16. Grenzwerte bei Funktionen

Definition (Häufungspunkt)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $D :\iff \exists$ Folge x_n in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.

Beispiele:

(1) Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

(2) $D = (0, 1]$. x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [0, 1]$.

(3) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$

(4) $D = \mathbb{Q}$. 8.1(2) $\implies$ jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

Bemerkung: Unterscheide zwischen „x_0 ist Häufungswert von (a_n)“und „x_0 ist Häufungspunkt von $\{a_1, a_2, \ldots\}$“. Beispiel: $a_n = (-1)^n$. $\mathscr{H}(a_n) = \{1, -1\}, \{a_1, a_2, \ldots\} = \{-1, 1\}$ hat keine Häufungspunkte.

Zur Übung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff \forall \varepsilon > 0$ gilt: $D \cap (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

Vereinbarung: Ab jetzt sei in dem Paragraphen gegeben: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\iff \exists a \in \mathbb{R}$ mit: für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_o\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to a$. In diesem Fall schreibt man: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$

Bemerkung: (1) Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, so ist obiges a eindeutig bestimmt. (Übung)

(2) Falls $x_0 \in D$, so ist der Wert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant.

Beispiele:

(1) $D = (0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 0$: Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 0$. Dann $x_n < \frac{1}{2}$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x^2$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to 0$, d.h. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$x_0 = 1$: Analog: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

$x_0 = \frac{1}{2}$: Sei (x_n) eine Folge in $D \backslash \{\frac{1}{2}\}$ und $x_n < \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x_n^2 \to \frac{1}{4}$. Sei (z_n) eine Folge in $D \backslash \{\frac{1}{2}\}$ und $z_n > \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(z_n) = 1 \to 1$ d.h.: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht. Aber: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x)$ existiert und ist $\frac{1}{4}$ und $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, 1)}} f(x)$ existiert und ist 1.

Dafür schreibt man: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = \dfrac{1}{4}$ und $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = 1$.

(2) $D = [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt[p]{x}$. Sei $x_0 \in D$. Sei (x_n) Folge in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. 7.1 $\implies f(x_n) = \sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$. Das heißt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Vereinbarung: Für $\delta > 0$: $D_\delta(x_n) = D \cap U_\delta(x_0)$. $\dot{D}_\delta(x_0) = D_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$.

Satz 16.1 (Grenzwertsätze bei Funktionen)

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff$ für jede Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $f(x_n)$ konvergent.

(2) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ mit $(*)$ $|f(x) - a| < \varepsilon\ \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$.

(3) *Cauchykriterium*: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \forall x, x' \in \dot{D}_\delta(x_0)$

Beweis

(1) „ $\implies$ “: aus Definition.
„$\Leftarrow$ “: Seien $(x_n), (z_n)$ Folgen in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, $z_n \to x_0$. Voraussetzung $\implies$ es existiert $a := \lim f(x_n)$ und $b := \lim f(z_n)$. Zu zeigen ist: $a = b$. Sei t_n definiert durch $(t_n) := (x_1, z_1, x_2, z_2, \ldots)$. (t_n) ist Folge in $D \backslash \{x_0\}$ mit $t_n \to x_0$, Voraussetzung $\implies$ $\exists c := \lim f(t_n)$. $(f(x_n))$ ist Teilfolge von $(f(t_n)) \implies a = c$, analog: $b = c \implies a = b$.

(2) „ $\implies$ “: Sei $\varepsilon > 0$. **Annahme**: Es gibt kein $\delta > 0$, so dass $(*)$ gilt. Das heißt: $\forall \delta > 0$ exisistert ein $x_j \in \dot{D}_\delta(x_j)$: $|f(x_j) - a| \geq \varepsilon$, also $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \dot{D}_{\frac{1}{n}}(x_0) : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. Das heißt: (x_n) ist eine Folge in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \nrightarrow a$, Widerspruch.
„$\Leftarrow$ “: Sei x_n eine Folge in $D \backslash \{x_n\}$ mit $x_n \to x_0$. Zu zeigen ist: $f(x_n) \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ so dass $(*)$ gilt. Dann: $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies |f(x_n) - a| < \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(3) In Übung. ∎

Satz 16.2 (Rechnen mit Funktionsgrenzwerten)
Seien $g, h : D \to \mathbb{R}$ zwei weitere Funktionen und es gelte $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ $(x \to x_0)$.

(1) $f(x) + g(x) \to a + b$, $f(x) \cdot g(x) \to ab$, $|f(x)| \to |a|$ $(x \to x_0)$

(2) Ist $a \neq 0 \implies \exists \delta > 0 : f(x) \neq 0\ \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$. Für $\frac{1}{f} : \dot{D}_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ gilt: $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{a}$.

(3) Existiert ein $\delta > 0$ mit $f \le g$ auf $\dot{D}_\delta(x_0) \implies a \le b$

(4) Existiert ein $\delta > 0$ mit $f \le h \le g$ auf $\dot{D}_\delta(x_0)$ und $a = b \implies \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$.

Beweis
folgt aus 6.2

Zum Beispiel: (3) Sei (x_n) Folge in $D \backslash \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$. Dann: $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \le g(x_n)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a = \lim f(x_n) \overset{5.2}{\le} \lim g(x_n) = b$. ∎

Definition

(1) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.
$\lim a_n = \infty$ (oder $a_n \to \infty$) $:\iff \forall c > 0\ \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n > c \forall n \ge n_0$.
$\lim a_n = -\infty$ (oder $a_n \to -\infty$) $:\iff \forall c < 0\ \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n < c \forall n \ge n_0$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (oder $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$) $:\iff$ für jede Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to \infty$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ (oder $f(x) \to -\infty$ $(x \to x_0)$) $:\iff$ für jede Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to -\infty$.

(3) Sei D nicht nach oben beschränkt. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ (oder $f(x) \to a$) $:\iff$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \infty$ gilt: $f(x_n) \to a$ ($a = \pm\infty$ zugelassen).
Sei D nicht nach unten beschränkt. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ (oder $f(x) \to -\infty$) $:\iff$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to -\infty$ gilt: $f(x_n) \to a$ ($a = \pm\infty$ zugelassen).

Beispiele:

(1) $a_n := x^n$ $(x > 1)$. Behauptung: $x^n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Sei $c > 0$. $c < \frac{1}{x^n} < 1 \implies \frac{1}{x^n} \to 0 \implies \frac{1}{x^n} < \frac{1}{c}$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies x^n > c$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann $x^p \to \infty$ $(x \to \infty)$. Siehe Übung.

(3) $\frac{1}{x} \to \infty$ $(x \to 0+)$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ $(x \to 0-)$.

Satz 16.3 (Grenzwerte der Exponentialfunktion)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ (x \in \mathbb{R})$$

(1) Für $p \in \mathbb{N}_0 : \frac{e^x}{x^p} \to \infty$ $(x \to \infty)$

(2) $e^x \to \infty$ $(x \to \infty)$

(3) $e^x \to 0$ $(x \to -\infty)$

Beweis

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots \geq \frac{p+1}{(p+1)!}\ \forall x \geq 0 \implies \frac{e^x}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!}\ \forall x > 0 \implies$ Behauptung.

(2) Folgt aus 1 mit $p = 0$.

(3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \xrightarrow{(2)} 0\ (x \to -\infty) \implies e^x \to 0\ (x \to -\infty)$. ∎