

2 Morphismen von Schemata

§6 Einbettungen

Definition 2.6.1

Sei $i : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von Schemata.

- (a) i heißt *offene Einbettung*, wenn i ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von X ist.
- (b) i heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn i ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge $Z := i(Y)$ von X ist und $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$ surjektiv ist. $(Z, i_* \mathcal{O})$ heißt dann *abgeschlossenes Unterschema* von X .

Beispiele 2.6.2

- (a) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die $V(I)$, ($I \subseteq R$ Ideal). $V(I)$ wird zum abgeschlossenen Unterschema durch die Schemastruktur als $\operatorname{Spec}(R/I)$. Die abgeschlossene Einbettung $\operatorname{Spec}(R/I) \rightarrow \operatorname{Spec} R$ wird induziert von der Restklassenabbildung $R \rightarrow R/I$.
Warnung: $V(I) = V(I^2)$, aber $R/I = R/I^2$ gilt im Allgemeinen **nicht**!
- (b) Seien k ein Körper, $R = k[X, Y]$ und $I = (X^2, XY) \subsetneq (X)$. Es gilt $V(I) = V(X)$ (y -Achse). In $V(I)$ ist außerhalb von $0 = (0, 0) = V(X, Y)$, also auf

$$D(Y) = \operatorname{Spec} \left(k[X, Y]/I \right)_Y = \operatorname{Spec}(k[Y]_Y)$$

das abgeschlossene Unterschema $V(I)$, also $\operatorname{Spec}(R/I)$, isomorph zu $\operatorname{Spec}(R/(X))$. ?

Aber: $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I), 0}$ enthält ein nilpotentes Element, nämlich X .

Erinnerung / Definition 2.6.3

(Übungblatt 3, Aufgabe 1)

Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) heißt *reduziert*, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X, x}$ ein reduzierter Ring ist.
 Äquivalent: Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein reduzierter Ring.

Proposition 2.6.4

Zu jedem Schema (X, \mathcal{O}_X) gibt es ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema X_{red} von X , das folgende UAE erfüllt:

Ist $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y , so gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f} : Y \rightarrow X_{red}$ mit

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \tilde{f} & \uparrow i \\ & & X_{red} \end{array}$$

$f = i \circ \tilde{f}$. Dabei ist $X = X_{red}$ (gleich als topologische Räume).

Beweis (1) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Setze $X_{red} := \operatorname{Spec}(R/\sqrt{(0)})$, dann ist X_{red} ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema.

UAE: Sei Y reduziert, $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus $\alpha_f : R \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$.

Zu zeigen: $\sqrt{(0)} \subseteq \operatorname{Kern}(\alpha_f)$

Sei also $a \in \sqrt{(0)}$, also $a^n = 0$ für $n \geq 1$. Daraus folgt: $(\alpha_f(a))^n = 0$. Und weil Y reduziert ist: $\alpha_f(a) = 0$.

(2) Allgemeiner Fall:

Benutze:

$$(R/\sqrt{(0)})_f \cong R_f/\sqrt{(0)}$$

□

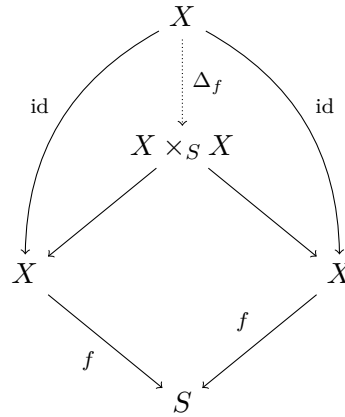
Folgerung 2.6.5

Zu jedem abgeschlossenen Unterschema Z von X gibt es ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema Z_{red} (die “reduzierte induzierte Struktur”).

§7 Separierte Morphismen

Definition 2.7.1

- (a) Ein Morphismus $f : X \rightarrow S$ von Schemata heißt *separiert*, wenn der “Diagonalmorphismus” $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ eine abgeschlossene Einbettung ist.



- (b) X heißt *separiert*, wenn $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist.

