

23. Das Riemann-Integral

In diesem Paragraphen gilt stets: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei *beschränkt*.
 $m := \inf f(I)$, $M := \sup f(I)$.

Definition

$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ heißt eine **Zerlegung** von $I : \iff a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
 $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $|I_j| = x_j - x_{j-1}$, $m_j := \inf f(I_j)$, $M_j := \sup f(I_j)$ ($j = 1, \dots, n$)

Dann gilt: $m \leq m_j \leq M_j \leq M$ ($j = 1, \dots, n$), $\sum_{j=1}^n |I_j| = b - a$ ($= |I|$)

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j|$ heißt die **Untersumme** von f bzgl. Z .

$S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j|$ heißt die **Obersumme** von f bzgl. Z .

$$m \leq m_j \leq M_j \leq M \implies m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$$

Durch Summation erhält man: $m(b-a) \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M(b-a)$.

$\mathfrak{Z} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$. Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} \implies Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. Gilt $Z_1 \subseteq Z_2$, so heißt Z_2 eine **Verfeinerung** von Z_1 .

Satz 23.1 (Zerlegungs-Verfeinerungen)

Seien $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$.

(1) Ist $Z_1 \subseteq Z_2 \implies s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2)$, $S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$

(2) $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

Beweis

(1) Übung (es genügt zu betrachten: $Z_2 = Z_1 \cup \{t_0\}$, $t_0 \notin Z_1$)

(2) $Z := Z_1 \cup Z_2$. Dann: $s_f(Z_1) \stackrel{(1)}{\leq} s_f(Z) \leq S_f(Z) \stackrel{(1)}{\leq} S_f(Z_2)$. ■

Definition

$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ heißt **unteres Integral** von f

$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ heißt **oberes Integral** von f

Sei $Z \in \mathfrak{Z}$. Dann: $m(b-a) \leq s_f(Z) \leq \int_a^b f dx \stackrel{23.1(2)}{\leq} S_f(Z) \leq M(b-a) \implies m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$

Definition

f heißt (Riemann-) **integrierbar** über $[a, b] : \iff \int_a^b f dx = \int_a^b f dx$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \int_a^b f dx (= \int_a^b f dx)$$

das (Riemann-) **Integral** von f über $[a, b]$.

$$R[a, b] := \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist auf } [a, b] \text{ beschränkt und integrierbar über } [a, b]\}$$

Beispiele:

- (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c \ \forall x \in [a, b]$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$; $m_j = M_j = c$ ($j = 1, \dots, n$) $\implies s_f(Z) = S_f(Z) = \sum_{j=1}^n c |I_j| = c(b-a) \implies f \in R[a, b]$ und $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

(2)

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $m_j = 0$, $M_j = 1$ ($j = 1, \dots, n$)
 $\implies s_f(Z) = 0$, $S_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j| = b-a$.

$$\implies \int_a^b f dx = 0 \neq b-a = \int_a^b f dx \implies f \notin R[a, b].$$

- (3) $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$, wobei $x_j := j \frac{1}{n}$ ($j = 0, \dots, n$).
 m_j, M_j, I_j wie immer. Dann: $|I_j| = \frac{1}{n}$.

$$m_j = f(x_{j-1}) = (j-1) \frac{1}{n}. \quad s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (j-1) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (0+1+\dots+(n-1)) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$M_j = f(x_j) = \frac{j}{n}. \quad S_f(Z) = \sum_{j=1}^n j \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1+\dots+n) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n-1}{2n} = s_f(Z) \leq \int_0^1 x dx \leq \int_0^1 x dx \leq S_f(Z) = \frac{n+1}{2n} \implies f \in R[0, 1] \text{ und } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Satz 23.2 (Rechenregeln für Integrale)

Es seien $f, g \in R[a, b]$

$$(1) \text{ Ist } f \leq g \text{ auf } [a, b] \implies \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

$$(2) \text{ Sind } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g \in R[a, b] \text{ und } \int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Beweis

(1) Übung.

(2) Übung: $\alpha f \in R[a, b]$ und $\int_a^b (\alpha f) dx = \alpha \int_a^b f dx$.

Zu zeigen: $f + g \in R[a, b]$ und $\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$. Sei $z = \{x_0, \dots, x_n\} \in$

$\mathfrak{Z}, m_j, M_j, I_j$ wie immer. $\widetilde{m}_j := \inf g(I_j)$, $\widetilde{\widetilde{m}}_j := \inf(f+g)(I_j)$. $x \in I_j : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq m_j + \widetilde{m}_j \implies \widetilde{\widetilde{m}}_j \geq m_j + \widetilde{m}_j \implies \widetilde{\widetilde{m}}_j |I_j| \geq m_j |I_j| + \widetilde{m}_j |I_j| \xrightarrow{\text{Summation}} S_{f+g}(Z) \geq S_f(Z) + S_g(Z) \implies S_f(Z) + S_g(Z) \leq \int_a^b (f+g) dx \forall Z \in \mathfrak{Z} (*)$. Sei $\varepsilon > 0 : \exists Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \varepsilon = \int_a^b f dx - \varepsilon, S_g(Z_2) > \int_a^b g dx - \varepsilon, Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. $\underbrace{\int_a^b f dx + \int_a^b g dx - 2\varepsilon}_{=: A} < S_f(Z_1) + S_g(Z_2) \stackrel{23.1}{\leq} S_f(Z) + S_g(Z) \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b (f+g) dx$. Also:
 $A - 2\varepsilon \leq \int_a^b (f+g) dx \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} A \leq \int_a^b (f+g) dx$. Analog: $\int_a^b (f+g) dx \leq A \implies A = \int_a^b (f+g) dx = \int_a^b (f+g) dx$ ■

