5 Optimale erwartungstreue Schätzer

5.1 Definition

Seien $X_1, \dots, X_n$ reelle Zufallsvariablen, $T = T(X_1, \dots, X_n)$ reellwertige Statistik.
T heißt **linear** $:\Leftrightarrow\ \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $T = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j X_j$

5.2 Satz

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} X$, $EX^2 < \infty$, $\mu := EX$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X)$, (μ, σ^2) unbekannt. Es sei T ein beliebiger linearer erwartungstreuer Schätzer für μ. Dann gilt:

$$\mathrm{Var}(T) \geq \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Beweis:
Sei $T = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j X_j$.
T erwartungstreu

$$\Rightarrow \mu = E(T) = \mu \sum_{j=1}^{n} c_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j = 1$$

$\mathrm{Var}(T) = \sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2$

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot 1 \right)^2}_{=1} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1^2}_{=n}$$

(Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_j = \frac{1}{n}\ \forall j$$

$\Rightarrow T = \bar{X}_n$. $\blacksquare$

5.3 Situation

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, ein statistischer Raum. $X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$.

$$g: \ \Theta \to \mathbb{R} \ \text{ Funktional}$$

$g(\vartheta)$ interessierender Parameter.

Sei

$$U_g = \{T |\ T: \ \mathfrak{X}^n \to \mathbb{R} \text{ messbar}, E_\vartheta T = g(\vartheta)\ \forall \vartheta \in \Theta, E_\vartheta T^2 < \infty\ \forall \vartheta \in \Theta\}$$

die Menge aller erwartungstreuen Schätzer für $g(\vartheta)$ mit endlicher Varianz.

<u>Annahme:</u> $U_g \neq \emptyset$
Sei

$$m(\vartheta) := \inf\{\operatorname{Var}_\vartheta(T): \ T \in U_g\}$$

5.4 Definition

Ein $T_0 \in U_g$ mit $\operatorname{Var}_\vartheta(T_0) = m(\vartheta)\ \forall \vartheta \in \Theta$ heißt **UMVUE**.
(Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)

5.5 Satz

Falls T_1 und T_2 UMVUE, so gilt

$$P_\vartheta(T_1 = T_2) = 1\ \forall \vartheta \in \Theta$$

<u>Beweis:</u>
U_g ist konvex, d.h.

$$S, T \in U_g \ \Rightarrow\ \lambda S + (1-\lambda) T \in U_g\ \forall \lambda \in [0,1]$$

Seien T_1, T_2 UMVUE.
$\Rightarrow \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \in U_g$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Var}_\vartheta(\frac{1}{2}(T_1 + T_2))}_{=\frac{1}{4}(\operatorname{Var}_\vartheta(T_1) + \operatorname{Var}_\vartheta(T_2) + 2\operatorname{Cov}_\vartheta(T_1, T_2))} \geq \operatorname{Var}_\vartheta(T_1) (= m(\vartheta) = \operatorname{Var}_\vartheta(T_2))$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}_\vartheta(T_1) \leq \operatorname{Cov}_\vartheta(T_1, T_2) \overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\operatorname{Var}_\vartheta(T_1) \operatorname{Var}_\vartheta(T_2)} = \operatorname{Var}_\vartheta(T_1)$$

$\Rightarrow \operatorname{Var}_\vartheta(T_1) = \operatorname{Cov}_\vartheta(T_1, T_2)$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}_\vartheta(T_1 - T_2) = \operatorname{Var}_\vartheta(T_1) + \operatorname{Var}_\vartheta(T_2) - 2\operatorname{Cov}_\vartheta(T_1, T_2) = 0$$

$$E_\vartheta(T_1 - T_2) = 0$$

$\Rightarrow P_\vartheta(T_1 = T_2) = 1.$ ■

5.6 Definition und Satz

Sei

$$\mathcal{S}_n := \{\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(n)) : \ \pi \text{ Permutation von } \{1, \ldots, n\}\}$$

Für Statistik $T : \ \mathfrak{X}^n \to \mathbb{R}$ sei $T^\pi(X_1, \ldots, X_n) = T(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$.
In der Situation von 5.3 heißt T (im wesentlichen) symmetrisch :⇔

$$P_\vartheta(T^\pi = T) = 1 \ \forall \vartheta \in \Theta \forall \pi \in \mathcal{S}_n$$

$T_0 \in U_g$ UMVUE $\Rightarrow T$ symmetrisch.

