1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Vorbemerkungen zu $\mathbb{C}$

Wir fassen $\mathbb{R}^2$ als Körper $\mathbb{C}$ auf, indem wir $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ wie folgt verknüpfen:

$$z + w = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \qquad z \cdot w = zw = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, indem wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren.

Beachte: $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Mit $\mathrm{i} := (0, 1)$ folgt also

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Schreibe also

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + \mathrm{i}y,$$

hierbei sei stets $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei weiter $w = u + \mathrm{i}v$ $(u, v \in \mathbb{R})$. Dann:

$$zw = (x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}^2 yv + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu = (xu - yv) + \mathrm{i}(yu + xv).$$

Setze $\operatorname{Re} z := x$ (Realteil), $\operatorname{Im} z := y$ (Imaginärteil), wenn $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Real- und Imaginärteil sind eindeutig bestimmt. Das Konjugiert-Komplexe ist $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$. Damit ist

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2}(z - \overline{z}), \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Der komplexe Betrag ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|_2,$$

also gilt: $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z}$.

Es gelten:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \le |z| \le \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \tag{1.1}$$

sowie:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |wz| = |w|\,|z|, \quad |w + z| \le |w| + |z| \quad (\forall w, z \in \mathbb{C}).$$

Polarkoordinaten: Für $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ setze

$$e^{i\phi} := \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Es gelten nach Ana 1:

$$e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i0} = 1, \quad \left|e^{i\phi}\right| = 1, \quad e^{i(\phi+2k\pi)} = e^{i\phi} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt (für $z \neq 0$):

$$z = r\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = re^{i\phi} \quad (= x + iy),$$

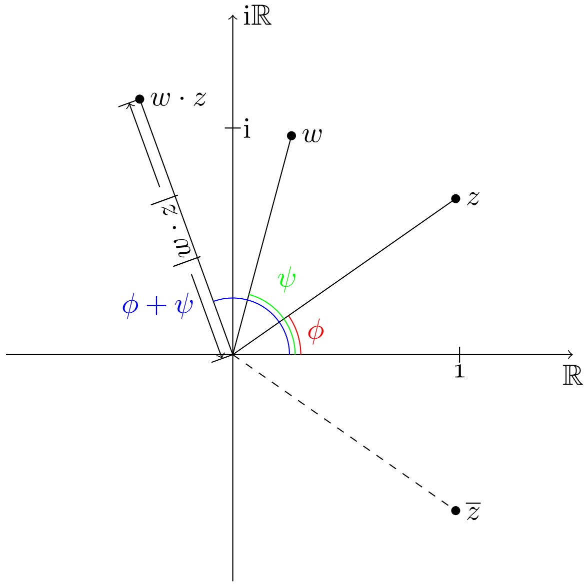
wobei r der Abstand von z zum Nullpunkt, also $|z|$, ist und

$$\phi = \arg z = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in (-\pi, \pi], \quad \phi = \begin{cases} \operatorname{sign}(y)\arccos\frac{x}{r}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ \pi, & z \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Sei weiter $w = se^{i\psi}$ $(s \geq 0)$. Dann

$$wz = se^{i\psi}re^{i\phi} = rse^{i(\phi+\psi)}.$$

Also entspricht die komplexe Multiplikation der Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel (mod 2π). Somit ist $z \mapsto wz$ für jedes feste w eine *Drehstreckung*.



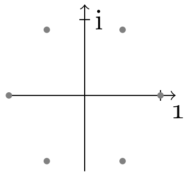
Einheitswurzeln: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Sei $z^n = 1$ für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $1 = |1| = |z|^n = r^n$, also $r = 1$. Folglich:

$$1 = \left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $n\phi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt also:

$$z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$n = 6:$



Ferner: Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ sagen wir, dass $z_n \longrightarrow z$ $(n \to \infty)$, wenn

$$|z - z_n| \longrightarrow 0 \overset{(1.1)}{\iff} \operatorname{Re} z_n \longrightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \longrightarrow \operatorname{Im} z \quad (n \to \infty).$$

Somit haben $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ den gleichen Konvergenzbegriff und außerdem die gleichen offenen und abgeschlossenen Kugeln:

$$\begin{aligned} B(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}, \\ \overline{B(z_0, r)} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}, \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0). \end{aligned}$$

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Betrachte $z = x + \mathrm{i}y \in M$ als $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$. Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Also:

$$f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist $f\colon M \to \mathbb{C}$ genau dann stetig (d.h. $z_n \to z$ (in M) $\implies$ $f(z_n) \to f(z)$), wenn $u, v\colon M \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Fazit: Konvergenz, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Stetigkeit, etc. sind in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ gleich.

1.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Stets sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, das heißt:

$$\forall z \in D\ \exists\, r = r(z) > 0 \text{ mit } B(z, r) \subseteq D \implies \overline{B(z, \tfrac{r}{2})} \subseteq D.$$

Definition 1.1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *(komplex) differenzierbar* in $z_0 \in D$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dann heißt $f'(z_0)$ die *Ableitung* von f bei z_0. Wenn f bei allen $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, dann heißt f *holomorph*. Wir schreiben dann $f \in H(D)$. Iterativ definiert man höhere Ableitungen.

Bemerkung 1.2. (a) Offenbar sind die Funktionen $f(x) = 1$, $g(z) = z$ auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, $g'(z) = 1$.

(b) Genau wie in Analysis 1 zeigt man: Seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ in $z \in D$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ und $\frac{1}{f}$ (wenn $f(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gelten die bekannten Regeln. Ebenso gilt die Kettenregel.

(c) Polynome p sind auf $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen $f = \frac{p}{q}$ mit einem Polynom $q \neq 0$ sind auf $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ holomorph mit den reellen Formeln für p', f'.

Erinnerung an Analysis 1: Gegeben seien $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) und ein $c \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

konvergiert absolut für alle z mit

$$|z-c| < \rho := \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

und divergiert, falls $z \notin \overline{B}(c, \rho)$.

Reduktion auf $c = 0$: Betrachte

$$h(w) := f(c+w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

wobei $w = z - c \in B(0, \rho)$, $z = c + w$.

