereignis (bis zum nächsten Anruf) hat [2].

Darüber hinaus wird ein zweites Modell betrachtet, in welchem die Bewohner des Inseldorfes (Einheimische) bevorzugt werden. Im weiteren Verlauf der Studienarbeit werden diese als VIP oder resident bezeichnet. Der grundlegende Ablauf verläuft wie beim ersten

Modell. Allerdings wird, bevor der nächste Client (FIFO Prinzip) telefonieren darf, die Queue nach einem VIP durchsucht. Befindet sich ein VIP in der Queue, wird dieser bevorzugt und darf zuerst telefonieren.

In einem dritten Modell befindet sich ein weiteres Telefon im Callshop. Von den nun zwei Telefonen (zwei Server), behandelt eines alle ankommenden Personen (Clients) gleichberechtigt (analog zum ersten Modell). Das zweite Telefon bevorzugt die VIPs und behandelt andere Personen nur, wenn kein VIP wartet (analog zum zweiten Modell).

3 Anforderungen/Requirements

3.1 Allgemeines

Die Software soll die Simulation eines Warteschlangensystems durchführen. Zu Beginn der Simulation wird davon ausgegangen, dass die Warteschlange keine Elemente enthält, da sich auch in der Realität beim Öffnen eines Ladens noch keine Personen in einer Warteschlange im Laden befinden.

3.2 Verteilung der Zwischenankunftszeiten

Die Zwischenankunftszeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll eine negative Exponentialverteilung aufweisen. Die Exponentialverteilung für eine zufällige Zwischenankunftszeit x ist erfüllt falls sie folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die mittlere Zwischenankunftszeit hat den Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Die mittlere Zwischenankunftszeit soll parametrisierbar sein.

3.3 Verteilung der Telefonierzeiten

Die Telefonierzeiten sollen zufällig generiert werden. Die Verteilung der Zufallszahlen soll analog zur Zwischenankunftszeiten eine Exponentialverteilung aufweisen. Die mittlere Telefonierzeit soll ebenfalls parametrisierbar sein.

3.4 Zeitmodellierung

Die Applikation unterliegt keinen harten Echtzeitanforderungen. Die Simulation soll für die gesamte Simulationsdauer so schnell wie möglich durchgeführt werden. Es soll keine Globale Uhr modelliert werden.

3.5 Berechnungen

Die Grundfunktion der Applikation ist die Simulation eines Warteschlangenmodells und die Ausgabe relevanter Rohdaten für weitere Berechnungen. Die Berechnungen selbst werden von der Applikation und mit Hilfe von Mathematica durchgeführt.

3.6 Reports

Alle errechneten Ergebnisse sollen über Reports ausgeleitet werden. Die Reports sollen im .CSV format ausgeleitet werden um eine gute Weiterverarbeitung der Ergebnisse zu gewährleisten. Folgende Reports sollen ausgeleitet werden:

- arrival.csv enthält alle Arrival-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
begin.csv enthält alle Begin-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
- finish.csv enthält alle Finish-Ereignisse mit Zeitstempel und Personen ID.
- queue.csv enthält die Länder der Warteschlange und die Anzahl der Personen im System mit Zeitstempel.
- arrival_distribution.csv enthält alle zufällig generierten Zahlen für die Zwischenankunftszeiten.
- serve_distribution.csv enthält alle zufällig generierten Zahlen für die Dauer der Telefongebrauchszeit.

3.7 Parameter

Die Tabelle 1 zeigt alle möglichen Parameter, welche die Software steuern. Alle Parameter sind optional.

Parameter	Beschreibung	Default
-a	durschnittliche Zwischenankunftszeit der Besucher in Sekunden [s]	1000
-c	durschnittliche Telefonierdauer in Sekunden [s]	100
-d	Dauer der Simulation in Sekunden [s]	100.000.000
-vip	Anteil der Inselbewohner an den Besuchern in Prozent [%]	10
-conf	Betriebsmodus (1, 2, oder 3)	1
-o	Ausgabepfad zur Reporterstellung	../data/

Tabelle 1: Parameter und Defaultwerte

3.8 Betriebsmodi

Die Software hat drei Betriebsmodi:

Betriebsmodus 1: In diesem Modus gibt es ein Telefon und eine Warteschlange. Alle Personen in der Warteschlange werden gleichberechtigt behandelt.

Betriebsmodus 2: In diesem Modus gibt es ein Telefon und eine Warteschlange. Die Personen werden jedoch unterschieden nach Einheimischen (VIP) und Touristen. Einheimische werden bevorzugt behandelt. Befindet sich ein Einheimischer in der Warteschlange, wird dieser zuerst telefonieren, sobald das Telefon frei ist. Befinden sich mehrere Einheimische in der Warteschlange, wird der erste zuerst abgearbeitet. Das Verhältnis von Einheimischen zu Touristen kann mittels des Parameters percVIP geregelt werden.

Betriebsmodus 3: In diesem Modus gibt es eine Warteschlange und zwei Telefone. Das erste Telefon behandelt die Warteschlange analog zu Betriebsmodus 2. Das zweite Telefon behandelt die Warteschlange der Reihe nach unabhängig davon, ob es sich um einen Touristen oder einen Einheimischen handelt.

3.9 Werte für die Auswertung

Alle in der Tabelle 2 aufgeführten Werte sollen auf Basis der Simulation ermittelt und ausgewertet werden.

Ermittelte Werte	Beschreibung
Mittlere Warteschlangenlänge	Durchschnittliche Anzahl der anstehenden Kunden
Mittlere Anstehzeit	Durchschnittliche Wartezeit eines Kunden
Mittlere Verweildauer im Shop	Mittlere Anstehzeit + Mittlere Telefonierdauer
Mittlere Serverauslastung	Anteil an der Gesamtzeit, in der das Telefon belegt ist

Tabelle 2: Werte für die Auswertung

4 Softwaredesign

5 Überprüfung auf Exponentialverteilung

Im Zuge dieses Kapitels erfolgt die Überprüfung der, im Zuge der implementierten Simulation, generierten Zufallszahlen. Diese sollen, wie in den Anforderungen definiert, negativ exponentialverteilt sein.

Die Überprüfung erfolgt zunächst graphisch mittels eines Histogramms und eines Quantil-Quantil-Plots. Im Anschluss erfolgt die rechnerische Überprüfung mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test.

5.1 Graphische Überprüfung

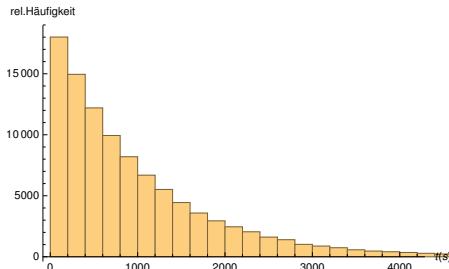


Abbildung 1: Histogramm der generierten Zufallszahlen

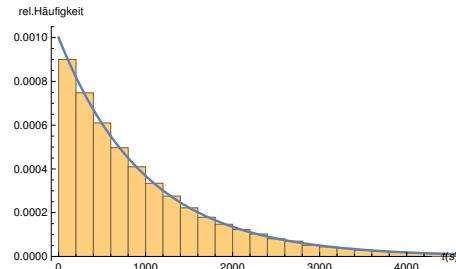


Abbildung 2: Histogramm einer Exponentialverteilung

Abbildung 1 zeigt die von der Simulation generierten Zufallszahlen in einem Histogramm. Zum besseren Vergleich zeigt Abbildung 2 das Histogramm einer Exponentialverteilung. Beide Abbildungen weisen einen nahezu identischen Verlauf auf, was ein Indiz für eine Exponentialverteilung der Daten darstellt.

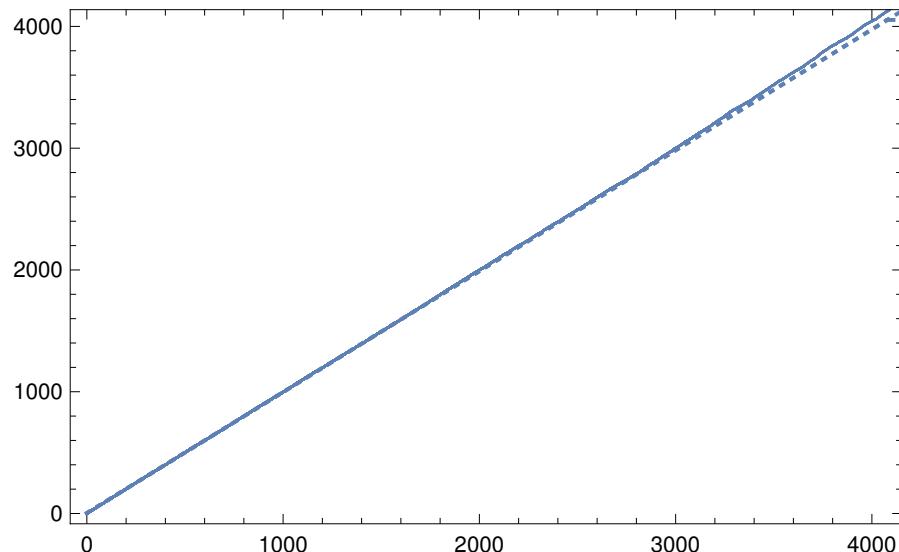


Abbildung 3: Quantil-Quantil-Diagramm der generierten Zufallszahlen

In Abbildung 3 werden die generierten Zufallszahlen in einem Quantil-Quantil-Diagramm dargestellt. Die blaue, gestrichelte Ursprungsgerade zeigt den Verlauf einer Exponentialverteilung im Quantil-Quantil-Diagramm. Die generierten Daten werden durch die blaue

Linie repräsentiert. Die Abbildung zeigt somit, dass beide Linien nahezu deckungsgleich sind und es nur eine sehr geringe Abweichung gibt. Das Quantil-Quantil-Diagramm liefert somit einen weiteres Indiz dahingehend, dass die generierten Zufallszahlen tatsächlich exponentialverteilt sind.

