Kapitel I

Schemata

§ 1 Affine Schemata

Dieses Semester wollen wir das bereits in der algebraischen Geometrie Gelernte auf ein anderes, verallgemeinertes Konzept übertragen, das bereits mit schwächeren Voraussetzungen Gutes leistet. Wir werden auf einen algebraisch abgeschlossenen Körper verzichten und uns lediglich auf Ringe und ihre Lokalisierungen beschränken. Ebenso werden wir, statt Punkte mit maximalen Idealen zu identifizieren, Primideale heranziehen. Wir erinnern uns an die Basiskonstruktionen: Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann heißt $V = V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$ *affine Varietät*. Der zugehörige *affine Koordinatenring* ist definiert als $k[V] := k[X_1, \dots, X_n]/I$. Der Hilbertsche Nullstellensatz erlaubt folgende Identifizierung:

$$\begin{array}{ccc} \text{Punkte in } V & \longleftrightarrow & \text{maximale Ideale in } k[V] \\ x & \longleftrightarrow & \mathfrak{m}_x = \{f \in k[V] \mid f(x) = 0\} \end{array}$$

Die *Zariski-Topologie* auf dem k^n erklärt eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ als abgeschlossen, falls es ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit $V = V(I)$. Das Verschwindungsideal von V ist

$$\begin{aligned} I(V) &= \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\} \\ &= \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f \in \mathfrak{m}_x \text{ für alle } x \in V\} \\ &= \bigcap_{x \in V} \mathfrak{m}_x \end{aligned}$$

Definition 1.1 Sei R ein Ring (kommutativ mit Eins stets vorausgesetzt).

(i) Das *Spektrum* von R ist

$$\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ist Primideal}\}.$$

(ii) Für $I \subseteq R$ heißt

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

Verschwindungsmenge von I.

(iii) Für $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ heißt

$$I(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$$

Verschwindungsideal von V.

Beispiel 1.2 Sei $R = \mathbb{Z}$. Es gilt $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$. Für das von 6 erzeugte Ideal ist die Verschwindungsmenge demnach

$$V(6) := V((6)) = \{(2), (3)\}.$$

Beachte: Die Primideale $(2), (3)$ werden nun als Punkte aufgefasst! Für $I = (6, 7)$ und $V = \{(2), (3), (7)\}$ gilt

$$V(I) = V((6, 7)) = \varnothing$$

$$I(V) = I(\{(2), (3), (7)\}) = (2) \cap (3) \cap (7) = (42).$$

Weiter halten wir fest:

$$I(\operatorname{Spec} R) \;=\; \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R} \mathfrak{p} \;=\; \sqrt{(0)},$$

wobei $\sqrt{(0)}$ das *Nilradikal* bezeichnet.

Bemerkung 1.3 *Die $V(I)$, $I \subseteq R$, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, die Zariski-Topologie.*

Beweis. Wir rechnen die Axiome einer Topologie nach:

(i) Es gilt $V(R) = \varnothing$.

(ii) Weiter ist $V\left(\sqrt{(0)}\right) = \operatorname{Spec} R$.

(iii) Für Ideale $I_i, \subseteq R$ für $i \in J$ gilt

$$\bigcap_{i \in J} V(I_i) \;=\; \bigcap_{i \in J} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I_i \subseteq \mathfrak{p}\} \;=\; \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I_i \subseteq \mathfrak{p} \text{ für alle } i \in J\} \;=\; V\left(\sum_{i \in J} I_i\right).$$

(iv) Seien $I_1, I_2 \subseteq R$. Dann ist

$$V(I_1) \cup V(I_2) \;=\; \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I_1 \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} \overset{(*)}{=} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} \;=\; V(I_1 \cap I_2).$$

Zu $(*)$: Sei $I_1 \nsubseteq \mathfrak{p}$. Dann wähle $f \in I_1 \backslash \mathfrak{p}$. Dann ist $fg \in \mathfrak{p}$ für alle $g \in I_2$, also $g \in \mathfrak{p}$ für alle $g \in I_2$, also $I_2 \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

Proposition 1.4 *Es ergeben sich folgende Identitäten:*

(i) Für jede Teilmenge $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ gilt $V(I(V)) = \overline{V}$.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Beweis. Übung.

Beispiel 1.5 Sei $R = \mathbb{R}[X]$, $I = (X^2+1)$. Dann ist I ein Primideal in $\mathbb{R}[X]$. Per Definition folgt damit $V(I) = \{I\}$, also $I(V(I)) = I(\{I\}) = I$. Die Konstruktionen der algebraischen Geometrie liefern diese Behauptung nicht!

Beispiel 1.6 Betrachte den Ring $R := k[X]_{(X)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k)}$. Es gilt

$$\operatorname{Spec} R = \{(0), (X) = \mathfrak{m}\}.$$

Allgemeiner lässt sich sagen: Ist S ein diskreter Bewertungsring, so ist $\operatorname{Spec} S = \{(0), \mathfrak{m}\}$. Die Abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$ sind gerade $\emptyset, \operatorname{Spec} R, V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}, V((0)) = \operatorname{Spec} R$. Die Zariski-Topologie ist also gegeben durch $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\ \operatorname{Spec} R,\ \{\mathfrak{m}\}\}$. Weiter ist $\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec} R$.

Bemerkung + Definition 1.7 (i) Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subseteq R$ Primideale mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

(ii) Ist R nullteilerfrei, so ist $\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec} R$.

(iii) Ein Punkt $x \in X$ eines topologischen Raums mit $\overline{\{x\}} = X$ heißt *generischer Punkt*.

(iv) Eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec} R$ enthält einen generischen Punkt genau dann, wenn Y irreduzibel ist.

(v) Die maximalen irreduziblen Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$ sind die minimalen Primideale in R.

Beweis. (i) Ist $I \subseteq R$ mit $\mathfrak{p} \in V(I)$, so gilt $I \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, also auch $\mathfrak{q} \in V(I)$. Damit ist

$$\mathfrak{q} \in \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} V(I) = \bigcap_{A \supseteq V(\{\mathfrak{p}\}) = \mathfrak{p}} A = \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

(ii) Folgt direkt aus (i) und $(0) \in \operatorname{Spec} R$.

(iv) Sei zunächst Y abgeschlossen und irreduzibel. Ohne Einschränkung gelte $Y = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq R$. Nach Voraussetzung ist dann $I = \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Damit ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt.

Sei nun $Y \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen und $Y = V(I_1) \cup V(I_2)$. Sei nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ generischer Punkt von Y und es gelte ohne Einschränkung $\mathfrak{p} \in V(I_1)$. Dann gilt $Y = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq V(I_1)$ also $V(I_1) = Y$. Also ist Y irreduzibel.

Bemerkung 1.8 *Seien R, R' Ringe, $\alpha : R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist die von α induzierte Abbildung*

$$f_\alpha : \operatorname{Spec} R' \longrightarrow \operatorname{Spec} R, \qquad \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$$

stetig. Wir erhalten einen kontravarianten Funktor

$$\underline{\text{Ringe}} \longrightarrow \underline{\text{Top}}, \qquad \{R, \alpha\} \dashrightarrow \{\operatorname{Spec} R, f_\alpha\}.$$

Beweis. Sei $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen. Es gilt

$$\begin{aligned} f_\alpha^{-1}(V(I)) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R' \mid f_\alpha(\mathfrak{p}) = \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(I)\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R' \mid \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R' \mid \mathfrak{p} \supseteq \alpha(I)\} \\ &= V(\alpha(I)), \end{aligned}$$

womit die Stetigkeit von f_α folgt. □

Bemerkung 1.9 *Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann ist*

$$\mu : V \longrightarrow \operatorname{Spec}(k[V]), \qquad x \mapsto \mathfrak{m}_x$$

injektiv und stetig.

Beweis. Injektivität ist klar, denn verschiedene Punkte haben verschiedene maximale Ideale. Ist nun $I \subseteq k[V]$ ein Ideal, so ist

$$\mu^{-1}(V(I)) = \mu^{-1}(\{\mathfrak{m} \subseteq k[V] \mid I \subseteq \mathfrak{m}\}) = V(I) \subseteq V,$$

womit die Stetigigkeit folgt. □

Bemerkung 1.10 *Sei R ein Ring, $f \in R$. Definiere*

$$D(f) := \operatorname{Spec} R \backslash V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Dann bilden die $D(f)$ eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$.

Beweis. Sei $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ offen, $\mathfrak{p} \in U$. Gesucht: f mit $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$. Sei $V = V(I) = \operatorname{Spec} R \backslash U$ für ein Ideal $I \subseteq R$. Da $\mathfrak{p} \notin V(I)$, ist $I \not\subseteq \mathfrak{p}$. Sei also $f \in I \backslash \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \in D(f)$. Außerdem ist $f \in \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ mit $I \subseteq \mathfrak{q}$, also $V(f) \supseteq V(I)$. Damit folgt insgesamt

$$D(f) \subseteq \operatorname{Spec} R \backslash V(I) = U,$$

die Behauptung. □

Proposition 1.11 *Für jeden Ring R ist* $\operatorname{Spec} R$ *quasikompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von $X := \operatorname{Spec} R$. Ohne Einschränkung gelte $U_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in R$ für alle $i \in J$. Nach Voraussetzung ist

$$\bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} D(f_i) = X, \qquad \bigcap_{i \in J} V(f_i) = V\left(\sum_{i \in J} (f_i)\right) = \varnothing,$$

also

$$R = I(\varnothing) = I\left(V\left(\sum_{i\in J}(f_i)\right)\right) = \sqrt{\sum_{i\in J}(f_i)}.$$

Wir finden also $i_1, \ldots, i_n \in J$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ mit

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{i_k}.$$

Damit ist

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} D\left(f_{i_k}\right)$$

und X ist quasikompakt. $\square$

Erinnerung + Definiton 1.12 Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R =: X$.

(i) Wir definieren durch

$$R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f \in R, g \in R \backslash \mathfrak{p} \right\}$$

die *Lokalisierung* von R nach $\mathfrak{p}$, wobei wir $\frac{f}{g}$ statt $(f, g)_{\sim}$ schreiben. Es gilt

$$(f, g) \sim (f', g') \iff h\left(fg' - f'g\right) = 0 \text{ für ein } h \in R\backslash\mathfrak{p}$$

(ii) Sei $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung

$$s : U \longrightarrow \dot{\bigcup_{\mathfrak{p}\in U}} R_{\mathfrak{p}}, \qquad \mathfrak{q} \mapsto s(\mathfrak{q}) \in R_{\mathfrak{q}}$$

heißt *regulär* in $\mathfrak{p} \in U$, falls es eine Umgebung $U_0 \subseteq U$ von $\mathfrak{p}$ und $f, g \in R$ gibt sodass für alle $\mathfrak{q} \in U_0$ gilt $g \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}$.

(iii) Die Menge

$$\mathcal{O}_X(U) := \left\{ s : U \longrightarrow \dot{\bigcup_{\mathfrak{p}\in U}} R_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; s \text{ ist regulär in allen } \mathfrak{p} \in U \right\}$$

heißt *Ring der regulären Funktionen auf* U.

(iv) Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ ist eine Garbe von Ringen auf $X = \operatorname{Spec} R$.

(v) Das Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *affines Schema.*

(vi) Für $x = \mathfrak{p} \in X$ heißt

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{(U, s) \mid x \in U \subseteq X \text{ offen }, s \in \mathcal{O}_X(U)\} /_{\sim}$$

Halm der Strukturgarbe in x, wobei

$$(U, s) \sim (U', s') \iff \text{Es gibt } U'' \subseteq U \cap U' \text{ mit } x \in U'' \text{ und } s|_{U''} = s'|_{U''}.$$

$\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein lokaler Ring.

Proposition 1.13 *Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$ sowie $(X, \mathcal{O}_X)$ das dazugehörige affine Schema.*

(i) Für jedes $x = \mathfrak{p} \in X$ ist $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_{\mathfrak{p}}$.

(ii) Für jedes $f \in R$ ist $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong R_f$.

