

## Kapitel II

# Projektive Varietäten

### § 8 Varietäten im projektiven Raum

**Erinnerung 8.1** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Der projektiven Raum ist

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n+1} / \sim$$

mit

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \iff \text{es ex. } \lambda \in \mathbb{K}^\times \text{ mit } \lambda x_i = y_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq n$$

Anschaulich sind die Elemente des projektiven Raums gerade die Ursprungsgeraden des  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Schreibeweise: Es sei  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  die Äquivalenzklasse von  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ .

(ii) Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\}$$

Es gilt  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup \dots \cup U_n$ . Für ein festes  $i \in \{0, \dots, n\}$  betrachte

$$\psi_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

Offenbar ist  $\psi_i$  injektiv mit  $\text{Bild}(\psi_i) = U_i$ . Die Umkehrabbildung ist

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

(iii) Die Abbildung

$$\rho_i : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}), \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$$

ist bijektiv. Induktiv erhalten wir

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

wobei die Wahl von  $\infty$  willkürlich ist. Insbesondere gilt also

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

(iv)  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  und  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sind  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.

**Definition + Bemerkung 8.2** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Ein Polynom

$$f = \sum_{(i_0 \dots i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}}^{< \infty} a_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$$

heißt *homogen von Grad*  $d \geq 0$ , falls für alle nichtverschwindenden Koeffizienten der Gesamtgrad konstant ist, also

$$a_{i_0 \dots i_n} \neq 0 \implies i_0 + \dots + i_n = d \quad \text{für alle } i$$

(ii) Ist  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen von Grad  $d$ , so gilt für alle  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ :

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

(iii) Ist  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  homogen, so ist die Nullstellenmenge  $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  wohldefiniert.

**Definition 8.3** Ein Teilmenge  $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  heißt *projektive Varietät*, wenn es eine Menge  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}$$

**Beispiel 8.4** (i) Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  ist

$$V(X_i) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

eine projektive Varietät.

(ii) Es gilt  $V(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$ .

**Bemerkung 8.5** Ist  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät, so ist

$$\phi_i(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

affine Varietät für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Beweis.* Es genügt, die Aussage für  $V(f)$ ,  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen zu zeigen, denn:

$$V(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} V(f) \implies \phi_i(V \cap U_i) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \phi_i(V(f) \cap U_i)$$

Sei nun

$$\tilde{f} := f(X_0, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

**Beh. (1)** Es gilt  $V(\tilde{f}) = \phi_i(V(f) \cap U_i)$ .

**Bew. (1)** Wir haben

" $\supseteq$ " Sei  $x \in V(f) \cap U_i$ ,  $x = (x_0 | \dots | x_n)$ . Dann gilt

$$x_i \neq 0, \quad \phi_i(x) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Also

$$\tilde{f}(\phi_i(x)) = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \frac{1}{x_i^d} f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

" $\subseteq$ " Sei nun  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V(\tilde{f})$ . Dann gilt

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$$

Also gilt  $x := (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in U_i \cap V(f)$  und  $\phi_i(x) = y$ , also gerade die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 8.6** Betrachte  $V = V(X_0 X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Es gilt

$$\phi_0(V \cap U_0) = V(X_2 - X_1^2) \quad \text{Parabel}$$

$$\phi_1(V \cap U_1) = V(X_0 X_2 - 1) \quad \text{Hyperbel}$$

$$\phi_2(V \cap U_2) = V(X_0 - X_1^2) \quad \text{Parabel}$$

**Bemerkung 8.7** Zu jeder affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  gibt es eine projektive Varietät  $\tilde{V}_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  mit  $\phi_i(\tilde{V}_i \cap U_i) = V$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $V = V(f)$  für ein  $f \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$ . Schreibe

$$f = \sum_{k=0}^d f_k$$

mit homogenen Polynomen  $f_k$  von Grad  $k$  für  $1 \leq k \leq d$ ,  $d = \deg(f)$ . Sei

$$F := \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_i, X_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n]$$

Dann ist  $F$  homogen von Grad  $d$  und es gilt:

**Beh. (1)** Es gilt  $\phi_i(V(F) \cap U_i) = V(f)$ .

**Bew. (1)** Wir haben

" $\supseteq$ " Sei  $y := (y_1, \dots, y_n) \in V(f)$ , d.h. es gilt  $f(y) = 0$ . Setze

$$x := \psi_i(y) = (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in U_i, \quad \phi_i(x) = y.$$

Dann gilt

$$F(x) = \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k(y_1, \dots, y_n) = f(y) = 0.$$

" $\subseteq$ " Sei nun  $y \in \phi_i(V(F) \cap U_i)$ , d.h. es gilt  $y = \phi(x)$  mit  $x \in V(F) \cap U_i$ .

