

# Kapitel 1

## Affine Varietäten

### § 1 Polynomringe

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 1$ ,  $k[X_1, \dots, X_n]$  Polynomring

#### Bemerkung + Erinnerung 1.1

a) Für  $a_1, \dots, a_n \in k$  ist

$$\begin{array}{ccc} \phi_{a_1, \dots, a_n} : k[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & k \\ f & \mapsto & f(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

ein Homomorphismus von Ringen

b) Ist  $A$  eine  $k$ -Algebra,  $a_1, \dots, a_n \in A$ , so ist  $f \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$  ein  $k$ -Algebra Homomorphismus  $k[X_1, \dots, x_n] \rightarrow A$

c) (UAE des Polynomrings)

Sei  $A$  eine  $k$ -Algebra,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dann gibt es genau einen  $k$ -Algebra Homomorphismus  $\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  mit  $\phi(X_i) = a_i$

#### Folgerung 1.2

Jede endlich erzeugte  $k$ -Algebra ist Faktoring eines Polynomrings.

*Denn:* Seien  $a_1, \dots, a_n$  Erzeuger von  $A$  als  $k$ -Algebra. Sei  $\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  der  $k$ -Algebra Homomorphismus mit  $\phi(X_i) = a_i$ . (Bem. + Erinn. 1.1 c))

$\phi$  ist surjektiv

$$\xrightarrow{\text{Homomorphiesatz}} A \cong k[X_1, \dots, X_n] / \text{Kern}(\phi)$$

#### Erinnerung 1.3 (Euklidischer Algorithmus)

Für  $f, g \in k[X]$  mit  $g \neq 0$  gibt es (eindeutige!)  $q, r \in k[X]$  mit  $f = qg + r$  und  $\deg(r) < \deg(g)$  oder  $r = 0$ .

#### Folgerung 1.4

$k[X]$  ist Hauptidealring

#### Beweis

Sei  $I \subset [X]$  Ideal.  $I = (0)$  wird von 0 erzeugt. Sei also  $I \neq 0$ . Wähle:  $g \in I - \{0\}$  mit kleinstem Grad.

**Beh.:**  $I = (g)$ , *denn:* Sei  $f \in I - \{0\}$ . Schreibe  $f = q \cdot g + r$ .  $\deg(r) < \deg(g)$  und  $r = f - qg \in I$ .  
 $\Rightarrow r = 0$  □

### Folgerung 1.5

$k[X]$  ist faktoriell (eindeutige Zerlegung in Primfaktoren).

*Erinnerung:*  $R$  Ring,  $f \in R$  keine Einheit

$$f \text{ unzerlegbar} \Leftrightarrow \text{Aus } f = g \cdot h \text{ folgt } g \in R^\times \text{ oder } h \in R^\times$$

### Proposition 1.6

$k[X_1, \dots, X_n]$  ist faktoriell für jedes  $n \geq 1$ .

#### Beweis (Beweisidee)

Induktion über  $n$ ,  $n = 1$  ist Folgerung 1.5.

Für Induktionsschritt:  $k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$  □

### Satz 1 (Hilbertscher Basissatz)

Jedes Ideal in  $k[X, \dots, X_n]$  ist endlich erzeugbar. *Kurz:*  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch

### Definition 1.7

Ein Ring  $R$  heißt **noethersch**, wenn jedes Ideal in  $R$  endlich erzeugbar ist.

### Satz 1'

$R$  noethersch  $\Rightarrow R[X]$  noethersch. Daraus folgt Satz 1:  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch mit Induktion über  $n$ .

#### Beweis (Beweis von Satz 1)

*Annahme:* Es gibt Ideal  $I \subset R[X]$ , das sich nicht von endlich vielen Elementen erzeugen lässt.

Wähle  $f_0 \in I - \{0\}$  vom kleinsten Grad. Wähle  $f_1 \in I - \{f_0\}$  vom kleinsten Grad. Wähle für  $i \geq 2 \in I - \{f_0, f_1, \dots, f_{i-1}\}$  vom kleinsten Grad. Sei  $a_i$  der Leitkoeffizient von  $f_i$ , sei  $J \subset R$  das von den  $a_i, i \in \mathbb{N}$  erzeugte Ideal.

$J$  ist endlich erzeugt.  $\exists J$  wird erzeugt von  $a_1, \dots, a_n \Rightarrow$  es gilt  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $a_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$

Sei

$$g := f_{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i X^{d_{n+1}-d_i}$$

$\Rightarrow \deg(g) < \deg(f_{n+1})$  Aber:  $g \notin (f_0, \dots, f_n)$ , da sonst auch  $f_{n+1} \in (f_0, \dots, f_n)$  wäre.  $\nexists$  □

### Bemerkung 1.8

Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subset R$  Ideal. Dann ist auch  $R/I$  noethersch.

#### Beweis

Sei  $J \subset R/I$  ein ideal. Sei  $\Pi : R \rightarrow R/I$  die Restklassenabbildung.  $\tilde{J} := \Pi^{-1}(J)$  ist nach Voraussetzung endlich erzeugbar. Die Bilder der Erzeuger von  $\tilde{J}$  in  $J$  erzeugen  $J$ . □

### Folgerung 1.9

Jede endlich erzeugbare  $k$ -Algebra ist noethersch.

#### Beweis

Siehe Folgerung 1.2, Bemerkung 1.8 und Satz 1 □

**Proposition 1.10**

Ein Ring  $R$  ist genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$  von Idealen in  $R$  stationär wird. (Das heißt es gibt  $n_0$  mit  $I_n = I_{n_0}$  für alle  $n \geq n_0$ )

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$  Kette von Idealen. Sei  $I := \bigcup_{d=0}^{\infty} I_d$ .  $I$  ist Ideal.  $I$  ist endlich erzeugbar,  $I = (a_1, \dots, a_r)$ ,  $a_i \in I_{n_i}$ ,  $n_0 = \max_{i=1}^r n_i \Rightarrow I_n = I_{n_0}$  für  $n \geq n_0$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $I$  Ideal,  $\mathcal{I} := \{J \subset I \mid J \text{ Ideal in } R, J \text{ endlich erzeugt}\}$ .  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ , da  $(0) \in \mathcal{I}$ .

*Behauptung:*  $\mathcal{I}$  enthält ein maximales Element  $I_0$ .

Wäre  $I_0 \neq I$ , so gäbe es  $a \in I - I_0$ . Dann wäre auch  $(I_0, a) \in \mathcal{I}$  zu  $I_0$  maximal.