5.2 Rechnerische Überprüfung

Für eine weitere Überprüfung werden die generierten Daten mittels Shapiro-Wilk-, Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Test auf eine Exponentialverteilung überprüft. Die Hypothese H_0 lautet hierbei:

H_0 : Die generierten Zufallszahlen sind exponentialverteilt, Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$
 Die Ergebnisse der einzelnen Tests sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	Statistic	P-Value
Anderson-Darling	0.482866	0.764349
Cramér-von Mises	0.0690154	0.757621
Kolmogorov-Smirnov	0.00201837	0.80994
Kuiper	0.00390365	0.478494
Pearson χ^2	191.088	0.643726
Watson U^2	0.0689189	0.503982

Laut dem Shapiro-Wilk-Test kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, da der p-Wert mit 0,80994 deutlich über dem Signifikanzniveau von 0,05 liegt. Ebenso kann die Nullhypothese bei den Cramér-von-Mises- und Anderson-Darling-Tests nicht abgelehnt werden, da der p-Wert hier ebenso mit 0,764349 bzw. 0,0764349 deutlich über dem Signifikanzniveau liegt.

Durch die Tests kann somit eine Exponentialverteilung der generierten Zufallszahlen nicht widerlegt werden. In Kombination mit der graphischen Überprüfung ist es plausibel, wenn von exponentialverteilten Werten ausgegangen wird. Ein entgültiger Beweis kann nicht erbracht werden.

6 Auswertung der Ergebnisse

Im Zuge dieses Kapitels werden alle Ergebnisse der Simulation und die daraus errechneten Werte erläutert. Zusätzlich werden relevante Größen durch Plots veranschaulicht. Die einzelnen Auswertungen werden mit Hilfe des Theorems von Little validiert.

6.1 Modell „Ein Telefon“

Für den in Kapitel 3 aufgelisteten ersten Betriebsmodus (ein Server, welcher alle Clients bedient) werden im folgenden die Auswertungen aufgeführt. Exemplarisch

werden vier verschiedene durchschnittliche Ankunftszeiten für die Clients verwendet. Zunächst wird eine durchschnittliche Ankunftszeit von $1000s$ angenommen, was bei einer durchschnittlichen Telefonierdauer von $100s$ (Dauer der Serverbelegung) einer sehr geringen Serverauslastung entspricht. Anschließend werden mit den durchschnittlichen Ankunftszeiten von $800s$, $400s$ und $100s$ die Auswirkungen von höherer Serverauslastung auf das Ergebnis der Simulation erläutert.

Für jede durchschnittliche Ankunftszeit werden zunächst die zu erwartenden Werte, basierend auf den Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle ermittelt. Die einzelnen Formeln sind im folgenden Kapitel aufgeführt. Betrachtet werden hierbei, wie in den 3 erläutert die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System, durchschnittliche Warteschlangenlänge, durchschnittliche Verweildauer im System und die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange. Die berechneten Größen werden als Erwartungswerte betrachtet gegen die durch die Simulation ermittelten Werte geprüft werden.

Die Maßnahmen für die Verifikation der implementierten Simulation werden im Kapitel (REFERENZ AUF DIE UNITTEST KAPITEL) näher beschrieben. In den folgenden Abbildungen wird die durchschnittliche Zwischenankunftszeit mit „MeanAr“ abgekürzt.

6.1.1 Formeln für M/M/1 Warteschlangenmodelle

Die im folgenden aufgeführten Formeln gelten für M/M/1 Warteschlangenmodelle im eingeschwungenen Zustand. Mit L_s wird die durchschnittliche Anzahl von Kunden im System bezeichnet. L_q gibt die durchschnittliche Länge der Warteschlange an. W_s definiert die durchschnittliche Verweildauer der einzelnen Kunden im System und W_q die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (1)$$

$$L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2)$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (3)$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (4)$$

In den einzelnen Gleichungen sind λ , μ und ρ wie folgt definiert: λ beschreibt die durchschnittliche Ankunftszeit der Kunden pro Sekunde. μ definiert die durchschnittliche Telefonierdauer der Kunden pro Sekunde. Und ρ beschreibt die durchschnittliche Auslastung des Telefons [1].

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

6.1.2 Validierung der einzelnen Auswertung auf Basis des Little Theorems

Laut dem Theorem von Little muss die durchschnittliche Anzahl von Kunden in einem Warteschlangensystem gleich dem Produkt aus der durchschnittlichen Ankunftsrate (λ) und der durchschnittlichen Verweildauer (Ws) im System sein, wenn das System sich in einem eingeschwungenen Zustand befindet.

$$Ls = \lambda * Ws \quad (6)$$

Stellt man die Formel um, muss im eingeschwungenen Zustand gelten:

$$\lambda * Ws - Ls = 0 \quad (7)$$

Anhand dieser Gleichung werden im weiteren Verlauf der Studienarbeit die einzelnen Auswertungen validiert.

6.1.3 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 1000s

6.1.3.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 0,111111 \quad (8)$$

$$Lq = 0,0111111 \quad (9)$$

$$Ws = 111,111 \quad (10)$$

$$Wq = 11,1111 \quad (11)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.3.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

Abbildung 4 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 200000s liegt diese durchschnittlich bei 0.11, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation um ca. 0,01. Der Erwartungswert von 0,111111 wird durch die Simulation nicht exakt erreicht. Es muss von einem systematischen Fehler von ca. 0,01 ausgegangen werden. Weitere Erkenntnisse liefert die Validierung mit Hilfe des Little Theorems. Allgemein zeigt dieser Plot, dass die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System sehr gering ist. Durch die Vergleichsweise kurze Telefonierzeit in Kombination mit einer lange Zwischenankunftszeit ist dieser Wert plausibel.

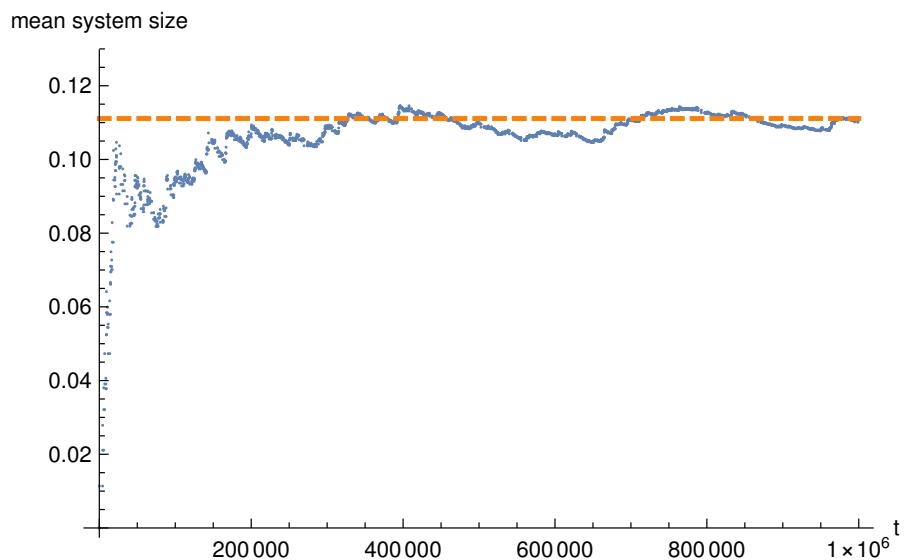


Abbildung 4: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000s

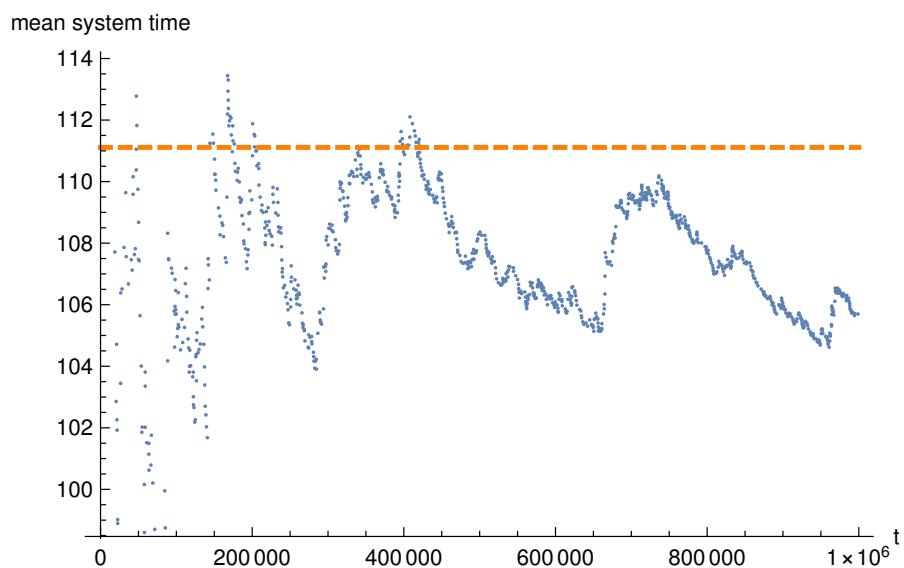


Abbildung 5: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

Betrachtet man Abbildung 5, wird deutlich, dass die durchschnittliche Verweildauer im System bis zu einer Simulationszeit von 200000s stark variiert. Doch auch mit steigender Simulationszeit bleibt sie unter dem erwarteten Wert von 111.111 bei durchschnittlich. Der Grund hierfür könnte wiederum ein systematischer Fehler in der Berechnung, beispielsweise aufgrund von Ungenauigkeiten durch Runden sein.

