

0.4 Übung 3, 22.11.2004

0.4.1 Aufgabe 1

a) Sei $f : S_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ein (Gruppen-)Homomorphismus

z.Z.: $\forall \pi \in S_n : f(\pi) + f(\pi) = [0]_\sim$

Beweis: Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Dann gilt $\tau \circ \tau = id$

Also: $[0]_\sim = f(id) = f(\tau \circ \tau) = f(\tau) + f(\tau)$

Sei: $\pi \in S_n$ bel.

Dann existieren Transposition $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ mit $\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$

Also: $f(\pi) + f(\pi) + f(\tau_1) + f(\tau_2) + \dots + f(\tau_k) + f(\pi_1) + f(\pi_2) + \dots$

$f(\tau_1) + f(\tau_1) + f(\tau_2) + f(\tau_2) + \dots = [0]_\sim$ □

b) Sei f surjektiv. Dann ex. $\pi \in S_n$ mit $f(\pi) = [1]_\sim$. Nach a) $[0]_\sim = f(\pi) + f(\pi) = [1]_\sim + [1]_\sim = [2]_\sim$.

Also teilt m 2. Somit ist $m=2$.

0.4.2 Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } n \in \mathbb{N}. \quad 3 \text{ teilt } n &\Leftrightarrow [n]_\sim = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow \left[\sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i \right]_\sim = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n [a_i \cdot 10^i]_\sim = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n [a_i]_\sim \cdot [10^i]_\sim = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n [a_i]_\sim \cdot [1]_\sim^i = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i = [0]_\sim && \text{in } \mathbb{Z}_3 \\
 &\Leftrightarrow 3 \text{ teilt } \sum_{i=0}^n a_i
 \end{aligned}$$

b) Analog ($[10]_\sim = [-1]_\sim$ in \mathbb{Z}_{11})

0.4.3 Aufgabe 3

a) (Hier fehlen noch ein paar Angaben für die Menge der Einsen in den Klammern) Die Charakteristik eines Körpers \mathbb{K} ist 0, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$, 0,1 neutr. El.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Char 0, also kann 0 nicht die Char von \mathbb{K} sein.

Sei also $m \in \mathbb{N}$, die Char von \mathbb{K}
 par Wir nehmen: m ist keine Primzahl
 Wir wissen:

- (i) $(m\text{-mal})1 + \dots + 1 = 0$
- (ii) m ist die kleinste nat. Zahl mit dieser Eigenschaft
- (iii) $\exists k, l \in \mathbb{N} : k > 1, l > 1$ und $m = k \cdot l$. ($k < m, l < m$)

Aus (i) ergibt sich $(1 + \dots + 1) + (1 + \dots + 1) + \dots + (1 + \dots + 1) = 0$ ($l \cdot k$ -mal 1)
 $\Leftrightarrow (1 + \dots + 1) \cdot (1 + \dots + 1) = 0$ ($l \cdot 1 \cdot k \cdot 1$)

Wir haben $x = 1 + \dots + 1 \neq 0$ (l -mal) und $y = 1 + \dots + 1 \neq 0$ (k -mal) gefunden mit $x \cdot y = 0$.
 Dies ist ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von \mathbb{K} . $\Rightarrow m$ muß Primzahl sein.

- b) (Hier fehlen noch ein paar Angaben für die Menge der Einsen in den Klammern) Sei p eine Primzahl und p die Char von \mathbb{K} . Wir def.:

$$f : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{K}, k \mapsto \begin{cases} \bar{0} & , k = 0 \\ 1 + \dots + 1 & , k \in \{1, \dots, p-1\} \end{cases}$$

Sei $k, k' \in \mathbb{F}_p, k + k' = r$ und $k \cdot k' = r'$ mit $r, r' \in \{0, \dots, p-1\}$

$$f(k) + f(k') = (\bar{1} + \dots + \bar{1}) + (\bar{1} + \dots + \bar{1}) = (\bar{1} + \dots + \bar{1}) + (\bar{1} + \dots + \bar{1}) = (\bar{1} + \dots + \bar{1}) = f(r) = f(k + k')$$

$$\text{Analog } f(k) \cdot f(k') = f(k \cdot k')$$

0.4.4 Aufgabe 4

a)

$$(1) \frac{z_1 - z_2 - 2}{z_1 + z_2 + 3i} = \frac{3}{5}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{\bar{z}_3}{z_3}\right) = \frac{1}{7} + i \cdot 0$$

$$(2) \overline{z_1 + z_3 \cdot (z_3 - z_2)} = (i3 - 3\sqrt{3}) + i(12 + 9\sqrt{3})$$

b)

$$(1) z + \bar{z} = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow za = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$$

Kreislinie eines Kreises um $(1,0)$ mit Radius 1.

$$(2) \operatorname{Re}(iz) = -b, 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$$

Zeichnung...

$$(3) |z - z_i| < 3 \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 < 9; 3 < |z| \Leftrightarrow 9 < a^2 + b^2$$

Der Teil des Kreises um $(0,2)$ mit Radius 3, der nicht im Inneren des Kreises um $(0,0)$ mit Radius 3 liegt.