Damit gilt  $x = (x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)$  und

$$0 = F(x) = \sum_{k=0}^d f_k(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = f(\phi_i(x)) = f(y),$$

also  $y \in V(f)$ . □

**Definition + Bemerkung 8.8** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \geq 1$ .

(i) Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} D_i : \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] \cong \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n], \\ f(x_0, \dots, x_n) &\mapsto f(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

*Dehomogenisierung* nach der  $i$ -ten Variable.  $D_i$  ist als Auswertung ein  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismus.

(ii) Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} H_i : \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n, X_i] \cong \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \\ f = \sum_{k=0}^d f_k &\mapsto \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k \end{aligned}$$

( $i$ -te) *Homogenisierung*, wobei  $f_k$  homogene Polynoms von Grad  $k$  sind. Es gilt

$$H_i(fg) = H_i(f)H_i(g)$$

$$H_i(f + g) \neq H_i(f) + H_i(g), \quad \text{falls } \deg(f) \neq \deg(g)$$

(iii) Es gilt

$$D_i \circ H_i = \text{id}_{\mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]}$$

$$(H_i \circ D_i)(f) = \frac{1}{X_i^e} f, \quad e = \max_{e \in \mathbb{N}_0} \{X_i^e \mid X_i^e \mid f, X_i^{e+1} \nmid f\}, \quad \text{falls } f \text{ homogen.}$$

## § 9 Die Zariski Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

**Definition 9.1** Für  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  sei  $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  das von allen homogenen Polynomen  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  mit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in V$  erzeugte Ideal.  $I(V)$  heißt *Verschwundungsideal* von  $V$ .

**Definition + Bemerkung 9.2** (i) Ein (kommutativer) Ring (mit 1)  $R$  heißt *graduirt*, falls es eine Zerlegung

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$$

in abelsche Gruppen  $R_d$  gibt, sodass für alle  $f \in R_d, g \in R_e$  gilt:  $f \cdot g \in R_{d+e}$ .

(ii) eine  $\mathbb{K}$ -Algebra  $S$  heißt *graduirt*, wenn

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

graduierter Ring ist und  $S_0 = \mathbb{K}$ . Dies impliziert, dass die  $S_d$  sogar zu  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen werden.

- (iii) Die Elemente in  $R_d$  bzw.  $S_d$  heißen *homogen vom Grad  $d$* .
- (iv) Ein Ideal in  $R$  heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.
- (v) Für ein Ideal  $I \trianglelefteq R$  sind äquivalent:
  - (a)  $I$  ist homogen.
  - (b)  $I$  besitzt eine Darstellung

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap R_d)$$

- (c) Für jedes  $f \in I$  mit

$$f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d, \quad f_d \in R_d$$

gilt bereits  $f_d \in I$  für alle  $d \in \mathbb{N}_0$ .

- (vi) Ist  $I \trianglelefteq R$  homogenes Ideal, so ist  $R/I$  graduert mit

$$R/I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d / (R_d \cap I)$$

- (vii) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

*Beweis.* (v) "(a) $\Rightarrow$ (b)" " $\supseteq$ " Klar.

" $\subseteq$ " Seien  $a_i, i \in J$  homogene Erzeuger von  $I$ . Es genügt zu zeigen:

$$r \cdot a_i \in \bigoplus_{d=0}^{\infty} I \cap R_d \quad \text{für alle } r \in R$$

Schreibe

$$r = \sum_{d=1}^n r_d, \quad r_d \in R_d$$

Dann gilt mit  $d_i := \deg(a_i)$

$$r \cdot a_i = \sum_{d=1}^n r_d a_i, \quad r_d a_i \in R_{d+d_i} \cap I$$

also gerade die Behauptung.

"(b) $\Rightarrow$ (c)" Klar.

"(c) $\Rightarrow$ (a)" Klar.

- (vi) Für jedes Ideal  $I \trianglelefteq R$  ist

$$\pi : \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d / (R_d \cap I) \longrightarrow R/I$$

surjektiv, denn für  $d \in \mathbb{N}_0$  ist  $R_d \longrightarrow R$  surjektiv. Für den Kern betrachte

$$\sum_{d=0}^n r_d \mod (R_d \cap I) \in \ker(\pi) \iff \sum_{d=0}^n r_d \in I \iff r_d \in I \iff \sum_{d=0}^n r_d \equiv 0 \mod (R_d \cap I)$$

Damit folgt die Behauptung.

- (vii) Seien  $I_1, I_2$  homogene Ideale, also mit homogenen Erzeugern  $\{f_i\}, \{g_j\}$ .

Dann wird  $I_1 + I_2$  von  $\{f_i + g_j\}$  erzeugt und  $I_1 I_2$  von  $\{f_i g_j\}$ .

