§ 15.

Vorgriff auf Analysis III

In Analysis III werden wir für gewisse Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und gewisse Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ folgendes Integral definieren:

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$

In diesem Paragraphen geben wir „Kochrezepte" an, wie man solche Integrale für spezielle Mengen $A \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $A \subset \mathbb{R}^3$) und stetige Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ berechnen kann.

I **Der Fall** $n = 2$:

Definition
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in C[a, b]$ und $h_1 \leq h_2$ auf $[a, b]$.

$$A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

$$\big(A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a, b], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}\big)$$

heißt **Normalbereich** bezüglich der x-Achse (y-Achse).
Übung: A ist kompakt.

Satz 15.1 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$)
Sei A wie oben und $f : A \to \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$\left(\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right)$$

Achtung: $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht mit dem Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$ verwechseln!

Definition
Sei A ein Normalbereich bzgl. der x- oder y-Achse, so heißt:

$$|A| \coloneqq \int_A 1\,\mathrm{d}(x, y)$$

der **Flächeninhalt** von A.

Beispiele:

(1) Sei A ein Normalbereich bzgl. der x-Achse und seien h_1, h_2 wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|A| &= \int_A 1 \,\mathrm{d}(x,y)\\ &\overset{15.1}{=} \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} 1 \,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b (h_2(x) - h_1(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ist z.B. $h_1 = 0$, so folgt:

$$|A| = \int_a^b h_2(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Sei $A = [a,b] \times [c,d]$, dann ist A Normalbereich bezüglich der x- **und** der y-Achse. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Es folgt aus 15.1.:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(3) Sei $r > 0$ und $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Dann ist A ein Normalbereich der x-Achse mit $h_1(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ und $h_2(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$ (mit $x \in [-r, r]$), und es gilt:

$$\begin{aligned}|A| &= \int_{-r}^{r} h_2(x) - h_1(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

(4) Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ und $f(x,y) = xy$. Dann gilt für $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\int_A xy\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_x^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Da $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], y^2 \leq x \leq y\}$ außerdem Normalbereich bzgl. der

y-Achse ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{y^2}^{y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^5\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

II **Der Fall $n = 3$:**

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bzgl. der x- oder der y-Achse, es seien $g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ stetig und $g_1 \leq g_2$ auf A.

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

heißt ein **Normalbereich** bezüglich der x-y-Ebene. Normalbereiche bzgl der x-z- und y-z-Ebene werden analog definiert.

Satz 15.2 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$)
Sei B wie oben und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_A \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}(x,y)$$

Definition
B sei wie in 15.2.

$$
\begin{aligned}
|B| &:= \int_B 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\left(= \int_A g_2(x,y) - g_1(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

heißt **Volumen** von B.

Beispiele:
(1) Sei $B := [a,b] \times [c,d] \times [\alpha,\beta]$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_A \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Dabei darf die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden.

(2) Sei $B \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$ für ein $h > 0$. Dann setze $A \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}, g_1 = 0, g_2 = h$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_A h \,\mathrm{d}(x,y) \\ &= h \int_A 1 \,\mathrm{d}(x,y) \\ &= h \cdot |A| = h\pi \end{aligned}$$

Satz 15.3 (Eigenschaften von Integralen über Normalbereiche)
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f,g : B \to \mathbb{R}$ stetig. Je nach Definition von B sei $X = (x,y)$ oder $X = (x,y,z)$.

(1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_B \alpha f(X) + \beta g(X) \,\mathrm{d}X = \alpha \int_B f(X) \,\mathrm{d}X + \beta \int_B g(X) \,\mathrm{d}X$$

(2) Es gilt die bekannte Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_B f(X) \,\mathrm{d}X \right| \leq \int_B |f(X)| \,\mathrm{d}X \leq |B| \cdot \max\{|f(X)| : X \in B\}$$

(3) Ist $f \leq g$ auf B, so gilt:

$$\int_B f(X) \,\mathrm{d}X \leq \int_B g(X) \,\mathrm{d}X$$