§ 16 $\mathfrak{L}^p$-Räume und L^p-Räume

Stets in diesem Paragraphen: $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d$

Definition
Sei $p \in [1, +\infty]$.

$$p' := \begin{cases} \infty & , p = 1 \\ 1 & , p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & , 1 < p < \infty \end{cases}$$

Dann gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $p = p' \Leftrightarrow p = 2$.

Hilfssatz
Seien $x, y \geq 0$, $p \in (1, \infty)$, dann gilt: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$

Beweis
Für $t > 0:\ f(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} - t^{\frac{1}{p}}$

Übung: $\min\{f(t) \mid t > 0\} = f(1) = 0$

D.h.: $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} \quad \forall t > 0$

Seien $u, v > 0$, $t := \frac{u}{v}$. Dann: $\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{u}{vp} + \frac{1}{p'}$. Daraus folgt $u^{\frac{1}{p}} v^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'} \implies u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'}$

Seien $x, y > 0:\ u := x^p$, $v := y^{p'}$. Dann: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$.

Im Falle $x = 0$ oder $y = \infty$ ist die Ungleichung trivialerweise richtig. ■

Erinnerung: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und $p > 0$, so ist $|f|^p$ messbar (vgl. Kapitel 3).

Es gilt: $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \Leftrightarrow \int_X |f|^p \mathrm{d}x < \infty$

Definition

(1) Sei $p \in [1, \infty)$. $\mathfrak{L}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar und $\int_X |f|^p \mathrm{d}x < \infty\}$.

Für $f \in \mathfrak{L}^p(X)$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

(2) $\mathfrak{L}^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar und f ist f.ü. beschränkt$\}$

Für $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$: $\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in X} \|f(x)\| = \inf\{c > 0 \mid \exists \text{Nullmenge } N_c \subseteq X : |f(x)| \leq c \, \forall x \in X \setminus N_c\}$

Bemerkung: Es sei $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und stetig. Außerdem habe jede in X offene, nichtleere Teilmenge positives Maß. Dann ist f auf X beschränkt und $\sup_{x \in X} |f(x)| = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Beweis
Übung (ist $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist $N^\circ = \varnothing$ und $\overline{X \setminus N} = X$) ■

Beispiel
Sei $d = 1$, $X = [1, \infty)$, $p > 1\,(p < \infty)$, $\alpha, \beta > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $g(x) = \frac{1}{x^\beta}$

(1)
$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \overset{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} \mathrm{d}x$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$

(2)
$$fg \in \mathfrak{L}^1(X) \overset{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \mathrm{d}x$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha + \beta > 1$

Satz 16.1
Sei $p \in [1, \infty]$ und p' wie zu Anfang dieses Kapitels, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(1) Sei $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Dann ist $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und es gilt die **Höldersche Ungleichung**:
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$
Ist $p = 2\,(\implies p' = 2)$, so heißt obige Ungleichung auch **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**.

(2) $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum und für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt die **Minkowskische Ungleichung**:
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis

(1) Unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1: $p = 1$ (also $p' = \infty$) oder $p = \infty$ (also $p' = 1$). Etwa $p = 1$, $p' = \infty$.

Sei $c > 0$ und $N_c \subseteq X$ Nullmenge mit: $|g(x)| \leq c\,\forall x \in X \setminus N_c$. $\tilde{g} := \mathbb{1}_{X \setminus N_c} \cdot g$

Dann: $g = \tilde{g}$ fast überall und $|\tilde{g}| \leq c$ auf X. Weiter: $fg = f\tilde{g}$ fast überall, bzw. $|fg| = |f\tilde{g}|$ fast überall.

Dann:
$$\int_X |fg| \mathrm{d}x = \int_X |f\tilde{g}| \mathrm{d}x = \int_X |f| \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} \mathrm{d}x \leq \int_X |f| \mathrm{d}x = c \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Also: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\|fg\|_1 \leq c\|f\|_1$. Übergang zum Infimum über alle $c > 0$ liefert: $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$

Fall 2: Sei $1 < p < \infty$. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_{p'} = 0$, so ist $f = 0$ fast überall oder $g = 0$ fast überall. Daraus folgt: $|fg| = 0$ fast überall. Mit 5.2 folgt: $\int_X |fg| \mathrm{d}x = 0$. Daraus folgen die Behauptungen.

Sei $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_{p'} > 0$.