*Beweis der Behauptung:* Ist  $(0)$  nicht maximal, so gibt es  $(0) \subsetneq I_1 \subset \mathcal{I}$ . Ist auch  $I_1$  nicht maximal, so gibt es  $I_1 \subsetneq I_2 \in \mathcal{I}$ .  $\Rightarrow$  erhalte Kette  $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

Nach Voraussetzung wird diese Kette stationär ab einem  $n_0$ .  $\Rightarrow I_0$  ist maximal in  $\mathcal{I}$ .  $\square$

## § 2 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei  $k$  ein Körper.

### Definition 2.1

Eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt **affine Varietät**, wenn es eine Menge  $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  von Polynomen gibt, sodass

$$V = V(F) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

### Beispiel

$$\emptyset = V(1) = V(k[X_1, \dots, X_n])$$

$$k^n = V(0) = V(\emptyset)$$

$$V(X(X-1)(Y-1)) \text{ affine Varietät}$$

### Bemerkung 2.2

i) Für  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(F_1) \supseteq V(F_2)$

ii)  $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$

iii) für  $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ist

$$V(F) = V((F))$$

wobei  $(F)$  das von  $F$  erzeugte Ideal ist.

iv) Für jede affine Varietät  $V \subseteq k^n$  gibt es endlich viele Polynome  $f_1, \dots, f_r$  mit

$$V = V(f_1, \dots, f_r)$$

### Beweis

iii) jedes  $f \in (F)$  hat die Form  $f = \sum_{i=1}^r r_i f_i$  mit  $r_i \in k[X_1, \dots, X_n], f_i \in F$ .

$$x \in V(F) \Rightarrow f_i(x) = 0, i = 1, \dots, r$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in V((F))$$

□

### Definition 2.3

Für eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

das **Verschwindungsideal**.

### Beispiel

$$\text{i) } I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$$

$$I(k^n) = (0) \text{ falls } k \text{ unendlich ist}$$

$$\text{ii) } I((0,0)) = (X, Y)$$

### Bemerkung 2.4

Für jede Teilmenge  $V \subseteq k^n$  gilt:

i)  $I(V)$  ist Radikalideal

ii)  $V \subseteq V(I(V))$



## § 3 Zariski Topologie

Sei  $k$  ein Körper

### Definition + Bemerkung 3.1

Die affinen Varietäten in  $k^n$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese Topologie heißt **Zariski-Topologie**.

*Schreibweise:*  $\mathbb{A}^n(k)$  sei  $k^n$  mit dieser Topologie

### Beweis

i)  $k^n = V(0), \emptyset = V(k[X_1, \dots, X_n])$  sind affine Varietäten

ii) Seien  $V_1 = V(I_1)$  und  $V_2 = V(I_2)$  affine Varietäten.

*Behauptung:*  $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$

Zeige genauer:  $V(I_1 \cdot I_2) \stackrel{a)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \stackrel{b)}{\subseteq} V(I_1 \cap I_2) \stackrel{c)}{\subseteq} V(I_1 \cdot I_2)$

c) folgt aus  $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$

b) folgt aus  $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1$  und  $I_1 \cap I_2 \subseteq I_2$

a) Sei  $x \in V(I_1 \cdot I_2), x \notin V_1$

Dann gibt es  $f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \stackrel{x \in V(I_1 \cdot I_2)}{=} 0$  für alle  $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$

iii) Seien  $V_i = V(I_i), i \in J$  ( $J$  beliebige Menge), affine Varietäten.

*Behauptung:*

$$\bigcap_{i \in J} V_i = V\left(\underbrace{\bigcup_{i \in J} I_i}_{=\sum_{i \in J} I_i}\right)$$

□

### Beispiel 3.2

$$n = 1, V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \Leftrightarrow V \text{ endlich oder } V = k$$

### Bemerkung 3.3

Jeder Punkt  $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

### Beweis

$$\{x\} = V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$$

□

### Folgerung 3.4

Ist  $k$  endlicher Körper, so ist die Zariski-Topologie auf  $k^n$  die diskrete Topologie.

### Bemerkung 3.5

Ist  $k$  unendlich, so ist  $\mathbb{A}^n(k)$  nicht hausdorffsch.

### Beweis

$n = 1$ : ✓

$n \geq 2$ :  $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$

☞  $x$  und  $y$  liegen auf der  $X_1$ -Achse, das heißt

$$x, y \in V(X_2, \dots, X_n) =: W$$

Seien  $U_x, U_y$  offene Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Dann sind

$$\left. \begin{array}{l} V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \\ \text{und } V_y = V(I_y) = \mathbb{A}^n(k) - U_y \end{array} \right\} \text{ affine Varietäten}$$

Da  $x \in W$  gibt es  $f \in I_x$  mit  $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(W) \Rightarrow V(f) \cap W$  endlich  $\Rightarrow V_x \cap W$  endlich.

Genauso  $V_y \cap W$  endlich  $\Rightarrow (V_x \cup V_y) \cap W$  endlich.

$$\Rightarrow U_x \cap U_y \cap W \neq \emptyset$$

□

### Bemerkung 3.6

Sei  $k$  unendlicher Körper.

- i) Für jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n] - k$  (nicht-konstante Polynome) ist  $D(f) := \mathbb{A}^n(k) - V(f)$  offene Teilmenge.
- ii) Die  $D(f)$  bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

### Beweis

- ii) Sei  $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  offen.

*Zeige:* Zu jedem  $x \in U$  gibt es  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $x \in D(f) \subseteq U$

*denn:* Sei  $V := \mathbb{A}^n(k) - U$ ,  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ .

Da  $x \notin V$  gibt es  $f \in I$  mit  $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$  und  $D(f) \subseteq U$ , da  $V(f) \supseteq V(I) = V$  □

### Definition + Erinnerung 3.7

- a) Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Definiere Topologie auf  $Y$  durch:

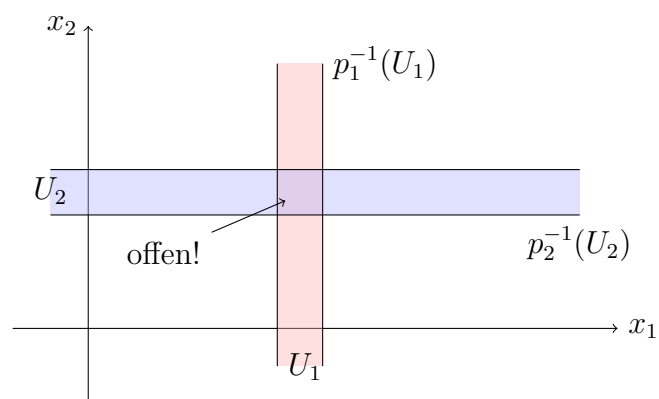
$$U \subseteq Y \text{ offen} \Leftrightarrow \exists \tilde{U} \subseteq X \text{ offen mit } U = \tilde{U} \cap Y$$

Diese Topologie heißt **Spurtopologie**.

- b) Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät. Dann heißt die Spurtopologie auf  $V$  auch **Zariski-Topologie**.
- c) Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume,  $X_1 \times X_2$  das kartesische Produkt (als Mengen),

$$p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i (i = 1, 2)$$

die Projektionen. Definiere die **Produkttopologie** auf  $X_1 \times X_2$  als die grösste Topologie, sodass  $p_1$  und  $p_2$  stetig sind. Das ist die kleinste Topologie, in der alle Mengen  $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$  offen sind, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen ist.



**Frage**

Ist die Zariski-Topologie auf  $k^2$  die Produkttopologie auf  $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ ?



