Kapitel III

Kohomologie von Garben

§ 12 Garbenkohomologie als abgeleiteter Funktor

Erinnerung 12.1 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekten, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus.

(i) Der *Kern* von f ist das Paar $(\ker f, \iota)$ mit $\iota : \ker f \longrightarrow A$ und $f \circ \iota = 0$, sodass für jedes Paar $(C, \tilde{\iota})$ mit $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\tilde{\iota} : C \longrightarrow A$ mit $f \circ \tilde{\iota} = 0$ der Morphismus $\tilde{\iota}$ eindeutig über $\ker f$ faktorisiert, es also einen eindeutigen Morphismus $h : C \longrightarrow \ker f$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[rr, "\iota"] & & A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & C \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "\tilde{\iota}"'] & & & \end{tikzcd}$$

(ii) der *Kokern* von f ist das Paar $(\mathrm{coker} f, \pi)$ mit $\pi : B \longrightarrow \mathrm{coker} f$ und $\pi \circ f = 0$, sodass für jedes Paar $(C, \tilde{\pi})$ mit $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $\tilde{\pi} : B \longrightarrow C$ mit $\tilde{\pi} \circ f = 0$ der Morphismus $\tilde{\pi}$ eindeutig über $\mathrm{coker} f$ faktorisiert, es also einen eindeutigen Morphismus $h : \mathrm{coker} f \longrightarrow C$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & \mathrm{coker} f \arrow[dl, "h"] \\ & & & C & \end{tikzcd}$$

Definition 12.2 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *abelsch*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Es bildet $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition " $+$ " für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(ii) Für Homomorphismen gelten die Distributivgesetze bezüglich " $+$ " und " $\circ$ ", das heißt es gilt

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h, \qquad e\circ(f+g) = e\circ f + e\circ g$$

für alle $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $f,g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $e \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$.

(iii) Endliche direkte Summen, Kerne, Kokerne existieren.

(iv) Jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns.

(v) Jeder Epimorphismus ist der Kokern seines Kerns.

Beispiel 12.3 Beispiele für abelsche Kategorien sind $\underline{\mathrm{Ab}}, \underline{k\text{-VR}}, \underline{\mathrm{Ringe}}, \underline{R\text{-Mod}}, \underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}$. Nicht abelsch dagegen sind beispielsweise die Kategorien $\underline{\mathrm{Grp}}, \underline{\mathrm{Sets}}$.

Definition 12.4 Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie.

(i) Ein *Komplex* in $\mathcal{C}$ ist eine Sequenz

$$C^\bullet := \qquad \ldots \longrightarrow C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

von Morphismen in $\mathcal{C}$, sodass gilt $d^i \circ d^{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für einen Komplex $C^\bullet$ in $\mathcal{C}$ heißt

$$H^i(C^\bullet) := \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1}$$

das i-te Kohomologieobjekt von $C^\bullet$.

Proposition 12.5 *Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie.*

(i) Die Komplexe in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie $\mathcal{C}^\bullet$ mit Morphismen

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^\bullet & & \ldots \longrightarrow & C^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d^i} & C^{i+1} & \longrightarrow \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{i+1}} & \\
D^\bullet & & \ldots \longrightarrow & D^{i-1} & \xrightarrow[d'^{i-1}]{} & D^i & \xrightarrow[d'^i]{} & D^{i+1} & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

(ii) H^i ist ein kovarianter, linksexakter Funktor $\mathcal{C}^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}$.

(iii) Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow C'^\bullet \xrightarrow{\alpha} C^\bullet \xrightarrow{\beta} C''^\bullet \longrightarrow 0$ von Komplexen in $\mathcal{C}^\bullet$ gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^i(C'^\bullet) \longrightarrow H^i(C^\bullet) \longrightarrow H^i(C''^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(C'^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(C^\bullet) \longrightarrow \ldots.$$

Beweis. (ii) Sei $\alpha : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ Morphismus von Komplexen in $\mathcal{C}^\bullet$ wie in (i), wir haben also für alle $i \in \mathbb{Z}$ Morphismen $\alpha_i : C^i \longrightarrow D^i$ gegeben. Wir suchen nun

$$\tilde{\alpha}_i : H^i(C^\bullet) = \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1} \longrightarrow \text{Kern } d'^i / \text{Bild } d'^{i-1} = H^i(D^\bullet)$$

Für $x \in \text{Kern } d^i$ ist

$$0 = \alpha_{i+1} \circ d^i = d'^i \circ \alpha_i,$$

also $\alpha_i|_{\text{Kern } d^i} \in \text{Hom}\left(\text{Kern } d^i, \text{Kern } d'^i\right)$ und damit induziert α_i durch Restklassenbildung die Abbildung $\tilde{\alpha}_i : \text{Kern } d^i \longrightarrow H^i(D^\bullet)$. Wir müssen noch zeigen: Bild $d^{i-1} \subseteq \text{Kern } \tilde{\alpha}_i$. Sei also $x = d^{i-1}(y)$ für ein $y \in C^{i-1}$. Dann gilt

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(d^{i-1}(y)) = d'^{i-1}(\alpha_{i-1}(y)) \ \in \text{Bild } (d'^{i-1}),$$

also $\tilde{\alpha}_i(x) = 0$ in $H^i(D^\bullet)$.

(iii) Wir haben folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\ldots \arrow[r] & C'^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C'^{i} \arrow[r, "d'^i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & C'^{i+1} \arrow[r, "d'^{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"'] & C'^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i+2}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^{i} \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & C^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"'] & C^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{i+2}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C''^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C''^{i} \arrow[r, "d''^i"] \arrow[d] & C''^{i+1} \arrow[r, "d''^{i+1}"] \arrow[d] & C''^{i+2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Wir brauchen eine Abbildung $H^i(C''^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(C'^\bullet)$. Sei $x \in \text{Kern } d''^i \subseteq C''^i$. Da β_i surjektiv ist, können wir ein Urbild $y \in C'^i$ mit $\beta_i(y) = x$ wählen. Dann gilt

$$0 = d''^i(\beta_i(y)) = \beta_{i+1}(d^i(y)),$$

also $d^i(y) \in \text{Kern } \beta_{i+1} = \text{Bild } \alpha_{i+1}$. Wegen letzterem können wir schreiben $d^i(y) = \alpha_{i+1}(z)$ mit eindeutigem $z \in C'^{i+1}$, α_{i+1} Monomorphismus ist. Damit gilt in unserer Rechnung nun $x \mapsto f_y(x) := \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y)) \in C'^{i+1}$ mit einem $y \in \beta_i^{-1}(x)$. Es gilt sogar $f_y(x) \in \text{Kern } d'^{i+1}$, denn es ist

$$\alpha_{i+2}(d'^{i+1}(f_y(x))) = d^{i+1}(d^i(y)) = d^{i+1}(d^i(y)) = 0$$

und da α_{i+1} ein Monomorphismus ist, muss bereits gelten $d'^{i+1}(f_y(x)) = 0$, das Gewünschte. Es bleibt zu zeigen, dass für eine andere Wahl $\tilde{y}$ von y gilt $f_y(x) - f_{\tilde{y}}(x) \in \text{Bild } d'^i$ - dann ist die Abbildung

$$\tilde{\delta}^i : \text{Kern } d''^i \longrightarrow H^i(C'^\bullet), \qquad x \mapsto f_y(x) \quad \text{für ein } y \in \beta_i^{-1}(x)$$

wohldefiniert. Sei also $\tilde{y} \in \beta_i^{-1}(x)$ beliebig und sei analog $\tilde{z} = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(\tilde{y}))$. Es gilt $\beta_i(y) = \beta_i(\tilde{y})$, also $y - \tilde{y} \in \text{Kern } \beta_i = \text{Bild } \alpha_i$, etwa $y - \tilde{y} = \alpha_i(w)$. Dann ist

$$f_y(x) - f_{\tilde{y}}(x) = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y - \tilde{y})) = d'^i(\alpha_i^{-1}(y - \tilde{y})) = d'^i(w) \ \in \text{Bild } d'^i,$$

was zu zeigen war, womit $\tilde{\delta}^i$ wohldefiniert ist. Schließlich ist noch zu zeigen, dass $\tilde{\delta}^i$ über $H^i(C''^\bullet)$ faktorisiert. Sei also $x \in \text{Bild } d''^{i-1} \subseteq \text{Kern } d''^i$, etwa $x = d''^{i-1}(v)$ für ein $v \in C''^{i-1}$. Da β_{i-1} Epimorphismus ist, gilt $v = \beta_{i-1}(\tilde{v})$ für ein $\tilde{v} \in C^{i-1}$, also

$$d''^{i-1}(\beta_{i-1}(\tilde{v})) = d''^{i-1}(v) = x = \beta_i(y) = \beta_i(d^{-1}(\tilde{w}))$$

und wir erhalten $d^i(y) = d^i(d^{i-1}(\tilde{w})) = 0$. Schließlich folgt

$$\tilde{\delta}_i(x) = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y)) = \alpha_{i+1}(0) = 0,$$

da α_{i+1} injektiv ist, was zu zeigen war. □

Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Ziel soll es sein, für jede Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X und jedes $i \geqslant 0$ eine abelsche Gruppe $H^i(X, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften zu definieren:

(i) Es gilt $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$.

(ii) Ist $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Proposition 12.6 *Sei $H^i(X, \cdot)$ mit (i) und (ii) gegeben, $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \dots$ eine exakte Sequenz von Garben auf X (eine sogenannte Auflösung von $\mathcal{F}$), sodass $H^i(X, \mathcal{G}_j) = 0$ für alle $j \geqslant 0$ und $i \geqslant 1$ (ein solche Garbe $\mathcal{G}_j$ heißt azyklisch). Dann ist*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i\left(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet)\right).$$

Beweis. Durch Induktion über i.

$i = 0$ Da der globale Schnittfunktor $\Gamma(X, \cdot)$ linksexakt ist, ist die Sequenz der globalen Schnitte

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{G}_0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathcal{G}_1) \longrightarrow \dots$$

exakt. Dann gilt aber bereits

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \text{Kern } d^0 = \text{Bild } \alpha = H^0(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet)).$$

$i = 1$ Die Auflösung von $\mathcal{F}$ zerlegt sich in exakte Sequenzen

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{G}_0/\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2 \longrightarrow \dots$$

Nach Voraussetzung gibt es zu (1) eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}_0) = 0,$$

also gilt, da $H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$ Epimophismus ist

$$\begin{aligned} H^1(X,\mathcal{F}) &= H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \Big/ \big(\text{Kern } \big(H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})\big)\big) \\ &= H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \Big/ \big(\text{Bild } \big(H^0(X,\mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F})\big)\big). \end{aligned}$$

Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_2) \longrightarrow \dots$$

exakt ist, wir erhalten also

$$\begin{aligned} H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) &= \text{Bild } \big(H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_1)\big) \Big/ \big(\text{Kern } \big(0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_0/\mathcal{F})\big)\big) \\ &= \text{Kern } \big(H^0(X,\mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_2)\big) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} H^1(X,\mathcal{F}) &= \text{Kern } \big(H^0(X,\mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_2)\big) \Big/ \big(\text{Bild } \big(H^0(X,\mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}_1)\big)\big) \\ &= H^1(\Gamma(X,\mathcal{G}^\bullet)). \end{aligned}$$

$i > 1$ Folgt analog. □

Erinnerung 12.7 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathcal{C}$.