Beispiele

Sei X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt. X ist nicht separiert (über k):

Seien also $S = \operatorname{Spec} k, U = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{(0, 0)\} = \operatorname{Spec}(k[X]_X)$ und X die Verklebung von \mathbb{A}_k^1 mit sich selbst längs U . Es ist

$$U \times_S U = \mathbb{A}_k^2 - \text{“Achsenkreuz”}$$

$$\Delta = \Delta_f(X) = \{(u, u) : u \in U\} \cup \{(0_1, 0_1), (0_2, 0_2)\}$$

Es gilt

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{(0_1, 0_2), (0_2, 0_1)\}$$

denn: jede Umgebung von $(0_1, 0_2)$ enthält Punkte von Δ !

Bemerkung 2.7.2

Jeder Morphismus von affinen Schemata ist separiert.

Beweis Sei $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, f : X \rightarrow Y, \alpha : A \rightarrow B$, α der Ringhomomorphismus zu f . Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$. Δ wird induziert von

$$\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \longmapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossen. (Das ist so, weil ein surjektiver Ringhomomorphismus Primideale auf Primideale abbildet und deswegen alle Primideale, die

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

enthalten, schon Urbilder von Primidealen waren.)

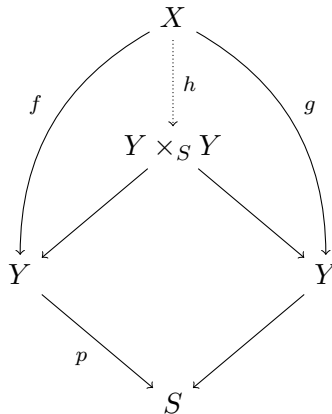
Bemerkung 2.7.3

Seien $f, g : X \rightarrow Y$ Morphismen von S -Schemata. Ist Y über S separiert, so ist

$$E(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in X .

Beweis Sei $h : X \rightarrow Y \times_S Y$ der von f und g induzierte Morphismus.



Dann ist $E(f, g) = h^{-1}(\Delta)$, ($\Delta = \Delta_p(Y)$). Also ist $E(f, g)$ abgeschlossen.

Proposition 2.7.4

Seien (X, \mathcal{O}_X) ein Schema, R ein diskreter Bewertungsring, $K = \text{Quot}(R)$, $T = \text{Spec } R$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{Hom}(T, X) \longrightarrow \{(x_0, x_1, i) : x_0, x_1 \in X \text{ mit } x_0 \in \overline{\{x_1\}}, i : \kappa(x_1) \rightarrow K \text{ Körperhomomorphismus} \\ \text{mit } i(\mathcal{O}_{Z, x_0}) \subseteq R \text{ und } i(m_{Z, x_0}) = m_R \cap i(\mathcal{O}_{Z, x_0})\},$$

wobei $Z = \overline{\{x_1\}_{red}}$ sei. Dann ist $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \mathcal{O}_{X,x_1}/m_{x_1}$.

Beweis Für $f : T \rightarrow X$ sei $x_0 := f(m_R), x_1 = f(0), i = f_{x_1}^\sharp$. Da T reduziert ist, “ist” f ein Morphismus nach Z :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow f & \uparrow \\ & & Z \end{array}$$

$f^\#$ induziert also einen Morphismus

$$\mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,m} = R$$

mit $f^\#(m_{Z,x_0}) \subseteq m$.

Umgekehrt induziert jedes $i : \mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$ einen Morphismus

$$\mathrm{Spec} R = T \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \rightarrow Z \rightarrow X$$

□

Satz 2

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus noetherscher Schemata. f ist genau dann separiert, wenn es zu jedem “Bewertungsdiagramm”

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

($T = \mathrm{Spec} R$, R diskreter Bewertungsring, $U = \mathrm{Spec} K$, $K = \mathrm{Quot} R$)

höchstens einen Morphismus $h : T \rightarrow X$ gibt, der das Diagramm kommutativ macht.

