5. Wurzeln und rationale Exponenten

Hilfssatz 5.1

(1) Sind $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$

(2) Ist $\beta > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \beta$

Beweis

(1) „$\Rightarrow$“(induktiv)
I.A. $n = 1\checkmark$
I.V. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x^n \leq y^n$
I.S. $x^{n+1} = x^n x \leq y^n x \leq y^n y = y^{n+1}$
„$\Leftarrow$“: Annahme: $y < x \overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} y^k < x^k\ \forall k \in \mathbb{N}$, Wid.

(2) 2.1(4) $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : m > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{m} < \beta$. ∎

Definition 5.2 (Wurzeln)
Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit: $x \geq 0$ und $x^n = a$. Dieses x heißt die *n-te* ***Wurzel*** *aus* a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet ($\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$).

Bemerkung: (1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ (Beispiel: $\sqrt{4} = 2, \sqrt{4} \neq -2$; die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen)

(2) $\sqrt{b^2} = |b|\ \forall b \in \mathbb{R}$

Beweis
Eindeutigkeit: Sei $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n \overset{5.1(1)}{\Longrightarrow} x = y$

Existenz: O.B.d.A.: $a > 0$ und $n \geq 2$
$M := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0, y^n < a\}, M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$
Sei $y \in M \Rightarrow y^n < a < 1 + na \overset{\text{BU}}{\leq} (1 + a)^n \overset{5.1(1)}{\Longrightarrow} y < 1 + a$. M ist nach oben beschränkt.
(A15) $\Rightarrow \exists x := \sup M$. Wir zeigen: $x^n = a$
Annahme: $x^n < a$. Sei $m \in \mathbb{N}$:

$$(x + \frac{1}{m}) \overset{4.4}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{1}{m^k} = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \underbrace{\frac{1}{m^k}}_{\leq \frac{1}{m}} \leq x^n + \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}}_{\alpha}$$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{m})^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m}$. 4.1(2) $\Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \frac{a-x^2}{\alpha} \Longrightarrow x^2 + \frac{\alpha}{m} < a$. Dann $(x + \frac{1}{m})^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m} < a \Longrightarrow x + \frac{1}{m} \in M \Longrightarrow x + \frac{1}{m} \leq x \Longrightarrow \frac{1}{m} < 0$. Widerspruch $\Longrightarrow x^n \geq a$

Annahme: $x^n > a$. $(x - \frac{1}{m})^n = (x(1 - \frac{1}{mx}))^n = x^n(1 - \frac{1}{mx})^n \overset{\text{BU}}{\geq} x^n(1 - \frac{n}{mx})$ falls $-\frac{1}{mx} \geq -1$, also falls $\frac{1}{m} \leq x$. Also: $(x - \frac{1}{m})^n \geq x^n(1 - \frac{n}{mx})$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq x$. [Nebenrechnung: $x^n(1 - \frac{n}{mx}) > a \iff \frac{1}{m} < \frac{x(x^n-a)}{nx^n} =: \alpha$] 5.1(2) $\Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq x$ und $\frac{1}{m} \leq \alpha$.

Dann $(x-\frac{1}{m})^n > a$. $x-\frac{1}{m}$ ist keine obere Schranke von $M \implies \exists y \in M : y > x-\frac{1}{m} \xRightarrow{5.1(1)}$ $y^n > (x-\frac{1}{m})^n > a$. Also $y^n > a$. Widerspruch, denn $y \in M$.
Daraus folgt: $x^n = a$. ■

Satz 5.3 (Eindeutigkeit von rationalen Potenzen)
Sei $a \geq 0$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ und es sei $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$.

Beweis
$x := (\sqrt[n]{a})^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$. Wegen 5.1(1) genügt es zu zeigen: $x^q = y^q$. Es ist $mq = np$.
$x^q = \sqrt[n]{a}^{mq} = \sqrt[n]{a}^{np} = a^p = \sqrt[q]{a}^{pq} = y^q$ ■

Definition (Rationale Potenzen)

(1) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$. Dann existiert $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Es sei $a^r := \sqrt[n]{a}^m$. (Wegen 5.3 ist a^r wohldefiniert).

(2) Sei $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

Es gelten die Rechenregeln ($a^{r+s} = a^r a^s$,...) als bekannt.