## § 4 Irreduzible Komponenten

### Definition + Bemerkung 4.1

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- $X$  heißt **reduzibel**, wenn es abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subseteq X$  gibt mit  $A \cup B = X$  und  $A \neq X \neq B$ . Eine Teilmenge von  $X$  heißt irreduzibel, wenn sie mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.
- Eine (bezüglich Inklusion) maximale irreduzibel Teilmenge von  $X$  heißt **irreduzible Komponente** von  $X$
- Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen (Übung)

### Beispiel 4.2

Sei  $X$  nichtleerer Hausdorffraum. Dann sind die einelementigen Teilmengen die irreduziblen Komponenten.

Denn: Sei  $X$  hausdorffsch,  $x \neq y \in X$ , zeige:  $X$  ist irreduzibel

Seien  $U_x, U_y$  offene Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$

$$\Rightarrow V_x \cup V_y = X, V_x = X - U_x, V_y = X - U_y$$

$$x \notin V_x \neq X \neq V_y \not\ni y$$

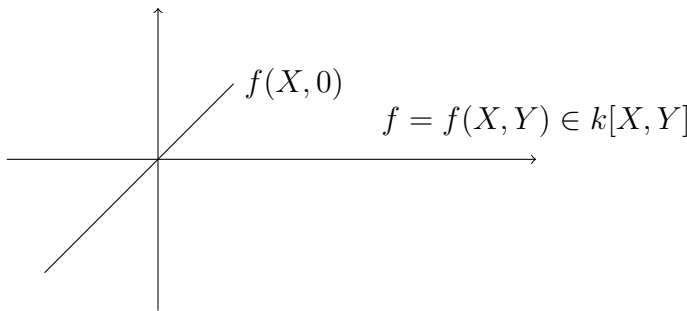
### Beispiel 4.3

$\mathbb{A}^1(k)$  ist irreduzibel, wenn  $k$  unendlich ist. Denn: echte abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{A}^1(k)$  sind endlich.

### Frage

Ist  $\mathbb{A}^2(k)$  irreduzibel? Sei  $\mathbb{A}^2(k) = V_1 \cup V_2, V_i = V(I_i)$ . Seien  $f_1, f_2 \in I_1$  bzw.  $I_2, f_i \neq 0$ .  
 $\Rightarrow V_i \subset V(f_i), i = 1, 2$

$$\Rightarrow \underbrace{V(f_1) \cup V(f_2)}_{=V(f_1 \cdot f_2)} = \mathbb{A}^2$$



$$V(f) \cup V(Y) = V(f(X, 0)) \subset \mathbb{A}^1(k)$$

Entweder  $V(f(X, 0))$  ist endlich oder  $f(X, 0) = 0$ , dann ist durch  $Y$  teilbar. **Genauso:**  $f$  ist durch  $Y - \alpha X$  teilbar für jedes  $\alpha \in k \Rightarrow f = 0$ . **Antwort auf die Frage:** ja!

### Proposition 4.4

Eine affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  ein Primideal ist.

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f \cdot g \in I(V)$ . Sei  $f \notin I(V)$ , zu zeigen:  $g \in I(V)$

$$f \notin I(V) \Rightarrow \exists x \in V \text{ mit } f(x) \neq 0$$

Nach Voraussetzung ist  $V \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$

$$\Rightarrow V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V) \stackrel{V \text{ irred.}}{\Rightarrow} V(g) \cap V = V$$

$$\Rightarrow V \subseteq V(g) \Rightarrow g \in I(V)$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $I(V)$  Primideal,  $V = V_1 \cup V_2$  mit abgeschlossenen Teilmengen  $V_1, V_2$ , also  $V_i = V(I_i), i = 1, 2$ , für Ideale  $I_1, I_2$ . Sei  $V \neq V_1$ , also  $V \subsetneq V(I_1)$ .

$$\Rightarrow \exists x \in V, f \in I_1 \text{ mit } f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(V)$$

Wegen  $V = V_1 \cup V_2 = V(I_1) \cup V(I_2) \stackrel{3.1}{=} V(I_1 \cdot I_2)$  ist  $I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow f \cdot g \in I(V)$  für jedes  $g \in I_2$

$$\stackrel{f \notin I(V)}{\Rightarrow} \stackrel{I(V) \text{ prim}}{g \in I(V)} \text{ für jedes } g \in I_2$$

$$\Rightarrow I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow \underbrace{V(I_2)}_{=V_2} \supseteq \underbrace{V(I(V))}_{=V}$$

□

### Folgerung 4.5

Eine affine Varietät  $V \subset \mathbb{A}^n(k)$  ist irreduzibel  $\Leftrightarrow A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$  ist nullteilerfrei.

### Satz 2

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät. Dann gilt:

- $V$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.
- $V$  hat nur endlich viele irreduzible Komponenten, diese sind eindeutig bestimmt.

### Beweis

- Sei  $\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \text{ affine Varietät, } V \text{ ist nicht endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten}\}$

$$\mathcal{I} = \{I(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

zu zeigen:  $\mathcal{B} = \emptyset$ , also auch  $\mathcal{I} = \emptyset$

Wäre  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ , so enthielte  $\mathcal{I}$  ein maximales Element  $I_0 = I(V_0)$  für ein  $V_0 \in \mathcal{B}$ . (denn:  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch, jede aufsteigende Kette von Elementen in  $\mathcal{I}$  wird also stationär.) Da  $V_0 \in \mathcal{B}$  ist  $V_0$  irreduzibel.

Sei also  $V_0 = V_1 \cup V_2$  mit abgeschlossenen Teilmengen  $V_1 \neq V_0 \neq V_2$  von  $V_0$ . Aus  $V_i \subsetneq V_0$  folgt  $I(V_i) \supsetneq \underbrace{I(V_0)}_{=I_0}$  (Bem. 2.4 iv))

$$\Rightarrow I(V_i) \notin \mathcal{I} \Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1, 2$$

$\Rightarrow V_0$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten, also auch  $V_0 \notin \mathcal{B}$

- Sei  $V = V_1, \dots, V_r$  mit irreduziblen Varietäten  $V_1, \dots, V_r$ .  $\nexists V_i \not\subseteq V_j$  für  $i \neq j$  (sonst lasse  $V_i$  weg)

**Behauptung:** Dann ist jedes  $V_i$  irreduzible Komponente.

denn: Sei  $W \subseteq V$  irreduzible Komponente mit  $V_i \subseteq W$ . Es gilt

$$W = \bigcup_{j=1}^r (V_j \cap W)$$

$$\stackrel{W \text{ irred.}}{\Rightarrow} \exists j \text{ mit } V_j \cap W = W, \text{ also } W \subseteq V_j \Rightarrow V_i \subseteq V_j \Rightarrow i = j \Rightarrow W = V_i$$

*Eindeutigkeit:* Sei  $W$  irreduzible Komponente von  $V$ . Aus  $W = \bigcup_{j=1}^r (V_j \cap W)$  folgt  $W \cap V_j = W$  für ein  $j \Rightarrow W \subseteq V_j \xrightarrow{W \text{ irred. Komp.}} W = V_j$   $\square$

**Proposition 4.6**

Die irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$  ist enthalten in einer irreduziblen Komponente von  $X$ .