Aus obigem Hilfssatz:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \forall x \in X$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \int_X |f(x)g(x)| \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \int_X |g|^{p'} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1 < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_p} \leq 1 \Leftrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_p$$

(2) Klar: Ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f \in \mathfrak{L}^p(X)$

Fall 1: $p = 1$: Mit 4.11 folgt: $\mathfrak{L}^1(X)$ ist ein reeller Vektorraum.

Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann: $|f+g| \leq |f| + |g|$ auf X. Damit:

$$\int_X |f+g| \mathrm{d}x \leq \int_X |f| \mathrm{d}x + \int_X |g| \mathrm{d}x$$

Fall 2: $p = \infty$: Seien $f,\, g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. Seien $c_1,\, c_2 > 0$ und $N_1,\, N_2 \subseteq X$ Nullmengen und $|f(x)| \leq c_1 \forall x \in X \setminus N_1$, $|g(x)| \leq c_2 \forall x \in X \setminus N_2$.

$N = N_1 \cup N_2$ ist eine Nullmenge. Dann: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1 + c_2 \forall x \in X \setminus N$. Es folgt: $f + g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und $\|f+g\|_\infty \leq c_1 + c_2$.

Übergang zum Infimum über alle solche c_1, bzw. c_2, liefert: $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Fall 3: Sei $1 < p < \infty$ und $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(X)$. Es ist $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|,\, |g|\})^p \leq 2^p\left(|f|^p + |g|^p\right)$ auf X. Mit 4.9 folgt: $|f+g|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f + g \in \mathfrak{L}^p(X)$

$p' = \frac{p}{p-1}$; $h := |f+g|^{p-1}$, dann: $h^{p'} = \left(|f+g|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} = |f+g|^p \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann ist $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Also: $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$, $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt: $\|f \cdot f_1\| \leq \|f\|_p \|h\|_{p'} \implies \int_X h|f| \mathrm{d}x \leq \|f\|_p \left(\int_X h^{p'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X |f||f+g|^{p-1} \mathrm{d}x &\leq \|f\|_p \left(\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^{p'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \left(\|f+g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Genauso: $\int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p+1}$

Dann:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_X |f+g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&= \int_X |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x + \int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$ ■

Teilen durch $\|f+g\|_p^{p-1}$ liefert die Minkowski-Ungleichung.

Satz 16.2
Sei $\lambda_d(X) < \infty$, $p, q \geq 1$ und $p \leq q \leq \infty$. Dann ist $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^q(X) : \|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Beweis
Sei $f \in \mathfrak{L}^q(X)$.
Fall $p = q$: Klar.
Fall $q = \infty$: Leichte Übung!
Fall $p < q < \infty$:
Sei $r := \frac{q}{p} > 1$, dann ist $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$. Aus $|f|^{pr} = |f|^q \in \mathfrak{L}^1(X)$ folgt $|f|^p \in \mathfrak{L}^r(X)$. Definiere $g := \mathbb{1}_X$, dann ist $g \in \mathfrak{L}^{r'}(X)$, da $\lambda_d(X) < \infty$. Wegen 16.1 gilt dann:

$$g \cdot |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \|g \cdot |f|^p\|_1 \\
&\leq \|g\|_{r'} \cdot \||f|^p\|_r \\
&= \left(\int_X g^{r'} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^{pr} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \lambda_d(X)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \lambda_d(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_q^p
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$ ■

Beispiel

(1) Sei $X := (0,1]$, $1 \leq p < q < \infty$ (also $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$) und $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$). Dann gilt nach 4.14 und Analysis I:

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{L}^p(X) &\iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}}\, dx \text{ konvergiert} \\ &\iff \alpha p < 1 \\ &\iff \alpha < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Sei $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$ und aus 16.2 folgt $\mathfrak{L}^q(X) \subsetneq \mathfrak{L}^p(X)$.

(2) Sei $X := [1,\infty)$, $p = 1$, $q \in (1,\infty)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt nach 4.14 und Analysis I: $f \notin \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \in \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^q(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^p(X)$.
Definiere $g(x) := \mathbb{1}_{[1,2)} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$. Übung: $g \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$.

Satz 16.3 (Satz von Lebesgue ($\mathfrak{L}^p$-Version))
Sei $1 \leq p < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ sei messbar, $g : X \to [0,\infty]$ integrierbar und (f_n) eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X)$ mit den Eigenschaften:

(1) $f_n \to f$ f.ü. auf X

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n|^p \leq g$ f.ü. auf X.

Dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt

$$\|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Beweis
Aus (i) und (ii) folgt: $|f|^p \leq g$ f.ü. Im Paragraphen 5 haben wir gesehen, dass dann gilt:

$$\int_X |f|^p\, dx \leq \int_X g\, dx < \infty$$

(denn g ist nach Voraussetzung integrierbar). Daraus folgt: $f \in \mathfrak{L}^p(X)$.

Setze $g_n := |f_n - f|^p$. Aus (i): $g_n \to 0$ f.ü. Es sind $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (ersteres nach Voraussetzung, zweiteres haben wir gerade gezeigt), und weil $\mathfrak{L}^p(X)$ ein reeller Vektorraum ist (16.1(2)), folgt:

$$f_n - f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Also $g_n \in \mathfrak{L}^1(X)$. Es ist

$$0 \leq g_n \leq (|f_n| + |f|)^p \leq \left(g^{\frac{1}{p}} + g^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(2g^{\frac{1}{p}}\right)^p = 2^p g \quad \text{f.ü.}$$

Mit 6.2 folgt schließlich:

$$\underbrace{\int_X g_n\, dx}_{=\|f_n - f\|_p^p} \to 0.$$

∎

Aus 16.1 folgt: $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum (VR), wobei für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Aber $\|\cdot\|_p$ ist **keine** Norm auf $\mathfrak{L}^p(X)$! Denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur $f = 0$ f.ü.

Definition
Es sei $\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$, dann ist $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X)$. Definiere

$$L^p(X) := \mathfrak{L}^p(X) / \mathcal{N} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} \mid f \in \mathfrak{L}^p(X)\}$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $L^p(X)$ durch die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \hat{f} := \widehat{\alpha f}$$

und die Addition

$$\hat{f} + \hat{g} := \widehat{f+g}$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ wird.

Setze für $\hat{f} \in L^1(X)$:

$$\int_X \hat{f}(x)\ \mathrm{d}x := \int_X f(x)\ \mathrm{d}x$$

dabei ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ von $\hat{f}$, denn: ist auch noch $g \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\hat{g} = \hat{f}$, so ist $f - g \in \mathcal{N}$, also $f - g = 0$ f.ü. und damit: $\int_X f\ \mathrm{d}x = \int_X g\ \mathrm{d}x$.

Für $\hat{f} \in L^p(X)$ definiere

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$$

wobei diese Definition unabhängig ist von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ von $\hat{f}$.

Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ setze

$$(\hat{f}|\hat{g}) := \int_X f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

(auch diese Definition ist Repräsentanten-unabhängig) (Beachte: $f \cdot g \in \mathfrak{L}^1(X)$)

Dann gilt:

(1) $L^p(X)$ ist unter $\|\cdot\|_p$ ein normierter Raum (NR).

(2) Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ gilt:

$$|(\hat{f}|\hat{g})| = |\int_X f(x)g(x)\ \mathrm{d}x| \leq \int_X |fg|\ \mathrm{d}x = \|fg\|_1 \overset{16.1}{\leq} \|f\|_2\|g\|_2 = \|\hat{f}\|_2\|\hat{g}\|_2$$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Nachrechnen: $(\hat{f}|\hat{g})$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X)$. Es gilt:

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X f(x)^2\ \mathrm{d}x = \|\hat{f}\|_2^2$$

Also: $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{(\hat{f}|\hat{f})}$

Definition
Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Gilt mit einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf B:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} \quad \forall v \in B \tag{$*$}$$

so heißt B ein **Prähilbertraum**. Ist B ein Banachraum mit $(*)$, so heißt B ein **Hilbertraum**.

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in diesem Paragraphen $1 \leq p < \infty$.

Bemerkung: Seien $f, f_n \in \mathfrak{L}^p(X)$

(1) $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \to 0$ genau dann, wenn $(\hat{f}_n)$ eine konvergente Folge im normierten Raum $L^p(X)$ mit dem Grenzwert $\hat{f}$ ist.

(2) $(\hat{f}_n)$ ist eine **Cauchyfolge** (CF) in $L^p(X)$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exitiert mit:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{$*$}$$

(3) Wie in Analysis II zeigt man: gilt $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \to 0$, so ist $(\hat{f}_n)$ eine Cauchyfolge in $L^p(X)$.

