

## 4 Ströme

### 4.1 Differentialformen und äußere Ableitung

**Ziel:** Integration über orientierte Flächen.

**Definition**

Sei  $k \in \mathbb{R}$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum.

- (1) Eine Abbildung  $\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  heißt multilinear, falls  $\Phi$  in jeder Komponente linear ist.
- (2) Eine Abbildung  $\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  heißt alternierend, falls  $\Phi$  nur das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Komponenten vertauscht werden:

$$\Phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\Phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

- (3)  $\bigwedge^k V := \{\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R} : \Phi \text{ ist multilinear und alternierend}\}.$
- (4)  $\bigwedge^k V$  wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum. Die Elemente von  $\bigwedge^k V$  nennt man  $k$ -Kovektoren, falls  $V = \mathbb{R}^n$ . Ist  $V = (\mathbb{R}^n)^*$ , so werden die Elemente von  $\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* =: \bigwedge_k \mathbb{R}^n$  als  $k$ -Vektoren bezeichnet.

**Bemerkungen:** (1)  $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

(2)  $\bigwedge_1 \mathbb{R}^n = ((\mathbb{R}^n)^*)^* = \mathbb{R}^n$  (mit der üblichen Identifikation).

(3) Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  und  $e_1^*, \dots, e_n^*$  die Dualbasis. Wir schreiben

$$\langle e_j^*, e_i \rangle := e_j^*(e_i) = \delta_{ij}.$$

Statt  $e_j^*$  wird auch  $dx_j$  geschrieben.

(4)  $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$  sind gerade die Determinantenfunktionen.

**Definition**

Seien  $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ . Dann wird

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k) := \det(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\dots,k})$$

erklärt. Man beachte hierbei  $\langle \eta_i, v_j \rangle := \eta_i(v_j)$ .

**Alternativ:** Ist  $\eta_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} dx_j$ ,  $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , so kann man auch

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k) := \det((\eta_{ij}) \cdot (v_1 | \dots | v_k))$$

erklären.

**Ergänzung:** Mit  $\mathcal{T}^k(V) := \{(T: V^k \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ ist } k\text{-linear}\}$  bezeichnet man die Tensoren der Stufe  $k$  über dem Vektorraum  $V$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^k(V) \otimes \mathcal{T}^l(V) &\rightarrow \mathcal{T}^{k+l}(V) \\ (T, S) &\mapsto T \otimes S\end{aligned}$$

ist erklärt durch

$$(T \otimes S)(u_1, \dots, u_{k+l}) := T(u_1, \dots, u_k) \cdot S(u_{k+1}, \dots, u_{k+l}).$$

Man bezeichnet  $T \otimes S$  als das Tensorprodukt von  $T$  und  $S$ . Um für  $p \in \mathbb{N}$  einen  $p$ -Tensor in einen alternierenden  $p$ -Tensor zu überführen, erklärt man die Abbildung

$$\begin{aligned}\text{Alt}: \mathcal{T}^p(V) &\rightarrow \bigwedge^p V \\ T &\mapsto \text{Alt}(T),\end{aligned}$$

wobei

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_p) := \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}).$$

Hier ist  $S_p$  die Menge aller Permutationen (Bijektionen) der Menge  $\{1, \dots, p\}$ . Für  $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  und  $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$  sei

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n.$$

Man stellt fest, dass dieses „Dachprodukt“ assoziativ ist. Ferner gilt

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k = k! \cdot \text{Alt}(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_k).$$

In gleicher Weise erklären wir nun auch ein Dachprodukt für  $k$ -Vektoren.

**Definition**

Seien  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Dann wird

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1, \dots, \eta_k) := \det(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\dots,k})$$

erklärt, wobei  $\eta_1, \dots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ .

Man kann zeigen, dass  $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}$  eine Linearform auf  $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$  ist, wenn man

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k)$$

für  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  erklärt. Die Wohldefiniertheit ist leicht einzusehen. Im Folgenden schreiben wir für  $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  und  $\xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$

$$\langle \omega, \xi \rangle := \omega(\xi).$$

In gleicher Weise wird  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$  als Linearform auf  $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$  erklärt, indem man

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) := (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1, \dots, \eta_k)$$

setzt. Auch hier ist die Wohldefiniertheit leicht zu bestätigen.

Man kann ferner nachweisen, dass

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von  $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$  ist. Ebenso ist

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von  $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ . Diese Basen sind zueinander dual in Bezug auf obige Deutung von  $k$ -Kovektoren als Linearformen auf  $k$ -Vektoren.

**Notation:** Sei

$$I_k^n := \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Für  $I \in I_k^n$  ist  $e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  und  $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  und so weiter.

**Bemerkungen:** (1) Für  $\sigma \in S_k$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^* = \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$  gilt

$$\eta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \eta_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) \cdot \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k.$$

(2) Sei  $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Phi_{(i_1, \dots, i_k)} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I \cdot dx_I.$$

Hierbei ist also  $\Phi_I = \Phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \Phi(e_I) \in \mathbb{R}$ .