Satz 23.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Voraussetzung $\implies \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) < s_f(Z) + \varepsilon \implies \int_a^b f dx \leq S_f(Z) < s_f(z) + \varepsilon \leq \int_a^b f dx + \varepsilon$. Also: $\int_a^b f dx < \int_a^b f dx + \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b f dx \leq \int_a^b f dx (\leq \int_a^b f dx) \implies f \in R[a, b]$.
 „ \implies “: $S := \int_a^b f dx$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2} = S - \frac{\varepsilon}{2}, S_f(Z_2) < S + \frac{\varepsilon}{2}, Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. $S_f(Z) - s_f(Z) \stackrel{23.1}{\leq} S_f(Z_2) - s_f(Z_1) < S + \frac{\varepsilon}{2} - (S - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$. ■

Satz 23.4 (Integratibilität monotoner und stetiger Funktionen)

(1) Ist f auf $[a, b]$ monoton $\implies f \in R[a, b]$.

(2) $C[a, b] \subseteq R[a, b]$.

Beweis

- (1) f sei wachsend auf $[a, b]$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ sei die **äquidistante Zerlegung** von $[a, b]$ mit $n+1$ Teilpunkten. $x_j = a + j \frac{b-a}{n}$ ($j = 0, \dots, n$), dann: $|I_j| = \frac{b-a}{n}$. m_j, M_j wie immer: $S_f(Z) - s_f(z) = \sum_{j=1}^n (\underbrace{M_j}_{=f(x_j)} - \underbrace{m_j}_{f(x_{j-1})}) |I_j| = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) =: \alpha_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann: $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \xrightarrow{23.3} \text{Behauptung}$.
- (2) Sei $f \in C[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : (*) |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall t, s \in [a, b] \text{ mit } |t - s| < \delta$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ $m_j, M_j, |I_j|$ seien wie immer; z sei so gewählt, daß $|I_j| < \delta$ ($j = 1, \dots, n$). Betrachte $I_j : 18.3 \implies \exists s_j, t_j \in I_j : m_j = f(s_j), M_j = f(t_j)$. $|t_j - s_j| < \delta \xrightarrow{(*)} \underbrace{f(t_j) - f(s_j)}_{=M_j - m_j} < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} |I_j| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \xrightarrow{23.3} f \in R[a, b]$ ■

Definition

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $G, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen. G heißt eine **Stammfunktion** (SF) von g auf J : $\Longleftrightarrow G$ ist differenzierbar auf J und $G' = g$ auf J .

Beachte:

- (1) Sind G_1 und G_2 Stammfunktionen von g auf J $\xrightarrow{21.7} \exists c \in \mathbb{R} : G_1 = G_2 + c$ auf J .
- (2) Sei $I = [a, b]$. Es gibt Funktionen, die auf $[a, b]$ Stammfunktionen besitzen, aber über $[a, b]$ nicht integrierbar sind.

Beispiel

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt: (§22): F ist auf $[0, 1]$ differenzierbar und $f := F'$ ist auf $[0, 1]$ *nicht* beschränkt. Also: $f \notin R[0, 1]$, besitzt aber auf $[0, 1]$ die Stammfunktion F .

- (3) Sei $I = [a, b]$. Es gibt Funktionen in $R[a, b]$, die auf $[a, b]$ keine Stammfunktionen besitzen.

Beispiel

Sei $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [-1, 0) \end{cases}$. f ist monoton auf $[-1, 1]$ $\xrightarrow{23.4} f \in R[-1, 1]$.

Annahme: f besitzt auf $[-1, 1]$ die Stammfunktion F . Auf $[0, 1]$: $F'(x) = f(x) = 1 = (x)'$ $\xrightarrow{21.7} \exists c_1 \in \mathbb{R} : F(x) = x + c_1 \forall x \in [0, 1]$. Auf $[-1, 0)$: $F'(x) = f(x) = 0 \xrightarrow{21.7} \exists c_2 \in \mathbb{R} : F(x) = c_2 \forall x \in [-1, 0)$. $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = c_1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} F(x) = c_2$. F stetig in $x = 0 \implies$

$$c_1 = c_2. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + c_1 - c_1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{c_2 - c_1}{x} = 0,$$

Widerspruch zur Differenzierbarkeit von F in $x_0 = 0$.

