

## 9 Robuste Schätzer

Seien  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1} \overset{uiv}{\sim} F$ ,  $F \in \mathfrak{F}$ : Verteilungsannahme,  $x_1, \dots, x_n, x$  Realisierungen von  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ ,  $X_i$  reellwertig.

Sei  $\vartheta : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$  Plug-In-Schätzer für  $\vartheta(F)$ .

$(\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq t\})$

### 9.1 Definition (Sensitivitätskurve)

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}}$$

Dabei:  $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$  basierend auf  $X_1, \dots, X_n$  und einer zusätzlichen Beobachtung  $x$ .

$S(x, \hat{\vartheta})$  ist die Änderung von  $\hat{\vartheta}$  bei einer zusätzlichen Beobachtung  $x$  relativ gesehen zur Masse  $\frac{1}{n+1}$  von  $x$ .

Beispiele:

a)  $\vartheta(F) = \int x dF(x)$ ,  $\vartheta(\hat{F}_n) = \bar{x}_n$

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n}{\frac{1}{n+1}} = \sum_{i=1}^n x_i + x - \frac{n+1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x - \bar{x}_n$$

linear in  $x \Rightarrow$  unbeschränkt in  $x$

Große Änderung von  $S$ , falls  $|x|$  groß!

b) Sei  $\mathfrak{F} = \{F : F \text{ streng monoton wachsend auf } \{x : 0 < F(x) < 1\}\}$ ,  
 $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$ .

Sei  $n = 2r - 1$  ungerade.

$$\Rightarrow \vartheta(\hat{F}_n) = x_{(r)} =: x_{r:n}$$

(„das  $r$  kleinste unter  $n$ “)

$n+1 = 2r$ :

$$\hat{F}_{n+1}^{-1}(\frac{1}{2}) = x_{r:n+1}$$

$$\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) \in [x_{(r-1)}, x_{(r)}]$$

$\Rightarrow S$  beschränkt in  $x$ !

Nachteil der Sensitivitätskurve:

Hängt von Stichprobe ab.

Wünschenswert wäre Abhängigkeit nur von  $x$  und  $F$ .

## 9.2 Definition

a) Sei  $\Delta_x$  die zum Dirac-Maß in  $x$  gehörende Verteilungsfunktion, also

$$\Delta_x(y) = \begin{cases} 0, & y < x \\ 1, & y \geq x \end{cases}$$

Die Einflusskurve (*influence curve*) von  $\vartheta(F)$  ist

$$\begin{aligned} \varphi(x, F) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vartheta((1-t)F + t\Delta_x) - \vartheta(F)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \vartheta((1-t)F + t\Delta_x)|_{t=0} \end{aligned}$$

wobei die Existenz der Ableitung vorausgesetzt wird.

b)  $\hat{\vartheta} = \vartheta(\hat{F}_n)$  heißt **robust**, falls  $\varphi(x, F)$  beschränkt ist in  $x$ .

Bemerkung:

Gegeben:

Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$ : Schätze  $\vartheta(F)$  durch  $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$ .

Weiterer Wert  $x$ : Schätze  $\vartheta(F)$  durch  $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$ , wobei

$$\hat{F}_{n+1}(y) = \frac{n}{n+1} \hat{F}_n(y) + \frac{1}{n+1} \Delta_x(y)$$

Sei nun  $t = \frac{1}{n+1}$ , also  $1-t = \frac{n}{n+1}$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) &= \vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) \\ &= \frac{\vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) - \vartheta(\hat{F}_n)}{t} t + \underbrace{\vartheta(\hat{F}_n)}_{=\hat{\vartheta}_n} \\ &\approx \hat{\vartheta}_n + \frac{1}{n+1} \varphi(x, \hat{F}_n) \end{aligned}$$

(Diese Approximation setzt voraus, dass  $\varphi(x, \hat{F}_n)$  existiert.)

In diesem Fall gilt:

$$\varphi(x, \hat{F}_n) \approx \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}} = S(x, \hat{\vartheta})$$

### 9.3 Beispiel

Sei  $\vartheta(F) = \int y dF(y)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(x, F) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(1-t) \int y dF(y) + t \cdot \int y d\Delta_x(y) - \int y dF(y)] \\ &= - \int y dF(y) + x \\ &= x - \vartheta(F) \end{aligned}$$

Hier gilt sogar<sup>24</sup>:  $\varphi(x, \hat{F}_n) = x - \bar{x}_n = S(x, \hat{\vartheta})$ .

### 9.4 Satz (Eigenschaften von $\varphi(x, F)$ )

Sei  $\varphi(x, F)$  Einflusskurve von  $\vartheta(F)$ .