Beweis. (i) Definiere

$$\psi : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}, \qquad [(U,s)]_\sim \mapsto s(\mathfrak{p}).$$

Dann ist ψ wohldefinierter Ringhomomorphismus, denn für $(U,s) \sim (U',s')$ gilt $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$.

injektiv. Sei $[(U,s)] \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $\psi([(U,s)]) = 0$, also $s(\mathfrak{p}) = 0$. Ohne Einschränkung sei für alle $\mathfrak{q} \in U$

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{q}} \qquad \text{für geeignete } a, f \in R, f \notin \mathfrak{q}.$$

Da $s(\mathfrak{p}) = 0$, gibt es also $h \in R \backslash \mathfrak{p}$ mit $h \cdot a = 0$ in R. Damit ist aber $\frac{a}{f} = 0$ in $R_{\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in D(h) \cap U \ni x$, also gerade $s(\mathfrak{q}) = 0$ für alle $\mathfrak{q} \in D(H) \cap U$. Es folgt

$$[(U,s)] = 0 \quad \text{in } \mathcal{O}_{X,x},$$

wie gewünscht.

surjektiv. Sei $\frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{p}}$ für $a \in R, f \in R\backslash\mathfrak{p}$. Sei $U := D(f)$, also $x \in U$. Setze für alle $\mathfrak{q} \in U$

$$s(\mathfrak{q}) := \frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{q}}.$$

Dann gilt $s \in \mathcal{O}_X(U)$ sowie $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{p}}$, also

$$\psi([(u,s)]) = \frac{a}{f},$$

womit die Surjektivität von ψ und damit die Behauptung folgt.

(ii) Definiere nun

$$\phi : R_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f)), \qquad \frac{a}{f^n} \mapsto \left[\left(D(f), \frac{a}{f^n}\right)\right].$$

injektiv. Sei $\phi\left(\frac{a}{f^n}\right) = 0$. Dann gibt es für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in D(f)$ ein $h_{\mathfrak{p}} \in R\backslash\mathfrak{p}$ mit $h_{\mathfrak{p}} \cdot a = 0$ in R. Sei

$$\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}(a) = \{r \in R \mid r \cdot a = 0\} \subseteq R$$

das Annulatorideal von a. Es gilt $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$. Dann ist aber

$$I(V(f)) \subseteq I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}},$$

also $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Damit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m \in \mathfrak{a}$, also gerade $af^m = 0$. Damit gilt

$$\frac{a}{f^n} = 0 \quad \text{in } R_f,$$

was zu zeigen war.

surjektiv. Sei $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$, d.h. für jedes $x = \mathfrak{p} \in D(f)$ gibt es ein $U_x \subseteq D(f)$ sowie $a_\mathfrak{p} \in R, h_\mathfrak{p} \in R \backslash \mathfrak{p}$ mit

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a_\mathfrak{p}}{h_\mathfrak{p}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{q} \in U_x.$$

Da $D(f)$ quasikompakt ist, sei ohne Einschränkung

$$D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} U_i, \qquad U_i = D(h_i)$$

sowie für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$

$$s = \frac{a_i}{h_i} \qquad \text{auf } D(h_i).$$

Auf $D(h_i) \cap D(h_j)$ ist $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$, das heißt wir finden $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(h_i h_j)^n (a_i h_j - a_j h_i) = 0 \qquad \text{in } R.$$

Damit gilt

$$h_j^{n+1} h_i^n a_i - h_i^{n+1} h_j^n a_j) = 0.$$

Setze

$$\tilde{h}_j := h_j^{n+1}, \quad \tilde{h}_i := h_i^{n+1}, \quad \tilde{a}_i := a_i h_i^n, \quad \tilde{a}_j := a_j h_j^n$$

Dann wird die Gleichung zu

$$\tilde{h}_j \tilde{a}_i - \tilde{h}_i \tilde{a}_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{h}_j}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} D(\tilde{h}_i) \quad &\Longrightarrow \quad f^m \in \sum_{i=1}^{m} (\tilde{h}_i) \ \text{ für ein } m \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad f^m = \sum_{i=1}^{m} b_i \tilde{h}_i \ \text{ für geeignete } b_i \in R \end{aligned}$$

Setze $a := \sum_{i=1}^r b_i \tilde{a}_i$. Dann gilt für $1 \leqslant j \leqslant m$

$$a\tilde{h}_j = \sum_{i=1}^{r} b_i \tilde{h}_j \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^{r} b_i \tilde{h}_i \tilde{a}_j = \tilde{a}_j f^m,$$

also

$$s = \frac{a}{f^m}$$

auf ganz $D(f)$, womit die Behauptung gezeigt ist. □

Proposition 1.14 *Sei $\phi : R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus, $U \subseteq X = \operatorname{Spec} R$ offen, $X' =$*

Spec R' *sowie*

$$f_\phi : X' \longrightarrow X, \qquad \mathfrak{q} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{q})$$

die von ϕ induzierte stetige Abbildung, d.h $U' = f_\phi^{-1}(U)$ ist offen in X'. Dann induziert ϕ einen Ringhomomorphismus

$$\phi_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}(U'), \qquad s \mapsto \phi_U(s) = \phi_{\mathfrak{p}}\left(s\left(f_\phi(\mathfrak{q})\right)\right) \in R'_{\mathfrak{q}},$$

wobei $\phi_{\mathfrak{p}}$ gegeben ist durch

$$\phi_{\mathfrak{p}} : R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow R_{\phi(\mathfrak{p})}, \qquad \frac{g}{h} \mapsto \frac{\phi(g)}{\phi(h)}.$$

§ 2 Garben

Definition 2.1 Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist eine Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U)$, die jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ein Objekt $\mathcal{F}(U)$ in $\mathcal{C}$ sowie für je zwei offene $U \subseteq U' \subseteq X$ einen Morphismus $\rho_U^{U'} : \mathcal{F}(U') \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ in $\mathcal{C}$ zuordnet, sodass gilt

(i) Für alle $U \subseteq X$ offen gilt $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

(ii) Für alle $U \subseteq U' \subseteq U'' \subseteq X$ offen gilt $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$.

Bemerkung 2.2 *Sei $\underline{Off}(X)$ die Kategorie der offenen Teilmengen von X mit den Inklusionen als Morphismen, also*

$$\mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Off}}(X)}(U,V) = \begin{cases} \{\iota : U \hookrightarrow V\}, & \textit{falls } U \subseteq V \\ \varnothing, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \underline{Off}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$.

Definition 2.3 Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X mit Werten in $\mathcal{C}$ heißt *Garbe*, falls folgendes gilt: Für jedes offene $U \subseteq X$, jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U und jede Familie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ für alle $i,j \in I$ gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$. Anders ausgedrückt: Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, falls für eine beliebige offene Teilmenge $U \subseteq X$ und eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U in der Sequenz

$$\mathcal{F}(U) \overset{p_0}{\longrightarrow} \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j).$$

$\mathcal{F}(U)$ der *Equalizier* von p_1 und p_2 sowie p_0 injektiv ist. Die erste Forderung sichert uns, dass lokale Daten, welche auf den Schnitten der U_i übereinstimmen, von globalen Schnitten herkommen, während die Forderung der Injektivität von p_0 die Eindeutigkeit impliziert.

Beispiel 2.4 (i) Für eine quasiprojektive Varietät V ist $\mathcal{O}_V$ eine Garbe auf V.

(ii) Für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist $\mathcal{O}_X$ eine Garbe auf X.

(iii) Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{C}(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig }\}$ ist eine Garbe auf jedem topologischen Raum X.

(iv) Sei $\mathcal{O}_X$ wie in (i) und (ii). Setze

$$\mathcal{O}_X^\times(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f \text{ ist Einheit }\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}_X^\times$ ein Garbe von abelschen Gruppen (betrachte die Abbildung $f \mapsto \exp(f)$).

(v) Sei X ein topologischer Raum, G eine Gruppe. Setze $\mathcal{G}(U) := G$ für alle $U \subseteq X$ offen sowie $\rho_{U'}^U = \mathrm{id}_G$ für alle $U' \subseteq U \subseteq X$ offen. Dann ist $\mathcal{G}$ Prägarbe, aber keine Garbe! Betrachte hierfür $U = U_1 \dot\cup U_2$.

Bemerkung 2.5 *Ist $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen auf X, so ist $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$.*

Beweis. Überdecke $\varnothing$ durch $\{U_i\}_{i \in \varnothing}$. Für die (konsistente!), leere Familie der $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i\in\varnothing}$ gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(\varnothing)$ mit $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in \varnothing$. Damnit muss $|\mathcal{F}(\varnothing)| = 1$ gelten. □

Definition 2.6 Sei X toplogischer Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Prägarben auf X. Ein *Morphismus* $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h. für jedes $U \in \operatorname{Ob}(\underline{\mathrm{Off}}(X))$ ist ein Morphismus $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ gegeben, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, "\phi_{U'}"] \arrow[d, "\rho_U^{U'}"'] & \mathcal{G}(U') \arrow[d, "\rho_U^{U'}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Bemerkung + Definition 2.7 Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X, $x \in X$.

(i) Wir definieren den *Halm von $\mathcal{F}$ in x* durch

$$\mathcal{F}_x := \{(U, f) \mid x \in U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)\} /\!\sim$$

wobei

$$(U,f) \sim (U',f') \quad\Longleftrightarrow\quad \text{Es gibt } U'' \subseteq U \cap U', \text{ sodass } \rho_{U''}^U(f) = f|_{U''} = f'|_{U''} = \rho_{U''}^{U'}(f').$$

$\mathcal{F}_x$ ist eine abelsche Gruppe für alle $x \in X$.

(ii) Für jedes $x \in U \subseteq X$ offen ist

$$p_x^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x, \qquad f \mapsto [(U,f)] =: f_x$$

ein Gruppenhomomorphismus. f_x heißt *Keim von f* in x.

(iii) $\mathcal{F}_x$ ist der Kolimes des filtrierten Diagramms der $\mathcal{F}(U), x \in U$, das heißt: Ist G abelsche Gruppe und $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow G$ Gruppenhomomorphismus für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$, sodass $\phi_{U'} = \phi_U \circ \rho_U^{U'}$ für alle $x \in U \subseteq U' \subseteq X$ offen, so gibt es genau einen Homomorphismus $\phi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow G$, sodass $\phi_U = \phi_x \circ p_x^U$ für alle $x \in U$.

(iv) Sei $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ Homomorphismus von Prägarben abelscher Gruppen auf X. Dann induziert ψ für jedes $x \in X$ einen Gruppenhomomorphismus $\psi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$.

Bemerkung 2.8 *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf, $U \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt*

$$s = 0 \iff s_x = 0 \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis. Wir zeigen die Notwendigkeit. Es gebe also zu jedem $x \in U$ eine Umgebung U_x mit $s|_{U_x} = 0$, also $\rho_{U_x}^U(s) = 0$. Die $\{U_x\}_{x \in U}$ bilden eine offene Überdeckung von U, die $\{s|_{U_x}\}_{x \in U}$ sind eine konsistente Familie von Schnitten. Nach Definition 1.3 gibt es genau ein $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $t|_{U_x} = s|_{U_x}$ für alle x. Da $0 \in \mathcal{F}(U)$ diese Eigenschaft besitzt, folgt aus der Eindeutigkeit von s bereits $s = 0$.

Proposition 2.9 *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen auf X, $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ Garbenmorphismus. Dann gilt*

(i) ϕ_U ist injektiv für alle $U \subseteq X$ offen genau dann, wenn ϕ_x injektiv ist für alle $x \in X$.

(ii) Ist ϕ_U surjektiv für alle $U \subseteq X$ offen, so ist ϕ_x surjektiv für alle $x \in X$.

(iii) ϕ_U ist bijektiv für alle $U \subseteq X$ offen genau dann, wenn ϕ_x bijektiv ist für alle $x \in X$.

Beweis. Wir zeigen die Notwendigkeit von (i) und (iii).

(i) Sei $U \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\phi_U(s) = 0$. Dann gilt $\phi_x(s_x) = 0$ für alle $x \in U$, also $s_x = 0$. Damit folgt bereits $s = 0$.