Satz 23.5 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Es sei $f \in R[a, b]$ und f besitze auf $[a, b]$ die Stammfunktion F . Dann:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

Beweis

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$; m_j, M_j, I_j sei wie gehabt. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. MWS $\implies \exists \xi_j \in I_j : F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \cdot |I_j| \implies \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) = F(b) - F(a)$

$$m_j |I_j| \leq f(\xi_j) |I_j| \leq M_j |I_j| \xrightarrow{\text{Summation}} s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z) \forall Z \in \mathfrak{Z} \implies \underbrace{\int_a^b f dx}_{= \int_a^b f dx} \leq$$

$$F(b) - F(a) \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{= \int_a^b f dx} \implies F(b) - F(a) = \int_a^b f dx \quad \blacksquare$$

Beispiele:

- (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, $\cos x$ ist stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, also integrierbar. $F(x) = \sin x$ ist eine Stammfunktion von $\cos x \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
- (2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

Beispiele:

- (1) Sei $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \end{cases}$, (f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ *punktweise* gegen $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Bekannt: $f \notin R[0, 1]$. In 23.10 werden wir sehen: $f_n \in R[0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$.
- (2) Für $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ sei f_n wie in der Zeichnung:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x, & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$f_n \in C[0, 1] \implies f_n \in R[0, 1]$. zur Übung: $\int_0^1 f_n dx = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. (f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ *punktweise* gegen $f(x) = 0$.

Aber: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$

Satz 23.6 (Integrierbarkeit gleichmäßig konvergierender Funktionsfolgen)

(f_n) sei eine Folge in $R[a, b]$ und (f_n) konvergiert auf $[a, b]$ *gleichmäßig* gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \in R[a, b]$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f dx = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) dx$$

(f_n) sei eine Folge in $R[a, b]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf $[a, b]$ *gleichmäßig* gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \in R[a, b]$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

Beweis

- Zu $\varepsilon = 1 \exists m \in \mathbb{N}$: $f_m - 1 < f < f_m + 1$ auf $[a, b]$. f_n beschränkt auf $[a, b]$.
- $A_n := \int_a^b f_n dx$ ($n \in \mathbb{N}$). Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon$ auf $[a, b] \forall n \geq n_0 \implies$ für $n \geq n_0$ folgt (wie im Beweis von 23.2(1)):

$$\underbrace{\int_a^b (f_n - \varepsilon) dx}_{= A_n - \varepsilon(b-a)} \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{=: A} \leq \underbrace{\int_a^b (f_n + \varepsilon) dx}_{= A_n + \varepsilon(b-a)}$$

$$\implies |A_n - A| \leq \varepsilon(b-a), |A_n - B| \leq \varepsilon(b-a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies A_n \rightarrow A, A_n \rightarrow B \ (n \rightarrow \infty) \implies A = B$$

$$\implies f \in R[a, b] \text{ und } A_n \rightarrow \int_a^b f dx$$

■

Beispiel

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

g ist monoton $\implies g \in R[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Übungsblatt: $f \in R[0, 1]$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \notin R[0, 1]$$

Satz 23.7 (Integration von verketteten Funktionen)

Es sei $f \in R[a, b]$, $D := f([a, b])$ und $h : D \rightarrow R$ sei Lipschitzstetig auf D . Dann: $h \circ f \in R[a, b]$

Beweis

$g := h \circ f$. $\exists L > 0$. $|h(t) - h(s)| \leq L|t - s| \forall t, s \in D$. O.B.d.A: $L > 0$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, m_j, M_j, I_j seien wie gehabt. $\tilde{m}_j := \inf g(I_j)$, $\tilde{M}_j := \sup g(I_j)$. Seien $x, y \in I_j$, etwa $f(x) \leq f(y)$:
 $g(x) - g(y) \leq |g(x) - g(y)| = |h(f(x)) - h(f(y))| \leq L|f(x) - f(y)| = L(f(y) - f(x)) \leq L(M_j - m_j) =: c_j \implies g(x) \leq g(y) + c_j \forall x, y \in I_j \implies \tilde{M}_j \leq g(y) + c_j \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq g(y) \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq \tilde{m}_j \implies \tilde{M}_j - \tilde{m}_j \leq c_j = L(M_j - m_j) \implies S_g(Z) - s_g(Z) = \sum_{j=1}^n (\tilde{M}_j - \tilde{m}_j) |I_j| \leq L \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| = L(S_f(Z) - s_f(Z)) \forall Z \in \mathfrak{Z} \xrightarrow{23.3} g \in R[a, b] \quad \blacksquare$

Satz 23.8 (Weitere Rechenregeln für Integrale)

Es seien $f, g \in R[a, b]$.

