# 23. Minimal- und Maximallösung

Stets in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2, f: D \to \mathbb{R}$  eine Funktion,  $(x_0, y_0) \in D$ . Wieder betrachten wir das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

 $L_{(A)}$  und  $I_y$  für  $y \in L_{(A)}$  seien wie in Paragraph 22 definiert.

## **Definition**

 $y^* \in L_{(A)}$  heißt eine **Maximallösung** von (A) :  $\iff y \leq y^*$  auf  $I_y \cap I_{y^*} \forall y \in L_{(A)}$ .  $y_* \in L_{(A)}$  heißt eine **Minimallösung** von (A) :  $\iff y \geq y_*$  auf  $I_y \cap I_{y_*} \forall y \in L_{(A)}$ 

# Beispiel

$$D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = \sqrt{|y|}, \text{ AWP}$$

$$(A) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Für 
$$\alpha \ge 0 : y_{\alpha}(x) := \begin{cases} 0 & , x \le \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & , x \ge \alpha \end{cases}$$

Es gilt weiterhin  $\tilde{y}_{\alpha}(x) := -y_{\alpha}(-x)$ .

Nachrechnen:  $y_{\alpha}(x), \tilde{y}_{\alpha}(x)$  lösen das AWP auf  $\mathbb{R}$ .

Für 
$$\alpha, \beta \ge 0 : y_{\alpha,\beta} := \begin{cases} y_{\alpha}(x) &, x \ge \alpha \\ 0 &, -\beta \le x \le \alpha \\ \tilde{y}_{\beta}(x) &, x \le -\beta \end{cases}$$

Übung: Sei  $y:I\to\mathbb{R}$  eine Funktion,  $I\subseteq\mathbb{R}$  ein Intervall und  $0\in I$ . y löst das AWP auf I  $\iff y=0$  auf I oder  $\exists \alpha\geq 0: y=(y_{\alpha})_{|I}$  oder  $\exists \alpha\geq 0: y=(\tilde{y}_{\alpha})_{|I}$  oder  $\exists \alpha,\beta\geq 0: y=(\tilde{y}_{\alpha,\beta})_{|I}$ .

Damit ist  $y_0$  eine Maximallösung und  $\tilde{y_0}$  eine Minimallösung. Ab jetzt sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, D := I \times \mathbb{R}, f \in C(D, \mathbb{R})$  sei beschränkt,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}.$ 

### Vorbemerkungen:

- (1) Das AWP (A) hat Lösungen auf I (12.4, Peano)
- (2)  $\mathcal{X} := C(I, \mathbb{R}) \text{ mit } ||.||_{\infty} \text{ ist ein BR.}$
- (3)  $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$  sei definiert durch  $(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \ (y \in \mathcal{X}, x \in I)$ , T ist stetig; Für  $y \in \mathcal{X}$  gilt: y löst das AWP auf  $I \iff Ty = y$ .
- (4) Sei  $y \in \mathcal{X}$  eine Lösung von (A) auf I: für  $x, \tilde{x} \in I$ :  $|y(x) y(\tilde{x})| = |y'(\xi)||x \tilde{x}| = |f(\xi, y(\xi))||x \tilde{x}| \le M|x \tilde{x}|$

#### Satz 23.1

Das AWP (A) hat eine Maximallösung  $y^*: I \to \mathbb{R}$  und eine Minimallösung  $y_*: I \to \mathbb{R}$ .

# **Beweis**

Wir zeigen nur die Existenz von  $y^*: I \to \mathbb{R}$ .  $\mathcal{L} := \{y \in \mathcal{L}_{(A)}: I_y = I\}$ . 12.4  $\Longrightarrow \mathcal{L} \neq \emptyset$ . Sei  $y \in \mathcal{L}, x \in I: |y(x)| = |y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt| \le |y_0| + |\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt| \le |y_0| + M|x - x_0| \le$  $\underbrace{|y_0| + M|b-a|}_{c}.$ 

Also:  $y(x) \leq c \ \forall y \in \mathcal{L} \ \forall x \in I$ . Es existiert also  $y^*(x) := \sup\{y(x) : y \in \mathcal{L}\}(x \in I)$ . Sei  $y \in \mathcal{L}$ (also  $I_y = I$ ). Dann  $y \leq y^*$  auf I. Sei  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$  (also  $I_y \subseteq I$ ).

$$22.3 \implies \exists \hat{y} \in \mathcal{L} : y = \hat{y}_{|I_y} \implies y \leq \hat{y} \leq y^* \text{ auf } I_y.$$

Noch zu zeigen:  $y^* \in \mathcal{L}$ .

