

3 Produktmaße und Unabhängigkeit

3.1 Der allgemeine Fall

Im Folgenden sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. $\forall i \in I$ sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein messbarer Raum. Weiter sei $\Omega := \times_{i \in I} \Omega_i$ ein neuer Ergebnisraum. Wir definieren die **Projektion** auf die i -te Koordinate $\Pi_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ durch $\Pi_i(\omega) = \omega_i$.

Definition Die **Produkt- σ -Algebra** $\mathcal{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist die kleinste σ -Algebra mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ die Abbildung Π_i $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$ -messbar ist. Genauer:

$$\mathcal{A} := \sigma \left(\bigcup_{i \in I} \{ \Pi_i^{-1}(A_i) | A_i \in \mathcal{A}_i \} \right)$$

Bemerkung Sei $J \subset I$, $\Pi_J : \Omega \rightarrow \times_{i \in J} \Omega_i$, $\Pi_J(\omega)(j) = \omega_j$ ($j \in J$) die Projektion auf die J -Koordinaten, so bildet

$$\left\{ \Pi_J^{-1}(A_J) | A_J \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{A}_i, J \subset I, J \text{ endlich} \right\}$$

ein durchschnittstables Erzeugendensystem von \mathcal{A} . Man nennt diese Mengen auch **Zylindermengen** mit endlicher Basis.

$$\left(A_J = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{|J|}}, \Pi_J^{-1}(A_J) = \bigcap_{k=1}^{|J|} \Pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \right)$$

Beispiel 3.1 Ist $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, so ist (vgl. Stochastik I, §8):

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n | A_i \in \mathcal{A}_i, i \in \{1, \dots, n\}\})$$

Wir betrachten zunächst den Fall $|I| = 2$. Gegeben seien zwei Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$. Weiter sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wir müssen nun ein Produktmaß konstruieren.

Lemma 3.1 Für alle $A \in \mathcal{A}$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$ gilt:

$$\begin{aligned} A_{\omega_1} &:= \{ \omega_2 \in \Omega_2 | (\omega_1, \omega_2) \in A \} \in \mathcal{A}_2 \text{ und} \\ A_{\omega_2} &:= \{ \omega_1 \in \Omega_1 | (\omega_1, \omega_2) \in A \} \in \mathcal{A}_1. \end{aligned}$$

A_{ω_i} heißt ω_i -Schnitt von A für $i = 1, 2$.

- hier fehlt eine Skizze -

Beweis Sei $\omega_1 \in \Omega_1$. Dann ist $\mathcal{A}' := \{A \in \mathcal{A} \mid A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\} \subset \mathcal{A}$, also die Menge der Mengen, für die das Lemma gilt, eine σ -Algebra, denn:

(i)

$$\Omega_{\omega_1} = \Omega_2 \in \mathcal{A}_2 \implies \Omega \in \mathcal{A}'$$

(ii)

$$\begin{aligned} (\Omega \setminus A)_{\omega_1} &= \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \notin A\} \\ &= \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}^C \\ &= \Omega_2 \setminus \underbrace{A_{\omega_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

$$\implies (\Omega \setminus A)_{\omega_1} \in \mathcal{A}'.$$

(iii)

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_{\omega_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_{\omega_1} \in \mathcal{A}'$$

$$\text{Wegen } (A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & , \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & , \omega_1 \notin A_1 \end{cases} \in \mathcal{A}_2 \text{ gilt:}$$

$$\sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) \subset \mathcal{A}', \text{ also gilt } \mathcal{A} = \mathcal{A}'$$

mit der Voraussetzung von oben. Aus Symmetriegründen gilt die entsprechende Aussage auch für A_{ω_2} , $\omega_2 \in \Omega_2$. ■

Lemma 3.2 Die Maße μ_1, μ_2 seien σ -endlich. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\mapsto \mu_2(A_{\omega_1}) \text{ ist } (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B}_{(-\infty, \infty]})\text{-messbar,} \\ \omega_2 &\mapsto \mu_1(A_{\omega_2}) \text{ ist } (\mathcal{A}_2, \mathfrak{B}_{(-\infty, \infty]})\text{-messbar.} \end{aligned}$$