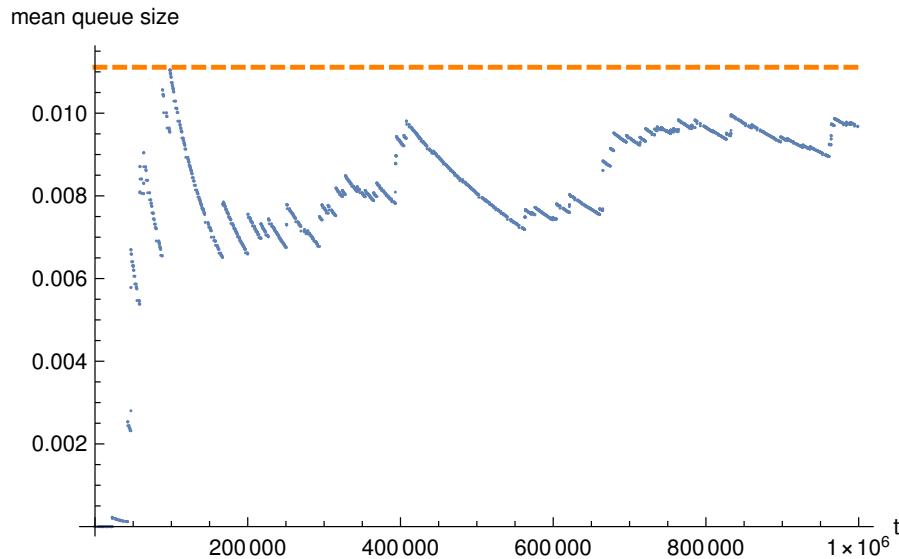


Abbildung 6: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000s

Bei der Betrachtung der in Abbildung 6 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge fällt auf, dass die Werte wiederum bis zu einer Simulationsdauer von 200000s stark variieren schwanken. Anschließend nähern sich die Werte dem dem Erwartungswert von 0,0111111 an, bleiben jedoch unterhalb. Es ist hierbei wiederum von einem systematischen Fehler von ca. 0,0015 auszugehen.

Die in Abbildung 7 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 6 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Gegen Ende der Simulation näher sich die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange dem Erwartungswert von 11,1111 an, bleibt jedoch mit einer Abweichung von ca. 1,51 unterhalb.

Die Abbildung 8 zeigt die einzelnen Werte für die Warteschlangenlänge über die Simulationszeit. Diese Abbildung ist nicht aussagekräftig. Hintergrund dafür ist die Implementierung der Simulation. Im Warteschlangenmodell wird zwischen drei verschiedenen Events unterschieden. Betritt ein neuer Kunde den Telefonshop, wird ein Arrival Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 erhöht. Ist das Telefon frei, wird ein Begin Event ausgelöst und die Warteschlangenlänge wird um 1 reduziert. Hat ein Kunde sein Telefonat beendet, wird ein Finish Event ausgelöst, was wiederum

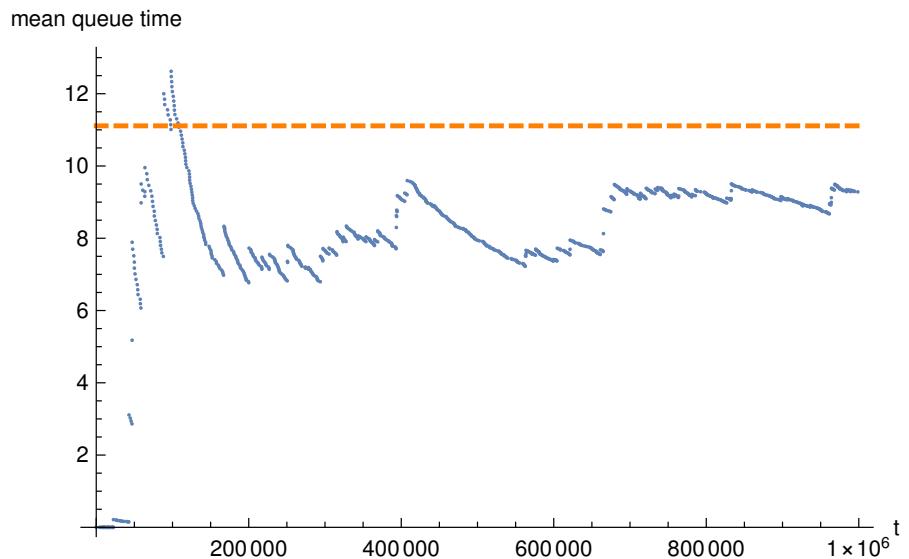


Abbildung 7: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

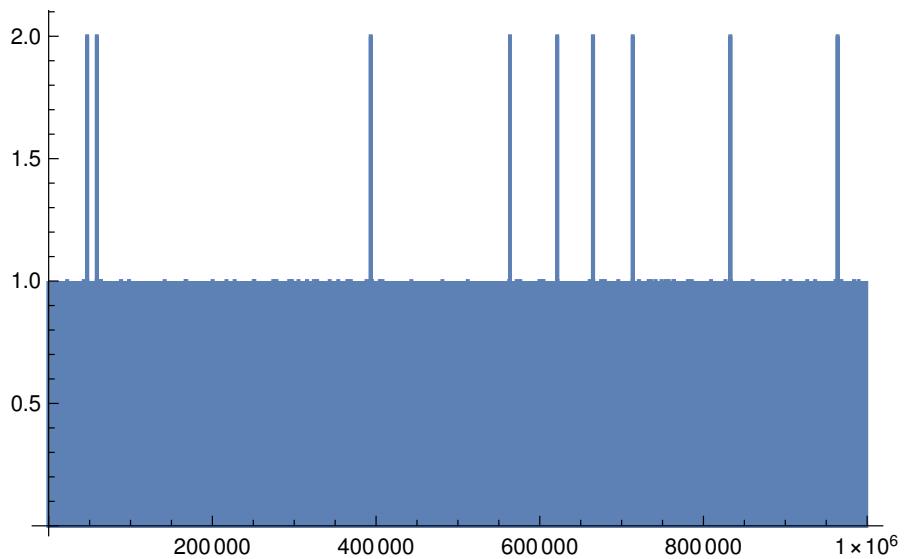


Abbildung 8: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 1000s

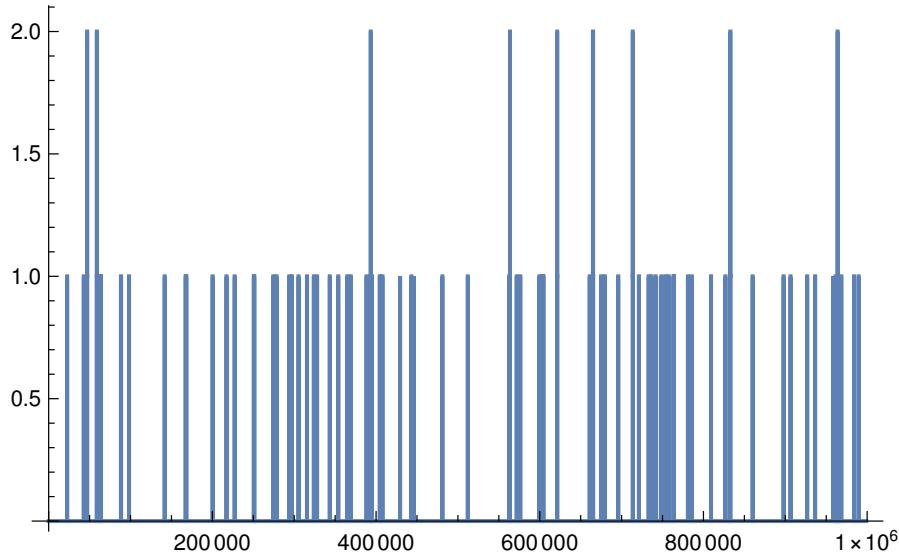


Abbildung 9: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 1000s

ein Begin Event auslöst, da das Telefon frei ist. Ein Problem gibt es hierbei für den Fall, dass kein Kunde im Laden steht und somit auch die Warteschlange leer und das Telefon frei ist. Betritt nun ein neuer Kunde den Laden, wird ein Arrival Event ausgelöst und direkt anschließend ein Begin Event, da das Telefon frei ist und der Kunde sein Telefonat sofort beginnen kann. Er befindet sich somit für 0s in der Warteschlange. Aufgrund der Events wird die Warteschlangenlänge jedoch trotzdem erhöht und direkt wieder gesenkt. Es gibt somit für den gleichen Zeitstempel zwei unterschiedliche Warteschlangenlängen. Abbildung 9 zeigt die gleiche Situation ohne die eben erläuterte Situation. Es wird hierbei nur eine Warteschlangenlänge angezeigt, wenn auch wirklich ein Kunde länger als 0s in der Warteschlange wartet. Da das System nur sehr gering ausgelastet ist, ist die geringe Warteschlangenlänge plausibel.