Satz 16.4 (Satz von Riesz-Fischer)
$(\hat{f}_n)$ sei eine Cauchyfolge in $L^p(X)$, das heißt es gilt $(*)$ aus obiger Bemerkung (2). Dann existiert ein $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) mit:

(1) $f_{n_j} \to f$ fast überall auf X.

(2) $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Das heißt $L^p(X)$ ist ein Banachraum ($L^2(X)$ ist ein Hilbertraum).

Bemerkung: Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in 16.4. Im Allgmeinen wird **nicht** gelten, dass fast überall $f_n \to f$ ist.

Beispiel
Sei $X = [0,1]$ und (I_n) sei die folgende Folge von Intervallen:

$$I_1 = [0,1], I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \ldots$$

Es sei $f_n := \mathbb{1}_{I_n}$, sodass $\int_X f_n \, dx = \int_{I_n} 1 \, dx = \lambda_1(I_n) \to 0$. Also $\hat{f}_n \in L^1(X)$ und $\|\hat{f}_n - \hat{0}\|_1 \to 0$. Ist $x \in X$, so gilt: $x \in I_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass eine Teilfolge I_{n_j} mit $x \in I_{n_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert. Somit ist $f_{n_j}(x) = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt fast überall $f_n \nrightarrow 0$.

Beweis (von 16.4)
Setze $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$ $(j \in \mathbb{N})$. Zu ε_1 existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_{n_1}\|_p < \varepsilon_1$ für alle $l \geq n_1$. Zu ε_2 existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_2$ und $\|f_l - f_{n_2}\|_p < \varepsilon_2$ für alle $l \geq n_2$. Etc.
Wir erhalten eine Teilfolge (f_{n_j}) mit

$$(+) \quad \|f_l - f_{n_j}\|_p < \varepsilon_j \text{ für alle } l \geq n_j \text{ mit } j \in \mathbb{N}$$

Setze $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ ($j \in \mathbb{N}$). Klar: $g_l \in \mathfrak{L}^p(X)$. Für $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N := \int_X \left(\sum_{j=1}^{N} |g_j(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dann:

$$S_N = \left\| \left| \sum_{j=1}^{N} |g_j| \right| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_p \overset{(+)}{\leq} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \leq 1$$

Setze

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| \text{ für } x \in X$$

Es ist $g \geq 0$ und messbar. Weiter gilt:

$$0 \leq \int_X g^p \, dx = \int_X \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} |g_j| \right)^p dx \overset{6.2}{\leq} \liminf_{N\to\infty} S_N^p \leq 1$$

Somit ist g^p ist integrierbar. Aus 5.2 folgt, dass eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ existiert mit $0 \leq g^p(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$. Es ist dann auch $0 \leq g(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$ und somit folgt nach Konstruktion von g, dass $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \, dx$ konvergiert absolut in jedem $x \in X \setminus N_1$. Aus Analysis I folgt, dass damit $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \, dx$ in jedem $x \in X \setminus N_1$ konvergiert.

Für $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \implies f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$$

Deshalb ist (f_{n_m}) konvergent (in $\mathbb{R}$) für alle $x \in X \setminus N_1$.

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x) & , x \in X \setminus N_1 \\ 0 & , x \in N_1 \end{cases}$$

Aus §3 ist bekannt, dass f messbar ist. Klar: $f_{n_m} \to f$ fast überall und $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Es ist $f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$ und somit

$$|f_{n_m}| = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} g_j \leq |f_{n_1}| + |g|$$

Wie im Beweis von Satz 16.1 folgern wir

$$|f_{n_m}|^p \leq 2^p \left(|f_{n_1}|^p + g^p \right) =: \tilde{g}$$

$f_{n_1} \in \mathfrak{L}^p(X)$, g^p ist integrierbar. Aus 16.3 folgt, dass $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und

$$\|f_{n_m} - f\|_p \to 0 \ (m \to \infty)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $m \in M$ so, dass $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|f - f_{n_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $l \geq n_m$ gilt:

$$\|f_l - f\|_p = \|f_l - f_{n_m} + f_{n_m} - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \overset{(+)}{<} \frac{1}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Das heißt

$$\|f_l - f\|_p \to 0 \ (l \to \infty)$$

■

Satz 16.5
Sei auch noch $1 \le q < \infty$. (f_n) sei eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X) \cap \mathfrak{L}^q(X)$. Es sei

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \text{ und } g \in \mathfrak{L}^q(X)$$

Weiter gelte:

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ und } \|f_n - g\|_q \to 0 \ (n \to \infty)$$

Dann ist fast überall $f = g$.