(i) Ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt *linksexakt* (bzw. *rechtsexakt*), falls die Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(C') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C'') \qquad \text{bzw.} \qquad F(C') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C'') \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{D}$ exakt sind.

(ii) Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt *linksexakt* (bzw. *rechtsexakt*), falls die Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(C'') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C') \qquad \text{bzw.} \qquad F(C'') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C') \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{D}$ exakt sind.

(iii) Eine Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt *exakt*, falls er links- und rechtsexakt ist.

Definition + Bemerkung 12.8 Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie.

(i) Ein Objekt I in $\mathcal{C}$ heißt *injektiv*, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, I)$ exakt ist.

(ii) Ein Objekt P in $\mathcal{C}$ heißt *projektiv*, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \cdot)$ exakt ist.

Betrachte nun das folgende Diagramm mit Objekten in $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"'] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\phi}"'] & C'' \arrow[r] & 0 \\
& I & & P \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, dashed, "\tilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(iii) I ist genau dann injektiv, falls für jedes solche linksexakte Diagramm ein $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$ existiert, sodass gilt $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$.

(iv) P ist genau dann projektiv, falls für jedes solche rechtsexakte Diegramm ein $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, C)$ existiert, sodass gilt $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$.

Beispiel 12.9 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine injektive abelsche Gruppe.

Beweis. Sei $A' \subseteq A$ abelsche Gruppen und betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & A \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

mit einem Gruppenhomomorphismus $\phi : A' \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Nach Bemerkung 2.8(iii) müssen wir für die Injektivität ϕ auf A fortsetzen. Für $a \in A$ sei

$$\tilde{\phi}_a(a) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot a \notin A' \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n}\phi(na), & \text{falls } n = \min\{k \mid ka \in A'\}. \end{cases}$$

Dann ist

$$\tilde{\phi}_a : \langle A', a \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad a' + k \cdot a \mapsto \phi(a') + k \cdot \tilde{\phi}_a(na)$$

wohldefiniert und ein Homomorphismus, denn es gilt für $ka \in A'$ mit $k = k_0 n$

$$\tilde{\phi}_a(ka) = \tilde{\phi}_a(k_0 na) = k_0 \phi(na) = k_0 n \tilde{\phi}_a(a) = k\tilde{\phi}_a(a).$$

Damit haben wir bereits eine Fortsetzung von ϕ auf $\langle A', a\rangle$ für alle $a \in A$. Für $a \in A$ sei nun

$$\Phi := \left\{(\overline{A}, \overline{\phi} \mid A \subseteq \tilde{A} \leqslant A',\ \overline{\phi} : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ mit } \overline{\phi}|_{A'} = \phi\right\}.$$

Dann ist Φ nichtleer und durch "$\leqslant$" geordnet, enthält nach Zorns Lemma also ein maximales Element $(A_{\max}, \phi_{\max})$. Wäre $A_{\max} \neq A$, so wähle $\overline{a} \in A\backslash\overline{A}$ und verfahre wir oben und führe diesen Fall zum Widerspruch. Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 12.10 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, I eine beliebige Indexmenge und I_i injektive Objekte in $\mathcal{C}$ für alle $i \in I$. Dann ist auch das direkte Produkt $I := \prod_{i \in I} I_i$ injektiv.*

Beweis. Sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"'] & C \\ & I & \end{tikzcd}$$

gegeben. Da I_i injektiv ist für jedes $i \in I$ erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi_i"'] & C \arrow[dl, "\tilde{\phi}_i"'] \\ & I_i & \end{tikzcd}$$

und die $\tilde{\phi}_i$ setzen sich nach der UAE des direkten Produkts zu einem Homomorphismus $\tilde{\phi} : C \longrightarrow I$ mit der gewünschten Kommutativität zusammen, was zu zeigen war. □

Proposition 12.11 *Jede abelsche Gruppe kann in eine injektive abelsche Gruppe eingebettet werden.*

Beweis. Sei A abelsche Gruppe, $a \in A\backslash\{0\}$. Definiere

$$\phi_a : \langle a\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad a \mapsto c_a \neq 0,$$

wobei $c_a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ beliebig gewählt ist, mit der Eigenschaft $\mathrm{ord}(c_a)|\mathrm{ord}(a)$, falls $\mathrm{ord}(a) < \infty$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv ist, lässt sich ϕ_a fortsetzen zu $\phi_a : A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Die ϕ_a für $a \in A$ definieren einen Homomorphismus

$$\phi : A \longrightarrow \prod_{a \in A\backslash\{0\}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad g \mapsto (\phi_a(g))_{a \in A\backslash\{0\}}.$$

ϕ ist injektiv, denn für alle $a \in A\backslash\{0\}$ gilt $(\phi(a))_a = \phi_a(a) = c_a \neq 0$, also $\phi(a) \neq 0$. Damit ist ϕ injektiver Homomorphismus in eine nach Lemma 12.10 injektive Gruppe. □

Proposition 12.12 *In den Kategorien* $\underline{R\text{-Mod}}, \underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}$ *und in der Kategorie der Garben abelscher Gruppen* $\underline{Ab}(X)$ *auf einem Schema* X *lässt sich jedes Objekt in ein injektives Objekt einbetten. Man sagt: Es gibt in diesen Kategorieren genügend viele injektive Objekte.*

Beweis. Für $\underline{R\text{-Mod}}$ siehe dazu in Hilton-Stammbach, I.Prop.8, für $\underline{Ab}(X)$ und $\underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}$ siehe Hartshorne III.2.2 sowie III.2.3.

Bemerkung 12.13 *Ist* $\mathcal{C}$ *eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten, so besitzt jedes Objekt eine injektive Auflösung, also eine Auflösung mit injektiven Objekten.*

Beweis. Sei C ein Objekt in $\mathcal{C}$. Beweise die Behauptung durch Induktion über i.
$i = 0$ I^0 existiert nach Voraussetzung.
$i \geqslant 1$ Sei $0 \longrightarrow C \longrightarrow I^0 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i$ exakt mit injektiven Objekten I^j in $\mathcal{C}$. Sei I^{i+1} ein injektives Objekt mit

$$I^i \,/ d^{-1}(I^{i-1}) \subseteq I^{i+1}$$

(das existiert, da es genügend viele injektive Objekte in $\mathcal{C}$ gibt). Dann gilt für die Abbildung $d^i : I^i \longrightarrow I^{i+1}$ gerade Kern $d^i = d^{i-1}(I^{i-1}) = \text{Bild}\, d^{i-1}$, die Sequenz

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I^0 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1}$$

ist also exakt, was zu zeigen war. □

Definition 12.14 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen aus X und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$. Dann heißt für $i \geqslant 0$

$$H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)$$

die i-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$.

Bemerkung 12.15 *(i) Es gilt* $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ *für jedes* $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$.
(ii) Es gilt $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$ *für jede injektive Garbe* $\mathcal{I} \in \underline{Ab}(X)$ *und* $i \geqslant 1$.

Beweis. (i) Siehe 12.4.
(ii) Wähle eine Auflösung $0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$ von $\mathcal{I}$. Dann folgt die Behauptung. □

Satz 12.16 *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein Schema.*
(i) Für $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$ *ist* $H^i(X, \mathcal{F})$ *nicht von der gewählten injektiven Auflösung abhängig.*

(ii) $H^i(X, \cdot) : \underline{\mathcal{Ab}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ *ist ein Funktor.*

(iii) Ist $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Beweis. (ii) Sein $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen mit injektiven Auflösungen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet, \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$$

sowie $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Definiere $\phi^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^i$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, dashed, "\epsilon\circ\phi"] & \mathcal{I}^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\phi^0"'] & \mathcal{I}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi 1"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\tilde{\epsilon}"] & \mathcal{J}^0 \arrow[r, "\tilde{d}^0"] & \mathcal{J}^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

ϕ^0 sei die Fortsetzung von $\tilde{\epsilon} \circ \phi$ auf $\mathcal{I}^0$ ($\mathcal{J}^0$ ist injektiv). Zur Definition von ϕ^1 brauchen wir, dass $\tilde{d}^0 \circ \phi^0$ über $\mathcal{I}^0/\mathrm{Kern}\ d^0$ faktorisiert mit Kern $d^0 = \mathrm{Bild}\ \epsilon = \mathcal{F}$. Es ist aber $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Kern}\ \tilde{d}^0 \circ \phi^0$, da $\phi^0(\mathcal{F}) \subseteq \tilde{\epsilon}(\mathcal{G}) = \mathrm{Kern}\ \tilde{d}^0$. Die ϕ^i induzieren einen Morphismus $\Gamma(X, \mathcal{I}^0) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^0)$, wir erhalten also einen Morphismus von Komplexen $\mu : \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)$. Nach 12.5 induzieren diese Homomorphismen

$$\overline{\phi}_i : H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow H^i(\Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet) = H^i(X, \mathcal{G}).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\overline{\phi}_i$ nicht von der Wahl der ϕ^i abhängt. Seien also $\phi^i, \tilde{\phi}^i$ Fortsetzungen, ohne Einschränkung gelte $\phi = 0$, $\tilde{\phi}^i = 0$. Zu zeigen ist: Es gilt ebenfalls $\phi^i = 0$, das heißt, $\phi^\bullet$ induziert die Nullabbildung auf $H^\bullet(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$.

Beh. (a) Für $i \geqslant 1$ gibt es Homomorphismen $h^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$ mit

$$\phi^i = \tilde{d}^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i, \qquad \phi^0 = h^1 \circ d^0.$$

Wenden wir nun den Schnittfunktor $\Gamma(X, \cdot)$ auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "\phi^i"] & \mathcal{I}^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\
\mathcal{J}^{i-1} \arrow[r, "\tilde{d}^{i-1}"'] & \mathcal{J}^i &
\end{tikzcd}$$

an, so erhalten wir Homomorphismen

$$h^i : \Gamma(X, \mathcal{I}^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^{i-1})$$

mit derselben Eigenschaft (wobei alle Homomorphismen ihren Namen behalten haben). Sei nun $x \in H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$, also $x \in \text{Kern } \left(d^i : \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^{i+1})\right)$ Dann gilt

$$\phi^i(x) = \tilde{d}^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(d^i(x)) = \tilde{d}^{i-1}(h^i(x)) \in \text{Bild } \tilde{d}^{i-1}$$

und damit $\phi^i(x) = 0$ in $H^i(X, \mathcal{G}) = (\text{Kern } \tilde{d}^i) \big/ (\text{Bild } \tilde{d}^{i-1})$, was zu zeigen war.