## § 5 Der Hilbertsche Raum

$V$  affine Varietät in  $\mathbb{A}^n(k) \Rightarrow V(I(V)) = V$ ;  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  Ideal  $\Rightarrow I(V(I)) \supseteq I$

**Beispiel**

$$I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$$

$$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$$

**Satz 3**

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Ist  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$  Ideal, so ist  $V(I) \neq \emptyset$ .

b) Für jedes Ideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  gilt

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Der Beweis benutzt

**Satz 3'**

Ist  $k$  Körper,  $n \geq 1$ ,  $m \subset k[X_1, \dots, X_n]$  maximales Ideal, so ist  $L := k[X_1, \dots, X_n]/m$  algebraische Körpererweiterung von  $k$ . Das heißt für jedes  $\alpha \in L$  gibt es ein  $f \in k[X]$  mit  $f(\alpha) = 0$ , also gibt es  $d \geq 1$  und  $b_0, \dots, b_{d-1} \in k$  mit

$$\alpha^d + b_{d-1}\alpha^{d-1} + \dots + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$k(\alpha) := k[X]/(f)$  ist Körper, der kleinste Teilkörper von  $L$ , der  $k$  und  $\alpha$  enthält.

**Folgerung 5.1**

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so gibt es Bijektion zwischen den Mengen der

- i) Punkte  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in  $k^n$
- ii) Ideale  $m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$
- iii) maximalen Ideale in  $k[X_1, \dots, X_n]$

**Beweis**

(i) $\Rightarrow$ (ii): ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii):  $m_x$  ist maximales Ideal. Die Abbildung  $\varphi_x : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k, X_i \mapsto x_i, f \mapsto f(x)$  ist der Einsetzungshomomorphismus.  $\text{Kern}(\varphi_x) = m_x$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $m$  maximales Ideal,  $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/m \xrightarrow[\text{Satz 3'}]{\sim} k \Rightarrow m = \text{Kern}(\varphi)$

Sei  $x_i = \varphi(X_i)$ , dann ist  $\varphi = \varphi_x$  für  $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow m = m_x$  □

**Beweis (Beweis von Satz 3)**

a) Sei  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$  echtes Ideal. Sei  $m$  maximales Ideal mit  $I \subseteq m$  (gibt es !)  $\Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$ , da  $m = m_x$  für ein  $x \in k^n$  und  $\{x\} = V(m_x)$

**Beweis (von Satz 3')**

Sei  $x_i \in L$  die Restklasse von  $X_i$ . Zu zeigen:  $x_1, \dots, x_n$  sind algebraisch über  $k$ .

Induktion über  $n$ :

$n=1$ :  $m = (f)$  für ein irreduzibles Polynom  $f \Rightarrow L = k[X]/(f)$  ist  $k$ -Vektorraum der Dimension  $d = \deg(f)$

$n \geq 2$ : *Annahme*:  $x_1$  ist transzendent.

Dann ist  $k' = k(x_1) \cong \underbrace{k(X_1)}_{=\text{Quot}(k[X_1])}$  Teilkörpererweiterung von  $L$ .  $L$  wird über  $k'$

von  $x_2, \dots, x_n$  erzeugt  $\Rightarrow L \cong k'[X_2, \dots, X_n]/m'$  für ein maximales Ideal  $m'$  in  $k'[X_2, \dots, X_n]$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $L$  algebraisch über  $k'$ , das heißt:

$$\begin{aligned} x_i^{d_i} + \sum_{j=0}^{d_i-1} a_{ij} x_i^j &= 0 & i = 2, \dots, n, d_i \geq 1 & \quad a_{ij} \in k' \\ a_{ij} &= \frac{c_{ij}}{b_{ij}} & b_{ij}, c_{ij} \in k[X_1] & \quad \square \end{aligned}$$

(1) Sei  $R \subset k'$  die von den  $a_{ij}$  erzeugte  $k$ -Algebra.

(2) Dann sind  $x_1, \dots, x_n$  ganz über  $R \Rightarrow L$  ist ganze Ringerweiterung von  $R$

(3)  $\Rightarrow R = k$  oder  $R$  ist kein Körper.

(1)  $\Rightarrow R = k$  oder  $R$  ist kein Körper.

$R = k \Rightarrow$  für  $\tilde{k} = k(x_2, \dots, x_n)$  ist  $L = \tilde{k}[X_1]/m$ , also algebraisch abgeschlossen.

$R \neq k \Rightarrow k(X_1)$  ist nicht endlich erzeugbar als  $k$ -Algebra.

(2)  $\Rightarrow R$  ist Körper: Sei  $a \in R \setminus \{0\}$ . In  $L$  gibt es  $\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j \text{ für ein } d \geq 1, b_j \in R$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-j} = 0, 1 = a \left( - \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-1-j} \right)$$

b) Sei  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n], g \in I(V(I))$ .

*Zu zeigen*: es gibt  $d \geq 0$  mit  $g^d \in I$ .

Wähle Erzeuger  $f_1, \dots, f_n$  von  $I$  (geht nach Satz 1). Betrachte in  $k[X_1, \dots, X_n, Y]$  das von  $f_1, \dots, f_n$  und  $g \cdot Y - 1$  erzeugte Ideal  $J$ .

*Behauptung*:  $V(J) = \emptyset$

*denn*: Sei  $x = (x_1, \dots, x_n, y) \in V(J)$

Dann ist  $f_i(x) = 0$  für  $i = 1, \dots, m. \Rightarrow$  für  $x' = (x_1, \dots, x_n)$  ist  $f_i(x') = 0 \Rightarrow x' \in V(I) \Rightarrow g(x') = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow (gY - 1)(x) = g(x) \cdot y - 1 = -1 \neq 0$

Dann ist nach Satz 3 a)  $J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gY - 1) \text{ für geeignete } b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$$

Sei  $R = k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^m \bar{b}_i f_i \text{ für } \bar{b}_i = b_i \text{ mod } (gY - 1)$$

Es gilt:

$$R \cong k[X_1, \dots, X_n][\frac{1}{g}]$$

$$\bar{b}_i = \frac{a_i}{g^{d_i}}, a_i \in k[X_1, \dots, X_n], d_i \geq 0$$

$\Rightarrow$  Für  $d = \max d_i$  gilt

$$g^d = \sum_{i=1}^n \underbrace{(g^d \bar{b}_i)}_{\in k[X_1, \dots, X_n]} \cdot f_i \in I$$

□

### Folgerung 5.2

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{V}_n := \{V \subseteq k^n : V \text{ affine Varietät}\}$$

$$\mathcal{I}_n := \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] : I \text{ Radikalideal}\}$$

Dann sind

$$I : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V)$$

$$V : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I)$$

bijektiv und zueinander invers.

### Bemerkung 5.3

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in  $V$  bijektiv den maximalen Idealen in

$$k(V) = A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

### Beweis

Die maximalen Ideale in  $A(V)$  entsprechen bijektiv den maximalen Idealen in  $k[X_1, \dots, X_n]$ , die  $I(V)$  enthalten, also (Folgerung 5.1) den Punkten in  $k^n$ , die in  $V$  liegen. □

$$x = (x_1, \dots, x_n), m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) = I(\{x\})$$

$$I(V) \subseteq I(\{x\})$$

$$V = V(I(V)) \supseteq V(I(\{x\})) = \{x\}$$

## § 6 Morphismen affiner Varietäten

### Definition + Bemerkung 6.1

Sei  $k$  ein Körper,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten.