*Durchschnitt.* Für  $I_1 \cap I_2$  verwende (v)(b):

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I_1 \cap R_d) \cap \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap R_d = I_1 \cap I_2$$

*Radikal.* Sei nun  $I$  homogen,  $x \in \sqrt{I}$ . Schreibe

$$x = \sum_{d=0}^n x_d, \quad x_d \in R_d$$

Nach Voraussetzung existiert  $m \geq 1$ , sodass  $x^m \in I$ , also

$$I \ni \left( \sum_{d=0}^n x_d \right)^m = x_n^m + \mathcal{O}(x_n^{m-1})$$

Damit gilt  $x_n^m \in I$  und somit  $x_n \in \sqrt{I}$  und  $(x - x_n) \in \sqrt{I}$ .

Per Induktion über  $\deg(x)$  folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Proposition 9.3** (i) Für jede Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist  $I(V)$  ein Radikalideal.

(ii) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

(iii) Eine projektive Varietät  $V$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $I(V)$  ein Primideal ist.

(iv) Jede projektive Varietät ist endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

*Beweis.* (i) Zu zeigen ist:  $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$ .

Nach 9.2 (vii) ist  $\sqrt{I(V)}$  ein homogenes Ideal. Sei also  $f \in \sqrt{I(V)}$  homogen und  $m \in \mathbb{N}$ , sodass

$$f^m \in I(V) \implies f(x)^m = 0 \text{ für alle } x \in V$$

Damit gilt  $f \in I(V)$ , also die Behauptung.

(ii) Folgt wie im affine Fall aus 9.2 (vii).

(iii) Wörtlich wie in 3.5 mit gelöster Übungsaufgabe.

(iv) Wie in 3.6  $\square$

**Folgerung 9.4** Bezüglich der Einschränkung der Zariskitopologie von  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  auf  $U_i$  ist die Bijektion  $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  ein Homoöomorphismus.

*Beweis.* Folgt aus Bemerkung 8.4 und 8.5.

**Bemerkung 9.5** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $I = I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ihr Verschwindungsideal und  $I^* \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  das von den Homogenisierungen  $H_0(f)$  aller  $f \in I$  erzeugte Ideal.

Dann ist  $V(I^*) = \bar{V}$  der Zariski-Abschluss von  $V$  in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

*Beweis.* Aus dem Beweis von Bemerkung 8.5 folgt  $V(I^*) \cap U_0 = V$ .

Sei  $\tilde{V} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  abgeschlossen mit  $V \subseteq \tilde{V}$ . Zeige  $V(I^*) \subseteq \tilde{V}$ . Sei dazu  $\tilde{V} = V(J)$  für ein homogenes Ideal  $J$ . Dann genügt es zu zeigen:  $J \subseteq I^*$ .

Sei dazu  $f \in J$  homogen. Für  $y \in \tilde{V}$  ist dann  $D_0(f)(y) = 0$ , also  $D_0(f) \in I$ . Per Definition ist dann  $H_0(D_0(f)) \in I^*$ . Es gilt aber  $H_0(D_0(f)) = f \cdot X_0^{-e}$  für ein  $e \geq 0$ , es folgt also die Behauptung.  $\square$

- Definition + Bemerkung 9.6** (i) Eine Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  heißt *quasiprojektive Varietät*, wenn  $W$  offene Teilmenge einer projektiven Varietät  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist.
- (ii)  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist quasiprojektiv genau dann, wenn es eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  und eine abgeschlossene Menge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  gibt, sodass gilt  $W = U \cap V$ .
- (iii) Die Zariski-Topologie auf einer quasiprojektiven Varietät hat eine Basis aus (abstrakt) affine Varietäten.
- (iv) Jede quasi-projektive Varietät ist kompakt.

*Beweis.* (iii) Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  und  $U \subseteq W$  offen. Dann ist  $U \cap U_i$  offen für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  und der Zariskiabschluss  $\overline{U \cap U_i}$  von  $U \cap U_i$  in  $U_i$  eine affine Varietät.

Nach Proposition 2.5 bilden die  $D(f)$  für  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  eine Basis der Zariski-Topologie auf  $\overline{U \cap U_i}$ , d.h. es existiert  $f$  mit  $D(f) \subseteq U \cap U_i$ . Nach 6.11 ist  $D(f)$  isomorph zu einer affinen Varietät, es folgt die Behauptung.

(iv) Nach Proposition 6.5(iii) ist  $W \cap U_i$  kompakt für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Also ist

$$W = \bigcup_{i=0}^n W \cap U_i$$

ebenfalls kompakt.