- a) Sei  $\vartheta(F) = \int h dF = Eh(X)$ , wobei  $X \sim F$  und  $E|h(X)| < \infty$ .  
Dann gilt:  $\varphi(x, F) = h(x) - \vartheta(F)$
- b) Sei  $\vartheta(F) = \vartheta_1(F) + \vartheta_2(F)$  mit Einflusskurven  $\varphi_1(x, F), \varphi_2(x, F)$ .  
Dann:  $\varphi(x, F) = \varphi_1(x, F) + \varphi_2(x, F)$
- c) Sei  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\vartheta(F) = \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds$ .  
Ist  $\varphi_s(x, F)$  die Einflusskurve von  $\vartheta_s(F)$  ( $s \in I$ ), so gilt (unter Regularität<sup>25</sup>):

$$\varphi(x, F) = \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds$$

- d) (Kettenregel)  
Ist  $g$  differenzierbar, so ist die Einflusskurve von  $g(\vartheta(F))$  gegeben durch

$$g'(\vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F)$$

- e) (implizit definierter Parameter)  
 $\vartheta(F)$  sei Lösung der Gleichung  $h(F, \vartheta(F)) = 0$ , wobei für festes  $u$   $\lambda(x, F, u)$  die Einflusskurve von  $h(F, u)$  sei und die Ableitung  $h'(F, u)$  nach  $u$  existiere. Dann gilt:

$$\varphi(x, F) = - \frac{\lambda(x, F, \vartheta(F))}{h'(F, \vartheta(F))}$$

<sup>24</sup>vergleiche 9.1, Beispiel (a)

<sup>25</sup>siehe Beweis

Beweis:

Sei  $F_{t,x} = (1-t)F + t\Delta_x$ .

a) Aus

$$\vartheta(F_{t,x}) = (1-t) \int h(y) dF(y) + t \cdot h(x)$$

(vergleiche 9.3) folgt:

$$\frac{1}{t}(\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)) = h(x) - \vartheta(F)$$

b) Klar.

c)

$$\begin{aligned} \varphi(x, F) &= \frac{d}{dt} \vartheta(F_{t,x})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_I g(s) \vartheta_s(F_{t,x}) ds|_{t=0} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_I g(s) \frac{d}{dt} \vartheta_s(F_{t,x})|_{t=0} ds \\ &= \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds \end{aligned}$$

(\*): Vertauschbarkeit vorausgesetzt! (Regularität)

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))) &= \underbrace{\frac{g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\stackrel{t \rightarrow 0}{\rightarrow} g'(\vartheta(F)), \text{ da } \vartheta(F_{t,x}) \stackrel{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \vartheta(F)} \cdot \underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\stackrel{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \varphi(x, F)} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{\rightarrow} g'(\vartheta(F)) \varphi(x, F) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{t} \underbrace{[h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))]}_{=0} \\
&= \frac{1}{t} [h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))] \\
&\quad + \frac{1}{t} \underbrace{[h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))]}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \lambda(x, F, \vartheta(F))} \\
&= \underbrace{\frac{h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))}{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \text{ (Forderung)}} \cdot \underbrace{\frac{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} h'(F, \vartheta(F))} \\
&\quad \cdot \underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x, F)} + \frac{1}{t} [h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))] \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F))
\end{aligned}$$

Also:

$$h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F)) = 0$$

$$\xrightarrow{h' \neq 0 \text{ (Forderung)}} \text{Behauptung.}$$

## 9.5 Bemerkung (Einflusskurven-Heuristik)

Sei  $\varphi(x, F)$  Einflusskurve von  $\vartheta(F)$ ,  $X \sim F$

Oft gilt:

- (i)  $E[\varphi(X, F)] = \int \varphi(x, F) dF(x) = 0$
- (ii)  $\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) = \int \varphi(x, F) d(\hat{F}_n(x) - F(x)) + R_n$ , wobei  $\sqrt{n}R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
[wird oft als erfüllt angenommen]
- (iii)  $0 < \tau^2(F) = E[\varphi^2(X, F)] < \infty$

Dann gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = \sqrt{n}(\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \tau^2(F))$$

Beweis:

Mit (i) und (ii) gilt:

$$\begin{aligned}\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i, F) + R_n \\ \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i, F)}_{\xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \tau^2(F))} + \underbrace{\sqrt{n}R_n}_{\xrightarrow{P} 0}\end{aligned}$$

Lemma von Slutsky  $\Rightarrow$  Behauptung

## 9.6 Beispiel (Median)

Sei  $F$  stetig mit Dichte  $f = F'$ .  $f(x) > 0$  für  $\{x : 0 < F(x) < 1\}$ ,  $X \sim F$   
Median

$$\vartheta(F) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

bzw.  $F(\vartheta(F)) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow h(F, \vartheta(F)) = 0$  mit

$$\begin{aligned}h(F, u) &= F(u) - \frac{1}{2} \\ &= \underbrace{\int (\mathbf{1}\{x \leq u\} - \frac{1}{2}) dF(x)}_{=: \tilde{h}_u(x)} \\ &= \int \tilde{h}_u(x) dF(x)\end{aligned}$$

$$\stackrel{9.4(a)}{\Rightarrow} \lambda(x, F, u) = \tilde{h}_u(x) - h(F, u) = \mathbf{1}\{x \leq u\} - F(u)$$

$$\begin{aligned}\stackrel{9.4(c)}{\Rightarrow} \varphi(x, F) &= -\frac{\lambda(x, F, \vartheta(F))}{h'(F, \vartheta(F))} \\ &= -\frac{\mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\} - F(\vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x \leq \vartheta(F) \\ +\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x > \vartheta(F) \end{cases}\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i)  $\hat{\vartheta}$  ist robust
- (ii)  $\hat{F}_n$  ist Treppenfunktion  $\Rightarrow \varphi(x, \hat{F}_n)$  existiert nicht  
 $\Rightarrow$  Bemerkung nach 9.2 ist hier nicht zutreffend
- (iii)

$$E[\varphi(X, F)] = \frac{\frac{1}{2} - P(X \leq \vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} = 0$$

$$\tau^2(F) = E[\varphi^2(X, F)] = \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))}$$

$$\stackrel{9.5}{\Rightarrow} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))})$$