- a) Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus**, wenn es Polynome  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt mit

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

für alle  $x \in V$ .

- b) Ein Morphismus  $f : V \rightarrow W$  heißt **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $g : W \rightarrow V$  gibt mit

$$g \circ f = \text{id}_W \text{ und } f \circ g = \text{id}_V$$

- c) Die affinen Varietäten über  $k$  bilden mit den Morphismen aus a) eine Kategorie  $\text{Aff}(k)$ .

- d) Jeder Morphismus  $f : V \rightarrow W$  ist Einschränkung eines Morphismus  $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$

### Beispiel 6.2

- 1) • Einbettungen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}^m(k) (n \leq m) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

- Projektionen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}^m(k) (n \geq m) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

- Permutation der Komponenten

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

- 2) Jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  definiert einen Morphismus

$$f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^1(k), x \mapsto f(x)$$

- 3) Sei  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ .

$f : V \rightarrow W$ ,  $x \mapsto (x^2, x^3)$  ist Morphismus.  $f$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y}{x} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$g(f(x)) = g(x^2, x^3) = \frac{x^3}{x^2} = x \text{ (für } x \neq 0)$$

$$f(g(x, y)) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}\right)$$

Ist  $k$  unendlich, so ist  $g$  kein Morphismus!

- 4) Sei  $\text{char}(k) = p > 0$

$$f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$$

heißt **Frobenius-Homomorphismus**.

Die Fixpunkte von  $f$  sind genau die Punkte, deren Koordinaten alle in  $\mathbb{F}_p$  liegen („ $\mathbb{F}_p$ -wertige Punkte“)

$$(a^p = a \Leftrightarrow a \text{ Nullstelle von } X^p - X \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_p)$$

### Bemerkung 6.3

Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

#### Beweis

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten,  $f : V \rightarrow W$  Morphismus. Sei  $Z \subseteq W$  abgeschlossen, also  $Z = V(J)$  für ein Ideal  $J \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ . Sei  $I = \{g \circ f \in k[X_1, \dots, X_n] : g \in J\}$ .

*Behauptung:*  $V(I) = f^{-1}(Z)$

*denn:*

$$x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow f(x) \in Z \Leftrightarrow f(x) \in V(J) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \forall g \in J \Leftrightarrow x \in V(I) \quad \square$$

### Definition + Bemerkung 6.4

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät.

a)  $k[V] := \{f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ ist Morphismus}\}$  heißt **affiner Koordinatenring** von  $V$ .

b)

$$k[V] \cong A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

#### Beweis

b) Sei  $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[V], f \mapsto f|_V$  Einschränkungshomomorphismus.  $\varphi$  ist surjektiv (Bemerkung 6.1 d))

$$\text{Kern}(\varphi) = I(V) \xrightarrow{\text{Homomorphiesatz}} \text{Behauptung} \quad \square$$

### Proposition 6.5

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietät.

a) Jeder Morphismus  $\varphi = f : V \rightarrow W$  induziert  $k$ -Algebrahomomorphismus

$$f^\# : k[W] \rightarrow k[V], g \mapsto g \circ f$$

b) Die Abbildung  $\text{Mor}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_k(k[W], k[V]), f \mapsto f^\#$  ist bijektiv.

#### Beweis

a) ✓

b) *injektiv:* Seien  $f, \tilde{f} : V \rightarrow W$  Morphismen mit  $f^\# = \tilde{f}^\#$

$$\Rightarrow g \circ f = g \circ \tilde{f} \text{ für alle } g \in k[W]$$

Insbesondere ist  $\underbrace{p_i \circ f}_{=f_i} = \underbrace{p_i \circ \tilde{f}}_{=\tilde{f}_i}$  für die Projektion

$$p_i : W \rightarrow \mathbb{A}^1(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$$\Rightarrow f = \tilde{f}$$

*surjektiv:* Sei  $\varphi : k[W] \rightarrow k[V]$   $k$ -Algebra-Homomorphismus.

Definiere  $f : V \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$  durch  $f(x) = (\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_n)(x))$

*Behauptung:*

(i)  $f^\# = \varphi$



(ii)  $f(V) \subseteq W$

Zu (i): für  $i = 1, \dots, m$  gilt:

$$f^\#(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i)$$

Da die  $p_i$   $k[V]$  erzeugen (als  $k$ -Algebra), folgt  $f^\# = \varphi$

Zu (ii): Sei  $g \in I(W)$ ,  $x \in V$

Zu zeigen:  $g(f(x)) = 0$

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & k[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[W] & \xrightarrow{\varphi} & k[V] \end{array}$$

Lifte  $\varphi$  zu  $\tilde{\varphi}$ . Wähle dazu für jedes  $i$  ein Urbild von  $\varphi(p_i)$ . Dann ist  $\tilde{\varphi}(I(W)) \subseteq I(V)$   
 $\Rightarrow g(f(x)) = g(\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)) = \tilde{\varphi}(g)(x) = 0$   $\square$

### Bemerkung 6.6

Seien  $V, W$  affine Varietäten über  $k$ ,  $\varphi : k[W] \rightarrow k[V]$   $k$ -Algebra-Homomorphismus und  $f = f_\varphi : V \rightarrow W$  mit  $f^\# = \varphi$ . Dann gilt für jedes  $x \in V$ :

$$m_{f(x)} = \varphi^{-1}(m_x)$$

### Beweis

$$m_x = \{f \in k[V] : g(x) = 0\}$$

$$\varphi^{-1}(m_x) = (f^\#)^{-1}(m_x) = \{h \in k[W] : h \circ f \in m_x\} = \{h \in k[W] : h(f(x)) = 0\} = m_{f(x)} \quad \square$$

### Beispiel 6.7

$$V = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

$$f : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow V, x \mapsto (x^2, x^3)$$

$$f^\# : \underbrace{k[V]}_{=k[X,Y]/(Y^2-X^3)} \rightarrow k[\mathbb{A}^1(k)] = k[T]$$

$$f^\#(\overline{X}) = T^2$$

$$f^\#(\overline{Y}) = T^3$$

$f^\#$  ist injektiv, aber nicht surjektiv! ( $T \notin \text{Bild}(f^\#)$ )

Es gilt aber: der von  $f^\#$  auf dem Quotientenkörper induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus  $f^\#(\frac{Y}{X}) = T$ .

### Satz 4

a) Die Zuordnung  $V \mapsto k[V]$  induziert einen volltreuen kontravarianten Funktor

$$\Phi : \underline{\text{Aff}}(k) \rightarrow \underline{k\text{-Alg}}^{\text{red}} \text{ (endl. erzeugte } k\text{-Alg.)}$$

b) Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so ist  $\Phi$  eine Äquivalenz von Kategorien.