- (1) $|f| \in R[a, b]$ und $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$ (**Dreiecksungleichung für Integrale**)
- (2) $fg \in R[a, b]$
- (3) Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ und $\frac{1}{g}$ beschränkt auf $[a, b] \implies \frac{1}{g} \in R[a, b]$

Beweis

- (1) $D := f([a, b])$, $h(t) := |t|$ ($t \in D$). Dann: $|f| = h \circ f$. Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \stackrel{\S 1}{\leq} |t - s| \xrightarrow{23.7} |f| \in R[a, b]$
 $\pm f \leq |f|$ auf $[a, b]$. 23.2 $\implies \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx \implies |\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$
- (2) 1. $D := f([a, b])$, $h(t) := t^2$ ($t \in D$). Dann: $f^2 = h \circ f$.
 $\exists \gamma > 0 : |f(x)| \leq \gamma \forall x \in [a, b] \implies |t| < \gamma \forall t \in D$ Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = |t^2 - s^2| =$

$$|t+s||t-s| \leq (|t|+|s|) \cdot |t-s| \leq 2\gamma|t-s| \xrightarrow{23.7} f^2 \in R[a, b]$$

$$2. f+g, f-g \in R[a, b] \implies (f+g)^2, (f-g)^2 \in R[a, b] \implies \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a, b] \implies f \cdot g \in R[a, b]$$

- (3) $D := g([a, b])$, $h(t) := \frac{1}{t}$ ($t \in D$). Dann: $\frac{1}{g} = h \circ g$.
 $\exists \gamma > 0 : \frac{1}{|g(x)|} \leq \gamma \forall x \in [a, b] \implies \frac{1}{|t|} \leq \gamma \forall t \in D$. Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = |\frac{1}{t} - \frac{1}{s}| = \frac{|t-s|}{|t||s|} \leq \gamma^2|t-s| \xrightarrow{23.7} \frac{1}{g} \in R[a, b]$

Satz 23.9 (Aufteilung eines Integrals)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und $c \in (a, b)$. Dann gilt:

$$f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b].$$

In diesem Fall ist:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

Beweis

„ \Rightarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Aus 23.3 folgt: $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon$.

$Z := Z_1 \cup \{c\} \in \mathfrak{Z}$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ mit $x_k = c$. $Z_0 := \{x_0, \dots, x_k\}$ ist eine Zerlegung von $[a, c]$. M_j, m_j, I_j seien wie immer. Dann gilt:

$$S_f(Z_0) - s_f(Z_0) = \sum_{j=1}^k (M_j - m_j)|I_j| \leq \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = S_f(Z) - s_f(Z) \leq S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon \xrightarrow{23.3} f \in R[a, c]. \text{ Analog: } f \in R[c, b].$$

„ \Leftarrow “: $S := \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Zerlegungen Z_1 von $[a, c]$ und Z_2 von $[c, b] : s_f(Z_1) = \int_a^c f dx - \varepsilon = \int_a^c f dx, s_f(Z_2) > \int_c^b f dx - \varepsilon$.

$$Z := Z_1 \cup Z_2 \implies Z \in \mathfrak{Z} \text{ und } \int_a^b f dx \geq s_f(Z) = s_f(Z_1) + s_f(Z_2) > S - 2\varepsilon.$$

$$\text{Also: } S - 2\varepsilon < \int_a^b f dx \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} S \leq \int_a^b f dx.$$

$$\text{Analog: } \int_a^b f dx \leq S \implies f \in R[a, b], \int_a^b f dx = S. \quad \blacksquare$$

Satz 23.10 (Integral und Unstetigkeitsstellen)

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen.

- (1) Ist f beschränkt auf $[a, b]$ und $A := \{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$ endlich, dann gilt: $f \in R[a, b]$.
- (2) Ist $f \in R[a, b]$ und $A := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ endlich, dann gilt: $g \in R[a, b]$ und $\int_a^b g dx = \int_a^b f dx$.

Beweis

- (1) $\exists \gamma \geq 0 : |f(x)| \leq \gamma \forall x \in [a, b]$. Es genügt zu betrachten: $A := \{t_0\}$ (wegen 23.9). O.B.d.A.: $t_0 = a$ oder $t_0 = b$. Etwa: $t_0 = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\alpha \in (a, b)$ mit $2\gamma(\alpha - a) < \varepsilon/2$.

$f \in C[\alpha, b] \implies f \in R[\alpha, b] \xrightarrow{23.3}$ Es gibt eine Zerlegung Z_1 von $[\alpha, b]$ mit:
 $S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon/2$. $Z := Z_1 \cup \{a\} \implies Z \in \mathfrak{Z}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \underbrace{\sup f([a, \alpha]) - \inf f([a, \alpha])}_{\leq 2\gamma} (\alpha - a) + \underbrace{S_f(Z_1) - s_f(Z_1)}_{< \varepsilon/2} \\ &< 2\gamma(\alpha - a) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

- (2) Klar: g ist beschränkt. $h := g - f$. Dann: $h(x) = 0 \forall x \in [a, b] \setminus A \implies h \in C([a, b] \setminus A) \xrightarrow{(1)} h \in R[a, b] \implies g = h + f \in R[a, b]$.

Noch zu zeigen: $\int_a^b h dx = 0$. $\varphi := |h|$. Aus 23.8 folgt: $\varphi \in R[a, b]$ und $|\int_a^b h dx| \leq \int_a^b \varphi dx$.

Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $m_j := \inf \varphi(I_j)$, $\varphi(x) = 0 \forall x \in [a, b] \setminus A$, $\varphi(x) > 0 \forall x \in A \implies m_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$) $\implies s_f(Z) = 0 \implies \int_a^b \varphi dx = \int_a^b \varphi dx = 0 \implies \int_a^b h dx = 0$. ■

Satz 23.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Es seien $f, g \in R[a, b]$, $g \geq 0$ (oder $g \leq 0$) auf $[a, b]$, $m := \inf f([a, b])$, $M := \sup f([a, b])$

- (1) $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$
 (2) Ist $f \in C[a, b] \implies \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f dx = f(\xi)(b - a)$

Beweis

- (1) $\alpha := \int_a^b g dx$, $\beta := \int_a^b f g dx$. $m \leq f \leq M$ auf $[a, b] \implies mg \leq fg \leq Mg$ auf $[a, b] \implies m\alpha \leq \beta \leq M\alpha$.

Es ist $\alpha \geq 0$. O.B.d.A.: $\alpha > 0$. Dann gilt: $m \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq M$, $\mu := \frac{\beta}{\alpha}$.

- (2) Setze in (1) $g \equiv 1 \implies \int_a^b f dx = \mu(b - a)$ ($\mu \in [m, M]$). Aus 18.1 folgt: $\exists \xi \in [a, b] : \mu = f(\xi)$. ■

Der Riemannsche Zugang zum Integral *Bemerkung: Wir haben bisher tatsächlich die Darboux'schen Integrale betrachtet. Hier wird nun die ursprüngliche Definition von Riemann vorgestellt.*

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. m_j, M_j, I_j seien wie immer.

Wählt man in jedem I_j einen Punkt ξ_j , so heißt $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein zu Z passender **Zwischenvektor** und $\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|$ eine **Riemannsche Zwischensumme**.

$$m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \quad (j = 1, \dots, n) \implies s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z)$$

Satz 23.12 (Äquivalenz der Riemannschen und Darbouxschen Integrale)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann gilt: $f \in R[a, b]$ genau dann, wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathfrak{Z} : |\sigma_f(Z, \xi) - S| < \varepsilon \text{ für jedes zu } Z \text{ passende } \xi. (*)$$

In diesem Fall gilt:

$$S = \int_a^b f dx.$$

Beweis

„ \Rightarrow “: $S := \int_a^b f dx$. Sei $\varepsilon > 0$. Wie im Beweis von 23.3: $\exists Z \in \mathfrak{Z} : s_f(Z) > S - \varepsilon, S_f(Z) < S + \varepsilon$.

$$\text{Sei } \xi \text{ passend zu } Z \implies S - \varepsilon < s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z) < S + \varepsilon \implies |\sigma_f(Z, \xi) - S| < \varepsilon.$$

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $Z \in \mathfrak{Z}$ so, dass $(*)$ gilt. Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$, m_j, M_j, I_j wie immer. Sei $j \in \{1, \dots, n\} : \exists \xi_j, \eta_j \in I_j : f(\xi_j) > M_j - \varepsilon, f(\eta_j) < m_j + \varepsilon, \xi := (\xi_1, \dots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ sind passend zu Z .

$$A := \sigma_f(Z, \xi), B := \sigma_f(Z, \eta). A = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| > \sum_{j=1}^n (M_j - \varepsilon) |I_j| = S_f(Z) - \varepsilon(b - a) \implies S_f(Z) < A + \varepsilon(b - a). \quad (i)$$

$$\text{Analog: } -s_f(Z) < \varepsilon(b - a) - B. \quad (ii)$$

$$\text{Dann gilt: } S_f(Z) - s_f(Z) < A - B + 2\varepsilon(b - a) = A - S + S - B + 2\varepsilon(b - a) \leq |A - S| + |B - S| + 2\varepsilon(b - a) \stackrel{(*)}{<} 2\varepsilon + 2\varepsilon(b - a) = \varepsilon(2 + 2(b - a)) \stackrel{23.3}{\implies} f \in R[a, b].$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f dx \leq S_f(Z) \stackrel{(i)}{<} A + \varepsilon(b - a) = A - S + S + \varepsilon(b - a) \leq |A - S| + S + \varepsilon(b - a) \stackrel{(*)}{<} \varepsilon + S + \varepsilon(b - a).$$

$$\text{Also: } \int_a^b f dx < S + \varepsilon(1 + (b - a)) \quad \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b f dx \leq S. \text{ Analog folgt mit (ii): } S \leq \int_a^b f dx. \quad \blacksquare$$

Definition

Sei $f \in R[a, b]$. $\int_c^c f(x) dx := 0$ und $\int_b^a f(x) dx =: - \int_a^b f(x) dx$

Bemerkung: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Satz 23.13 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f \in R[a, b]$ und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

- (1) F ist auf $[a, b]$ Lipschitzstetig, insbesondere $F \in C[a, b]$
- (2) Ist f in $x_0 \in [a, b]$ stetig $\implies F$ ist in x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$
- (3) Ist $f \in C[a, b]$ $\implies F \in C^1[a, b]$ und $F' = f$ auf $[a, b]$