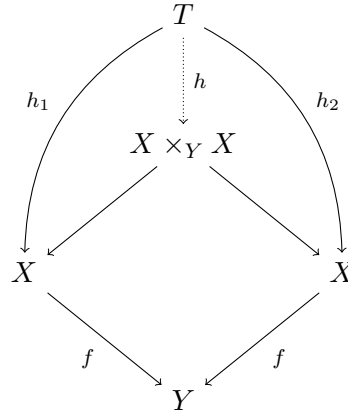
Beispiele

Seien X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt, $Y = \mathrm{Spec} k$ für einen Körper k , $R = k[X]_{(X)}$, $K = k(X)$. Sei weiter $X' = \mathrm{Spec} k[X]$, dann existiert ein Morphismus, der das Bewertungsdiagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} K & \longleftarrow & k[X] \\ \uparrow & \nwarrow h^\# & \uparrow \\ k[X]_{(X)} & \longleftarrow & k \end{array}$$

Also gibt es für beide offenen Teile von X , die gleich \mathbb{A}_k^1 sind, je eine Fortsetzung.

Beweis “ \Rightarrow ” Sei ein Bewertungsdiagramm (mit den üblichen Bezeichnungen) gegeben. Zwei $h_1, h_2 : T \rightarrow X$ Fortsetzungen von $h_0 : U \rightarrow X$, induzieren einen Morphismus h :



Es ist $h_1(0) = h_0(0) = h_2(0)$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow h(0) \in \Delta = \Delta_f(X) \Rightarrow h(m) \in \overline{\{h(0)\}} \subseteq \Delta \\
 &\Rightarrow h_1(m) = h_2(m)
 \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 1 genügt es zu zeigen: Δ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$.

Behauptung (1)

Ist für jedes $x_1 \in \Delta$ auch $\overline{\{x_1\}} \subseteq \Delta$, so ist Δ abgeschlossen.

Seien also $x_1 \in \Delta, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, Z := \overline{\{x_1\}}_{red}, \mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z, x_0}, K = \mathcal{O}_{Z, y_1} = \kappa(x_1)$

Behauptung (2)

Es gibt einen diskreten Bewertungsring $R \subseteq K$, der \mathcal{O} dominiert, das heißt $\mathcal{O} \subseteq R$ und $m_{\mathcal{O}} = m_R \cap \mathcal{O}$.

Dann gibt es nach Proposition 2.7.4 einen Morphismus $h : T = \text{Spec } R \rightarrow X \times_Y X$ mit $h(0) = x_1$ und $h(m) = x_0$. Für $h_i = pr_i \circ h, i = 1, 2$, ist $f \circ h_1 = f \circ h_2, h_i : T \rightarrow X$.

Da $x_1 \in \Delta$, ist $h_1(0) = h_2(0)$. Mit $h_0 := h|_U$ folgt: $h_1 = h_2 \Rightarrow h(m) \in \Delta$. \square

Beweis (2) $m = m_{\mathcal{O}}$ ist endlich erzeugt, etwa $m = (x_1, \dots, x_n)$. Sei $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}]$ und $I = X_1 \cdot \mathcal{O}'$. ($\mathcal{O} I \neq \mathcal{O}'$)

Krullscherr Hauptidealsatz: es gibt ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}'$ der Höhe 1 mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ (Eisenbud Theorem 10.1)

$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ ist ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ in K .

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist normal, $\dim \tilde{\mathcal{O}} = 1, \mathcal{O} \tilde{\mathcal{O}}$ lokal, $\tilde{\mathcal{O}}$ ist noethersch (Satz von Krull-Akizuki, Eisenbud Theorem 11.13)

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist diskreter Bewertungsring. Es gilt:

$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \subseteq m_{\mathcal{O}}$: Klar.

$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \supseteq m_{\mathcal{O}}$, weil $X_1, \dots, X_n \in I$. \square

Behauptung 1 ist (für $f = \Delta$) ein Spezialfall von

Proposition 2.7.5

Sei $f : W \rightarrow X$ Morphismus noetherscher Schemata. Dann gilt:

$f(W)$ ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow f(W)$ ist abgeschlossen unter Spezialisierung: Für $x_1 \in f(W)$ und $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ ist $x_0 \in f(W)$.

Beweis “ \Rightarrow ” Klar.