Satz 1.3 (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12)**.** *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \; z \in B(c, \rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f \in H(B(c, \rho))$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} =: g(z) \; (\forall z \in B(c, \rho)),$$

wobei die Potenzreihe g den gleichen Konvergenzradius ρ hat.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Iterativ folgt:

$$\exists f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \ldots \cdot (n-m+1) a_n (z-c)^{n-m}, \forall z \in B(c, \rho).$$

Beweis. Wie in Analysis 1 zeigt man: g hat Konvergenzradius ρ. Sei oBdA $c = 0$.

Seien $z \in B(0, \rho)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$ mit $|z| < r < \rho$. Sei $w \in \overline{B}(0, r)$ mit $w \neq z$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ absolut konvergiert, existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Ferner:

$$0 \leq d(w) := \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right)}_{=: p_n(w)} \right|$$

mit $p_n(w) = w^{n-1} + z w^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - n z^{n-1}$. Dabei gelten:

- $p_n(w) \to 0$, $w \to z$ (für jedes feste $n \in \mathbb{N}$)
- $|p_n(w)| \leq r^{n-1} + r r^{n-2} + \cdots + r^{n-1} + n r^{n-1} = 2 n r^{n-1}$ $\quad(**)$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
0 \le d(w) &\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||p_n(w)| \overset{(**)}{\le} \sum_{n=1}^{N} |a_n||p_n(w)| \;+ \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n|a_n|r^{n-1} \\
&\overset{(*)}{\le} N \max\{|a_1||p_1(w)|, \cdots, |a_n||p_n(w)|\} + 2\varepsilon \to 2\varepsilon \ (w \to z) \ (N = N_\varepsilon \text{ fest!})
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{w \to z} d(w) \le 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim\limits_{w \to z} d(w) = 0$. $\square$

Beispiele mit $\rho = \infty$.

(a) $\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$.

(b) $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\sin'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z)$.

(c) $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$,

$\cos'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} \overset{l=n-1}{=} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = -\sin(z)$.

Seien $f \colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $z \in D$. Setze wieder $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, also

$$
f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.
$$

Sei $z \neq z_0$ und f bei z_0 komplex differenzierbar. Dann gilt:

$$
\frac{1}{|z - z_0|}|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \longrightarrow 0, \ z \to z_0.
$$

Die Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ kann als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $w \mapsto f'(z_0)w$ aufgefasst werden. Diese ist dann auch $\mathbb{R}$-linear auf $\mathbb{R}^2$, kann also durch eine reelle 2×2-Matrix dargestellt werden. Nach Analysis 2 ist nun f in $z_0 = (x, y)$ reell differenzierbar und somit existieren die partiellen Ableitungen von u und v und es gilt

$$
f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{+}
$$

Satz 1.4. *Sei $f \colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*

(*a*) *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

(*b*) *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{CR}
$$

Insbesondere ist $f'(z_0)$ schiefsymmetrisch.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt aus (+) und $(\mathrm{CR})_2$.

$(a) \implies (b)$: Sei $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, $t \in \mathbb{Q}$ mit $0 < |t| < r$. Dann gelten

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(z_0+t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}(u(x_0+t, y_0) - u(x_0,y_0)) + \frac{\mathrm{i}}{t}(v(x_0+t,y_0) - v(x_0,y_0)) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

und

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mathrm{i}t}(f(z_0+\mathrm{i}t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(-\mathrm{i}\frac{1}{t}(u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0)) + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}t}(v(x_0,y_0+t) - v(x_0,y_0)) \right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert (CR).

$(b) \implies (a)$: Setze

$$w = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \overset{\text{(CR)}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w(z-z_0) &= (\operatorname{Re} w)(x-x_0) - (\operatorname{Im} w)(y-y_0) + \mathrm{i}((\operatorname{Re} w)(y-y_0) + (\operatorname{Im} w)(x-x_0)) \\ &\overset{\text{Def. } w}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) \end{pmatrix} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies |f(z) - f(z_0) - w(z-z_0)| \frac{1}{|z-z_0|} \\ &= \left| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right|_2^{-1} \left| \begin{pmatrix} u(x,y) - u(x_0,y_0) - \left(\nabla u(x_0,y_0) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right) \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) - \left(\nabla v(x_0,y_0) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right|_2 \to 0, \end{aligned}$$

für $(x_0,y_0) = z_0 \to z = (x,y)$, da u, v differenzierbar. $\square$

Beispiel 1.5. (a) $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ reell C^∞ ist. Denn $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

was $(\mathrm{CR})_1$ widerspricht.

(b) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, $z \in \mathbb{C}$, ist nur in $z = 0$ komplex differenzierbar, denn hier ist $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ und somit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \overset{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y \overset{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \iff y = 0.$$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \underbrace{\dfrac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + \mathrm{i}\underbrace{\dfrac{-y}{x^2+y^2}}_{=v}$ ist holomorph für $z \neq 0$ (Bem. 1.2).

Bemerkung 1.6. Sei f in $z = x + \mathrm{i}y$ komplex differenzierbar. Nach (+) und (CR) gilt:

$$A := f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Also gilt $\rho := \det A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)^2 + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)^2 = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)^2 + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)^2 \geq 0$ und $f'(z) \neq 0 \iff \det A > 0$. Ferner ist $A^T A = (\det A)\mathrm{I}$. Sei $f'(z) \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} A \text{ orthogonal} \tag{$*$}$$

$$\implies |Av|_2 = \sqrt{\rho}\,|v|_2 \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2). \tag{$**$}$$

Sei $\gamma_j \in C^1((-1,1),\mathbb{R}^2)$ eine Kurve in D mit $\gamma_j(0) = (x,y)$, $\gamma_j'(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $(j = 1,2)$. Dann ist $Av_j = f'(x,y)\gamma_j'(0) = (f \circ \gamma_j)'(0)$ ein Tangentenvektor der Bildkurve $f \circ \gamma_j$ bei $f(x,y)$ $(j = 1,2)$. Weiter gilt:

$$\frac{(v_1 \mid v_2)}{|v_1|_2\,|v_2|_2} \overset{(*),(**)}{=} \frac{\frac{1}{\rho}(Av_1 \mid Av_2)}{\frac{1}{\rho}\,|Av_1|_2\,|Av_2|_2},$$

woraus durch Anwenden des Arcuscosinus folgt: $\sphericalangle(v_1, v_2) = \sphericalangle(Av_1, Av_2)$ (Winkel ohne Orientierung).
Also ist der Winkel der Urbildtangenten gleich dem Winkel der Bildtangenten unter f. Falls also $f'(z) \neq 0$, dann ist f bei $z = x + \mathrm{i}y$ *winkeltreu* („konform“). Ferner ist f orientierungstreu, da $\det A > 0$.