**Definition + Bemerkung 9.7** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $V \neq \emptyset$ .

(i) Der *affine Kegel* von  $V$  ist definiert als

$$\tilde{V} := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$$

- (ii)  $\tilde{V}$  ist affine Varietät. Genauer gilt: Ist  $V = V(I)$  für ein homogenes Ideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$  die Nullstellenmenge von  $I$  in  $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ .
- (iii) Falls  $\mathbb{K}$  unendlich ist, gilt  $I(V) = I(\tilde{V})$ .

*Beweis.* (ii) Nach Definition ist  $(x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  genau dann, wenn  $(x_0 : \dots : x_n) \in V$ .

Es bleibt also noch zu zeigen:  $(0, \dots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$ .

Ist  $f \in I$  homogen, so ist  $\deg(f) > 0$ , also  $f(0, \dots, 0) = 0$ .

(iii) Für jedes homogene  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  gilt:

$$f \in I(V) \iff f \in I(\tilde{V})$$

Zu zeigen ist also:  $I(\tilde{V})$  ist homogen. Sei dazu

$$f = \sum_{i=0}^d f_i \in I(\tilde{V}), \quad f_i \text{ homogen von Grad } i$$

Zu zeigen ist:  $f_i \in I(\tilde{V})$  für alle  $0 \leq i \leq d$ .

Für jedes  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \tilde{V}$ , also

$$0 = f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x_0, \dots, x_n)$$

Sind  $\lambda_0, \dots, \lambda_d$  verschiedene Elemente in  $\mathbb{K}$ , so hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0(x_0, \dots, x_n) \\ f_1(x_0, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_d(x_0, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die triviale Lösung (Vandermonde-Matrix)

$$f_0(x_0, \dots, x_n) = \dots = f_d(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 9.8 (Projektiver Nullstellensatz)** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 0$ . Dann gilt für jedes homogene Radikalideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $I \neq \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ :

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = I$$

Das Ideal  $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$  heißt auch irrelevantes Ideal.

*Beweis.* Offenbar stimmt die Aussage für  $I = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Sei nun also  $I$  ein echtes Ideal, also

$$I \subset \langle X_0, \dots, X_n \rangle$$

Seien  $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$  die affine und  $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  die projektive Nullstellenmenge von  $I$ . Dann ist  $\tilde{V} := V_{\text{aff}}(I)$  der affine Kegel von  $V$ .

Da  $I \neq \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ , ist nach HNS  $V_{\text{aff}}(I) \neq \{0\}$ , also  $V \neq \emptyset$ . Nach 9.7(iii) gilt dann

$$I(V(I)) = I(V) = I(\tilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \stackrel{\text{HNS}}{=} I,$$

was zu zeigen war.  $\square$

**Beispiel 9.9** Es sei  $E_0 := V(Y^2 - X^3 + X)$  und  $E := \overline{E_0}$  der projektive Abschluss von  $E_0$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , also

$$E = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$$

Dann gilt

$$E \setminus E_0 = E \cap V(Z) = \{(0 : 1 : 0)\}$$

Es sei nun  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  eine Gerade also  $L = V(aX + bY + cZ)$ , wobei  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

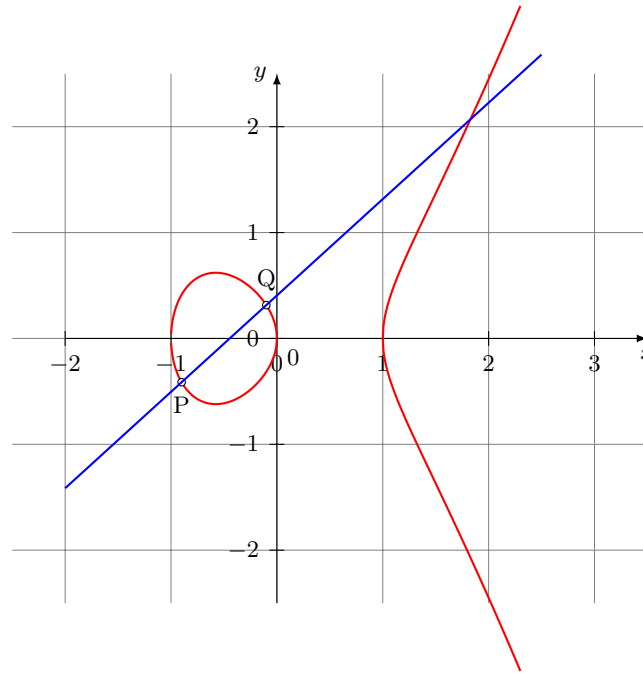
Dann kann man zeigen: Unter der Bedingung, dass  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, Tangenten doppelt und Wendetangenten dreifach zählen, gilt

$$\#(L \cap E) = 3$$

Genauer folgt dies aus dem Satz von Bézout. Im folgenden möchten wir eine Gruppenstruktur auf  $E$  definieren. Sei hierzu



$\tilde{\mu} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto \text{dritter Schnitterpunkt der Gerade durch P und Q}$



Zunächst einmal ist diese innere Verknüpfung wohldefiniert und kommutativ. Allerdings finden wir kein neutrales Element:

Denn gäbe es  $P_0 \in E$  mit  $\tilde{\mu}(P, P_0) = P$  für alle  $P \in E$ , so müssten alle Tangenten an  $E$  durch  $P_0$  gehen. Das ist offenbar falsch, weshalb  $\tilde{\mu}$  nicht der richtige Weg ist.