6.1.3.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 10 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 350000s liegt der Wert sehr nach an dem geforderten Erwartungswert von 0, schwankt jedoch bis zum Ende der Simulation im Bereich von 0,004. Da die Differenz zum Erwartungswert sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System wird entweder um 0,004 zu gering angenommen, oder die Verweildauer der Kunden im System um 0,004 zu lang. Ebenso ist eine Kombination der beiden Fehler möglich. Insgesamt deckt sich diese Aussage mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

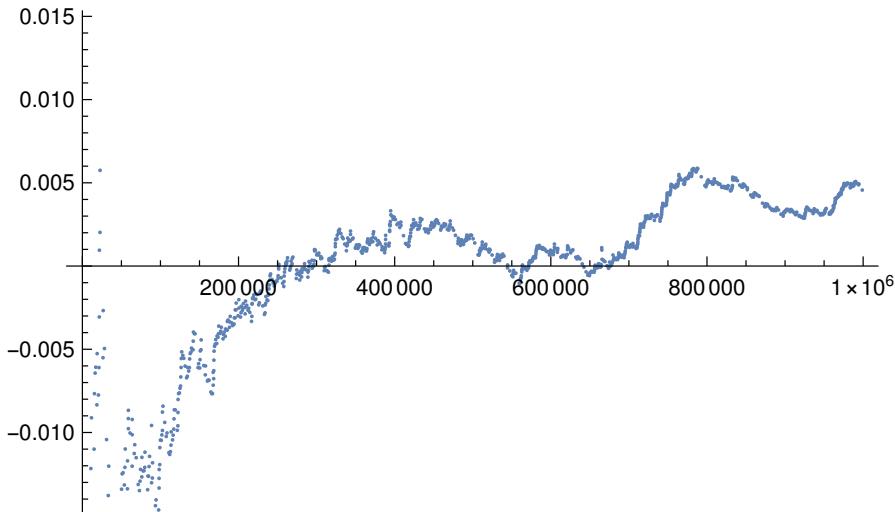


Abbildung 10: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.0111111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 10 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. 400000s der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.1.4 Durchschnittliche Zwischenankunftszeit der Clients: 400s

6.1.4.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 400s ($\lambda = \frac{1}{400}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungs-

werte:

$$L_s = 0,333333 \quad (12)$$

$$L_q = 0,0833333 \quad (13)$$

$$W_s = 133,333 \quad (14)$$

$$W_q = 33,3333 \quad (15)$$

Die einzelnen Erwartungswerte sind in den nachfolgenden Abbildungen durch eine gelbe Linie hervorgehoben.

6.1.4.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

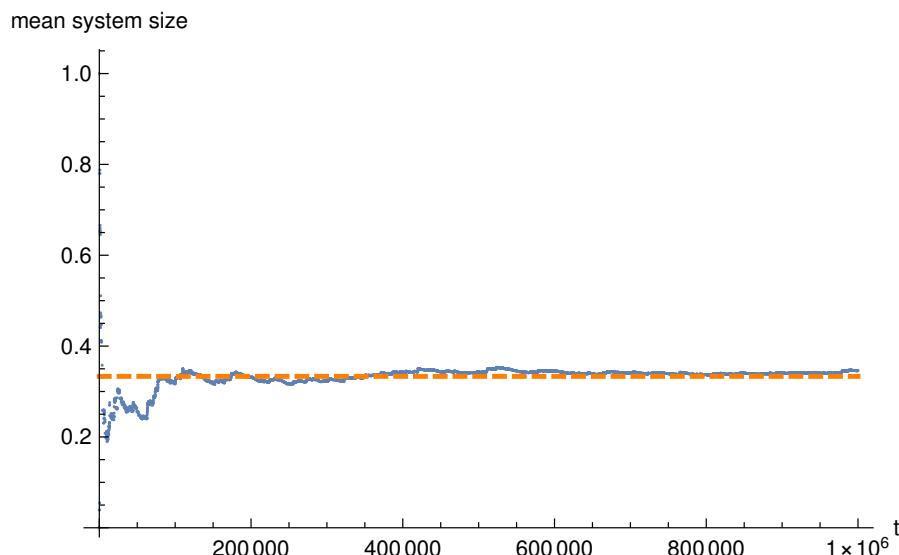


Abbildung 11: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 400s

Abbildung 11 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 400000s schwankt diese nur noch sehr gering, liegt jedoch über dem Erwartungswert von 0,333333. Es ist von einem systematischen Fehler von 0,01 auszugehen.

Auch die in Abbildung 12 dargestellte durchschnittliche Verweildauer im System schwankt bis zu einer Simulationsdauer von ca. 400000s stark. Anschließend schwankt sie um ca. 2 um den erwarteten Wert von 133,333.

Die in Abbildung 13 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge schwankt ebenso ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s nur noch um ca. 0,001 um den erwarteten Wert von 0,0833333.

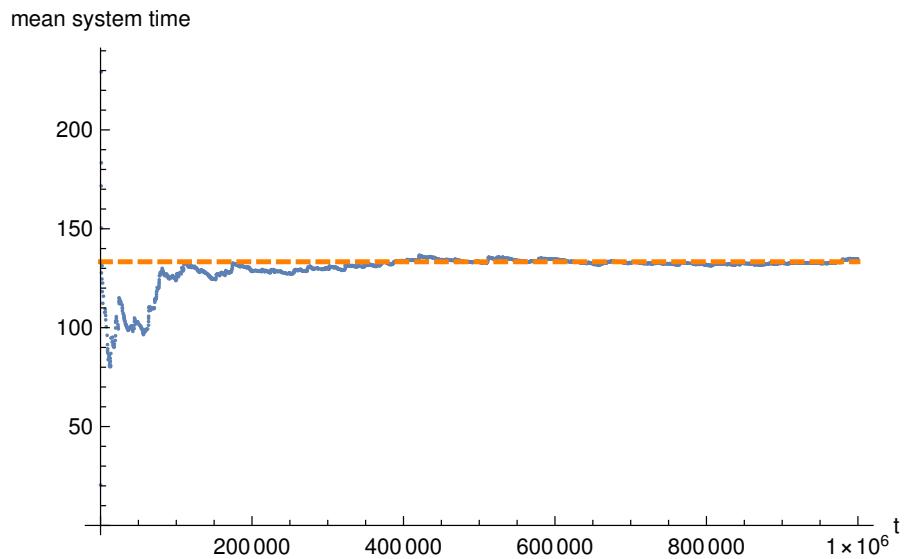


Abbildung 12: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 400s

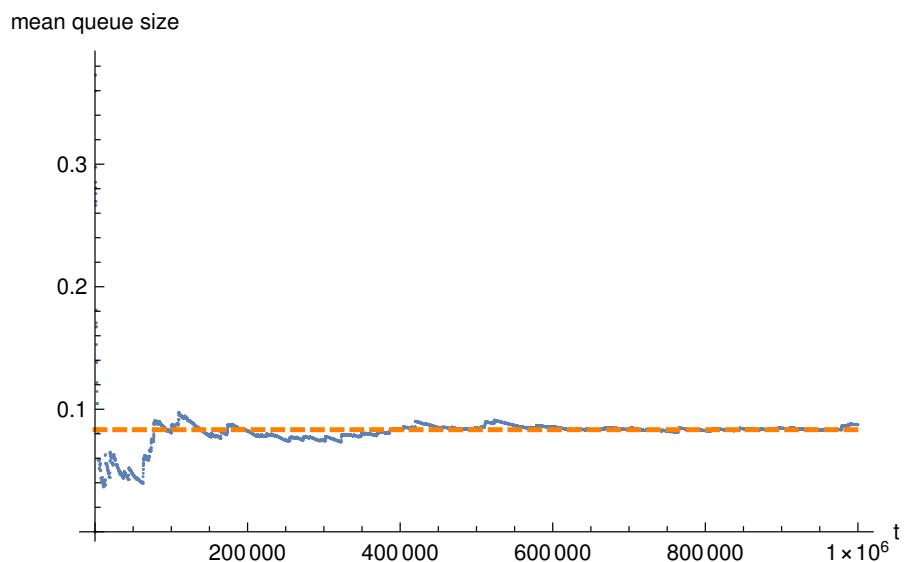


Abbildung 13: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 400s

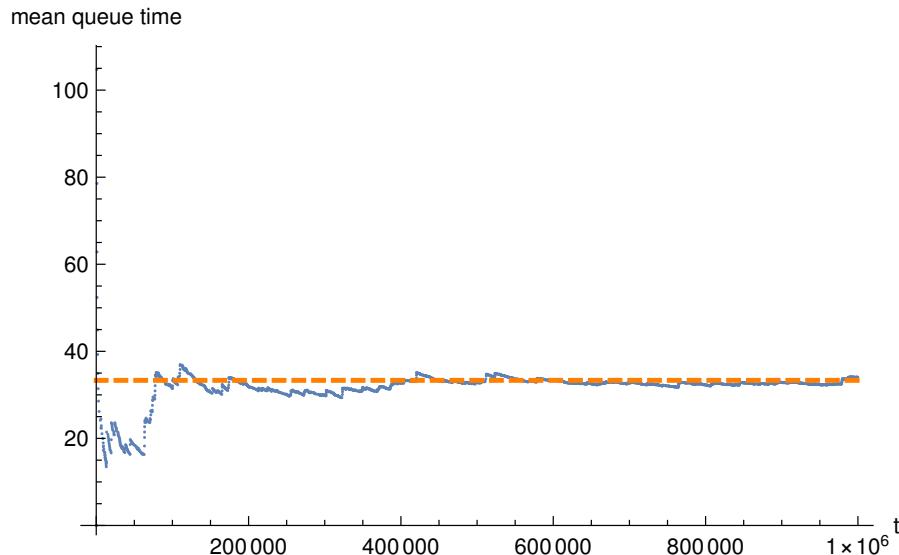


Abbildung 14: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 400s

Die in Abbildung 14 aufgeführte durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange weißt einen ähnlichen Verlauf auf wie die in Abbildung 13 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge. Dieses Verhalten ist plausibel, da bei einer größeren Warteschlangenlänge auch die Wartezeit in der Warteschlange steigt. Beide Werte schwanken ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s um den Erwartungswert. Die durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange schwankt um ca. 2 um den Erwartungswert von 33,333.