Definition 1.7. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Sei $f\colon U \to V$ bijektiv und $f \in H(U)$, $f^{-1} \in H(V)$. Dann heißt f *biholomorph.* (Dann heißen U und V auch „konform äquivalent“.)

Satz 1.8. *(a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f\colon U \to V$ biholomorph. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)} \quad (\forall z \in U,\ \forall w = f(z) \in V).$$

(b) Seien $f \in H(D) \cap C^1(D,\mathbb{R}^2)$, $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann existieren offene $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$, sodass $f\colon U \to V$ biholomorph ist. Somit ist a) auf f für alle $z \in U$ und $w = f(z) \in V$ anwendbar.

Beweis. (a) Nach Bem. 1.2 und $z = f^{-1}(f(z))$ $(\forall z \in U)$ folgt $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$. Durchdividieren ergibt Behauptung a).

(b) Nach Bem. 1.6 ist $f'(z_0)$ als 2×2-Matrix invertierbar. Der Umkehrsatz aus Analysis 2 liefert Behauptung b). □

Definition. Eine Funktion $u \in C^2(D,\mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf D, wenn für alle $(x,y) \in D$ gilt:

$$\triangle u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Satz 1.9. *(a) Sei $f \in H(D) \cap C^2(D, \mathbb{R}^2)$. Dann sind $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch auf D.*

(b) Sei $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ auf D harmonisch, $B_0 := B((x_0, y_0), r) \subseteq D$ für ein $r > 0$, $(x_0, y_0) \in D$. Dann existiert ein $f \in H(B_0)$ mit $u = \operatorname{Re} f$.

Beweis. (a) Der Satz von Schwarz aus Analysis 2 (Satz 2.21) liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{\text{(CR)}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

(b) Setze für $(x, y) \in B_0$

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, s)\,\mathrm{d}s.$$

Beachte: die Strecken von (x_0, y_0) nach (x, y_0) und von (x, y_0) nach (x, y) liegen in B_0. Analysis 1 und 2 liefern: $v \in C^1(B_0)$ und

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{Beachte hier: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s)$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

$\Longrightarrow$ (CR)$_2$. Ferner $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ $\Longrightarrow$ (CR) gilt. Mit Satz 1.4 folgt: $f = u + \mathrm{i}v$ ist auf B_0 holomorph. □

Beispiel. Sei $f(z) = z^3 = (x + \mathrm{i}y)^3 = x^3 + 3\mathrm{i}x^2 y - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3$. Satz 1.9 liefert: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ist harmonisch auf $\mathbb{C}$.

1.2 Elementare Funktionen

1.2.1 Möbiustransformationen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ (dann ist $c \neq 0$ oder $d \neq 0$). Setze

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für} \quad z \in D_A := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$$

m_A heißt *Möbius-Transformation.* Offensichtlich ist $m_A \in H(D_A)$.

Eigenschaften: Sei A wie oben und $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det \tilde{A} \neq 0$.

(a) Es gilt

$$m_A(z) = z \ (\forall z \in D_A) \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ für ein } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Beweis. „$\Leftarrow$": einsetzen! „$\Rightarrow$": Für alle $z \in D$ gilt:

$$m_A(z) = z \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0 \ (\forall z \in D_A)$$

$$\implies c = 0, d = a, b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \qquad \square$$

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $m_{\alpha A} = m_A$.

(c) Es gilt $m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = m_{A\tilde{A}}(z)$ (soweit alles definiert).

Beweis. Für passende z:

$$m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = \frac{a\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + b}{c\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a}+b\tilde{c})z + (a\tilde{b}+b\tilde{d})}{(c\tilde{a}+d\tilde{c})z + (c\tilde{b}+d\tilde{d})} = m_{A\tilde{A}}(z). \qquad \square$$

(d) Es gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Damit folgt: $D_{A^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$m_A(D_A) \subseteq D_{A^{-1}}, \qquad (*)$$

$$m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) \subseteq D_A. \qquad (**)$$

Also folgt aus c): $m_A(D_A) = D_{A^{-1}}$ (wende auf $(**)$ m_A an), $m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) = D_A$ (wende auf $(*)$ $m_{A^{-1}}$ an) und $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$.

Insbesondere sind $m_A\colon D_A \to D_{A^{-1}}$, $m_{A^{-1}}\colon D_{A^{-1}} \to D_A$ biholomorph.

(e) Sei $c = 0$ (also $d \neq 0$). Dann ist $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ eine affine Abbildung, also $m_A = T \circ S$ mit $Tw = w + \frac{d}{d}$ (Translation) und $Sw = \frac{a}{d}w$ (Drehstreckung). Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt $m_A = A_2 \circ J \circ A_1$, wobei $A_1 w = cw + d$, $A_2 w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}w$ (affin) und $Jw = \frac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ (Inversion).

Beweis. Es gilt $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c}\dfrac{1}{cz+d} = A_2(J(A_1(z)))$. $\square$

Fasse jede Gerade in $\mathbb{C}$ als verallgemeinerten Kreis über ∞ auf. Also ist ein verallgemeinerter Kreis K entweder eine Gerade oder eine echte Kreislinie. Beachte: K wird durch die Angabe dreier verschiedener Punkte in $\mathbb{C}_\infty$ eindeutig bestimmt.