**Beweis**

a) ✓

b) Noch zu zeigen: zu jeder  $k$ -Algebra  $A \in k\text{Alg}^{\text{red}}$  gibt es affine Varietät  $V$  über  $k$  mit  $k[V] \cong A$ .  $A$  werde als  $k$ -Algebra erzeugt von  $a_1, \dots, a_n$ . Sei  $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  der durch  $\varphi(X_i) = a_i$  definierte  $k$ -Algebra-Homomorphismus.  $\varphi$  ist surjektiv, da  $A$  von den  $a_i$  erzeugt wird.

$$\Rightarrow A \cong k[X_1, \dots, X_n] / \text{Kern}(\varphi)$$

Sei  $V = V(\text{Kern}(\varphi)) \Rightarrow I(V) \stackrel{\text{HNS}}{=} \sqrt{\text{Kern}(\varphi)} = \text{Kern}(\varphi) \Rightarrow k[V] = k[X_1, \dots, X_n] / I(V) \cong A$   
 $\square$

## § 7 Die Garbe der regulären Funktionen

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper

### Bemerkung 7.1

Sei  $V \subset \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät über  $k$ ,  $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Dann gilt:  $\bar{h}$  ist Einheit in  $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

### Beweis

$$\begin{aligned} V \cap V(h) &= V(I(V) + (h)) = \emptyset \xrightarrow{\text{HNS}} I(V) + (h) = k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow 1 = f + gh \text{ für gewisse } f \in I(V), g \in k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow \bar{1} = \bar{g} \cdot h \text{ in } k[V] \end{aligned}$$

□

### Definition + Bemerkung 7.2

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen,  $p \in U$ .

- Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  heißt **regulär in  $p$** , wenn es eine Umgebung  $U_p \subseteq U$  von  $p$  gibt und  $g, h \in k[V]$  mit  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_p$  und  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  für alle  $x \in U_p$ .
- $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  heißt **regulär**, wenn  $f$  in jedem  $p \in U$  regulär ist.
- $\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$  heißt  $k$ -Algebra (oder Ring) der **regulären Funktionen** auf  $U$ .
- Für jedes offene  $U \subseteq V$  ist

$$\alpha_U : k[V] \rightarrow \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$$

ein  $k$ -Algebra-Homomorphismus.

*Zusatz:* Ist  $U$  dicht, so ist  $\alpha_U$  injektiv (Übung?)

### Beispiel

- $V = \mathbb{A}^1(k), U = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$
- $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(k), U = V - \{0, 0\} \Rightarrow g = \frac{y}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$
- $f \in k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}(D(f))$

### Bemerkung 7.3

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen.

- Für offene Teilmengen  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  gilt:

- $\varrho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(U'), f \mapsto f|_{U'}$ , ist  $k$ -Algebra Homomorphismus
- $\varrho_{U''}^U = \varrho_{U''}^{U'} \circ \varrho_{U'}^U$

- Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U$  (mit Indexmenge  $I$ ). Dann gilt:

- Für  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  ist  $f = 0 \Leftrightarrow f|_{U_i} = 0 \forall i \in I$
- Für jedes  $i \in I$  sei  $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$  gegeben.

Ist  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$ , so gibt es  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i \in I$ .

### Folgerung + Definition 7.4

Die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$  ist eine Garbe von Ringen auf dem topologischen Raum  $V$ .

Allgemeiner:

- a) ist **Prägarbe**  
 b) ist die **Garbeneigenschaft**

### Beispiel

$X$  topologischer Raum,  $R$  ein Ring. Für  $U \subseteq X$  offen sei  $\mathcal{F}(U) = R, \varrho_U^U = \text{id}_R$ . Ist  $\mathcal{F}$  Garbe?  
 Prägarbe: JA! Garbe nein, falls es disjunkte offene Mengen gibt!

### Bemerkung 7.5

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen.

- a) Jede absteigende Kette  $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $V$  wird stationär („ $V$  ist noetherscher topologischer Raum“)  
 b)  $U$  ist quasikompakt, das heißt jede offene Überdeckung von  $U$  hat endliche Teilüberdeckung.

### Beweis

- a)  $V_i = V(I_i)$ ,  $I_i$  Ideal in  $k[V]$

$$V_i \supseteq V_{i+1} \Rightarrow I_{i+1} \supseteq I_i$$

$k[V]$  ist noethersch  $\Rightarrow$  Behauptung

- b) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U$ .

Besitzt  $(U_i)$  keine endliche Teilüberdeckung, so gibt es Folge  $(U_{I_k})_{k=1,2,\dots}$  mit  $U_{I_{k+1}} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{I_j}$ .

$W_k := \bigcup_{j=1}^k U_{I_j}$  ist offen in  $V \xrightarrow{a)} (W_k)$  wird stationär. □

### Satz 5

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät.

- a)  $\mathcal{O}_v(V) \cong k[V]$

- b)  $\mathcal{O}_v(\underbrace{D(f)}_{=\mathbb{A}^n(k) \setminus V(f)}) \cong k[V]_f = k[f]_{\{f^d: d \geq 0\}}$  für alle  $f \in k[V] \setminus \{0\}$

### Beweis

- a) Ist ein Spezialfall von b) für  $f = 1$ .

- b) Definiere

$$\begin{aligned} \alpha : k[V]_f &\rightarrow \mathcal{O}_V(D(f)) \\ \frac{g}{f^d} &\mapsto (x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)^d}) \quad (x \in D(f)) \end{aligned}$$

$\alpha$  wohldefiniert: Sei  $\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}}$  in  $k[V]_f$

$$\Rightarrow f^d (g_1 \cdot f^{d_2} - g_2 \cdot f^{d_1}) = 0 \text{ für ein } d \geq 0$$

$$\text{für } x \in D(f) \text{ ist } g_1(x)f(x)^{d_2} - g_2(x)f(x)^{d_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g_1(x)}{f(x)^{d_1}} = \frac{g_2(x)}{f(x)^{d_2}}$$

$\alpha$  injektiv: Sei  $\frac{g(x)}{f(x)^d} = 0$  für alle  $x \in D(f)$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \text{ für alle } x \in V$$

$$\Rightarrow f \cdot g = 0 \text{ in } k[V]$$

$$\Rightarrow g = 0 \text{ in } k[V]_f$$

$\alpha$  surjektiv: Sei  $g \in \mathcal{O}_V(D(f))$

$\Rightarrow$  für jedes  $p \in D(f)$  gibt es Umgebung  $U_p \subseteq D(f)$  und  $g_p, h_p \in k[V]$  mit  $g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \forall x \in U_p$

*Behauptung 1:*  $\bigoplus U_p = D(h_p)$

denn: es gibt  $\tilde{h}_p \in k[V]$  mit  $D(\tilde{h}_p) \subseteq U_p (\subseteq D(h_p))$

$\Rightarrow V(\tilde{h}_p) \supset V(h_p) \Rightarrow \tilde{h}_p \in I(V(h_p)) \stackrel{HNS}{=} \sqrt{(h_p)}$

$\Rightarrow \exists d \geq 0, h \in k[V]$  mit  $\tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$

Setze  $\hat{g}_p = h g_p, \hat{h} = \tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$

Dann gilt für jedes  $x \in D(\hat{h}_p) = D(\tilde{h}_p)$

$$g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{g_p(x) \cdot h(x)}{h_p(x) \cdot h(x)} = \frac{\hat{g}_p(x)}{\hat{h}_p(x)}$$