Bew. (a) Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd, "\phi=0"'] & \mathcal{I}^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\phi^0"'] & & \mathcal{I}^1 \arrow[ddll, bend left, "h^1"] \\
& & & \mathcal{I}^0/\mathcal{F} \arrow[ur] \arrow[dl, "\overline{\phi}^0"'] & \\
& \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{J}^0 & &
\end{tikzcd}$$

Wegen $\phi = 0$ ist $\mathcal{F} = \text{Kern } d^0 \subseteq \text{Kern } \phi^0$, ϕ^0 faktorisiert also über $\mathcal{I}^0/\mathcal{F}$. Da $\mathcal{J}^0$ injektiv ist und $\mathcal{I}^0/\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^1$, existiert die Fortsetzung $h^1 : \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^0$ von $\overline{\phi}^0$ nach $\mathcal{I}^1$ und es gilt $\phi^0 = h^1 \circ d^0$. Betrachte nun für $i \geqslant 1$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}"] \arrow[d, "\phi^{i-2}"'] & \mathcal{I}^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[dl, "h^{i-1}"'] \arrow[d, "\phi^{i-1}"'] & \mathcal{I}^i \arrow[dl, "h^i"] \\
\mathcal{J}^{i-2} \arrow[r, "\tilde{d}^{i-2}"] & \mathcal{J}^{i-1} &
\end{tikzcd}$$

Setze $\tilde{\phi}^{i-1} = \phi^{i-1} - \tilde{d}^{i-2} \circ h^{i-1} : \mathcal{I}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$. Es gilt Kern $d^{i-1} =$ Bild d^{i-2}. Für $x \in \text{Kern } d^{i-1} = \text{Bild } d^{i-2}$, $x = d^{i-1}(y)$ gilt dann Kern $d^1 \subseteq\subseteq \tilde{\phi}^1$, wir erhalten also eine Fortsetzung $h^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$ von $\tilde{\phi}^1$ mit

$$h^i \circ d^{i-1} = \tilde{\phi}^{i-1} = \phi^{i-1} - \tilde{d}^{i-1} \circ h^{i-1},$$

was zu zeigen war.

(i) Folgt aus (ii) mit $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ und $\phi = \text{id}$.

(iii) Sei $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\underline{Ab}(X)$. Wähle injektive

Auflösungen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{I}'^{\bullet}, \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{I}''^{\bullet}$$

von $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$. betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{I}'^0 \arrow[r] \arrow[d, "\iota^1"'] & \mathcal{I}'^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\epsilon"'] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \mathcal{I}'^0 \bigoplus \mathcal{I}''^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}'^1 \bigoplus \mathcal{I}''^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d] & \mathcal{I}''^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}''^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{I}'^0$ injektiv ist und $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, gibt es $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}'^0$. ψ und $\epsilon'' \circ \pi$ induzieren gemeinsam $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}'^0 \bigoplus \mathcal{I}''^0$. ϵ ist injektiv, denn: Gilt $(\epsilon'' \circ \pi)(x) = 0$, so ist $\pi(x) = 0$, also $x \in \text{Kern } \pi = \text{Bild } \iota = \mathcal{F}'$, also

$$\epsilon(x) = \psi(\iota(x')) = \psi(x)$$

und damit, da ϵ' injektiv ist

$$\epsilon(x) = 0 \iff \iota^1(\psi(x)) = 0 \iff \psi(x) = \epsilon(x) = 0 \iff x = 0.$$

Per Induktion erhalten wir auf diese Weise eine "injektive Auflösung der kurzen exakten Sequenz". Wir wenden nun den globalen Schnittfunktor $\Gamma(X, \cdot)$ auf $\mathcal{I}'^{\bullet}, \mathcal{I}^{\bullet}, \mathcal{I}''^{\bullet}$ an und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in $\underline{\text{Ab}}$(Beachte: Das geht nun wegen der geeigneten Wahl von $\mathcal{I}^{\bullet}$ gut). Dazu gibt es nach 12.5 (iii) eine lange exakte Kohomologiesequenz. □

Bemerkung 12.17 *Folgende Verallgemeinerungen des Vorgehens in diesem Abschnitt sind möglich:*

(i) Es genügt, dass X ein topologischer Raum ist; die Schemastruktur ist nicht nötig.

(ii) Alles geht genauso für Objekte in einer beliebigen abelschen Kategorie mit genüend vielen injektiven Objekten $\mathcal{A}$ (statt Garben abelscher Gruppen auf X) und einem kovarianten, linksexakten Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ (statt dem globalen Schnittfunktor). Genauer heißt dies: Für $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ wähle eine injektive Auflösung $0 \longrightarrow A \longrightarrow I^{\bullet}$. Dann ist $F(I^{\bullet})$ ein

Komplex in $\mathcal{B}^\bullet$. Definiere

$$R^iF(A) := H^i(F(I^\bullet)).$$

Die R^iF sind Funktoren $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Sie heißen (rechts) abgeleitete Funktoren von F. Insbesondere gilt $R^0F = F$. Eine Auswahl an Kategorien mit genügend vielen Injektiven haben wir bereits kennengelernt. Weitere linksexakte Funktoren sind beispielsweise

(1) Die Hom-Funktoren. Die $R^i\mathrm{Hom}$ heißen auch Ext *und* Tor.

(2) Für Schemata X, Y und einem Schemamorphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist f_* linsexakt und kovariant. Die R^if_*heißen auch höhere direkte Bildgarben.

§ 13 Čech-Kohomologie

Definition + Bemerkung 13.1 Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe in $\underline{Ab}(X)$ sowie $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X.

(i) Für $k \geqslant 0$ ist

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0<\ldots<i_k} \mathcal{F}\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}\right)$$

eine abelsche Gruppe.

(ii) Für $k \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned} d^k : C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ (s_{i_0\ldots i_k})_{i_0<\ldots<i_k} &\mapsto \left(\sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^\nu s_{i_0\ldots i_{\nu-1} i_{\nu+1}\ldots i_{k+1}}|_{U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_{k+1}}}\right)_{i_0<\ldots<i_{k+1}} \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(iii) Es gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$ für alle $k \geqslant 0$, d.h. $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist ein Komplex.

(iv) Die Gruppe

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := H^k(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$$

heißt k-te Čechkohomologiegruppe von $\mathcal{F}$ bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{U}$.

(v) Es gilt $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Beweis. (iii) Durch Induktion über k:

$k = 0:$ Sei $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i) = C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dann gilt

$$d^0((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j})_{i<j}$$

und damit mit $U_{ijl} := U_i \cap U_j \cap U_l$

$$d^1\left(d^0((s_i)_{i\in\mathbb{N}})\right) = \left((s_l - s_j)|_{U_{ijl}} - (s_l - s_i)|_{U_{ijl}} + (s_j - s_i)|_{U_{ijl}}\right)_{i<j<l} = 0.$$

$k \geqslant 1:$ Sei nun $(s_{i_0\dots i_k})_{i_0<\dots<i_k} \in C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dann gilt mit $\tilde{U}_k := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$

$$(d^{k+1} \circ d^k)\left((s_{i_0\dots i_k})_{i_0<\dots<i_k}\right) = d^{k+1}\left(\left(\sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu s_{i_0\dots i_{\nu-1}i_{\nu+1}\dots i_{k+1}}\Big|_{\tilde{U}_{k+1}}\right)_{i_0<\dots<i_{k+1}}\right)$$

Die Vorzeichen kürzen sich weg und es bleibt $d^{k+1} \circ d^k = 0$.

(v) Es gilt $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Kern} d^0$. Weiter ist

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i).$$

Sei nun $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Kern} d^0$. Dann gilt

$$d^0((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (s_j - s_i|_{U_i\cap U_j})_{i<j} \overset{!}{=} 0.$$

Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, existiert ein eindeutiger globaler Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ mit $s_i = s|_{U_i}$, also $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Kern} d^0 \subseteq \mathcal{F}(U)$. Ist hingegen $s \in \mathcal{F}(U)$, so gilt selbstverständlich $(s|_{U_i})|_{U_i\cap U_j} - (s|_{U_j})|_{U_i\cap U_j} = 0$, also $s \in \operatorname{Kern} d^0$. □

Beispiel 13.2 Sei $X = \mathbb{S}^1$ sowie $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ die zur konstanten Prägarbe $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ assoziierte Garbe auf X. Sei durch $\mathfrak{U} := \{U_1, U_2\}$ mit

$$U_1 := \left\{(\cos u, \sin u) \;\middle|\; u \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right\}, \qquad U_2 := \left\{(\cos u, \sin u) \;\middle|\; u \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

eine offene Überdeckung von X gegeben. Dann hat $U_1 \cap U_2 = D_1 \,\dot{\cup}\, D_2$ zwei Zusammenhangskomponenten. Für den Čechkomplex erhalten wir

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0, \qquad \text{für } k \geqslant 0.$$

Für d^0 gilt

$$d^0 : \mathbb{Z}^2 = C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \qquad (a, b) \mapsto (b - a, b - a)$$

und damit Bild $(d^0) = \{(a,a) \in \mathbb{Z}^2\} = \Delta\mathbb{Z}$. Die Čechkohomologiegruppen ergeben sich dann zu

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(X) = \mathbb{Z},$$

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \text{Kern } d^1 \,/\text{Bild } d^0 = \mathbb{Z}^2/\Delta\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z},$$

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \text{für } k \geqslant 0.$$

Definiton + Proposition 13.3 Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$ sowie $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X.

(i) Für $k \geqslant 0$ sei

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_k} (\iota_{i_0\ldots i_k})_* \, \mathcal{F}|_{U_{i_0}\cap \ldots U_{i_k}},$$

wobei $\iota_{i_0\ldots i_k} : U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \hookrightarrow X$ die Inklusion ist. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist also

$$\Gamma\left(U, \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{i_0 < \ldots i_k} \mathcal{F}(U \cap U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}).$$

Insbesondere gilt für die globalen Schnitte

$$\Gamma\left(X, \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right) = C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

(ii) Definiere für $k \geqslant 0$ Garbenmorphismen

$$d^k : \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

wie in 13.1(ii) und erhalte dadurch ebenfalls einen Komplex $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

(iii) Definiere einen weiteren Garbenmorphismus $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ wie folgt: Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei ϵ_U der Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \epsilon_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma\left(U, \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U \cap U_i) \\ s &\longmapsto (s|_{U\cap U_i})_{i\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Dann ist ϵ wegen der Garbeneigenschaft ein Monomorphismus.

(iv) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \ldots$$

ist exakt, also eine Auflösung von $\mathcal{F}$.

Beweis. (iv) Zeige zunächst die Exaktheit bei $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Sei $U \subseteq X$ offen, $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Gamma\left(U, \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right)$.

Dann gilt $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \text{Kern } d^0$ genau dann, wenn gilt $s_i|_{U\cap U_i\cap U_j} = s_j|_{U\cap U_i\cap U_j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, gibt es einen eindeutigen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = s|_{U\cap U_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, das heißt es gilt $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = \epsilon_U(s)$ und damit im Bild von ϵ, also Kern $d^0 =$ Bild ϵ, was die Exaktheit an dieser Stelle bedeutet. Sei nun $k \geqslant 1$ beliebig. Es genügt, die Exaktheit halmweise zu zeigen. Sei also $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_j$.

Beh. (a) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$h_x^k : \mathcal{C}_x^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_x^{k-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

mit $d_x^{k-1} \circ h_x^k + h_x^{k+1} \circ d_x^k = \text{id}$.