Wir nehmen nun folgende Modifikation vor: Für ein festes  $P_0 \in E$  definieren wir eine Abbildung

$$\otimes_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P \otimes_{P_0} Q := \tilde{\mu}(P_0, \tilde{\mu}(P, Q))$$

Dann gilt:

- (i) Die Verknüpfung ist wohldefiniert
- (ii)  $P_0$  ist das neutrale Element der Verknüpfung, d.h. es gilt

$$P \oplus_{P_0} P_0 = P \quad \text{für alle } P \in E$$

- (iii) Die Verknüpfung  $\oplus_{P_0}$  ist assoziativ
- (iv) und kommutativ

Damit haben wir eine Gruppenstruktur auf unserer Varietät definiert. Nun stellt sich die Frage nach Elementen endlicher Ordnung? Gibt es sie? Ja!

- (i) Die drei Punkte mit senkrechter Tangente haben Ordnung 2, bilden mit  $P_0$  also eine Klein'sche Vierergruppe.
- (ii) Die 8 Punkte mit Wendetangente (nur 2 sichtbar!) haben Ordnung 3.

## § 10 Reguläre Funktionen

**Definition 10.1** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät und  $I(V)$  das zugehörige Verschwindungsideal von  $V$ . Dann heißt

$$\mathbb{K}[V] := \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] / I(V)$$

homogener Koordinatenring von  $V$ . Nach 9.2 (vi) ist  $\mathbb{K}[V]$  ein graduierter Ring.

**Bemerkung 10.2** Sind  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen von gleichem Grad, so ist  $\frac{F}{G}$  eine wohlbestimmte Funktion aus  $D(G)$ .

**Definition 10.3** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $f : W \rightarrow \mathbb{K}$  eine Abbildung.

- (i)  $f$  heißt *regulär in*  $x \in W$ , wenn es eine Umgebung  $U_x \ni x, U_x \subseteq W$  und homogene Polynome  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  vom selben Grad gibt, sodass  $U_x \subseteq D(G)$  und

$$f(y) = \frac{F}{G}(y) \quad \text{für alle } y \in U_x$$

- (ii)  $f$  heißt *reguläre Funktion auf*  $W$ , wenn  $f$  in jedem  $x \in W$  regulär ist.

**Bemerkung 10.4** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $f : W \rightarrow \mathbb{K}$  Abbildung: Dann gilt

$$f \text{ ist regulär} \iff f|_{U_i \cap W} = f \circ \psi_i \text{ ist regulär im Sinne von 6.2 für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Sei  $x \in W \cap U_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, n\}$  sowie  $f = \frac{F}{G}$  in einer Umgebung  $U_x$  von  $x$  und homogenen Polynomen gleichen Grades  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Ohne Einschränkung sei  $U_x \subseteq U_i$ , ansonsten verkleinere  $U_x$ . Auf  $U_x$  gilt dann

$$(f \circ \psi_i)(x_1, \dots, x_n) = \frac{F}{G}(x_1 : \dots, x_i : 1 : x_{i+1} : \dots, x_n) = \frac{D_i(F)}{D_i(G)},$$

also ist  $f \circ \psi_i$  regulär im Sinne von 6.2.

" $\Leftarrow$ " Sei  $x \in W \cap U_i$  sowie  $f = \frac{g}{h}$  in einer Umgebung  $x \in U_x \subseteq U_i$ ,  $f, g \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$ . Sei  $G := H_i(g)$ ,  $H := H_i(h)$ . Ohne Einschränkung sei  $\deg G \leq \deg H$ . Dann ist

$$\frac{\tilde{G}}{\tilde{H}}, \quad \tilde{G} := G \cdot X_i^{\deg H - \deg G}$$

reguläre Funktion im Sinne von Definition 12.2 auf  $U_x$  mit  $f = \frac{\tilde{G}}{\tilde{H}}$  auf  $U_x$ . □

**Definition + Bemerkung 10.5** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät.

- (i) Für  $U \subseteq W$  offen sei

$$\mathcal{O}_W(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist regulär}\}$$

- (ii)  $\mathcal{O}_W(U)$  ist  $\mathbb{K}$ -Algebra.

