13. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard - Lindelöf

EuE = Existenz und Eindeutigkeit

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f genügt auf D einer Lipschitzbedingung (LB) bzgl. y : $\iff$
$\exists\, \gamma \geq 0 : |f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq \gamma |y - \overline{y}| \;\forall (x,y),(x,\overline{y}) \in D \quad (*)$

Vorbetrachtungen: Sei $I = [a,b], x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, S := I \times \mathbb{R}$ und $f \in C(S,\mathbb{R})$ genüge auf S einer LB bzgl. y mit $\gamma \geq 0$ wie in (*), $T : C(I) \to C(I)$ sei def. durch $T_y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t,y(t))dt$ $(x \in I)$

$$\text{Aus 12.1 folgt: das AWP} \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat auf I genau eine Lösung $\iff$ T hat genau einen Fixpunkt.
Frage: ist T bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ kontrahierend?
Seien $u,v \in C(I), x \in I : |T_u(x) - T_v(x)| = |\int_{x_0}^x f(t,u(t)) - f(t,v(t))dt|$
$\leq \gamma |\int_x^{x_0} \underbrace{|u(t) - v(t)|}_{\leq \|u-v\|_\infty} dt \leq \gamma \,\|u - v\|_\infty\, |\int_{x_0}^x dt| = \gamma |x - x_0|\, \|u-v\|_\infty$
$\leq \gamma(b-a)\,\|u-v\|_\infty$
$\implies \|T_u - T_v\|$ ist nur dann kontrahierend, wenn $\gamma(b-a) < 1$.

Sei $\varphi(x) := e^{-2\gamma|x-x_0|}$ $(x \in I)$ Auf $C(I)$ def. die folgende Norm:
$\|y\| := \max\{\varphi(x)|y(x)| : x \in I\} (= \|\varphi y\|_\infty)$
$\alpha := \min\{\varphi(x) : x \in I\} \implies 0 < \alpha < \varphi < 1$ auf I
$\implies \alpha\|y\|_\infty \leq \|y\| \leq \|y\|_\infty \;\forall\, y \in C(I)$
Sei (y_n) eine Folge in $C(I)$ und $y \in C(I)$
$\alpha\|y_n - y\|_\infty \leq \|y_n - y\| \leq \|y_n - y\|_\infty$

Fazit: Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|$ = Konvergenz bzgl $\|\cdot\|_\infty$ = gleichmäßige Konvergenz auf I.
(y_n) ist CF bzgl. $\|\cdot\| \iff (y_n)$ ist CF bzgl. $\|\cdot\|_\infty$
$(C(I), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Behauptung
T ist bzgl. $\|\cdot\|$ kontrahierend. Seien $u,v \in C(I), x \in I$.
$|T_u(x) - T_v(x)| \overset{s.o.}{\leq} \gamma |\int_{x_0}^x |u(t)-v(t)|dt| = \gamma |\int_{x_0}^x \underbrace{|u(t) - v(t)|\varphi(t)}_{\leq \|u-v\|} \frac{1}{\varphi(t)} dt|$
$\leq \gamma\|u-v\|\, |\int_{x_0}^x e^{-2\gamma|t-x_0|}dt| = \gamma\|u-v\|\frac{1}{2\gamma}(e^{-2\gamma|x-x_0|} - 1) \leq \frac{1}{2}\|u-v\|\frac{1}{\varphi(x)} \implies \varphi(x)|(T_u)(x) - (T_v)(x)| \leq \frac{1}{2}\|u-v\| \;\forall x \in I$

$\implies \|T_u - T_v\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|$

Aus 11.2 und 12.1 folgt: 13.1

Satz 13.1 (EuE - Satz von Picard - Lindelöf (Version I))
I, x_0, y_0, S und f seien wie in der Vorbetrachtung und f genüge auf S einer LB bzgl. y. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung. Sei $z_0 \in C(I)$ beliebig und $z_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t))dt$ $(x \in I)$, (also $z_{n+1} = T_{z_n}$,) dann konvergiert die Folge der sukzessiven Approximationen (z_n) auf I gleichmäßig gegen die Lösung des AWPs.

Beispiel

Zeige (mit 13.1): das AWP: $\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ hat auf $\mathbb{R}$ genau eine Lösung. Berechne diese.

$f(x,y) = 2x(1+y)$ Sei $a > 0$ und $I = [-a, a]$ Für $(x,y), (x, \overline{y}) \in I \times \mathbb{R}$:
$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| = |2x|\,|y - \overline{y}| \leq 2a|y - \overline{y}|$
13.1 $\implies$ das AWP hat auf I genau eine Lösung y. Sei $z_0(x) = 0$.
$z_1(x) = \int_0^x 2tdt = x^2$; $z_2(x) = \int_0^x 2t(1+t^2)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4$;
$z_3(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$
Induktiv: $z_n(x) = x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots + \frac{1}{n!}x^{2n}$

Analysis I $\implies$ (z_n) konvergiert auf I gleichmäßig gegen $e^{x^2} - 1$
13.1 $\implies y(x) = e^{x^2} - 1$ auf I
$a > 0$ beliebig $\implies y(x) = e^{x^2} - 1$ ist <u>die</u> Lösung des AWPs auf $\mathbb{R}$.