Beweis:
Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$, $\vartheta \in \Theta$ beliebig.
Wegen $X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$ folgt $T_0^\pi \sim T_0$ unter P_ϑ

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E_\vartheta(T_0^\pi) = E_\vartheta(T_0) = g(\vartheta) \\ \Rightarrow \operatorname{Var}_\vartheta(T_0^\pi) = \operatorname{Var}_\vartheta(T_0) = m(\vartheta) \end{array}\right\} \Rightarrow T_0^\pi \in U_g, \text{ UMVUE}$$

Satz 5.5 $\Rightarrow P_\vartheta(T_0^\pi = T_0) = 1.$ ■

5.7 Reguläre Verteilungsklassen

Situation:
Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ statistischer Raum mit $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, Θ offen.
$X = (X_1, \ldots, X_n)$ Zufallsvektor mit Verteilung P_ϑ $(\vartheta \in \Theta)$, P_ϑ besitze Dichte $f(x, \vartheta)$ bezüglich μ, dabei sei μ entweder das Lebesgue-Maß oder das Zählmaß auf einer abzählbaren Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

$T : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ sei Statistik mit $E_\vartheta \|T\|^2 < \infty$, Kovarianzmatrix[15] von T:[16]

$$\operatorname{Var}_\vartheta(T) := E_\vartheta[(T - E_\vartheta T)(T - E_\vartheta T)^T]$$

[15]Schreibweise für Kovarianzmatrix hier nicht $\operatorname{Cov}_\vartheta$, sondern $\operatorname{Var}_\vartheta$. Beachte dazu die Fälle $s = 1$ und $s > 1$!
[16]Bei Vektoren manchmal Schreibweise x' für x^T.

Folgende Regularitätsbedingungen sollen gelten:

a) $\forall x \in \mathfrak{X}$ existiert $\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x,\vartheta)$ und ist stetig. $(j = 1, \ldots, k)$

b)

$$\frac{d}{d\vartheta} \int f(x,\vartheta)\mu(dx) = \int \frac{d}{d\vartheta} f(x,\vartheta)\mu(dx)$$

wobei hier $\frac{d}{d\vartheta} := (\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \vartheta_k})^T$.

Der k-dimensionale Zufallsvektor

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) := \frac{d}{d\vartheta} \log f(X,\vartheta) = \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(X,\vartheta)}{f(X,\vartheta)}$$

heißt Score-Vektor.
Die $k \times k$-Matrix

$$I_n(\vartheta) := E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)^T] = \left(E_\vartheta \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \log f(X,\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \log f(X,\vartheta) \right] \right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

heißt **Fisher-Informationsmatrix** (von f an der Stelle ϑ):

c) $I_n(\vartheta)$ existiert und ist positiv definit.

Eine Verteilungsklasse $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, die die Bedingungen (a)-(c) erfüllt, heißt **regulär**.

5.8 Lemma

In der Situation von 5.7 gilt:
$E_\vartheta \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$ und somit $I_n(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta(\mathcal{U}_n(\vartheta))$, $\vartheta \in \Theta$, d.h. die Fisher-Informationsmatrix ist Kovarianzmatrix des Score-Vektors.

<u>Beweis:</u>

$$E_\vartheta \mathcal{U}_n(\vartheta) \overset{(*)}{=} \int \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(x,\vartheta)}{f(x,\vartheta)} f(x,\vartheta) d\mu(x) \overset{(b)}{=} \frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\int f(x,\vartheta) d\mu(x)}_{=1} = 0$$

$(*)$: Integration bezüglich P_ϑ; P_ϑ hat aber Dichte $f(x,\vartheta)$ bezüglich μ

5.9 Bemerkung

Gelegentlich werden die weiteren Voraussetzungen

d) $\forall x \in \mathfrak{X}$ existiert $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j} f(x,\vartheta)$ und ist stetig. $(i,j = 1,\ldots,k)$

e)

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\int f(x,\vartheta)\mu(dx) = \int \frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j} f(x,\vartheta)\mu(dx)\ \forall i,j = 1,\ldots,k$$

benötigt.

Wir führen noch die folgenden Notationen ein:

$$W_n(\vartheta) := \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\log f(X,\vartheta)\right)_{1\le i,j\le k} =: \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}\log f(X,\vartheta)$$

5.10 Lemma

Unter (d) und (e) gilt:

$$I_n(\vartheta) = -E_\vartheta W_n(\vartheta)$$

Beweis:
Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\log f = \frac{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j} f}{f} - \frac{(\frac{\partial}{\partial\vartheta_i} f)(\frac{\partial}{\partial\vartheta_j} f)}{f^2}$$

folgt

$$\begin{aligned}
E_\vartheta(W_n(\vartheta)) &= \int \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}\log f(x,\vartheta)\cdot f(x,\vartheta)d\mu(x) \\
&= \underbrace{\left(\int \frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j} f(x,\vartheta)\mu(dx)\right)_{i,j}}_{=0 \text{ nach (e) [vgl. 5.7]}} \\
&\quad - \left(\int \frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\log f(x,\vartheta)\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\log f(x,\vartheta)\cdot f(x,\vartheta)d\mu(x)\right)_{i,j} \\
&= -E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)U_nn(\vartheta)^T] \\
&= -I_n(\vartheta)
\end{aligned}$$