(iii) Sei $U \subseteq X$ offen, $g \in \mathcal{G}(U)$. Nach Voraussetzung gibt es dann für jedes $x \in U$ ein $s_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\phi_x(s_x) = g$. Also finden wir einen Repräsentanten $\left(U_x, s^{(x)}\right)$ von s_x mit $\phi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x}$. Die $\{U_x\}_{x \in U}$ bilden eine offene Überdeckung von U, (i) liefert also Injektivität von ϕ_{U_x}. Damit ist $\{s^{(x)}\}_{x \in U}$ eine konsistente Familie, es gibt also $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_x} = s^{(x)}$ für alle $x \in U$. Wegen

$$\phi_U(s)|_{U_x} = \phi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x} \qquad \text{für alle } x \in U$$

gilt $\phi_U(s) = g$. □

Beispiel 2.10 Das Beispiel soll den fehlenden Pfeil in der vorangegangenen Proposition füllen. Betrachte den topologischen Raum $X = \mathbb{C}$, die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sowie die Garbe $\mathcal{O}^\times$ der invertierbaren holomorphen FUnktionen auf $\mathbb{C}$. Betrachte nun die Abbildung

$\phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$, welche für offene Mengen $U \subseteq \mathbb{C}$ wie folgt definiert sei:

$$\phi_U : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^\times(U), \qquad f \mapsto \exp(2\pi i f).$$

Dann ist ϕ ein Garbenmorphismus und die auf den Halmen induzierten Homomorphismen ϕ_z für $z \in \mathbb{C}$ sind surjektiv (denn lokal ist eine Funktion ohne Nullstellen invertierbar), auf $U := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist ϕ_U aber nicht surjektiv!

Proposition + Definiton 2.11 *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X.*

(i) Es gibt eine Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X und einen Morphismus $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ von Prägarben, sodass $\theta_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x^+$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist.

(ii) $\mathcal{F}^+$ und θ aus (i) sind eindeutig bis auf Isomorphie. $\mathcal{F}^+$ heißt die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe.

(iii) Wir haben folgende universelle Abbildungseigenschaft: Zu jeder Garbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Morphismus $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ von Prägarben gibt es einen eindeutigen Morphismus $\phi^+ : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$, sodass gilt $\phi = \phi^+ \circ \theta$.

Beweis. (i) Für $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{F}^+(U) := \left\{ s : U \longrightarrow \dot{\bigcup_{x\in U}} \mathcal{F}_x, s(x) \in \mathcal{F}_x \;\Big|\; \forall x \in U \text{ ex. } U_x \ni x \text{ und } f \in \mathcal{F}(U_x) \text{ mit } s|_{U_x} = f \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}^+$ offensichtlich Garbe. Definiere weiter θ für $U \subseteq X$ offen mit $x \in U$ durch

$$\theta_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U), \qquad f(x) \mapsto f_x.$$

Dann ist θ Morphismus von Prägarben und θ_x Isomorphismus für alle $x \in X$.

(ii) Folgt aus (iii).

(iii) Für $U \subseteq X$ sei $\phi_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ wie folgt definiert: Für $s \in \mathcal{F}^+(U)$ und $x \in U$ seien U_x und $f^{(x)} \in \mathcal{F}(U_x)$ wie in der Definition von $\mathcal{F}^+(U)$. Dann ist $\phi_{U_x}\left(f^{(x)}\right) \in \mathcal{G}(U_x)$. Weiter bilden die $\{U_x\}_{x\in U}$ eine offene Überdeckung von U und es gilt

$$\phi_{U_x}\left(f^{(x)}\right)|_{U_x\cap U_y} \;=\; \phi_{U_y}\left(f^{(y)}\right)|_{U_x\cap U_y}.$$

Da $\mathcal{G}$ Garbe ist, existiert ein eindeutiges

$$H := \phi_U^+(s) \in \mathcal{G}(U) \text{ mit } h|_{U_x} = \phi_{U_x}\left(f^{(x)}\right) \text{ für alle } x \in X,$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung + Definition 2.12 *Sei $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X.*

(i) Die Prägarbe $U \mapsto \ker \phi_U$ ist eine Garbe, genannt Kern *ϕ.*

(ii) ϕ heißt Monomorphismus oder injektiv, falls $\ker \phi = 0$.

(iii) Bild ϕ *sei die zu* $U \mapsto \mathrm{im}\phi_{\mathrm{U}}$ *assoziierte Garbe.*

(iv) ϕ *heißt Epimorphismus oder surjektiv, falls* Bild$\phi = \mathcal{G}$.

(v) ϕ *ist Epimorphismus genau dann, wenn* ϕ_x *surjektiv ist für alle* $x \in X$.

Beweis. (i) Sei $U \subseteq X$ offen, $\{U_i\}_{i\in I}$ ist offene Überdeckung von U, $s_i \in \ker \phi_{U_i}$ eine konsistente Familie. Da $\mathcal{F}$ Garbe ist, existiert ein eindeutiges $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$. Für jedes $x \in X$ sei $i \in I$ mit $x \in U_i$, dann ist $\phi_x(s_x) = (\phi_{U_i}(s_i))_x = 0$, also ist $(\phi_U(s))_x = \phi_x(s_x) = 0$ für alle $x \in X$, nach 2.8 also $\phi_U(s) = 0$.

(v) Es gilt

$$\mathrm{Bild}\phi = \mathcal{G} \iff \mathrm{Bild}\phi_x = \mathcal{G}_x \text{ für alle } x \in X \iff \phi_x \text{ surjektiv für alle } x \in X,$$

es folgt also unmittelbar die Behauptung. □

Definition 2.13 Seien $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Garben abelscher Gruppen auf X. Dann ist $U \mapsto \mathcal{F}(U)\big/\mathcal{G}(U)$ eine Prägarbe (i.A. keine Garbe!). Die dazu assoziierte Garbe $\mathcal{F}\big/\mathcal{G}$ heißt *Quotientengarbe.*

Beispiel 2.14 Sei $X = \mathbb{S}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}_X = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig }\}$ und $\mathcal{G}$ die konstante Garbe $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$. Wähle

$$U_1 := \left\{(\cos u, \sin u) \ \Big|\ u \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right\}, \qquad U_2 := \left\{(\cos u, \sin u) \ \Big|\ u \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

Dann ist $U_1 \cap U_2 = D_1 \,\dot\cup\, D_2$, es gilt also $\mathcal{G}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{Z}^2$.
Sei nun $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ mit $f_1|_{D_1} = 0$ und $f_1|_{D_2} = 1$ sowie $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ mit $f_2 = 0$. Dann gilt $f_1|_{U_1\cap U_2} \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$. Daraus folgt $\overline{f}_1 = \overline{f}_2 = 0$ in $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)\big/\mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$. Damit bilden $\overline{f}_1 \in \mathcal{F}(U_1)\big/\mathcal{G}(U_1)$ und $\overline{f}_2 \in \mathcal{F}(U_2)\big/\mathcal{G}(U_2)$ eine konsistente Familie in der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U)\big/\mathcal{G}(U)$ bezüglich der Überdeckung $X = U_1 \cup U_1$. Allerdings gibt es kein $f \in \mathcal{F}(X)\big/\mathcal{G}(X) = \mathcal{F}(X)/\mathbb{Z}$ mit $f|_{U_1} = \overline{f}_1$ und $f|_{U_2} = \overline{f}_2 = 0$, mit anderen Worten, $\mathcal{F}\big/\mathcal{G}$ ist keine Garbe.

Proposition 2.15 *Sei* X *topologischer Raum,* $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ *die Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf* X.

(i) Für jedes $x \in X$ *ist die Zuordnung* $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_x$ *ein kovarianter, exakter Funktor*

$$\Phi_x : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}, \qquad (\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}) \mapsto (\phi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x).$$

(ii) Für jedes $U \in \underline{\mathrm{Off}}(X)$ *ist die Zuordnung* $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ *ein kovarianter, linksexakter Funktor*

$$\Phi_U : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}, \qquad (\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}) \mapsto (\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)).$$

Beweis. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$, d.h. ϕ ist Monomorphismus, ψ ist Epimorphismus und es gilt Bildϕ = Kernψ.

(i) Wir erhalten eine kurze Sequenz in $\underline{\mathrm{Ab}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0.$$

Nach 2.9 und 2.11 ist diese exakt.

(ii) Wir erhalten eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U).$$

Diese ist exakt, da ϕ_U nach 2.11 injektiv ist. Außerdem gilt Bildϕ_U = Kernψ_U, also

$$\mathrm{Bild}\phi(U) \overset{(*)}{=} \mathrm{Bild}\phi_U = \mathrm{Kern}\phi_U = \mathrm{Kern}\phi(U),$$

wobei $(*)$ aus der Injektivität von ϕ folgt. □

Bemerkung + Definition 2.16 Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung topologischer Räume.

(i) Sei $\mathcal{F}$ Garbe abelscher Gruppen auf X. Dann ist die Prägarbe $V \mapsto \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right)$ auf Y eine Garbe $f_*\mathcal{F}$. Sie heißt *direkte Bildgarbe* von $\mathcal{F}$.

(ii) Sei $\mathcal{G}$ Garbe abelscher Gruppen auf Y. $f^{-1}\mathcal{G}$ sei die zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subseteq V\subseteq Y \text{ offen}} \mathcal{G}(V)$$

assoziierte Garbe. Sie heißt *Urbildgarbe* von $\mathcal{G}$.

(iii) Wir haben kovariante Funktoren $f_* : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sh}}(Y)$ und $f^{-1} : \underline{\mathrm{Sh}}(Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sh}}(X)$.

Beweis. (i) Sei $V \subseteq Y$ offen, $\{V_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von V sowie $\{s_i\}_{i\in I} \subseteq \{\mathcal{F}(V_i)\}_{i\in I}$ konsistente Familie. Dann ist $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$ und $s_i \in \mathcal{F}\left(f^{-1}(V_i)\right)$ eine konsistente Familie. Da $\mathcal{F}$ Garbe ist, existiert ein eindeutiges $s \in \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) = f_*\mathcal{F}(V)$ mit $s|_{f^{-1}(V)} = s_i$ für alle $i \in I$.

(iii) Es gilt:

(a) Sei $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ Garbenmorphismus in $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$. Setze

$$\begin{aligned} \phi_* : f_*\mathcal{F} &\longrightarrow f_*\mathcal{F}' \\ V &\mapsto (\phi_*)_V : \left(\mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) = f_*\mathcal{F}(V) \longrightarrow f_*\mathcal{F}'(V) = \mathcal{F}'\left(f^{-1}(V)\right)\right) \end{aligned}$$

(b) Sei $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ Garbenmorphismus in $\underline{\mathrm{Sh}}(Y)$. Setze

$$\begin{aligned} f^{-1}\phi : f^{-1}\mathcal{G} &\longrightarrow f^{-1}\mathcal{G} \\ U &\mapsto \left(f^{-1}\phi\right)_U : f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V\subseteq Y \text{ offen}} \mathcal{G}(V) \\ &= \varinjlim_{f(U)\subseteq V\subseteq Y \text{ offen}} \mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}'(U), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der UAE des Kolimes folgt. Insgesamt folgt dann die Behauptung. □

Proposition 2.17 *Für jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ von topologischer Räumen sind die Funktoren*

$$f_* : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sh}}(Y), \qquad f^{-1} : \underline{\mathrm{Sh}}(Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sh}}(X)$$

zueinander adjungiert. Genauer: f^{-1} ist linksadjungiert zu f_*, bzw. f_* ist rechtsadjungiert zu f^{-1}, d.h. die Funktoren $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Sh}}(X)}\left(f^{-1}(\cdot), \cdot\right)$ und $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Sh}}(Y)}\left(\cdot, f_*(\cdot)\right)$ sind isomorph als Funktoren von $\underline{\mathrm{Sh}}(Y) \times \underline{\mathrm{Sh}}(X)$ nach $\underline{\mathrm{Sets}}$. Das wiederum heißt: Für alle Garben $\mathcal{F} \in \underline{\mathrm{Sh}}(X)$ und $\mathcal{G} \in \underline{\mathrm{Sh}}(Y)$ gibt es eine Bijektion

$$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathrm{Hom}\left(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}\right),$$

sodass für alle Paare von Garbenmorphismen $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ und $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\left(f^{-1}\mathcal{G}', \mathcal{F}\right) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}'}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\left(\mathcal{G}', f_*\mathcal{F}\right) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}\left(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}'\right) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & \mathrm{Hom}\left(\mathcal{G}, f_+\mathcal{F}\right) \end{tikzcd}$$