(f) Jede Möbiustransformation bildet einen verallgemeinerten Kreis bijektiv auf einen verallgemeinerten Kreis ab.

Beweis. Nach 1.9(e) ist die Behauptung nur für Translationen T, Drehstreckungen S und die Inversion J zu zeigen. Klar: T, S sind „verallgemeinert kreistreu".

Zu J: Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann:

$$z \in K := \partial B(z_0, r) \iff r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2.$$

Damit:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha|z|^2 + c\overline{z} + \overline{c}z + \delta = 0\} \qquad (*)$$

für feste α, $\delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ mit $|c|^2 > \alpha\delta$, wobei $z_0 = -\frac{c}{\alpha}$, $r^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}$, falls $\alpha \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ Für $\alpha \neq 0$ beschreibt $(*)$ die echte Kreislinie $\partial B(z_0, r)$. Für $\alpha = 0$ beschreibt $(*)$ die Gerade $\operatorname{Re}(\bar{c}z) = -\frac{\delta}{2}$ (Beachte: $c \neq 0$). Multipliziere $(*)$ mit $\frac{1}{|z|^2}$. Dann erfüllt $w = Jz = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ die Gleichung:

$$0 = \underbrace{\alpha}_{=:\delta'} + \underbrace{c}_{=:-\bar{c}'} w + \underbrace{\bar{c}}_{=:-c'} \overline{w} + \underbrace{\delta}_{=:\alpha'} |w|^2.$$

Weiter gilt: $|c'|^2 - \alpha'\delta' = |c|^2 - \alpha\delta > 0$. Wenn K durch $(*)$ beschrieben wird, dann folgt also $J(K) \subseteq K'$, wobei K' ein verallgemeinerter Kreis ist. Genauso: $J(K') \subseteq K$. Da $J^2 = \mathrm{id}$ folgt $K' = J^2(K') \subseteq J(K) \implies J(K) = K'$. □

Definition 1.10. Setze $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei gelten soll:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z\infty = \infty + z = \infty,\ \tfrac{z}{\infty} = 0,$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty,\ \tfrac{z}{0} = \infty.$$

Verboten: $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Wir schreiben $z_n \to \infty$, wenn $|z_n| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Beachte: Dieses ∞ ist ein anderes als $\pm\infty$ in $\mathbb{R}$ aus Analysis 1.

Setze bezüglich dieser „Konvergenz“ m_A „stetig“ fort durch

$$m_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c},\ c \neq 0 \\ \infty,\ c = 0 \end{cases}.$$

Beachte:
$$m_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}\ (z \neq 0),\ m_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(beachte: $-\frac{ad}{c} + b \neq 0$, da $\det A \neq 0$).

Mit etwas Rechnung folgt: $m_A \colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ ist bijektiv mit $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}} \colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.

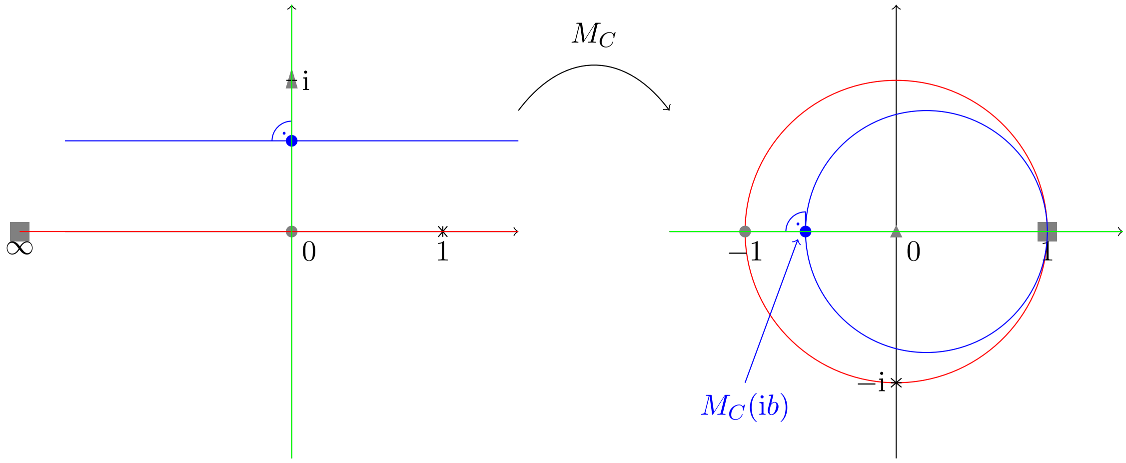
Sei $\mathcal{M} := \{m_A \colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$. Mit obigen Eigenschaften (und etwas Rechnung bezüglich ∞) folgt:

- $\mathcal{M}$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- $\Phi \colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}$, $A \mapsto m_A$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}\Phi = \{\alpha \mathrm{I} \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

Beispiel 1.11 (Cayley-Transformation)**.** Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ ($\rightsquigarrow \det C = 2\mathrm{i} \neq 0$) $\rightsquigarrow M_C(z) = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

Dabei: $M_C(-\mathrm{i}) = \dfrac{-2}{0} = \infty$, $M_C(\infty) = \dfrac{1 - \frac{\mathrm{i}}{\infty}}{1 + \frac{\mathrm{i}}{\infty}} = 1$. Weiter: $M_C(0) = -1$, $M_C(1) = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = -\mathrm{i}$. Durch $\{0, 1, \infty\}$ läuft der verallgemeinerte Kreis $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nach verläuft der Bildkreis $M_C(\mathbb{R}_\infty)$ durch die Bilder $-1, -\mathrm{i}, 1$. Dies ist $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ mit $\mathbb{D} = B(0, 1)$. Also $M_C(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$.

Ferner: Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $M_C(\mathrm{i}b) = \dfrac{b - 1}{b + 1}$, insbesondere $M_C(\mathrm{i}) = 0$. $\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty$ verläuft durch $0, \mathrm{i}, \infty$. $\mathbb{R}_\infty$ verläuft durch die Bildpunkte $-1, 0, 1 \implies M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Mit Analysis 1: $M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_+) = [-1, 1)$.