Dann gilt für $\overline{s} \in \text{Kern } d_x^k$

$$\overline{s} = \text{id}(\overline{s}) = d_x^{k-1}(h_x^k(\overline{s})) + h_x^{k+1}(d_x^k(\overline{s})) = d_x^{k-1}(h_x^k(\overline{s})) \in \text{Bild } d_x^{k-1},$$

also Kern $d_x^k \subseteq$ Bild d_x^{k-1}. Wegen $d_x^k \circ d_x^{k-1} = 0$ folgt dann bereits Kern $d_x^k =$ Bild d_x^{k-1}, das heißt, der Komplex ist exakt. Es bleibt noch die Behauptung zu zeigen.

Bew. (a) Sei $\overline{s} \in \mathcal{C}_x^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, das heißt es ist $\overline{s} = [(V, s)]$ mit $V \subseteq U_j$ und $s = (s_{i_0\ldots i_k})_{i_0<\ldots<i_k} \in \mathcal{F}(V \cap U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k})$. Sei weiter

$$t_{i_0\ldots i_{k-1}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } j \in \{i_0, \ldots i_{k-1}\} \\ (-1)^\nu s_{i_0,\ldots i_{\nu-1},j,i_\nu,\ldots i_{k-1}}, & \text{falls } i_{\nu-1} < j < i_\nu. \end{cases}$$

Setze nun

$$h_x^k(\overline{s}) := \left[(V, (t_{i_0,\ldots,i_{k-1}})_{i_0<\ldots i_{k-1}}\right]$$

und zeige, dass der so definierte Homomorphismus h_x^k die gewünschte Eigenschaft erfüllt (Übung). □

Folgerung 13.4 *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{A}b}(X)$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X sowie $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es für jedes $k \geqslant 0$ einen natürlichen Homomorphismus*

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Sei $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\text{id}"] & \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[d, "\phi^\bullet"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{I}^\bullet \end{tikzcd}$$

Nach Übungsaufgabe 10.2 gibt es einen Morphismus von Komplexen $\phi^\bullet : \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$, welcher auf $\mathcal{F}$ die Identität induziert. Anwenden des globalen Schnittfunktors liefert die gewünschten Gruppenhomomorphismen.

§ 14 Kohomologie quasikohärenter Garben

Definition 14.1 Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. $\mathcal{F}$ heißt *welk*, falls für alle offenen Teilmengen $U \subseteq V \subseteq X$ die Restriktionsabbildung $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist.

Beispiel 14.2 Sei X ein topologischer Raum.

(i) Sei $x \in X$ sowie A eine abelsche Gruppe. Dann ist die Wolkenkratzergarbe

$$x_*(A)(U) := \begin{cases} A, & \text{falls } x \in U \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

welk.

(ii) Ist X irreduzibel, so ist jede Konstante Garbe auf X welk.

Proposition 14.3 *Sei* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* $\underline{Ab}(X)$.

(i) Ist $\mathcal{F}'$ *welk, so ist für jede offene Teilmenge* $U \subseteq X$ *die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

exakt, das heißt β_U *ist surjektiv.*

(ii) Sind $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{F}'$ *welk, so ist auch* $\mathcal{F}''$ *welk.*

Beweis. (i) Sei $s'' \in \mathcal{F}''(U)$ und zeige: Es gibt ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\beta_U(s) = s''$. Da β ein Epimorphismus ist, gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\beta_{U_i}(s_i) = s''|_{U_i}$. Definiere nun

$$\Phi := \{(V, s) \mid V \subseteq U \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } (\beta_U)|_V = \beta_V(s) = s''|_V\}$$

Wegen $(U_i, s_i) \in \Phi$ ist Φ nichtleer. Außerdem ist Φ durch

$$(V, s) \leqslant (V', s') :\Longleftrightarrow V \subseteq V' \text{ und } s'|_V = s$$

halbgeordnet und für jede aufsteigende Kette $(V_1, s_1) \leqslant (V_2, s_2) \leqslant \ldots$ in Φ ist durch

$$V := \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

sowie der Verklebung der s_i (Garbeneigenschaft) eine obere Schranke gegeben. Zorns Lemma liefert also die Existenz eines maximalen Elements $(U_0, s_0) \in \Phi$.

Beh. (a) Es gilt $U_0 = U$.

Bew. (a) Angenommen es gelte $U_0 \subsetneq U$. Dann wähle $x \in U \backslash U_0$ sowie $(V, s_1) \in \Phi$ mit $x \in V$. Dann gilt

$$s_1|_{U_0 \cap V} - s_0|_{U_0 \cap V} \in \text{Kern } \beta_{U_0 \cap V} = \text{Bild } \alpha_{U_0 \cap V},$$

das heißt es gibt ein $s' \in \mathcal{F}(U_0 \cap V)$ mit

$$\alpha(s')|_{U_0 \cap V} = (s_1 - s_0)|_{U_0 \cap V}.$$

Da $\mathcal{F}'$ welk ist, gilt sogar $s' \in \mathcal{F}(V)$. Damit stimmen $s_1 - \alpha(s')$ und s_0 auf $U_0 \cap V$ überein, es gibt also $s \in \mathcal{F}(U_0 \cap V)$ mit $s|_{U_0} = s_0$, $s|_V = s_1 - \alpha(s')$ und $\beta_{U_0 \cap V}(s) = s''|_{U_0 \cup V}$. Damit ist $(U_0, s_0) < (U_0 \cup V, s) \in \Phi$, ein Widerspruch zur Maximalität von (U_0, s_0).

Damit gilt $\beta_U(s) = s''$ und β_U ist surjektiv, was zu zeigen war.

(ii) Seien $\tilde{U} \subseteq U$ offen in X und $\tilde{s}'' \in \mathcal{F}''(\tilde{U})$. Nach (i) gibt es $\tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ mit $\beta_{\tilde{U}}(\tilde{s}) = \tilde{s}''$. Da $\mathcal{F}$ welk ist, gibt es $s \in \mathcal{F}(U)$ mit ${}_{\mathcal{F}}\rho^U_{\tilde{U}}(s) = \tilde{s}$. Dann gilt für $s'' := \beta_U(s) \in \mathcal{F}''(U)$:

$${}_{\mathcal{F}''}\rho^U_{\tilde{U}}(s'') = \beta_{\tilde{U}}({}_{\mathcal{F}}\rho^U_{\tilde{U}}(s)) = \beta_{\tilde{U}}(\tilde{s}) = \tilde{s}'',$$

das heißt $\rho^U_{\tilde{U}}$ ist surjektiv, was zu zeigen war. □

Definition 14.4 Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf U. Ist $\iota : U \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist die *durch Null fortgesetzte Garbe* $\iota_!(\mathcal{F})$ die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{falls } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assozierte Garbe auf X.

Proposition 14.5 *Ein $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, $\mathcal{I}$ eine injektive $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Dann ist $\mathcal{I}$ welk.*

Beweis. Seien $U' \subseteq U \subseteq X$ offen in X. Zu zeigen: Die Restriktionsabbildung $\rho^U_{U'} : \mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{I}(U')$ ist surjektiv. Es gilt

$$\mathcal{I}(U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{I}|_U),$$

denn: Ein Garbenmorphismus $\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{I}$ wird eindeutig durch $\phi(1)$ bestimmt. Fasse nun $\mathcal{O}_X|_{U'}$ als Untergarbe von $\mathcal{O}_X|_U$ auf. Sei dazu $\mathcal{O}_U := \iota_! \mathcal{O}_X|_U$; dann gilt $\mathcal{O}_{U'} \subseteq \mathcal{O}_U$. Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{U'}, \mathcal{I}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}).$$

Insbesondere ist also

$$\rho^U_{U'} : \mathcal{I}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{U'}, \mathcal{I}) = \mathcal{I}(U')$$

surjektiv, was zu zeigen war. □

Proposition 14.6 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine welke $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Dann Ist $\mathcal{F}$ azyklisch, das heißt es gilt*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle $i \geqslant 1$.

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ eine injektive $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ und setze $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$. Wir erhalten damit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Nach 14.5 ist $\mathcal{I}$ welk, nach 14.3 ist also auch $\mathcal{G}$ welk. Die lange exakte Kohomologiesequenz ist

$$0 \to \mathcal{F}(X) \overset{\alpha_0}{\to} \mathcal{I}(X) \overset{\beta_0}{\to} \mathcal{G}(X) \overset{\delta^0}{\to} H^1(X, \mathcal{F}) \overset{\alpha_1}{\to} H^1(X, \mathcal{I}) \overset{\beta_1}{\to} H^1(X, \mathcal{G}) \overset{\delta^1}{\to} H^2(X, \mathcal{F}) \overset{\alpha_2}{\to} \dots$$

Nach 14.2 (i) ist β_0 surjektiv, also Kern $\delta^0 =$ Bild $\beta_0 = \mathcal{G}(X)$. Damit ist Kern $\alpha_1 =$ Bild $\delta^0 = 0$, α_1 ist also injektiv. Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, also $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ für $i \geqslant 1$. Dann folgt aber bereits $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Mit gleichem Argument gilt auch $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Iterativ folgt damit die Behauptung. □

Proposition 14.7 *Sei $X = \mathrm{Spec}\, R$ ein affines noethersches Schema, I ein injektiver R-Modul. Dann ist $\tilde{I}$ welk.*

Beweis. Da aus der Surjektivität von $\rho^X_{U'} = \rho^U_{U'} \circ \rho^X_U$ für $U' \subseteq U \subseteq X$ bereits die Surjektivität von

$\rho^U_{U'}$ folgt, genügt es zu zeigen, dass für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ die Restriktionsabbildung

$$\rho^X_U : \tilde{I}(X) = I \longrightarrow \tilde{I}(U)$$

surjektiv ist. Sei dazu zunächst $U = D(f)$ für ein $f \in R$. Dann ist

$$\tilde{I}(U) = \tilde{I}(D(f)) = I_f = I \otimes_R R_f.$$

Sei also $\frac{b}{f^n} \in I_f$ mit $b \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$ und zeige, dass es ein $a \in I$ gibt mit

$$\rho^X_{D(f)}(a) = \frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$$

in I_f, also $f^m\left(f^n a - b\right) = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ sei nun die R-lineare Abbildung

$$\phi_m : R \longrightarrow \left(f^{m+n}\right), \qquad 1 \mapsto f^{m+n}$$

gegeben. Dann gilt für den Kern

$$\text{Kern } \phi_m = \text{Ann}(f^{m+n}) = \{r \in R \mid r f^{m+n} = 0\} \subset R.$$

Außerdem gilt $\text{Ann}(f^k) \subseteq \text{Ann}(f^{k+1})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da R noethersch ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\text{Ann}(f^m) = \text{Ann}(f^{m+1}) = \ldots = \text{Ann}(f^{m+n}) = \ldots,$$

das heißt es gilt Kern $\phi_m = \text{Ann}(f^m)$. Mit dem Homomorpiesatz ist

$$R/\text{Ann}(f^m) \cong (f^{m+n})$$

als R-Moduln. Sei nun durch

$$\psi : R \longrightarrow I, \qquad 1 \mapsto f^m b$$

eine weitere R-lineare Abbildung definiert. Dann gilt $\text{Ann}(f^m) \subseteq \text{Kern } \psi$, ψ induziert also

$$\overline{\psi} : R/\text{Ann}(f^m) \cong \left(f^{m+n}\right) \longrightarrow I.$$

