19. Funktionsfolgen und -reihen

In diesem Paragraphen seien: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) sei eine **Folge von Funktionen**. $f_n : D \to \mathbb{R}$. $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Unter $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ versteht man die Folge (s_n). $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **Funktionsreihe**.

Definition

(f_n) heißt auf D punktweise konvergent $:\iff$ für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent. In diesem Fall heißt $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion von f_n.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D punktweise konvergent $:\iff$ für jedes $x \in D$ ist $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent. In diesem Fall heißt $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ die Summenfunktion von $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Beispiele:

(1) $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ $(x \in D, n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases} =: f(x)$$

(f_n) konvergiert punktweise auf D gegen f.

(2) $D = (0,\infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall x \in D$. Das heißt: (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen $f(x) = 0$.
Übung: $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (-r,r)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x \in D)$. $(f_n(x) = a_n x^n$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf D punktweise gegen $f)$

Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so bedeutet dies: Ist $\varepsilon > 0$ und $x \in D$, so existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Definition

(f_n) heißt auf D **gleichmäßig (glm) konvergent** $:\iff$ $\exists$ Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in D$.
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D **gleichmäßig (glm) konvergent** $:\iff$ $\exists$ Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in D$.

Klar: gleichmäßige Konvergenz $\implies$ punktweise Konvergenz. ($\Leftarrow$ im Allgemeinen falsch)

Bemerkung: (f_n) sei auf D punktweise konvergent gegen $f : D \to \mathbb{R}$
(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f $:\iff$ $\exists m \in \mathbb{N} : f_n - f$ ist auf D beschränkt $\forall n \geq m$ und für $M_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$ $(n \geq m)$ gilt $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$

Beispiele:

(1) D, f_n und f seien wie in obigem Beispiel (1). $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $f_n - f$ ist beschränkt auf D $\forall n \in \mathbb{N}$. $|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})| = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $M_n \geq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $M_n \not\to 0$ $\implies$ (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig auf D.

(2) Sei $0 < \alpha < 1$, $D := [0, \alpha]$, $f_n(x) = x^n$, (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen $f \equiv 0$. Sei $x \in D = [0, \alpha]$. $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq \alpha^n \implies M_n = \alpha^n$. $\alpha < 1 \implies \alpha^n \to 0 \implies M_n \to 0$. Das heißt (f_n) konvergiert auf $[0, \alpha]$ gleichmäßig gegen f.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf $D = (-1, 1)$ punktweise gegen $f(x) := \frac{1}{1-x}$. $s_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. $|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{x \to 1} \infty \implies s_n - f$ ist auf D nicht beschränkt $\forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig.

Satz 19.1 (Funktionskonvergenzkriterien)

(1) f_n konvergiert auf D punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$. (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f :\iff \exists$ Nullfolge $(\alpha_n) \in \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \ \forall n \geq m \ \forall x \in D$.

(2) **Kriterium von Weierstraß**: Sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, sei $m \in \mathbb{N}$ und es gelte: $(*)$ $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall n \geq m \ \forall x \in D$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

(3) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (-r, r)$ und $[a, b] \subseteq D$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig.

Beweis

(1) Klar

(2) Aus $(*)$ und 12.2 folgt: $\forall x \in D$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent. $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $|f_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k =: \alpha_n \ \forall n \geq m \ \forall x \in D$. 11.1 $\implies \alpha_n \to 0 \overset{(1)}{\implies}$ Behauptung.

(3) Sei $\delta > 0$ so, dass $[a, b] \subseteq [-\delta, \delta] \subseteq D$. Sei $x \in [a, b] \implies |x| \leq \delta \implies |a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq |a_n|\delta^n =: c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\sum c_n = \sum |a_n|\delta^n$ ist konvergent $\overset{(2)}{\implies}$ Behauptung. ∎

Satz 19.2 (Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz)

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f.

(1) Ist $x_0 \in D$ und sind alle f_n stetig in $x_0 \implies f$ ist stetig in x_0

(2) Gilt $f_n \in C(D) \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f \in C(D)$

Bemerkung: Voraussetzung und Bezeichnungen wie in 19.2. Sei x_0 auch noch Häufungspunkt von D.

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{13.1(1)}{=} f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x))$$

Beweis

(1) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \, m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall \, x \in D$ (i).
17.1 $\implies \exists \, \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ (ii).

Für $x \in D \cap U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\overset{(i)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(x_0)|}_{\overset{(ii)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(x_0) - f(x_0)|}_{\overset{(i)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$. 17.1 $\Longrightarrow$ f stetig in x_0.

(2) Folgt aus (1) ∎

Beweis (Nachtrag: Beweis von 17.2)
17.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihen mit Konvergenzradius $> 0, D := (-r, r)$. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Behauptung: $f \in C(D)$. Sei $x_0 \in D$. Sei $[a, b]$ so, dass $x_0 \in [a, b] \subseteq D$. 19.1(3) $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig. $\Longrightarrow$ $f \in C[a, b]$ $\Longrightarrow$ f ist stetig in x_0. $x_0 \in D$ beliebig $\Longrightarrow$ Behauptung ∎

Satz 19.3 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Sei $r > 0, D := (-r, r)$, ($r = \infty$ zugelassen). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen, die auf D konvergieren. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ $(x \in D)$ Weiter sei x_k eine Folge in $D \backslash \{0\}$ mit $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und $f(x_k) = g(x_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann: $a_n = b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis
$h(x) := f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - b_n)}_{:= c_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. z.z: $c_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. $\underbrace{h(x_k)}_{=0} \xrightarrow{17.2} h(0) = c_0 \Longrightarrow c_0 = 0$.
Annahme: $\exists\ n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0$. $m := \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$. Also: $c_m \neq 0,\ c_1, \cdots, c_{m-1} = 0 \Longrightarrow h(x) = c_m x^m + c_{m+1} x^{m+1} + \cdots$. Für $x \in D \backslash \{0\} : \frac{h(x)}{x^m} = \underbrace{c_m + c_{m_1} x + c_{m+2} x^2 + \cdots}_{\text{Potenzreihen, die auf D konvergieren}} \xrightarrow{17.2} c_m (x \to \infty) \Longrightarrow \underbrace{\frac{h(x_k)}{x_k^m}}_{=0} \to c_m (k \to \infty) \Longrightarrow c_m = 0$, Widerspruch! ∎