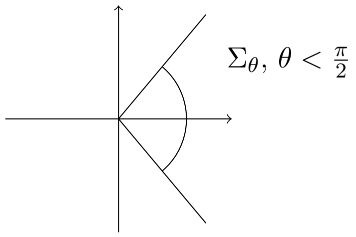
Die Gerade $K\colon \mathrm{i}b + x,\ x \in \mathbb{R},\ (b > 0$ fest) wird auf den verallgemeinerten Kreis K' durch $M_C(\mathrm{i}b) \in (-1,1)$ und $1 = M_C(\infty)$ abgebildet. Nach Bem. 1.6 und da K die imaginäre Achse im Winkel $\frac{\pi}{2}$ schneidet, schneidet $M_C(K)$ die reelle Achse ($= M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty)$) auch senkrecht in $M_C(\mathrm{i}b)$. $\implies$ $M_C(K)$ ist symmetrisch zur x-Achse und liegt in $\mathbb{D}$. $\implies$ $M_C(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{D}$, mit $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Sei weiter $w \in \mathbb{D}$. Sei K der Kreis durch w und 1, der symmetrisch zur x-Achse ist. Sei $a \in (-1,1)$ der zweite Schnittpunkt von K mit der x-Achse. $\implies$ Es gibt genau ein $b \in (0,\infty)$ mit $a = \dfrac{b-1}{b+1}$. Also: Ist $w \in M_C(\mathrm{i}b+\mathbb{R}_\infty)$ $\implies$ $M_C(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D}$ $\implies$ $M_C\colon \mathbb{H}_+ \to \mathbb{D}$ ist biholomorph.

1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Mit $\sqrt[n]{x}$ wird stets die reelle Wurzel bezeichnet. Für $\theta \in (0,\pi]$ definiere den (offenen) Sektor:

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

Speziell: $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (geschlitzte Ebene), $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \mathbb{C}_+$ (rechte Halbebene)



$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \Sigma_\theta \iff r > 0,\ |\phi| < \theta$
(wobei $|\phi| \leq \pi$)

Betrachte: $P_n(z) = z^n,\ z \in \mathbb{C}$. Dann: $P_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi n}$. Also bildet P_n den Halbstrahl $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\ r > 0\}$ mit Winkel $\phi \in (-\pi,\pi]$ bijektiv auf den Halbstrahl $\{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi n},\ s > 0\}$ mit n-fachem Winkel (modulo 2π) ab.

Setze $p_n := P_n|_{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$. Dann ist $p_n\colon \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \to \Sigma_\pi$ bijektiv.

Beachte: P_n ist schon auf $\overline{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$ nicht mehr injektiv. Beispiel für $n = 2$:

$$+\mathrm{i}, -\mathrm{i} \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{\mathbb{C}_+},\ P_2(\mathrm{i}) = -1 = P_2(-\mathrm{i}).$$

Definition 1.12. Der Hauptzweig der n-ten Wurzel ist die Umkehrabbildung $r_n = p_n^{-1}\colon \Sigma_\pi \to \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$. Man schreibt $r_n(w) =: w^{\frac{1}{n}}$ für $w \in \Sigma_\pi$.

Per Definition haben wir $r_n(z^n) = z$ $(\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}})$, $r_n(w)^n = w$ $(\forall w \in \Sigma_\pi)$. Es gilt:

$$r_n(s e^{i\psi}) = \sqrt[n]{s} e^{i\frac{\psi}{n}} \quad (\forall s > 0,\ |\psi| < \pi) \tag{1.5}$$

(denn: $z = \sqrt[n]{s} e^{i\frac{\psi}{n}} \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ und $z^n = s e^{i\psi}$)

Insbesondere: $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$ für $x > 0$.

Weiter: $p_n{}'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ $(\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}})$.

Mit Satz 1.8 sind $r_n \in H(\Sigma_\pi)$ und

$$\left.\begin{array}{ll} p_n\colon & \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \to \Sigma_\pi \\ r_n\colon & \Sigma_\pi \to \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \end{array}\right\} \text{biholomorph}$$

