

## 11 Übung vom 07.07.

### 37. Aufgabe

Es bezeichne (i) die Strategie „i Mann gehen über den Strand, der Rest über das Hinkelsteinfeld“.

Römer	Gallier			
	(0)	(1)	...	(n)
(0)	1	0	...	0
(1)	1	...	...	...
...	0	...	...	0
(n)	...	...	...	1
(n+1)	0	...	0	1

Man rechnet einfach nach:

Der Wert des Spiels  $w$  ist echt größer als 0.

Damit sind die Strategien für Römer und Gallier Lösungen von linearen Programmen.

Für die Gallier

$$\begin{aligned}
 (DP) \quad g(x) = \sum_{j=0}^n x_j &= \max \\
 x_0 &\leq 1 \\
 x_0 + x_1 &\leq 1 \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} + x_n &\leq 1 \\
 x_n &\leq 1 \\
 x_0, \dots, x_n &\geq 0
 \end{aligned}$$

Für die Römer

$$\begin{aligned}
 (PP) \quad f(y) = \sum_{j=0}^{n+1} y_j &= \min \\
 y_0 + y_1 &\geq 1 \\
 &\vdots \\
 y_n + y_{n+1} &\leq 1 \\
 y_1, \dots, y_{n+1} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Summe der Nebenbedingungen in (DP) liefert:

$$2 \cdot g(x) \leq n+2 \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{n+2}{2}$$

**n gerade:** Wir suchen nun einen zulässigen Punkt  $x'$  mit

$$g(x') = \frac{n+2}{2}$$

Fangen wir mit  $x'_0 = 1$  an, so liefern die Nebenbedingungen den Vektor

$$x' = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1)$$

Der Punkt ist zulässig und optimal, also

$$x^0 = \frac{1}{g(x')}x' = \left(\frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}, 0, \dots, \frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}\right)$$

eine optimale Strategie.

Der Wert des Spiels ist  $\frac{n+2}{2}$ .

Wählen wir  $y' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ , so ist dies zulässiger Punkt von (PP) und es gilt  $f(y') = g(x')$ .

Dann ist

$$y^0 = \left(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2}\right)$$

optimale Strategie.

**n ungerade:**

$$g(x) \leq \frac{n+1}{2}$$

Setzen wir  $x' = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ , so gilt:

$$g(x') = \frac{n+1}{2}$$

Damit ist

$$x^0 = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$$

optimale Strategie und der Wert des Spiels ist  $\frac{2}{n+1}$ .

Ebenfalls ist  $y' = (0, 1, \dots, 0, 1, 0)$  Lösung von (PP). Damit ist

$$y^0 = \left(0, \frac{2}{n+1}, \dots, 0, \frac{2}{n+1}, 0\right)$$

optimale Strategie.

Für den Wert  $w_n$  gilt:

$n$	1	2	3	4	5
$w_n$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ab  $n \geq 4$  sind die Chancen für die Gallier besser.

### 38. Aufgabe

#### Hilfsmittel: Satz von der monotonen Konvergenz

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Weiter seien  $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $g_n(x) \rightarrow g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$
- $g_n \leq g_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  oder  
 $g_n \geq g_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\int_a^b g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx$$

Es sei nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex.

Dann gilt:

(i) Die Folge

$$g_n(t) := \frac{f(t + \frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}}$$

ist monoton fallend in  $n$  (gemäß Vorlesung) und konvergiert punktweise gegen  $f^+(t)$ .

(ii)  $t \mapsto g_n(t)$  ist Riemann-integrierbar, da  $f$  stetig ist.  
 $f'$  ist monoton wachsend und damit auch Riemann-integrierbar.

(iii)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $F$ .

Es sei o.E.  $x > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f^+(t) dt &= \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) dt \\
 &\stackrel{\text{Hilfsmittel}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x g_n(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t + \frac{1}{n}) dt - \int_0^x f(t) dt}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(0 + \frac{1}{n}) - (F(x) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) - (F(0 + \frac{1}{n}) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
 &= F'(x) - F'(0) \\
 &= f(x) - f(0)
 \end{aligned}$$

Ersetzt man  $f(t + \frac{1}{n})$  durch  $f(t - \frac{1}{n})$ , erhält man die Aussage für  $f^-$ .

### 39. Aufgabe

(a) Die Menge  $\partial f(x)$  kann man schreiben als:

$$\partial f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \{v \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\langle v, y - x \rangle}_{\text{fest}} \leq \underbrace{f(y)}_{\text{fest}} - \underbrace{f(x)}_{\text{fest}}\}$$

Als Schnitt von konvexen, abgeschlossenen Mengen ist  $\partial f(x)$  also selbst abgeschlossen und konvex.

Es sei  $v \in \partial f(x)$  und  $y := x + \frac{v}{\|v\|}$ .  
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \|v\| &= \langle v, (x + \frac{v}{\|v\|} - x) \rangle \\
 &\stackrel{v \in \partial f(x)}{\leq} f(x + \frac{v}{\|v\|}) - f(x) \\
 &\leq \max_{z \in S^{n-1}} f(x + z) - f(x) \\
 &\leq R \quad \text{für ein } R > 0
 \end{aligned}$$

$[S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\} \text{ Einheitssphäre}]$

Also ist  $\partial f(x) \subseteq R \cdot B^n$  und damit beschränkt.

$[B^n \text{ ist die n-dimensionale Einheitskugel.}]$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \langle v, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \langle v, tu \rangle \leq f(x + tu) - f(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \langle v, u \rangle \leq \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v, u \rangle \leq f'(x; u)
 \end{aligned}$$

(c) Ist  $f$  differenzierbar, so gilt:  $f'(x; u) = \langle \nabla f(x), u \rangle$ .

$$\begin{aligned}
 v \in \partial f(x) &\stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v, u \rangle \leq \underbrace{\langle \nabla f(x), u \rangle}_{f'(x; u)} \\
 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v - \nabla f(x), u \rangle \leq 0 \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \langle v - \nabla f(x), u \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow v = \nabla f(x)
 \end{aligned}$$

**Anmerkung:** (\*) Umformung ok, weil die Ungleichung für alle  $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$  gilt (also zu  $u^0 \neq 0$  auch für  $-u^0 \neq 0$ ).

#### 40. Aufgabe

$$\begin{aligned}
 f \text{ konvex} &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : g(t) := f(z + tu) \text{ ist konvex in } t \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : g'(t) = \langle \nabla f(z + tu), u \rangle \text{ ist monoton wachsend in } t \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u), u \rangle \leq \langle \nabla f(z + t_2 u), u \rangle \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u) - \nabla f(z + t_2 u), u \rangle \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, t_1 < t_2 : \langle \nabla f(z + t_1 u) - \nabla f(z + t_2 u), \underbrace{(t_1 - t_2) u}_{<0} \rangle \geq 0 \\
 &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0
 \end{aligned}$$

(\*) :  $u := y - x, z := x, t_1 = 0, t_2 = 1$  [einsetzen und umformen]

**Anmerkung:**  $f$  differenzierbar  $\Leftrightarrow g$  differenzierbar (...)