5.11 Reguläre Statistiken (Schätzer)

In der Situation von 5.7 heißt eine Statistik $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ **regulär**, falls gilt:

f) Die Funktion $\Theta \ni \vartheta \mapsto E_\vartheta T \in \mathbb{R}^s$ ist stetig differenzierbar.

g) Differenziation und Integration können vertauscht werden:
$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int T(x) f(x,\vartheta)\mu(dx) = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x,\vartheta)\mu(dx) \ j = 1,\ldots,k$$

Mit
$$C_n(\vartheta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} E_\vartheta T_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta_k} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial\vartheta_k} E_\vartheta T_s \end{bmatrix}_{k\times s} = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$$
wird Bedingung (g) zu
$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta) T^T]$$
Wegen $E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)] = 0$ folgt
$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)(T - E_\vartheta T)^T]$$

5.12 Strukturlemma

Vorbemerkung:
Seien A,B $n \times n$-Matrizen.
$A \geq B \ :\Leftrightarrow \ A - B$ positiv semidefinit[17] ($\Leftrightarrow x^T A x \geq x^T B x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$)
(„$\geq$“ definiert Loewner-Halbordnung)

Es seien $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ eine Statistik, P_ϑ Verteilung auf $\mathcal{B}^n$, $V(\vartheta)$ ein k-dimensionaler Zufallsvektor mit $E_\vartheta V(\vartheta) = 0$ und positiv definiter Kovarianzmatrix
$$J(\vartheta) = E_\vartheta[V(\vartheta) \cdot V(\vartheta)^T]$$
Definiert man
$$D(\vartheta) := E_\vartheta[V(\vartheta) \cdot (T - E_\vartheta T)^T]$$
($k \times s$-Matrix), so gilt[18]:
$$\mathrm{Var}_\vartheta(T) \geq D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot D(\vartheta)$$

[17] $A - B \geq 0$

[18] $\mathrm{Var}_\vartheta(T)$ ist Kovarianzmatrix, da T vektorwertig; im Folgenden wird diese Schreibweise bei (Zufalls-)Vektoren meistens angewandt (...)

„=“ gilt genau dann, wenn $T = E_\vartheta T + D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$ P_ϑ-f.s.

Beweis:
Für jeden Zufallsvektor $Y_{k \times 1}$ gilt:

(i) $E[YY^T] \geq 0$

(ii) $E[YY^T] = 0 \Leftrightarrow Y = 0$ P-f.s.

[zu (i):

$$\forall a \in \mathbb{R}^k: \; a^T E[YY^T]a = E[a^T YY^T a] = E[(a^T Y)^2] \geq 0$$

zu (ii): „$\Rightarrow$“

$$EYY^T = 0 \;\Rightarrow\; \forall j: \; EY_j^2 = 0 \;\Rightarrow\; Y = 0 \text{ P-f.s.} \quad]$$

Setze $Y := T - E_\vartheta T - D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \overset{(i)}{\leq} E_\vartheta[YY^T] \overset{(*)}{=} \; & E_\vartheta[(T - E_\vartheta T)(T - E_\vartheta T)^T] \\ & - \underbrace{E_\vartheta[(T - E_\vartheta T)V^T(\vartheta)]}_{=D^T(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ & - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_\vartheta[V(\vartheta)(T - E_\vartheta T)^T]}_{=D(\vartheta)} \\ & + D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_\vartheta[V(\vartheta) \cdot V^T(\vartheta)]}_{=J(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ = \; & \mathrm{Var}_\vartheta(T) - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \end{aligned}$$

$(*)$: Beachte: J symmetrisch, $J = E_\vartheta[\cdot]$, $D = E_\vartheta[\cdot]$.
$[Y = (T - E_\vartheta T) - (D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta))]$

„=“ $\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$ $Y = 0$ P-f.s. ■

5.13 Satz (Cramér-Rao-Ungleichung)

Es seien $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ reguläre Verteilungsklasse und $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ reguläre Statistik. Dann gilt:

$$\boxed{(1) \quad \mathrm{Var}_\vartheta(T) \geq (\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot (\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T) \quad (\vartheta \in \Theta)}$$

„=“ in (1) gilt $\Leftrightarrow\ T = E_\vartheta T + (\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)$

<u>Beweis:</u>
5.12 mit $V(\vartheta) := \mathcal{U}_n(\vartheta)$, $E_\vartheta \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ (Lemma 5.8), $J(\vartheta) = I_n(\vartheta)$, $D(\vartheta) = E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)(T - E_\vartheta T)^T] = C_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$ (5.11).

