19. Messbare Mengen und messbare Funktionen

Definition
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **(Lebesgue-)messbar** (mb) $:\iff \exists$ Folge quadrierbarer Mengen (A_k) mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$\mathfrak{L}_n := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : \ A \text{ ist messbar}\}$. Ist A quadrierbar $\implies A \in \mathfrak{L}_n$. Die Abbildung $\lambda_n \to \tilde{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\lambda_n(A) := \begin{cases} v_n(A) & \text{, falls } A \text{ quadrierbar} \\ \infty & \text{, falls } A \text{ nicht quadrierbar} \end{cases}$$

heißt das **n-dimensional Lebesguemaß**.

Beispiel
$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{L}_n, \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \infty$

Satz 19.1
Es seien $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{L}_n$

(1) $A \setminus B, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \ \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{L}_n$.

(2) Sei $B \subseteq A$

   (i) $\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A)$.

   (ii) Ist B quadrierbar $\implies \lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(A) - \lambda_n(B)$

(3) $\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$.

(4) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ folgt

$$\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j=1} \lambda_n(A_j)$$

(5) Ist A_1 quadrierbar und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ folgt

$$\lambda_n(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j=1} \lambda_n(A_j)$$

(6) Ist $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ folgt

$$\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

Ohne Beweis!

Folgerung 19.2

(1) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

Beweis

(1) folgt aus 17.10

(2) $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen $\overset{(1)}{\implies} \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{L}_n \xrightarrow{19.1(1)} A \in \mathfrak{L}_n$. ∎

Definition

Sei $A \in \mathfrak{L}_n$ und $F : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. f heißt **messbar**: $\iff$ $\exists$ Folge (φ_k) in $\mathscr{T}_n$: (φ_k) konvergiert fast überall auf $\mathbb{R}^n$ punktweise gegen f_A.

Satz 19.3

$A \in \mathfrak{L}_n, f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ seien Funktionen.

(1) Ist $f \in L(A) \implies f$ ist messbar.

(2) Sind f,g messbar $\implies f + g, f^+, f^-, cf$ $(c \in \mathbb{R}), |f|^p$ $(p > 0), \max(f, g), \min(f, g)$ sind messbar $(\infty^p := \infty)$

Ohne Beweis!