- (iii) Die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$  ist eine Garbe von  $\mathbb{K}$ -Algebren auf  $W$ .

**Beispiel 10.6** Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]_{X_i}$$

via der Zuordnung

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \longleftarrow f$$

Ist zum Beispiel  $i = 0, n = 3$ , so haben wir

$$Y_1 Y_3^2 - 2 Y_2^2 \longmapsto \frac{X_1}{X_0} \left(\frac{X_3}{X_0}\right)^2 - 2 \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 = \frac{X_1 X_3^2 - 2 X_2^2 X_0}{X_0^3}$$

Bemerkte:

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \frac{H_i(f)}{X_i^d}$$

mit  $d = \deg(f)$ . Damit erhalten wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \left\{ \frac{H}{X_i^d} \mid H \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen von Grad } d \right\}$$

**Satz 10.7** ( *Homogene Lokalisierung* ) Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät.

(i) Für  $F \in \mathbb{K}[V]$  homogen von Grad  $\deg F \geq 1$  gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) = (\mathbb{K}[V]_F)_0 := \left\{ \frac{H}{F^d} \mid H \in \mathbb{K}[V] \text{ homogen von Grad } \deg H = d \cdot \deg F \right\}$$

(ii) Falls  $V$  zusammenhängend ist, gilt

$$\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{K}$$

*Beweis.* (i) Definiere

$$\psi : \mathbb{K}[V]_F \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(F)), \quad \frac{G}{F^d} \mapsto \left( x \mapsto \frac{G}{F^d}(x) \right)$$

Dann ist  $\psi$  wohldefinierter Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

*injektiv.* Ist

$$\frac{G}{F^d}(x) = 0$$

für alle  $x \in D(F)$ , so gilt  $D(F) \subseteq V(G)$ , also  $F \cdot G = 0$  auf  $V$ . Dann ist aber

$$\frac{G}{F^d} = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[V]_F,$$

also  $\psi$  injektiv.

*surjektiv.* Sei  $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$ .

Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  sei  $f_i := D_i(F)$  die  $i$ -te Dehomogenisierung von  $F$ . Dann ist

$$D(F) \cap U_i = D(f_i)$$

Nach Satz 6.5 gibt es dann  $G_i \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$  und  $d_i \geq 0$ , sodass  $h(D(F))$  regulär ist, also

$$h(D(F) \cap U_i) = \frac{g_i}{f_i^{d_i}}$$

Mit  $G_i := H_i(g_i)$  ist dann

$$h|_{D(F) \cap U_i} = \frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

Auf  $D(F) \cap U_i \cap U_j$  ist weiter

$$\frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F^{d_j} X_j^{e_j}}$$

also

$$G_j F^{d_j} X_j^{e_j} - G_i F^{d_i} X_i^{e_i} = 0$$

und schließlich

$$G_j F^{d_j+1} X_j^{e_j} X_i X_j - G_i F^{d_i+1} X_i^{e_i} X_i X_j = 0 \quad \text{auf } V \quad (*)$$

Sei nun ohne Einschränkung  $d_i = 1$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$ , da  $V(F^{d_i}) = V(F)$  für alle  $d_i \geq 1$ .

Da  $\deg(F) \geq 1$  ist  $F \in \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ , also

$$F^m \in \langle X_0^{e_0+1}, \dots, X_n^{e_n+1} \rangle$$

für hinreichend großes  $m$  und wegen

$$F^{m+1} = F \cdot F^m \in \langle F X_0^{e_0+1}, \dots, F X_n^{e_n+1} \rangle$$

damit

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1}, \quad H_i \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen}$$

Beobachtung: Sei  $I := \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  mit homogenen  $a_i$ . Ist  $b$  homogen, so können wir  $b$  schreiben als

$$b = \sum_{i=1}^n r_i a_i \quad \text{mit geeigneten homogenen } r_i \in R$$

(Man kann dies leicht durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich einsehen).

Schreibe nun also

$$G = \sum_{i=0}^n H_i G_i$$

Dann ist

$$X_j F^{m+1} G_j = X_j \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^n H_i G_i F X_j^{e_j+1} X_i = G F X_j^{e_j+1}$$

also

$$h(D(F) \cap U_j) = \frac{G_j}{F X_j^{e_j}} = \frac{G}{F^{m+1}}$$

Daraus folgt

$$\psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = h,$$

also die Behauptung.

- (ii) Sei  $V$  ohne Einschränkung irreduzibel. Dann dann ist  $h \in \mathcal{O}_V(V)$  aus jeder irreduziblen Komponente konstant, und da  $V$  zusammenhängend ist, stimmen diese Konstanten überein.

