3 Kohomologie von Garben

§9 $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition 3.9.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. $\mathcal{F}$ heißt ***$\mathcal{O}_X$-Modulgarbe***, wenn gilt:

(i) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul

(ii) Für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus, wobei $\mathcal{F}(U')$ durch den Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$ zum $\mathcal{O}_X(U)$-Modul wird.

Bemerkung 3.9.2
Die $\mathcal{O}_X$-Modulgarben bilden mit den $\mathcal{O}_X$-linearen Abbildungen eine Kategorie $\underline{\mathcal{O}_X - Mod}$.

Beispiele
Sei X eine nichtsinguläre Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X.
Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D)(U) :=& \{f \in k(X) : \operatorname{div} f|U + D|U \geq 0\} \\ =& \{f \in k(X) : \forall P \in U : \operatorname{ord}_P(f) + n_P \geq 0\}\end{aligned}$$

$\mathcal{L}(D)$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, denn $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Definition + Bemerkung 3.9.3
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

(a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zu $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe.

(b) Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sind $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

Definition + Bemerkung 3.9.4
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von lokalgeringten Räumen.

(a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ist $f_*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y.

(b) Für jede $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ ist $f^{-1}\mathcal{G}$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis (a) Für offenes $U \subseteq Y$ ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-Modul. $f_U^\sharp$ ist ein Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $f_*\mathcal{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul.

(b) Den Garbenhomomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ erhält man aus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$

$$f^{-1}(f^\sharp) : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

den hinteren Morphismus liefert 1.1.16 (d). □

§10 Quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition + Bemerkung 3.10.1
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema, M ein R-Modul. Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\widetilde{M}(U) := \{s : U \to \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p} : \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es eine Umgebung } U_\mathfrak{p} \text{ und Elemente } m_\mathfrak{p} \in M,\ f_\mathfrak{p} \in R - \mathfrak{q}, \text{ sodass für alle } \mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p} \text{ gilt: } s(\mathfrak{q}) = \frac{m_\mathfrak{p}}{f_\mathfrak{p}} \in M_\mathfrak{p}\}$$

wobei $M_\mathfrak{p} = M \otimes_R R_\mathfrak{p}$ ist.

Proposition 3.10.2
Seien $X = \operatorname{Spec} R, M, \widetilde{M}$ wie in 10.1.

(a) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ ist $\widetilde{M}_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}$.

(b) Für jedes $f \in R$ ist $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ (insbesondere $\widetilde{M}(X) \cong M$).

Beweis Wie für $\mathcal{O}_X$. □

Bemerkung 3.10.3
$M \mapsto \widetilde{M}$ ist ein exakter, volltreuer Funktor $\underline{R - Mod} \to \underline{\mathcal{O}_X - Mod}$, denn:
Lokalisieren ist exakt, da $R_\mathfrak{p}$ flacher R-Modul ist (was Tensorieren exakt macht).

Bemerkung 3.10.4

(a) $\widetilde{M \otimes_R N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$

(b) $\widetilde{\bigotimes M_i} \cong \bigotimes \widetilde{M_i}$

Beweis (a) $(M \otimes_R N) \otimes_R R_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_R R_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} (N \otimes_R R_\mathfrak{p})$ □

Bemerkung 3.10.5
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus, $X = \operatorname{Spec} R, Y = \operatorname{Spec} R', \alpha : R' \to R$ der zugehörige Ringhomomorphismus.

(a) Für jeden R-Modul M ist $f_*\widetilde{M} \cong \widetilde{_\alpha M}$ ($_\alpha M$ sei M aufgefasst als R'-Modul über α).

(b) Für jeden R'-Modul N ist $f^*\widetilde{N} = \widetilde{N \otimes_{R'} R}$

Beweis (a)

$$\begin{aligned} f_*\widetilde{M}(U) &= \widetilde{M}(f^{-1}(U)) \text{ als } \mathcal{O}_Y(U)\text{-Modul} \\ &= {}_\alpha\widetilde{M}(U) \end{aligned}$$

(b) $f^*\widetilde{N}(X) = (f^{-1}\widetilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X) = N \otimes_{R'} R$ □

Definition 3.10.6
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

(a) $\mathcal{F}$ heißt ***quasi-kohärent***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} R_i)_{i \in I}$ von X und R_i-Moduln M_i gibt, sodass

$$\mathcal{F}|U_i \cong \widetilde{M_i}$$

für alle $i \in I$ gilt.

(b) $\mathcal{F}$ heißt ***kohärent***, wenn in (a) jedes M_i endlich erzeugbarer R_i-Modul ist.

Proposition 3.10.7
Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema X ist genau dann quasi-kohärent, wenn für jedes offene affine $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ ein R-Modul M existiert mit $\mathcal{F}|U \cong \widetilde{M}$.

Beweis 1. Schritt: Sei X Œ affin, denn:
Sei $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ offen und affin, $(U_i = \operatorname{Spec} R_i)$ die gegebene Überdeckung von X. $(U \cap U_i)$ ist eine offene Überdeckung von U. Überdecke $U \cap U_i$ durch $D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}|D(f_{ij}) = (\mathcal{F}|U)|D(f_{ij}) = \widetilde{M}_i|D(f_{ij}) = \widetilde{(M_i)_{f_{ij}}}$$

2. Schritt: FEHLT NOCH □