7.5  $\Rightarrow D(f) = \overline{D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)}$  (1) für geeignete  $h_i := h_{p_i}, 1 = 1, \dots, r$

Nach Behauptung 1 ist  $\bigoplus g = \frac{g_i}{h_i}$  auf  $D(h_i)$

*Behauptung 2:*  $g_i h_j = g_j h_i$  in  $k[V]$  für alle  $i, j$

denn: es ist  $g_i h_j = g_j h_i$  auf  $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$

$\Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$  in  $k[V]$  (\*)

setze  $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2$ . Dann wird aus (\*)

$$\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$$

(1)  $\Rightarrow V(f) = \bigcup_{i=1}^r V(h_i) \Rightarrow f \in I(V(h_1, \dots, h_r)) \stackrel{HNS}{\Rightarrow} f \in \sqrt{(h_1, \dots, h_r)}$

$\Rightarrow \exists d \geq 0, b_i \in k[V]$  mit  $f^d = \sum_{i=1}^r b_i h_i$

Setze  $\tilde{g} := \sum_{i=1}^r b_i g_i \in k[V]$

Dann gilt für alle  $i = 1, \dots, r$  und alle  $x \in D(h_j)$ :

$$g(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{g_j(x) f(x)^d}{h_j(x) f(x)^d} = \frac{(g_j \sum_{i=1}^r b_i h_i)(x)}{(h_j f^d)(x)} \stackrel{\text{Beh. 2}}{=} \frac{h_j (\sum_{i=1}^r b_i g_i)(x)}{h_j f^d(x)} = \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)^d} \quad \square$$

### Proposition 7.6

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten. Dann gilt:  $f : V \rightarrow W$  ist Morphismus  $\Leftrightarrow f$  stetig und für jedes offene  $U \subseteq W$  und jedes  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  ist  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:  $f$  stetig nach Bemerkung 6.3. Sei  $g \in \mathcal{O}_W(U), p \in f^{-1}(U)$ . In einer Umgebung  $U'$  von

$p' = f(p)$  ist  $g(y) = \frac{g_{p'}(y)}{h_{p'}(y)}$  für geeignete  $g_{p'}, h_{p'} \in k[W]$ . Für  $x \in f^{-1}(U')$  ist also  $g(f(x)) = \frac{g_{p'}(f(x))}{h_{p'}(f(x))}$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} g'_p \circ f &= f^\#(g'_p) \in k[V] \\ h'_p \circ f &= f^\#(h'_p) \in k[V] \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen: für  $i = 1, \dots, m$  ist  $p_i \circ f$  ein Polynom, wobei  $p_i \in k[W]$  die Restklasse von  $X_i$  ist.

Nach Satz 5 a) ist  $k[W] = \mathcal{O}_W(W) \Rightarrow p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = k[V]$   $\square$

**Definition + Bemerkung 7.7**

- a) Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  heißt **quasi-affine Varietät**, wenn  $U$  Zariski-offen in einer affinen Varietät  $V$  ist.
- b) Eine Abbildung  $f : U_1 \rightarrow U_2$  zwischen quasi-affinen Varietäten  $U_1, U_2$  heißt **Morphismus** (oder **reguläre Abbildung**), wenn  $f$  stetig ist und für jedes offene  $U \subseteq U_2$  und jedes  $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$  gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$$

(hier sei  $\mathcal{O}_{U_2} := \mathcal{O}_{\bar{U}_2}$ ,  $\bar{U}_2$  der Z-Abschluss von  $U_2$ )

- c)  $f : \widehat{\subseteq \mathbb{A}^n(k)} \rightarrow \widehat{\subseteq \mathbb{A}^m(k)}$  ist genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  auf  $U_1$  gibt mit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  für alle  $x \in U_1$
- d) Die quasi-affinen Varietäten über  $k$  bilden eine Kategorie, die  $\underline{\text{Aff}}(k)$  als volle Unterkategorie enthält.
- e) Eine quasi-affine Varietät heißt **affin** (als abstrakte Varietät), wenn sie isomorph ist zu einer affinen Varietät.

**Bemerkung 7.8**

Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $D(f)$  (abstrakt) affin.

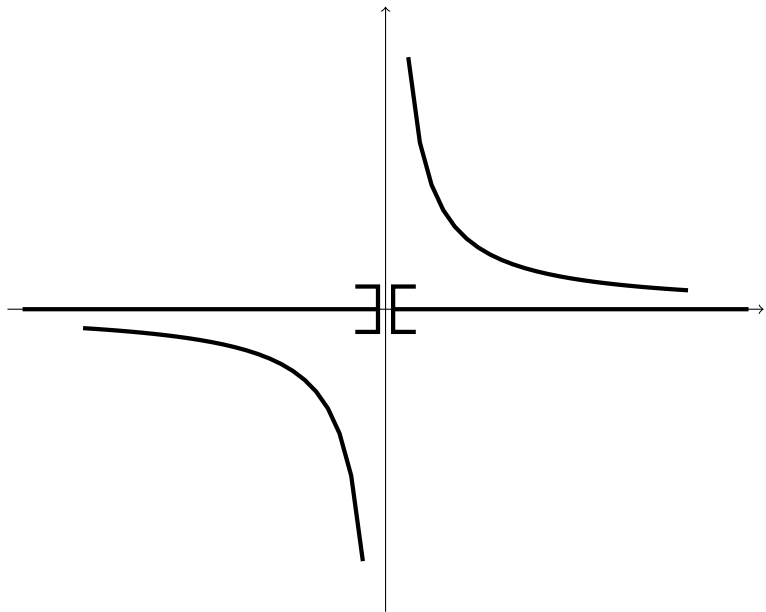
**Beispiel:**  $n = 1, f(x) = x, D(f) = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}$

$$V = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\Psi : \mathbb{A}^1(k) - \{0\} \rightarrow V, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$$


**Beweis**

Sei  $g = f \cdot X_{n+1} - 1 \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$  und  $V = V(g) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ ,  $V$  ist affine Varietät,  $\varphi : D(f) \rightarrow V, x \mapsto (x, \frac{1}{f(x)})$  ist Morphismus mit Umkehrabbildung  $\Psi : V \rightarrow D(f), (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ .  $\square$

## § 8 Rational Abbildungen und Funktionenkörper

$k$  sei wieder algebraisch abgeschlossen

### Definition + Bemerkung 8.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  (quasi-)affine Varietät.

- Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht und  $f \in \mathcal{O}(U)$  ist. Dabei ist  $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
- In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element  $(U_{\max}, f_{\max})$ ,  $U_{\max} =: \text{Def}(f)$  heißt **Definitionsbereich** der natürlichen Funktion.  $V \setminus \text{Def}(V)$  heißt **Polstellenmenge** der rationalen Funktion.
- Die rationalen Funktionen auf  $V$  bilden eine  $k$ -Algebra  $\text{Rat}(V)$ .
- Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\text{Rat}(V) = \text{Quot}(k[V]) =: k(V)$ .  $k(V)$  heißt **Funktionenkörper**.

