§ 13 Der Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$

In diesem Paragraphen sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (fest), es sei $R : [0, 2\pi] \to [0, \infty)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und $R(0) = R(2\pi)$. Weiter sei

$$\gamma(t) := (x_0 + R(t)\cos t, y_0 + R(t)\sin t) \ (t \in [0, 2\pi])$$

Dann ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener und rektifizierbarer Weg in $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$B := \{(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) : t \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

Dann ist B kompakt, also $B \in \mathfrak{B}_2$. Weiter ist $\partial B = \gamma([0, 2\pi]) = \Gamma_\gamma$.
Sind B und γ wie oben, so heißt B **zulässig**.

Beispiel
Sei R konstant, also $R(t) = R > 0$, so ist $B = \overline{U_R(x_0, y_0)}$

Satz 13.1 (Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$)
B und γ seien wie oben (B also zulässig). Weiter sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $f = (u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann

(1) $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) d(y)$

(2) $\int_B v_y(x, y) d(x, y) = -\int_\gamma v(x, y) d(x)$

(3) $\int_B \operatorname{div} f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

Folgerung 13.2
Mit $f(x, y) := (x, y)$ erhält man aus 13.1: Sind B und γ wie in 13.1, so gilt:

(1) $\lambda_2(B) = \int_\gamma x dy$

(2) $\lambda_2(B) = -\int_\gamma y dx$

(3) $\lambda_2(B) = \frac{1}{2} \int_\gamma (x dy - y dx)$

Beispiel
Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \quad (R > 0)$$

und $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$, dann gilt:

$$\lambda_2(B) = \int_0^{2\pi} R\cos t \cdot R\cos t \, \mathrm{d}t = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi R^2$$

Beweis
Wir beweisen nur (1). ((2) beweist man analog und (3) folgt aus (1) und (2))
O.B.d.A: $(x_0, y_0) = (0,0)$ und R stetig db. Also $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma(t) = (\underbrace{R(t)\cos t}_{=\gamma_1(t)}, \underbrace{R(t)\sin t}_{=\gamma_2(t)})$. R stetig differenzierbar. $A := \int_B u_x(x,y)d(x,y)$
Zu zeigen: $A = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$.
Mit Polarkoordinaten, Transformations-Satz und Fubini:

$$A = \int_0^{2\pi} (\int_0^{R(t)} u_x(r\cos t, r\sin t) r dr) dt$$

(1) $\beta(r,t) := u(r\cos t, r\sin t)$. Nachrechnen: $r\beta_r(r,t)\cos t - \beta_t(r,t)\sin t = u_x(r\cos t, r\sin t)r$. Also:
$$A = \int_0^{2\pi} (\int_0^{R(t)} (r\beta_r(r,t)\cos t - \beta_t(r,t)\sin t) dr) dt$$

(2) $\int_0^{R(t)} r\beta_r(r,t)dr = r\beta(r,t)|_{r=0}^{r=R(t)} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \beta(r,t)dr}_{=:\alpha(t)} = R(t)\beta(R(t),t) - \alpha(t) = R(t)u(\gamma(t)) - \alpha(t)$

(3) $\Psi(s,t) := \int_0^s \beta(r,t)dr$. Mit dem zweiten Hauptsatz aus Analysis 1 folgt: $\Psi_s(s,t) = \beta(s,t)$
7.3 $\implies \Psi_t(s,t) = \int_0^s \beta_t(r,t)dr$.
Dann: $\alpha(t) = \Psi(R(t),t)$, also

$$\alpha'(t) = \Psi_s(R(t),t) \cdot R'(t) + \Psi_t(R(t),t) \cdot 1 = R'(t)\underbrace{\beta(R(t),t)}_{=u(\gamma(t))} + \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr$$

$\implies \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr = \alpha'(t) - R'(t) \cdot u(\gamma(t))$.

(4) Aus (1),(2),(3) folgt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} (R(t) \cdot u(\gamma(t)) \cdot \cos t - \alpha(t)\cos t - \alpha'(t)\sin t + R'(t) \cdot u(\gamma(t))\sin t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt - \int_0^{2\pi} (\alpha(t)\sin t)'dt \\
&= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt - \underbrace{[\alpha(t)\sin t]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt
\end{aligned}$$

■