Beweis

$$(1) \quad L := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}. \text{ Sei } x, y \in [a, b], \text{ etwa } x \leq y. \quad F(y) = \int_a^y f(t)dt \stackrel{23.9}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt = F(x) + \int_x^y f(t)dt \implies F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \implies |F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \stackrel{23.8}{\leq} \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq L} dt \leq \int_x^y L dt = L(y - x) = L|y - x|$$

$$(2) \quad \text{Sei } x_0 \in [a, b]. \text{ Wir zeigen: } (*) \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \text{ (analog zeigt man f\"ur } x_0 \in (a, b] : \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)) \text{ Sei also } x_0 \in [a, b), h > 0 \text{ und } x_0 + h < b. \\ g(h) := \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right|. \text{ Zu zeigen: } g(h) \rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0+ \text{)}. \text{ Es ist } \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt, \quad \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = \frac{1}{h} f(x_0)h = f(x_0) \implies g(h) = \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \stackrel{23.8}{\leq} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt; \quad s(h) := \sup\{|f(t) - f(x_0)| : t \in [x_0, x_0 + h]\} \implies g(h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} s(h)dt = \frac{1}{h} s(h)h = s(h). \text{ Also: } 0 \leq g(h) \leq s(h). \text{ } f \text{ stetig in } x_0 \implies f(t) \rightarrow f(x_0) \text{ (} t \rightarrow x_0 \text{)} \implies s(h) \rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0+ \text{)} \implies g(h) \rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0+ \text{)} \implies (*)$$

(3) folgt aus (2) ■**Satz 23.14 (Anwendung des 2. Hauptsatzes auf stetige Funktionen)**

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f \in C(J)$ und $\xi \in J$ (fest). $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_{\xi}^x f(t)dt$. Dann ist $F \in C^1(J)$ und $F' = f$ auf J .

Beweis

Seien $a, b \in J$, $a < b$ und $I := [a, b]$. Es genügt zu zeigen: F ist differenzierbar auf I und $F' = f$ auf I . $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ ($x \in I$). Sei $\xi \leq a$ (analoger Beweis für $\xi \geq b$ und $\xi \in (a, b)$). Für $x \in [a, b] : F(x) = \int_{\xi}^x \dots = \int_{\xi}^a \dots + \int_a^x \dots = F(a) + G(x) \xrightarrow{23.13} F$ ist differenzierbar auf I und $F' = G' = f$ auf I . ■

Definition

Im folgenden seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beliebige Intervalle.

- (1) Sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. $g(x)|_{x=x_0} := g(x_0)$.
- (2) Ist $f \in R[a, b]$, so heißt $\int_a^b f(x)dx$ auch ein **bestimmtes Integral**.
- (3) Besitzt $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch $\int g(x)dx$ (**unbestimmtes Integral**). "Gleichungen" der Form $\int g(x)dx = h(x)$ gelten bis auf additive Konstanten! **Beispiel:** $\int e^x dx = e^x$, $\int e^x dx = e^x + 7$. $\int g(x)dx = h(x)$ auf I bedeutet: h ist eine Stammfunktion von g auf I .

Satz 23.15 (Partielle Integration)

(1) Es seien $f, g \in R[a, b]$ und F, G seien Stammfunktionen von f bzw. g auf $[a, b]$. Dann:

$$\int_a^b Fg dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b fG dx$$

(2) Sind $f, g \in C^1[a, b] \implies$

$$\int_a^b f'g dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg' dx$$

(3) Sind $f, g \in C^1(I) \implies$ auf I gilt:

$$\int f'g dx = f(x)g(x) - \int fg' dx$$

Beweis

$$(1) (FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \implies \int_a^b Fg dx + \int_a^b fG dx = \int_a^b (FG)' dx \stackrel{23.5}{=} F(x)G(x)|_a^b$$

(2) folgt aus (1)

$$(3) (fg)' = f'g + fg' \implies fg = \int (f'g + fg') dx \quad \blacksquare$$

Beispiele:

$$(1) \int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x \text{ auf } (0, \infty).$$

$$(2) \int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_g dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$-\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x dx$$

$$\implies \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) \text{ auf } \mathbb{R}.$$

$$(3) \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx \text{ komplizierter!}$$

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Satz 23.16 (Substitutionsregeln)

Sei $f \in C(I)$ und $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$.

(1) Ist $J = [\alpha, \beta] \implies$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t) dt$$

(2) Auf J gilt:

$$\int f(g(t))g'(t) dt = \int f(x) dx|_{x=g(t)}$$

(3) g sei auf J streng monoton \implies auf I gilt:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt|_{t=g^{-1}(x)}$$

Merkregel

Ist $y = y(x)$ differenzierbar, so schreibt man für y' auch $\frac{dy}{dx}$. In 23.16 substituiere $x = g(t)$ (fasse also x als Funktion von t auf) $\implies g'(t) = \frac{dx}{dt}$ „ $\implies dx = g'(t)dt$ “.

Beweis

(2) Sei F eine Stammfunktion von f auf I . $G(t) := F(g(t))$ ($t \in J$). $G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ ($t \in J$) $\implies G$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ auf $J \implies$ (2)

(1) $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \stackrel{23.5}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \stackrel{23.5}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$.