Beweis μ_2 σ -endlich $\implies \exists (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_2$ mit $B_n \uparrow \Omega_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Setze $f_A(\omega_1) := \mu_2(A_{\omega_1})$, $f_{A,n}(\omega_1) := \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n)$. Sei $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A} \mid f_{D,n} \text{ ist } (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})\text{-messbar}\}$ für ein festes n . Dann gilt:

- (i) $f_{\Omega,n} = \mu_2(\Omega_2 \cap B_n) = \mu_2(B_n)$
- (ii) $f_{D^C,n} = \mu_2(B_n) - f_{D,n}$, also $D \in \mathcal{D} \implies D^C \in \mathcal{D}$
- (iii) $f_{\sum_{i=1}^{\infty} D_i,n} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{D_i,n}$, also $D_i \in \mathcal{D} \implies \sum_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}$

Damit ist \mathcal{D} ein Dynkin-System (vgl. Stochastik 1).

Wegen $f_{A_1 \times A_2,n}(\omega_1) = \mu_2(A_2 \cap B_n) \cdot \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)$ ist $f_{A_1 \times A_2,n}$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ messbar und daher $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$.

\mathcal{D} enthält also das durchschnittstabile Erzeugendensystem von \mathcal{A} .

$\xrightarrow{\text{St.1, S.4.3}} \mathcal{D} = \mathcal{A} \implies f_{A,n}$ ist $(\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})$ -messbar $\forall A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $f_A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_{A,n}\}$ folgt die Behauptung. ■

Definition 3.1 und Satz:

Sind μ_1, μ_2 σ -endlich, so existiert genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$. μ heißt **Produktmaß** von μ_1 und μ_2 , Schreibweise: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Für μ gilt¹:

$$\mu(A) = \int \mu_2(A_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) = \int \mu_1(A_{\omega_2}) \mu_2(d\omega_2) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Schließlich ist μ auch σ -endlich.

Beweis Es seien wieder $f_A(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$. Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, A_n$ paarweise disjunkt und $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int f_A d\mu_1 & \stackrel{\text{stetig von unten}}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_{\sum_{i=1}^n A_i} \right) d\mu_1 \\ & \stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_{\sum_{i=1}^n A_i} d\mu_1 \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int f_{A_i} d\mu_1 \right) \right) \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int f_{A_i} d\mu_1 \right) \end{aligned}$$

Außerdem ist $\int f_{\emptyset} d\mu_1 = \int 0 d\mu_1 = 0$.

Also ist $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, $\Pi(A) := \int f_A d\mu_1$ ein Maß auf \mathcal{A} . Nach Konstruktion gilt:

$$\Pi(A_1 \times A_2) = \int \mu_2(A_2) \cdot \mathbf{1}_{A_1} d\mu_1 = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1).$$

Analog ist $\Pi'(A) := \int \mu_1(A_{\omega_2}) \cdot \mu_2(d\omega_2)$ ein Maß mit $\Pi'(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, d.h. Π und Π' stimmen auf dem durchschnittstabilen Erzeuger $\{A_1 \times A_2 | A_i \in \mathcal{A}_i\}$ überein. Der Eindeutigkeitssatz für Maße (vgl. Übung) liefert $\Pi = \Pi' =: \mu$ auf ganz \mathcal{A} . σ -Endlichkeit ist klar. ■

¹Anmerkung: $\int_{\Omega} f d\mu = \int f(\omega) \mu(d\omega)$

Wie integriert man bzgl. $\mu_1 \otimes \mu_2$?

