§ 18.

Differentialgleichungen: Grundbegriffe

In diesem Paragraphen seien $I, J, \ldots$ immer Intervalle in $\mathbb{R}$.

Erinnerung: Seien $p, k \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $y = (y_1, \ldots, y_p) : I \to \mathbb{R}^p$ heißt k-mal (stetig) db, genau dann wenn $y_1, \ldots, y_p$ k-mal auf I (stetig) db sind.
In diesem Fall ist $y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \ldots, y_p^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N}$, sei weiter $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \cdots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$ und $F : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion.
Eine Gleichung der Form:

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{i}$$

heißt eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung** (Dgl) n**-ter Ordnung**.
Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** (Lsg) von (i), genau dann wenn y auf I n-mal db, für alle $x \in I, (x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$ ist und gilt:

$$\forall x \in I : F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Beispiele:

(1) Sei $n = p = 1$, $F(x, y, z) = z + \frac{y}{x}$ und $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$, dann ist die zugehörige Dgl:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Z.B. ist $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{x}$ eine Lösung der Dgl.
Weitere Lösungen sind:

$$y : (0,1) \to \mathbb{R}, y(x) := 0$$
$$y : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y(x) := \frac{3}{x}$$

(2) Sei $n = 1, p = 2$ und folgende Dgl gegeben:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, y(x) := (\cos x, \sin x)$ eine Lösung der Dgl.

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \cdots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ Faktoren}}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$.
Eine Gleichung der Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{ii}$$

heißt **explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung**.
(hier gilt: $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$)

Definition
Seien p, n, D und f wie oben. Weiter sei $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$ fest.
Dann heißt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{iii}$$

ein **Anfangswertproblem** (AwP).
Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** des AwP (iii), genau dann wenn y eine Lösung von (ii) ist und gilt:

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Das AwP heißt **eindeutig lösbar**, genau dann wenn (iii) eine Lösung hat und für je zwei Lösungen $y : I \to \mathbb{R}^p, \tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ von (iii) gilt:

$$\forall x \in I \cap J : y(x) = \tilde{y}(x)$$

(Beachte: $x_0 \in I \cap J$)

Beispiele:

(1) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dann sind:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$
$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$$

Lösungen des AwP.

(2) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann ist:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

eine Lösung des AwP. In §19 werden wir sehen, dass dieses AwP eindeutig lösbar ist.