(3) $\int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x)$ ■

Beispiele:

(1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (Substitution $x = \sin t$, $t = 0 \implies x = 0$, $t = \frac{\pi}{2} \implies x = 1$, $dx = \cos t dt$).
 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)dt =$
 $t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\int \frac{1}{x \log x} dx$ (Substitution $x = e^t$, $t = \log x$, $dx = \frac{1}{x} dx$). $\int \frac{1}{x \log x} = \int \frac{1}{t} dt = \log t =$
 $\log(\log(x))$ auf $(1, \infty)$.

Definition

(1) Seien p und q Polynome und $q \neq 0$. Dann heißt $\frac{p}{q}$ eine **rationale Funktion**.

$\frac{p}{q}$ hat eine Darstellung der Form $\frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}$, wobei p_1, p_2 Polynome und $\frac{p_2}{q}$ **echt gebrochen rational**, d.h.: $\text{Grad } p_2 < \text{Grad } q$.

(2) Seien $b, c \in \mathbb{R}$. Dann heißt das Polynom $x^2 + bx + c$ **unzerlegbar** über \mathbb{R} : $\iff 4c - b^2 > 0$
 $0 \iff x^2 + bx + c \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

(3) Ein **Partialbruch** ist eine rationale Funktion der Form

$$\frac{A}{(x - x_0)^k}$$

wobei $A, x_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, oder

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k}$$

wobei $A, B, b, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $x^2 + bx + c$ unzerlegbar über \mathbb{R} .

Satz 23.17 (Integration von rationalen Funktionen)

Es seien $b, c, x_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $p(x) := x^2 + bx + c$ und $D := 4c - b^2 > 0$

$$(1) \int \frac{1}{x - x_0} dx = \log |x - x_0|$$

$$(2) \int \frac{1}{(x - x_0)^m} dx = \frac{-1}{m-1} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^{m-1}}$$

$$(3) \int \frac{1}{p(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \left(\frac{2x + b}{\sqrt{D}} \right)$$

$$(4) \int \frac{1}{p(x)^m} dx = \frac{1}{(m-1)D} \cdot \frac{2x+b}{p(x)^{m-1}} + \frac{4m-6}{(m-1)D} \int \frac{1}{p(x)^{m-1}} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \log(p(x)) - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)} dx$$

$$(6) \int \frac{x}{p(x)^m} dx = \frac{-1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{p(x)^{m-1}} - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)^m} dx$$

Beweis

(1) klar

(2) klar

$$(3) p(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} = (x + \frac{b}{2})^2 + \frac{D}{4} = \frac{D}{4} \left(\frac{4}{D} (x + \frac{b}{2})^2 + 1 \right) = \frac{D}{4} \left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{D}} \right)^2 + 1 \right) = \frac{D}{4} (t^2 + 1), \text{ wobei } t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}}, \text{ also } x = \frac{\sqrt{D}t-b}{2}$$

$$\implies \int \frac{1}{p(x)} dx = (\text{Substitution } t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}}, dx = \frac{\sqrt{D}}{2} dt) \frac{4}{D} \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{\sqrt{D}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan t = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \left(\frac{2x+b}{\sqrt{D}} \right)$$

(4) Übung, partielle Integration

$$(5) \int \frac{x}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+b-b}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{p'(x)}{p(x)}}_{\log(p(x))} dx - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)} dx$$

(6) Übung, partielle Integration ■

Definition

(1) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, \dots, n$)

$|Z| := \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}$ heißt das **Feinheitsmaß** von Z .

(2) $\mathfrak{Z}^* := \{(Z, \xi) : Z \in \mathfrak{Z}, \xi \text{ ist passend zu } Z\}$. Eine Folge $((Z_n, \xi^{(n)}))$ in \mathfrak{Z}^* heißt eine **Nullfolge** : $\iff |Z_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

Satz 23.18 (Folgen von Zerlegungen mit $|Z_n| \rightarrow 0$)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt; sei $\gamma \geq 0$ mit: $|f(x)| \leq \gamma \forall x \in [a, b]$.

(1) Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und enthält Z_2 genau p Teilpunkte mehr als Z_1 , dann gilt:

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z_1) + 2p\gamma|Z_1| \text{ und}$$

$$S_f(Z_2) \geq S_f(Z_1) - 2p\gamma|Z_1|.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall Z \in \mathfrak{Z}$ mit $|Z| < \delta$:

$$s_f(Z) > \int_a^b f dx - \varepsilon, S_f(Z) < \int_a^b f dx + \varepsilon.$$

(3) Ist (Z_n) eine Folge in \mathfrak{Z} mit $|Z_n| \rightarrow 0$, dann gilt:

$$s_f(Z_n) \rightarrow \int_a^b f dx, \quad S_f(Z_n) \rightarrow \int_a^b f dx.$$

Beweis

(1) Übung, es genügt den Fall $p = 1$ zu betrachten.

(2) Beweis nur für Untersummen. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2}$; Z_1 habe p Teilpunkte. $\delta := \frac{\varepsilon}{4\gamma p}$.