Beweis. Zur Definition von $\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ konstruieren wir einen Garbenmorphismus $\sigma_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$. Ist dann $\phi : f^{-1}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$, so sei

$$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = f_*(\phi) \circ \sigma_{\mathcal{G}}$$

die Komposition dieser zwei Morphismen. Zur Definition von $\sigma_{\mathcal{G}}$.: Für $V \subseteq Y$ ofen sei

$$f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) := f^{-1}\mathcal{G}\left(f^{-1}(V)\right) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V))\subseteq W\subseteq Y \text{ offen}} \mathcal{G}(W) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V))\subseteq W\subseteq V \text{ offen}} \mathcal{G}(W)$$

Für jedes solche W gibt es eine Restriktionsabbildung $\mathcal{G}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$. Diese induzieren die

Abbildung

$$(\sigma_{\mathcal{G}})_V : \mathcal{G}(V) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{G}(W)$$

Übung: Nachrechnen, dass das Diagramm kommutiert. Hinweis: Man muss für jeden Morphismus $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{G}' \arrow[dr, "\sigma_{\mathcal{G}'}"] & \\
\mathcal{G} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma_{\mathcal{G}}"'] & & f_* f^{-1}\mathcal{G}' \\
& f_* f^{-1}\mathcal{G} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Es bleibt nun zu zeigen: $\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ ist bijektiv. Konstruiere die Umkehrabbildung

$$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}\right)$$

als Komposition von

$$f^{-1} : \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(f^{-1}\mathcal{G}, f^{-1}f_*\mathcal{F}\right)$$

und

$$\rho_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Betrachte dazu für $U \subseteq X$ offen

$$f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V\subseteq Y \text{ offen}} f_*\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V \text{ offen}} \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right).$$

Da $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$ für alle V mit $f(U) \subseteq V$, gibt es für jedes solche V Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$. Mit der UAE des Kolimes erhalten wir

$$(\rho_{\mathcal{F}})_U : \varinjlim_{f(U)\subseteq V \text{ offen}} \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Übung: Zeige, dass $\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ und $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$invers zueinander sind. □

§ 3 Schemata

Definition 3.1 Sei X toplogischer Raum, $\mathcal{O}_X$ Garbe von Ringen auf X.

(i) Das Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *geringter Raum*, $\mathcal{O}_X$ heißt *Strukturgarbe.*

(ii) Ist für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring, so heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ *lokal geringter Raum.*

Beispiel 3.2 (i) Ist R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X, so ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

(ii) Ist X ein toplogischer Raum und $\mathcal{C}_X$ die Garbe der stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf X, dann ist $(X, \mathcal{C}_X)$ ein lokal geringter Raum.

Definition 3.3 Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ geringte Räume.

(i) Ein *Morphismus geringter Räume* $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar $\left(f^{\text{top}}, f^{\#}\right)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $f^{\text{top}} : X \longrightarrow Y$ und einem Garbenmorphismus $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$.

(ii) Sind $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal geringte Räume, so verlangen wir für einen *Morphismus lokal geringter Räume* zusätzlich, dass für jedes $x \in X$ der von $f^{\#}$ induzierte Gruppenhomomorphismus $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist, also gilt

$$\left(f_x^{\#}\right)^{-1} \left(\mathfrak{m}_{f(x)}\right) = \mathfrak{m}_x.$$

Beispiel 3.4 Sei R nullteilerfreier, lokaler Ring, $\mathfrak{m}_R \neq (0)$ sowie $k := \operatorname{Quot}(R)$ und $\iota : R \longrightarrow k$. Dann ist ι kein lokaler Homomorphismus, denn es gilt:

$$\iota(\mathfrak{m}_R) = \mathfrak{m}_R \not\supseteq (0) = \mathfrak{m}_k.$$

Die zugehörige Abbildung der Spektren ist

$$f_\iota : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} R, (0) \mapsto (0).$$

Diese induziert auf den Halmen

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, (0)} = k, \qquad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, (0)} = k$$

die Identität id_k, das heißt (f_ι, ι) ist lokaler Homomorphismus.

Proposition 3.5 *Seien R, S Ringe. Dann entsprechen die Morphismen der lokal geringten Räume* $(\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ *bijektiv den Ringhomomorphismen $R \longrightarrow S$. Die Zuordnung $R \mapsto \operatorname{Spec} R$ ist also eine Antiäquivalenz von Kategorien* $\underline{\text{Ringe}} \longrightarrow \underline{\text{Aff.Sch.}}$.

Beweis. Ist $f : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ Morphismus lokal geringter Räume, so ist

$$f^{\#}_{\operatorname{Spec} R} : R = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\left(f^{-1}(\operatorname{Spec} R)\right) = f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} R) = S$$

Ringhomomorphismus. Sei nun $\alpha : R \longrightarrow S$ Ringhomomorphismus. Dann ist

$$f_\alpha : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R, \qquad \mathfrak{q} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$$

stetig. Für jedes offene $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ induziert α nach 1.11 einen Ringhomomorphismus

$$\alpha_U : \left(f_\alpha^{\#}\right)_U : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Ist $U = D(g)$ für ein $g \in R$, so ist

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\left(D(g)\right) = R_g$$

und

$$\alpha_U\left(\frac{a}{g^n}\right) = \frac{\alpha(a)}{\alpha(g)^n} \in S_{\alpha(g)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\left(D(\alpha(g))\right) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\left(f_\alpha^{-1}(D(g))\right) = f_{\alpha*}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\left(D(g)\right),$$

das heißt α_U induziert den gewünschten Garbenmorphismus. Auf den Halmen induziert α folgende Abbildung:
Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S$, $\mathfrak{p} := f_\alpha(\mathfrak{q}) = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} R$. Die maximalen Ideale in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S,\mathfrak{q}}$ sind $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$. Für $a = \frac{b}{g} \in \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$, also $b \in \mathfrak{p}$ und $g \in R \backslash \mathfrak{p}$, ist dann

$$\left(f_\alpha^\#\right)_\mathfrak{p}(a) = \alpha_\mathfrak{p}(a) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(g)} \in \mathfrak{m}_\mathfrak{q},$$

denn aus $b \in \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ folgt $\alpha(b) \in \mathfrak{q}$ und aus $g \notin \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ folgt $\alpha(g) \notin \mathfrak{q}$. Insgesamt liegt also ein Morphismus lokal geringter Räume vor. □

Definition 3.6 Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *Schema*, falls es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X gibt, sodass $(U_i, \mathcal{O}_X(U_i))$ für jedes $i \in I$ als lokal geringter Raum isomorph zu einem affinen Schema $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ist.

Beispiel 3.7 (i) Ist V affine Variteät über k, so ist $t(V) = \operatorname{Spec} k[V]$ affines Schema.

(ii) Sei V quasiaffine Varietät. Überdecke V durch affine Varietäten V_i für $1 \leqslant i \leqslant r$. Klebe die $t(V_i)$ zum topologischen Raum $t(V)$ zusammen. $\mathcal{O}_{t(V)}$ sei dann die Garbe, die auf jedem V_i mit $\mathcal{O}_{V_i}$ übereinstimmt.

Proposition 3.8 *Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ Schemata, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen und*

$$f : (U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|_V)$$

ein Isomorphismus von Schemata. Sei $Z := (X \,\dot\cup\, Y)/\sim$ mit

$$u \sim f(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in U$$

die Verklebung von X und Y längs f. *Dann gibt es genau eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z mit*

$$\mathcal{O}_Z|_X = \mathcal{O}_X, \quad \mathcal{O}_Z|_Y = \mathcal{O}_Y.$$

Insbesondere ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ damit ein Schema.

Beweis. Es ist $W \subseteq Z$ offen genau dann, wenn $W \cap X$ und $W \cap Y$ offen sind. Also bilden die offenen Teilmengen von X und Y eine Basis der Topologie auf Z. Nach Aufgabe 1 auf dem 2. Übungsblatt gibt es also genau eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z, die auf X bzw. Y mit $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ übereinstmmt. □

Bemerkung 3.9 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Schema, $U \subseteq X$ offen. Dann ist auch $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema. Es heißt offenes Unterschema von $(X, \mathcal{O}_X)$.*

Beweis. Ist $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von X durch affine Schemata, so ist $\{U \cap U_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von U. Überdecke nun $U \cap U_i$ durch offene Mengen der Form $\{D(f_{ij})\}_{j\in J}$ mit $f_{ij} \in R$, wobei $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ und $D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$. Insgesamt ist U damit durch affine Schemata überdeckt.

Beispiel 3.10 Sei $X = Y = \mathbb{A}^1(k) = \operatorname{Spec} k[T]$, $U = V = \mathbb{A}^1(k)\backslash\{0\} = \operatorname{Spec} k[T]_T = D(T)$. Setze $f = \mathrm{id} : U \longrightarrow V$. Sei Z die Verklebung von U und V längs f. Dann ist $Z = U \cup \{0_X, 0_Y\}$, wobei

$$\iota_X : X \longrightarrow Z, \quad \iota_Y : Y \longrightarrow Z, \qquad 0_X = \iota_X(0), \quad 0_Y = \iota_Y(0).$$

Es gilt:

(i) Z ist irreduzibel.

(ii) Für jedes offene $W \subseteq Z$ mit $0_X \in W, 0_Y \in W$ und jedes $f \in \mathcal{O}_Z(W)$ ist $f(0_X) = f(0_Y)$.

§ 4 Abgeschlossene Unterschemata

Erinnerung 4.1 Sei $X = \operatorname{Spec} R$, R ein Ring. Dann gilt

$$V \subseteq X \text{ ist abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad V = V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

für ein Ideal $I \subseteq R$. Dabei gilt

$$V(I_1) = V(I_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$$

Bemerkung + Definition 4.2 Sei R ein Ring.

(i) Für jedes Ideal I ist die Abbildung

$$\pi : V(I) \longrightarrow \operatorname{Spec} R/I, \qquad \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \mod I$$

ein Homoöomorphismus.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ heißt das affine Schema $\left(V(I), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R/I}\right) = \left(\operatorname{Spec} R/I, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R/I}\right)$ *abgeschlossene Unterschema* von $\operatorname{Spec} R$.

Die Ideale in R entsprechen also bijektiv den abgeschlossenen Unterschemata von $\operatorname{Spec} R$.

Definition + Bemerkung 4.3 Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, $I \subseteq R$ ein Ideal in R, setze $Z = \operatorname{Spec} R/I$. Sei weiter $j : Z \longrightarrow X$ der von der Restklassenabbildung $R \longrightarrow R/I$ induzierte Morphismus affiner Schemata.

(i) Für $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{I}(U) := I \cdot \mathcal{O}_X(U) = \rho_U^X(I) \cdot \mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U).$$

Dann ist $\mathcal{I}(U)$ Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ für alle $U \subseteq X$ offen. $\mathcal{I}$ ist Garbe abelscher Gruppen und heißt *Idealgarbe* auf X.

(ii) Es gilt

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}.$$

Beweis. (ii) Für $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{I}(U)$ offenbar der Kern der surjektiven Abbildung

$$j_U^\# : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow j_*\mathcal{O}_Z(U) = \mathcal{O}_Z\left(j^{-1}(U)\right) = \mathcal{O}_X(U) / I \cdot \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U) / \mathcal{I}(U),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 4.4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.

(i) Eine Garbe $\mathcal{I}$ abelscher Gruppen auf X heißt *Idealgarbe*, wenn für jedes $U \subseteq X$ offen gilt: $\mathcal{I}(U)$ ist Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$. Insbesondere ist $\mathcal{I}$ also Untergarbe von $\mathcal{O}_X$.

(ii) Ist $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, so heißt eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ *quasikohärent*, wenn es ein Ideal $I \subseteq R$ gibt mit $\mathcal{I}(U) = I \cdot \mathcal{O}_X(U)$ für alle $U \subseteq X$ offen.