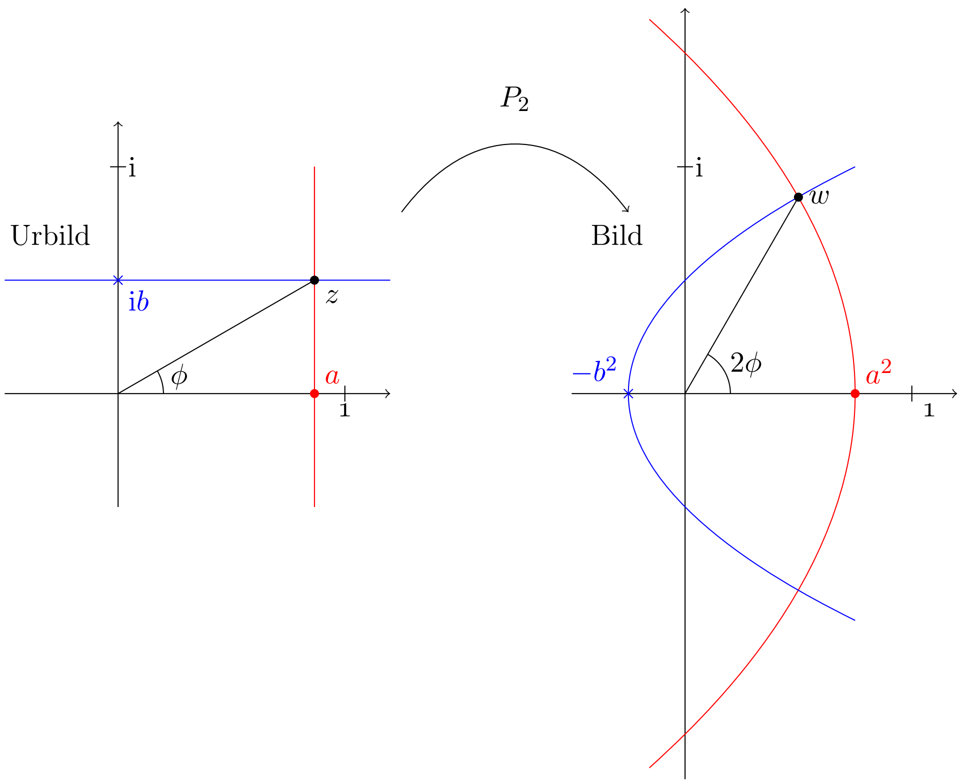
Abbildungsverhalten der Quadratfunktion

- **Vertikale Gerade** $\operatorname{Re} z = a$ mit einem festen $a > 0$. Also gilt für $z = x + iy$, dass $w := z^2 = a^2 - y^2 + i \cdot 2ay$ (mit $a = x$) ($y \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Also ist $\operatorname{Im} w = 2ay$, also $y = \frac{\operatorname{Im} w}{2a}$. Damit folgt:

$$\operatorname{Re} w = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4a^2} \leq a^2.$$

  Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$ eine nach links offene Parabel mit Scheitel $(a^2, 0)$.

- **Horizontale Gerade** $\operatorname{Im} z = b$ mit einem festen $b > 0$. Also gilt für $z = x + iy$, dass $w := z^2 = x^2 - b^2 + i \cdot 2bx$ (mit $y = b$) ($x \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Wie oben erhält man $\operatorname{Im} w = 2bx$, also $x = \frac{\operatorname{Im} w}{2b}$ und $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$. Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$ eine nach rechts offene Parabel mit Scheitel $(-b^2, 0)$.



Weitere Zweige der Wurzel

Sei $\beta \in (-\pi, \pi]$. Setze

$$E_\beta = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \mid r \geq 0\}.$$

Sei nun $n = 2$, dann ist

$$W_{\alpha,2} = \{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \mid s > 0, \phi \in (\alpha, \alpha + \pi)\}$$

eine gedrehte Halbebene.
Da $\frac{\beta}{2} < \phi < \frac{\beta}{2} + \pi \iff \beta < 2\phi < \beta + 2\pi$, ist $p_2^o := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2},2}}$ eine Bijektion

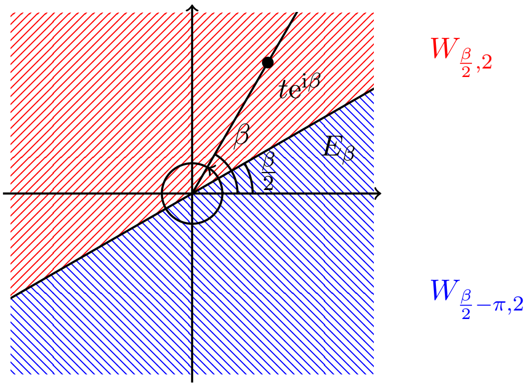
$$p_2^o \colon W_{\frac{\beta}{2},2} \to E_\beta.$$

Da $E_\beta = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta - 2\pi, \beta)\}$, ist ebenso $p_2^u := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}}$ eine Bijektion

$$p_2^u \colon W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2} \to E_\beta.$$

Also erhalten wir für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau zwei Zweige der Wurzel

$$\begin{aligned} r_2^o &= (p_2^o)^{-1} \colon E_\beta \to W_{\frac{\beta}{2},2}, \\ r_2^u &= (p_2^u)^{-1} \colon E_\beta \to W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}. \end{aligned}$$



Eigenschaften: Sei $t > 0$, $\psi \in (\beta, \beta + 2\pi)$, $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Es gilt

- $r_2^o\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}} =: w^o$
  Denn: $(w^o)^2 = \left(\sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\right)^2 = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = z$ und $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \pi)$, also $w^o \in W_{\frac{\beta}{2},2}$.
- $r_2^u\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} =: w^u$
  Denn: $(w^u)^2 = \left(\sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right)^2 = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}} = z$ und $\frac{\psi}{2} - \pi \in (\frac{\beta}{2} - \pi, \frac{\beta}{2})$, also $w^u \in W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}$.

Beispiel. Sei $\beta = \frac{\pi}{4}$. Gefordert ist also im Urbild der Wurzel, dass $\psi \in (\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$, sowie $t > 0$.
Sei $\psi = \pi$, $t = 1$, also $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Dann $r_2^o(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, $r_2^u(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{i}$.
Sei $\psi = 2\pi$, $z = t = t\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} > 0$. Dann $r_2^o(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\sqrt{t}$, $r_2^u(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \sqrt{t}$.

Entsprechend erhält man für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau n Zweige der n-ten Wurzel (mit jeweils passenden α!).

1.2.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Aus Analysis 1 haben wir: Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gelten:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \neq 0 \tag{1.6}$$

$$\mathrm{e}^z = \exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}!) \tag{1.7}$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi\mathrm{i}) \quad (\exp \text{ ist } 2\pi\mathrm{i}\text{-periodisch}) \tag{1.8}$$

$$\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2\pi\mathrm{i}k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \tag{1.9}$$

Mit (1.7) folgt:

- **Horizontale Gerade** $y = \operatorname{Im} z = b$ ($b \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion liefert dann einen Ursprungsstrahl $\mathrm{e}^x(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Hierbei ist exp bijektiv, da das reelle exp bijektiv ist.
- **Vertikale Gerade** $x = \operatorname{Re} z = a$ ($a \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion bildet diese Gerade ab auf den Kreis $\partial B(0, \mathrm{e}^a)$ (lasse in (1.7) $y \in \mathbb{R}$ laufen). Dies ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Definiere den vertikalen Streifen $S_\mathrm{r}(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\}$ (mit $a_1 < a_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) und den horizontalen Streifen $S_\mathrm{i}(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$ (wobei $2\pi k - \pi \leq b_1 < b_2 < 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\exp\colon S_\mathrm{r}(a_1, a_2) \to B(0, \mathrm{e}^{a_2}) \setminus B(0, \mathrm{e}^{a_1})$$