Sei 
$$I \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Seien  $j, k \in \mathbb{N}$ . Dann ex. ein  $y_{jk} \in \mathcal{L} : y_{jk}(x_j) \ge y^*(x_j) - \frac{1}{k}$ .

Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \in I : y_k(x) := max\{y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{kk}(x)\}.$ Übung:  $y_k \in \mathcal{L} \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Für  $k, j \in \mathbb{N}, j \leq k : y_k(x_j) \geq y_{jk}(x_j) > y^*(x_j) - \frac{1}{k}$ .

Vorbemerkung (4) und 11.4  $\implies$   $(y_k)$  enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A  $(y_k)$  konvergiert gleichmäßig auf I.  $\hat{y}(x) := \lim_{k \to \infty} y_k(x) (x \in I)$ .  $Ty_k = y_k \ \forall k \in I$  $\mathbb{N}, T \text{ stetig } \implies T\hat{y} = \hat{y} \implies \hat{y} \in \mathcal{L}.$ 

Es ist  $\hat{y} \leq y^*$  auf I. Sei  $x_i \in I \cap \mathbb{Q}$ .  $\hat{y}(x_i) = \lim_{k \to \infty} y_k(x_i) \geq \lim_{k \to \infty} (y^*(x_i) - \frac{1}{k}) = y^*(x_i) \implies$  $\hat{y} = y^*$  auf  $I \cap \mathbb{Q}$ .

Annahme:  $\exists \xi \in I : \hat{y}(\xi) < y^*(\xi) \implies \exists u \in \mathcal{L} : \hat{y}(\xi) < u(\xi)$ . Für  $x_{\mu} \in I \cap \mathbb{Q}$  hinreichend nahe bei  $\xi : \hat{y}(x_{\mu}) < u(x_{\mu}) \le y^*(x_{\mu})$ , Widerspruch.

D.h. 
$$\hat{y} \geq y^*$$
 auf I. Also  $y^* = \hat{y}$  auf I, somit gilt  $y^* \in \mathcal{L}$ .

# Definition

 $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y_*(x) \le y \le y^*(x)\}$  heißt **Lösungstrichter** von (A).

# Satz 23.2

Sei  $(\sigma, \tau) \in T$ . Dann existiert eine Lösung  $v: I \to \mathbb{R}$  von (A) auf I mit  $v(\sigma) = \tau$ .

Betrachte das AWP (B)  $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\sigma) = \tau \end{cases}$  . 12.4 (Peano)  $\implies$  (B) hat eine Lösung  $w: I \to \mathbb{R}$ auf I. Ist  $\sigma = x_0 \implies \tau = y_0 \implies v := w$  leistet das Verlangte. Sei also  $\sigma \neq x_0$ , etwa  $x_0 < \sigma$ . Ist  $w(x_0) = y_0 \implies v := w$  leistet das Verlangte. Sei also  $w(x_0) \neq y_0$ . Es ist  $y_*(\sigma) \le \tau = w(\sigma) \le y^*(\sigma).$ 

Fall 1:  $w(x_0) > y_0 = y^*(x_0) \implies w(x_0) - y^*(x_0) > 0$  und  $w(\sigma) - y^*(\sigma) \le 0$ . Zwischenwertsatz  $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y^*(\xi)$ 

Definiere:  $v: I \to \mathbb{R}$  durch  $v(x) := \begin{cases} y^*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$   $v(x_0) = y^*(x_0) = y_0, \ v(\sigma) = w(\sigma) = \tau.$  12.3  $\implies v$  löst das AWP (A) auf I.

Fall 2:  $w(x_0) < y_0 = y_*(x_0) \implies w(x_0) - y_*(x_0) < 0$  und  $w(\sigma) - y_*(\sigma) \ge 0$ . Zwischenwertsatz  $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y_*(\xi)$ 

Definiere: 
$$v: I \in \mathbb{R}$$
 durch  $v(x) := \begin{cases} y_*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$   $v(x_0) = y_*(x_0) = y_0, \ v(\sigma) = w(\sigma) = \tau.$  12.3  $\implies v$  löst das AWP (A) auf  $I$