Beweis

1. Aus Bemerkung (3) vor 16.4 folgt, dass $(\hat{f}_n)$ ist eine Cachyfolge in $L^p(X)$. Wegen 16.4 existiert dann ein $\varphi \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) mit: $f_{n_j} \to \varphi$ fast überall und $\|f_n - \varphi\|_p \to 0$

   $$\|f - \varphi\|_p = \|f - f_n + f_n - \varphi\|_p \le \|f - f_n\|_p + \|f_n - \varphi\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$$

   Somit ist $\|f - \varphi\|_p = 0$ und deshalb fast überall $f = \varphi$. Also gilt fast überall $f_{n_j} \to f$. Das heißt, dass es eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ gibt, für die gilt:

   $$f_{n_j}(x) \to f(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_1$$

2. Setze $g_j := f_{n_j}$, dann gilt $\|g_j - g\|_q \to 0 \quad (j \to \infty)$. Wie im ersten Schritt zeigt man, dass eine Nullmenge $N_2 \subseteq X$ und eine Teilmenge (g_{j_k}) existiert mit, für die gilt:

   $$g_{j_k}(x) \to g(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_2$$

Wir wissen, dass $N := N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge ist. Sei nun $x \in X \setminus N$. Dann folgt aus dem ersten Schritt $f_{n_j}(x) \to f(x)$ und daraus

$$\underbrace{f_{n_{j_k}}(x)}_{=g_{n_{j_k}}(x)} \to f(x)$$

Aus dem Zweiten Schritt folgt dann, dass $f_{n_{j_k}}(x) \to g(x)$ und somit $f(x) = g(x)$. ∎

Bemerkung: Seien $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gelte $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$. Der Beweis von 16.5 zeigt, dass eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) existiert mit $f_{n_j} \to f$ fast überall.

Bemerkung: Konvergenz im Sinne der Norm $\|\cdot\|_p$ und punktweise Konvergenz fast überall haben im Allgemeinen **nichts** miteinander zu tun!

Beispiel
Sei (f_n) wie im Beispiel vor 16.4. Also $\|f_n - 0\|_p \to 0$, aber $f_n \not\to 0$ fast überall.

Beispiel
Sei $X = [0, 1]$ und f_n sei wie im Bild. f_n ist stetig, also messbar.

$$\int_X f_n \, dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Somit ist $f_n \in \mathfrak{L}^1(X)$.

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, x \in (0,1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Damit gilt fast überall $f_n \to 0$, aber $\|f_n - 0\|_1 = 1 \nrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

Definition
Seien $(E, \|\cdot\|_1), (F, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume.

(1) Sei (x_n) eine Folge in E und $s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann heißt (s_n) eine **unendliche Reihe** und wird mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **konvergent** genau dann, wenn (s_n) konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

(2) $\Phi\colon E \to F$ sei eine Abbildung. Φ heißt **stetig** in $x_0 \in E$ genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in E mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\Phi(x_n) \to \Phi(x_0)$$

Φ heißt auf E stetig genau dann, wenn Φ ist in jedem $x \in E$ stetig.

(3) Für $(x, y) \in E \times E$ setze

$$\|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2}$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $E \times E$ (nachrechnen!). Weiter gilt, dass $E \times E$ genau dann ein Banachraum ist, wenn E einer ist. Für eine Folge $((x_n, y_n))$ in $E \times E$ und $(x,y) \in E \times E$ gilt

$$(x_n, y_n) \overset{\|\cdot\|}{\to} (x,y) \iff x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x \wedge y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} y$$

Bemerkung: Ist (x_n) eine konvergente Folge in E, so ist (x_n) beschränkt (d.h. $\exists c > 0 : \|x_n\|_1 \leq c \forall n \in \mathbb{N}$).

(Beweis wie in Ana I)

Vereinbarung: Für den Rest dieser Vorlesung schreiben wir (meist) f statt $\hat{f}$ und identifizieren $\mathfrak{L}^p(X)$ mit $L^p(X)$. Ebenso schreiben wir $\int_X f \, \mathrm{d}x$ statt $\int_X \hat{f} \, \mathrm{d}x$ und $(f|g)$ statt $(\hat{f}|\hat{g})$.