I ist injektiv, wir können $\overline{\psi}$ also fortsetzen zu $\tilde{\overline{\psi}} : R \longrightarrow I$. Setze nun $a := \tilde{\overline{\psi}}$. Dann gilt

$$f^m b = \psi(1) = \overline{\psi}(f^{m+n}) = \tilde{\overline{\psi}}(f^{m+n} \cdot 1) = \tilde{\overline{\psi}}(f^{n+m})\tilde{\overline{\psi}} = f^{m+n} a,$$

woraus also die Behauptung für den fall $U = D(f)$ folgt. Sei nun U beliebig. Sei $f \in R$ mit

$D(f) \subseteq U$ und $t \in \tilde{I}(U)$. Dann gibt es nach dem Spezialfall ein $s \in I$ mit $s|_{D(f)} = t|_{D(f)}$. Damit gilt

$$\operatorname{Supp}(s-t) \subseteq \operatorname{Supp}(\tilde{I}) \cap \operatorname{Supp}(U \backslash D(f)).$$

Zeige nun die Behauptung durch Induktion über $\dim \operatorname{Supp}(\tilde{I}) =: n$: Für $n = 0$ ist $\tilde{I}$ eine Wolkenkratzergarbe (bzw. eine Summe von Wolkenkratzergarben) und damit welk. Den Fall $n \geqslant 1$ wollen wir nicht diskutieren - allerdings sei an dieser Stelle ein algebraischer Import bemerkt: Der R-Modul $J \subseteq I$, der von den Elementen mit Träger in $\overline{\operatorname{Supp}(\tilde{I})} \backslash D(f)$ ist injektiv. □

Folgerung 14.8 *Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein noethersches, affines Schema und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Dann gilt für alle $i \geqslant 1$*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Beweis. Sei also $\mathcal{F} = \tilde{F}$ für den R-Modul $F = \mathcal{F}(X)$ sowie

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^\bullet$$

eine injektive Auflösung von F in $\underline{R\text{-Mod}}$. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow \tilde{I}^\bullet$$

ebenfalls exakt, wir haben also eine Auflösung von $\mathcal{F}$ durch welke, also azyklische Garben. Damit gilt nach 12.6 und wegen der Exaktheit

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \tilde{I}^\bullet)) = H^i(I^\bullet) = 0$$

für $i \geqslant 1$, was zu zeigen war. □

Folgerung 14.9 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema. Dann lässt sich jede quasikohärente Garbe auf X in eine welke, quasikohärente Garbe einbetten.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ quasikohärent und $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ eine offene Überdeckung von X durch affine, noethersche Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$. Nach Voraussetzung gibt es R_i-Moduln M_i mit $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. Bette nun M_i in injektive R_i-Moduln I_i für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ ein. Nach 14.5 ist die dazu gehörige quasikohärente Garbe $\tilde{I}_i$ welk. Man sieht leicht, dass auch das direkte Bild $\iota_{i*}(\tilde{I}_i)$ für die Inklusion $\iota_i : U_i \hookrightarrow X$ welk ist. Setze nun

$$\rho_i : \tilde{M}_i = \mathcal{F}|_{U_i} \hookrightarrow \tilde{I}_i$$

und

$$\rho : \mathcal{F} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \iota_{i*}(\tilde{I}_i)$$

Dann ist ρ eine Einbettung von $\mathcal{F}$ in eine injektive, quasikohärente Garbe, woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 14.10 *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$ welk und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt für alle $i \geqslant 1$*

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ welk ist für alle $k \geqslant 0$, falls $\mathcal{F}$ welk ist. Ist $\mathcal{F}$ welk, so ist auch die Einschränkung $\mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}$ welk für alle $i_0 < \ldots < i_k$. Weiter ist für stetige Abbildungen auch das direkte Bild $f_* \mathcal{F}$ welk, es ist also $(\iota_{i_0 \ldots i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}$ welk. Damit ist auch das direkte Produkt

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_k} (\iota_{i_0 \ldots i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}$$

welk. Wählen wir nun mit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

eine Auflösung von $\mathcal{F}$, so gilt nach 14.6

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^i(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = H^i\left(\Gamma\left(X, \mathcal{C}^\bullet\left(\mathfrak{U}, \mathcal{F}\right)\right)\right) = H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle $i \geqslant 1$, was zu zeigen war. □

Lemma 14.11 *Sei X noethersches separiertes Schema und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene, affine Überdeckung von X. Dann gibt es auch für die Čechkohomologie eine lange exakte Sequenz.*

Beweis. Sei also eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ quasikohärenter Garben gegeben. Da X separiert ist, ist $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ affin für alle $i_0 < \ldots < i_k$. Nach 14.6 gilt also

$$H^i\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}, \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}\right) = 0$$

für alle $i \geqslant 1$, das heißt die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}\right) \longrightarrow \mathcal{G}\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}\right) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Produktbildung liefert exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}(U_i) \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}(U_i) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \prod_{i<j\in} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{i<j} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{i<j} \mathcal{H}(U_i \cap U_j) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \prod_{i_0<\ldots<i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}) = C^k(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^k(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0,$$

also eine exakte Sequenz von Komplexen. Dazu gibt es aber eine lange exakte Sequenz, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 14.12 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches, separiertes Schema, $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X und $\mathfrak{U}$ eine offene, affine Überdeckung von X. Dann gilt für alle $i \geqslant 1$*

$$H^i(X,\mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über i.

$i = 0:$ Klar, denn es gilt $H^0(\mathcal{F}, X) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X,\mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

$i \geqslant 0:$ Bette $\mathcal{F}$ in eine welke, quasikohärente Garbe $\mathcal{G}$ ein und setze $\mathcal{H} := \mathcal{G}/\mathcal{F}$. Dann ist auch $\mathcal{H}$ quasikohärent und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

ist exakt. Damit gibt es eine lange, exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \ldots$$

und wegen $H^i(X,\mathcal{G}) = 0$ für alle $i \geqslant 1$ wir diese zu

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0 \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to 0 \to \ldots$$

da diese exakt ist, folgt daraus

$$H^i(X,\mathcal{H}) \cong H^{i+1}(X,\mathcal{F})$$

für alle $i \geqslant 1$. Nach Lemma 14.11 gibt es für die Čechkohomologie ebenfalls eine lange exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \to \check{H}^2(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \ldots$$

welche zu

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to 0 \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \to \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to 0 \to \dots$$

wird. Auf gleiche Weise erhalten wir $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \cong \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Damit gilt

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \big/ \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \cong H^0(X, \mathcal{H}) \big/ H^0(X, \mathcal{G}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$$

und

$$\check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \cong H^1(X, \mathcal{H}) \cong H^2(X, \mathcal{F}).$$

Iterativ folgt damit die Behauptung. □

Beispiel 14.13 Sei $X = \mathbb{A}_k^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$ mit $U_1 = D(x), U_2 = D(y)$ eine offene Überdeckung von X sowie $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}|_{\mathbb{A}_k^2 \backslash \{(0,0)\}}$ die Strukturgarbe. Dann ist

$$\check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2) = k[X,Y]_X \oplus k[X,Y]_Y$$

$$\check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}_X(D(XY)) = k[X,Y]_{XY}.$$

Weiter ist

$$d^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X), \qquad \left(\frac{f}{X^i}, \frac{g}{Y^j}\right) \mapsto \frac{g}{Y^j} - \frac{f}{X^i}$$

Damit ist

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \big/ d^0(\check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X))$$

der von den $\frac{1}{X^i Y^j}$ für $i, j \geqslant 1$ erzeugte unendlichdimensionale k-Vektorraum.

§ 15 Kohomologie auf projektiven Schemata

Erinnerung + Bemerkung 15.1 Sei $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ ein graduierter, kommutativer Ring mit Eins. Definiere

$$\operatorname{Proj} S := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S \mid \mathfrak{p} \text{ ist homogen mit } S_+ \not\subset \mathfrak{p}\},$$

wobei $S_+ := \bigoplus_{d=1}^{\infty} S_d$ das irrelevante Ideal von S ist. Die Menge $\operatorname{Proj} S$ wird *homogenes Spektrum von S* genannt. Für ein homogenes Ideal $I \subset S$ setzen wir

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

Wir erhalten damit auf $\operatorname{Proj} S$ eine Topologie, die Zariski-Topologie, indem wir $V(I)$ als abgeschlossen definieren. Für homogenes Elemente $f \in S$ bilden die Mengen

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

eine Basis der Topologie. Die Strukturgarbe auf $\operatorname{Proj} S$ erhalten wir durch Fortsetzen von

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f)) := S_{(f)} := \left\{\frac{s}{f^n} \mid s \in S,\ n \in \mathbb{N},\ \deg s = n \deg f\right\}$$

zu einer Garbe auf $\operatorname{Proj} S$, wobei $f \in S$ homogen ist. Damit wird $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ zu einem lokal geringten Raum und wir schreiben $\operatorname{Proj} S$ statt $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$. Mit

$$\left(D_+(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}|_{D_+(f)}\right) \cong \left(\operatorname{Spec} S_{(f)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}\right)$$

erhalten wir eine affine Überdeckung von $\operatorname{Proj} S$, wodurch $\operatorname{Proj} S$ also zum Schema wird. Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, so ist der lokale Ring in $\mathfrak{p}$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S, \mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})} = \left\{\frac{s}{r} \mid s, r \in S \text{ homogen},\ r \notin \mathfrak{p},\ \deg r = \deg s\right\}.$$

Sei nun $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein graduierter S-Modul.

(i) M bestimmt eine Garbe $\tilde{M}$ auf $\operatorname{Proj} S$ durch

$$\tilde{M}(D_+(f)) = M_{(f)} = \left\{\frac{m}{f^n} \mid m \in M \text{ homogen },\ \deg m = n \deg f\right\}.$$

Für jedes homogene $f \in S$. Insbesondere ist

$$\Gamma(X, \tilde{M}) = \tilde{M}(X) = M_0.$$

(ii) Für die Halme gilt $\tilde{M}_x = M_{(\mathfrak{p})}$ für $x = \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$.

Bemerkung 15.2 *Sei R ein noetherscher Ring, $S = R[X_0, \ldots, X_n]$, $S = \operatorname{Proj} S =: \mathbb{P}^n_R$. Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$ Modulgarbe auf X, so gibt es einen graduierten, endlich erzeugten S-Modul M, sodass gilt $\mathcal{F} = \tilde{M}$.*

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 9.3. □

Definition + Bemerkung 15.3 Sei $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty}$ ein graduierter, kommutativer Ring mit Eins und $X = \operatorname{Proj} S$.

(i) Es gilt $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$.