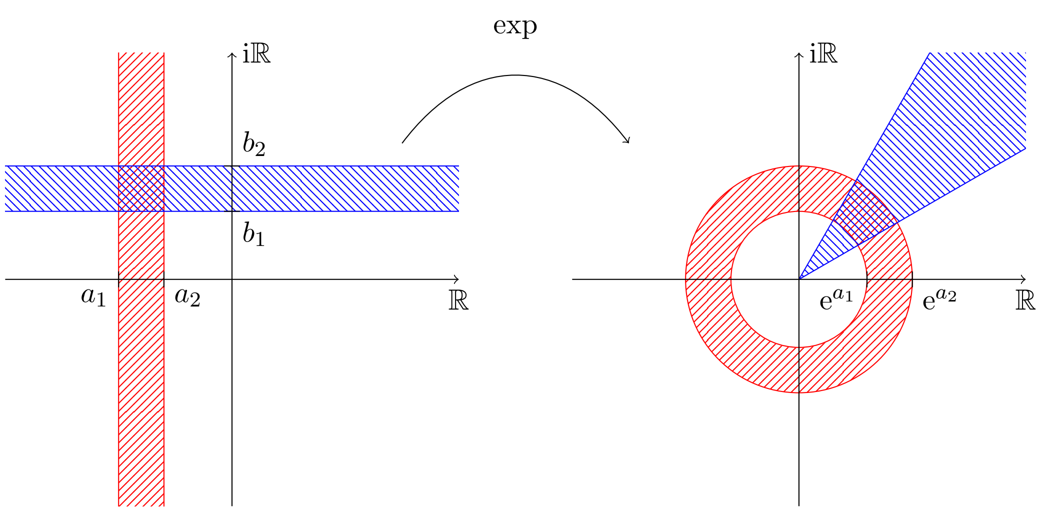
surjektiv, aber nicht injektiv, und

$$\exp\colon S_\mathrm{i}(b_1, b_2) \to \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

bijektiv (wobei $\theta_j = \arg(\cos b_j + \mathrm{i}\sin b_j)$ für $j = 1, 2$).
Sei speziell $S_\mathrm{i} = S_\mathrm{i}(-\pi, \pi)$. Wegen $\cos b_j + \mathrm{i}\sin b_j = 1$, $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = \pi$, ist dann

$$\exp|_{S_\mathrm{i}}\colon S_\mathrm{i} \to \Sigma_\pi$$

bijektiv.



Definition 1.13. Der *Hauptzweig des Logarithmus* ist

$$\log := \left(\exp|_{S_\mathrm{i}}\right)^{-1} : \Sigma_\pi \to S_\mathrm{i}.$$

Bemerkung. ln bezeichnet stets den reellen Logarithmus. $\exp|_{S_\mathrm{i}+\mathrm{i}\alpha}$ liefert andere Zweige des Logarithmus auf passenden E_α.

Per Definition gelten

$$\log(\exp(z)) = z \quad (\forall z \in S_\mathrm{i}),$$
$$\exp(\log(z)) = z \quad (\forall z \in \Sigma_\pi).$$

Da für alle z gilt $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$, liefert Satz 1.8, dass

$$\exp\colon S_\mathrm{i} \to \Sigma_\pi, \quad \log\colon \Sigma_\pi \to S_\mathrm{i}$$

biholomorph sind, und es existiert die Ableitung

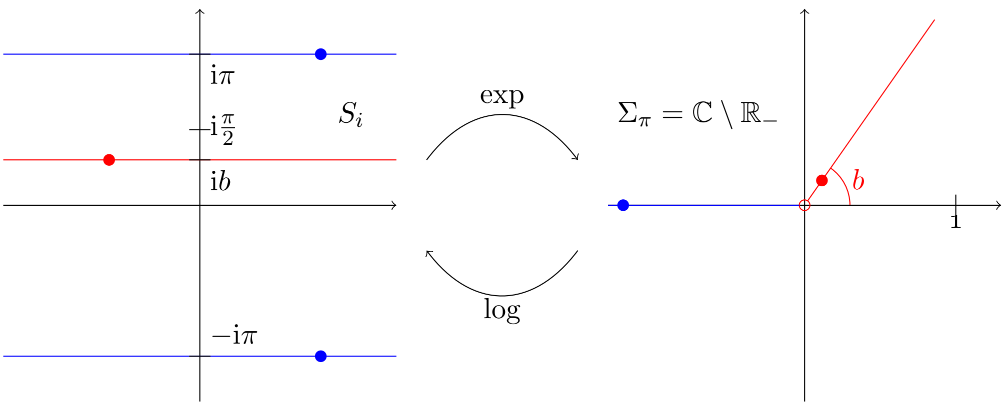
$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

für alle $w = \mathrm{e}^z \in \Sigma_\pi$, wobei $z \in S_\mathrm{i}$.
Für $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ mit $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$\log\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right) = \ln(r) + \mathrm{i}\phi, \tag{1.10}$$

denn $\exp(\ln(r) + \mathrm{i}\phi) \overset{(1.7)}{=} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und $\ln(r) + \mathrm{i}\phi \in S_\mathrm{i}$.

Beispiel. $\log(r) = \ln(r), \quad \log(i) = \log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$



wobei: $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ für $x \in \mathbb{R}$, $b \in (-\pi, \pi)$ und es gilt:

$$\log r\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \ln(r) + \mathrm{i}b \tag{1.11}$$

wobei $r > 0$ und $b \in (-\pi, \pi)$, also $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \in \Sigma_\pi$.