**Definition**

Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $\Phi: W \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  heißt Differentialform vom Grad  $k$  (kurz:  $k$ -Form). Die  $k$ -Form  $\Phi$  ist von der Klasse  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ , falls  $p \mapsto \Phi(p)(v_1, \dots, v_k)$  von der Klasse  $\mathcal{C}^r$  ist für jede Wahl von  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ .

**Bemerkungen:** (1) Die  $k$ -Form  $\Phi$  ist von der Klasse  $\mathcal{C}^r$  genau dann, wenn

$$p \mapsto \Phi_I(p) := \Phi(p)_I = \langle \Phi(p), e_I \rangle = \langle \Phi(p), e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \rangle$$

von der Klasse  $\mathcal{C}^r$  ist für alle  $I \in I_k^n$ .

(2) Die  $k$ -Form  $\Phi$  lässt sich schreiben als

$$p \mapsto \Phi(p) = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I(p) dx_I$$

mit  $\Phi_I(p) \in \mathbb{R}$ .

**Definition (Dachprodukt)**

Für  $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  und  $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$  wird  $\Phi \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n$  in folgender Weise erklärt: Ist  $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$  und  $\eta = \sum_{J \in I_l^n} \eta_J dx_J$ , dann ist

$$\Phi \wedge \eta := \sum_{I \in I_k^n, J \in I_l^n} \Phi_I \cdot \eta_J \underbrace{dx_I \wedge dx_J}_{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}}.$$

Eine „invariante Definition“ kann mit Hilfe des Alt-Operators gegeben werden (s.o.).

**Bemerkungen:** (1) Assoziativgesetz: Für  $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ ,  $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$  und  $\Theta \in \bigwedge^r \mathbb{R}^n$  gilt:

$$(\Phi \wedge \eta) \wedge \Theta = \Phi \wedge (\eta \wedge \Theta).$$

(2) Distributivgesetz: Für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  und  $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$  gilt:

$$(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) \wedge \eta = \alpha_1 (\Phi_1 \wedge \eta) + \alpha_2 (\Phi_2 \wedge \eta).$$

**Ausblick:**

- Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -Fläche, das heißt es gibt eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^k$  und eine Abbildung  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Klasse  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $F$  ist injektiv,  $DF_x$  ist injektiv und  $S = F(U)$ .

Die Fläche  $S$  wird „orientiert“ durch die Orientierung von  $\mathbb{R}^k$  und durch  $F$ .

- Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $S \subset W$ . Sei ferner  $\Phi$  eine  $k$ -Form auf  $W$ , das heißt  $\Phi(p) \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  für  $p \in W$ .
- Das Integral von  $\Phi$  über  $S$  kann erklärt werden durch

$$\int_S \Phi := \int_U \left\langle \underbrace{\Phi \circ F(x)}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)}_{\in \bigwedge_k \mathbb{R}^n} \right\rangle \lambda^k(dx).$$

Man zeigt mit Hilfe des Transformationssatz für Gebietsintegrale, dass diese Definition von der Wahl von  $F$  unabhängig ist.

### Definition (Äußeres Differential)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -Form der Klasse  $\mathcal{C}^r$  mit  $r \geq 1$ .

- (a) Ist  $k = 0$ , so ist  $\Phi = f$  eine Funktion und  $d\Phi = df$  ist als 1-Form auf  $U$  erklärt durch  $df(p)(v) := D_v f(p)$ , das heißt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

denn

$$df(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle = D_v f(p).$$

- (b) Ist  $k \geq 1$  und  $\Phi = f \cdot dx_I$  für ein  $I \in I_k^n$ , dann sei  $d\Phi := df \wedge dx_I$ , das heißt  $d\Phi(p) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n$  mit

$$d\Phi(p) = \underbrace{df(p)}_{\in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n} \wedge \underbrace{dx_I}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n} \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n.$$

- (c) Sei  $k \geq 1$  und  $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$  allgemein.  $d\Phi$  wird durch lineare Fortsetzung erklärt, das heißt

$$d\Phi := \sum_{I \in I_k^n} d(\Phi_I dx_I) = \sum_{I \in I_k^n} d\Phi_I \wedge dx_I.$$

**Bemerkungen:** Es gilt

$$\langle d\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle D_{v_i} \Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{v_i} \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle.$$

**Lemma 4.1**

Seien  $\Phi, \Psi$  jeweils  $k$ -Formen der Klasse  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , und  $\Theta$  eine  $l$ -Form der Klasse  $C^s$ ,  $s \geq 1$ . Dann gilt

$$(1) \quad d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi$$

$$(2) \quad d(\Phi \wedge \Theta) = d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta.$$

**Beweis**

(2) Seien  $\Phi = f dx_I$ ,  $\Theta = g dx_J$ . Dann erhält man

$$\begin{aligned} d(\Phi \wedge \Theta) &= d(f \cdot dx_I \wedge g \cdot dx_J) = d((f \cdot g) \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(f \cdot g) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (g \cdot df + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g \cdot df \wedge dx_I \wedge dx_J + f \cdot dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g \cdot dx_J) + (-1)^k \cdot (f \cdot dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta. \end{aligned}$$

■

**Lemma 4.2**

Ist die  $k$ -Form  $\Phi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , so gilt  $dd\Phi = 0$  (als  $(k+2)$ -Form).