Abschließend sind in den Abbildungen 15 und 16 jeweils die Länge der Warteschlange dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, ist die tatsächliche Länge in der Abbildung 16 gefiltert besser zu sehen. Die Warteschlangenlänge ist größer als bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s, doch das Telefon ist noch nicht zu voll ausgelastet, da die Warteschlangenlänge phasenweise noch immer 0 ist.

6.1.4.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 17 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s schwankt der Wert nur noch geringfügig. Die Werte liegen jedoch bis zum Ende der Simulation bei durchschnittlich ca. 0,009. Wie auch bei der Auswertung der Simulation mit einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s, kann hier wiederum von einem systematischen Fehler von 0,009 mit den selben Ursachen ausgegangen werden. Die Abweichung ist hier größer, da aufgrund der niedrigeren Zwischenankunftszeit deutlich mehr Kunden den Laden besucht haben

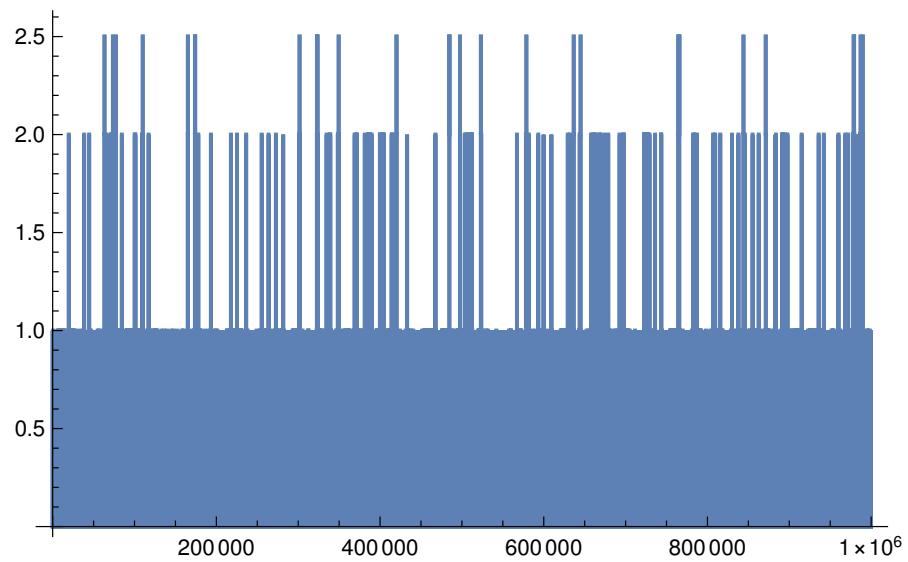


Abbildung 15: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 400s

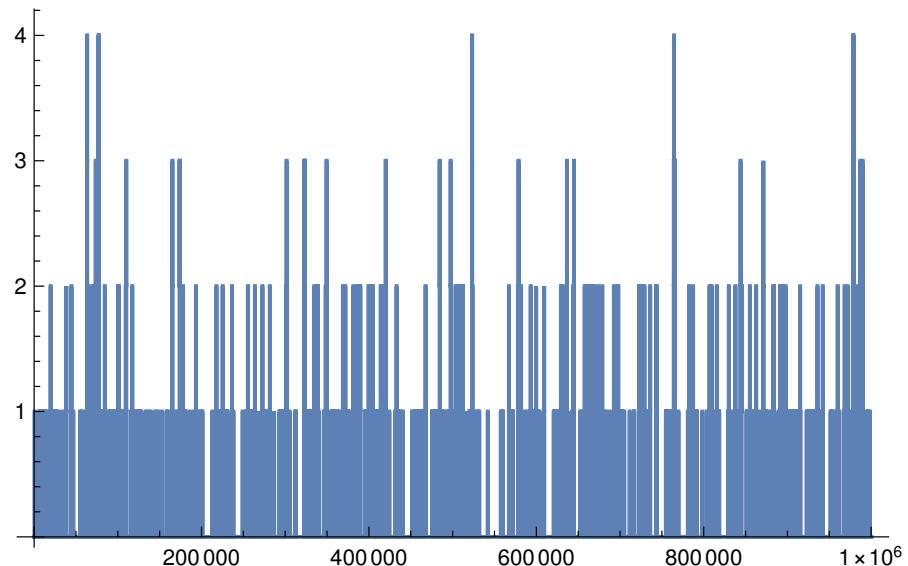


Abbildung 16: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 400s

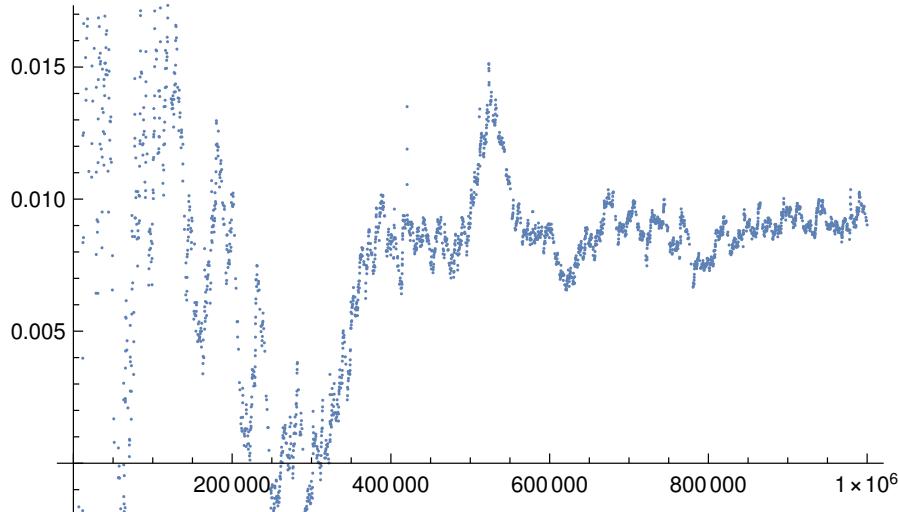


Abbildung 17: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

und somit mehr Zeiten verrechnet wurden. Insgesamt deckt sich dieser Fehler mit den Abweichungen in den einzelnen Abbildungen.

Abschließend sind im folgenden die von der implementierten Simulation berechneten Werte für die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System im Vergleich zu den entsprechenden theoretisch errechneten Werten (für ein eingeschwungenes System) aufgelistet:

value	theoretical	simulation
mean queue size	0.0111111	0.0096725064779031665268817234370
mean queue time	11.1111	9.2843017299186774540994560162192
mean system size	0.111111	0.1101175352313856680563366688919
mean system time	111.111	105.6979827492207519502212185291477

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Das in Abbildung 17 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. 600000s der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) ab einer Simulationsdauer von 600000s erreicht wurde.

6.1.5 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100s

6.1.5.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Für durchschnittliche Zwischenankunftszeit und durchschnittliche Telefonierdauer 100s

$(\lambda = \frac{1}{100}, \mu = \frac{1}{100})$, lassen sich die durchschnittliche Warteschlangenlänge, Wartezeit in der Warteschlange, Anzahl an Clients im System und Zeit im System nicht berechnen. Die Warteschlangenlänge steigt aufgrund der zu hohen Auslastung des Telefons gegen unendlich. Somit steigt auch die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System gegen unendlich, da diese sich aus den Kunden in der Warteschlange und dem Kunden am Telefon zusammensetzt. Bei einer unendlich langen Warteschlange ist folglich auch die Wartezeit unendlich lang. Außerdem folgt aus einer unendlichen Anzahl von Kunden im System auch, dass die durchschnittliche Zeit im System unendlich lang wird.

6.1.5.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

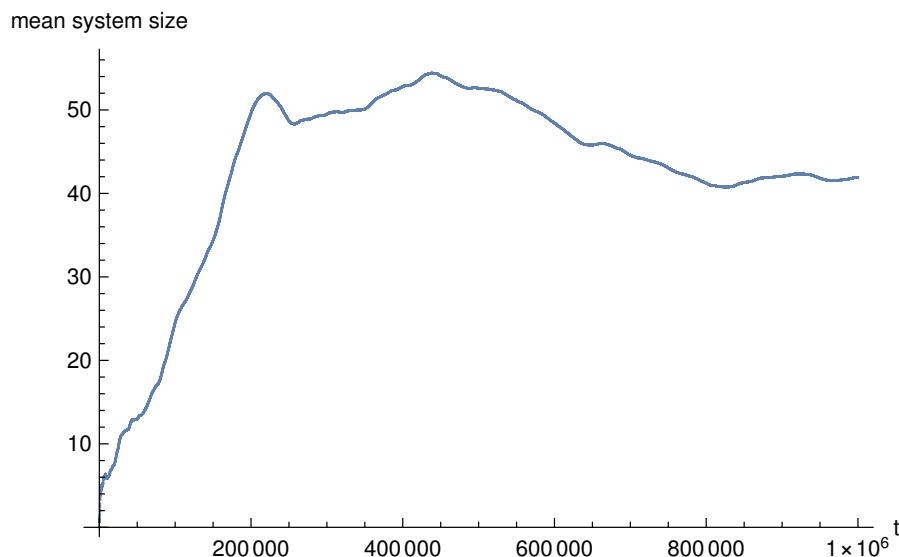


Abbildung 18: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 100s

Abbildung 18 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Durch die großen Schwankungen kann nicht von einem eingeschwungenen System ausgegangen werden. Für eine genauere Beurteilung müsste die Simulation hierfür mit einer längeren Simulationsdauer erneut durchgeführt werden. Ob die durchschnittliche Anzahl der Kunden an Kunden im System gegen den erwarteten Wert von unendlich steigt, kann erst dann analysiert werden.

