3 Algebraische Körpererweiterungen

3.1 Algebraische und transzendente Elemente

Definition 3.1.1

Sei L ein Körper, $K \subset L$ Teilkörper.

(a) Dann heißt L Körpererweiterung von K. Schreibweise: L/K Körpererweiterung.

(b) $[L : K] = \dim_K L$ heißt **Grad** von L über K

(c) L/K heißt **endlich**, wenn $[L : K] < \infty$

(d) $\alpha \in L$ heißt **algebraisch** über K, wenn es ein $0 \neq f \in K[X]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$

(e) $\alpha \in L$ heißt **transzendent** über K, wenn α nicht algebraisch über K ist.

(f) L/K heißt **algebraische Körpererweiterung**, wenn jedes $\alpha \in L$ algebraisch über K ist.

Beispiel:

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ und $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{a}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, da Nullstelle von $X^n - a$
Summe und Produkt von solchen Wurzeln sind auch algebraisch über $\mathbb{Q}$
z.B.: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist Nullstelle von $X^4 - 10X^2 + 1$, i ist Nullstelle von $X^2 + 1$.

Klassische Frage: Hat jedes $f \in \mathbb{Q}[X]$ eine Nullstelle, die ein „Wurzelausdruck" ist?.

(2) Sei $L = K(X) = \mathrm{Quot}(K[X])$. Dann ist X transzendent über K. Das gleiche gilt für jedes $f \in K(X) \setminus K$

(3) In $\mathbb{R}$ gibt es sehr viele über $\mathbb{Q}$ transzendente Elemente. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch $\mathbb{Q}[X]$ abzählbar, da jedes $f \in \mathbb{Q}[X]$ endlich viele Nullstellen hat. Das heißt, es gibt nur abzählbar viele Elemente in $\mathbb{R}$, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind. $\mathbb{R}$ ist aber nicht abzählbar.

Definition + Bemerkung 3.1.2

Sei L/K Körpererweiterung, $\alpha \in L$,
$\varphi_\alpha : K[X] \to L,\ f \mapsto f(\alpha)$ Einsetzungshomomorphismus.

(a) $\mathrm{Kern}(\varphi_\alpha)$ ist Primideal in $K[X]$

Beweis: Kern(φ_α) ist Ideal, da φ_α Homomorphismus ist. Seien nun $f, g \in K[X]$ mit $fg \in$ Kern(φ_α) $\Rightarrow (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha) = 0 \overset{L \text{ Körper}}{\Rightarrow} f(\alpha) = 0$ oder $g(\alpha) = 0$ ■

(b) α algebraisch genau dannn, wenn φ_α nicht injektiv ist.

(c) Ist α algebraisch über K, so gibt es ein eindeutig bestimmtes, irreduzibles und normiertes Polynom $f_\alpha \in K[X]$ mit $f_\alpha(\alpha) = 0$ und Kern(φ_α) $= (f_\alpha)$.
f_α heißt **Minimalpolynom** von α.

Beweis: $K[X]$ ist Hauptidealring $\Rightarrow \exists \widetilde{f_\alpha}$ mit Kern(φ_α) $= (\widetilde{f_\alpha})$. Wegen (a) ist $\widetilde{f_\alpha}$ irreduzibel, eindeutig bis auf Einheit in $K[X]$, also ein Element aus $K^\times \Rightarrow \exists! \lambda \in K^\times$, so dass $\lambda \widetilde{f_\alpha} = f_\alpha$ normiert ist. ■

(d) $K[\alpha] :=$ Bild(φ_α) $= \{f(\alpha) : f \in K[X]\} \subset L$ ist der kleinste Unterring von L, der K und α enthält.

(e) α ist transzendent $\Leftrightarrow K[\alpha] \cong K[X]$

Beweis: α ist transzendent $\Rightarrow$ Kern(φ_α) $= \{0\} \Rightarrow \varphi_\alpha$ injektiv ■

(f) Ist α algebraisch über K, so ist $K[\alpha]$ ein Körper und $[K[\alpha] : K] = \deg(f_\alpha)$

Beweis: Nach Homomorphiesatz ist $K[\alpha] \cong K[X]/$Kern(φ_α).
Kern(φ_α) ist maximales Ideal, da Primideal $\neq (0)$ in $K[X]$ (siehe Bew. Satz 8, Beh. 2) $\Rightarrow K[\alpha]$ ist Körper.
$f_\alpha(\alpha) = 0$, also $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0$ mit $c_i \in K$, $c_0 \neq 0$ (da f_α irreduzibel), $\alpha(\alpha^{n-1} + \cdots + c_1) = -c_0$. Ebenso: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ ist K-Basis von $K[\alpha]$, denn ist $\sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha^i = 0$ mit $c_i \in K$, so ist $\sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in$ Kern φ_α, also sind alle $c_i = 0$, also sind $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ linear unabhängig. Sei $g(\alpha) \in K[\alpha]$ für ein $g \in K[X]$, und schreibe $g = q \cdot f_\alpha + r$ mit Grad$(r) < n$. Also ist $g(\alpha) = r(\alpha)$ und $r = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$, also erzeugen $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ ganz $R[\alpha]$. ■

Definition 3.1.3

Sei L/K Körpererweiterung.

(a) Für $A \subset L$ sei $K(A)$ der kleinste Teilkörper von L, der A und K umfaßt; $K(A)$ heißt der **von A erzeugte Teilkörper** von L. Es ist

$$K(A) = \left\{ \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} : n \geq 1, \alpha_i \in A, f, g \in K[X_1, \ldots, X_n], g \neq 0 \right\}$$

(b) L/K heißt **einfach**, wenn es $\alpha \in L$ gibt mit $L = K(\alpha)$

(c) L/K heißt **endlich erzeugt**, wenn es eine endliche Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset L$ gibt mit $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Bemerkung 3.1.4

Sind M/L und L/K endlich, so auch M/K und es gilt $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$

Beweis: Sei $b_1, \dots, b_m$ K-Basis von L und $e_1, \dots, e_n$ L-Basis von $M \Rightarrow B = \{e_i b_j : \ i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ ist K-Basis von M.

denn: B erzeugt M: Sei $\alpha \in M$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in L$, $\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$ einsetzen $\Rightarrow$ Behauptung.

