b) RA:
Jedes $x \in U_1 + ... + U_k$ hat eine eindeutige Darstellung $x = u_1 + ... + u_k$ mit $u_i \in U_i$ für $i = 1, ..., k$.
Insbesondere sind also die Vektoren in $B_1 \cup ... \cup B_k$ l.u.
$\Rightarrow \dim(U_1 + ... + U_k) \geq \dim U_1 + ... + \dim U_k \overset{a)}{\Rightarrow}$ Beh. LA:
Nach a) kann Gleichheit nur dann gelten, wenn $B_1 \cup ... \cup B_k$ eine Basis von $U_1 + ... + U_k$ist und $B_i \cap b_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist. Bezüglich der Basis ist jedes $x \in U_1 + ... + u_k$ eindeutig als Linearkombination darstellbar. Also ist auch die Darstellung $x = u_1 + ... + u_k$ mit $u_i \in U_i (i = 1, ..., k)$ eindeutig.

c) $V = R^2, U_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}], U_2 = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}], U_3 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ erfüllen alle Forderungen.

0.13 Übung 12, 31.01.2005

0.14 Übung 13, 07.02.2005

0.15 Übung 14, 14.02.2005

0.15.1 Aufgabe 3

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & \\ -1 & 1 & -1 & 2 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2_x 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = x_2 + x_4 + x_1 - 2_x 2 - 2x_4 - x_1 + x_2 + 2x_4 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$

b)

(i) 1-1+0-0=0

(ii) 0+1-1+0=0

(iii) 0-0+1-1=0

c)

(i) dim $U = 3$

(ii) W ϕ-invariant bedeutet $\phi(W) \in W$

$\Rightarrow \dim W = 1$

Wir suchen also $x \in V$ mit: $\phi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$
a)$\Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}_{=0} = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = a(\underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}_{=0}) \Rightarrow a = 1$