**Beweis**

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\Phi = f \cdot dx_I$ ,  $I \in I_k^n$ . Dann gilt

$$d\Phi = df \wedge dx_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I$$

und ferner

$$\begin{aligned}
 d(d\Phi) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_I \\
 &= \sum_{i < j} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot dx_j \wedge dx_i + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{-dx_j \wedge dx_i}\right) \wedge dx_I = 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Eine  $k$ -Form  $\Phi$  mit  $d\Phi = 0$  heißt geschlossen. Eine  $k$ -Form  $\Phi$ , zu der es eine  $k-1$ -Form  $\eta$  gibt mit  $d\eta = \Phi$  heißt exakt. Lemma 4.2 besagt, dass jede exakte Form geschlossen ist.

**Frage:** Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist eine geschlossene Form stets exakt?

Im Allgemeinen gilt dies nicht. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist dies jedoch richtig (Lemma von Poincaré).

**Ziele:**

- Integration von Differentialformen
- Satz von Stokes (Spezialfall)

**Definition**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\lambda^n$ -messbare Menge und  $\omega$  eine stetige  $n$ -Form auf  $U$ . Dann wird das Integral von  $\omega$  über  $U$  erklärt durch

$$\int_U \omega := \int_U \langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \lambda^n(dx)$$

wobei das  $U$  im linken Integral als Menge mit Orientierung (durch die rechts verwendete geordnete Standardbasis) zu verstehen ist. So legt man auch fest, dass

$$\int_{-U} \omega := \int_U -\langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \lambda^n(dx).$$

Niederdimensionale Mengen und Integration:

**Beispiel**

Sei  $F = \{p\}$  eine 0-dimensionale Menge, sei  $\omega$  eine 0-Form, das heißt eine Funktion  $\omega: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in U$ . Dann wird erklärt

$$\int_F \omega := \omega(p) =: \delta_p(\omega).$$

**Definition**

Sei  $n \geq 1$ .

- (1) Ein  $(n-1)$ -dimensionaler Quader  $F$ , der zur  $i$ -ten Koordinatenachse orthogonal ist, ist von der Form

$$F = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

mit  $a_i = b_i$  und  $a_j < b_j$  für  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ .

- (2) Orientierung von  $F$  durch den  $(n-1)$ -Vektor

$$\hat{e}_i := \bigwedge_{j \neq i} e_j := e_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

- (3) Integration einer  $(n-1)$ -Form  $\omega$  über  $F$ . Sei  $\omega: F \rightarrow \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$  stetig (oder  $\lambda^{n-1}$ -messbar). Dann sei

$$\int_F \omega := \int_F \langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \lambda^{n-1}(dx)$$

und

$$\int_{-F} \omega := \int_F -\omega = \int_F -\langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \lambda^{n-1}(dx).$$

- (4) Seien  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $F_k$  orientierte „Seitenflächen“ von  $n$ -dimensionalen Quadern,  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $\sum \alpha_k F_k$  eine formale, endliche Linearkombination. Sei  $\omega$  eine  $(n-1)$ -Form auf  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F_k \subset U$ . Dann sei

$$\int_{\sum \alpha_k F_k} \omega := \sum \alpha_k \cdot \int_{F_k} \omega.$$

**Definition (Orientierter Rand)**

Sei  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  ein Quader mit  $a_i < b_i$ . Dann sei für  $1 \leq i \leq n$

$$R_i^+ := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

$$R_i^- := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

und

$$\partial_o R := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (R_i^+ - R_i^-)$$

sei eine formale Linearkombination von Flächen.

**Satz 4.3**

Seien  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ,  $a_i < b_i$  und  $\varphi$  eine  $(n-1)$ -Form der Klasse  $C^k$  mit  $k \geq 1$ , auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $R \subset U$ . Dann gilt

$$\int_R d\varphi = \int_{\partial_o R} \varphi.$$

**Beweis**

Sei zunächst  $n = 1$ ,  $\varphi$  eine 0-form, das heißt eine Funktion auf  $U$ . Es gilt  $d\varphi(x) = \varphi'(x) \cdot dx$ . Nun gilt

$$\int_{\partial_o R} \varphi = \int_{\partial_o[a_1, b_1]} \varphi = \int_{\{b\} - \{a\}} \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\begin{aligned} \int_R d\varphi &= \int_{[a, b]} \varphi'(x) dx = \int_{[a, b]} \langle \varphi'(x) dx_1, e_1 \rangle \lambda^1(dx) \\ &= \int_a^b \varphi'(x) \lambda^1(dx) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{\partial_o R} \varphi, \end{aligned}$$

wobei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurde.

Sei nun  $n \geq 2$ . Dann hat  $\varphi$  eine Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es genügt, zu zeigen, dass für  $1 \leq i \leq n$  gilt:

$$\int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \left\langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \left( \int_{R_i^+} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurden.



Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left( \int_{R_j^+} \varphi_i(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n - \int_{R_j^-} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left( \int_{R_j^+} \varphi_i(x) \underbrace{\langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle}_{= \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}} \mathcal{H}^{n-1}(dx) \right. \\
&\quad \left. - \int_{R_j^-} \varphi_i(x) \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle \mathcal{H}^{n-1}(dx) \right) \\
&= (-1)^{i-1} \left( \int_{R_i^+} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Gleichheit. ■

Im vorangehenden Beweis ist die Fallunterscheidung  $n = 1$  bzw.  $n \geq 2$  nicht zwingend erforderlich. Der Fall  $n = 1$  kann dem Fall  $n \geq 2$  untergeordnet werden.

**Spezialfall:** Divergenzsatz/Satz von Gauß-Green.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Setze  $V_i(x) := \langle V(x), e_i \rangle$ ,  $x \in U$ . Sei  $V$  von der Klasse  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ . Die Divergenz von  $V$  ist

$$\operatorname{div}(V)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Ist  $\varphi$  eine  $(n-1)$ -Form auf  $\mathbb{R}^n$  mit einer Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

so setzt man

$$V(x) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi_i \cdot e_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (\operatorname{div}(V)(x)) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Bezeichnet nun  $n$  den äußeren Normaleneinheitsvektor von  $R$  in  $\partial R$ , so folgt:

**Korollar 4.4**

Für ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld auf einer Umgebung von  $R$  gilt

$$\int_R \operatorname{div}(V) d\mathcal{H}^n = \int_{\partial R} \langle V, n \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**Zurückholen von Formen:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  mit  $k \geq 1$ . Sei  $x \in U$  und sei  $\varphi$  eine in  $F(x)$  erklärte  $r$ -Form. dann wird eine  $r$ -Form  $(F^\# \varphi)(x)$  erklärt als  $r$ -Kovektor durch:

$$(F^\# \varphi)(x)(v_1, \dots, v_r) := \varphi(F(x))(DF_x(v_1), \dots, DF_x(v_r)).$$

Im Spezialfall  $r = 0$  ist  $\varphi$  eine Funktion und

$$(F^\# \varphi)(x) = \varphi(F(x)) = (\varphi \circ F)(x).$$

**Bemerkungen:** (1) Ist  $\varphi$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 0$ , und  $F$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k+1}$ , so ist  $F^\# \varphi$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$ .

(2)  $F^\# \varphi(x)$  kann als lineare Abbildung  $\bigwedge_r \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aufgefasst werden.

(3) Sei  $L: V \rightarrow W$  linear. Dann wird durch

$$\begin{aligned} \bigwedge_r L: \bigwedge_r V &\rightarrow \bigwedge_r W \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_r &\mapsto L(v_1) \wedge \dots \wedge L(v_r) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung erklärt.

(4)  $(F^\# \varphi)(x)(v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = (\varphi \circ F)(x)(\bigwedge_r DF_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_r))$ .

Wir haben nun vier Operationen für Formen  $(\wedge, d, f^\#, +)$ , für die nun Rechenregeln angegeben werden:

**Lemma 4.5**

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $W \subset \mathbb{R}^l$  offene Mengen. Seien  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow W$  Abbildungen der Klasse  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ . Für  $k$ -Formen  $\varphi, \omega$  auf  $V$ , eine  $h$ -Form  $\eta$  auf  $V$  und eine  $k$ -Form  $\zeta$  auf  $W$  gelten die folgenden Aussagen:

- (1)  $f^\#(\omega + \varphi) = f^\# \omega + f^\# \varphi$ ,
- (2)  $f^\#(\varphi \wedge \eta) = (f^\# \varphi) \wedge (f^\# \eta)$ ,
- (3)  $d(f^\# \omega) = f^\#(d\omega)$ ,
- (4)  $(g \circ f)^\# \zeta = f^\#(g^\#(\zeta))$ .

**Beweis**

Die Aussagen (1), (2), (4) folgen leicht aus den Definitionen (Übung). Zum Nachweis von (3) sei zunächst  $k = 0$  und daher  $\omega$  eine Funktion auf  $V$ . Dann gilt  $f^\# \omega = \omega \circ f$ . Für  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt  $d(f^\# \omega)_x(v) = d(\omega \circ f)_x(v) = D(\omega \circ f)_x(v) = D\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = d\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = (f^\# d\omega)_x(v)$ , und damit die Behauptung im Fall  $k = 0$ . Sei nun  $k = 1$  und  $\omega = d\xi$  mit einer 0-Form  $\xi$  auf  $V$ . Dann gilt

$$d(f^\# \omega) = d(f^\# d\xi) = d(d(f^\# \xi)) = 0 = f^\#(dd\xi) = f^\#(d\omega).$$

Die Aussage (3) folgt nun wegen (1) und (2) daraus, dass jede „einfache“  $k$ -Form äußeres Produkt einer 0-Form und äußeren Ableitungen von 0-Formen ist. ■