B linear unabhängig:

Ist $\sum \mu_{ij} e_i b_j = 0$, so ist für jedes feste i : $\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} b_j = 0$, da e_i über L linear unabhängig sind. Da die b_j linear unabhängig sind, sind die $\mu_{ij} = 0$ ■

Notation: L/K Körpererweiterung, $\alpha \in L$, $K[\alpha] = \text{Bild}(\varphi_\alpha) = \dots$
$K(\alpha) = \text{Quot}(K[\alpha]) = K[\alpha]$, falls α algebraisch.

Bemerkung 3.1.5

Für eine Körpererweiterung L/K sind äquivalent:

(i) L/K ist endlich.

(ii) L/K ist endlich erzeugt und algebraisch.

(iii) L wird von endlich vielen über K algebraischen Elementen erzeugt.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Jede K-Basis in L ist auch Erzeugendensystem von L/K. Ist $\alpha \in L$ transzendent über K, so ist $K[\alpha] \cong K[X]$ ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum in L, Widerspruch. Also sind alle Elemente in L algebraisch.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (i) Induktion über die Anzahl n der Erzeuger:

$n = 1$: $[K(\alpha) : K] = \text{Grad}(f_\alpha)$ nach 3.1.2 (f).

$n > 1$: $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(\alpha_n)$, $K' := K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})/K$ ist endlich nach Induktionsvorraussetzung und L/K' ist endlich nach Fall 1, also folgt aus 3.1.4 L/K ist endlich.

■

Beispiel: $\cos\frac{2\pi}{n}$ ist für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$.

denn:
$$\cos\frac{2\pi}{n} = \Re\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} + \overline{e^{\frac{2\pi i}{n}}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{-\frac{2\pi i}{n}}\right)$$

$e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist Nullstelle von $X^n - 1$, also algebraisch (über $\mathbb{Q}$) $\Rightarrow K = \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$ ist endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, $\cos\frac{2\pi}{n} \in K \overset{3.5(i)\Rightarrow(ii)}{\Rightarrow} \cos\frac{2\pi}{n}$ ist algebraisch.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) \subsetneq K \; (n \geq 3)$

Bemerkung 3.1.6
Seien $K \subset L \subset M$ Körper. Sind M/L und L/K algebraisch, so auch M/K

Beweis: Sei $\alpha \in M$, $f_\alpha = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in L[X]$ mit $f_\alpha(\alpha) = 0$. Dann ist α algebraisch über $K(c_0, \ldots, c_n) =: L' \subset L$, L' ist endlich erzeugt über $K \overset{3.1.5}{\Rightarrow} L'/K$ endlich. Außerdem ist $L'(\alpha)/L'$ endlich. $\overset{(b)}{\Rightarrow} L'(\alpha)/K$ endlich $\Rightarrow \alpha$ algebraisch über K. ■

3.2 Algebraischer Abschluss

Proposition 3.2.1 (Kronecker)
Sei K Körper, $f \in K[X]$, f nicht konstant.

Es gibt eine endliche Körpererweiterung L/K, so dass f in L eine Nullstelle hat. Genauer: $[L : K] \leq \operatorname{Grad} f$.

Beweis: Œf irreduzibel. Setze $L := K[X]/(f)$. L ist Körper, da (f) maximales Ideal ist. $\alpha = \bar{X}$ = Klasse von X in L ist Nullstelle von f. Genauer: f ist das Minimalpolynom von α. ■

Bemerkung 3.2.2
Ist $f \in K[X] \setminus \{0\}$ und $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist $X - \alpha$ ein Teiler von f.

Beweis: $\{f \in K[X] : f(\alpha) = 0\}$ ist ein Ideal im Hauptidealring $K[X]$ und $X - \alpha$ sein Erzeuger. ■

Bemerkung + Definition 3.2.3
Sei K Körper, $f \in K[X] \setminus K$

(a) Es gibt eine endliche Körpererweiterung L/K, so dass f über L in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis: Induktion über $n = \deg(f)$:

$n = 1$ ✓

$n \geq 1$ L_1 wie in Proposition 3.2.1. Dann ist $f(X) = (X - \alpha) \cdot f_1(X)$ in $L_1[X]$, $\deg(f_1) = n - 1$. Also gibt es L_2/L_1, so dass $f_1(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - \alpha_i)$ mit $\alpha_i \in L_2$. Dabei ist L_2/L_1 endlich, L_1/K endlich, also L_2/K endlich.

■

(b) L/K heißt **Zerfällungskörper** von f, wenn f über L in Linearfaktoren zerfällt, und L über K von den Nullstellen von f erzeugt wird.

(c) Es gibt einen Zerfällungskörper $Z(f)$.

Beweis: Induktion über den Grad und die Anzahl über die irreduziblen Faktoren:

ŒSei f irreduzibel. Sei $L_1 := K[X]/(f)$ und $\alpha := \bar{X} \in L$. Dann ist $L_1 = K(\alpha)$ und $f = (X - \alpha) \cdot g$ in $L_1[X]$. Nach Induktionsvorraussetzung gibt es einen Zerfällungskörper $Z(g)$ von g über L_1, also wird $Z(g)$ über K von α und den Nullstellen von g erzeugt. ■

(d) Ist f irreduzibel und $n = \deg(f)$, so ist $[Z(f) : K] \leq n!$

Beweis: In Proposition 3.2.1 ist $[L : K] = n = \deg(f)$ und $f = (X - \alpha) \cdot f_1$ mit $\deg(f_1) = n - 1$. Mit Induktion folgt die Behauptung. ■

Beispiel:

(1) $f \in K[X]$ irreduzibel vom Grad 2. Dann ist $L = K[X]/(f)$ der Zerfällungskörper von f. $f(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$, $\alpha, \beta \in L$. Ist $f(X) = X^2 + pX + q$, so ist $\alpha + \beta = -p$

(2) $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ Nullstelle von f. In $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegt keine weitere Nullstelle von f, da $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$

$$X^3 - 2 = (X - \alpha)\underbrace{(X^2 + \alpha X + \alpha^2)}_{\text{irreduzibel über } \mathbb{Q}(\alpha)} \Rightarrow [Z(f) : \mathbb{Q}] = 6$$

(3) $K = \mathbb{Q}$, p Primzahl, $f(X) = X^p - 1 = (X-1)\underbrace{(X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1)}_{f_1}$

f_1 irreduzibel (siehe 2.6.3).