Damit ist  $I(V)$  prim, der homogene Koordinatenring  $\mathbb{K}[V]$  also nullteilerfrei.

Sei  $\mathbb{L} := \text{Quot}(\mathbb{K}[V])$ ,  $f \in \mathcal{O}_V(V)$  und ohne Einschränkung  $U_i \cap V \neq \emptyset$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Sei weiter  $f_i := f|_{V \cap U_i}$ . Nach (i) ist

$$f_i = \frac{G}{X_i^{d_i}} \quad \text{für ein homogenes } G_i \in \mathbb{K}[V], \deg(G_i) = d_i$$

**Beh. (1)**  $f_i$  ist ganz über  $\mathbb{K}[V]$ .

Dann gibt es  $m \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}[V]$  mit

$$f_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j f_i^j = 0 \quad (I)$$

und durch Multiplikation mit  $X_i^{d_i m}$

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} \quad (II)$$

Ohne Einschränkung gelte  $a_j \in \mathbb{K}$ , denn (II) muss im Grad  $d_i m$  erfüllt sein.

Dann ist (I) mit  $a_j \in \mathbb{K}$  erfüllt,  $f_i$  also ganz über  $\mathbb{K}$ . Da  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $f_i$  sogar konstant, es folgt also die Behauptung.

**Bew. (1)** Es gilt

$$f|_{U_i \cap V} = \frac{G}{X_i^{d_i}} \in \mathbb{L}$$

Setze

$$d := \sum_{i=0}^n d_i$$

und

$$\mathbb{K}[V]_d := \{H \in \mathbb{K}[V] \mid H \text{ homogen von Grad } d\}$$

**Beh. (2)** Es gilt  $\mathbb{K}[V]_d f_i^j \subseteq \mathbb{K}[V]_d$  für alle  $j \geq 0$ .

**Bew. (1)** Dann ist  $X_i^d f_i^j \in \mathbb{K}[V]$ , also

$$f_i^j \in \frac{1}{X_i^d} \mathbb{K}[V] \implies \mathbb{K}[V][f_i] \subseteq \frac{1}{X_i^d} \mathbb{K}[V]$$

Da  $\mathbb{K}[V]$  noethersch und endlich erzeugt ist, ist auch  $\mathbb{K}[V][f_i]$  endliche erzeugter  $\mathbb{K}[V]$ -Modul. Dann existiert  $m \geq 1$ , sodass  $f_i^m$  in dem von  $1, f_i, \dots, f_i^{m-1}$  erzeugten  $\mathbb{K}[V]$ -Modul liegt. Damit folgt die Behauptung.

**Bew. (2)**  $\mathbb{K}[V]_d$  wird als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum von den Restklassen der Monome  $X_0^{j_0}, \dots, X_n^{j_n}$  mit

$$\sum_{i=0}^n j_i = d = \sum_{i=0}^n d_i$$

erzeugt. Für jedes solcher Monome gibt es einen Index  $i$  mit  $j_i \geq d_i$ , also

$$X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} \cdot f_i = X_0^{j_0} \dots X_i^{j_i - d_i} \dots X_n^{j_n} \cdot G_i \in \mathbb{K}[V]_d,$$

was zu zeigen war. □

## § 11 Morphismen

**Proposition + Definiton 11.1** Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietäten,  $f : V \longrightarrow W$  eine Abbildung. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Für jedes  $x \in V$  gibt es eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  von gleichem Grad, sodass für alle  $y \in U_x$  gilt:

$$f(y) = (F_0(y), \dots, F_m(y))$$

- (ii) Für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $j \in \{0, \dots, m\}$  mit  $U_{ij} := U_i \cap f^{-1}(W \cap U_j) \neq \emptyset$  ist

$$f(U_i \cap f^{-1}(W \cap U_j)) : U_{ij} \longrightarrow W \cap U_j$$

Morphismus von quasiaffinen Varietäten.

- (iii)  $f$  ist stetig und für jedes offene  $U \subseteq W$  und jede reguläre Funktion  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  ist

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

Ist eine und damit alle jede der Bedingungen erfüllt, so heißt  $f$  *Morphismus*.

*Beweis.* "(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)" Folgt aus 10.4 und 6.9

"(i)  $\Rightarrow$  (iii)" Die Stetigkeit von  $f$  folgt wie im affinen Fall.

Ist  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  regulär, so gilt lokal  $g = \frac{G}{H}$  mit homogenen Polynomen  $G, H$  von gleichem Grad.

Damit ist

$$g \circ f = \frac{G(F_0(y), \dots, F_m(y))}{H(F_0(y), \dots, F_m(y))}$$

regulär auf einer geeigneten offenen Menge.