(iii) Für ein allgemeines Schema X heißt eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ *quasikohärent*, wenn für jedes affine offene Unterschema $U \subseteq X$ die Einschränkung $\mathcal{I}|_U$ quasikohärent ist.

Proposition 4.5 *Eine Idealgarbe auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ durch affine Schemata gibt mit $U_i = \operatorname{Spec} R_i$, sodass $\mathcal{I}|_{U_i}$ für jedes $i \in I$ quasikohärent ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{I}$ Idealgarbe auf X, so folgt unmittelbar die Behauptung.
Sei nun $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ affines Schema in X, U offen in X. Nach Voraussetzung gibt es affine Unterschemata $\{U_i\}_{i\in J}$ mit

$$\bigcup_{i\in J} U_i = U \quad \text{und} \quad \mathcal{I}(U_i) = I_i \cdot \mathcal{O}_X(U_i)$$

Sei dabei ohne Einschränkung $U_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in R$. Da $\operatorname{Spec} R$ quasikompakt ist, genügt $J = \{1, \dots, n\}$. Dann ist aber $1 \in (f_1, \dots f_n)$, also schreibe

$$1 = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i, \qquad \mu_i \in R \text{ geeignet für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

zu zeigen: Es gibt ein Ideal $I \subseteq R$ mit $I \cdot R_{f_i} = I_i \subseteq R_{f_i}$ (Beachte: $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(f_i)) = R_{f_i}$).

Beh. (a) Ist $\alpha_i : R \longrightarrow R_{f_i}$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, so ist

$$I = \alpha^{-1}(I_i),$$

also insbesondere nicht von i abhängig.

Bew. (a) Aus $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$ folgt $I_i R_{f_i f_j} = I_j R_{f_{ij}}$. Sei nun also $\frac{a}{f_i^k} \in I_i$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es $b_j \in R$, $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{a}{f_i^k} = \frac{b_j}{f_j^{k_j}}$. Ohne Einschränkung gelte $k = k_j$ für alle j (erweitere, bis die Potenzen im Nenner gleich sind). Dann gilt $af_j^k = bf_i^k$. Wir erhalten

$$a \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_j f_j^k = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu_j f_i^k,$$

also

$$a = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \mu_j \right) f_i^k \in (f_i^k),$$

also $\frac{a}{f_i^k} \in R$, was zu zeigen war. □

Definition + Bemerkung 4.6 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.

(i) Ein *abgeschlossenes Unterschema* von X ist ein Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wobei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ für eine quasikohärente Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X.

(ii) Ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ abgeschlossenes Unterschema, $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ offenes affines Unterschema von X, so ist $U \cap Y$ das durch das Ideal $\mathcal{I}(U) \subseteq R$ definierte abgeschlossene Unterschema von U.

Definition + Bemerkung 4.7 (i) Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, $N_R := \sqrt{(0)}$ das Nilradikal in R. Dann ist R/N_R reduziert, $X_{\text{red}} = \operatorname{Spec}(R/N_R)$ heißt das *zu X assoziierte reduzierte Schema.*

(ii) Der von $\pi : R \longrightarrow R/N_R$ induzierte Schemamorphismus ist ein Homoömorphismus. Er mach X_{red} zu einem abgeschlossenen Unterschema vom X.

(iii) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $\mathcal{N}_X$ sei die Idealgarbe, für die $\mathcal{N}_X(U)$ das Nilradikal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist. Dann ist $\mathcal{N}_X$ quasikohärent. $X_{\text{red}} = (X, \mathcal{O}_X / \mathcal{N}_X)$ heißt das *zu X assoziierte reduzierte Schema.*

(iv) $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert*, falls $\mathcal{N}_X = (0)$.

§ 5 Faserprodukte

Definition 5.1 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, X, Y, S Objekte sowie $f : X \longrightarrow$, $g : Y \longrightarrow S$ Morphismen in $\mathcal{C}$.

(i) Dann heißt der Limes des Diagramms

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ & S \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Faserprodukt von X und Y, schreibe $X \times_S Y$:

(ii) Explizit bedeutet das:

(1) Es gibt Morphismen $p_X : X \times_S Y \longrightarrow X, p_Y : X \times_S Y \longrightarrow Y$ mit $f \circ p_X = g \circ p_Y$.

(2) *Universelle Abbildungseigenschaft:* Für jedes Objekt Z und alle Morphismen $\phi : Z \longrightarrow X$ und $\psi : Z \longrightarrow Y$ mit $f \circ \phi = g \circ \psi$ gibt es genau einen Morphismus $h : Z \longrightarrow X \times_S Y$ mit $\phi = p_X \circ h$ und $\psi = p_Y \circ h$.

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[urr, bend left, "\phi"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] \arrow[r, dashed, "\exists! h"] & X \times_S Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & S \\ & & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) Existiert für jedes Diagramm wie in (i) ein Limes in $\mathcal{C}$, so sagt man, dass in $\mathcal{C}$ Faserprodukte existieren.

Bemerkung 5.2 *(i) In der Kategorie der Mengen existieren Faserprodukte.*

(ii) In der Kategorie der topologischen Räume existieren Faserprodukte.

Beweis. Der Beweis erfolgt in beiden Fällen analog - wir zeigen exemplarisch (i). Sind X, Y, S Mengen und $f : X \longrightarrow S$, $g : Y \longrightarrow S$ Abbildungen, so ist das Faserprodukt gegeben durch

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

Wir haben die Projektionen

$$p_X : X \times_S Y \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x, \qquad p_Y : X \times_S Y \longrightarrow Y, \quad (x, y) \mapsto y.$$

Ist nun Z eine weitere Menge und $\phi : Z \longrightarrow X$, $\psi : Z \longrightarrow Y$ Abbildungen mit $f \circ \phi = g \circ \psi$ gegeben, so erhalten wir eine Abbildung

$$h : Z \longrightarrow X \times_S Y, \qquad z \mapsto (\phi(z), \psi(z)),$$

welche offenbar auch eindeutig ist.

Bemerkung 5.3 *In* Sets *und* Top *gilt:*

(i) *Ist* $S = \{s\}$; *so ist* $X \times_S Y = X \times Y$.

(ii) *Es gilt*

$$X \times_S Y = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(\{s\}) \times g^{-1}(\{s\}).$$

(iii) *Sind* $X \subseteq S$ *und* $Y \subseteq S$, f, g *die Inklusionen, so ist* $X \times_S Y = X \cap Y$.

(iv) *Ist* $Y \subseteq S$, g *die Inklusion, so ist* $X \times_S Y = f^{-1}(Y)$.

(v) *Ist* $X = Y$, *so ist* $X \times_S Y$ *der sogenannte Equalizer von* f *und* g.

Bemerkung 5.4 *In jeder Kategorie gilt:*

(i) *Das Faserprodukt ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

(ii) *Für jedes* $f : X \longrightarrow S$ *gilt* $X \times_S S = X$.

(iii) *Für Morphismen* $f : X \longrightarrow S$, $g : T \longrightarrow S$, $h : Y \longrightarrow T$ *in* $\mathcal{C}$ *gilt*

$$(X \times_S T) \times_T Y = X \times_S Y$$

mit

$$p_T : X \times_S T \longrightarrow T, \qquad (g \circ h) : Y \longrightarrow S.$$

Beweis. (ii) Zu zeigen ist: X erfüllt die UAE von $X \times_S S$. Haben $p_X = \mathrm{id} : X \longrightarrow X$, $o_S = f : X \longrightarrow S$. Sei nun Z beliebiges Objekt und $\phi : Z \longrightarrow X$, $\psi : Z \longrightarrow S$ mit $f \circ \phi = \mathrm{id} \circ \psi = \psi$. Dann ist $h = \phi$ eindeutig und es gilt $\mathrm{id} \circ \phi = \phi$ und $f \circ \phi = \psi$.

(iii) Zu zeigen: $X \times_S Y$ erfüllt die UAE von $(X \times_S T) \times_T Y$. Dazu benötigen wir $\tilde{h} : X \times_S Y \longrightarrow X \times_S T$. Betrachte also das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dr, "h"] & & \\
Z \arrow[r, "\exists!\pi"] \arrow[urr, bend left, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \times_S Y \arrow[ur, "p_Y"] \arrow[rr, "\phi = p_X"] \arrow[dr, "\tilde{h}"] & & T \arrow[dr, "g"] & \\
 & & X \times_S T \arrow[ur, "p_T"] \arrow[dr, "\tilde{p}_X"'] & & S \\
 & & & X \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{h}$ erhalten wir über die UAE von $X \times_S T$, denn es gilt $f \circ \phi = (g \circ h) \circ p_Y$. Seien nun Z sowie Morphismen

$$\alpha : Z \longrightarrow X \times_S T, \qquad \beta : Z \longrightarrow Y$$

gegeben, sodass $p_T \circ \alpha = h \circ \beta$. Beachte: Für $X \times_S Y$ gilt

$$\tilde{p}_X \circ \tilde{h} : X \times_S Y \longrightarrow X, \qquad p_Y : X \times_S Y \longrightarrow Y$$

und

$$f : X \longrightarrow S, \qquad (g \circ h) : Y \longrightarrow S.$$

Die UAE davon liefert also eine eindeutige Abbiildung

$$\pi : Z \longrightarrow X \times_S Y$$

mit

$$f \circ (\tilde{p}_X \circ \tilde{h}) \circ \pi = g \circ p_Y \circ \pi, \qquad \text{also} \quad \tilde{h} \circ \pi = p_Y \circ \pi,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 5.5 *Seien X, Y, S Schemata, $f : X \longrightarrow S$, $g : Y \longrightarrow S$ Morphismen von Schemata sowie $\{S_i\}_{i \in I}$, eine Überdeckung von S und setze $X_i := f^{-1}(S_i)$ und $Y_i := g^{-1}(S_i)$.*

(i) Existiert $X_i \times_S Y$ für alle $i \in I$, so existiert bereits $X \times_S Y$.

(ii) Für jedes $i \in I$ gilt $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$.

Beweis. (i) Verklebe die $X_i \times_S Y$ längs der

$$Z_{ij} := p_{X_i}^{-1}(X_i \cap X_j) \subseteq X_i \times_S Y.$$

Dafür benötigen wir einen Isomorphismus $\phi : Z_{ij} \longrightarrow Z_{ji}$. Zeige dazu:

$$Z_{ij} = (X_i \cap X_j) \times_S Y.$$

Betrachte hierfür

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X_i \cap X_j & \subseteq & X_i f \arrow[dr] & \\
Z \arrow[urrrr, "\phi"] \arrow[r, dashed, "\exists! h"] \arrow[drrrr, "\psi"'] & Z_{ij} & \subseteq & X_i \times_S Y \arrow[ur, "p_{X_i}"] \arrow[dr, "p_Y"] & & & & T \\
 & & & & W \arrow[urrr, "g"] & & &
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen nun: $h(Z) \subseteq Z_{ij}$. Dies gilt jedoch, da $\phi(Z) \subseteq X_i \cap X_j$, $p_{X_i}(\phi(Z)) \subseteq Z_{ij}$, also

$$h(Z) = p_{X_i}^{-1}(\phi(Z)) \subseteq Z_{ij}.$$

Sei nun also $\tilde{X}$ die Verklebung der $X_i \times_S Y$ längs der Z_{ij}. Es bleibt noch zu zeigen: $\tilde{X} = X \times_S Y$. Verklebe nun die $p_{X_i} : X_i \times_S Y \longrightarrow X_i \subseteq X$ zu Morphismen $p_X : \tilde{X} \longrightarrow X$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "\phi"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] \arrow[r, dashed, "\exists! h"] & \tilde{X} \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & T \\
 & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Für jedes $i \in I$ sei $Z_i := \phi^{-1}(X_i)$ Erhalte dadurch

$$h_i : Z_i \longrightarrow X_i \times_S Y$$

mit $h_i|_{Z_i \cap Z_j} = h_j|_{Z_i \cap Z_j}$ für alle $i, j \in I$. Damit verkleben sich die h_i zu einem Morphismus

$$h : Z \longrightarrow \tilde{X},$$

was den Beweis beendet.

