

25. Funktionen von beschränkter Variation

Definition

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $V_f(Z) := \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ ist die **Variation** von f bezüglich Z .

Beachte: Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und $Z_1 \subseteq Z_2 \implies V_f(Z_1) \leq V_f(Z_2)$. $M_f = \{V_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$. f heißt von **beschränkter Variation**, in Zeichen: $f \in \text{BV}[a, b] : \iff M_f$ ist nach oben beschränkt. In diesem Fall heißt $V_f[a, b] := \sup M_f$ die **Totalvariation** von f (auf $[a, b]$).

Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C[0, 1]$. Sei $n \in \mathbb{N}$. $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{n-(n-1)}\}$. Nachrechnen: $V_f(Z_n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Also: $f \notin \text{BV}[0, 1]$.

Hilfssatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$ und f' sei auf $[a, b]$ beschränkt. Dann ist f auf $[a, b]$ Lipschitzstetig.

Beweis

$L := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$. Sei $x, y \in [a, b]$, etwa $x \leq y$. $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|, \xi \in [x, y]$. ■

Satz 25.1 (Varianzeigenschaften)

- (1) Ist $f \in \text{BV}[a, b] \implies f$ ist beschränkt auf $[a, b]$.
- (2) Ist f auf $[a, b]$ Lipschitzstetig $\implies f \in \text{BV}[a, b]$.
- (3) Ist f differenzierbar auf $[a, b]$ und f' beschränkt auf $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$
- (4) $C^1[a, b] \subseteq \text{BV}[a, b]$
- (5) Ist f monoton auf $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$ und $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$
- (6) $\text{BV}[a, b]$ ist ein reeller Vektorraum
- (7) Ist $c \in (a, b)$, so gilt: $f \in \text{BV}[a, b] \iff f \in \text{BV}[a, c]$ und $f \in \text{BV}[c, b]$. In diesem Fall: $V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$.

Beweis

- (1) Sei $x \in [a, b]$ (beliebig, fest). $Z := \{a, x, b\}$, $V_f(Z) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_f[a, b] \implies |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f(Z) + |f(a)| \leq V_f[a, b] + |f(a)|$

- (2) $\exists L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b]$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^n L|x_j - x_{j-1}| = L \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = L(b - a)$
- (3) folgt aus (2) und dem Hilfssatz
- (4) folgt aus (3)
- (5) f sei wachsend auf $[a, b]$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $V_f(Z) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$
- (6) Übung.
- (7) $I := [a, b], I_1 := [a, c], I_2 := [c, b]$.

„ \Rightarrow “: Sei Z_1 eine Zerlegung von I_1 und Z_2 eine Zerlegung von I_2 . $Z := Z_1 \cup Z_2 \Rightarrow Z \in \mathfrak{Z}$ und $V_f(Z_1), V_f(Z_2) \leq V_f(Z) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \Rightarrow f \in \text{BV}(I_1)$ und $f \in \text{BV}(I_2)$ und $V_f(I_1) + V_f(I_2) \leq V_f[a, b]$

„ \Leftarrow “: Sei $Z \in \mathfrak{Z}, \tilde{Z} := Z \cup \{c\}, Z_1 := \tilde{Z} \cap I_1, Z_2 := \tilde{Z} \cap I_2$. Z_1 und Z_2 sind Zerlegungen von I_1 bzw. I_2 und $V_f(Z) \stackrel{s.o.}{\leq} V_f(\tilde{Z}) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2) \Rightarrow f \in \text{BV}[I]$ und $V_f(I) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2)$. ■

Satz 25.2 (Eigenschaften Funktion von beschränkter Varianz)

- (1) $f \in \text{BV}[a, b] \iff \exists f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit: f_1, f_2 sind wachsend auf $[a, b]$ und $f = f_1 - f_2$.
- (2) $\text{BV}[a, b] \subseteq \text{R}[a, b]$.
- (3) Ist $f \in C^1[a, b] \Rightarrow V_f[a, b] = \int_a^b |f'| dx$.

Beweis

(3) später in allgemeiner Form (Analysis II, §12 od. §13)

(2) folgt aus (1) und 23.4

- (1) „ \Rightarrow “: $V_f[a, a] := 0, f_1(x) := V_f([a, x])$ ($x \in [a, b]$), $f_2 := f_1 - f$. Dann: $f = f_1 - f_2$. Seien $c, d \in [a, b]$ und $c < d$. $f_1(d) = V_f[a, d] \stackrel{25.1(7)}{=} V_f[a, c] + V_f[c, d] = f_1(c) + \underbrace{V_f[c, d]}_{\geq 0} \geq f_1(c) \Rightarrow f_1$ ist wachsend. $f(d) - f(c) \leq |f(d) - f(c)| = V_f(\tilde{Z})$ (wobei $\tilde{Z} = \{c, d\}$) $\leq V_f[c, d] = f_1(d) - f_1(c) \Rightarrow f_2(d) - f_2(c) \geq 0 \Rightarrow f_2$ ist wachsend.

„ \Leftarrow “: 25.1(5), (6) ■