(ii) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $S(n) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S(n)_d$ der graduierte S-Modul mit getwisteter Graduierung

$$S(n)_d = S_{d+n}.$$

(iii) $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$ heißt die *n-fach getwistete Strukturgarbe.*

(iv) Ist $S = R[X_0, \dots, X_n]$, so ist

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) = S(1)_0 = S_1$$

der freie R-Modul mit Basis $X_0, \dots, X_n$. Allgemeiner ist

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = S(d)_0 = S_d$$

der freie R-Modul erzeugt von den Monomen von Grad d, das heißt die

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} d_i = d \right\}$$

bilden eines Basis. Insbesondere gilt damit für alle $d < 0$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

Bemerkung 15.4 *Sei R ein noetherscher Ring und $X \subseteq \mathbb{P}^n_R$ ein abgeschlossenes Unterschema sowie $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ die Einbettung. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, so gilt*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{F})$$

für alle $i \geqslant 0$.

Beweis. Ist $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$ eine welke Auflösung. Dann ist $0 \longrightarrow j_*\mathcal{F} \longrightarrow j_*\mathcal{J}^\bullet$ eine welke Auflösung von $j_*\mathcal{F}$. Aus $\Gamma(X, \mathcal{J}^k) = \Gamma(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{J}^k)$ folgt dann $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{F})$, was zu zeigen war. □

Satz 15.5 *Sei R ein noetherscher Ring, $n \geqslant 1$, $S = R[X_0, \dots, X_n]$ und $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R})$.*

(i) Es gilt für die n-te Kohomologiegruppe der Garbe $\mathcal{O}_X(-n-1)$

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \cong R.$$

(ii) Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es eine natürliche, bilineare Abbildung

$$\beta : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) \longrightarrow R.$$

Diese ist eine nicht ausgeartete Paarung zwischen freien R-Moduln von endlichem Rang.

(iii) *Für alle $i \notin \{0, n\}$ und alle $d \in \mathbb{Z}$ ist*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

Beweis. (i) Sei $U_i = D(X_i)$ und $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$ die kanonische Überdeckung von X durch affine, offene Teilmengen. Nach 14.9 gilt dann

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d))$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{Z}$. Damit folgt sofort

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$$

für alle $i \geqslant n+1$ und $d \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten nun den Čech-Komplex an der n-ten Stelle:

$$\dots \xrightarrow{d^{n-2}} \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n) \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n) \xrightarrow{d^n} 0 \to \dots$$

Es gilt

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d)) = \text{Kern } d^n / \text{Bild } d^{n-1}.$$

Es ist zum einen

$$\begin{aligned} \text{Kern } d^n &= \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n) \\ &= \mathcal{O}_X(d)(D(X_0 \cdots X_n)) \\ &= R[X_0, \dots, X_n]_{(X_0 \cdots X_n)} \\ &= \left\{ \frac{f}{X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}} \;\middle|\; f \in S] \text{ homogen, } \deg f = d + \sum_{i=0}^{n} d_i \right\} \end{aligned}$$

der freie R-Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \;\middle|\; d_i \in \mathbb{Z}, \; \sum_{i=0}^{n} d_i = d \right\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left(\check{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d))\right)_i &= \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n) \\ &= \mathcal{O}_X(d)(D(X_0 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_n)) \\ &= \left\{ \frac{f}{X_0^{d_0} \cdots X_{i-1}^{d_{i-1}} X_{i+1}^{d_{i+1}} \cdots X_n^{d_n}} \;\middle|\; f \in S \text{ homogen, } \deg f = d + \sum_{i=0}^{n} d_i \right\} \end{aligned}$$

der freie R-Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \;\middle|\; d_j \in \mathbb{Z},\ \sum_{j=0}^{n} d_j = d,\ d_j \geqslant 0 \right\}.$$

Damit sehen wir ein:

$$X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \in \operatorname{Bild} d^{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad d_i \geqslant 0 \text{ für ein } 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Daraus folgt: Ist $d \geqslant -n$, so ist d^{n-1} surjektiv, es gilt also

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

Ist $d = -n-1$, so folgt $d_i = -1$ für alle $0 \leqslant i \leqslant n$, es ist also

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) = \left\langle \frac{1}{X_0 \cdots X_n} \right\rangle_{R-\mathrm{Mod}}$$

ein freier R-Modul von Rang 1, woraus die Behauptung folgt.

(ii) Ist $d < 0$, so haben wir oben gesehen, dass d^{n-1} surjektiv ist, denn aus

$$\sum_{j=0}^{n} d_j = -d-n-1 > -n-1$$

folgt $d_j \geqslant 0$ für ein $0 \leqslant j \leqslant n$ und damit $X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \in \operatorname{Bild} d^{n-1}$. Damit ergibt sich

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) = 0.$$

Sei nun also $d \geqslant 0$. Dann wird $H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$ als R-Modul frei erzeugt von den $X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$ mit $\sum_{j=0}^n \nu_j = d$ und $\nu_j \geqslant 0$ für alle $0 \leqslant \nu \leqslant n$ (das sind die gewöhnlichen Monome von Grad d). Wie oben bereits gesehen, wird $H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1))$ als R-Modul frei erzeugt von den $X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}$ mit $\sum_{j=0}^n \mu_j = -d-n-1$ und $\mu_j < 0$ für alle $0 \leqslant j \leqslant n$. Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) &\longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \cong R \\ (X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n},\ X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\nu_n}) &\longmapsto X_0^{\mu_0+\nu_0} \cdots X_n^{\mu_n+\nu_n} \end{aligned}$$

β ist wohldefiniert, denn die Summe der Exponenten ist gerade $-n-1$. Sicherlich ist β bilinear. Es bleibt noch zu zeigen, dass β nicht ausgeartet ist, für jede Wahl von $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ und $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $\sum_{j=0}^n \nu_j = d$ und $\nu_j \geqslant 0$ für alle $0 \leqslant j \leqslant n$ bzw. $\sum_{j=0}^n \mu_j = -d-n-1$ und $\mu_j < 0$ für alle $0 \leqslant j \leqslant n$ also die Abbildungen

$$\beta_1 : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)), \qquad s \mapsto \beta\,(s, X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n})$$

$$\beta_2 : H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)), \qquad s \mapsto \beta\,(X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}, s)$$

nicht die Nullabbildungen sind. Das folgt aus

$$\beta_1\left(X_0^{-\mu_0-1}\cdots X^{-\mu_n-1}\right)=\beta\left(X_0^{-\mu_0-1}\cdots X^{-\mu_n-1},\ X_0^{\mu_0}\cdots X^{\mu_n}\right)=\frac{1}{X_0\cdots X_n}\neq 0,$$

$$\beta_2\left(X_0^{-\nu_0-1}\cdots X^{-\nu_n-1}\right)=\beta\left(X_0^{\nu_0}\cdots X^{\nu_n},\ X_0^{-\nu_0-1}\cdots X^{-\nu_n-1}\right)=\frac{1}{X_0\cdots X_n}\neq 0.$$

(iii) Aus den Überlegungen in (i) wissen wir, dass $H^i(X,\mathcal{O}_X(d))=0$ für alle $i\geqslant n+1$, wir nehmen also $0<i\leqslant n-1$ an. Man überlegt sich leicht, dass jedes Element in $H^i(X,\mathcal{O}_X(d))$ von einem Tupel von Linearkombinationen von Monomen der Form $X_{j_0}^{\nu_0}\cdots X_{j_i}^{\nu_i}$ mit $\sum_{l=0}^i \nu_l = d$ und $\nu_l<0$ für alle $0\leqslant l\leqslant i$ repräsentiert wird.

Beh. (a) Für jedes $k\in\{0,\dots,n\}$ ist die Multiplikation mit X_k

$$\mu_i: H^i(X,\mathcal{O}_X(d))\longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_X(d+1)),\qquad s\mapsto X_k s$$

ein Isomorphismus.

Dann folgt: Ist $X_{j_0}^{\nu_0}\cdots X_{j_i}^{\nu_i}\in H^i(X,\mathcal{O}_X(d))$, so multiplizieren wir mit $X_{j_0}^{-\nu_0}$ und erhalten

$$X_{j_0}^{-\nu_0}\left(X_{j_0}^{\nu_0}\cdots X_{j_i}^{\nu_i}\right)=X_{j_1}^{\nu_1}\cdots X_{j_i}^{\nu_i}=0$$

in $H^i(X,\mathcal{O}_X(d-\nu_0))$. Mit Behauptung (a) folgt dann, dass bereits $X_{j_0}^{\nu_0}\cdots X_{j_i}^{\nu_i}=0$ in $H^i(X,\mathcal{O}_X(d))$ gilt, also $H^i(X,\mathcal{O}_X(d))=0$, was zu zeigen war. Wir müssen nun noch die Behauptung (a) zeigen.

Bew. (a) Sei ohne Einschränkung $k=n$. Wir haben eine exakte Sequenz von graduierten S-Moduln

$$0\longrightarrow S(d)\xrightarrow{\cdot X_n} S(d+1)\longrightarrow S(d+1)/X_nS(d)\longrightarrow 0\quad(*)$$

mit

$$S(d+1)/X_nS(d)\cong (S/X_nS)(d+1)\cong R[X_0,\dots,X_{n-1}](d+1).$$

Diese liefert eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_X(d)\longrightarrow \mathcal{O}_X(d+1)\longrightarrow \mathcal{O}_X(d+1)/X_n\mathcal{O}_X(d)\longrightarrow 0\quad(**)$$

von Garben. Ist $j: Z:=V(X_n)\cong\mathbb{P}_R^{n-1}\hookrightarrow\mathbb{P}_R^n=X$ die Einbettung, so erhalten wir

$$\mathcal{O}_X(d+1)/X_n\mathcal{O}_X(d)\cong j_*\mathcal{O}_Z(d+1).$$

Wir zeigen die Behauptung nun durch Induktion über n. Ist $n=1$, so ist wegen $0<i\leqslant 0$ ist nichts zu zeigen, sei also $n\geqslant 2$. Nach Bemerkung 15.4 gilt $H^i(\mathbb{P}_R^{n-1},\mathcal{F})=H^i(X,j_*\mathcal{F})$ für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf Z. Wir betrachten nun die lan-

ge exakte Kohomologiesequenz zu (**):

$$\begin{aligned} \ldots \to H^{i-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\to H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_i} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\to H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \to \ldots \qquad (***) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant n-2$, also

$$H^{i-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0 = H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$$

für $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann wird die Sequenz zu

$$\ldots \to 0 \to H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_i} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \to 0 \to \ldots$$

und da sie noch exakt ist folgt

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \overset{\mu_i}{\cong} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1))$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Es bleiben noch die Fälle $i \in \{1, n-1\}$ zu betrachten.

$i = 1:$ Wir betrachten (***) an der richtigen Stelle:

$$\begin{aligned} \ldots \to H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_1} H^1(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\to H^1(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \to \ldots \end{aligned}$$

dies entspricht aber gerade der Sequenz (*), also ist α die Nullabbildung und μ_1 somit injektiv. Für $n \geqslant 3$ ist außerdem $H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$, woraus die Surjektivität von μ_1 für $n \geqslant 3$ folgt. Für $n = 2$ betrachte den Fall $i = n-1$.

$i = n-1:$ Wir betrachten nun also

$$\begin{aligned} \ldots \to H^{n-2}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\xrightarrow{\alpha} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_{n-1}} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\to H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \to \ldots \end{aligned}$$

Für $n \geqslant 3$ ist $H^{n-2}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$, also μ_{n-1} injektiv. Für $n = 2$ betrachte den Fall $i = 1$. Zeige nun noch die Surjektivität von μ_{n-1}.