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so sei

$$\begin{aligned} f_{\omega_1} : \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f_{\omega_1}(\omega_2) &:= f(\omega_1, \omega_2), \\ f_{\omega_2} : \Omega_1 &\rightarrow \mathbb{R}, & f_{\omega_2}(\omega_1) &:= f(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Lemma 3.3 *Ist $f(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar, so ist $f_{\omega_1}(\mathcal{A}_2, \mathfrak{B})$ -messbar $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ und f_{ω_2} ist $(\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})$ -messbar $\forall \omega_2 \in \Omega_2$.*

Beweis

$$\begin{aligned} f_{\omega_1}^{-1}(B) &= \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid f(\omega_1, \omega_2) \in B\} \\ &= (\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\})_{\omega_1} \\ &= \left(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}} \right)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \forall B \in \mathfrak{B}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 3.1 (Satz von Fubini, Teil I, auch: Satz von Tonelli)

Es seien μ_1 und μ_2 σ -endlich sowie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar². Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_1 &\mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2 \quad (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B}_{(-\infty, \infty]})\text{-messbar und} \\ \omega_2 &\mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1 \quad (\mathcal{A}_2, \mathfrak{B}_{(-\infty, \infty]})\text{-messbar und es gilt:} \end{aligned}$$

$$\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1).$$

Beweis mit algebraischer Induktion.

(1) Falls $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ erhält man mit $(\mathbf{1}_A)_{\omega_2}(\omega_1) = \mathbf{1}_{A_{\omega_2}}(\omega_1)$ die Beziehung

$$\int f_{\omega_2} d\mu_1 \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mathbf{1}_{(A_i)_{\omega_2}} d\mu_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_1((A_i)_{\omega_2})$$

$$\stackrel{\text{L.3.2}}{\implies} \omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1 \text{ ist messbar.}$$

$$\implies \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mu_1((A_i)_{\omega_2}) \mu_2(d\omega_2)$$

$$\stackrel{D.3.1}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu_1 \otimes \mu_2(A_i) = \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

²Dass hier $f \geq 0$ gilt, ist wesentlich für Fubini I; den allgemeinen Fall behandelt Fubini II.

(2) $f \geq 0$, f $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar.

$\implies \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_n \uparrow f$ und $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int u_n d\mu)$.

Wegen $(u_n)_{\omega_2} \uparrow f_{\omega_2}$ und $g_n(\omega_2) := \int (u_n)_{\omega_2} d\mu_1 \uparrow \int f_{\omega_2} d\mu_1 \forall \omega_2 \in \Omega_2$ ist nach Schritt 1 $\int g_n(\omega_2) \mu_2(d\omega_2) = \int u_n d(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int g_n d\mu_2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int u_n d(\mu_1 \otimes \mu_2) \right) \\ &= \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

Wiederhole die Schritte mit ω_2 statt mit ω_1 und erhalte den Rest der Behauptung. ■

Bevor wir den Satz von Fubini für allgemeine f beweisen, benötigen wir folgende Überlegung:

Bemerkung 3.1 Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A^C) = 0$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, so nennen wir f $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar, μ -integrierbar, etc., wenn dies auf die folgende Fortsetzung \bar{f} von f zutrifft:

$$\bar{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f}(\omega) := \begin{cases} f(\omega) & \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und schreiben dann } \int f d\mu \text{ statt } \int \bar{f} d\mu.$$

Satz 3.2 (Satz von Fubini, Teil II)

Es seien μ_1 und μ_2 σ -endlich, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -integrierbar.

Dann sind μ_1 -fast alle f_{ω_1} μ_2 -integrierbar und μ_2 -fast alle f_{ω_2} μ_1 -integrierbar.

Weiter sind die Integrale

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$$

und

$$\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$$

als Funktionen von ω_1 bzw. ω_2 im obigen Sinne μ_1 - bzw. μ_2 -integrierbar und es gilt:

$$\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1)$$

Beweis

Es gilt $|f|_{\omega_1} = |f_{\omega_1}|$, $f_{\omega_1}^+ = (f_{\omega_1})^+$ und $f_{\omega_1}^- = (f_{\omega_1})^-$.

Also folgt aus Satz 3.1.:

$$\begin{aligned} \int |f| d\mu &= \int \left(\int |f_{\omega_1}| d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) < \infty \quad (\text{das ist die Voraussetzung}) \\ \implies \mu_1 \left(\left\{ \omega_1 \mid \int |f_{\omega_1}| d\mu_2 = \infty \right\} \right) &= 0 \\ \implies f_{\omega_1} &\text{ ist } \mu_1\text{-f.ü. } \mu_2\text{-integrierbar.} \end{aligned}$$

Satz 3.1. angewandt auf $f_{\omega_1}^+$ und $f_{\omega_1}^-$ ergibt, dass

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\omega_2 = \left(\int f_{\omega_1}^+ d\mu_2 - \int f_{\omega_1}^- d\mu_2 \right)$$

$(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar ist (auf einer μ_1 -Nullmenge könnte “ $\infty - \infty$ ” stehen und die Funktion wäre dort nicht definiert, siehe hierzu aber die vorstehende Bemerkung) und

$$\begin{aligned} \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) &= \int \left(\int f_{\omega_1}^+ d\mu_2 - \int f_{\omega_1}^- d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int f d\mu. \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit dem Symmetrieargument. ■

Bemerkung 3.2

a) Der Satz von Fubini läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \int f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \int \int f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \end{aligned}$$

Die Integrationsreihenfolge spielt also keine Rolle.

b) Sind messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ($i \in I$) gegeben mit $|I|$ endlich und $|I| > 2$, so erhält man ein Maß $\mu := \bigotimes_{i \in I} \mu_i$ auf der Produkt- σ -Algebra durch schrittweises Ausführen von Produkten mit 2 Faktoren. Insbesondere gilt auf Rechteckmengen $A_1 \times \cdots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, n$):

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i).$$

Da die Rechteckmengen ein durchschnittstabiler Erzeuger von \mathcal{A} sind, folgt wegen der Eindeutigkeit von μ :

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) \quad (\text{Assoziativität des Maßprodukts})$$

Satz 3.3

Auf (Ω, \mathcal{A}) existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P := \bigotimes_{i \in I} P_i$ mit

$$P^{\Pi_J} = \bigotimes_{i \in J} P_i \quad \forall J \subset I, J \text{ endlich.}$$

Beweis Siehe z.B. Bauer, Henze, Stochastik II S.8.13. ■

$$\begin{array}{ccc}
\mu & & \mu^T \\
(\Omega, \mathcal{A}) & \xrightarrow{T} & (\Omega', \mathcal{A}') \\
P & & P^{\Pi_J} \\
(\Omega, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\Pi_J} & (\times_{i \in J} \Omega_i, \otimes_{i \in J} \mathcal{A}_i)
\end{array}$$

z.B. $P((\times_{i \in J} \mathcal{A}_i) \times (\times_{j \notin J} \Omega_j)) = \prod_{i \in J} P_i(\mathcal{A}_i)$, $A = \times_{i \in J} A_i$

Definition Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega'_i, \mathcal{A}'_i)$ ein messbarer Raum $\forall i \in I$. $X_i : \Omega \rightarrow \Omega'_i$ seien Zufallsgrößen. Die Familie $(X_i)_{i \in I}$ heißt **stochastisch unabhängig** genau dann, wenn $\forall J \subset I, J$ endlich und $\forall A'_j \in \mathcal{A}'_j, j \in J$

$$\underbrace{P(\cap_{j \in J} \{X_j \in A'_j\})}_{P^X(\times_{j \in J} A'_j \times \times_{i \notin J} \Omega_i)} = \prod_{j \in J} \underbrace{P(X_j \in A'_j)}_{P^{X_j}(A'_j)}$$

Bemerkung Bei der Überprüfung der Bedingung kann man sich auf $A_j \in \mathcal{E}_j$ beschränken, wobei \mathcal{E}_j ein durchschnittsstabiler Erzeuger von \mathcal{A}_j ist.

In der Situation der vorigen Definition gilt für $\Omega' := \times_{i \in I} \Omega_i, \mathcal{A}' := \otimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$:

$$X : \Omega \rightarrow \Omega', (X(\omega))(i) := X_i(\omega), \forall i \in I, \omega \in \Omega$$

ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -messbar (vgl. Ü 2.1), d.h. X transportiert P zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^X auf (Ω', \mathcal{A}') . P^X nennt man auch **gemeinsame Verteilung** der Zufallsgrößen $X_i, i \in I$.

Satz 3.4

Die Familie $X = (X_i)_{i \in I}$ ist genau dann unabhängig, wenn

$$P^X = \otimes_{i \in I} P^{X_i}$$

Beweis Folgt aus der Definition und S.3.3. ■

Bemerkung

- (i) Unabhängigkeit der $(X_i)_{i \in I}$ ist äquivalent dazu, dass jede endliche Teilfamilie $(X_i)_{i \in J}, J \subset I, (J \text{ endlich})$, unabhängig ist.
- (ii) Sei $\Omega'_i = \mathbb{R}, X = (X_1, \dots, X_d)$ ein Zufallsvektor und $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. $F_X(x_1, \dots, x_d) = P^X((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_d]) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$ ist die gemeinsame Verteilungsfunktion. Da $\mathcal{E} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^d\}$ durchschnittsstabiler Erzeuger von \mathfrak{B}^d ist, sind
 X_1, \dots, X_d unabhängig $\iff F_X(x_1, \dots, x_d) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_d}(x_d) \forall x \in \mathbb{R}^d$.
 Falls Dichten existieren:
 X_1, \dots, X_d unabhängig $\iff f_X(x_1, \dots, x_d) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_d}(x_d) \forall x \in \mathbb{R}^d$

- (iii) Als Wahrscheinlichkeitsraum für das Experiment “ ∞ -oft Münze werfen” kann man z.B. $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} = \otimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0, 1\})$, $P = \otimes_{i \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1))$ wählen. S.3.3 impliziert, dass es zu jedem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren gibt. Man kann beim Münzexperiment auch $([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$, $X_n(\omega) = \lfloor 2^n \cdot \omega \rfloor \bmod 2$ wählen. (vgl. Bsp 13.2 St I)

3.2 Reellwertige Abbildungen, Rechnen mit Verteilungen

Wir betrachten den Spezialfall $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ für $i = 1, \dots, d$. Hier folgt: $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i = \sigma(\{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] : a_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, d\}) = \mathfrak{B}^d$.

$P = \lambda^d, \lambda^d((a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \hat{=} \text{Volumen}$. Was passiert, wenn $(a, b]$ mit einer Abbildung Ψ transformiert wird?

Satz 3.5 (Transformationssatz für das d -dimensionale Lebesgue-Maß)

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi : U \rightarrow V$ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Gilt dann $\det(\Psi')(x) \neq 0 \forall x \in U$, so hat das Bildmaß der Einschränkung von λ^d auf U unter Ψ bzgl. der Einschränkung von λ^d auf V die Dichte

$$\frac{d(\lambda_U^d)^\Psi}{d\lambda_V^d}(y) = \frac{1}{|\det \Psi'(\Psi^{-1}(y))|} \quad \forall y \in V.$$

Beweis Henze, Stochastik II. ■

Bemerkung

- (a) Unter den Voraussetzungen von S.3.5 ist auch Ψ^{-1} stetig differenzierbar und die Kettenregel liefert:

$$\det(\Psi'(\Psi^{-1}(y))) \cdot \det((\Psi^{-1})'(y)) = 1.$$

Es gilt also

$$\frac{d(\lambda_U^d)^\Psi}{d\lambda_V^d}(y) = |\det(\Psi^{-1})'(y)| \quad \forall y \in V.$$

- (b) Mit S.2.4 gilt:

$$\int_U f(\Psi(x)) dx \stackrel{\text{S.2.4}}{=} \int_V f(y) d(\lambda_U^d)^\Psi = \int_V f(y) |\det(\Psi^{-1})'(y)| dy$$

bzw.

$$\int_U g(x) dx = \int_V g(\Psi^{-1}(y)) |\det(\Psi^{-1})'(y)| dy$$

Beispiel 3.2 Transformation auf Polarkoordinaten

Hier: $d=2$. $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ oder } x_2 \neq 0\}$, $V = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $\Psi : U \rightarrow V, (x_1, x_2) \xrightarrow{\Psi} (r, \Phi)$ bijektiv. $(\Psi^{-1})_1(r, \Phi) = r \cos \Phi$, $(\Psi^{-1})_2(r, \Phi) = r \sin \Phi$.

$$\implies (\Psi^{-1})'(r, \Phi) = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -r \sin \Phi \\ \sin \Phi & r \cos \Phi \end{pmatrix}$$

$$\implies \frac{d(\lambda_U^d)^\Psi}{d(\lambda_V^d)} = r \cos^2 \Phi + r \sin^2 \Phi = r \quad \forall (r, \Phi) \in V.$$

Wir bekommen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} r \cdot g(r \cos \Phi, r \sin \Phi) dr d\Phi$$

Im Folgenden sei $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor.

Satz 3.6 (Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten)

Es seien U und V offene Teilmengen von \mathbb{R}^d und $\Psi : U \rightarrow V$ eine bijektive, stetige und differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\det \Psi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U.$$

Ist dann X ein Zufallsvektor auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $P(X \in U) = 1$ und Dichte f_X , so ist auch $Y := \Psi(X)$ absolutstetig und eine Dichte f_Y von Y auf V ist gegeben durch

$$f_Y(y) = |\det(\Psi^{-1})'(y)| f_X(\Psi^{-1}(y)) \quad \forall y \in V$$

Beweis Seien $A \subset V, A \in \mathfrak{B}^d$. Mit Satz 3.5 folgt:

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(X \in \Psi^{-1}(A)) \\ &= \int_U \mathbf{1}_{\Psi^{-1}(A)}(x) f_X(x) dx \\ &= \int_V \mathbf{1}_{\Psi^{-1}(A)}(\Psi^{-1}(y)) f_X(\Psi^{-1}(y)) \cdot |\det(\Psi^{-1})'(y)| dy \\ &= \int_A |\det(\Psi^{-1})'(y)| f_X(\Psi^{-1}(y)) dy \end{aligned}$$

■

Beispiel 3.3 (Box-Muller-Algorithmus zur Erzeugung von $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen)

Seien $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$ und unabhängig. Definiere:

$$X_1 := \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) = \Psi_1(U_1, U_2)$$

$$X_2 := \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) = \Psi_2(U_1, U_2)$$

Dann sind $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ und unabhängig. Beweis mit Satz 3.6. Sei $U = (0, 1)^2$

$$\begin{aligned}
 V &= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1 < 0 \text{ oder } X_2 \neq 0\} \\
 \Psi'(u) &= \begin{pmatrix} -(-2 \log(u_1))^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos(2\pi u_2)}{u_1} & -(-2 \log u_1)^{\frac{1}{2}} 2\pi \sin(2\pi u_2) \\ -(-2 \log(u_1))^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi u_2)}{u_1} & (-2 \log u_1)^{\frac{1}{2}} 2\pi \cos(2\pi u_2) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \det \Psi' &= -\frac{2\pi}{u_1} \text{ und} \\
 u_1 &= e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\
 \Rightarrow f_X(x) &= \frac{1}{|\det \Psi'(\Psi^{-1}(x))|} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2} \\
 \Rightarrow &\text{ Behauptung}
 \end{aligned}$$

Satz 3.7

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten f_X und f_Y , so ist auch die Zufallsvariable $Z := X + Y$ absolutstetig und eine zugehörige Dichte ist gegeben durch:

$$f_Z(z) = \int f_X(x) \cdot f_Y(z - x) dx \quad \text{„Faltung“}$$

Beweis Verwende Satz 3.6 mit $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Psi(x, y) = (x, x + y)$ ($\Psi^{-1}(x, z) = (x, z - x)$)

$$\Rightarrow f_{X,Z}(x, z) = f_{X,Y}(x, z - x) = f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$$

Die „Randdichte“ f_Z bekommt man durch Integration über x . ■

Beispiel 3.4 a) Sind die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_d unabhängig und $X_i \sim \exp(\lambda), i = 1, \dots, d, \lambda > 0$, so hat $X_1 + \dots + X_d$ die Dichte

$$f_{X_1 + \dots + X_d}(z) = \frac{\lambda^d}{(d-1)!} z^{d-1} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(z)$$

(\rightarrow Gamma-Verteilung bzw. Erlang-Verteilung)

b) Sind X_1, \dots, X_d unabhängig und $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, d$ so gilt falls $\sum a_i^2 \neq 0$

$$\sum_{i=1}^d a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^d a_i \mu_i, \sum_{i=1}^d a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Beispiel 3.5 (Gemeinsame Verteilung der Ordnungsstatistiken)

Es seien X_1, \dots, X_d unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f . Weiter sei $(X_{1:d}, \dots, X_{d:d})$ eine Permutation von X_1, \dots, X_d , so dass

$$X_{1:d} < \dots < X_{d:d}$$

$X_{r:d}$ heißt **r -te Ordnungsstatistik** von X .

Sei S_d die Menge der Permutationen der Zahlen $1, \dots, d$. Dann gilt für $\pi \in S_d$:

$$(X_{1:d}, \dots, X_{d:d}) = (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)}), \text{ falls } X_{\pi(1)} < \dots < X_{\pi(d)}$$

Für jede messbare Funktion $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$g(X_{1:d}, \dots, X_{d:d}) = \sum_{\pi \in S_d} g(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)}) \cdot \mathbf{1}_{[X_{\pi(1)} < \dots < X_{\pi(d)}]}$$

Es gilt:

$$f_{X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)}}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d f(x_i) = f_X(x)$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} Eg(X_{1:d}, \dots, X_{d:d}) &= \sum_{\pi \in S_d} \int_{x_1 < \dots < x_d} g(x) \prod_{i=1}^d f(x_i) dx_1 \dots dx_d \\ &= d! \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \prod_{i=1}^d f(x_i) \mathbf{1}_{[x_1 < \dots < x_d]}(x) dx_1 \dots dx_d \end{aligned}$$

Sei $g(x) = \mathbf{1}_B(x)$ mit $B \in \mathfrak{B}^d$, dann folgt:

$$f_{X_{1:d}, \dots, X_{d:d}}(x_1, \dots, x_d) = d! \prod_{i=1}^d f(x_i) \mathbf{1}_{[x_1 < \dots < x_d]}(x)$$

Konkrete Anwendung:

Gegeben 12 Trinkgläser. Lebensdauer unabhängig $\exp(\lambda)$ -verteilt. Nach der vorigen Überlegung gilt

$$\begin{aligned} f_{(X_{1:d}, \dots, X_{d:d})}(x) &= \begin{cases} d! \lambda^d e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_d)} & , \text{ falls } x_1 < \dots < x_d \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow f_{(X_{1:d}, X_{2:d})}(x) &= \begin{cases} d(d-1) \lambda^2 e^{-(d-2)\lambda x_2} e^{-\lambda(x_1 + x_2)} & , \text{ falls } x_1 < x_2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \xRightarrow{\text{Satz 3.6}} f_{(X_{2:d} - X_{1:d}, X_{1:d})}(y_1, y_2) &= \begin{cases} d(d-1) \lambda^2 e^{-d\lambda y_2} e^{-(d-1)\lambda y_1} & , \text{ falls } y_1, y_2 > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow f_{X_{2:d} - X_{1:d}}(y_1) &= \begin{cases} (d-1) \lambda e^{-(d-1)\lambda y_1} & , \text{ falls } y_1 > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ f_{X_{1:d}}(y_2) &= \begin{cases} d \lambda e^{-d\lambda y_2} & , \text{ falls } y_2 > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

also $X_{1:d} \sim \exp(\lambda d)$, $X_{2:d} - X_{1:d} \sim \exp(\lambda(d-1))$ und unabhängig.

$$\Rightarrow X_{k:d} - X_{(k-1):d} \sim \exp((d-k+1)\lambda)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 E[X_{k:d} - X_{(k-1):d}] &= \frac{1}{(d-k+1)\lambda} \\
 \Rightarrow \frac{E[X_{d:d} - X_{(d-1):d}]}{EX_{d:d}} &= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\sum_{k=1}^d \frac{1}{(d-k+1)\lambda}} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^d \frac{1}{k} \right)^{-1} \\
 &= (\log d)^{-1} + O(1)
 \end{aligned}$$

Für $d = 12$: 0.32