Konkret:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \vartheta(F) = \mu$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{\pi\sigma^2}{2})$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot 1$$

$$\hat{\vartheta}_n \sim AN(\mu, \underbrace{\frac{\pi\sigma^2}{2n}}_{\tau_1^2})$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{\tau_2^2})$$

( $\bar{X}$  UMVUE)

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

Einflusskurve des Medians  $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$  ist also

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x, F) = \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))}$$

Ganz analog: Einflusskurve von  $F^{-1}(p)$  ist

$$(*) \quad \varphi_p(x, F) = \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))}, \quad 0 < p < 1$$

### 9.7 Beispiel ( $\alpha$ -getrimmtes Mittel)

Sei  $F$  stetig,  $F' = f$ ,  $f(x) > 0$  für  $\{x : 0 < F(x) < 1\}$ .

$f$  symmetrisch mit Zentrum  $\mu = EX$ .

Für  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  heißt

$$\mu_\alpha(F) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} x \, dF(x) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(p) \, dp$$

**$\alpha$ -getrimmtes Mittel.**

Für symmetrische Verteilungen gilt:

$$\mu_\alpha(F) = \mu$$

(Denn:)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} \mu \, dF(x) &= \mu \\ \Rightarrow \mu_\alpha(F) - \mu &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x - \mu) \, dF(x) = 0 \end{aligned}$$

Der Plug-In Schätzer für  $\mu_\alpha(F)$  ist

$$\mu_\alpha(\hat{F}_n) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \hat{F}_n^{-1}(p) \, dp$$

wobei  $\hat{F}_n^{-1}(t) = X_{(i)}$ , falls  $\frac{i-1}{n} < t \leq \frac{i}{n}$ . (Aufgabe 16)

In der Praxis wird der (asymptotisch gleichwertige) Schätzer

$$\bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n-2[\alpha n]} \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}$$

verwendet.

Einflusskurve von  $\mu_\alpha(F)$ :

9.4(c)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (**) \quad \varphi^\alpha(x, F) &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \varphi_p(x, F) \, dp \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))} \, dp \end{aligned}$$



Nun sei  $F(x) < \alpha$ . Dann:

$$\begin{aligned}
 (**) &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} (p-1) \underbrace{\frac{1}{f(F^{-1}(p))}}_{\text{Dichte von } F^{-1}} dp \\
 &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \underbrace{(p-1)}_G dF^{-1}(p) \\
 (+) &\stackrel{=}{=} \frac{1}{1-2\alpha} \left[ \underbrace{((1-\alpha)-1) \cdot F^{-1}(1-\alpha)}_{=G(b)} - \underbrace{(\alpha-1) \cdot F^{-1}(\alpha)}_{=G(a)} \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\int_{\alpha}^{1-\alpha} F^{-1}(p) dp}_{=(1-2\alpha) \cdot \mu} \right] \\
 &= \frac{1}{1-2\alpha} \left[ (-\alpha) \underbrace{(F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha))}_{=2\mu} + F^{-1}(\alpha) - (1-2\alpha)\mu \right] \\
 &= \frac{F^{-1}(\alpha) - \mu}{1-2\alpha}
 \end{aligned}$$

(+): partielle Integration (Stochastik II),  $F$  weiterhin symmetrisch

Ähnliche Überlegungen für  $F(x) > 1-\alpha$  bzw.  $\alpha \leq F(x) \leq 1-\alpha$  ergeben:

$$\varphi^{\alpha}(x, F) = \begin{cases} \frac{F^{-1}(\alpha) - \mu}{1-2\alpha}, & x < F^{-1}(\alpha) \\ \frac{x - \mu}{1-2\alpha}, & F^{-1}(\alpha) \leq x \leq F^{-1}(1-\alpha) \\ \frac{F^{-1}(1-\alpha) - \mu}{1-2\alpha}, & x > F^{-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Insbesondere ist  $\varphi^{\alpha}(x, F)$  beschränkt in  $x$ .

$$\Rightarrow \bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n - 2[\alpha n]} \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}$$

ist robust.

Einflusskurven-Heuristik ergibt:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_{n,\alpha} - \mu_{\alpha}) \xrightarrow{D} \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{(1-2\alpha)^2} [2\alpha(F^{-1}(\alpha) - \mu)^2 + \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x - \mu)^2 dF] \right)$$