Wir haben die Sequenz

$$\begin{aligned} \ldots \to H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d)) &\xrightarrow{\mu_{n-1}} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\xrightarrow{\alpha_{n-1}} H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \\ &\xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X, \mathcal{O}_X(d)) \\ &\xrightarrow{\mu_n} H^n(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

μ_{n-1} ist surjektiv genau dann, wenn α_{n-1} die Nullabbildung ist, was wiederum äquivalent dazu ist, dass δ^{n-1} injektiv ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{Rang}\left(\text{Bild } \delta^{n-1}\right) = \operatorname{Rang}\left(H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))\right)$$

(als freie R-Moduln). Dies können wir zeigen: Es ist $H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$ der freie R-Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{\nu_0} \cdots X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j = d+1,\ \nu_j < 0 \text{ für alle } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \right\}.$$

Weiter gilt wegen der Exaktheit der Sequenz Bild $\delta^{n-1} =$ Kern μ_n und Kern μ_n ist der frei erzeugte R-Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{\mu_0} \cdots X_{n-1}^{\mu_{n-1}} X_n^{-1} \;\middle|\; \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \right) - 1 = d,\ \mu_j < 0 \text{ für alle } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \right\}.$$

Damit folgt offenbar Kern $\mu_n = H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$, und rückwärts lesen liefert die Surjkektivität von μ_{n-1}, was zu zeigen war. □

Proposition 15.6 *Sei R ein noetherscher Ring, $X \subseteq \mathbb{P}_R^n$ ein projektives Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $d \geqslant d_0$ die getwistete Garbe $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, es also $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$ gibt, sodass für alle $x \in X$ die Keime $(s_1)_x, \ldots, (s_r)_x$ den Halm $\mathcal{F}(d)_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul erzeugen.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $X = \mathbb{P}_R^n$. Überdecke $\mathbb{P}_R^n$ durch $D(X_i)$ für $0 \leqslant i \leqslant n$. Nach Voraussetzung gibt es endlich erzeugte Moduln $M_i = \mathcal{F}(U_i)$ über $\mathcal{O}_X(U_i) \cong R\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]$, sodass gilt $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. Sei nun i fest und $s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k_i}}$ Erzeuger von M_i als $R\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]$-Modul. Dann wird für jedes $x \in \mathbb{P}_R^n$ mit $x \in U_i$ der Halm $\mathcal{F}_x = (\tilde{M}_i)_x$ erzeugt von den Keimen $(s_{i_1})_x, \ldots, (s_{i_{k_i}})_x$. Ziel soll es sein, die s_{i_j} auf geeignete Weise zu globalen Schnitten fortzusetzen. Dazu zeigen wir, dass sich $t_{i_j} := s_{i_j} X_i^{d_i} \in \tilde{M}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$ zu einem globalen Schnitt in $\mathcal{F}(d_i)$ fortsetzt. Sei $0 \leqslant j \leqslant n$ mit $j \neq i$ und $\nu \in \{1, \ldots, k_i\}$. Dann ist

$$s_{i_\nu}|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = (M_j)_{\frac{X_j}{X_i}} = \left\{ \left(\frac{X_i}{X_j} \right)^p \cdot m_j \mid m_j \in M_j,\ p \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Dann gibt es ein $d_{j_\nu} \in \mathbb{N}_0$ mit $s_{i_\nu} X_i^{d_{j_\nu}} \in M_j$, also $s_{i_\nu} X_i^{d_{j_\nu}} \in \mathcal{F}(d_{j_\nu})(U_i \cap U_j)$ und damit aber bereits $s_{i_\nu} X_i^{d_{j_\nu}} \in \mathcal{F}(d_{j_\nu})(U_i \cup U_j)$. Für

$$d_i := \max_{j \in \{0, \ldots, n\}} \max_{\nu \in \{1, \ldots k_i\}} d_{j_\nu}$$

sind alle $s_{i_\nu} X_i^{d_i}$ globale Schnitte. Verfahren so für alle $0 \leqslant i \leqslant n$, es folgt dann also die Behauptung. □

Satz 15.7 *Sei R ein noetherscher Ring, $X \subseteq \mathbb{P}^n_R$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F})$ für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X ein endlich erzeugter R-Modul für alle $i \geqslant 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $X = \mathbb{P}^n_R$, denn für die abgeschlossene Einbettung $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ ist $j_*\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf $\mathbb{P}^n_R$ und nach Bemerkung 15.4 $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{F})$ für alle $i \geqslant 0$.

Beh. (a) Es gibt einen Epimorphismus von Garben

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(d_i) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Dann gibt es mit $\mathcal{K} = \text{Kern}\ \Phi$ eine kurze Exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(d_i) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Beachte hierbei, dass $\mathcal{K}$ ebenfalls kohärent ist, denn der Kern eines Homomorphismus von R-Moduln ist ein R-Untermodul, womit $\mathcal{K}$ quasikohärent ist. Da R noethersch ist, ist jeder R-Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls endlich erzeugt, $\mathcal{K}$ ist also kohärent. Weiter sieht man (ähnlich wie im Beweis von Satz 12.16 (iii)), dass

$$H^i\left(X, \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}_X(d_j)\right) = \bigoplus_{j=1}^{r} H^i(X, \mathcal{O}_X(d_j)).$$

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz

$$0 \to \mathcal{K}(X) \to \bigoplus_{j=1}^{r} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d_j)) \to \mathcal{F}(X) \to H^1(X, \mathcal{K}) \to \bigoplus_{j=1}^{r} H^1(X, \mathcal{O}_X(d_j)) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

folgt nun die Behauptung, denn für alle $i \geqslant 0$ ist $\bigoplus_{j=1}^{r} H^i(X, \mathcal{O}_X(d_j))$ nach Satz 15.5 endlich erzeugt, damit auch $H^1(X, \mathcal{K})$ und also auch $H^1(X, \mathcal{F})$. Iterativ folgt der Satz. Es bleibt noch die Behauptung zu zeigen.

Bew. (a) Nach Proposition 15.6 gibt es einen Epimorphismus

$$\Psi : \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d), \qquad e_i \mapsto s_i.$$

Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(-d)$ liefert (wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts) einen Epimorphismus

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(-d) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-d) \longrightarrow \mathcal{F}(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F},$$

was zu zeigen war. □

§ 16 Der Satz von Riemann-Roch für Kurven

Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann haben wir bereits gesehen, dass jeder Divisor $D = \sum_{P \in X} n_p P$ auf X eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}(D)$ via

$$\mathcal{L}(D)(U) = \left\{ f \in k(X)^\times \mid (\operatorname{div} f + D)\,|_U \geqslant 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Für die globalen Schnitte gilt mit der Notation aus der algebraischen Geometrie

$$L(D) := \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) = H^0(X, \mathcal{L}(D))$$

sowie

$$l(D) := \dim_k L(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)).$$

Sei weiter Ω_X die Garbe der regulären Differentiale auf X

$$\Omega_X(U) = \left\{ \omega \in \Omega_{k(X)/k} \mid \operatorname{div}\omega|_U \geqslant 0 \right\},$$

wobei $\operatorname{ord}_P \omega = \operatorname{ord}_P f$, falls $\omega = f \mathrm{d}t_P$ für ein uniformisierendes Element $t_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ und damit $\operatorname{div}\omega|_U := \sum_{P \in U} \operatorname{ord}_P \omega P$. Für $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k} \backslash \{0\}$ heißt $K := K_{\omega_0} = \operatorname{div}\omega_0$ *kanonischer Divisor.* Dass K dabei unabhängig von der Wahl von ω_0 ist, sieht man leicht ein: Ist $0 \neq \omega_1 \in \Omega_{k(X)/k}$ ein weiteres Differential, so ist $\omega_1 = f\omega_0$ für ein $f \in k(X)^\times$, also $\operatorname{div}\omega_1 = \operatorname{div}\omega_0 + \operatorname{div} f$, also $\mathcal{L}(\operatorname{div}\omega_1) \cong \mathcal{L}(K) = \Omega_X \cong \mathcal{L}(\operatorname{div}\omega_0)$.

Satz 16.1 (Satz von Riemann-Roch aus der algebraischen Geometrie) *Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k von Geschlecht g. Dann gilt für jeden Divisor D auf X*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

also

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}) = \deg D + 1 - g.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel Hartshorne IV.1.3. □

Definition 16.2 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X.

Dann definieren wir die *Eulercharakteristik* von $\mathcal{F}$ auf X als

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_k H^k(X, \mathcal{F}).$$

Satz 16.3 *Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $g = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Für jeden Divisor D auf X gilt*

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g.$$

Beweis. Mit $D = 0$ erhalten wir mit 16.1 und $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}_X$ die Behauptung sofort. Ein beliebiger Divisor D ist nun eine endliche Summe und geht damit aus endlich viele Additionen von Punkten zum Divisor $D = 0$ hervor. Wir zeigen die Behauptung also durch Induktion über $n = \sum_{P \in X} |n_p|$, wobei der Induktionsanfang bereits geleistet ist. Sei nun D ein Divisor und $P \in X$ beliebige. Wir zeigen, dass

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$$

genau dann gilt, wenn

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D+P)) - \dim_k H^1(C, \mathcal{L}(D+P)) = \deg(D+P) + 1 - g$$

erfüllt ist. Nach Definition gilt $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D+P)$. Wir erhalten damit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D+P) \longrightarrow \mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D) \longrightarrow 0.$$

Betrachte die Halme der Faktorgarbe. Wegen $\left(\mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)\right)_Q = \mathcal{L}(D+P)_Q \big/ \mathcal{L}(D)_Q$ erhalten wir für $Q \neq P$

$$\left(\mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)\right)_Q = 0,$$

$\mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)$ ist also eine Wolkenkratzergarbe. Ist nun $f \in k(X)$, so gilt $f_P \in \mathcal{L}(D+P)$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}_P f \geqslant -n_P - 1$ und $f_P \in \mathcal{L}(D)$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}_P f \geqslant -n_P$. Insgesamt erhalten wir dadurch

$$H^0\left(X, \mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)\right) \cong k, \qquad H^i\left(X, \mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)\right) = 0 \ \text{ für } i \geqslant 0$$

Übungsaufgabe 13.3 liefert

$$\chi(\mathcal{L}(D+P)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + \chi\left(\mathcal{L}(D+P) \big/ \mathcal{L}(D)\right) = \chi(\mathcal{L}(D)) + 1,$$

woraus zusammen mit $\deg D + P = \deg D + 1$ die Behauptung folgt. $\square$

Folgerung 16.4 *Vergleicht man die Sätze 16.1 und 16.2, so folgt*

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}).$$

Dieser Zusammenhang wird als Serre-Dualität bezeichnet. Wir werden später noch sehen, dass $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ kanonisch isomorph zu $H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1})$ ist.