(ii) Zu zeigen ist: $X_i \times_{S_i} Y_i$ erfüllt die UAE von $X_i \times_S Y$- Betrachte als das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \arrow[dr, "f|_{X_i}"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "\phi"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] \arrow[r, dashed, "h"] & X_i \times_{S_i} Y_i \arrow[ur, "p_{X_i}"] \arrow[dr, "p_{Y_i}"'] & & S \\
 & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $f \circ \phi = g \circ \psi$, also $(g \circ \psi)(Z) \subseteq S_i$ und damit $\psi(Z) \subseteq g^{-1}(S_i) = Y_i$, das heißt es gibt $h : Z \longrightarrow X_i \times_{S_i} Y_i$. Damit folgt

$$X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y,$$

die Behauptung. □

Satz 5.6 *In der Kategorie der Schemata existieren Faserprodukte.*

Beweis. **Fall (1)** Zeige die Behauptung für den affinen Fall $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B, S = \operatorname{Spec} R$, wobei A und B mit den Morphismen $f : X \longrightarrow S$ und $g : Y \longrightarrow S$ als R-Algebren aufgefasst werden . Wir brauchen den Kolimes von A und B als R-Algebren in der Kategorie der Ringe. Wir behaupten, dass das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ diese Eigenschaft besitzt. Erinnerung: $A \otimes_R B$ wird zur Algebra durch

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Setze nun

$$\sigma_A : A \longrightarrow A \otimes_R B, \qquad a \mapsto a \otimes 1, \qquad \sigma_B : B \longrightarrow A \otimes_R B, \qquad b \mapsto 1 \otimes b.$$

σ_A und σ_B sind Homomorphismen von R-Algebren. Die UAE für $A \otimes_R B$ ist: Ist $\Phi : A \times B \longrightarrow C$ bilineare Abbildung in eine R-Algebra C, so existiert eine eindeutige R-lineare Abbildung $\gamma : A \otimes_R B \longrightarrow C$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\exists! \gamma"'] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dl, "\sigma_B"] \arrow[dll, bend right, "\beta"'] & \\
C & A \otimes_R B \arrow[l, dashed, "\gamma"'] & & R \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& & A \arrow[ul, "\sigma_A"'] \arrow[ull, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

mit $\Phi : A \times B \longrightarrow C, \qquad (a, b) \mapsto (\alpha(a), \beta(b))$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass γ ein Ringhomomorphismus ist. Damit erhalten wir

$$\text{Spec}\,(A \otimes_R B) = \text{Spec}\, A \times_S \text{Spec}\, B = X \times_S Y$$

in der Kategorie der affinen Schemata. Ist Z nun einbeliebiges Schema $\phi : Z \longrightarrow X$, $\psi : Z \longrightarrow Y$ mit

$$\alpha = \phi_Z^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec}\, A}(\text{Spec}\, A) = A \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)\phi_* \mathcal{O}_Z(\text{Spec}\, A)$$

$$\beta = \psi_Z^{\#} : B \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z).$$

Dann induzieren α, β die Abbildung

$$\gamma : A \otimes_R B \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$$

und in der Übung haben wir gesehen, dass wir ein

$$h : Z \longrightarrow \text{Spec}\,(A \otimes_R B)$$

finden.

Fall (2) Seien nun X, Y, S beliebig. Überdecke S durch affine Schemata $S_i = \text{Spec}\, R_i, i \in I$. Seien weiter Morphismen $f : X \longrightarrow S$, $g : Y \longrightarrow S$ gegeben und setze $X_i := f^{-1}(S_i), Y_i :=$

$g^{-1}(S_i)$. Überdecke nun nochmals die X_i durch offene affine Schemata $X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}, j \in J$ sowie die Y_i durch $Y_{ik} = \operatorname{Spec} B - ik, k \in K$. Nach Schritt (i) existiert $X_{ij} \times_{S_i} Y_{ik}$ für alle $(i,j,k) \in I \times J \times K$.

Wir wenden nun Lemma 5.5(i) an auf

(1) $T = S_i, V = X_i, V_j = X_{ij}, W = Y_{ik}$ für feste $k \in K$. Dies liefert die Existenz von $X_i \times_{S_i} Y_{ik}$ für alle $i \in I$.

(2) $T = S_i, V = Y_i, V_j = Y_{ij}, W = X_i$. Die Symmetrie des Faserprodukts liefert dann die Existenz von $X_i \times_{S_i} Y_i$ für alle $i \in I$.

Wenden wir nun darauf Lemma 5.5(ii) an, existiert $X_i \times_S Y$ für alle $i \in I$ und nochmals mit (i) erhalten wir die Existenz von $X \times_S Y$, was gerade die Behauptung war. □

Definition 5.7 (i) Sei $f : X \longrightarrow S$ Mophismus von Schemata. Dann heißt X ein $S-$*Schema*, schreibe X/S.

(ii) Sei X/S ein S-Schema, $\phi : T \longrightarrow S$ ein Morphismus von Schemata. Dann heißt das T-Schema

$$X \times_S T \xrightarrow{p_T} T$$

durch Basiswechsel aus X/S hervorgegangenes Schema. Das dadurch entstehende kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\phi"'] & S \end{tikzcd}$$

auch *Basiswechseldiagramm* oder *cartesisches Diagramm*. Beachte: Die UAE des Faserprodukts stellt sicher, dass $X \times_S T$ minimal mit der Eigenschaft ist, das Diagramm mit X, S, T kommutativ zu machen.

Beispiel 5.8 Sei $f \in \mathbb{Z}[X,Y]$. Die Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sowie $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ ergeben folgende Diagramme mit $X := \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[X,Y]/(f)\right)$ und der Schreibweise

$$X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\,\mathbb{C} = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

$$\begin{tikzcd} X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \arrow[l] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{R} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{Q} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z} & \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Eine Fragestellung könnte dann lauten: Gibt es für ein vorgegebenes $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$ ein Schema, sodass wir durch Basiswechsel wieder zum ursprünglichen Faserprodukt zurückkehren?

§ 6 Punkte

Definition + Bemerkung 6.1 Sei X ein Schema, $x \in X$.

(i) Wir definieren den *Restklassenkörper* von X in x als

$$\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x .$$

(ii) Sei $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus von Schemata, $y = f(x) \in Y$. Dann induziert f einen Homomorphismus $\kappa(y) \longrightarrow \kappa(x)$. Damit wird $\kappa(x)/\kappa(y)$ zur Körpererweiterung.

(iii) Für einen Körper k gibt es genau dann einen Morphismus $\iota : \operatorname{Spec} k \longrightarrow X, \iota(0) = x$, falls $\kappa(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von k ist.

(iv) Ein Punkt wie in (iii) heißt k-wertig.

Beweis. (ii) f induziert $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. $f_x^\#$ ist lokaler Homomorphismus, das heißt es gilt $f_x^\#(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}_x$. Der Homomorphiesatz liefert die Behauptung.

(iii) Sei $U = \operatorname{Spec} R$ eine affine Umgebung von x, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ das zu x zugehörige Primideal in R. Angenommen, eine solche Abbildung ι existiere. Dann gibt es $\alpha : R \longrightarrow k$ mit Kern $\alpha = \mathfrak{p}$. Wegen $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_\mathfrak{p}$ gilt $\kappa(x) = R_\mathfrak{p} / \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ wird durch Restklassenbildung ein Homomorphismus $\kappa(x) \longrightarrow k$ induziert.

Ist nun umgekehrt $\kappa(x)$ ein Teilkörper von k, so wird durch $R \longrightarrow R_\mathfrak{p} \longrightarrow R_\mathfrak{p} / \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \longrightarrow k$ der gewünschte Morphismus induziert. □

Folgerung 6.2 *Seien X, Y S-Schemata. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : X \times_S Y \longrightarrow \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}, \qquad z \mapsto (p_X(z), p_Y(z))$$

surjektiv.

Beweis. Seien $x \in X, y \in Y$ mit $f(x) = g(y) =: s \in S$. Nach 6.1 (iii) ist $\kappa(s) \subseteq \kappa(x)$ und $\kappa(s) \subseteq \kappa(y)$. Sei k das Kompositum von $\kappa(s)$ und $\kappa(y)$, also $\kappa(s) \subseteq k$. Wieder nach 6.1(iii) gibt es Morphismen

$$\phi : Z := \operatorname{Spec} k \longrightarrow X, \quad 0 \mapsto x, \qquad \psi : Z \longrightarrow Y, \quad 0 \mapsto y.$$

Die Komposition $f \circ \phi = g \circ \psi$ ist der von $\kappa(s) \subseteq k$ induzierte Morphismus. Damit gibt es einen eindeutigen Morphismus $h : Z \longrightarrow X \times_S Y$ mit $p_X \circ h = \phi$ und $p_Y \circ h = \psi$. Für $z := h(0)$ gilt dann somit

$$p_X(z) = x, \qquad p_Y(z) = y,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 6.3 Die Abbildung Φ ist im Allgemeinen nicht injektiv. Betrachte hierfür den Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

mit $\mathbb{A}^1_k := \operatorname{Spec} k[X]$ sowie $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{R}} \operatorname{Spec}\mathbb{C}$. Dann ist Φ nicht injektiv.

Beispiel 6.4 Sei p Primzahl, $X = \operatorname{Spec}\ \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\kappa(p) = \mathbb{Z}_{(p)} \big/ p\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{F}_p, \qquad \kappa(0) = \mathbb{Q}.$$

Definition + Bemerkung 6.5 Sei $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus, $y \in Y$.

(i) $X_y := f^{-1}(y) := X \times_Y \operatorname{Spec}\kappa(y)$ heißt *Faser* von f über y.

(ii) Die Projektion

$$p_X : X_y \longrightarrow X, \qquad p_X(X_y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

ist injektiv.

(iii) Ist y abgeschlossen, so ist X_y abgeschlossenes Unterschema von X.

Beweis von (ii) Seien $x_1, x_2 \in X_y$ mit $p_X(x_1) = p_X(x_2) = x$. Dann ist insbesondere $f(x) = y$. Sei $Z = \operatorname{Spec}\kappa(x)$ und $\iota : Z \longrightarrow X$ der Morphismus mit $\iota(0) = x$. Weiter sei $\psi : Z \longrightarrow \operatorname{Spec}\kappa(y)$ der von $f_x^{\#}$ induzierte Morphismus. Wegen 6.1(ii) ist $\kappa(y) \subseteq \kappa(x) \subseteq \kappa(x_i)$ für $i \in \{1, 2\}$. Nach 6.1(iii) gibt es Morphismen

$$h_i : Z \longrightarrow X_y, \qquad h_i(0) = x_i.$$

Diese erfüllen $p_X \circ h_i = \iota$ und $p_{\operatorname{Spec}\kappa(y)} \circ h_i = \psi$. Die UAE des Faserprodukts liefert $h_1 = h_2$ und damit $x_1 = x_2$. □

Definition + Bemerkung 6.6 Sei X ein Schema, T ein weiteres Schema.

(i) Ein *T-wertiger Punkt* von X ist ein Morphismus $f : T \longrightarrow X$.

(ii) Der Funktor

$$h_X : \underline{\mathrm{Sch}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}, \qquad T \mapsto \operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{Sch}}}(T, X)$$

ist kontravariant. h_x heißt *Punktfunktor*.

(iii) Die h_X definieren durch

$$h : \underline{\mathrm{Sch}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Funk}}\left(\underline{\mathrm{Sch}}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}\right), \qquad X \mapsto h_X$$

einen kovarianten Funktor.

