

## Kapitel 18

# Likelihood-Quotienten Test

Gegeben sei ein allgemeines Testproblem:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

**Definition 18.1** Der *Likelihood-Quotient* ist definiert durch:

$$q(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta)}$$

Ein Test der Form:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & q(x) > c_0 \\ \gamma, & q(x) = c_0 \\ 1, & q(x) < c_0 \end{cases}$$

heißt *Likelihood-Quotienten Test*.

### Bemerkung 18.1

Der Neyman-Pearson-Test ist ein spezieller Likelihood-Quotienten-Test.

**Beispiel 18.1**  $P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  Zufallsstichprobe zu  $N(\mu, \sigma^2)$ .  
 $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

Testproblem:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) | \mu = \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

$$\Theta_1 = \{(\mu, \sigma^2) | \mu \neq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Likelihood-Quotient:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta) = \sup_{\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right)$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\sigma^2$  (bei bekanntem  $\mu = \mu_0$ ) ist:

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta) &= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}} \\ \Rightarrow q(x) &= \left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu - 0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= (1 + n \cdot T^*(x))^{-\frac{n}{2}} \text{ mit } T^*(x) = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

$q(x)$  ist fallend in  $T^*(x)$ , das heißt der kritische Bereich ist:

$$\begin{aligned} \{x | q(x) < c_0\} &= \{x | T^*(x) > c'\} = \{x | \frac{u(\bar{x} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} > c'\} \\ &= \{x | \left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > \sqrt{n(n-1)c'}\} \end{aligned}$$

Der Likelihood-Quotiententest ist also äquivalent zu folgendem Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq \sqrt{n(n-1)c'} \\ 1, & \text{falls } \left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > \sqrt{n(n-1)c'} \end{cases}$$

Beachte:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{S(x)} \sim t_{n-1}$$

Einstellen des Testniveaus:

$$\begin{aligned} \beta(\mu_0) &= E_{\mu_0} \varphi(X) = P_{\mu_0} \left( \underbrace{\left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{S(X)} \right|}_{=:z} > \underbrace{\sqrt{n(n-1)c'}}_{=: \tilde{c}} \right) \stackrel{!}{=} \alpha \\ &= P_{\mu_0}(z < -\tilde{c}) + P_{\mu_0}(z > \tilde{c}), \quad z \sim t_{n-1} \end{aligned}$$

Wichtig: Die Dichte der  $t_{n-1}$ -Verteilung ist symmetrisch zu 0

$$\begin{aligned} &= 2(1 - F_{t_{n-1}}(\tilde{c})) \stackrel{!}{=} \alpha \\ \Rightarrow \tilde{c} &= t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

# Stichwortverzeichnis

- (1 -  $\alpha$ )-Konfidenzintervall, 73
- $\chi^2$ -Verteilung, 78
- $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , 2
  
- absolutstetig, 29, 40
- Algebra über  $\Omega$ , 2
  
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 13
- bivariate Normalverteilung, 41
- Borelsche  $\sigma$ -Algebra, 18
  
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 47
- charakteristische Funktion zu  $X$ , 57
  
- Dichte von  $X$ , 29
- diskret, 27
- diskrete Verteilungen, 27
  - binomialverteilt, 27
  - geometrisch, 28
  - gleichverteilt, 29
  - hypergeometrisch, 28
  - Poisson - verteilt, 29
- Durchschnitt von  $A$  und  $B$ , 1
- durchschnittsstabil, 19
- Dynkin-System, 19
  
- Eindeutigkeitssatz für char. Funkt., 59
- einseitiges Testproblem, 75
- Elementare Zufallsvariable, 33
- empirischen Momente, 69
- erwartungstreu, 70
- Erwartungswertvektor von  $X$ , 48
- erzeugende Funktion von  $X$ , 49
- Erzeugendensystem, 18
  
- Faltung, 46
  - Faltungsformel, 45
  - faltungsstabil, 46
- Fehler
  - 1.Art, 76
  - 2.Art, 76
- Fisher-Information, 71
- Formel von Bayes, 14
  
- gleichmäßig bester Test, 77
- Grenzwertsatz von DeMoivre Laplace, 66
- Gutefunktion, 76
  
- $k$ -tes Moment von  $X$ , 36
- $k$ -tes zentriertes Moment von  $X$ , 36
- Kartesische Produkt, 2
- Khinchins schw. Gesetz der gr. Zahlen, 63
- Kolmogorovs st. Gesetz der gr. Zahlen, 63
- Komplement von  $B$ , 1
- konvergiert
  - in Verteilung, 53
  - in Wahrscheinlichkeit, 53
  - P-fast sicher, 53
- Korrelationskoeffizient, 47
- Kovarianz, 47
- Kovarianzmatrix von  $X$ , 48
- kritischer Bereich, 75
  
- Lemma von Neyman-Pearson, 84
- Likelihood-Funktion, 68
- Likelihood-Quotient, 87
- Likelihood-Quotienten Test, 87
- Log-Likelihoodfunktion, 69
  
- Macht des Test, 76
- Marginalverteilung, 39
- Maximum-Likelihood Schätzer (MLS), 68
- Messraum, 2
- Monte-Carlo-Simulation, 63
- Multinomialverteilung, 41
- Multiplikationssatz, 14
  
- Neyman-Pearson-Test, 84

- Niveau (Signifikanzniveau), 76
- Potenzmenge von  $\Omega$ , 2
- Produkt- $\sigma$ -Algebra, 39
- quadratischer Fehler, 70
- Quantilfunktion, 24
- Rand-(Marginal) Zahldichte, 40
- randomisierter Test, 83
- Randverteilung, 39
- Rechteckmengen, 39
- Satz über monotone Klassen, 19
- Satz von der totalen W'keit, 14
- Schätzer, 67
- Siebformel, 5
- standard normalverteilt, 31
- Standardabweichung, 36
- stetige Verteilungen
  - exponentialverteilt, 30
  - gleichverteilt, 30
  - normalverteilt, 31
- Stetigkeitssatz bei char. Funkt., 59
- Stichprobe, 67
- Stichprobenmittel, 67
- Stichprobenvarianz, 67
- t-Verteilung, 78
- Tscheby. schw. Gesetz der gr. Zahlen, 61
- unabhängige Zufallsvariable, 43
- Unabhängigkeit von Ereignissen, 15
- Ungleichung von Rao-Cramér, 71
- Varianz, 36
- Vereinigung von  $A$  und  $B$ , 1
- Verteilung, 23
- Verteilungsfunktion, 23
- Verzerrung, 70
- Wahl der Nullhypothese, 78
- Wahrscheinlichkeitsmas, 4
- Wahrscheinlichkeitsraum, 4
- Zahldichte (gemeinsame), 40
- Zahldichte von  $X$ , 27
- Zentraler Grenzwertsatz, 65
- Zufallsstichprobe, 67
- Zufallsvariable, 21
- Zufallsvektor, 40
- Zweiseitiger t-Test, 80
- zweiseitiges Testproblem, 75