5.14 Bemerkungen

a) Ist T erwartungstreu für $g(\vartheta)$, so gilt

$$E_\vartheta T = g(\vartheta)\ \forall \vartheta \in \Theta$$

$\Rightarrow$ rechte Seite von 5.13(1) ist nicht von T abhängig.

b) Falls $k = s$ und T erwartungstreu für ϑ, so gilt $E_\vartheta T = \vartheta\ \forall \vartheta \in \Theta$ und somit $\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T = I_k \Rightarrow$

$$\mathrm{Var}_\vartheta\, T \geq I_n^{-1}(\vartheta)$$

$$\text{„ = “} \Leftrightarrow T = \vartheta + I_n^{-1}(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta) \quad P_\vartheta - f.s.$$

c) Falls $X = (X_1, \ldots, X_n)$ und $X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$, so gilt:

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^{n} f_1(x_j, \vartheta)$$

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \sum_{j=1}^{n} \log f_1(X_j, \vartheta) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)}_{\text{uiv mit } E_\vartheta(\cdot)=0}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)\mathcal{U}_n^T(\vartheta)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{E_\vartheta[\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_i,\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_j,\vartheta)^T]}_{=0 \text{ für } i\neq j} \\ &= n\cdot \underbrace{E_\vartheta[\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_1,\vartheta)\cdot\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_1,\vartheta)T]}_{=:I_1(\vartheta)} \\ &= n\cdot I_1(\vartheta)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Schranke in 5.13(1) geht mit $\frac{1}{n}$ gegen 0.

d) Ist $\Theta\subset\mathbb{R}^1,\ T:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1,\ \gamma(\vartheta):=E_\vartheta(T),\vartheta\in\Theta$,
$X_1,\ldots,X_n \overset{uiv}{\sim} f_1(\xi,\vartheta)$ wie in (c), so folgt:

$$\mathrm{Var}_\vartheta(T)\geq\frac{(\gamma'(\vartheta))^2}{n\cdot I_1(\vartheta)},\ \vartheta\in\Theta$$

e) T heißt **CR-effizient**, falls in 5.13(1) Gleichheitszeichen gilt.
Achtung: CR-effizienzierter Schätzer muss nicht existieren.

5.15 Beispiel

$X_1,\ldots,X_n \overset{uiv}{\sim} \mathrm{Bin}(1,\vartheta),\vartheta\in\Theta=(0,1),\ \mu=$ Zählmaß auf $\{0,1\}^n$.
$f_1(\xi,\vartheta)=\vartheta^\xi\cdot(1-\vartheta)^{1-\xi},\ \xi\in\{0,1\}$

$$f(x,\vartheta)=\prod_{j=1}^n f_1(x_j,\vartheta)=\vartheta^{\sum_j x_j}(1-\vartheta)^{n-\sum_j x_j},\ x\in A$$

$$\log f(x,\vartheta)=\sum_j x_j\log\vartheta+(n-\sum_j x_j)\log(1-\vartheta)$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log f(x,\vartheta)=\frac{\sum_j x_j}{\vartheta}-\frac{n-\sum_j x_j}{1-\vartheta}=\frac{\sum_j x_j-n\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[(\frac{d}{d\vartheta}\log f(X,\vartheta))^2] \\ &= \frac{1}{\vartheta^2(1-\vartheta)^2}\underbrace{E_\vartheta[(\underbrace{\sum_{j=1}^n X_j}_{\sim\mathrm{Bin}(n,\vartheta)}-n\vartheta)^2]}_{=n\vartheta(1-\vartheta)} \\ &= \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}\end{aligned}$$

[Erwartungswert von $\mathrm{Bin}(n,\vartheta) = n\vartheta$, also ist in der vorletzten Zeile die Varianz von $\mathrm{Bin}(n,\vartheta)$ gesucht.]

(1) „Raten“
Sei $T(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$.

$$E_\vartheta T = \vartheta$$

$\Rightarrow$T erwatungstreu
5.14(d) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\mathrm{Var}_\vartheta T}_{=\frac{1}{n}\mathrm{Var}_\vartheta(X_1)=\frac{1}{n}\vartheta(1-\vartheta)} \geq I_n^{-1}(\vartheta) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$$

$\Rightarrow$ T ist UMVUE

(2) Konstruktion nach 5.13 durchführen

$$T(X) \overset{5.14(b)}{=} \vartheta + \underbrace{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}_{I_n(\vartheta)^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)}}_{\frac{d}{d\vartheta}\log f(X,\vartheta)} = \bar{X}_n$$