Sei $Z \in \mathfrak{Z}$ und $|Z| < \delta$. $Z_2 := Z \cup Z_1 \in \mathfrak{Z}$; Z_2 hat höchstens p Teilpunkte mehr als $Z \Rightarrow s_f(Z) = \underbrace{s_f(Z) - s_f(Z_2)}_{\substack{> -2p\gamma|Z| \\ (1)}} + \underbrace{s_f(Z_2)}_{\geq s_f(Z_1)} > -2p\gamma|Z| + s_f(Z_1) > \underbrace{-2\gamma p\delta}_{=\frac{\varepsilon}{2}} + \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f dx - \varepsilon.$

(3) Nur für Untersummen. $A := \int_a^b f dx$, $s_n := s_f(Z_n)$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus (2) folgt dann: $\exists \delta > 0 : s_f(Z) > A - \varepsilon \forall Z \in \mathfrak{Z}$ mit $|Z| < \delta$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta \forall n \geq n_0$. Also: $s_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$).

Beispiel

$$a_n := \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{j}}{n^{3/2}}. \text{ Behauptung: } a_n \rightarrow \frac{2}{3}$$

Beweis

$$a_n = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sqrt{\frac{j}{n}}}_{=f(\frac{j}{n})} \frac{1}{n}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1].$$

$$Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\} \Rightarrow a_n = S_f(Z_n) \xrightarrow[23.18(3)]{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

Satz 23.19 (Riemannsche Definition des Integrals mit Nullfolgen)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. $f \in R[a, b] \iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \rightarrow S$ ($n \rightarrow \infty$) für jede Nullfolge $((Z_n, \xi^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{Z}^*$. In diesem Fall gilt: $S = \int_a^b f dx$.

Beweis

„ \Rightarrow “: $S := \int_a^b f dx$. Sei $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ eine Nullfolge. Dann:

$$\underbrace{s_f(Z_n)}_{\xrightarrow[23.18]{S}} \leq \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \leq \underbrace{S_f(Z_n)}_{\xrightarrow[23.18]{S}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty).$$

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$ und (Z_n) eine Folge in \mathfrak{Z} mit $|Z_n| \rightarrow 0$. Wie im Beweis von 23.12: $\forall n \in \mathbb{N} \exists \xi^{(n)}, \eta^{(n)}$ passend zu Z_n mit:

$$S_f(Z_n) - \varepsilon < \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}); \sigma(Z_n, \eta^{(n)}) < s_f(Z_n) + \varepsilon$$

Aus 23.18(3) folgt für $n \rightarrow \infty$: $\int_a^b f dx - \varepsilon \leq S \leq \int_a^b f dx + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b f dx \leq S \leq \int_a^b f dx \implies f \in R[a, b] \text{ und } \int_a^b f dx = S.$ ■

Beispiel

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel zum nächsten Satz, nicht zum vorherigen.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in [0, \pi]); \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [0, \pi].$$

$\implies (f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \pi]$ gegen $f \equiv 0$.

$f'_n(x) = \cos(nx)$, $f'_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Das heißt: (f'_n) konvergiert auf $[0, \pi]$ *nicht* punktweise.

Satz 23.20 (Gleichmäßige Konvergenz der Stammfunktion)

(f_n) sei eine Folge in $C^1[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ und es gelte:

(i) $(f_n(x_0))$ konvergiert

(ii) (f'_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ und für $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in [a, b]$) gilt: $f \in C^1[a, b]$ und $f' = g$ auf $[a, b]$.

Also: $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Beweis

O.B.d.A.: $x_0 = a$ und $f_n(a) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). $f(x) := \int_a^x g(t) dt$ ($x \in [a, b]$). Aus 19.2 folgt: $g \in C[a, b]$.

Damit wegen 23.13: $f \in C^1[a, b]$ und $f' = g$ auf $[a, b]$.

$$\text{Sei } x \in [a, b] : f_n(x) - \underbrace{f_n(a)}_{\rightarrow 0} \stackrel{23.5}{=} \int_a^x f'_n(t) dt \stackrel{23.6}{\rightarrow} \int_a^x g(t) dt = f(x).$$

$\implies (f_n)$ konvergiert punktweise gegen f .

$$\text{Für } x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_n(a) - f(x) + f_n(a)| = \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt + f_n(a) \right| \leq \int_a^x |f'_n - g| dt + |f_n(a)| \leq \int_a^b |f'_n - g| dt + |f_n(a)| =: c_n$$

Wegen Voraussetzung (ii) konvergiert $(|f'_n - g|)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen 0. Wegen 23.6 folgt damit: $\int_a^b |f'_n - g| dt \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\implies c_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\implies (f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f . ■

Wir können nun den Satz 21.9 beweisen.

Beweis

Sei $a < b$ und $[a, b] \subseteq I$. $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$, $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

Aus 19.1 folgt: (f_n) und (f'_n) konvergieren auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f bzw. g . Wegen unserem neuen Satz 23.20 nun ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und $f' = g$ auf $[a, b]$. $[a, b] \subseteq I$ beliebig \implies Beh. ■