**Definition**

Seien  $R$  ein Quader in  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $R \subset U$ . Sei  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  mit  $k \geq 1$ , injektiv und  $DF_x$  injektiv für  $x \in U$ . Dann ist  $F(R)$  eine  $n$ -dimensionale Fläche in  $\mathbb{R}^m$ , die mit  $F_\# R$  bezeichnet wird. Formal erklärt man für  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und Quader  $R_i$  in  $\mathbb{R}^n$

$$F_\# \left( \sum_i \alpha_i R_i \right) := \sum_i \alpha_i F_\# R_i.$$

Ist  $\omega$  eine  $n$ -Form auf einer Umgebung von  $F(R)$  in  $\mathbb{R}^m$ , so sei

$$\begin{aligned} \int_{F_\# R} \omega &:= \int_R \left\langle \omega \circ F(x), \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)}_{=DF_x(e_1)} \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &= \int_R \left\langle \omega \circ F(x), \underbrace{\bigwedge_n DF_x(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)}_{\langle (F^\# \omega)_{x, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n} \rangle} \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &= \int_R F^\# \omega \end{aligned}$$

und analog für formale Linearkombination von Quadern.

**Definition**

Für einen Quader  $R$  in  $\mathbb{R}^n$  (und analog für formale Linearkombination) erklärt man

$$\partial_o F_\# R := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (F_\# R_i^+ - F_\# R_i^-) = F_\# \partial_o R.$$

**Satz 4.6**

Sei  $R \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader in  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $R \subset U$ ,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei  $\mathcal{C}^k$  mit  $k \geq 1$ , injektiv und  $DF_x$  injektiv für  $x \in U$ . Sei  $\omega$  eine  $(n-1)$ -Form auf einer Umgebung von  $F(R)$  in  $\mathbb{R}^m$  von der Klasse  $\mathcal{C}^2$ . Dann gilt:

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_{\partial_o F_\# R} \omega.$$

**Beweis**

Man erhält

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_R F^\#(d\omega) = \int_R d(F^\# \omega) = \int_{\partial_o R} F^\# \omega = \int_{F_\# \partial_o R} \omega = \int_{\partial_o F_\# R} \omega. \quad \blacksquare$$

## 4.2 Grundlagen und Beispiele

Wir definieren im Folgenden eine Topologie auf Differentialformen und Strömen.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und

$$\mathcal{E}^k(U) := \{(\varphi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n) : \varphi \text{ ist von der Klasse } \mathcal{C}^\infty\}.$$

Definiere zu  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $K \subset U$ ,  $K$  kompakt, eine Seminorm  $\nu_K^i$  auf  $\mathcal{E}^k(U)$  durch

$$\nu_K^i(\varphi) := \sup\{\|D^j \varphi(x)\| : 0 \leq j \leq i, x \in K\}.$$

Es sei

$$\mathcal{O}(\varphi, i, K, \varepsilon) := \{\psi \in \mathcal{E}^k(U) : \nu_K^i(\varphi - \psi) < \varepsilon\}$$

für  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $K \subset U$  kompakt,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ . Diese Mengen bilden eine Subbasis einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $\mathcal{E}^k(U)$ . Dann ist  $(\mathcal{E}^k(U), \mathcal{O})$  ein topologischer Raum (genauer: ein lokal konvexer, Hausdorffscher, topologischer Vektorraum; vgl. Walter Rudin, Functional Analysis, Seite 7).

### Definition

Es sei

$$\mathcal{E}_k(U) := \{(T: \mathcal{E}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Zu  $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  sei

$$\mathcal{O}'(\varphi, a, b) := \{T \in \mathcal{E}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}.$$

Auf  $\mathcal{E}_k(U)$  wird die „schwache Topologie“ betrachtet, das heißt  $\mathcal{O}'(\varphi, a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$  bilden eine Subbasis dieser Topologie.

### Definition (Träger)

Für  $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$  sei

$$\text{supp}(\varphi) := U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen, } \varphi|_W = 0\}.$$

Für  $T \in \mathcal{E}_k(U)$  sei

$$\text{spt}(T) := U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen, } T(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{E}^k(U) \text{ mit } \text{supp}(\varphi) \subset W\}.$$

### Lemma 4.7

(a) Zu  $T \in \mathcal{E}_k(U)$  gibt es  $M > 0$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $K \subset U$  kompakt, so dass gilt:

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ .

(b) Seien  $T_i, T \in \mathcal{E}_k(U)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und  $T_i \xrightarrow{s} T$  für  $i \rightarrow \infty$ . Dann existiert  $K \subset U$ ,  $K$  kompakt, mit  $\text{spt}(T_i), \text{spt}(T) \subset K$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

Wir betrachten jetzt Teilmengen von  $\mathcal{E}^k(U)$ . Sei hierzu  $K \subset U$  kompakt und

$$\mathcal{D}_K^k(U) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(U) : \text{supp}(\varphi) \subset K\} \subset \mathcal{E}^k(U),$$

$$\mathcal{D}^k(U) := \bigcup \{\mathcal{D}_K^k(U) : K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

Auf  $\mathcal{D}^k(U)$  wird die feinste Topologie betrachtet, für die alle Inklusionsabbildungen

$$i_K : \mathcal{D}_K^k(U) \rightarrow \mathcal{D}^k(U), \quad \varphi \mapsto \varphi$$

stetig sind. Das heißt,  $W \subset \mathcal{D}^k(U)$  ist offen genau dann, wenn  $W \cap \mathcal{D}_K^k(U)$  offen ist in der Spurtopologie von  $\mathcal{E}^k(U)$  auf  $\mathcal{D}_K^k(U)$  für alle kompakten Teilmengen  $K \subset U$ .