### Beweis

- $\sim$  ist transitiv: Sei  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2), (U_2, f_2) \sim (U_3, f_3) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$   
 $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  ist (offen und) *dicht* in  $V \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_3}$  (Ü4, A5)
- 

$$U_{\max} = \bigcup_{\substack{\exists f \in \mathcal{O}_V(U) \\ \text{mit } (U, f) \in \text{Klasse}}} U$$

- $f \pm g, f \cdot g$  sind auf  $\text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$  regulär
- $V$  irreduzibel  $\Leftrightarrow I(V)$  Primideal  $\Leftrightarrow k[V]$  ist nullteilerfrei

Definiere:

$$\begin{aligned} \alpha : k(V) &\rightarrow \text{Rat}(V) \\ \frac{g}{h} &\mapsto (D(h), \frac{g}{h}) \end{aligned}$$

□

$\alpha$  ist wohldefiniert, weil  $D(h)$  dicht ( $V$  irreduzibel)

$\alpha$  ist injektiv: ✓

$\alpha$  ist surjektiv: Sei  $[(U, f)] \in \text{Rat}(V)$ , also  $f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow \exists U' \subseteq U$  offen,  $g, h \in k[V]$  mit  $f = \frac{g}{h}$  auf  $U'$ .  $V$  irreduzibel, also  $U'$  dicht  $\Rightarrow (U, f) \sim (U', \frac{g}{h}) \sim (D(h), \frac{g}{h}) \Rightarrow \alpha(\frac{g}{h}) = [(U, f)]$

### Definition + Bemerkung 8.2

Seien  $V, W$  affine Varietäten.

- Eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f_U)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht,  $f_U : U \rightarrow W$  regulär. Es ist  $(U, f_U) \sim (U', f_{U'}) :\Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{U \cap U'}$ .
- Rationale Funktionen auf  $V$  sind rationale Abbildungen  $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .
- Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.

**Warnung:**  $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$  ist im Allgemeinen keine rationale Abbildung, denn  $\text{Def}(g) \cap f(\text{Def}(f)) = \emptyset$  ist möglich.

**Definition 8.3**

Ein Morphismus  $f : V \rightarrow W$  (von quasi-affinen Varietät) heißt **dominant**, wenn  $f(V)$  dicht in  $W$  ist.

**Bemerkung + Definition 8.4**

- a) Die irreduziblen affinen Varietät bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.
- b) Die Isomorphismen in dieser Kategorie heißen **birationale Abbildungen**.  
*Explizit:*  $f : V \dashrightarrow W$  birational  $\Leftrightarrow \exists g : W \dashrightarrow V$ , sodass  $g \circ f$  und  $f \circ g$  die Identität auf ihren Definitionsbereichen sind.
- c) „birational“ lässt sich auch für reduzible Varietäten definieren.

**Beispiel 8.5**

- a) Sei  $V = V(X, Y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ , 
$$\left. \begin{array}{lcl} f : V & \rightarrow & \mathbb{A}^1(k), \quad (x, y) \mapsto x \\ g : \mathbb{A}^1(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), \quad x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right\} \text{ beide dominant}$$
  
 $g \circ f$  ist auf  $f^{-1}(D(g))$  regulär. Das ist *nicht dicht* in  $\mathbb{A}^1(k)$ !

- b)  $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k)$   
 $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  ist rationale Abbildung mit

$$\text{Def}(\sigma) = \mathbb{A}^2(k) - V(XY)$$

$$\sigma^2 = \text{id}_{\text{Def}(\sigma)}$$

- c)  $V = V(Y^2 - X^3)$ ,  $\varphi : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow V, \quad x \mapsto (x^2, x^3)$  bijektiver Morphismus  
 $\psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k), \quad (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$  ist rationale Abbildung  
 $\varphi$  ist birational ( $\psi$  auch!)

**Beweis**

- a) Sei  $f : V \dashrightarrow W$  und  $g : W \dashrightarrow Z$  dominante rationale Abbildung. Dann ist  $f^{-1}(\text{Def}(g)) \subseteq V$  nichtleer, offen und damit dicht  $\Rightarrow g \circ f$  ist rationale Abbildung  $V \dashrightarrow Z$   
 $\text{Bild}(g \circ f) = g(\underbrace{f(\text{Def}(f))}_{\text{dicht in } W})$  ist dicht in  $Z$ . □

**Proposition 8.6**

Sei  $f : V \rightarrow W$  Morphismus affiner Varietäten und  $f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  der zugehörige  $k$ -Algebren-Homomorphismus. Dann gilt:

$$f^\# \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ dominant}$$

**Folgerung 8.7**

Jede dominante rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  zwischen irreduziblen affinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus

$$f^\# : k(W) \rightarrow k(V)$$

**Satz 6**

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über  $k$  mit dominanten rationalen Abbildungen äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von  $k$  mit  $k$ -Algebrenhomomorphismus.



**Beweis**

Die Zuordnung  $V \rightarrow k(V), f \mapsto f^\#$  ist Funktor. Zu zeigen bleibt:

- i) zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung  $K|k \exists V$  mit  $k(V) \cong K$
- ii)  $f \mapsto f^\#$  ist Projektion  $\Phi : \text{Rat}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_k(k(W), k(V))$

*Beweis:*

- i) Seien  $g_1, \dots, g_n$  Erzeuger von  $K$  über  $k$ , sei  $A := k[g_1, \dots, g_n]$ . Dann ist  $K = \text{Quot}(A)$

Sei  $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  gegeben durch  $\varphi(X_i) = g_i$  und  $V := K(\text{Kern}(\varphi))$

$\Rightarrow V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  ist affine Varietät mit  $k[V] \cong A$

$\Rightarrow k(V) \cong K$

- ii)  $\Phi$  injektiv: Seien  $f, g : V \dashrightarrow W$  mit  $f^\# = g^\#$ . Wähle  $U = D(h) \subseteq \text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$  offen, affin.  $f|_U$  und  $g|_U$  sind Morphismen  $U \rightarrow W$ .

Die induzierten  $k$ -Algebren-Homomorphismen  $g_U^\#, f_U^\# : k[W] \rightarrow k[U] \subset k(V)$ . Es gilt:  
 $f_{U'}^\# = f^\#|_{k[U]}$

$\Phi$  surjektiv: Sei  $\alpha : k(W) \rightarrow k(V)$   $k$ -Algebren-Homomorphismus. Wähle Erzeuger  $g_1, \dots, g_n$  von  $k[W]$  (als  $k$ -Algebra). Für jedes  $i = 1, \dots, n$  ist  $\alpha(g_i)$  rationale Funktion auf  $V$ .

Da  $V$  irreduzibel, ist  $\bigcap_{i=1}^n \text{Def}(\alpha(g_i))$  offen, affin (für geeignetes  $g \in k[V]$ ). Nach Konstruktion induziert  $\alpha$  einen  $k$ -Algebren-Homomorphismus

$$\alpha : k \rightarrow \mathcal{O}_U(U) = k[U]$$

$\xrightarrow{\text{Satz 4}} \alpha = f^\#$  für einen Morphismus  $f : U \rightarrow W$

Außerdem  $U$  dicht in  $V \Rightarrow (U, f)$  ist rationale Abbildung ( $f$  ist dominant, da  $f^\#$  injektiv, dann  $\alpha$  Homomorphismus zwischen Körpern)  $\square$

