

8. Komplexe Wegintegrale

Im Folgenden sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ($a < b$) und $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen.

Definition

- (1) Ist φ auf I stetig, so setze: $\int_a^b \varphi(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt$; $\int_b^a \varphi(t) dt := -\int_a^b \varphi(t) dt$; $\int_a^a \varphi(t) dt := 0$
- (2) φ heißt auf I **differenzierbar** (db) $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$ sind auf I differenzierbar. In diesem Fall: $\varphi' := (\operatorname{Re} \varphi)' + i(\operatorname{Im} \varphi)'$
- (3) φ heißt auf I **stetig differenzierbar** $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$ sind auf I stetig differenzierbar.

Satz 8.1

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $\varphi(I) \subseteq D$ und φ auf I differenzierbar.

Dann ist $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar auf I und $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in I$.

Beweis

Übung! ■

Satz 8.2

- (1) Sei φ stetig auf I und $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\Phi(s) := \int_a^s \varphi(t) dt$. Dann ist Φ stetig differenzierbar auf I und $\Phi' = \varphi$ auf I
- (2) Sei φ auf I stetig differenzierbar $\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Beweis

Übung! ■

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg (also γ stetig).

- (1) $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$ **Träger von γ**
- (2) γ heißt **geschlossen** $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
- (3) γ heißt **glatt** $\Leftrightarrow \gamma$ ist auf $[a, b]$ stetig differenzierbar.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ und $\gamma_j := [a_j, a_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ seien Wege ($j = 1, \dots, n$) mit $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ ($j = 1, \dots, n-1$).

Definiere $\gamma : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_j, a_{j+1}]$.

Dann ist γ ein Weg und man schreibt: $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$

γ heißt **stückweise glatt** $:\Leftrightarrow \gamma_1, \dots, \gamma_n$ sind glatt.

Bemerkungen:

(1) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg. γ ist stückweise glatt $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_{n+1} \in [a, b] : a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$ und $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ ist glatt ($j = 1, \dots, n$)

(2) stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

(3) glatt \Rightarrow stückweise glatt

Beispiel

$\gamma_1(t) := t$ ($t \in [0, 1]$), $\gamma_2(t) := 1 + i(t-1)$ ($t \in [1, 2]$).

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$, γ_1, γ_2 sind glatt, $\gamma'_1(t) = 1 \neq \gamma'_2(1) = i \Rightarrow \gamma$ in 1 nicht differenzierbar.

Wie in \mathbb{R} zeigt man: Ist $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so gilt: $|\int_a^b \phi(t) dt| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$.

Für den Rest des Paragraphen sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stets ein Weg (also stetig).

Definition

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$; γ^- heißt der zu γ **inverse Weg**.

Klar: $\text{Tr}(\gamma) = \text{Tr}(\gamma^-)$

Definition

Ist γ glatt, so setze $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt (mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ glatt), so setze:

$L(\gamma) := L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$

$L(\gamma)$ heißt **Weglänge** von γ .

Beispiele:

(1) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$ ($t \in [0, 1]$), γ ist glatt.

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1. \implies L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$$

(2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

$$\gamma \text{ ist glatt, } \gamma'(t) = rie^{it}, |\gamma'(t)| = r \implies L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition

Sei $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, bijektiv und $h(\alpha) = a, h(\beta) = b$. Ist γ stückweise glatt, so setze $\Gamma := \gamma \circ h$, also $\Gamma(s) = \gamma(h(s))$ ($s \in [\alpha, \beta]$).

Dann ist Γ ein stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\Gamma) = \text{Tr}(\gamma)$.

h heißt eine **Parametertransformation**. Man schreibt $\Gamma \sim \gamma$.

Definition

Sei $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$;

Ist γ glatt, so setze $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ glatt, so setze $\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz$.
 $\int_{\gamma} f(z) dz$ heisst ein (komplexes) **Wegintegral** (von f längs γ)

Beispiel

$$\gamma(t) := 3e^{it} (t \in [0, 2\pi])$$

$$(1) \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-it} i 3e^{it} dt = 18\pi i.$$

$$(2) \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} 9e^{2it} i 3e^{it} dt = 0.$$

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 8.3

γ sei stückweise glatt, $f, g : \text{Tr}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ seien stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und Γ sei ein stückweise glatter Weg mit $\Gamma \sim \gamma$.

$$(1) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$(2) \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \text{ (und } L(\Gamma) = L(\gamma))$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Satz 8.4

γ und f seien wie in 8.3. f_n sei eine Folge in $C(\text{Tr}(\gamma))$ und es sei $M := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f(z)|$. Dann:

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma)$$

(2) Konvergiert die Folge (f_n) auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmässig gegen f , so gilt:

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz (n \rightarrow \infty)$$

$$(\text{also: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)) dz)$$

Beweis

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$

8. Komplexe Wegintegrale

(2) $M_n := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)|$. Voraussetzung $\implies M_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \stackrel{(1)}{\leq} M_n L(\gamma). \quad \blacksquare$$

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$. f besitzt auf D eine **Stammfunktion** (SF) : $\iff \exists F \in H(D) : F' = f$ auf D .

Satz 8.5

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$ besitze auf D die Stammfunktion F und γ sei ein stückweiser glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis

O.B.d.A: γ glatt. $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{8.2}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$. \blacksquare

Folgerung 8.6

D , f und γ seien wie in 8.5. Ist γ geschlossen $\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beispiel 8.7

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$); γ ist geschlossen.

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k(z) := (z - z_0)^k$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$)

(1) Sei $k \neq -1$. f_k hat auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ die Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$.

$$8.6 \implies \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$$

(2) Sei $k = -1$: $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$.

Also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Wegen 8.6: Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion!

Aber: im Falle $z_0 = 0$ hat die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\text{Log} z$ auf \mathbb{C}_- .

Satz 8.8

Sei $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ glatte Wege mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ ($j = 1, \dots, n$)

Dann existiert ein stückweise glatter Weg γ mit: $\text{Tr}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\gamma_j)$, $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots +$

$L(\gamma_n)$ und $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad \forall f \in C(\text{Tr}(\gamma))$

Beweis

mit 8.3(2). ■

Beispiel

$\gamma_1(t) = t, (t \in [0, 1]); \gamma_2(t) = 1 + it, t \in [0, 1]$

$\tilde{\gamma}_2(t) := 1 + i(t - 1), t \in [1, 2]$. Dann: $\tilde{\gamma}_2 \sim \gamma_2$; $\gamma := \gamma_1 \oplus \tilde{\gamma}_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$.

Satz 8.9

Sei (K_n) eine Folge kompakter Mengen in \mathbb{C} mit: $K_n \neq \emptyset$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ und $d(K_n) := \max_{z, w \in K_n} |z - w| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

Beweis

Wähle in jedem K_n ein z_n . Für $n, k \in \mathbb{N} : z_n, z_{n+k} \in K_n$

Dann: $|z_n - z_{n+k}| \leq d(K_n) \implies (z_n)$ ist eine Cauchy-Folge $\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : z_n \rightarrow z_0$.

Sei $N \in \mathbb{N}$. $z_n \in K_N \forall n \geq N$. K_N abgeschlossen $\implies z_0 \in K_N$. ■