### Definition

Es sei

$$\mathcal{D}_k(U) := \{(T : \mathcal{D}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ linear und stetig}\}.$$

Auf  $\mathcal{D}_k(U)$  wird durch die Subbasis

$$\{T \in \mathcal{D}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}$$

für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$  eine Topologie festgelegt.

**Bemerkungen:** • Jedes  $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$  hat kompakten Träger.

- $T \in \mathcal{D}_k(U)$  hat im Allgemeinen keinen kompakten Träger.
- $\mathcal{D}^k(U) \subset \mathcal{E}^k(U)$ ,  $\mathcal{E}_k(U) \subset \mathcal{D}_k(U)$ . Dies folgt etwa aus dem nachfolgenden Lemma 4.9.

### Lemma 4.8

Seien  $\varphi_i, \varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \text{ für } i \rightarrow \infty$$

genau dann, wenn es eine kompakte Menge  $K \subset U$  gibt, so dass  $\text{supp}(\varphi_i), \text{supp}(\varphi) \subset K$  für  $i \in \mathbb{N}$  und für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\|D_j(\varphi_i - \varphi)\| \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ .

### Lemma 4.9

Sei  $T : \mathcal{D}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}$  linear. Genau dann ist  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ , wenn es zu jeder kompakten Menge  $K \subset U$  ein  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $M > 0$  gibt mit

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K^k(U).$$

### Definition

- Die Elemente von  $\mathcal{D}_k(U)$  heißen  $k$ -dimensionale Ströme auf  $U$ . ( $k = 0$ : Distributionen).
- Die Elemente von  $\mathcal{E}_k(U)$  heißen  $k$ -dimensionale Ströme auf  $U$  mit kompaktem Träger.

**Beispiele**

- (1) Sei
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- stetig.
- $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$
- wird erklärt durch

$$S_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx \text{ für } f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}).$$

Zum Nachweis sei  $f \in \mathcal{D}_K^0(\mathbb{R})$ ,  $K \subset U$  kompakt. Wegen

$$|S_g(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) d(x) \right| \leq \int_R |g(x)| \underbrace{|f(x)|}_{\leq \nu_K^0(f)} dx \leq \nu_K^0(f) \cdot \underbrace{\int_K |g(x)| dx}_{=: M}$$

und Lemma 4.9 ist dies ein Strom.

- (2) Sei
- $a \in \mathbb{R}$
- ,
- $\delta_a(f) := f(a)$
- für
- $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$
- . Es ist
- $\delta_a \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$
- .

- (3) Sei
- $a \in \mathbb{R}$
- ,
- $T(f) := f'(a)$
- für
- $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$
- . Es ist
- $T \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$
- .

- (4) Sei
- $a < b$
- ,
- $a, b \in \mathbb{R}$
- .
- $\llbracket a, b \rrbracket \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$
- ist gegeben durch

$$\llbracket a, b \rrbracket(f(x)dx) := \int_a^b f(x)dx \text{ für } f(x)dx \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}).$$

- (5) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist  $M$  orientierbar, dann gibt es ein stetiges  $k$ -Vektorfeld  $x \mapsto (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \in T_x M$ , für  $x \in M$ , mit der Eigenschaft  $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x\| = 1$  für alle  $x \in M$ . (Die Existenz eines solchen stetigen  $k$ -Vektorfeldes ist äquivalent zur Orientierbarkeit von  $M$ ; vgl. den Anhang, Abschnitt 5.4.) Dann ist  $\llbracket M \rrbracket \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$  erklärt durch

$$\llbracket M \rrbracket(\omega) := \int_M \omega := \int_M \langle \omega(x), (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \rangle \mathcal{H}^k(dx) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n).$$

- (6) Sei
- $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(U)$
- ,
- $U \subset \mathbb{R}^n$
- offen,
- $0 \leq k \leq n$
- . Dann sei
- $T_\xi \in \mathcal{D}_k(U)$
- erklärt durch

$$T_\xi(\omega) := \int_U \omega \wedge \xi = \int_U \langle \omega \wedge \xi, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

- (7) Sei
- $T \in \mathcal{D}_k(U)$
- ,
- $\psi \in \mathcal{E}^m(U)$
- ,
- $m \leq k$
- . Dann ist
- $T \llbracket \psi \in \mathcal{D}_{k-m}(U)$
- erklärt durch

$$(T \llbracket \psi)(\omega) := T(\psi \wedge \omega) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^{k-m}(U).$$

**Definition (Rand eines Stroms)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ . Für  $k \geq 1$  ist der Rand  $\partial T$  von  $T$  erklärt durch  $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(U)$  mit

$$\partial T(\omega) := T(d\omega)$$

für  $\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$ .