$L := \mathbb{Q}[X]/(f_1) =: \mathbb{Q}(\zeta_p)$; $(\zeta_p^k)^p = \zeta_p^{pk} = 1$; $k = 1, \ldots, p-1$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p) = Z(f)$

Definition + Bemerkung 3.2.4

Sei K ein Körper.

(a) K heißt **algebraisch abgeschlossen**, wenn jedes nichtkonstante Polynom $f \in K[X]$ in K eine Nullstelle hat.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) K ist algebraisch abgeschlossen

(ii) Jedes $f \in K[X] \setminus K$ zerfällt über K in Linearfaktoren

(iii) K besitzt keine echte algebraische Körpererweiterung.

Beweis:

(i)⇒(ii) Induktion über den Grad von f.

(ii)⇒(iii) Angenommen L/K algebraisch, $\alpha \in L \setminus K$. Dann sei $f_\alpha \in K[X]$ das Minimalpolynom von α; f_α ist irreduzibel und zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow \deg(f) = 1$ ↯

(iii)⇒(ii) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel, $L := K[X]/(f)$, dann folgt aus der Voraussetzung $L = K$ und damit $\operatorname{Grad} f = 1$.

■

Satz 11

Zu jedem Körper K gibt es eine algebraische Körpererweiterung $\bar{K}/K$, so dass $\bar{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. $\bar{K}$ heißt **algebraischer Abschluss** von K.

Beweis:

Hauptschritt: Es gibt algebraische Körpererweiterung K'/K, so dass jedes nichtkonstante $f \in K[X]$ in K' eine Nullstelle hat.

Dann: sei $K'' := (K')'$ und weiter $K^i := (K^{i-1})'$, $i \geq 3$; Es ist $K^i \subset K^{i+1}$.

$L := \bigcup_{i \geq 1} K^i$. Es gilt:

(i) L ist Körper: $a+b \in L$ für $a \in K^i, b \in K^j$, da Œ: $i \leq j \Rightarrow a$ auch in K^j

(ii) L ist algebraisch über K: jedes $\alpha \in L$ liegt in einem K^i, K^i ist algebraisch über K.

(iii) L ist algebraisch abgeschlossen.

denn: Sei $f \in L[X]$, $f = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, $c_i \in L$. Also gibt es j mit $c_i \in K^j$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow f$ hat Nullstelle in $(K^j)' = K^{j+1} \subset L \Rightarrow$ Behauptung

Bew.(Hauptschritt): Für jedes $f \in K[X] \setminus K$ sei X_f ein Symbol. $\mathcal{X} := \{X_f : f \in K[X] \setminus K\}$, $R := K[\mathcal{X}]$, I sei das von allen $f(X_f)$ in R erzeugte Ideal.

Behauptung: $I \neq R$.
Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ mit $I \subset \mathfrak{m}$, $K' := R/\mathfrak{m}$, K' ist Körper, K'/K ist algebraisch,
denn: K' wird über K erzeugt von den $\bar{X}_f \in \mathcal{X}$ und $f(\bar{X}_f) = 0$ in K', weil $f(\bar{X}_f) \in I \subset \mathfrak{m}$.
f hat in K' die Nullstellen (Klasse von) $\bar{X}_f$.

Beweis der Behauptung Angenommen $I = R$, also $1 \in I$. Dann gibt es $n \geq 1, f_1, \dots, f_n \in K[X] \setminus K$ und $g_1, \dots, g_n \in R$ mit $1 = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i(X_{f_i})$. Sei L/K Körpererweiterung, in der jedes $f_i, i = 1, \dots, n$ Nullstelle α_i hat (z.B. der Zerfällungskörper von $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$).

Setze nun α_i für X_{f_i} ein $(i = 1, \dots, n)$ (und 42 für alle anderen X_f). Dann ist $1 = \sum_{i=1}^{n} g_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 42, \dots) \cdot \underbrace{f_i(\alpha_i)}_{=0} = 0$ ↯ ∎

3.3 Fortsetzung von Körperhomomorphismen

Sei $f(x) = x^2 - 2$, $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[X]/(f)$ und $\alpha = \bar{X}$, also $f(\alpha) = 0$. Es gibt zwei Einbettungen von L in $\mathbb{R}$: Schreibe $x \in L$ als $x = a + b\alpha$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ (dies ist eindeutig), dann sind $\varphi_1(x) := a + b\sqrt{2}$ und $\varphi_2(x) := a - b\sqrt{2}$ Homomorphismen $L \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.3.1

Sei $L = K(\alpha)$, K Körper (also einfache Körpererweiterung). Sei α algebraisch über K, $f = f_\alpha \in K[X]$ das Minimalpolynom. Sei K' Körper und $\sigma : K \to K'$ ein Körperhomomorphismus. Sei f^σ das Bild von f in $K'[X]$ unter dem Homomorphismus $K[X] \to K'[X]$, $\sum a_i X^i \mapsto \sum \sigma(a_i) X^i$. Dann gilt:

(a) Ein Homomorphismus $\widetilde{\sigma} : L \to K'$ heißt **Fortsetzung** von σ, wenn $\widetilde{\sigma}(a) = \sigma(a)$ für alle $a \in K$ gilt.

(b) Ist $\widetilde{\sigma} : L \to K'$ Fortsetzung von σ, so ist $\widetilde{\sigma}(\alpha)$ Nullstelle von f^σ.