Abbildung 19 zeigt die durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System. Wiederum kann davon ausgegangen werden, dass das System noch nicht eingeschwungen war, bzw. nicht einschwingen wird.

Die Abbildungen 20 und 21 und auch weisen einen ähnlichen Verlauf auf wie 19. Die Werte schwanken ebenfalls bis zum Ende der Simulation stark.

Abschließend sind in den Abbildungen 22 und 23 jeweils die Länge der Warteschlange

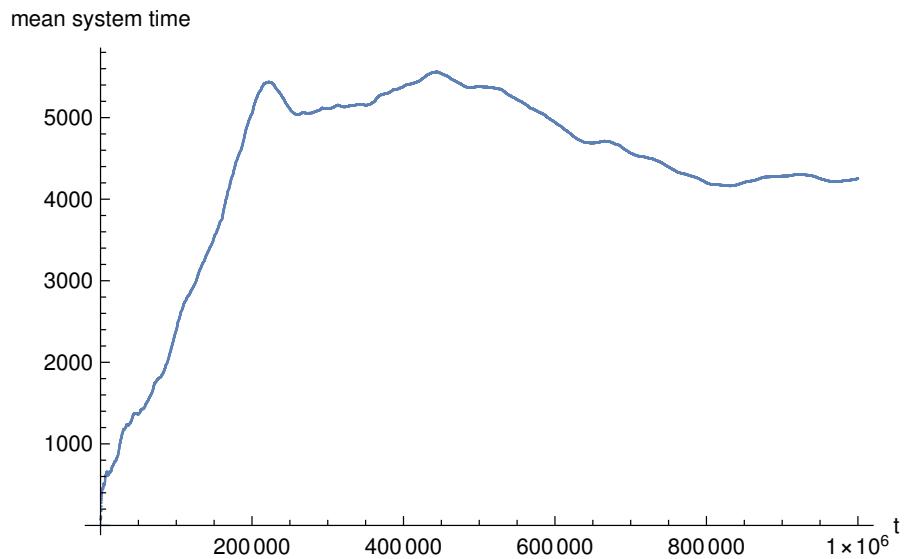


Abbildung 19: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 100

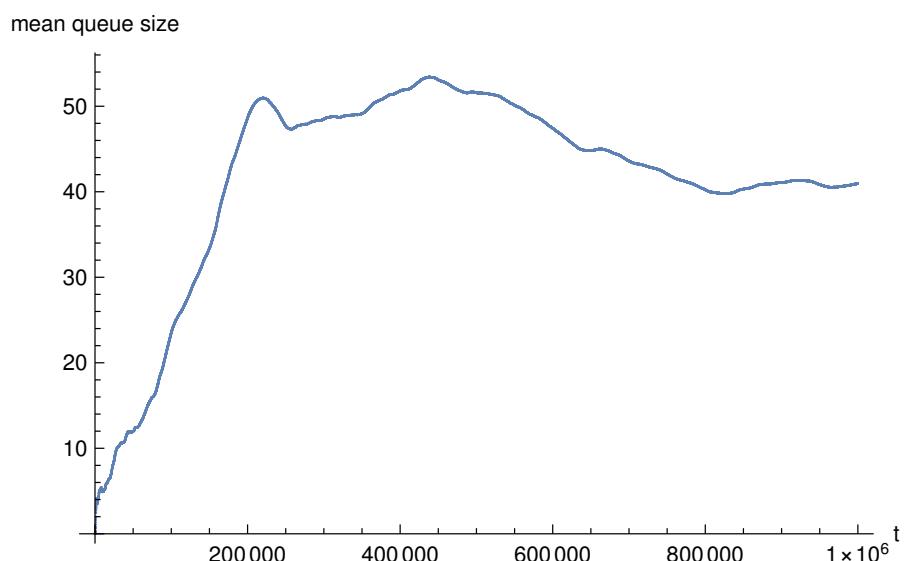


Abbildung 20: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 100

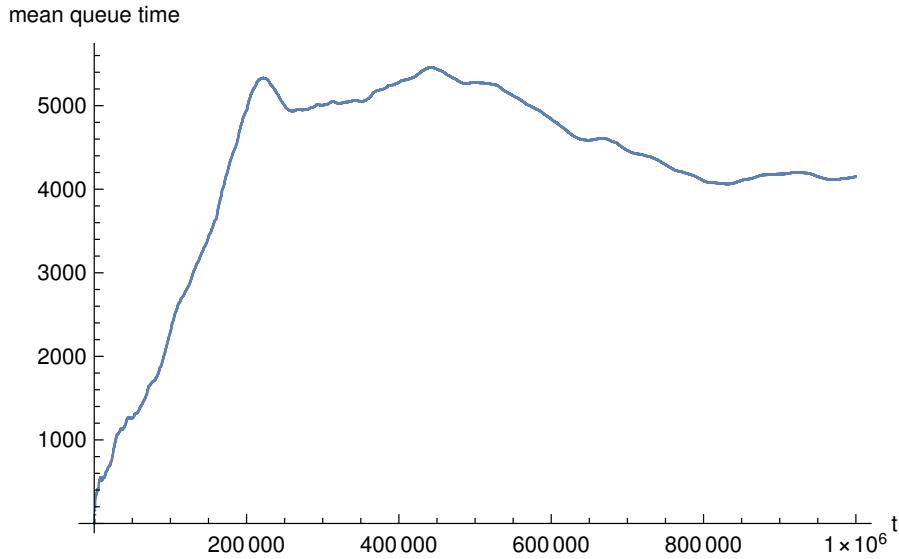


Abbildung 21: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 100

dargestellt. Aufgrund des in 6.1.3.2 erläuterten Problems mit der Inkrementierung bzw. Dekrementierung der Warteschlangenlänge bei den einzelnen Events, zeigt Abbildung 16 wiederum die gefilterten Werte. Die Werte in beiden Abbildungen schwanken jedoch so stark, dass kein Unterschied mehr ersichtlich ist. Gegen Ende der Simulation steigen die Werte deutlich an. Ob sie gegen den erwarteten Wert von unendlich ansteigen lässt sich nur im Zuge einer erneuten Simulation mit einer längeren Simulationsdauer ermitteln.

6.1.5.3 Validierung der Simulation In Abbildung 24 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt. Im Vergleich zu den beiden Auswertungen mit Zwischenankunftszeiten von 1000s bzw. 400s wird deutlich, dass die Abweichung vom den geforderten Wert 0 in dieser Abbildung deutlich größer ist.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte schwanken bis zum Ende der Simulation deutlich. Das in Abbildung 24 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System während der gesamten Simulationsdauer den für ein eingeschwungenes System erforderlichen Wert von 0 nicht erreicht. Aufgrund der großen Abweichung kann davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) in dieser Simulation nicht erreicht wurde.

Das beschriebene Verhalten des implementierten Modells stimmt somit mit der Theorie überein, welche besagt, dass wenn die durchschnittliche Zwischenankunftszeit gleich der durchschnittlichen Bediendauer ist, das System nie einschwingen kann. Ein Beweis, dass das System auch bei einer längeren Simulationsdauer nicht einschwingen würde, kann nicht erbracht werden.