Satz 13.2 (Der EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version II))
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R},\ s > 0,\ R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$ und $f \in C(R, \mathbb{R})$. $M := \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\}$. f genüge auf R einer LB bzgl. y. Dann hat das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x.y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung auf $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$. Diese Lösung kann iterativ gewonnen werden (vgl. 13.1).

Beweis
Ähnlich wie 12.5 aus 12.4 gewonnen wurde. ∎

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f **genügt auf** D **einer lokalen LB bzgl.** $y :\iff \forall (x_0, y_0) \in D\ \exists$ Umgebung U von (x_0, y_0) mit: $U \subseteq D$ und f genügt auf U einer LB bzgl. y.

Satz 13.3 (Partielle Differenzierbarkeit und lokale Lipschitzbedingung)
D und f seien wie in obiger Definition. Ist f auf D partiell db nach y und ist $f_y \in C(D,\mathbb{R}) \implies f$ genügt auf D einer lokalen LB bzgl. y.

Beweis
Sei $(x_0,y_0) \in D$. D offen $\implies \exists \varepsilon > 0 : U := \overline{U_\varepsilon(x_0,y_0)} \subseteq D$. f_y ist stetig $\implies \exists \gamma := \max\{|f_y(x,y)| : (x,y) \in U\}$.

Seien $(x,y),(x,\overline{y}) \in U : |f(x,y) - f(x,\overline{y})| \overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{|f_y(x,\xi)|}_{\leq\gamma}|(y-\overline{y})| \leq \gamma|y-\overline{y}|$ mit ξ zwischen y und $\overline{y}$ ($\implies (x,\xi) \in U$). ■

Bemerkung: Ist $I = [a,b]$ und $R := I \times [c,d]$ ($S := I \times \mathbb{R}$) und $f : R \to \mathbb{R}$ ($f : S \to \mathbb{R}$) stetig und partiell db nach y auf R (S) und f_y ist beschränkt auf R (S). Wie im Beweis von 13.3 zeigen wir: f genügt auf R (S) einer LB bzgl. y.

Beispiel
$R := [0,1] \times [-1,1],\ f(x,y) = e^{x+y^2}$. Zeige: das AWP $y' = f(x,y),\ y(0) = 0$ hat auf $[0,\frac{1}{e^2}]$ genau eine Lösung.

Beweis
$|f(x,y)| = e^x e^{y^2} \leq e \cdot e = e^2,\ f(1,1) = e^2 \implies M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\} = e^2$.

$|f_y(x,y)| = |2ye^{x+y^2}| = 2|y|e^{x+y^2} \leq 2e^2\ \forall (x,y) \in R \implies f$ genügt auf R einer LB bzgl. y.

13.2 $\implies$ das AWP hat auf $J = [0,1] \cap [-\frac{s}{M},\frac{s}{M}] \overset{s=1}{=} [0,1] \cap [-\frac{1}{e^2},\frac{1}{e^2}] = [0,\frac{1}{e^2}]$ genau eine Lösung. ■

Satz 13.4 (Der EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version III))
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0,y_0) \in D$ und $f \in C(D,\mathbb{R})$ genüge auf D einer lokalen LB bzgl. y. Dann ist das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

eindeutig lösbar. (zur Erinnerung d.h.: das AWP hat eine Lösung. $y : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) und für je zwei Lösungen $y_1 : I_1 \to \mathbb{R},\ y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ (I_1, I_2 Intervalle) gilt: $y_1 \equiv y_2$ auf $I_1 \cap I_2$).

Beweis
12.6 $\implies$ das AWP hat eine Lösung. Seien $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ und $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ Lösungen des AWPs (I_1, I_2 Intervalle).

Annahme: $\exists x_1 \in I_1 \cap I_2 : y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. Dann: $x_1 \neq x_0$, etwa $x_1 > x_0$, dann: $[x_0,x_1] \subseteq I_1 \cap I_2$.

$M := \{x \in [x_0,x_1] : y_1(x) = y_2(x)\} \subseteq [x_0,x_1],\ x_0 \in M$. $\xi_0 := \sup M,\ y_1,y_2$ stetig $\implies y_1(\xi_0) = y_2(\xi_0) =: \eta_0$.

Es gilt: $y_1(x) \neq y_2(x) \ \forall x \in (\xi_0, x_1] \quad (*)$

Wähle $r, s > 0$, dass $\xi_0 + r < x_1,\ R := [\xi_0, \xi_0 + r] \times [\eta_0 - s, \eta_0 + s] \subseteq D$ und f genügt auf R einer LB bzgl. y.

Aus 13.2 folgt: $\exists \alpha \in (0, r)$: das AWP $(+)\begin{cases} y' & = f(x,y) \\ y(\xi_0) & = \eta_0 \end{cases}$ hat auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha]$ genau eine Lösung. y_1 und y_2 sind Lösungen von $(+)$ auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha] \implies y_1 \equiv y_2$ auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha]$, Widerspruch zu (*). $\blacksquare$