"(ii)  $\Rightarrow$  (i)" Sei  $j = 0$  und  $x \in V \cap U_i$  und  $f$  in einer offenen Umgebung von  $x$  gegeben durch

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$$

mit

$$f_k = \frac{g_k}{h_k}, \quad g_k, h_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

Durch Homogenisieren erhalten wir

$$f(y) = (1 : f_1(y) : \dots : f_m(y))$$

Multiplizieren mit dem Hauptnenner und bei Bedarf mit einer Potenz von  $X_0$  ergibt die gewünschten Polynome von gleichem Grad.  $\square$

**Beispiel 11.2** Sei

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

Dann ist  $f$  Morphismus. Aber:  $f$  lässt sich nicht zum Morphismus  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  fortsetzen. Denn: Betrachte  $f(\lambda : \mu : \lambda) = (1 : 1)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$ . Es gilt

$$\{(\lambda : \mu : \lambda) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid \lambda \neq 0\} = V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$$

das heißt,  $f$  ist konstant auf  $V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$ , also auch auf  $\overline{V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}} = V(X - Z)$ , falls  $\mathbb{K}$  unendlich ist.

Betrachte nun  $f(\lambda : \mu : -\lambda) = (1 : -1)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$ . Analog erhält man hier, dass  $f$  konstant auf  $V(X + Z)$  ist, also

$$f(V(X - Z)) = (1 : 1), \quad f(V(X + Z)) = (1 : -1)$$

Damit kann es eine solche Fortsetzung nicht geben.

**Beispiel 11.3** Sei  $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$ , Siehe Beispiel 9.9, und

$$f : E \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

Dann lässt sich  $f$  zum Morphismus  $E \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  fortsetzen.

Betrachte hierzu die Tangente an  $E$  in  $P_\infty := (0 : 1 : 0)$ . Diese ist die Gerade  $Z = 0$ , denn die Tangente ist gerade der lineare Term. Dann gilt  $f|_{V(Z)} = (1 : 0)$ . Setze nun  $P_0 := (0 : 0 : 1)$  und

$$g(x : y : z) = \begin{cases} (x : z) & \text{für } (x : y : z) \in E \setminus \{P_\infty\} \\ (y^2 + xz : x^2) & \text{für } (x : y : z) \in E \setminus \{P_0\} \end{cases}$$

$g$  ist Morphismus. Es bleibt zu zeigen: Für  $(x : y : z) \in E \setminus \{P_0, P_\infty\}$  ist  $(x : z) = (y^2 + xz : x^2)$ . Es gilt aber

$$y^2z + xz^2 = x^3 \iff \frac{y^2 + xz}{x^2} = \frac{x}{z}$$

und damit

$$(x : z) = (x(y^2 + xz) : z(y^2 + xz)) \stackrel{(x:y:z) \in E}{=} (xy^2 + x^2z : x^3) \stackrel{x \neq 0}{=} (y^2 + xz : x^2)$$

Außerdem ist  $y^2 + xz \neq 0$ , da sonst  $0 = y^2z - x^3 + xz^2 = (y^2 + xz)z - x^3 = -x^3$ , also  $x = 0$ , also  $(x : y : z) \in \{P_0, P_\infty\}$ .

**Proposition 11.4** Ist  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$  Morphismus, so gibt es homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m$  von gleichem Grad, sodass gilt

$$f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

*Beweis.* Übung. Hauptgrund:  $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  ist faktoriell.

**Bemerkung 11.5** Für jede quasiprojektive Varietät  $V$  ist

$$\text{Aut}(V) := \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ ist Isomorphismus}\}$$

eine Gruppe.

**Beispiel 11.6** Es gilt  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) \cong \text{GL}_2(\mathbb{K}) / \mathbb{K}^\times I_2 \cong \text{PGL}_2(\mathbb{K})$  mit Isomorphismus

$$\phi : \text{PGL}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ((X_0 : X_1) \mapsto (aX_0 + bX_1 : cX_0 + dX_1))$$

Analog ist

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K})) \cong \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

**Beispiel 11.7** Sei wieder  $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$  wie in Beispiel 9.9. Wir haben bereits eine Gruppenstruktur auf  $E$  via

$$\oplus := \oplus_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P \oplus_{P_0} Q$$

Mit den Formeln für  $\oplus$ , die man sich analytisch herleiten kann, sieht man:  $\oplus$  ist Morphismus.

Für jedes  $P \in E$  ist also

$$\mu_P : E \longrightarrow E, \quad Q \mapsto P \oplus Q$$

ein Automorphismus. Damit enthält  $\text{Aut}(E)$  eine zu  $E$  isomorphe Untergruppe. Einen weiteren Automorphismus finden wir zum Beispiel via

$$X \mapsto -X, \quad Y \mapsto i \cdot Y, \quad Z \mapsto Z$$