Vorsicht: Logarithmusgesetz gilt in $\mathbb{C}$ nur eingeschränkt. Beispiel: Seien $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$, $\phi + \psi > \pi \implies \phi + \psi - 2\pi \in (-\pi, \pi)$. Damit:

$$\log(e^{i\phi} e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} \overset{(1.11)}{=} i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i\phi + i\psi \overset{(1.11)}{=} \log(e^{i\phi}) + \log(e^{i\psi}).$$

Definition 1.14. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$, $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Setze

$$z^w := \exp(w \log z) \overset{(1.11)}{=} \exp((x + iy)(\ln(r) + i\phi)) = \underbrace{e^{x \ln r}}_{=|z|^x} e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y\ln(r))}.$$

Beispiel. $i^i \rightsquigarrow r = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 1 \implies i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Bemerkung 1.15. Seien z, w wie in Definition 1.14, $n \in \mathbb{N}$, $w_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Dann:

(a) $z^n \overset{1.14}{=} \exp(n \log z) \overset{(1.6)}{=} \exp(\log z) \cdots \exp(\log z) \overset{1.14}{=} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fach}} \overset{\text{alte Def.}}{=} z^n.$

- $z^0 = \exp(0 \log z) = 1.$
- $z^{-1} \overset{1.14}{=} \exp(-\log z) \overset{(1.6)}{=} \dfrac{1}{\exp(\log z)} = \dfrac{1}{z}.$

$\implies$ Def. 1.14 passt zu ganzen Exponenten.

(b) $z^{w_1+w_2} \overset{1.14}{=} \exp((w_1 + w_2) \log z) \overset{(1.6)}{=} \exp(w_1 \log z) \cdot \exp(w_2 \log z) \overset{1.14}{=} z^{w_1} z^{w_2}$

$\implies z = z^{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = \underbrace{z^{\frac{1}{n}} \cdots z^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-fach}} = (z^{\frac{1}{n}})^n.$

$\implies$ Für $w = \frac{1}{n}$ stimmen Definition 1.14 und 1.12 überein.

(c) $\dfrac{\partial}{\partial z} z^w = \dfrac{\partial}{\partial z} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \dfrac{w}{z} \overset{(b)}{=} w z^{w-1},$

$\dfrac{\partial}{\partial w} z^w = \dfrac{\partial}{\partial w} \exp(w \log z) = \log(z) z^w.$

(d) $|z^w| \overset{1.14}{=} |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \le |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im} w|}.$

1.2.4 Sinus und Kosinus

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ Aus den Reihendarstellungen folgen (Analysis 1):

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z) \tag{1.12}$$

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{1.13}$$

$$\text{mit (1.12)}: \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.14}$$

$$\overset{(1.7)}{\implies} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{ix}e^{y}) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x)$$

$$= \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y) \tag{1.15}$$

$$\text{wobei } \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \ \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\text{Genauso:} \quad \sin z = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \tag{1.16}$$

$\rightsquigarrow$ sin, cos sind in imaginärer Richtung unbeschränkt.

Aus (1.14) folgt ferner (Analysis 1):

$$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \tag{1.17}$$

Weiter gilt mir (1.14) und (1.6): $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} + e^{-iz}\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i}\right) = -\sin(z)$.

Genauso: $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$.

$\implies \cos(z+2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z+2\pi) = \sin(z)$.

Nullstellen: $\sin(z) = 0 \overset{(1.14)}{\iff} e^{iz} = e^{-iz} \overset{(1.7)}{\iff} e^{-y}(\cos x + i\sin x) = e^{y}(\cos x - i\sin x)$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} \text{Imaginärteil: } \sin x = 0 \text{ (da } e^y \neq -e^{-y}) \\ \text{Realteil: } \cos x = 0 \text{ oder } e^y = e^{-y} \text{ (} \iff y = 0) \end{array}\right\} \iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit: $\cos(z) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Zusammengefasst: sin, cos *haben auf* $\mathbb{C}$ *nur die reellen Nullstellen und Perioden.* (1.18)

Wenn der reelle sin *bzw.* cos *auf* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *injektiv ist,*
dann ist der komplexe sin *bzw.* cos *auf* $S_r(a,b)$ *injektiv.* (1.19)

Beweis. (für cos): Nach Vorraussetzung muss cos auf (a,b) strikt monoton sein.
$\implies (a,b) \subseteq (k\pi,(k+1)\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Seien also $z, w \in S_r(a,b)$ (wobei $z \neq w$) $\implies z+w, z-w \neq 2j\pi$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$
$\overset{(1.11)}{\implies} \cos z - \cos w \neq 0$. □

$\implies$ cos ist auf $S_r(0,\pi)$ injektiv, sin ist auf $S_r(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ injektiv.

Bild von cos **auf** $S_r(0,\pi) =: S_r$**:** Horizontale Gerade: $z = x + ib$ mit $x \in \mathbb{R}$ und festem $b \in \mathbb{R}$. Mit (1.15):

$$\cos(t) = \cosh(b)\cos(x) + i\sinh(b)\sin(x)$$

$\implies$ Bild der Geraden ist eine Ellipse $E(b)$ mit Scheiteln $(\pm\cosh(b), 0)$ und $(0, \pm\sinh(b))$.

Für $x \in (0,\pi)$ erhalten wir für $b > 0$ den oberen Bogen von $E(b)$, den unteren Bogen für $b < 0$. Da $x \neq 0, \pi$ sind diese Bogen ohne die Endpunkte:

$$(\pm\underbrace{\cosh(b)}_{\geq 1}, 0) \implies \cos(S_r) \subseteq D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty)).$$

Klar: $\cos((0,\pi)) = (-1,1)$. Sei $w \in D\setminus(-1,1)$, also $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, da hier $w = u + iv$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Suche $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$w \in E(b) \iff f(b) := \frac{u^2}{\cosh^2(b)} + \frac{v^2}{\sinh^2(b)} \overset{!}{=} 1.$$

So ein b existiert, da f stetig ist (ZWS): $f(b) \to 0$ für $b \to \pm\infty$, $f(b) \to \pm\infty$ für $b \to 0$, da $v \neq 0$.
$\implies \cos\colon S_r \to D$ bijektiv $\implies$ haben Hauptzweig des Arcuscosinus:

$$\arccos\colon D \to S_r, \quad \arccos = (\cos|_{S_r})^{-1}.$$

Da $\cos'(z) = -\sin(z) \neq 0 \ \forall z \in S_r$ sind

$$\cos\colon S_r \to D, \quad \arccos\colon D \to S_r$$

biholomorph. Mit Verschiebung: $\sin\colon S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to D$ ist biholomorph mit Inversem arcsin.