Bemerkung 16.5 *Mit $P \neq Q$ erhalten wir durch $\{X\backslash\{P\}, X\backslash\{Q\}\}$ eine affine Überdeckung durch zwei offene Mengen. Da $\mathcal{L}(D)$ quasikohärent ist, gilt also $H^k(X, \mathcal{L}(D)) = 0$ für $k \geqslant 2$. Der linke Term von Satz 16.2 ist also gerade die Eulercharakteristik*

$$\chi(\mathcal{L}(D)) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_k H^k(X, \mathcal{L}(D))$$

von $\mathcal{L}(D)$.

Beispiel 16.6 Nach 16.4 folgt für $D = K$

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{L}(K)) = \dim_k H^1(X, \Omega_X) = \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

Was genau aber ist $H^1(X, \mathcal{L}(K))$? Wir berechnen die Dimension im Folgenden per Hand: Seien $P_1 \neq P_2 \in X$ Punkte und wähle eine affine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$ von X, wobei $U_i = X\backslash\{P_i\}$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt

$$H^1(X, \Omega_X) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \Omega_X) = \check{C}^1(\mathfrak{U}, \Omega_X) \big/ \text{Bild } d^0 = \Omega_X(U_1 \cap U_2) \big/ (\Omega_X(U_1) - \Omega_X(U_2)).$$

Wir behaupten nun:

(i) Es gibt kein $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ mit $\operatorname{ord}_{P_1}\omega = -1$ und $\operatorname{ord}_P \omega = 0$ für alle $P \in X\backslash\{P_1\}$.

(ii) Es gibt für alle $n \geqslant 2$ ein $\omega_n \in \Omega_{k(X)/k}$ mit $\operatorname{ord}_{P_1}\omega_n = -n$ und $\operatorname{ord}_P \omega_n = 0$ für alle $P \in X\backslash\{P_1\}$.

(iii) Es gibt ein $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k}$ mit $\operatorname{ord}_{P_1}\omega_0 = \operatorname{ord}_{P_2}\omega_0 = -1$ und $\operatorname{ord}_P \omega_0 = 0$ für alle $P \in X\backslash\{P_1, P_2\}$.

Dann folgt aus den Behauptungen: $\dim_k \left(\Omega_X(U_1 \cap U_2) \big/ \Omega_X(U_1) - \Omega_X(U_2)\right) = 1$, denn: (folgt). Wir zeigen noch die Behauptungen.

Beweis. (i) Ein solches ω wäre in $H^0(X, \Omega_X(P_1))$, wobei wir $\Omega_X(P_1) := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(P_1)$ setzen. Nach Riemann-Roch ist

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(P_1)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(P_1)) - \deg(-P_1) - 1 + g = g,$$

denn es gibt keine Funktionen auf X mit mindestens einer Nullstelle und ohne Polstellen. Wegen $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = g$ folgt

$$\omega \in H^0(X, \Omega_X(P_1)) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \in H^0(X; \mathcal{O}_X),$$

also $\omega \notin H^0(X, \Omega_X(P_1))$, ein Widerspruch.

(ii) Wir verfahren völlig analog. Riemann-Roch liefert

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(nP_1)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(-nP_1)) - \deg nP_1 - 1 + g = n - 1 + g.$$

Für $n \geqslant 2$ ist also

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(nP_1)) = \dim_k H^0(X, \Omega_X((n-1)P_1)) + 1,$$

woraus die Existenz des gewünschten Differentials folgt.

(iii) Ebenso erhalten wir

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(P_1 + P_2)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(-P_1 - P_2)) - \deg(-P_1 - P_2) - 1 + g = 1 + g.$$

Damit existiert ein $\omega_0 \in H^0(X; \Omega_X(P_1 + P_2)) \backslash H^0(X, \mathcal{O}_X)$ und wegen (i) gilt bereits $\mathrm{ord}_{P_1}\omega_0 + \mathrm{ord}_{P_2}\omega_0 = -1$. □

Beispiel 16.7 Werden wir nun konkreter und betrachten $X = \mathbb{P}^1_k$. Wir wollen nun zu gegebenen Punkte Differentiale finden, welche den Behauptungen aus Beispiel 13.6 nach existieren. Betrachte $\frac{\mathrm{d}z}{z} \in \Omega_{k(X)(k}$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_0\left(\frac{\mathrm{d}z}{z}\right) = -1, \qquad \mathrm{ord}_\infty\left(\frac{\mathrm{d}z}{z}\right) = -1.$$

Um zweiteres einzusehen, müssen wir das Differential eins uniformiserendes Elements des zugehörigen maximalen Ideals nehmen. Beachte an dieser Stelle, dass $\mathrm{d}z$ uniformisierend in jedem Punkt außer ∞ ist. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{z^2}{z}\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) = -z\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{z}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right),$$

also gerade

$$\mathrm{ord}_\infty\left(\frac{\mathrm{d}z}{z}\right) = -1.$$

Wählen wir nun allgemeine Punkte $a, b \in \mathbb{P}^1_k \backslash \{\infty\}$, so ist für

$$\omega_{a,b} = \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}$$

offensichtlich $\mathrm{ord}_a \omega_{a,b} = -1 = \mathrm{ord}_b \omega_{a,b}$ und $\mathrm{ord}_P \omega_{a,b} = 0$ für alle $P \in \mathbb{P}^1_k \backslash \{a, b, \infty\}$. Was ist mit dem Punkt ∞? Wir schreiben wieder

$$\omega_{a,b} = \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)} = -\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right),$$

also auch $\mathrm{ord}_\infty \omega_{a,b} = 0$.

Definition + Bemerkung 16.8 Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, $\omega \in \Omega_{k(X)/k} \backslash \{0\}$ ein Differential sowie $P \in X$. Sei weiter t_P ein uniformisierendes Element in P und $f \in k(X)^\times$, sodass $\omega = f \mathrm{d}t_P$ und es gelte $\mathrm{ord}_P \omega = -n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(i) f besitzt eine eindeutige Darstellung $f = a_{-n} t_P^{-n} + a_{-n-1} t_P^{-n-1} + \ldots + a_{-1} t_P^{-1} + f_0$ mit $f_0 \in \mathcal{O}_{X,P}$ und Körperelementen $a_i \in k$.

(ii) Wir definieren das *Residuum* von ω in P als

$$\mathrm{res}_P \omega := a_{-1}.$$

Gilt $\mathrm{ord}_P \omega \geqslant 0$, so setzen wir $\mathrm{res}_P \omega := 0$.

(iii) Das Residuum hängt nicht von der Wahl von t_P ab.

Beweis. (i) Klar.

(iii) Wir zeigen die Aussage lediglich für $\mathrm{char} k \neq 2$.

Fall (a) Es gilt $\omega = \frac{\mathrm{d}t_P}{t_P}$, also $f = \frac{1}{t_P}$ und damit $\mathrm{res}_P \omega = 1$. Sei nun z eine weitere Uniformisierende in P, es gelte also $z = t_P u$ mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$. Dann gilt $u = 1 + t_P h$ mit $h \in \mathcal{O}_{X,P}$ und damit $z = t_P(1 + t_P h)$. Dann gilt

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}t_P + \mathrm{d}(t_P^2 h) = \mathrm{d}t_P + t_P^2 \mathrm{d}h + 2t_P \mathrm{d}h = \mathrm{d}t_P + t_P^2 h' \mathrm{d}t_P + 2t_P h' \mathrm{d}t_P' = \mathrm{d}t(1 + 2h' t_P + t_P^2 h).$$

Wir erhalten damit

$$\frac{\mathrm{d}t_P}{t_P} = \frac{\mathrm{d}z}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'} \frac{1 + t_P h'}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{1 + t_P h}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'}.$$

Wegen $t_P(P) = 0$ gilt

$$\frac{1 + t_P h'}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'} \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$$

und damit

$$\mathrm{res}_P \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1 = \mathrm{res}_P \frac{\mathrm{d}t_P}{t_P},$$

was zu zeigen war.

Fall (b) Man kann leicht die Identität

$$\frac{\mathrm{d}t_P}{t_P^n} = -\frac{1}{n-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t_P^{n-1}}\right)$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ verifizieren. Ist z nun ein beliebiges uniformisierendes Element in P, so schreibe

$$\frac{1}{t_P^{n-1}} = \frac{1}{z^{n-1}} + b_{n-2}\frac{1}{z^{n-2}} + \ldots + b_1\frac{1}{z} + c_0$$

mit $c_0 \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$. Dann gilt

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{t_P^{n-1}}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \mathrm{d}\left(\frac{1}{z^i}\right) + \mathrm{d}c_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} b_i i \frac{\mathrm{d}z}{z^{i+1}} + c_0' \mathrm{d}z.$$

In dieser Darstellung fehlt der $\frac{1}{z}$-Term, das heißt das Residuum bleibt unverändert. □

Bemerkung 16.9 *Ist* $X = \mathbb{P}_k^1$ *und* $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z}$, *so gilt* $\mathrm{ord}_0\omega = 1$ *und* $\mathrm{ord}_\infty\omega = 1$. *Allgemeiner haben wir gesehen:*

$$\mathrm{res}_a\left(\frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \frac{\mathrm{d}z}{z-b}\right) = 1, \qquad \mathrm{res}_b\left(\frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \frac{\mathrm{d}z}{z-b}\right) = -1.$$

Folgerung 16.10 *Die Konstruktion aus 16.8 liefert einen wohldefinierten Isomorphismus*

$$\mathrm{Res} : H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow k$$

wie folgt: Für $\omega \in H^1(X, \Omega_X)$ *wähle* $P_1, P_2 \in X$ *und* $\omega_0 \in \Omega_X(X\backslash\{P_1, P_2\})$ *mit* $\mathrm{ord}_{P_i}\omega_0 = -1$ *für* $i = 1, 2$. *Setze dann* $\mathrm{Res}(\omega) := \mathrm{res}_{P_1}\omega_0$.

Beweisskizze. Sei zunächst $X = \mathbb{P}_k^1$. Dann ist $\mathrm{res}_{P_2}\omega_0 = -\mathrm{res}_{P_1}\omega_0$ nach der vorangegangenen Bemerkung. Vertauschen von P_1 und P_2 liefert $-\omega_0$. Weiter zeigt das Beispiel, dass $\mathrm{res}_{P_1}\omega_0$ unabhängig von der Wahl von $P_1 \neq P_2$ ist. Diese Beobachtungen liefern die Wohldefiniertheit von Res im Fall $X = \mathbb{P}_k^1$. Ist nun X beliebig, wähle $f \in k(X)$ mit $\mathrm{ord}_{P_i}\mathrm{d}f = 0$ für $i = 1, 2$, es soll also $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ unverzeigt in den P_i sein. Dann induziert f eine *Spurabbildung* $\mathrm{tr} : f_*\Omega_X \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^1}$ mit $\mathrm{res}_{P_1}\omega_0 = \mathrm{res}_{f(P_1)}(\mathrm{tr}(\omega_0))$. Damit lässt sich dieser Fall auf $X = \mathbb{P}_k^1$ zurückführen.

Proposition 16.11 (*Serre-Dualität*) *Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem* *algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann ist für jeden Divisor D auf X die Abbildung*

$$\Phi : H^0(X, \mathcal{L}(D)) \times H^1(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \overset{\mathrm{Res}}{\cong} k, \qquad (f, \omega) \mapsto f\omega$$

eine nichtausgeartete Bilinearform.