(c) Zu jeder Nullstelle β von f^σ in K' gibt es genau eine Fortsetzung $\widetilde{\sigma} : L \to K'$ von σ mit $\widetilde{\sigma}(\alpha) = \beta$.

Beweis:

(b) $f^\sigma(\widetilde{\sigma}(\alpha)) = f^{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\sigma}(\alpha)) = \widetilde{\sigma}(f(\alpha)) = 0$

(c) Eindeutigkeit: ✓ $\widetilde{\sigma}$ ist auf den Erzeugern von L festgelegt.
Existenz:

$$\begin{array}{lll} \varphi : K[X] & \to K', & X \mapsto \beta \\ & & \underbrace{\sum a_i X^i}_{=g} \mapsto \sum \sigma(a_i)\beta^i = g^\sigma(\beta) \end{array}$$

$\Rightarrow \varphi(f) = f^\sigma(\beta) \overset{\text{Hom.satz}}{\Rightarrow} \varphi$ induziert $\widetilde{\sigma} : \underbrace{K[X]/(f)}_{=L} \to K'$ ■

Folgerung 3.3.2

Sei $f \in K[X] \setminus K$. Dann ist der Zerfällungskörper $Z(f)$ bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis: Seien L, L' Zerfällungskörper, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i die Nullstelle von f. Sei weiter $\beta_1 \in L'$ Nullstelle von f. Nach 3.3.1 gibt es $\sigma : K(\alpha_1) \to L'$ mit $\sigma_{|K} = \mathrm{id}_K$ und $\sigma(\alpha_1) = \beta_1$ und $\tau : K(\beta_1) \to L$ mit $\tau(\beta_1) = \alpha_1$ und $\tau_{|K} = \mathrm{id}_K$.

$\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{K(\alpha_1)}$, $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{K(\beta_1)} \Rightarrow K(\alpha_1) \cong K(\beta_1)$

Mit Induktion über n folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.3.3

Sei L/K algebraische Körpererweiterung, $\bar{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. $\sigma : K \to \bar{K}$ ein Homomorphismus. Dann gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{\sigma} : L \to \bar{K}$.

Beweis: Ist L/K endlich, so folgt die Aussage aus 3.3.1. Für den allgemeinen Fall sei $\mathcal{M} := \{(L', \tau) : L'/K$ Körpererw., $L' \subseteq L, \tau : L' \to \bar{K}$ Fortsetzung von $\sigma\}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset : (K, \sigma) \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ ist geordnet durch $(L_1, \tau_1) \subseteq (L_2, \tau_2) :\Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$ und τ_2 Fortsetzung von τ_1. Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ totalgeordnet $\widetilde{L} := \bigcup_{(L', \tau) \in \mathcal{N}} L'$.

$\widetilde{L}$ ist Körper, $\widetilde{L} \subseteq L$, $\widetilde{\tau} : \widetilde{L} \to \bar{K}$, $\widetilde{\tau}(x) = \tau(x)$, falls $x \in L'$ und $(L', \tau) \in \mathcal{N}$.

Wohldefiniertheit: ist $x \in L''$, so ist $Œ(L', \tau) \subseteq (L'', \tau'')$ und damit $\tau''(x) = \tau(x)$.
$\Rightarrow (\widetilde{L}, \widetilde{\tau})$ ist obere Schranke $\overset{Zorn}{\Rightarrow}$ $\mathcal{M}$ hat maximales Element $(\widetilde{L}, \widetilde{\sigma})$

Zu zeigen: $\widetilde{L} = L$. Sonst sei $\alpha \in L \setminus \widetilde{L}$ und σ' Fortsetzung von $\widetilde{\sigma}$ auf $\widetilde{L}(\alpha)$ (nach 3.3.1)

$\Rightarrow (\widetilde{L}(\alpha), \sigma') \in \mathcal{M}$ und $(\widetilde{L}, \widetilde{\sigma}) \subsetneq (\widetilde{L}(\alpha), \sigma')$ ↯ ■

Folgerung 3.3.4

Für jeden Körper K ist der algebraische Abschluss $\bar{K}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $\underset{K}{\underset{\supseteq}{\bar{K}}}$ und $\underset{K}{\underset{\supseteq}{C}}$ algebraische Abschlüsse von K. Nach Proposition 3.3.3 gibt es $\xrightarrow{\text{id}}$ Körperhomomorphismus $\sigma : \bar{K} \to C$, der id_K fortsetzt. Dann ist $\sigma(\bar{K})$ auch algebraisch abgeschlossen: ist $\underset{=\sum a_i X^i}{f} \in \sigma(\bar{K})[X] \Rightarrow \underset{=\sum \sigma^{-1}(a_i) X^i}{f^{\sigma^{-1}}} \in \bar{K}[X]$ hat Nullstelle $\alpha \in \bar{K}$.
$\Rightarrow \sigma(\alpha)$ ist Nullstelle von f:
$\sum \sigma^{-1}(a_i)\alpha^i = 0 \Rightarrow 0 = \sigma(\sum \sigma^{-1}(a_i)\alpha^i) = \sum a_i \sigma(\alpha^i) = \sum a_i \sigma(\alpha)^i$

C ist algebraisch über K, also erst recht über $\sigma(\bar{K}) \overset{3.2.4}{\Rightarrow} \sigma(\bar{K}) = C$ ■

Definition + Bemerkung 3.3.5

Seien $L/K, L'/K$ Körpererweiterungen von K.

(a)
$$\text{Hom}_K(L, L') := \{\sigma : L \to L' \text{ Körperhomomorphismus}, \sigma_{|K} = \text{id}_K\}$$

$$\text{Aut}_K(L) := \{\sigma : L \to L \text{ Körperautomorphismus}, \sigma|_K = \text{id}_K\}$$

(b) Ist L/K endlich, $\bar{K}$ algebraischer Abschluss von K, so ist $|\text{Hom}_K(L, \bar{K})| \leq [L : K]$.