“ \Leftarrow ” Sei $Y = \overline{f(W)}$ (als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur)

Sei $y \in Y$; zu zeigen: $y \in f(W)$.

OE $Y = \text{Spec } A$ affin, sei $B = \mathcal{O}_W(W)$. f wird also induziert von $\alpha : A \rightarrow B$ und α ist injektiv, weil f dominant ist (AG I, Proposition 6.8 (b)). Sei $y' \subseteq y$ ein minimales Primideal, dann gilt $y \in \overline{\{y'\}}$. Also genügt es zu zeigen: $y' \in f(W)$ (das ist die Voraussetzung)

Es gilt $f^{-1}(y') = \text{Spec}(\underbrace{B \otimes_A \kappa(y')}_{=:R})$. Zu zeigen: $R \neq \{0\}$

Es ist $\kappa(y') = A_{y'}/y' A_{y'}$ und $A_{y'}$ ist ein Körper, weil A reduziert ist. ? Damit gilt: $R = B \otimes_A A_{y'}$.

Weiter gilt: $A \subseteq B \Rightarrow A \otimes_A A_{y'} \subseteq B \otimes_A A_{y'} = R$. Und $A_{y'}$ ist ein flacher A -Modul, weil er eine Lokalisierung ist. \square

Beispiele

$A = k[X, Y]/(X \cdot Y)$, $y' = (X) \Rightarrow A_{y'} = k(Y)$.

Folgerung 2.7.6

Für noethersche Schemata gilt:

- (a) Affine und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.
- (b) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
- (c) “separiert” ist stabil unter Basiswechsel.
- (d) $g \circ f$ separiert $\Rightarrow f$ separiert.
- (e) “separiert” ist lokal bezüglich der Basis, das heißt:
 $f : X \rightarrow Y$ separiert \Leftrightarrow es existiert eine offene Überdeckung (U_i) von Y , sodass

$$f|f^{-1}(U_i) : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \text{ separiert}$$

Beweis Übung! \square

§8 Eigentliche Morphismen

Definition 2.8.1

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata.

- (a) f heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$, mit $U_i = \text{Spec } A_i$, von Y gibt und für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine offene Überdeckung $(U_{ij})_{j \in \mathcal{J}_i}$, mit $U_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$, von $f^{-1}(U_i)$ existiert, sodass für alle i, j B_{ij} vermöge $f^\#$ zu einer endlich erzeugten A_i -Algebra wird.
- (b) f heißt *von endlichem Typ*, wenn in (a) alle J_i endlich gewählt werden können.
- (c) f heißt *endlich*, wenn in (a) jedes J_i einelementig gewählt werden kann (also $f^{-1}(U_i) =: \text{Spec } B_i$) und B_i ein endlich erzeugter A_i -Modul ist.

Bemerkung 2.8.2

In Definition 2.8.1 kann “es gibt eine offene affine Überdeckung” ersetzt werden durch “für jedes offene affine $U \subseteq Y$ gilt”.

Beweis (a) Übungsblatt 5, Aufgabe 2, (b) und (c) analog. \square

Bemerkung 2.8.3

Ist $f : X \rightarrow Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ eine endliche Menge.

Beweis Sei $\mathcal{O}_Y = \text{Spec } A$ affin. Dann ist auch $X = \text{Spec } B$ affin. Es ist $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist eine $\kappa(y)$ -Algebra und, da B ein endlich erzeugter A -Modul ist, ist $B \otimes_A \kappa(y)$ ein endlich dimensionaler $\kappa(y)$ -Vektorraum. Es ist $\dim(B \otimes_A \kappa(y)) = 0$ (?), also $\text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ endlich. \square

Definition 2.8.4

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt *eigentlich*, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist, das heißt für jeden Basiswechsel

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ist f' abgeschlossen.

Beispiele

$f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ ist abgeschlossen. Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

f' ist nicht abgeschlossen, denn:

$V = V(XY - 1)$ ist abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{A}_k^2 , aber $f'(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen.

Satz 3

Seien X, Y noethersche Schemata, $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. f ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

genau eine Fortsetzung h gibt.