(1) $M \neq \emptyset$, gilt da, $e \circ e = e$ ist, ist $e \in M$

(2)
$$\forall x \in M : x^{-1} \in M, \text{ denn } x \in M \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow x \circ x = e \\ &\Leftrightarrow (x^{-1} \circ x)\circ = x^{-1} \circ e \\ &\Leftrightarrow x = x^{-1} \\ &\Leftrightarrow x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \circ x^{-1} = e \\ &\Leftrightarrow e = x^{-1} \circ x^{-1} \in M \end{aligned}$$

(3) $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$, denn:

$$(x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \overset{e}{\circ} x) \circ (x \overset{e}{\circ} \cdot) = e \circ e = e$$

Also ist M eine Untergruppe von G. $\square$

b) Sei $n \geq 3$ und $G = S_n$, dann ist M keine Untergruppe von G

$$S_n := \pi 1, ..., n \to 1, ..., n : \pi bijektiv$$

Verkettung von Abbildungen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & ... & n \end{pmatrix} \in M$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & ... & n \end{pmatrix} \in M$$

$(\tau_1 \circ \tau_2) \circ (\tau_1 \circ \tau_2) = 3$, also $\neq 1$, d.h. $\tau_1 \circ \tau_2 \notin m$. Also M keine Untergruppe.

0.17 Übung 17, 25.04.2005

0.17.1 Aufgabe 1

a) $\Phi : V \to V$ End., Φ ist diag., V ist n-dim $\mathbb{R} - VR$.

z.z.: Es existiert $\Psi : V \to V$ End., mit $\Psi^3 = \Psi \circ \Psi \circ \Psi = \Phi$.

Beweis: Φ ist diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Abbilduntsmatrix von Φ der Form

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

Definieren wir $A_\Psi := \begin{pmatrix} \sqrt[3]{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[3]{c_n} \end{pmatrix}$, so gilt: $A_\Psi \circ A_\Psi \circ A_\Psi = A_\Phi$.

Nach Vorlesung existiert genau ein lineare Abbildung $\Psi : V \to V$ mit A_Ψ und es gilt: $\Psi^3 = \Phi$. $\square$

b) Man rechnet nach: $c_1 = -8$ und $c_2 = 8$ sind die Ew. von A.

Der Eigenraum zum Eigenwert $c_1 = -8$ ist $E_{-8} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Der Eigenraum zum Eigenwert $c_1 = 8$ ist $E_8 = [\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}]$.

Dann gilt(vgl. Aufgabe 1, Blatt 1):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & \\ 0 & 8 & 0 & \\ & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_{B^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{S} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}}_{S}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\tilde{B}S^{-1} = A \Leftrightarrow (S\tilde{B}S^{-1})(S\tilde{B}S^{-1})(S\tilde{B}S^{-1}) = A$$

wählen wir:

$$B := S\tilde{B}S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ -8 & -\frac{6}{5} & -\frac{32}{5} \\ 4 & \frac{8}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix}, \text{ so gilt: } B^3 = A$$

0.17.2 Aufgabe 2

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Rang $A = 1$.
v sei eine Spalte von A mit $v \neq 0$

a) z.Z.: $\exists w \in \mathbb{R}^n$ mit $A = vw^\top$ und w ist eindeutig bestimmt. Da $v \neq 0$ ist, ex. $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $A = (a_1 v | ... | a_n v)$

Wenn wir $w = \begin{pmatrix} a1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ setzen, so gilt $A = vw^\top$.

Sei $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{a_1} \\ \vdots \\ \tilde{a_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit $A = v \cdot \tilde{w}^\top$. Für $i = 1, ..., n$ gilt: $a_1 v = \tilde{a}_1 v \overset{v \neq 0}{\Rightarrow} a_i = \tilde{a}_i$ für $i = 1, ..., n$.

b) $A = ((a_{ij}))$, dann ist Spur$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. In unserem Fall:

Spur$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, wobei $v = (v_1, ..., v_n)^\top$.

z.Z.: $Av = Spur(A)v$

Beweis: