1 Affine Varietäten

§1 Der Polynomring

Sei k ein Körper, $k[X_1, \ldots, X_n]$, $n \geq 0$ der Polynomring über k in n Variablen.

Universelle Abbildungseigenschaft (UAE) des Polynomrings

Ist A eine k-Algebra und sind $a_1, \ldots, a_n \in A$, so gibt es genau einen k-Algebra-Homomorphismus $f : k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ mit $f(X_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
Folgerung: Jede endlich erzeugte k-Algebra ist Faktorring eines Polynomrings.

$n = 1$, also $k[X]$

Euklidischer Algorithmus: Zu $f, g \in k[X], g \neq 0$ gibt es $q, r \in k[X]$ mit $f = qg + r$ und $deg(r) < deg(g)$ oder $r = 0$.
Folgerung: $k[X]$ ist Hauptidealring.

Eindeutige Primfaktorzerlegung

$k[X_1, \ldots, X_n]$ ist faktorieller Ring.
Folgerung: Jedes irreduzible Polynom erzeugt ein Primideal.

Hilbertscher Basissatz

$k[X_1, \ldots, X_n]$ ist noethersch, d.h.
- Jedes Ideal ist endlich erzeugbar.
- Jede aufsteigende Kette von Idealen wird stationär.

§2 Die Zariski-Topologie

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 1.2.1
Eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt ***affine Varietät***, wenn es eine Menge von Polynomen $F \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt, so dass $V(F) = V = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$.

Beispiele
1) $n = 1 : \quad V \subseteq k$ affine Varietät $\Leftrightarrow V$ endlich oder $V = k$
2) $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ linear (d.h. $deg(f) = 1$) $\Rightarrow V(f)$ ist affine Hyperebene.

$f_1, \dots, f_r$ linear $\Rightarrow V(f_1, \dots, f_r)$ ist affiner Unterraum. (Jeder affine Unterraum lässt sich so beschreiben.)
3) Quadriken sind affine Varietäten.
4) Lemniskate
$$C = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_1) = d(P, P_2) = c\}$$
für Punkte $P_1P_2 \in k^2, c > 0$.
Für $P_1(-1, 0)$ und $P_2(1, 0)$ ist $C = V(f)$ mit $f = ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) - 1$. Dies ist aber keine affine Varietät, da das in $\mathbb{C}^2$ nicht klappt.

Bemerkung 1.2.2
(i) Für $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist $V(F_1) \supseteq V(F_2)$.
(ii) $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$ und $V(f_1, f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$
(iii) $V(F) = V((F))$ für das von F erzeugte Ideal $(F) \subset k[X_1, \dots, X_n]$
(iv) $V(F) = V(\sqrt{(F)})$ für das von F erzeugte Radikalideal
$$\sqrt{(F)} = \{g \in k[X_1, \dots, X_n] : \exists d > 0 \text{ mit } g^d \in (F)\}$$
(v) Zu jeder affinen Varietät $V \subseteq k^n$ gibt es endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_r$, so dass $V = V(f_1, \dots, f_r)$, da jedes Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ endlich erzeugbar ist.

Beweis (iii) "$\subseteq$" Sei $x \in V(F), g \in (F)$. Schreibe $g = a_1f_1 + \dots + a_rf_r$ mit $f_i \in F, a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$, dann ist $g(x) = a_1(x)f_1(x) + \dots + a_r(x)f_r(x) = 0$. □

Definition 1.2.3
(i) Für eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt $I(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$ das ***Verschwindungsideal***.
(ii) $A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ heißt ***affiner Koordinatenring*** von V.
Für $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ gilt: $f|_V = g|_V \Leftrightarrow f - g \in I(V)$

Bemerkung 1.2.4
Für jede Teilmenge $V \subseteq k^n$ gilt:
(i) $I(V)$ ist Radikalideal,
(ii) $V \subseteq V(I(V))$,
(iii) $V(I(V))$ ist die kleinste Varietät, die V umfasst. Schreibweise: $V(I(V)) =: \overline{V}$.
(iv) Sind V_1, V_2 affine Varietäten, so gilt:
$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$$

Beweis (iii) Sei V' eine affine Varietät mit $V \subseteq V'$ und sei $I' \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal mit $V' = V(I')$. Dann ist $I' \subseteq I(V) \Rightarrow V(I') \supseteq V(I(V))$.
(iv) "$\Leftarrow$" $I(V_1) \supseteq I(V_2) \Rightarrow V(I(V_1)) \subseteq V(I(V_2))$. Mit $V_1 = V(I(V_1))$ und $V_2 = V(I(V_2))$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.2.5
Für jede Teilmenge $V \subseteq k^n$ gilt:
(i) $A(V)$ ist reduzierte k-Algebra, d.h. es gibt in $A(V)$ keine nilpotenten Elemente (also $f^d \neq 0$ für alle $f \neq 0, d > 0$).
(ii) Ist $V \subseteq V'$, so gibt es einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus $A(V') \longrightarrow A(V)$.

Beweis (i) Sei $g \in A(V), f \in k[X_1,\dots,X_n]$ mit $\overline{f} = g$. Dann ist $(g^d = 0$ (in $A(V)) \Leftrightarrow f^d \in I(V))$ und da $I(V)$ Radikalideal ist, folgt $f \in I(V)$ und somit $g = 0$.
(ii) Es ist $I(V') \subseteq I(V)$, also

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r] \arrow[d] & A(V) = k[X_1,\dots,X_n]/I(V) \\ A(V') = k[X_1,\dots,X_n]/I(V') \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

□

Definition + Satz 1.2.6
Die affinen Varietäten in k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der ***Zariski-Topologie***.

Beweis • $k^n = V(0)$ und $\emptyset = V(1)$ sind affine Varietäten.
• Seien $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$ affine Varietäten. Dann ist $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$.
Denn: "$\subseteq$" klar "$\supseteq$": Sei $x \in V(I_1 \cdot I_2), x \notin V_1$. (Zu zeigen: $x \in V_2$)
Dann gibt es ein $f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0$.
Da $x \in V(I_1 \cdot I_2)$ ist $f(x) \cdot g(x) = 0$ für alle $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$.
• Seien $V_i = V(I_i), i \in J$, affine Varietäten $\Rightarrow \bigcap_{i \in J} V_i = V(\sum_{i \in J} I_i)$.
Denn: "$\supseteq$" klar "$\subseteq$": Sei $x \in \bigcap V_i, f \in \sum I_i$. Schreibe $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ mit $f_k \in I_{i_k}, a_k \in k[X_1,\dots,X_n] \Rightarrow f(x) = a_1(x) \cdot 0 + \dots + a_r(x) \cdot 0 = 0$ □

Bemerkung 1.2.7
(i) Für $f \in k[X_1,\dots,X_n] \backslash \{0\}$ ist $D(f) := k^n \setminus V(f)$ nichtleere offene Teilmenge von k^n.
(ii) Die $D(f)$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis (ii) Zu zeigen: Jede offene Menge U ist Vereinigung von Mengen der Form $D(f)$.
Zeige dazu: Zu jedem $x \in U$ gibt es ein f mit $x \in D(f) \subseteq U$.
Sei $V = k^n \backslash U$, also $V = V(I)$ für ein Ideal I. Da $x \notin V$, gibt es $f \in I$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$.
Weil $f \in I$, ist $V \cap D(f) = \emptyset \Rightarrow D(f) \subseteq U$ □

Bemerkung 1.2.8
Die Zariski-Topologie auf k^n ist nicht hausdorffsch.

Beweis Wegen 2.7 genügt es zu zeigen, dass $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$ für alle $f, g \in k[X_1,\dots,X_n] \backslash \{0\}$.
Induktion über n:
$n = 1$: $V(f)$ und $V(g)$ sind endlich $\Rightarrow D(f) \cap D(g) = k \setminus V(f \cdot g)$ ist unendlich.
$n > 1$: Zerlege f und g in Primfaktoren (vgl. §1) und wähle $a \in k$, so dass $(X_n - a)$ nicht Teiler von f oder g ist. Identifiziere $V(X_n - a) = \{(x_1,\dots,x_n) \in k^n : x_n = a\}$ mit k^{n-1}.
Nach der Wahl von a sind $f|_{V(X_n - a)}$ und $g|_{V(X_n - a)}$ nicht identisch 0, also $f' = f(X_1,\dots,X_{n-1},a)$ $\neq 0 \neq g(X_1,\dots,X_{n-1},a) =: g'$ in $k[X_1,\dots,X_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $x' \in k^{n-1}$ mit $f'(x') \neq 0 \neq g'(x') \Rightarrow$ Für $x = (x', a) \in k^n$ gilt $f(x) = f'(x') \neq 0 \neq g'(x') = g(x)$. □

§3 Irreduzible Komponenten

Definition 1.3.1
a) Ein topologischer Raum X heißt ***irreduzibel***, wenn er nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist.
b) Eine abgeschlossene Teilmenge von X heißt ***irreduzible Komponente***, wenn sie irreduzibel ist (bzgl. der induzierten Topologie) und maximal (bzgl. Inklusion).

Proposition 1.3.2
Eine affine Varietät $V \subseteq k^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ Primideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der affine Koordinatenring $A(V) =: k[V]$ nullteilerfrei ist.

Beweis "$\Rightarrow$" Seien $f_1, f_2 \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$. Sei $f_1 \notin I(V)$.
Dann ist $V \nsubseteq V(f_1)$.
Nach Voraussetzung ist $V \subseteq V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$.
V irreduzibel $\Rightarrow V \subseteq V(f_2)$
$\Rightarrow f_2(x) = 0$ für alle $x \in V$
$\Rightarrow f_2 \in I(V)$.
"$\Leftarrow$" Sei $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_i = V(I_i)$, $i = 1, 2$. Sei $V_1 \neq V$.
$\Rightarrow V \nsubseteq V(I_1)$
$\Rightarrow \exists x \in V$ und $f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0$
Also $f \notin I(V) \subseteq I(V_1)$
Andererseits ist $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V)$
$\Rightarrow f \cdot g(x) = 0$ für alle $g \in I_2$
$I(V)$ prim und $f \notin I(V) \Rightarrow g \in I(V)$ für alle $g \in I_2$
$\Rightarrow V_2 = V(I_2) \supseteq V(I(V)) = V$ $\square$

Satz 1
Jede affine Varietät $V \in k^n$ hat eine Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis 1. Schritt V ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten.
Sei dazu $\mathcal{B}$ die Menge der Varietäten in k^n, die nicht endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten sind. Sei weiter $\mathcal{J} := \{I(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$.
Zu zeigen: $\mathcal{B} = \emptyset$
Annahme: $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Dann enthält $\mathcal{J}$ ein maximales Element $I_0 = I(V_0)$ für ein $V_0 \in \mathcal{B}$.
$\Rightarrow V_0$ ist minimales Element in $\mathcal{B}$.
$V_0 \in \mathcal{B} \Rightarrow V_0$ reduzibel
$\Rightarrow V_0 = V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \neq V_0 \neq V_2, V_i$ abgeschlossen
$\Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1, 2$ (da V_0 minimales Element in $\mathcal{B}$)
$\Rightarrow V_i$ ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten
$\Rightarrow V_0$ auch. Widerspruch!
2. Schritt "Irreduzible Komponenten"
Sei $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$ mit irreduziblen Varietäten $V_1, \dots, V_n$.
Ohne Einschränkung sei $V_i \nsubseteq V_j$ für $i \neq j$.
Sei $W \subseteq V$ irreduzibel und $V_i \subseteq W$ für ein i.
Es ist $W = V \cap W = (V_1 \cup \dots \cup V_n) \cap W = (V_1 \cap W) \cup \dots \cup (V_n \cap W)$
W irreduzibel $\Rightarrow \exists j$ mit

$$V_j \cap W = W \Rightarrow V_i \subseteq W = W \cap V_j \subseteq V_j \Rightarrow i = j \text{ und } W = V_i$$

$\Rightarrow V_1, \dots, V_n$ sind irreduzible Komponenten von V.
Genauso: $W \subseteq V$ irreduzible Komponente $\Rightarrow \exists j : W \subseteq V_j$,
da W maximal $\Rightarrow$ Zerlegung eindeutig. $\square$

Beispiele 1.3.3
$f = y^2 - x(x-1)(x+1) \in \mathbb{R}[x, y]$ $\qquad E := V(f)$

§4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 2 (Hilbertscher Nullstellensatz)
Sei k ein Körper, $n \geq 1, m \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ maximales Ideal. Dann ist $L = k[X_1, \dots, X_n]/m$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k.

Beweis Siehe Algebra II, Theorem 4. □

Folgerung 1.4.1
Ist k algebraisch abgeschlossen, so entsprechen die maximalen Ideale in $k[X_1, \dots, X_n]$ bijektiv den Punkten in k^n.

Beweis
$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ (maximal, da Faktorring Körper) ist eine injektive Zuordnung $\varphi : k^n \to m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$ (= Menge der Maximalideale).
φ surjektiv:
Sei $m \in m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n]), \alpha : k[X_1, \dots, X_n]/m \to k$ der Isomorphismus, den es nach Satz 2 gibt. (Das ist tatsächlich ein Isomorphismus, da k algebraisch abgeschlossen ist und somit jede endliche Erweiterung von k wieder k selbst ist.)
$\Rightarrow X_i - \alpha(X_i) \in m, i = 1, \dots, n$ (da $\alpha \in \text{Hom}_k \Rightarrow \alpha(X_i - \alpha(X_i)) = 0$)
$\Rightarrow (X_1 - \alpha(X_1), \dots, X_n - \alpha(X_n)) \subseteq m$ □

Folgerung 1.4.2 (Schwacher Nullstellensatz)
Für jedes echte Ideal $I \subsetneqq k[X_1, \dots, X_n]$ ist $V(I) \neq \emptyset$.

Beweis $I \subseteq m$ für ein maximales Ideal $m \Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$ □

Sei jetzt k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 1$, und

$$\mathcal{V}_n := \{V \subseteq k^n \mid V \text{ affine Varietät}\}$$

$$\mathcal{I}_n := \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \mid I \text{ Radikalideal}\}$$

Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz)
Die Zuordnungen

$$V : \mathcal{I}_n \to \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I)$$

$$I : \mathcal{V}_n \to \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V)$$

sind bijektiv und zueinander invers.

Beweis Zu zeigen: (1) $V(I(V)) = V$ für jedes $V \in \mathcal{V}_n$
(2) $I(V(I)) = I$ für jedes $I \in \mathcal{I}_n$
(1): Ist Bemerkung 2.4 (iii).
(2): Zeige: $I(V(I)) = \sqrt{I}$ für jedes Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$.
<u>“$\supseteq$“</u>: $\checkmark$
<u>“$\subseteq$“</u>: Sei $g \in I(V(I))$, seien $f_1, \dots, f_m$ Erzeuger von I.
Zu zeigen: $\exists d : g^d = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ für gewisse $a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$.
Betrachte in $k[X_1, \dots, X_n, Y]$ das von $f_1, \dots, f_m$ und $gY - 1$ erzeugte Ideal J.
Es ist $V(J) = \emptyset$
Schwacher Nullstellensatz $\Rightarrow J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$
$\Rightarrow \exists b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$ sodass $1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gY - 1)$
In $R := k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$ gilt also
$1 = \sum_{i=1}^m \tilde{b_i} f_i$ ($\tilde{b_i} \in k[X_1, \dots, X_n, \frac{1}{g}]$ die Restklasse von b_i). Multipliziere mit Hauptnenner g^d.□

Bemerkung 1.4.3
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq k^n$ eine affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in V bijektiv den maximalen Idealen in $k[V]$ $(= k[X_1, \dots, X_n]/I(V))$.

Beweis Die maximalen Ideale in $k[V]$ entsprechen bijektiv denjenigen maximalen Idealen in $k[X_1, \dots, X_n]$, die $I(V)$ umfassen, also nach 4.1 den Punkten $(x_1, \dots, x_n)$, für die $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \supseteq I(V)$ ist
$\Leftrightarrow \underbrace{V(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)}_{\{(x_1, \dots, x_n)\}} \subseteq V(I(V)) = V$ □

§5 Morphismen

Definition + Bemerkung 1.5.1
(a) Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subseteq k^n$ und $W \subseteq k^m$ affine Varietäten. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt ***Morphismus***, wenn es Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ gibt, so dass $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ für jedes $x \in V$.
(b) Jeder Morphismus $V \to W$ ist Einschränkung eines Morphismus $k^n \to k^m$.
(c) Die affinen Varietäten über k bilden zusammen mit den Morphismen aus (a) eine Kategorie $\underline{\mathrm{Aff}(k)}$. Als Objekte von $\underline{\mathrm{Aff}(k)}$ bezeichnen wir k^n mit $\mathbb{A}^n(k)$.

Beispiele 1.5.2
(1) Projektionen und Einbettungen $\mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$.

(2) Jedes $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ist Morphismus $\mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^1(k)$.

(3) $V = \mathbb{A}^1(k), W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ ("Neilsche Parabel")
$f : V \to W, x \mapsto (x^2, x^3)$ ist Morphismus.
f ist bijektiv: injektiv $\surd$
surjektiv: Sei $(x, y) \in W \backslash \{(0, 0)\}$, d.h. $y^2 = x^3$
Dann ist $(x, y) = f(\frac{y}{x}) = ((\frac{y}{x})^2, (\frac{y}{x})^3) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2})$, $f(0) = (0, 0)$
Umkehrabbildung:
$g(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y}{x} & sonst \end{cases}$ ist kein Morphismus.
(4) Sei $\mathrm{char}(k) = p > 0. f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^n(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$, heißt Frobenius-Morphismus. f ist bijektiv, aber kein Isomorphimus. Die Fixpunkte von f sind die Elemente von $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_p)$.

Bemerkung 1.5.3
Morphismen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis Ohne Einschränkung sei $f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ abgeschlossen, $V = V(I)$ für ein Radikalideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$. Zu zeigen: $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$.
Genauer gilt: $f^{-1}(V) = V(J)$ mit $J = \{g \circ f \mid g \in I\}$
denn: $x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$ für alle $g \in I \Leftrightarrow x \in V(J)$ □

Bemerkung 1.5.4
Jeder Morphismus $f : V \to W$ induziert einen k-Algebra-Homomorphismus $f^\sharp : k[W] \to k[V]$ (durch Hintereinanderschalten).
Genauer: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$

$$\begin{tikzcd} k[X_1, \ldots, X_m] \arrow[r, "g \mapsto g \circ f"] \arrow[d] & k[X_1, \ldots, X_n] \arrow[d] \\ k[W] = k[X_1, \ldots, X_m]/I(W) \arrow[r, dotted, "f^\sharp"] & k[X_1, \ldots, X_n]/I(V) = k[V] \end{tikzcd}$$

$f^\sharp$ existiert, weil für alle $g \in I(W)$ gilt: $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$ für alle $x \in V$

Proposition 1.5.5
Sei $f : V \to W$ ein Morphismus von affinen Varietäten, $\alpha := f^\sharp : k[W] \to k[V]$ der induzierte k-Algebra-Homomorphismus. Seien $x \in V$, $y \in W$ und $m_x \subset k[V]$, $m_y \subset k[W]$ die Verschwindungsideale zum jeweiligen Punkt. Dann gilt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(m_x) = m_y$$

Beweis "$\Rightarrow$" $g \in m_y \Leftrightarrow g(y) = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g \circ f}_{=\alpha(g)} \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) \Leftrightarrow m_y \subseteq \alpha^{-1}(m_x)$. Gleichheit folgt daraus, dass m_y maximales Ideal ist.
"$\Leftarrow$" Wäre $f(x) \neq y$, dann gäbe es ein $g \in k[W]$ mit $g(f(x)) = 0$ und $g(y) = 1$.
Andererseits:
$\alpha(g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(g) \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) = m_y \Leftrightarrow g(y) = 0$ $\square$

Satz 4
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist

$$\Phi : \underline{\mathrm{Aff}} \longrightarrow \underline{k\text{-Alg}^\circ}$$
$$V \longmapsto k[V]$$
$$f \longmapsto f^\sharp$$

eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien. Hierbei bezeichnet $\underline{k\text{-Alg}^\circ}$ die Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten k-Algebren.

Beweis Φ ist ein Funktor: $\surd$
Definiere Umkehrfunktor Ψ:
(i) Sei $A \in \underline{k - \mathrm{Alg}^\circ}$, $a_1, \ldots, a_n$ Erzeuger von A
$\Rightarrow p_A : k[X_1, \ldots, X_n] \to A,\ X_i \mapsto a_i$ ist surjektiver k-Algebra-Homomorphismus.
Sei $I_A := \mathrm{Kern}(p_A)$ (Radikalideal).
$\Psi(A) := V(I_A) \subseteq k^n$ affine Varietät mit $k[V(I_A)] \cong A$.
(ii) Sei $\alpha : A \to B$ k-Algebra-Homomorphismus in $\underline{k - \mathrm{Alg}^\circ}$.
Definiere die Abbildung $f_\alpha := V(I_B) \to V(I_A)$ durch $f_\alpha(y) = x$, falls $m_x = \alpha^{-1}(m_y)$. Diese ist wohldefiniert aufgrund der folgenden

Proposition 1.5.6
Sei $\alpha : A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren, $m \subset B$ ein maximales Ideal. Dann ist $\alpha^{-1}(m) \subset A$ ein maximales Ideal.
(Beispiel.: Für $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist $\alpha^{-1}(\{0\})$ kein maximales Ideal.)

Beweis

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\alpha^{-1}(m) \arrow[r, dotted, "\overline{\alpha}"] & B/m \end{tikzcd}$$

α induziert einen injektiven k-Algebra-Homomorphismus $\overline{\alpha}$. Nach dem HNS ist $B/m = k$.
k hat keine echte k-Unteralgebra $\Rightarrow A/\alpha^{-1}(m) = k$. □

Ende des Beweises des Satzes Noch zu zeigen: $f_\alpha : V(I_B) \to V(I_A)$ ist ein Morphismus.
Schreibe dazu $A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I_A$, $B = k[Y_1, \ldots, Y_m]/I_B$.

$$\begin{tikzcd} k[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r, dotted, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & k[Y_1, \ldots, Y_m] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Bastle Lift $\tilde{\alpha}$ von α:
$\tilde{\alpha}(X_i) = f_i$ mit $\overline{f_i} = \alpha(\overline{X_i})$
Beh.: Für $y \in V(I_B)$ ist $f_\alpha(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$.
Denn: Sei $y = (y_1, \ldots, y_m)$, dann ist m_y das Bild in B von $M_y = (Y_1 - y_1, \ldots, Y_m - y_m) \Rightarrow \alpha^{-1}(m_y)$ ist das Bild in A von $\tilde{\alpha}^{-1}(M_y) = (X_1 - f_1(y), \ldots, X_n - f_n(y))$.
Nachrechnen: $\Phi \circ \Psi \cong \mathrm{id}_{\underline{k-\mathrm{Alg}^\circ}}$, $\quad \Psi \circ \Phi \cong \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Aff}}(k)}$ □

§6 Reguläre Funktionen

Bemerkung 1.6.1
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Dann gilt für $h \in k[X_1, \ldots, X_n]$:
$\overline{h}$ ist Einheit in $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

Beweis $V(h) \cap V = \emptyset \Leftrightarrow (h) + I(V) = k[X_1, \ldots, X_n]$
$\Leftrightarrow 1 = g \cdot h + f$ für $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und $f \in I(V)$
$\Leftrightarrow 1 = \overline{g} \cdot \overline{h}$ in $k[V]$. □

Definition 1.6.2
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.
a) Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{A}^1(k)$ heißt ***reguläre Funktion*** auf U, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Umgebung $U(x) \subseteq U$ und $g_x, h_x \in k[V]$ gibt mit $h_x(y) \neq 0$ für alle $y \in U(x)$ und $f(x) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)}$ für alle $y \in U(x)$.
b) Eine Abbildung $f : U \to U'$ mit $U' \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ offen heißt ***Morphismus***, wenn es reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf U gibt mit $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

Beispiele 1.6.3
$\frac{1}{x}$ ist eine reguläre Funktion auf $k \setminus \{0\}$.
Dann ist $U \to \mathbb{A}^2(k), \quad x \mapsto (x, \frac{1}{x})$ ein Isomorphismus mit Bild $V(XY - 1)$.

Definition 1.6.4
a) Eine ***Prägarbe*** besteht aus einer k-Algebra $\mathcal{O}(U)$ für jede offene Menge $U \subseteq V$ zusammen mit k-Algebra-Homomorphismen

$$\rho_{UU'} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U') \quad \forall U' \subseteq U \ \text{ offen}$$

so dass $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$ für $U'' \subseteq U' \subseteq U$ gilt.

b) Eine Prägarbe heißt ***Garbe***, falls zusätzlich noch folgende Bedingungen gelten:
Sei $U \subseteq V$ offen und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U.
(i) Ist $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\rho_{UU'}(f) =: f|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $f = 0$.
(ii) Ist für jedes $i \in I$ ein $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ gegeben, so dass für alle $i, j \in I$ gilt $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, so gibt es $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für jedes $i \in I$.

Bemerkung 1.6.5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät.
(a) Für jedes offene $U \subseteq V$ ist

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \to k \mid f \ \text{ regulär}\}$$

eine k-Algebra.
(b) $f \mapsto \frac{f}{1}$ ist ein k-Algebra-Homomorphismus $k[V] \to \mathcal{O}(U)$ für jedes offene $U \subseteq V$. Dieser ist injektiv, falls U dicht in V ist. Dies ist für alle $\emptyset \neq U$ der Fall, wenn V irreduzibel ist. (Gegenbsp.: $V(X \cdot Y), \quad U = D(x), \quad f = y$)
(c) Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ ist eine Garbe $\mathcal{O} = \mathcal{O}_V$ von k-Algebren auf V.

Beweis Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U)$. Ohne Einschränkung sei $U_1(x) = U_2(x) =: U(x)$ für alle $x \in U$. Sei $f_i = \frac{g_{i,x}}{h_{i,x}}$ auf $U(x)$.
$\Rightarrow h_{1,x}(y) \cdot h_{2,x}(y) \neq 0$ für alle $y \in U(x) \Rightarrow f_1 \pm f_2$ und $f_1 \cdot f_2$ sind reguläre Funktionen.
Mit $h_x = 1$ und $g_x = f$ für alle x ist jedes $f \in k[V]$ reguläre Funktion auf jedem offenen U. $\square$

Proposition 1.6.6
Für jede affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ gilt $\mathcal{O}(V) = k[V]$.

Beweis Nach Bem. 1.6.5(b) ist $k[V] \to \mathcal{O}(V)$ injektiv, also gilt ohne Einschränkung $k[V] \subseteq \mathcal{O}(V)$.
Sei zunächst V irreduzibel: Sei $f \in \mathcal{O}(V), x_i \in V, i = 1, 2, U_i \subseteq V$ offene Umgebungen von x_i, auf denen $f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$ gilt für geeignete $g_i, h_i \in k[V], h_i(y) \neq 0 \ \ \forall y \in U_i$.
Dann ist $U := U_1 \cap U_2$ offen <u>und dicht</u> in $V \Rightarrow g_1 h_2 - g_2 h_1 \in I(U)$ (weil $\frac{g_1(y)}{h_1(y)} = f(y) = \frac{g_2(y)}{h_2(y)}$ für alle $y \in U$).
Mit $V(I(U)) = \overline{U} = V$ folgt $g_1 h_2 = g_2 h_1$ in $k[V] \Rightarrow \frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$ auf $U_1 \cap U_2$, d.h. $\exists g, h \in k[V]$ mit $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g}{h}, i = 1, 2$.
Ist V zusammenhängend, so sei $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Argumentation ist die gleiche, allerdings für $x \in V_1 \cap V_i$ (V_i geeignet).
Ist $V = V_1 \dot\cup V_2$ disjunkte Vereinigung von affinen Varietäten V_1, V_2, so ist
$\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(V_1) \oplus \mathcal{O}(V_2)$ (folgt aus der Definition von regulären Funktionen) und
$k[V] = k[V_1] \oplus k[V_2]$ (Übung). $\square$

Proposition 1.6.7
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $f \in k[V]$. Dann ist $\mathcal{O}(D(f)) \cong k[V]_f$ (Lokalisierung von $k[V]$ nach dem multiplikativen System $S = \{f^d : d \geq 0\}$, d.h.: $k[V]_f := \{\frac{g}{f^m} \mid g \in k[V],\ m \geq 0\}$).
$D(f)$ ist als offene Teilmenge von V zu interpretieren.

Beispiele 1.6.8
1) $V = \mathbb{A}^1(k), \quad f = x, \quad D(f) = k \backslash \{0\}$
$\mathcal{O}(D(f)) = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[X]$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0\}$
$= \{\frac{g}{x^d} : g \in k[X], d \geq 0\}$
2) $V = V(x \cdot y) \subseteq \mathbb{A}^2(k), f = x \in k[V] = k[X,Y]/(X \cdot Y)$
$D(f) = V - V(x) = x$-Achse ohne die 0
$k[V]_x = \{\frac{g}{x^d} : g \in k[V], d \geq 0\}/ \sim$ mit der Äquivalenzrelation $\frac{g}{x^d} \sim 0 \Leftrightarrow \exists d' \geq 0$ mit $x^{d'} \cdot g = 0 \Leftrightarrow g = y \cdot g'$ für ein $g' \in k[V] \Rightarrow \mathrm{Kern}(k[V] \to k[V]_x) = (y) \Rightarrow k[V]_x \cong k[X]_x$.

Beweis Sei $I = I(V)$, also $k[V] \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I$. Sei weiter $\tilde{f} \in k[X_1, \ldots, X_n]$ Repräsentant von f.
<u>Beh.:</u> $D(f)$ ist isomorph zu einer affinen Varietät $W := V(\underbrace{I + (\tilde{f}X_{n+1} - 1)}_{:=\tilde{I}}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$

<u>Beweis:</u> Übung (Blatt 4, A.3).
Nach Prop. 6.4: $\mathcal{O}(D(f)) \cong \mathcal{O}(W) = k[W] = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/\tilde{I}$
Sei $\alpha : k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \to k[V]_f$ der durch $x_i \mapsto \begin{cases} x_i : i = 1, \ldots, n \\ \frac{1}{f} : i = n+1 \end{cases}$ erzeugte Homomorphismus.
<u>Beh.:</u> $\mathrm{Kern}(\alpha) = \tilde{I}$
"$\supseteq$" $\checkmark$
"$\subseteq$" α induziert einen Homomorphismus: $\tilde{\alpha} : \underbrace{k[X_1, \ldots, X_{n+1}]}_{k[V][X_{n+1}]}/\tilde{I} \to k[V]_f$

zu zeigen ist also: A k-Algebra, $f \in A$
$\alpha : A[X] \to A_f$, so ist $\mathrm{Kern}(\alpha) = (Xf - 1)$. $\square$

Nachtrag

$$\begin{tikzcd}
k[Y_1, \ldots, Y_m] \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & k[X_1, \ldots, X_n] \arrow[d] \\
k[W] \arrow[r] & k[V] \\
\cup & \cup \\
m_y := \alpha^{-1}(m_x) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & m_x \arrow[d, leftrightarrow] \\
y & x \arrow[l, mapsto] \\
\in & \in \\
W & V \arrow[l, "f_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

k-Algebrenhomomorphismus

Behauptung
Für $x \in V$ ist $f_\alpha(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) =: y$. Noch zu zeigen: $\alpha^{-1}(m_x) = m_y$. Es ist $m_y = \overline{(Y_1 - f_1(x), \ldots, Y_m - f_m(x))}$. Dann ist $\alpha(m_y)$ das von $\overline{\tilde{\alpha}(Y_i) - f_i(x)}$, $i = 1, \ldots, n$ erzeugte Ideal. Also:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha(m_y) \subseteq m_x \\ &\Rightarrow m_y \subseteq \alpha^{-1}(m_x) \\ &\Rightarrow m_y = \alpha^{-1}(m_x) \end{aligned}$$

Proposition 1.6.9
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten und $U_1 \subseteq V, U_2 \subseteq W$ offen. Dann gilt: Eine Abbildung $f : U_1 \longrightarrow U_2$ ist genau dann ein Morphismus, wenn f stetig ist und für jedes offene $U \subseteq U_2$ gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)) \text{ für jedes } g \in \mathcal{O}(U)$$

Beweis "$\Rightarrow$" f ist stetig nach 1.5.3. Seien $g \in \mathcal{O}(U), x \in f^{-1}(U), U'$ Umgebung von $f(x)$, sodass $g(y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$ für alle $y \in U'$, wobei $h_1, h_2 \in k[W], h_2(y) \neq 0$ für alle $y \in U'$. Daraus folgt für $z \in f^{-1}(U')$:

$$g \circ f(z) = \frac{h_1(f(z))}{h_2(f(z))} = (*)$$

weil f ein Morphismus ist, gilt $f(z) = \left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \ldots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)$ für geeignete $a_i, b_i \in k[V]$ und Œ alle $z \in f^{-1}(U')$ und damit

$$(*) = \frac{h_1\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \ldots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)}{h_2\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \ldots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)} =: \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2}(z), \text{ mit } \tilde{h}_i \in k[V].$$

"$\Leftarrow$" Seien $x \in U_1$ und $U \subseteq W$ eine offene Umgebung von $f(x) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq V$ ist offen.
Sei $p_i : U \longrightarrow k$ die i-te Koordinatenfunktion, also $p_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i, i = 1, \ldots, m$. Nach Voraussetzung ist $p_i \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)), i = 1, \ldots, m$. Also gibt es $g_i, h_i \in k[V]$ mit $p_i \circ f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$ für alle y in einer geeigneten Umgebung von x.

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{g_1(z)}{h_1(z)}, \ldots, \frac{g_m(z)}{h_m(z)}\right) \Rightarrow f \text{ ist ein Morphismus.}$$ □

Definition 1.6.10
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und irreduzibel. Dann heißt $k(V) := \mathrm{Quot}(k[V])$ ***Funktionenkörper*** von V.

Beispiele 1.6.11
(a) $V = \mathbb{A}^n(k) \Rightarrow k(V) = k(X_1, \ldots, X_n)$

(b) $V = V(Y^2 - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
$k[V] = k[X,Y]/(Y^2 - X^2) \cong k[T^2, T^3] \subseteq k[T]$
$\Rightarrow k(V) \cong k(T)$

Proposition 1.6.12
Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten.

(a) f induziert genau dann einen Körperhomomorphismus $\varphi_f : k(W) \longrightarrow k(V)$, der den k-Algebrenhomomorphismus $f^\sharp : k[W] \longrightarrow k[V]$ fortsetzt, wenn $f^\sharp$ injektiv ist.

(b) $f^\sharp$ ist genau dann injektiv, wenn $f(V)$ dicht in W ist (in diesem Fall heißt f ***dominant***).

Beweis

(a) $k(W) = \mathrm{Quot}(k[W])$. Für $x = \frac{a}{b} \in k(W)$ mit $a, b \in k[W], b \neq 0$ muss gelten $\varphi_f(x) = \frac{f^\sharp(a)}{f^\sharp(b)}$. Das ist wohldefiniert $\Leftrightarrow f^\sharp(b) \neq 0$ für alle $b \neq 0$.

(b) Sei $\alpha := f^\sharp : k[W] \longrightarrow k[V],\ Z \subseteq V$, dann gilt $\alpha^{-1}(I(Z)) = I(f(Z))$, denn:

$$\begin{aligned}
&g \in \alpha^{-1}(I(Z))\\
\Leftrightarrow &\forall z \in Z : \alpha(g)(z) = 0\\
\Leftrightarrow &\forall z \in Z : (g \circ f)(z) = 0\\
\Leftrightarrow &g \in I(f(Z))
\end{aligned}$$

Für $Z = V$ heißt das: $\mathrm{Kern}(\alpha) = \alpha^{-1}(0) = \alpha^{-1}(I(V)) = I(f(V))$. Also: $\mathrm{Kern}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow I(f(V)) = 0 \Leftrightarrow V(I(f(V))) = \overline{f(V)} = W$ $\square$

§7 Rationale Abbildungen

Definition + Bemerkung 1.7.1
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät.

(a) Eine ***rationale Funktion*** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist. Dabei sei $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$

(b) In jeder Äquivalenzklasse $[(U', f')]$ gibt es ein (bezüglich "$\subseteq$") maximales Element (U, f), dessen U ***Definitionsbereich*** der rationalen Funktion heißt. $V \setminus U$ heißt ***Pol(stellen)menge***.

(c) Die rationalen Funktionen auf V bilden eine k-Algebra $\mathrm{Rat}(V)$.

(d) Ist V irreduzibel, so ist $\mathrm{Rat}(V) \cong k(V)$.

Beweis (a) $\sim$ ist transitiv: Seien $(U, f) \sim (U', f'), (U', f') \sim (U'', f'')$, dann folgt: $f|_{U \cap U' \cap U''} = f''|_{|U \cap U' \cap U''}$. Da $U \cap U' \cap U''$ dicht in V ist, ist dann auch $f|_{U \cap U''} = f''|_{|U \cap U''}$.

(b) Ist $(U, f) \sim (U', f')$, so definiere auf $U \cup U'$ eine Funktion $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ f'(x) & x \in U' \end{cases}$.
Dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U \cup U')$.

(c) $f \pm g, f \cdot g$ sind reguläre Funktionen auf $U \cap U'$, wobei (U, f) und (U', g) Repräsentanten sind.

(d) $\frac{g}{h} \in k(V)$ ist eine reguläre Funktion auf $D(h)$. $D(h)$ liegt dicht in V, weil V irreduzibel ist. Es folgt: $\frac{g}{h} \mapsto (D(h), \frac{g}{h})$ ist ein wohldefinierter k-Algebrenhomomorphismus $\alpha : k(V) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V)$.

α ist surjektiv, denn:
Sei (U, f) ein Repräsentant einer rationalen Funktion auf V. Dann gibt es offenes $U' \subseteq U$ und $g, h \in k[V]$ mit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für alle $x \in U'$. Da V irreduzibel ist, ist U' dicht in V. Also ist $\alpha(\frac{g}{h})$ gleich der Klasse $(U', \frac{g}{h})$, was gleich der Klasse von (U, f) ist. □

Definition + Bemerkung 1.7.2
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten.

(a) Eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht ist und $f_U : U \longrightarrow W$ ein Morphismus ist; dabei sei $(U, f_U) \sim (U', f'_U) :\Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{|U \cap U'}$.
(b) Rationale Funktionen sind rationale Abbildungen $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$.
(c) Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.
(d) Die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen ist wieder eine dominante rationale Abbildung wegen $\overline{f(U)} = \overline{f(\overline{U})}$.
(e) Jede dominante rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ induziert einen k-Algebrenhomomorphismus $\mathrm{Rat}(W) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V)$.
(f) Eine dominante rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ heißt ***birational***, wenn es eine rationale Abbildung $g : W \dashrightarrow V$ gibt mit $f \circ g \sim \mathrm{id}_W$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_V$.

Beispiele
1) $f : \mathbb{A}^1(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), x \mapsto (x, \frac{1}{x})$ ist eine rationale Abbildung.
2) $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ist eine birationale Abbildung. Es gilt $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ auf $\mathbb{A}^2(k) - V(XY)$.

Proposition 1.7.3
Seien V, W irreduzible affine Varietäten. Dann gibt es zu jedem Körperhomomorphismus $\alpha : k(W) \longrightarrow k(V)$ eine rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ mit $\alpha = \alpha_f$.

Beweis Wähle Erzeuger $g_1, \ldots, g_m$ von $k(W)$ als k-Algebra. Für $\alpha(g_i) \in k(V) = \mathrm{Rat}(V)$ sei $U_i \subseteq V$ der Definitionsbereich. Sei $\tilde{U} := \bigcap_{i=1}^m U_i$, $\tilde{U}$ ist offen und dicht in V. Sei $U \subseteq \tilde{U}$ affin (d.h. isomorph zu einer affinen Varietät) und dicht (sowas gibt es, da $D(f)$ affine Teilmenge).

$$\stackrel{1.6.6}{\Rightarrow} \alpha(g_i) \in \mathcal{O}(U) = k[U], i = 1, \ldots, m$$
$$\Rightarrow \alpha|_{k[W]} : k[W] \longrightarrow k[U] \text{ ist } k\text{-Algebrenhomomorphismus.}$$
$$\stackrel{\text{Satz } 2}{\Rightarrow} \text{Es gibt einen Morphismus } f : U \longrightarrow W \text{ mit } f^\sharp = \alpha.$$

α_f ist der von $f^\sharp$ induzierte Homomorphismus auf $\mathrm{Quot}(k[W])$. □

Proposition 1.7.4
Zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung K/k gibt es eine irreduzible affine k-Varietät V mit $K \cong k(V)$.

Beweis Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Erzeuger der Körpererweiterung K/k. Sei weiter $A := k[x_1, \ldots, x_n]$ die von den x_i erzeugte k-Algebra. A ist nullteilerfrei, da $A \subseteq K$. Nach Satz 2 gibt es eine affine Varietät V mit $A \cong k[V]$. V ist irreduzibel, da A nullteilerfrei. $k(V) = \mathrm{Quot}(k[V]) \cong \mathrm{Quot}(A) = K$. □

Korollar 1.7.5
Die Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen K/k (mit k-Algebrenhomomorphismen) ist äquivalent zur Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über k mit dominanten rationalen Abbildungen.