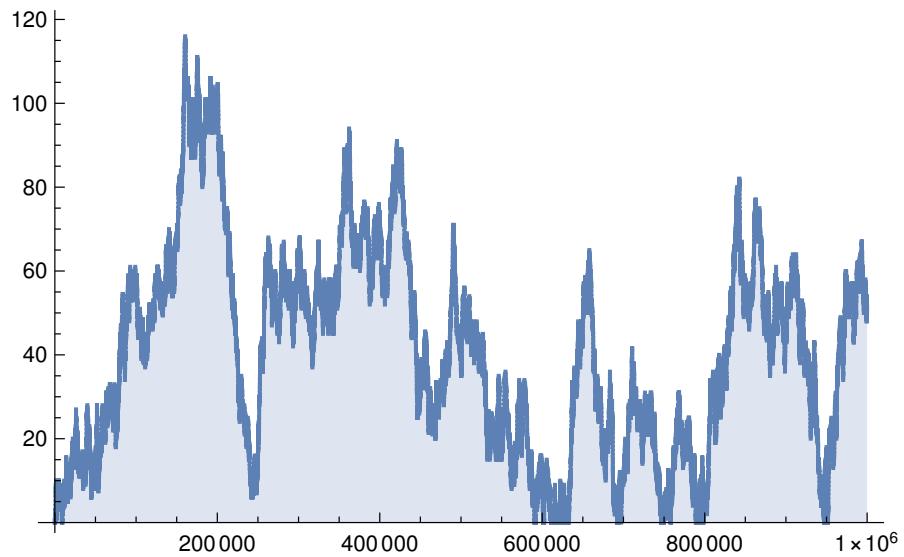


Abbildung 22: Warteschlangenlänge (ungefiltert) , MeanAr = 100

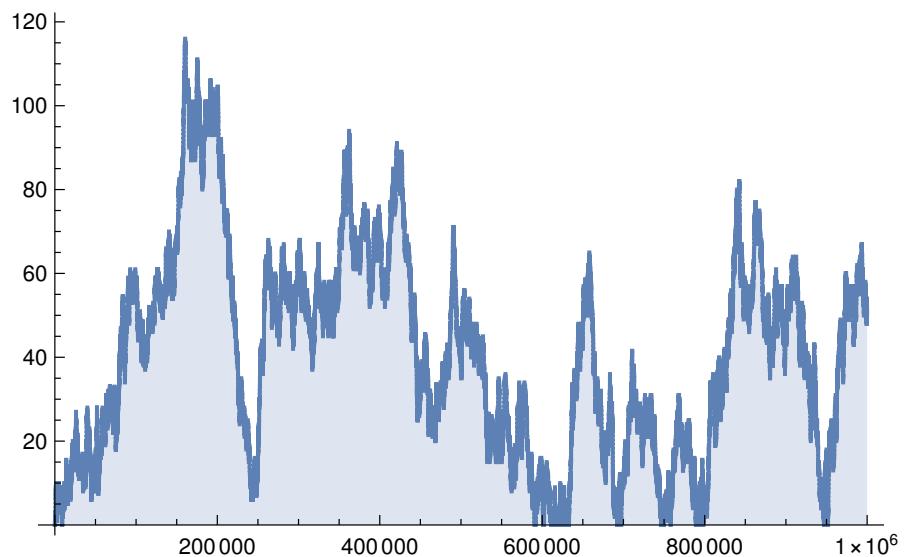


Abbildung 23: Warteschlangenlänge (gefiltert) , MeanAr = 100

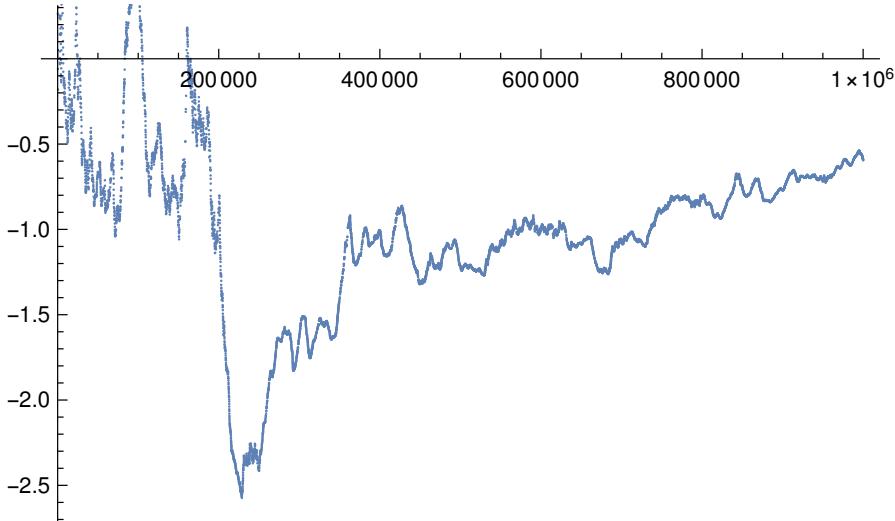


Abbildung 24: Darstellung der Differenz: $\lambda * Ws - Ls$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

6.2 Vergleich der Telefonauslastungen

Bisher wurden die durchschnittlichen Verweildauern betrachtet. Die Auslastung des Telefons wurde dabei unberücksichtigt. Die durchschnittliche Auslastung des Telefons berechnet sich mit der Formel:

$$\text{Auslastung}(t) = \frac{\sum \text{Telefonierdauer}}{t}$$

Eine Auslastung von 1 bedeutet, dass das Telefon zu 100 % ausgelastet ist. In Abbildung 25 werden die Auslastungen über der Zeit für verschiedene Ankunftsrate dargestellt. Es fällt auf, dass bei Ankunftszeiten von 1500 s bis 800 s nur wenig unterschied besteht. Das Telefon ist in allen drei Fällen ca. 15 % ausgelastet. Bei einer Ankunftszeit von 400 s gibt es einen deutlichen Anstieg in der Auslastung auf über 20 %. Das Telefon ist zu 100 % ausgelastet bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 100 s. Da die durchschnittliche Telefonierzeit ebenfalls 100 s beträgt, ist dieses Ergebnis zu erwarten. Es ist zu bemerken, dass die durchschnittliche Telefonauslastung und die Zwischenankunftszeiten keinen linearen Zusammenhang haben. Ein exponentieller Zusammenhang kann aufgrund der fünf Messungen vermutet, jedoch nicht eindeutig gezeigt werden.

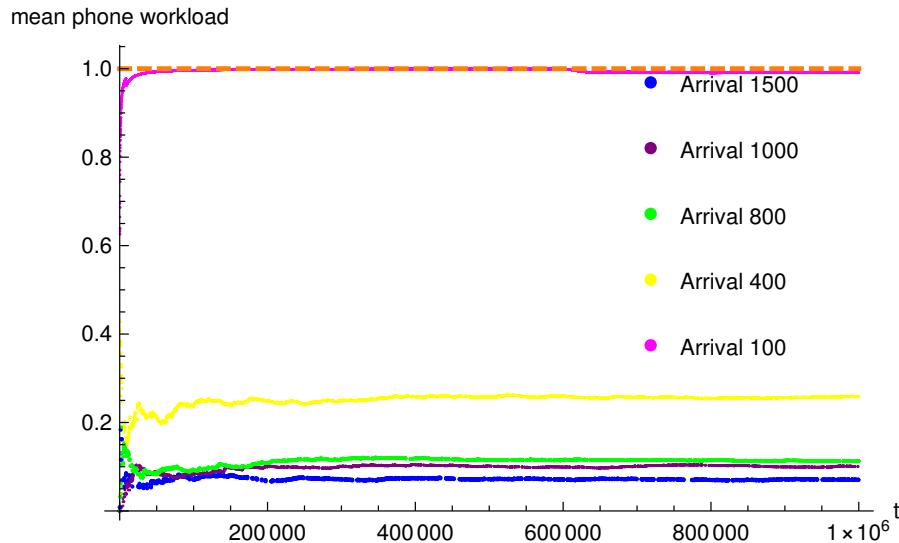


Abbildung 25: Darstellung der Telefonauslastung für verschiedene Ankunftszeiten

6.3 Modell „Bevorzugte VIP“

6.3.1 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.3.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.3.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

6.4 Modell „Zusätzliches VIP Telefon“

Im dritten Betriebsmodus wird zu einem Telefon wie im Betriebsmodus 1 ein VIP Telefon hinzugefügt. Wie vorhin werden auch hier die drei verschiedenen mittleren Ankunftszeiten betrachtet. In diesem Szenario werden die Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle verwendet.

6.4.1 Formeln für M/M/2 Warteschlangenmodelle

Für die theoretischen Größen und Zeiten des Systems bzw. der Warteschlange werden folgende Formeln genutzt.

$$P_0 = (1 + \rho + \rho^2 / (2 - \rho))^{-1} \quad (16)$$

$$L_s = \rho + \frac{P_0 * \rho^{c+1}}{(c - \rho)! (c - \rho)^2} \quad (17)$$

$$Lq = \frac{P0 * \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \quad (18)$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} \quad (19)$$

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda} \quad (20)$$

6.4.2 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 1000

6.4.2.1 Theoretische Erwartungswerte laut M/M/1 Warteschlangenmodell

Bei einer durchschnittlichen Zwischenankunftszeit von 1000s ($\lambda = \frac{1}{1000}$, $\mu = \frac{1}{100}$) ergeben sich, basierend auf den in Abschnitt 6.4.1 aufgeführten Formeln, folgende Erwartungswerte:

$$Ls = 0,100137 \quad (21)$$

$$Lq = 0,000250627 \quad (22)$$

$$Ws = 100,137 \quad (23)$$

$$Wq = 0,250627 \quad (24)$$

6.4.2.2 Verwendung der implementierten Java-Simulation, Berechnung in Java

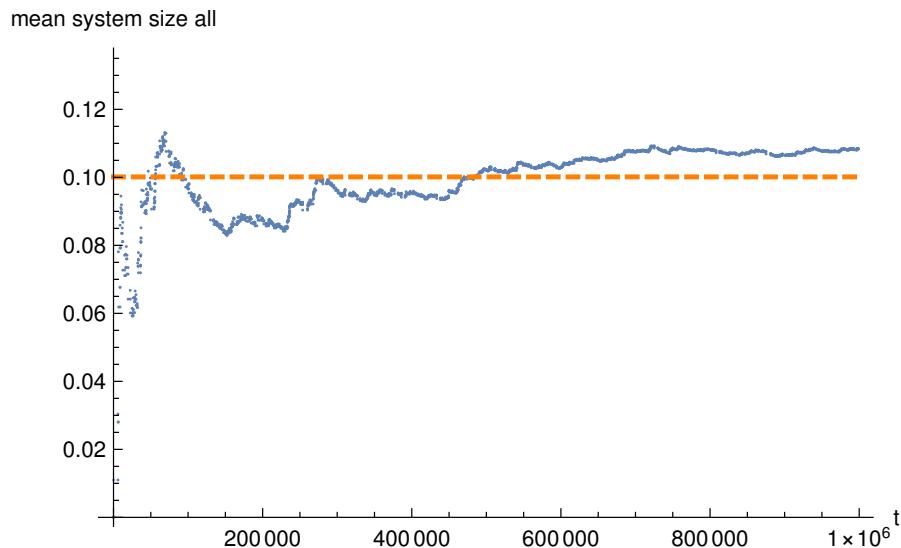


Abbildung 26: Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System, MeanAr = 1000s

Abbildung 26 zeigt die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System an. Ab einer Simulationszeit von ca 300000s liegt diese durchschnittlich bei 0.10, steigt jedoch bis

zum Ende der Simulation um ca. 0,01. Der Erwartungswert von 0,100137 wird auch hier durch die Simulation nicht exakt erreicht. Auch in dieser Berechnung muss von einem systematischen Fehler von ca. 0,01 ausgegangen werden. Die geringe Abweichung lässt anzunehmen, dass die Systemgröße für dieses Szenario plausibel ist.