Beispiel 6.7 Sei k ein Körper, $T = \operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon^2$ und $X = \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[X,Y]$. Ein T-wertiger Punkt von $\mathbb{A}_k^2$ ist ein Morphismus

$$\psi : \operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon^2 \longrightarrow \mathbb{A}_k^2.$$

Dieser entpricht bijektiv einem Ringhomomorphismus $\alpha : k[X,Y] \longrightarrow k[\epsilon]/\epsilon^2$. Sei α surjektiv, sowie $\alpha^{-1}((\epsilon)) = (X,Y)$. Dann gibt es $a, b \in k$ mit

$$\alpha(X) = b \cdot \epsilon, \qquad \alpha(Y) = a \cdot \epsilon.$$

Dann gilt $\alpha(aX - bY) = ab\epsilon - ab\epsilon = 0$, also $aX - bY \in \ker \alpha$. Damit gilt

$$\ker \alpha = (X,Y)^2 + (aX - bY).$$

Geometrische Interpretation: α bestimmt einen Punkt $P \in \mathbb{A}_k^2$ und eine Gerade durch den Punkt, also einer "Richtung" bzw. einem Element aus $T_P\left(\mathbb{A}_k^2\right)$.

Beispiel 6.8 Sei R diskreter Bewertungsring, $T = \operatorname{Spec} R$ und $k = \operatorname{Quot}(R)$. Sei X ein weiteres Schema. Dann gilt

$$\operatorname{Hom}(T,X) = \left\{(x_0, x_1, \iota) \mid x_0 \in \overline{\{x_1\}}, \iota : \kappa(x_1) \longrightarrow k \text{ Hom. }, \iota\left(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}_{\mathrm{red}}, x_0}\right) \subseteq R \text{ und } \iota(\mathfrak{m}_{x_0}) \subseteq \mathfrak{m}\right\},$$

denn:

"$\subseteq$" Setze $f : T \longrightarrow X$, $x_0 := f(\mathfrak{m}), x_1 := f(0)$ und $\iota := f_{x_0}^{\#}$. Da T reduziert ist, faktorisiert f nach Übungsaufgabe 5.3 über $\overline{\{x_1\}}_{\mathrm{red}} =: Z$. Weiter induziert $f : T \longrightarrow Z$ einen Ringhomomorphismus auf dem Halm $f_{x_0}^{\#} : \mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,\mathfrak{m}} = R$ mit $f_{x_0}^{\#}(\mathfrak{m}_{x_0}) \subseteq \mathfrak{m}$.

"$\supseteq$" Sei $\iota : \mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow R$ Ringhomomorphismus. Dann induziert ι einen Morphismus

$$f : T \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Z,x_0} \xrightarrow{\psi} Z \longrightarrow X,$$

wobei ψ durch die Abbildung $\operatorname{Spec} R \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,x_0}, \mathfrak{p} \mapsto \frac{\mathfrak{p}}{1}$ induziert wird.

§ 7 Endlichkeitseigenschaften

Definition 7.1 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.

(i) X heißt *lokal noethersch*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, sodass für jedes $i \in I$ R_i noetersch ist.

(ii) X heißt noethersch, falls es die Überdeckung in (i) endlich gewählt werden kann.

Lemma 7.2 *Sei R Ring, $g_1, \ldots, g_r \in R$, $I \subseteq R$ sowie $\phi_i : R \longrightarrow R_{g_i}$ die natürlichen Homomorphismen für $I \in \{1, \ldots, r\}$. Dann gilt*

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \phi_i^{-1}\left(\phi_i(I) \cdot R_{g_i}\right).$$

Beweis. "$\subseteq$" Klar.

"$\supseteq$" Sei $b \in \bigcap_{i=1}^{r} \phi_i^{-1}\left(\phi_i(I) \cdot R_{g_i}\right)$. Dann gilt: Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ lässt sich $\phi_i(b)$ schreiben als

$$\frac{b}{1} \overset{!}{=} \phi_i(b) = \frac{a_i}{g_i^{n_i}} \in R_{g_i}, \qquad a_i \in I, n_i \in \mathbb{N}_0,$$

also

$$\frac{b}{1} - \frac{a_i}{g_i^{n_i}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_i^{m_i} \cdot (b \cdot g_i^{n_i} - a_i \cdot 1) = 0 \qquad \text{für ein } m_i \in \mathbb{N}_0,$$

also

$$g_i^{m_i+n_i} \cdot b = g_i^{m_i} a_i \in I \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Ohne Einschränkung gelte $m_i + n_i = N$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Nun gilt

$$\bigcup_{i=1}^{r} D(g_i) = R \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{r} V(g_i) = \varnothing,$$

die $g_1, \ldots, g_r$ erzeugen also R (als Modul). Schreibe

$$1 = \sum_{i=1}^{r} c_i g_i \qquad \text{mit geeigneten } c_i \in R.$$

Da die g_i R erzeugen, tun es die $g_1^N, \ldots, g_r^N$ ebenfalls, denn es gilt

$$1^M = 1 = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i g_i\right)^M$$

und falls M groß genug ist, kommt in jedem Monom ein g_i mit Exponent $\geqslant N$ vor. Insgesamt erhalten wir damit

$$b = b \cdot 1 = \sum_{i=1}^{r} c_i g_i^N b \in I,$$

was zu zeigen war. □

Proposition 7.3 *(i) Ein affines Schema X = Spec R ist noethersch genau dann, wenn R noethersch ist.*

(ii) Ein Schema ist genau dann noethersch, wenn für jedes offene affine Unterschema U = Spec R der Ring R noethersch ist.

Beweis. (i) Die nichttriviale Implikation folgt aus (ii).

(ii) Sei also X noethersch. Zeige: Jedes affine Unterschema $U = \operatorname{Spec} R$ ist noethersch. Nach Voraussetzung gibt es $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ offen in X, $i \in I$, sodass $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ und R_i noethersch. Sei nun $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ offen. Zu zeigen: R ist noethersch. Überdecke die $U \cap U_i$ durch Mengen $\{D(f_{ij})\}_{j\in J}$ mit $f_{ij} \in R_i$. Es gilt bekanntlich $D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$. Die Lokalisierung eines noetherschen Rings ist noethersch (Algebra), also sind die $R_{ij} := R_{f_{ij}}$ noethersch für alle $i, j \in I, J$. Überdecke nun eine weiteres Mal die $D(f_{ij})$ durch offene Mengen $D(g_{ijk})$ mit geeigneten Elementen $g_{ijk} \in R$. Wegen $D(f_{ij}) \subseteq U$ wird also $\phi_{ij} : R \longrightarrow (R_i)_{f_{ij}}$ induziert. Weiter ist

$$R_{g_{ijk}} = (R_{ij})_{\phi_{ij}(g_{ijk})}$$

als Lokalisierung eines noetehrschen Rings wieder noethersch. Da U quasikompakt ist, genügen endlich viele der $D(g_{ijk})$, um U zu überdecken - bezeichne diese als $g_1, \dots, g_r$. Wir haben nun also

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} R_{g_i}$$

mit Noetherschen Ringen R_g. Sei nun

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

aufsteigende Kette von Idealen in R. Seien $\phi_i : R \longrightarrow R_{g_i},\ a \mapsto \frac{a}{1}$ die natürlichen Homomorphismen in die Lokalisierungen der g_i. Wir erhalten eine stationär werdende Kette von Idealen

$$\phi_i(I_1)R_{g_i} \subseteq \phi_i(I_2)R_{g_i} \subseteq \phi_i(I_3)R_{g_i} \subseteq \dots$$

in R_{g_i}. Mit Lemma 7.2 folgt die Behauptung. □

Definiton + Proposition 7.4 Sei $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus von Schemata.

(i) f heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene affine Überdeckung $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i\}_{i\in I}$ von Y durch affine Schemata und für jedes $i \in I$ eine affine Überdeckung $\{U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}\}_{j\in J}$ von $f^{-1}(U_i)$ gibt, sodass B_{ij} endlich erzeugte A_i-Algebra ist für alle $i \in I, j \in J$.

(ii) f heißt *von endlichem Typ*, wenn in (i) J_i für jedes $i \in I$ endlich gewählt werden kann.

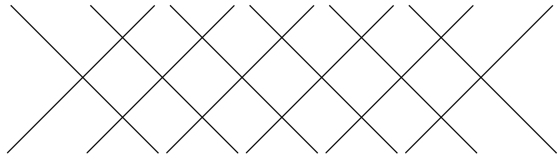
(iii) Ist f lokal von endlichem Typ, so gibt es für jedes offene affine Unterschema $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ eine affine Überdeckung $\{U_i = \operatorname{Spec} B_i\}_{i\in I}$ von $f^{-1}(U)$, sodass B_i endlich erzeugte A-Algebra ist.

Beweis von (iii) Wie in 7.2, nur einfacher. Beachte: Ist B endlich erzeugte A-Algebra, so auch B_f für jedes $f \in B$.

Beispiel 7.5 (i) Morphismen affiner / quasiprojektiver Varietäten über k sind von endlichem Typ.

(ii) Für jede quasiprojektive Varietät ist der Strukturmorphismus $V \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ.

(iii) Sei X von der Gestalt



das heißt, X besteht aus einer unendlichen Kette projektiver Geraden über k. Der Strukturmorphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ ist lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ.

(iv) Der Morphismus $\operatorname{Spec} k[X_1, X_2, X_3, \ldots] \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ ist nicht von lokal endlichem Typ.

(v) Der Morphismus $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ ist nicht lokal von endlichem Typ.

Definition 7.6 Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ vom Schemata heißt *endlich*, falls es eine offene affine Überdeckung $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i\}_{i \in I}$ von Y gibt, sodass $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ für jedes $i \in I$ affin und B_i endlich erezugter A_i-Modul ist.

Beispiel 7.7 Sei S/R ganze Ringerweiterung, die als R-Algebra endlich erzeugt ist. Dann ist $\operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ endlich.

Proposition 7.8 *Ist $f : X \longrightarrow Y$ endlicher Morphismus, so ist $f^{-1}(y)$ endlich für jedes $y \in Y$.*

Beweis. Sei $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ offene Umgebung von y, sodass $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ affin und B endlich erzeugter A-Modul ist. Dann ist

$$f^{-1}(y) = X_y = \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} \kappa(y) = \operatorname{Spec} \left(B \otimes_A \kappa(y)\right)$$

das Spektrum eines endlichdimensionalen $\kappa(y)$-Vektorraums und hat damit nur endlich viele Primideale, denn: Als ganze Ringerweiterung von $\kappa(y)$ gilt für die Krulldimension

$$0 = \dim \kappa(y) = \dim \left(B \otimes_A \kappa(y)\right),$$

also sind alle Primideale minimal. Als endlich erzeugte $\kappa(y)$-Algebra besitzt $B \otimes_A \kappa(y)$ jedoch nur endlich viele minimale Primideale, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 7.9 *Abgeschlossene Einbettungen sind endliche Morphismen. Dabei entsprechen abgeschlossene Einbettungen Y von X den abgeschlossenen Unterschemata, das heißt es gilt $Y \subseteq X$ abgeschlossen sowie $\iota_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ für eine quasikohärente Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X.*

§ 8 Eigentliche Morphismen

Definition 8.1 Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ von Schemata heißt *universell abgeschlossen*, wenn für jeden Morphismus $g : Y' \longrightarrow Y$ der induzierte Morphismus $f' : X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ abgeschlossen ist.

Beispiel 8.2 (i) Betrachte die Projektion $p : \mathbb{A}^2_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k, (x, y) \mapsto x$. p ist nicht abgeschlossen, denn: $V = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ist abgeschlossen, aber $p(V) = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ nicht.

(ii) Die Abbildung $p_1 : \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ ist abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen, denn für den Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "p_1"] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "p_1"'] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

ist p wie oben, also nicht abgeschlossen.

(iii) Für die entsprechende Konstellation mi $\mathbb{P}^1_k$ erhalten wir

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{P}^1_k \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Behauptung: p ist abgeschlossen, denn: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ abgeschlossen. Ist $\dim V = 0$, so ist V endlich, also $p(V)$ endlich und damit abgeschlossen in $\mathbb{A}^1_k$. Ist $\dim V = 1$, so ist $V = V(f)$ für ein $f \in k[X, Y_0, Y_1]$, das homogen von Grad $d \geqslant 0$ in den Y_0, Y_1 ist. Ist $d = 0$, so ist $p(V)$ endlich (Nullstellenmenge sind vertikale Gerade), ist $d \geqslant 1$, so ist $p(V) = \mathbb{A}^1_k$, denn: Sei $x_0 \in \mathbb{A}^1_k$. Gesucht: $(y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1$, sodass $f(x_0, y_0, y_1) = 0$. Da $f(x_0, Y_0, Y_1)$ homogen von Grad d ist, zerfällt es in Linearfaktoren und besitzt also Nullstellen.

