0.2 Übung 1, 08.11.2004

0.2.1 Aufgabe 1

b) $A \neq \emptyset$ eine Menge, $(G, \circ)$ eine Gruppe.
   z.Z.: $(G^A, *)$ ist Gruppe.
   Beweis: $G^A \neq \emptyset$, da $A \neq \emptyset$

   (1) $*$ is assoziativ
   Sei $x \in A, f, g, h \in G^A$
   $((f*g)*h)(x) = (f*g)(x) \circ h(x) = ((f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = f(x) \circ g(x) \circ h(x) = (f*(g*h))(x)$

   Da $x \in A$ bel. gilt $(f * g) * h = f * (g * h)$

   (2) neutrales Element
   Wir def. $f : A \to G,\ x \mapsto e$. Sei $x \in A$ bel., dann gilt:
   $f(n(x)) = f(x)$. Also ist n das neutrale Element in G^A.

□

0.2.2 Aufgabe 3

Im Hinterkopf: $A = \mathbb{N}_0$; $\circ$?? $+$ und $(B, *) = (\mathbb{Z}, +)$

a) z.Z.: $\sim$ ist ÄR
   Beweis:

   (1) $\sim$ ist reflexiv: $x_1 \circ y_1 = x_1 \circ y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

   (2) $\sim$ ist symmetrisch da „=“ symmetrisch ist

   (3) $\sim$ ist transitiv:
   $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$
   Es gilt also: $x_1 \circ y_2 = x_2 \circ y_2$ und $x_2 \circ y_1 = x_3 \circ y_2 \Rightarrow x_1 \circ y_2 \circ x_2 \circ y_3 = x_2 \circ y_1 \circ x_3 \circ y_2 \Rightarrow$
   $x_1 \circ y_3 = y_1 \circ x_3$

□

b) Seien $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_2, y_2)$
   z.Z.: $(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2) \sim (x_1' \circ x_2', y_1' \circ y_2')$ (dann wohldefiniert.)
   $x_1 \circ x_2 \circ y_1' \circ y_2' = x_1' \circ y_1 \circ x_2' \circ y_2 = x_1' \circ x_2' \circ y_1 \circ y_2$

c) $A \times A_{/\sim} \neq 0$
   $[(x_1, y_1)]_\sim \times [(x_2, y_2)]_\sim = [(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)]_\sim$

   (1) $*$ ist assoziativ weil $\circ$ assoziativ ist

   (2) $[(e, e)]_\sim$ ist das neutrale Element bzgl. $*$

   (3) $*$ ist kommutativ
   Sei $x_1, y_1 \in A, [(y_1, x_1)]_\sim$ ist invers zu $[(x_1, y_1)]_\sim$, denn