Beweis: Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_i algebraisch über K. Induktion über n:

$n = 1$ Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α_1. Für jedes $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$ ist $\sigma(\alpha_1)$ Nullstelle von $f^\sigma \in \bar{K}[X]$. Durch $\sigma_{|K} = \text{id}_K$ und $\sigma(\alpha_1)$ ist σ eindeutig bestimmt. $\Rightarrow |\text{Hom}_K(L, \bar{K})| = |\text{Nullstellen von } f^\sigma| \leq \deg(f^\sigma) = [L : K]$

$n > 1$ Sei $L_1 = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), f \in L_1[X]$ das Minimalpolynom von α_n über L_1. Für $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$ ist $\sigma(\alpha_n)$ Nullstelle von $f^{\sigma_1} \in \bar{K}[X]$ mit $\sigma_1 = \sigma_{|L_1} \Rightarrow |\text{Hom}_K(L, \bar{K})| \leq |\text{Hom}_K(L_1, \bar{K})| \cdot \deg(f) \overset{\text{IV}}{\leq} [L_1 : K] \cdot [L : L_1] \overset{3.1.6(b)}{=} [L : K]$

■

3.4 Separable Körpererweiterungen

Definition + Bemerkung 3.4.1

Sei L/K algebraische Körpererweiterung und $\bar{K}$ algebraischer Abschluss von K.

(a) $f \in K[X]$ heißt **separabel**, wenn f in $\bar{K}$ keine mehrfache Nullstelle hat (also $\deg(f)$ verschiedene Nullstellen).

(b) $\alpha \in L$ heißt separabel, wenn das Minimalpolynom von α über K separabel ist.

(c) L/K heißt separabel, wenn jedes $\alpha \in L$ separabel ist.

(d) $f \in K[X] \setminus K$ ist genau dann separabel, wenn $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$. Dabei ist für $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ die **Ableitung** definiert durch $f' := \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$

Beweis: Sei $f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i),\ \alpha_i \in \bar{K} \Rightarrow f'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}(X - \alpha_j)$ nach Definition ist f separabel $\Leftrightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Beh.: $\alpha_1 = \alpha_i$ für ein $i \geq 2 \Leftrightarrow (X - \alpha_1) \mid f'$

Aus der Behauptung folgt: f separabel $\Leftrightarrow$ f und f' teilerfremd in $\bar{K}[X]$. Ist das so, dann ist $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$ (teilerfremd in $K[X]$). Ist umgekehrt $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$, so gibt es $g, h \in K[X]$ mit $1 = gf + hf'$.

Das stimmt dann auch in $\bar{K}[X]$, also sind f und f' in $\bar{K}[X]$ teilerfremd.

Bew. der Beh.: $(X - \alpha_1)$ teilt $\prod_{j \neq i}(X - \alpha_j)$, falls $i \neq 1$. Also gilt $X - \alpha_1$ teilt $f' \Leftrightarrow X - \alpha_1$ Teiler von $\prod_{j \neq 1}(X - \alpha_j) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_j$ für ein $j \neq 1$. ■

(e) Ist $f \in K[X]$ irreduzibel, so ist f separabel genau dann, wenn $f' \neq 0$ (Nullpolynom) ist.

Beweis: Ist $f' = 0$, so ist $\mathrm{ggT}(f, f') = f \neq 1$

Ist $f' \neq 0$, so ist $\deg f' < \deg f$; ist f irreduzibel und $\alpha \in \bar{K}$ Nullstelle von f, so ist f das Minimalpolynom von $\alpha \overset{f' \neq 0}{\Rightarrow} \alpha$ nicht Nullstelle von $f' \Rightarrow \mathrm{ggT}(f, f') = 1$ ■

Folgerung 3.4.2

Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist jede algebraische Körpererweiterung separabel.

Beispiele 3.4.3

Sei p Primzahl, $K = \mathbb{F}_p(t) = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_p[t])$. Sei $f(X) = X^p - t \in K[X]$.
$f'(X) = pX^{p-1} = 0$, $t \in \mathbb{F}_p[t]$ ist Primelement $\overset{\text{Eisenstein}}{\Rightarrow}$ f irreduzibel in $(\mathbb{F}_p[t])[X] \overset{??}{\Rightarrow} f$ irreduzibel in $K[X]$

$f(X) = X^p - a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow f' = 0$, f ist nicht irreduzibel, da f Nullstelle in $\mathbb{F}_p$ hat, dh. es gibt ein $b \in \mathbb{F}_p$ mit $b^p = a$.
Denn: $\varphi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$, $b \mapsto b^p$ ist Körperhomomorphismus! (denn $(a+b)^p = a^p + b^p$)

Proposition 3.4.4

Sei $\mathrm{char}(K) = p > 0$, $f \in K[X]$ irreduzibel, $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

(a) Es gibt ein separables irreduzibles Polynom $g \in K[X]$, so dass $f(X) = g(X^{p^r})$ für ein $r \geq 0$.

(b) Jede Nullstelle von f in $\bar{K}$ hat Vielfachheit p^r.

Beweis: Sei f nicht separabel, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = 0 \Rightarrow i a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n \Rightarrow a_i = 0$, falls i nicht durch p teilbar $\Rightarrow f$ ist Polynom in X^p, dh. $f = g_1(X^p)$. Mit Induktion folgt die Behauptung. ■

Proposition + Definition 3.4.5

Sei L/K endliche Körpererweiterung, $\bar{K}$ algebraischer Abschluss von L.

(a) $[L : K]_s := |\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})|$ heißt **Separabilitätsgrad** von L über K.

(b) Ist L' Zwischenkörper von L/K, so ist $[L : K]_s = [L : L']_s \cdot [L' : K]_s$

(c) L/K ist separabel $\Leftrightarrow [L : K] = [L : K]_s$

(d) Ist $\mathrm{char}(K) = p > 0$, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $[L : K] = p^r \cdot [L : K]_s$

Beweis:

(b) Sei $\mathrm{Hom}_K(L', \bar{K}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $\mathrm{Hom}_{L'}(L, \bar{K}) = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$. Sei $\widetilde{\sigma}_i : \bar{K} \to \bar{K}$ Fortsetzung von σ_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\widetilde{\sigma}_i \in \mathrm{Aut}_K(\bar{K})$.

Beh.:

(1) $\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\widetilde{\sigma}_i \circ \tau_j : \ i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$

(2) $\widetilde{\sigma}_i \circ \tau_j = \widetilde{\sigma_{i'}} \circ \tau_{j'} \Leftrightarrow i = i'$ und $j = j'$.

Aus (1) und (2) folgt (b).

Bew.(1): "$\supseteq$" ✓ "$\subseteq$": Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})$. Dann gibt es ein i mit $\sigma_{|L'} = \sigma_i \Rightarrow \widetilde{\sigma}_i^{-1} \circ \sigma_{|L'} = \mathrm{id}_{L'} \Rightarrow \exists\, j$ mit $\widetilde{\sigma}_i^{-1} \circ \sigma = \tau_j \Rightarrow \sigma = \widetilde{\sigma}_i \circ \tau_j$.

Bew.(2): Sei $\widetilde{\sigma}_i \circ \tau_j = \widetilde{\sigma_{i'}} \circ \tau_{j'} \Rightarrow \underbrace{\widetilde{\sigma}_{i|L'}}_{=\sigma_i} = \underbrace{\widetilde{\sigma_{i'}}_{|L'}}_{\sigma_{i'}} \Rightarrow i = i' \Rightarrow \tau_j = \tau_{j'} \Rightarrow j = j'$.

(c) "$\Rightarrow$": Sei $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Induktion über n:

n=1 $L = K(\alpha)$, $f = f_\alpha \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über $K \Rightarrow [L : K]_s \overset{3.3.5}{=} |\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } \bar{K}\}| = \deg f = [L : K]$.

n>1 $L_1 := K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $f \in L_1[X]$ das Minimalpolynom von α_n. Zu jedem $\sigma_1 \in \mathrm{Hom}_K(L_1, \bar{K})$ und jeder Nullstelle von f in $\bar{K}$ gibt es genau eine Fortsetzung $\widetilde{\sigma_1} : L \to \bar{K}$.

$\overset{f \text{ separabel}}{\Rightarrow} [L : K]_s = |\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})| = \deg(f) \cdot |\mathrm{Hom}_K(L_1, \bar{K})| = [L : L_1] \cdot [L_1 : K]_s \overset{\text{IV}}{=} [L : L_1] \cdot [L_1 : K] = [L : K]$.

"$\Leftarrow$": Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist L/K separabel. Sei also $\mathrm{char}(K) = p > 0$ und $\alpha \in L$; $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α. Nach 3.4.4 gibt es $r \geq 0$ und ein separables, irreduzibles Polynom $g \in K[X]$ mit $f(X) = g(X^{p^r}) \Rightarrow [K(\alpha) : K]_s = |\{\text{Nullstellen von } g \text{ in } \bar{K}\}| \overset{g \text{ separabel}}{=} \deg(g)$ $(*)$ $\Rightarrow [K(\alpha) : K] = \deg(f) = p^r \cdot \deg(g) = p^r \cdot [K(\alpha) : K]_s \Rightarrow [L : K] = [L : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] \geq [L : K(\alpha)]_s \cdot p^r [K(\alpha) : K]_s \overset{(b)}{=} [L : K]_s \overset{\text{Voraussetzung}}{\Rightarrow} p^r = 1 \Rightarrow g = f \Rightarrow \alpha$ separabel.

(d) folgt aus $(*)$ ■

Satz 12 (Satz vom primitiven Element)

Jede endliche separable Körpererweiterung L/K ist einfach, also gibt es $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$. α heißt **primitives Element**.

Beweis: Ist K endlich, so folgt aus 3.5.1, dass $L^\times$ zyklische Gruppe ist. Ist $L^\times = \langle \alpha \rangle$, so ist $L = K[\alpha]$.

Sei also K unendlich, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Œ: $r = 2$, also $L = K(\alpha, \beta)$. Sei $\bar{K}$ algebraischer Abschluss von L, $[L : K] = n$. Sei $\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ (3.4.5(c)).

Sei $g(X) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)) + (\sigma_i(\beta) - \sigma_j(\beta))X) \in \bar{K}[X]$, $g \neq 0$, denn aus $\sigma_i(\alpha) = \sigma_j(\alpha)$ und $\sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta)$ folgt $\sigma_i = \sigma_j$. Da K unendlich ist, gibt es $\lambda \in K$ mit $g(\lambda) \neq 0$.

Beh.: $\gamma := \alpha + \lambda\beta \in L$ erzeugt L über K.

denn: Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von γ über K. Für jedes i ist $f(\sigma_i(\gamma)) \overset{\sigma_{i|K} = id_K}{=} \sigma_i(f(\gamma))$. Angenommen, $\sigma_i(\gamma) = \sigma_j(\gamma)$ für ein $i \neq j$. Dann wäre $(\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\beta)\lambda) - (\sigma_j(\alpha) + \sigma_j(\beta)\lambda) = 0 \Rightarrow g(\lambda) = 0$ ↯ $\Rightarrow f$ hat mindestens n Nullstellen $\Rightarrow \deg(f) = [K(\gamma) : K] \geq n = [L : K]$, da $\gamma \in L$, folgt $K(\gamma) = L$. ■

3.5 Endliche Körper

Proposition 3.5.1

Ist K ein Körper, so ist jede endliche Untergruppe von $(K^\times, \cdot)$ zyklisch.

Beweis: Sei $G \subseteq K^\times$ endliche Untergruppe, $a \in G$ ein Element maximaler Ordnung. Sei $n = \mathrm{ord}(a)$, $G_n := \{b \in G : \mathrm{ord}(b) \mid n\}$.

Beh.: $G_n = \langle a \rangle$

denn: jedes $b \in G_n$ ist Nullstelle von $X^n - 1$. Diese sind $1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \Rightarrow |G_n| = |\langle a \rangle| = n$.

Nach Folgerung 1.4.5 ist $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ mit $a_i | a_{i+1} \Rightarrow$ Für jedes $b \in G$ ist $\mathrm{ord}(b)$ Teiler von $a_r = n$. ■

Definition + Bemerkung 3.5.2

Sei K Körper mit Charakteristik $p > 0$.

(a) Dann ist die Abbildung $\varphi : K \to K$, $x \mapsto x^p$ ein Homomorphismus. Er heißt **Frobenius**-Homomorphismus.

(b) Es ist $\varphi(x) = x \iff x \in \mathbb{F}_p$ (als Primkörper in K).

Satz 13

Sei p Primzahl, $n \geq 1, q = p^n$. Sei $\mathbb{F}_q$ der Zerfällungskörper von $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$.
Dann gilt:

(a) $\mathbb{F}_q$ hat q Elemente.

(b) Zu jedem endlichen Körper K gibt es ein $q = p^n$ mit $K \cong \mathbb{F}_q$

Beweis:

(a) $f(X) = X^q - X$ ist separabel, da $f'(X) = -1 \Rightarrow \mathrm{ggT}(f, f') = 1 \Rightarrow f$ hat q verschiedene Nullstellen in $\mathbb{F}_q \Rightarrow |\mathbb{F}_q| \geq q$.

Umgekehrt: Jedes $a \in \mathbb{F}_q$ ist Nullstelle von f.

denn: $\mathbb{F}_q$ wird erzeugt von den Nullstellen von f. Sind also a, b Nullstellen von f, so ist $a^q = a$, $b^q = b$, also auch $(ab)^q = ab, (a+b)^q = a^q + b^q = a + b$.

(b) $(K^\times, \cdot)$ ist Gruppe der Ordnung $q - 1 \Rightarrow$ Für jedes $a \in K$ gilt $a^q = a \Rightarrow$ Jedes $a \in K$ ist Nullstelle von $X^q - X \Rightarrow K$ liegt im Zerfällungskörper von $X^q - X \Rightarrow K$ enthält $\mathbb{F}_q$ (bis auf Isomorphie).

$$\overset{|K| = |\mathbb{F}_q| = q}{\Rightarrow} K \cong \mathbb{F}_q$$

■

Folgerung 3.5.3

Jede algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers ist separabel.

Beweis: $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ separabel, da $X^q - X$ separables Polynom ist. Ist K endlich, also $K = \mathbb{F}_q$, L/K algebraisch, $\alpha \in L$, so ist $K(\alpha)/K$ endlich, also separabel (da $K(\alpha) = \mathbb{F}_{q^r}$ für ein $r \geq 1$)

Definition: Ein Körper K heißt **vollkommen** (oder perfekt), wenn jede algebraische Körpererweiterung L/K separabel ist. ■

3.6 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Aufgabe: Sei $M \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, z.B.: $M = \{0, 1\}$.

Linien: $\mathcal{L}(M) := \{L \subset \mathbb{R}^2 \text{ Gerade: } |L \cap M| \geq 2\} \cup \{K_{z_1 - z_2}(z_3) : z_1, z_2, z_3 \in M\}$

$(K_r(z) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ |z - y| = r\})$

$K_1(M) := \{z \in \mathbb{C} : \ z \text{ liegt auf zwei verschiedenen Linien in } \mathcal{L}(M)\}$
$K_n(M) := K_1(K_{n-1}(M))$ für $n \geq 2$
$K(M) := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(M)$

Satz 14

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $0, 1 \in M$ und $K(M)$ die Menge der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte.

(a) $K(M)$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.

(b) $K(M)/\mathbb{Q}(M)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, dabei sei $\mathbb{Q}(M)$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Q}$ und M umfasst und mit a auch $\bar{a}$ enthält.

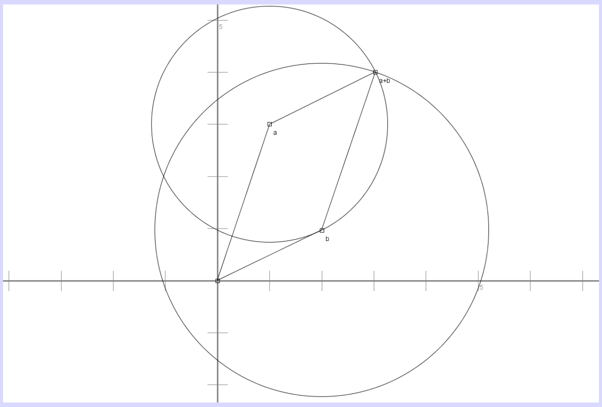
(c) Eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ liegt genau dann in $K(M)$, wenn es eine Kette

$$\mathbb{Q}(M) = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n$$

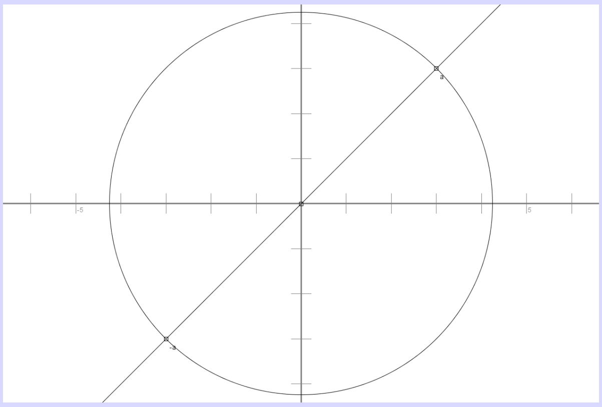
gibt mit $a \in L_n$ und $[L_i : L_{i-1}] = 2$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis:

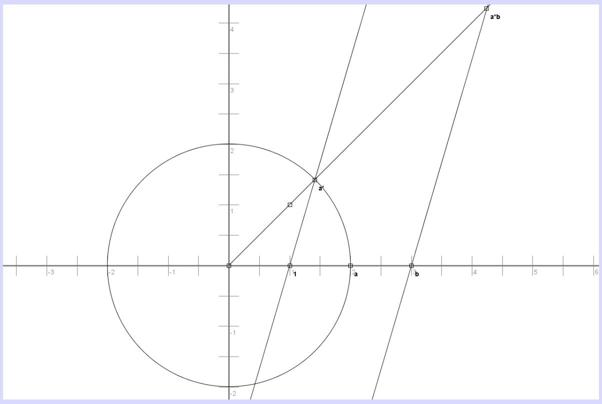
(a) Seien $a, b \in K(M)$. Zu zeigen: $a + b, -a, a \cdot b, \frac{1}{a} \in K(M)$.
$a + b \in K(M)$:



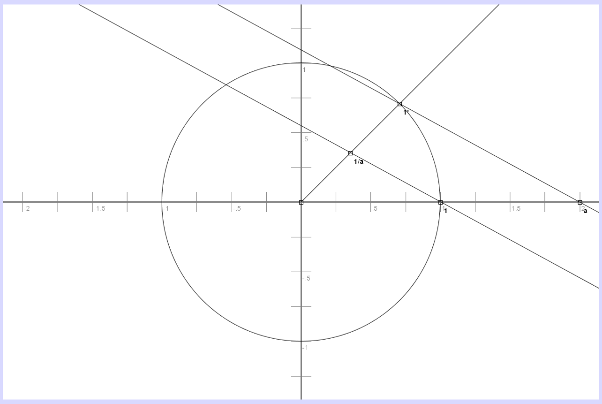
$-a \in K(M)$:



$a \cdot b \in K(M)$:
Strahlensatz: $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$, also $x = a \cdot b$. Winkel addieren ✓ $\Rightarrow a \cdot b$ allgemein ✓



$\frac{1}{a} \in K(M)$: Œ$a \in \mathbb{R}$



(b) folgt aus (a)

(c) Zeige mit Induktion über n: Jedes $a \in K_n(M)$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}(M)$. Wegen $K_n(M) = K_1(\mathcal{L}_n(M))$ genügt es, die Behauptung für $n = 1$ zu zeigen. Sei also $z \in K_1(M)$.

Vorüberlegung: Für $z \in M$ ist $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{Q}(M)$ und $\Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \in \mathbb{Q}(M)$.

a) z ist Schnittpunkt zweier Geraden in $\mathcal{L}(M) \Rightarrow z$ ist Lösung zweier linearer Gleichungen $z_1 + \lambda z_2 = z_1' + \mu z_2'$

b) z ist Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises: $\Rightarrow$ quadratische Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(M)$

c) z ist Schnittpunkt zweier Kreise $K_{r_1}(m_1)$ und $K_{r_2}(m_2)$ mit Mittelpunkten $m_1, m_2 \in M$. Radien: $r_1 = |z_1 - z_1'|$, $r_2 = \dots$ also $r_1^2 = (z_1 - z_1')(\overline{z_1 - z_1'}) \in \mathbb{Q}(M)$.

Dann ist $|z - m_1|^2 = r_1^2$.

$\Rightarrow z\bar{z} - (z\bar{m}_1 + \bar{z}m_1) = r_1^2 - m_1\bar{m}_1$ und $z\bar{z} - (z\bar{m}_2 + \bar{z}m_2) = r_2^2 - m_2\bar{m}_2 \Rightarrow$ $2\Re[z(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)] = r_1^2 - r_2^2 - (m_1\bar{m}_1 - m_2\bar{m}_2)$

Das ist eine lineare Gleichung, die $\Re(z)$ und $\Im(z)$ enthält. Einsetzen in (1) ergibt quadratische Gleichung für $\Re(z)$ (mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(M)$).

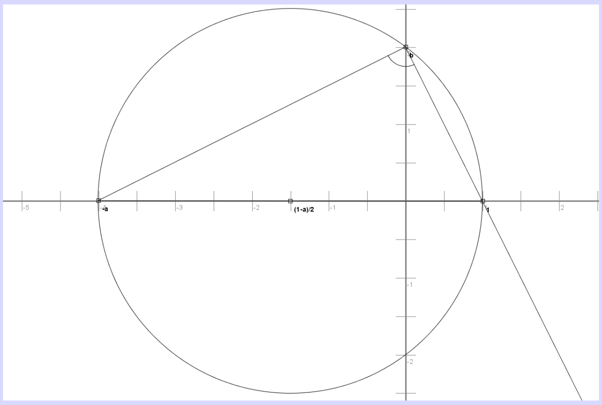
Noch zu zeigen: Ist $a \in \mathbb{C}$ und gibt es eine Kette

$$\mathbb{Q}(M) = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n$$

von Körpererweiterungen mit $[L_i : L_{i-1}] = 2$ und $a \in L_n$, so ist $a \in K(M)$.

Sei also L/K quadratische Erweiterung von Körpern (mit Charakteristik ungleich 2). Dann gibt es $\alpha \in L$ und $a \in K$, so dass $L = K(\alpha)$ und $\alpha^2 = a$, das heißt $L = K(\sqrt{a})$. Zu zeigen ist also: Ist $K \subset K(M)$, so ist $\sqrt{a} \in K(M)$:

Wurzelziehen: $a \in \mathbb{R}$



$\overset{\text{Thales}}{\Rightarrow}$ Winkel ist rechtwinklig $\overset{\text{Höhensatz}}{\Rightarrow}$ $b^2 = |-a| \cdot 1 = a$ ∎

Beispiel: Das regelmäßige Fünfeck ist aus 0 und 1 konstruierbar. Ziel: Konstruiere Nullstellen von $X^5 - 1 = (X-1) \cdot f$, $f := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Trick von Lagrange: $f(X) = X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + X + \frac{1}{X} + 1)$. Mit $Y := X + \frac{1}{X}$ ist dann $\frac{1}{X^2} \cdot f(X) = Y^2 + Y - 1 =: g(Y)$. Ist y Nullstelle von g und ξ Nullstelle von f, so ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(y) \subset \mathbb{Q}(\xi)$ eine Kette wie im Satz.