Erinnerung 8.3 *Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta X := \{(x, x) \in X \times X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.*

Definition 8.4 Sei $f : X \longrightarrow S$ Morphismus von Schemata.

(i) Der von $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ induzierte Morphismus $\Delta = \Delta_f : X \longrightarrow X \times_S X$ heißt *Diagonalmorphismus.*

(ii) f heißt separiert, wenn Δ_f abgeschlossene Einbettung ist. Man sagt auch: X ist eigentlich über Y.

(iii) X heißt weiter eigentlich, falls X eigentlich über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist.

Beispiel 8.5 Sei X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt sowie $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus. Dann ist $\Delta_f(X)$ nicht abgeschlossen in $X \times_k X$, denn in $\Delta_f(X)$ liegen nur $(0_1, 0_1)$ und $(0_2, 0_2)$, in $\overline{\Delta_f(X)}$ aber auch noch $(0_1, 0_2)$ und $(0_2, 0_1)$.

Bemerkung 8.6 *Jeder Morphismus affiner Schemata ist separiert.*

Beweis. Sei $f : X = \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A = Y$ ein Morphismus induziert vom Ringhomomorphismus $\alpha : A \longrightarrow B$. Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$ und $\Delta_f : X \longrightarrow X \times_Y X$ wird induziert von

$$\mu : B \otimes_A B \longrightarrow B, \qquad b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2.$$

Δ_f ist abgeschlossene Einbettung, denn μ ist surjektiv und damit $B = B \otimes_A B / \ker \mu$, wobei $\ker \mu$ erzeugt wird von den $1 \otimes b - b \otimes 1$ für $b \in B$. □

Bemerkung 8.7 *Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.*

Beweis. Ist $\iota : U \longrightarrow X$ offene (bzw. abgeschlossene) Einbettung, so ist $U \times_X U = U$ und damit $\Delta_\iota = \mathrm{id}_U$, also ist Δ_ι separiert.

Definition 8.8 Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ von Schemata heißt *eigentlich*, falls f von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist. Man sagt auch: X ist eigentlich über Y. X heißt weiter eigentlich, falls X eigentlich über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist.

Definition 8.9 Sei R diskreter Bewertungsring, $k = \operatorname{Quot} R$, $U = \operatorname{Spec} k$ und $T = \operatorname{Spec} R$. Weiter sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Dann heißt ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "h_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

Bewertungsdiagramm für f.

Satz 8.10 *Seien X, Y noethersche Schemata, $f : X \longrightarrow Y$ von endlichem Typ. Dann gilt:*

(i) f ist genau dann separiert, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm für f wie in 8.9 höchstens *einen Morphismus $h : T \longrightarrow X$ gibt, sodass $f \circ h = h_1$.*

(ii) f ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm für f wie in 8.9 genau *einen Morphismus $h : T \longrightarrow X$ gibt, sodass $f \circ h = h_1$.*

Beweis. Es werden nur jeweils die Implikation "$\Rightarrow$" gezeigt - die Rückrichtung lässt sich beispielsweise in Hartshorne II.4.3 bzw. II.4.7 nachlesen.

(i) Sei nun ein Bewertungsdiagramm von X über Y sowie zwei Fortsetzungen $h, h' : T \longrightarrow X$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r, "h_1"'] \arrow[ur, dashed, shift left, "h"] \arrow[ur, dashed, shift right, "h'"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, "\tilde{h}"] \arrow[ddl, bend right, "h"'] \arrow[ddr, bend left, "h'"] & \\
 & X \times_Y X \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Wir müssen zeigen, dass $h = h'$. Betrachte die UAE des Faserprodukts. Dann induzieren die Morphismen h, h' einen Morphisus $\tilde{h} : T \longrightarrow X \times_Y X$. Für den offenen Punkt $t_1 \in T$ gilt wegen $h \circ i = h_0 = h' \circ i$ demnach $h(t_1) = h_0(t_1) = h'(t_1) =: x_1$, das heißt, $\tilde{h}(t_1) \in \Delta_f(X)$. Da $\Delta_f(X)$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist (denn f ist separiert) und $t_0 \in \overline{\{t_1\}}$ ist $\tilde{h}(t_0) \in \overline{\{\tilde{h}(t_1)\}} \subseteq \Delta_f(X)$, also ist

$$h(t_0) = p_1(\tilde{h}(t_0)) = p_2(\tilde{h}(t_0)) = h'(t_0).$$

Dann gilt nach Beispiel 6.8 bereits $h = h'$, denn die Abbildung $\iota : \kappa(x_1) \longrightarrow k$ ist durch h_0 bereits festgelegt.

(ii) Sei nun f eigentlich und das folgende Bewertungsdiagramm gegeben. Wir finden Ein Faserproduktdiagramm darin:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dd, "i"'] \arrow[dr, "\phi"] & & X \arrow[dd, "f"] \\
 & T \times_Y X \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dl, "p_T"'] & \\
T \arrow[rr, "h_1"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "h"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Nach der UAE des Faserprodukts gibts es $\phi : U \longrightarrow T \times_Y X$ mit $p_T \circ \phi = i$ und $p_X \circ \phi = h_0$. i ist dominant, $f' = p_T$ damit auch und somit surjektiv, da p_T abgeschlossen ist. Sei nun $z_1 = \phi(t_1) \in T \times_Y X$. Dan gilt $f'(z_1) = i(t_1) = t_1$. Weiter sei $Z := \overline{\{z_1\}}$ mit der induzierten reduzierten Struktur. Dann ist auch $f'|_Z$ surjektiv, es gibt also $z_0 \in \overline{\{z_1\}}$ mit $f'(z_0) = t_0$. Wir behaupten nun, dass es einen Morphismus $h : T \longrightarrow X$ gibt, sodass $x_0 := h(t_0) = p_X(z_0)$ und $h(t_1) = h_0(t_1) = p_X(z_1) =: x_1$. Nach Konstruktion ist $p_X(z_0) \in \overline{\{h_0(t_1)\}}$. Wir brauchen also einen Homomorphismus $\iota : \kappa(h_0(t_1)) \longrightarrow \kappa(t_1) = k$ mit $\iota\left(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}_{\mathrm{red}}, x_0}\right) \subseteq R$

und $\iota(\mathfrak{m}_{x_0}) \subseteq \mathfrak{m}$. Vermöge p_X ist $\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}_{\mathrm{red}},x_0} \subseteq \mathcal{O}_{Z,z_0}$ und $\mathfrak{m}_{x_0} \subseteq \mathfrak{m}_{z_0}$ mit dem von f' induzierten lokalen Homomorphismus $R \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z_0}$ und $k \hookrightarrow \kappa(z_1)$. Andererseits induziert ϕ einen Homomorphismus $\kappa(z_1) \hookrightarrow k$, das heißt wir erhalten $k = \kappa(z_1)$. Import aus der Algebra: Diskrete Bewertungsringe in k sind maximal bezüglich Dominanz (d.h. es gilt $R \subseteq R', \mathfrak{m}_R = \mathfrak{m}_{R'} \cap R$), das heißt wir erhalten wie gewünscht $R = \mathcal{O}_{Z,z_0}$. □

Beispiel 8.11 (i) Sei $X = \mathbb{A}^1_k$, $Y = \operatorname{Spec} k$, und $f : X \longrightarrow Y$ induziert von $k \longrightarrow k[T]$. Sei $K = \operatorname{Quot} k[T] = k(T)$. Es ist

$$\nu : k(T)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \frac{f}{g} \mapsto \deg g - \deg f$$

die Nullstellenordnung vom Punkt $P = \infty$. ν ist diskrete Bewertung auf $k(T)$. Der Bewertungsring ist gegeben durch

$$R = \left\{ \frac{f}{g} \in k(T) \;\middle|\; \deg f \leqslant \deg g \right\}.$$

Wir erhalten aus dem entsprechenden Bewertungsdiagramm das folgende Diagramm von k-Algebren:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k(T) & k[T] \arrow[l] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\
R \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Es ist klar: Den Ringhomomorphimus α gibt es nicht, denn $k[T] \not\subseteq R$, f ist also nicht eigentlich.

(ii) Sei X die affine Gerade mit zwei Nullpunkten also $X = \mathbb{A}^1_k \backslash \{0\} \cup \{0_1, 0_2\}$. X ist irreduzibel mit Funktionenkörper $k(X) = k(T)$. Sei $R = k[T]_{(T)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,0} = \mathcal{O}_{X,0_i}$ für $i \in \{1,2\}$. Das zugehörige Bewertungsdiagramm ist

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k(T) \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} k[T]_{(T)} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, shift left, "h_1"] \arrow[ur, dashed, shift right, "h_2"'] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

Für $i \in \{1,2\}$ induziert der Morphismus $\mathcal{O}_{X,0_i} \longrightarrow R$ einen Morphismus $h_i : \operatorname{Spec} R \longrightarrow X$, der das Diagramm kommutativ macht. Weiter ist $h_1 \neq h_2$, da $h_1(\mathfrak{m}) = 0_1 \neq 0_2 = h_2(\mathfrak{m})$ und f damit nicht separiert.

Folgerung 8.12 *Für Morphismen noetherscher Schemata gilt:*

(i) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.

(ii) Die Komposition eigentlicher Morphismen ist eigentlich.

(iii) Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel.

(iv) Eigentlichkeit ist stabil unter Basiswechsel.

(v) Ist $g \circ f$ separiert, so ist f separiert.

(vi) Ist $g \circ f$ eigentlich und g separiert, so ist f eigentlich.

Beweis. (i) Sei ein Bewertungsdiagramm von $g \circ f$ gegeben, dabei seien f und g separiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
U \arrow[u, "h_0"] \arrow[ur, dashed, "f \circ h_0"] \arrow[rr, "i"'] & & T \arrow[u, "h_1"'] \arrow[ull, shift left, "h'"] \arrow[ull, shift right, "h"'] \arrow[ul, "\tilde{h}"']
\end{tikzcd}$$

Angenommen es gibt $h, h' : T \longrightarrow X$ mit $h \circ i = h_0 = h' \circ i$ und $g \circ f \circ h = h_1 = g \circ f \circ h'$. Aus der Separiertheit von g folgt: $f \circ h = f \circ h' = \tilde{h}$. Da $\tilde{h}$ mit i und h_0 ein Bewertungsdiagramm für f ergibt, ist $h = h'$.

(ii) Genau so wie (i)

Die übrigen Aussagen ergeben sich auf ähnliche Weise und werden hier nicht aufgeführt.

Bemerkung 8.13 *Abgeschlossene Einbettungen sind eigentlich.*

Beweis. Sei $f : V \longrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung. Da f lokal (also affin) einer Restklassenbildung mit einem Ideal entspricht, ist f von endlichem Typ. Nach 8.7 ist f separiert, bleibt also zu zeigen, dass f universell abgeschlossen ist. Für jeden Basiswechsel mit Y ist aber $V \times_X Y = f^{-1}(V)$ und die hervorgehende Abbildung ist ebenfalls abgeschlossen. □

Bemerkung 8.14 *Projektive Morphismen sind eigentlich.*

Beweis. Seien X, Y projektive Varietäten, $\phi : X \longrightarrow Y$ Morphismus, $h : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ die zugehörige abgeschlossene Einbettung, s_X, s_Y die zugehlörigen Strukturmorphismen. Betrachte die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n_k \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "s_X"'] & & \mathbb{P}^n_k \arrow[dl, "g"] \\
& \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "s_X"'] & & Y \arrow[dl, "s_Y"] \\
& \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

Dann ist f eigentlich nach Übungsaufgabe, g also nach 8.12 (iv) auch. h ist eigentlich nach 8.13, die Strukturmorphismen als Verkettung eigentlicher Morphismen dann nach 8.12(ii) ebenfalls. Damit ist $s_Y \circ \phi$ eigentlich und s_Y separiert (da eigentlich), folglich ist ϕ eigentlich. □