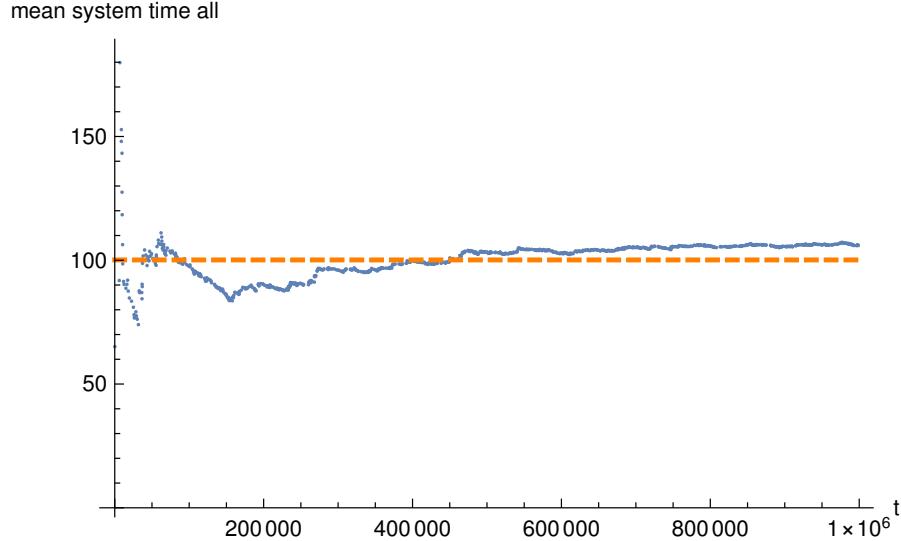


Abbildung 27: Durchschnittliche Verweildauer der Kunden im System, MeanAr = 1000s

Durch Betrachtung von Abbildung 27 lässt sich konstatieren, dass die Verweildauer im System sehr nah an dem erwarteten Wert von 100,137 liegt. Jedoch steigt dieser über die Zeit minimal weiterhin an. Dies zeigt, dass es noch nicht ersichtlich ist, ob das eine längere Systemzeit von Nöten wäre oder ob es sich um einen Fehler in der Berechnung handelt.

Bei der Betrachtung der in Abbildung 28 gezeigte durchschnittliche Warteschlangenlänge fällt auf, dass bei dieser Simulation die Werte durchgehend unter dem erwarteten Wert von 0,000250627 liegen. Im Verlauf steigen die Werte bis zu 0,00020 an, was darauf schließen lässt, dass das System einschwingt. Ein systematischer Fehler von 0,00005 ist wahrscheinlich.

Wie bereits bei der Untersuchung der mittleren Warteschlangenlänge ist die ermittelte durchschnittliche Verweildauer, wie in Abbildung 29 zu sehen ist in der Warteschlange unterhalb des erwarteten Wertes von 0,25. Dabei nähert sich jedoch der Wert immer weiter dem erwarteten Wert an. Eine Abweichung von 0,05 lässt sich gegen Ende der Simulation aber nicht ausgleichen.

6.4.2.3 Validierung der Simulation

In Abbildung 30 ist der Verlauf der Gleichung 7 über die Simulationszeit aufgeführt.

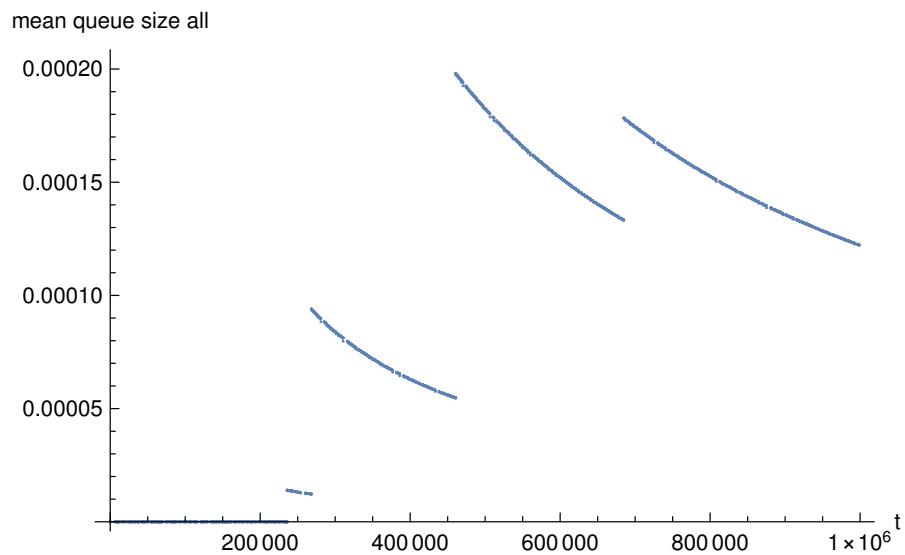


Abbildung 28: Durchschnittliche Warteschlangenlänge, MeanAr = 1000s

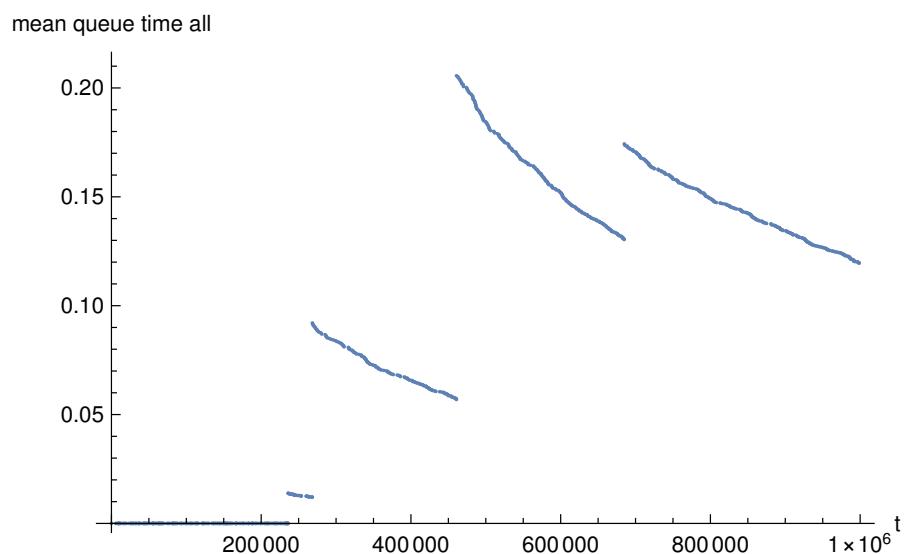


Abbildung 29: Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange , MeanAr = 1000s

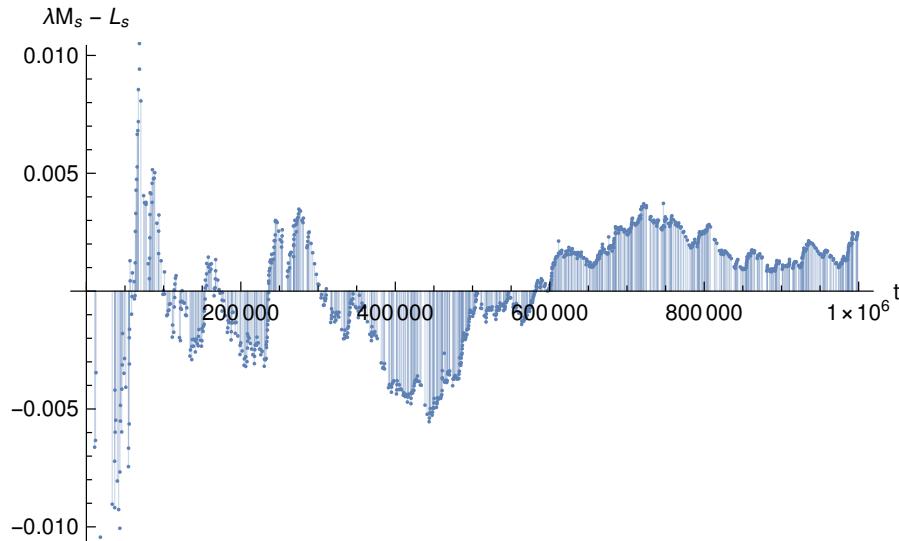


Abbildung 30: Darstellung der Differenz: $\lambda * W_s - L_s$ über die Simulationszeit (Little Theorem)

Dieser Wert schwankt über die Simulationsdauer um bis zu 0,005. Da die Differenz zum Erwartungswert auch in diesem Betriebsmodus sehr gering ist, liegt die Ursache für diese Abweichung vermutlich in Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Werte. Betrachtet man diese Abbildung mit den vorherigen, dann weichen diese Aussagen nicht voneinander ab.

Alle vier ermittelten Durchschnittswerte liegen, ab einer Simulationsdauer von ca. 400000s sehr nah an den Werten, welche für ein eingeschwungenes Warteschlangensystem errechnet wurden. Da auch das in Abbildung 30 ersichtliche Ergebnis der Differenz zeigt, dass das System, abgesehen vom erläuterten systematischen Fehler, ab einer Simulationszeit von ca. 400000s der für ein eingeschwungenes System erforderliche Wert von 0 näherungsweise erreicht wird. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass der Steady State (eingeschwungene Zustand) bei dieser Simulationsdauer erreicht wurde.

6.4.3 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 400

6.4.4 Durchschnittliche Ankunftszeit der Clients: 100

7 Fazit

Literatur

- [1] Prof. Dietl H. Warteschlangenmodelle. <http://www.business.uzh.ch/dam/jcr:>

00000000-0451-792f-fffffe13aac9/ServiceManagement_Warteschlangenmodelle.pdf. Zugriff am 14.05.2017.

- [2] Steinfeld T. Exponentialverteilung. <http://www.mathepedia.de/Exponentialverteilung.aspx>. Zugriff am 14.05.2017.