Beispiel 16.6
(1) Die Abbildung $\Phi : L^p(X) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(f) := \|f\|_p$$

ist stetig auf $L^p(X)$. D.h. für $f_n, f \in L^p(X)$ mit $f_n \overset{\|\cdot\|_p}{\to} f$ gilt $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, also

$$\int_X |f_n|^p \, \mathrm{d}x \to \int_X |f|^p \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Aus Analysis II §17 folgt:

$$\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leq \|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$$ ■

(2) Die Abbildung $\Phi : L^1(X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f) := \int_X f \ \mathrm{d}x$$

ist stetig auf $L^1(X)$. D.h. aus $f_n, f \in L^1(X)$ und $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f$ folgt

$$\int_X f_n \ \mathrm{d}x \to \int_X f \ \mathrm{d}x$$

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int_X f_n \ \mathrm{d}x - \int_X f \ \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_X f_n - f \ \mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_X |f_n - f| \ \mathrm{d}x \\ &= \|f_n - f\|_1 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$ ■

(3) Die Abbildung $\Phi : L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) := (f|g)$$

ist stetig auf $L^2(X) \times L^2(X)$. D.h. für $f_n, g_n, f, g \in L^2(X)$ mit $f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} f$ und $g_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} g$ gilt

$$(f_n|g_n) \overset{n\to\infty}{\to} (f|g)$$

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned} |(f_n|g_n) - (f|g)| &= |(f_n|g_n) - (f_n|g) + (f_n|g) - (f|g)| \\ &= |(f_n|g_n - g) + (f_n - f|g)| \\ &\leq |(f_n|g_n - g)| + |(f_n - f|g)| \\ &\leq \|f_n\|_2 \cdot \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$ ■

Satz 16.7
Sei $f = f_+ - f_- \in L^p(X)$ und (g_n) und (h_n) seien zulässige Folgen für f_+ bzw. f_- (d.h. g_n, h_n einfach, $0 \leq g_n \leq g_{n+1}, g_n \to f_+$, $0 \leq h_n \leq h_{n+1}, h_n \to f_-$). Setze $f_n := g_n - h_n$. Dann sind $f_n, g_n, h_n \in L^p(X)$ und es gilt:

$$\|g_n - f_+\|_p \to 0 \qquad \|h_n - f_-\|_p \to 0 \qquad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Beweis
Es genügt den Fall $f \geq 0$ zu betrachten (also $f = f_+$, $f_- \equiv 0$). Sei also (f_n) zulässig für f. Definiere $\varphi := |f_n - f|^p$. Es ist klar, dass punktweise gilt $\varphi_n \to 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n &\leq (|f_n| + |f|)^p \\ &= |f_n + f|^p \leq (2f)^p \\ &= 2^p f^p =: g \end{aligned}$$

Dann ist $g \in L^1(X)$ integrierbar.
Aus 4.9 folgt:

$$\begin{aligned} \varphi \in L^1(X) &\implies f_n - f \in L^p(X) \\ &\implies f_n = (f_n - f) + f \in L^p(X) \end{aligned}$$

Aus 6.2 folgt:

$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}x \to 0 \implies \|f_n - f\|_p^p \to 0$$

■

Definition

(1) Sei $f : X \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der **Träger** von f

(2) $C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq X \text{ und } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$

Satz 16.8

(1) $C_c(X, \mathbb{R}) \subseteq L^p(X)$

(2) Ist X offen, so liegt $C_c(X, \mathbb{R})$ **dicht** in $L^p(X)$, d.h. ist $f \in L^p(X)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Beweis

(1) Sei $f \in C_c(C, \mathbb{R})$ und $K := \operatorname{supp}(f)$, dann ist $K \subseteq X$ kompakt, also $K \in \mathfrak{B}_d$. Es gilt für alle $x \in X \setminus K$ $f(x) = 0$ und damit folgt aus 4.12 $\int_K |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty$. Dann gilt:

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}x = \int_{X \setminus K} |f|^p \, \mathrm{d}x + \int_K |f|^p \, \mathrm{d}x = \int_K |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty$$

Also ist $f \in L^p(X)$.

(2) Siehe Übungsblatt 13.

■