**Beispiele**

- (1)
- $a, b \in \mathbb{R}$
- ,
- $a < b$
- :

$$\partial(\llbracket a, b \rrbracket)(f) = \llbracket a, b \rrbracket(df) = \llbracket a, b \rrbracket(f'(x)dx) = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = (\delta_b - \delta_a)(f)$$

Also ist  $\partial \llbracket a, b \rrbracket = \delta_b - \delta_a$ .

- (2) Sei  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Dann ist  $T_g \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$  erklärt durch

$$T_g(\omega(x)dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\omega(x)dx.$$

Ferner sei  $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$  wie im vorigen Beispiel. Dann folgt

$$\partial T_g(f) = T_g(df) = T_g(f'(x)dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = -S_{g'}(f) = S_{-g'}(f)$$

Also ist  $\partial T_g = S_{-g'}$ .

- (3) Sei in (2) nun  $g$  nur noch stetig, etwa  $g(x) = |x|$ . Dann ist  $\partial T_g = S_{-\text{sgn}}$ .
- (4) Sei  $M$  eine orientierte, kompakte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial M$  und  $\llbracket M \rrbracket \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$  der induzierte Strom. Mit dem Satz von Stokes folgt: Für  $\eta \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$  gilt

$$\partial \llbracket M \rrbracket(\eta) = \llbracket M \rrbracket(d\eta) = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = \llbracket \partial M \rrbracket(\eta)$$

also gilt  $\partial \llbracket M \rrbracket = \llbracket \partial M \rrbracket$ .

- (5) Sei  $k \geq j+1$ ,  $\xi \in \mathcal{E}^j(U)$ ,  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  und  $\omega \in \mathcal{D}^{k-j-1}(U)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \partial(T \llbracket \xi \rrbracket)(\omega) &= T \llbracket \xi \rrbracket(d\omega) = T(\xi \wedge d\omega) \\ &= T((-1)^j d(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} d\xi \wedge \omega) \\ &= (-1)^j T(d(\xi \wedge \omega)) + (-1)^{j-1} T(d\xi \wedge \omega) \\ &= (-1)^j \partial T(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)(\omega) \\ &= (-1)^j ((\partial T) \llbracket \xi \rrbracket)(\omega) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)(\omega), \end{aligned}$$

also gilt

$$\partial(T \llbracket \xi \rrbracket) = (-1)^j ((\partial T) \llbracket \xi \rrbracket) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)$$

und somit

$$(\partial T) \llbracket \xi \rrbracket = T \llbracket (d\xi) \rrbracket + (-1)^j \partial(T \llbracket \xi \rrbracket).$$

- (6)  $\partial \partial T = 0$ , für  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  mit  $k \geq 2$ , da  $\partial \partial T(\omega) = \partial T(d\omega) = T(dd\omega) = T(0) = 0$ .

**Definition (Masse von Differentialformen und Strömen)**

- Euklidische Masse von Differentialformen  $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$  in  $x \in U$ :

$$|\omega(x)| := \left( \sum_{I \in I_k^n} \omega_I(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Komasse von  $\omega(x)$ :

$$\|\omega(x)\| := \sup\{\omega(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) : v_i \in \mathbb{R}^n, \|v_i\| \leq 1\}$$

- Euklidische Masse eines Stromes  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ :

$$\underline{\mathbf{M}}(T) := \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

- Masse von  $T$ :

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

Wegen

$$|\omega(x)| \geq \|\omega(x)\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega(x)|$$

folgt

$$\binom{n}{k}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}(T) \leq \underline{\mathbf{M}}(T) \leq \cdot \mathbf{M}(T)$$

mit einer Konstanten  $c$ , die nur von  $n$  abhängt.

### Beispiel

Ist  $T = \llbracket M \rrbracket$ ,  $M$  eine orientierbare, kompakte,  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(T) &= \sup\left\{\int_M \omega : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\right\} \\ &= \sup\left\{\int_M \underbrace{\langle \omega(x), \xi(x) \rangle}_{\leq \|\omega(x)\| \cdot \|\xi(x)\| \leq 1} \mathcal{H}^k(dx) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\right\} \\ &\leq \mathcal{H}^k(M). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass hier sogar Gleichheit gilt.

### Definition

Eine Folge  $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$  konvergiert in der Massenorm gegen ein  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ , falls  $\mathbf{M}(T_i - T) \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung:** • Ist  $\mathbf{M}(0) = 0$ , so gilt  $T = 0$ .

- Gilt  $T_i \rightarrow T$  in der Massenorm, so gilt  $T_i \xrightarrow{s} T$ , denn:

Sei  $T_j \rightarrow 0$  in der Massenorm für  $j \rightarrow \infty$ , das heißt  $\mathbf{M}(T_j) \rightarrow 0$ . Für  $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$  gilt:

$$|T_j(\omega)| \leq \mathbf{M}(T_j) \cdot \sup_{x \in U} \|\omega(x)\| \rightarrow 0$$

also  $T_j(\omega) \xrightarrow{s} 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Seien  $T_j = \delta_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\mathbf{M}(T_j) = 1$ , aber  $T_j \xrightarrow{s} 0$ , da  $T_j(f) \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  und  $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ .

### Lemma 4.10

Seien  $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  und  $T_j \xrightarrow{s} T$  für  $j \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j).$$



**Beweis**

Sei  $\mathbf{M}(T) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$  mit  $\|\omega(x)\| \leq 1$  für alle  $x \in U$  und  $T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$ . Daher folgt:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} T_j(\omega) = T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$$

also  $\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j)$ .

Sei  $\mathbf{M}(T) = \infty$ . Dann existiert zu  $m \in \mathbb{N}$  ein  $\omega$  wie oben mit  $T(\omega) \geq m$ . Weiter wie oben. ■

**Beispiel**

Ströme mit minimaler Masse

$T = \llbracket B^2 \rrbracket \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$ , d.h.  $T(\omega) = \int_B \langle \omega(x), e_1 \wedge e_2 \rangle \mathcal{H}^2(dx)$ ,  $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Frage: Hat  $T$  minimale Masse unter allen 2-Strömen  $S \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$  mit  $\partial S = \partial T = \llbracket \partial B^2 \rrbracket$ .

<++>

**Lemma 4.11**

Sei  $T \in \mathcal{D}_n(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathbf{M}(T) < \infty$ . Es gebe ein  $\Omega = d\varphi \in \mathcal{D}^n(U)$  mit  $\|\Omega\| \leq 1$  und  $\mathbf{M}(T) = T(\Omega)$ . Dann gilt für alle  $S \in \mathcal{D}_n(U)$  mit  $\partial S = \partial T$ :

$$\mathbf{M}(T) \leq \mathbf{M}(S).$$

**Beweis**

$\mathbf{M}(T) = T(\Omega) = T(d\varphi) = \partial T(\varphi) = \partial S(\varphi) = S(d\varphi) = S(\Omega) \leq \mathbf{M}(S)$ . ■

**Zurück zum Beispiel:** Sei  $\Omega := dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $\|\Omega\| = 1$  und

$$T(\Omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle dx_1 \wedge dx_2, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{=1} \mathcal{H}^2(dx) = \mathcal{H}^2(B^2) = \mathbf{M}(T),$$

da

$$T(\omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle \omega, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{\leq \|\omega\| \cdot \|e_1 \wedge e_2\|} d\mathcal{H}^2.$$

Ferner gilt für  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$  gerade  $d\varphi_x = \frac{1}{2} \cdot (dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1) = \Omega$ . Mit obigem Lemma folgt, dass  $T$  minimierend ist. Zur Berechnung von  $\partial T$  betrachten wir

$$\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^2).$$

$$\begin{aligned}
\partial T(\eta) &= T(d\eta) = T\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2\right) \\
&= T\left(\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2\right) \\
&= \int_{B^2} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) \mathcal{H}^2(dx) \\
&= \int_{B^2} \div \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \mathcal{H}^2(dx) \\
&= \int_{S^1} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}(x), x \right\rangle}_{=\eta_2(x) \cdot x_1 - \eta_1(x) \cdot x_2} \mathcal{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2, \underbrace{-x_2 e_1 + x_1 e_2}_{\xi \in T_x S^1} \rangle \mathcal{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta, \xi \rangle d\mathcal{H}^1 \\
&= \llbracket S^1 \rrbracket(\eta).
\end{aligned}$$

### 4.3 Ströme mit lokalendlicher Masse

Für Ströme mit lokalendlicher Masse liefert der Rieszsche Darstellungssatz eine „explizite“ Integralsdarstellung. Dazu sei

$$\mathbf{M}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty\}$$

die Menge der *Ströme endlicher Masse* und

$$\mathbf{N}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty \text{ und } \mathbf{M}(\partial T) < \infty\}$$

die Menge der *normalen Ströme*.

#### Beispiel

$T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$  mit  $T(\omega(x) dx) := \omega(0)$ . Dann ist  $\|\omega(x) dx\| = |\omega(x)|$  und daher  $\mathbf{M}(T) = 1$ . Aber  $\partial T(f) = T(df) = T(f'(x) dx) = f'(0)$  für  $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$  und somit  $\mathbf{M}(\partial T) = \infty$ .

**Lokalisierung:** Sei  $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V$  und  $U$  offen,  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ . Es sei

$$\underline{\mathbf{M}}_V(T) := \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}$$

und

$$\mathbf{M}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}.$$

Weiter seien definiert:

$$\underline{\mathbf{M}}_{k,\text{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{M}}_V(T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{M}_{k,\text{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}_V(T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{k,\text{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{N}}_V(T) < \infty, \underline{\mathbf{N}}_V(\partial T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{N}_{k,\text{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{N}_V(T) < \infty, \mathbf{N}_V(\partial T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}.$$

**Satz 4.12**

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_V(T_i) < \infty \quad \text{für alle } V \subset U \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt}, \bar{V} \subset U.$$

Dann gibt es eine Teilfolge  $(T_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  und  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  mit  $T_{n_i} \xrightarrow{s} T$  für  $i \rightarrow \infty$ .

**Beweis (Skizze)**

Verwende, dass Ströme stetige, lineare Funktionale auf  $\mathcal{D}^k(U)$  (topologischer Vektorraum) sind. Jetzt kann man lokal den Satz von Banach-Alaoglu anwenden, der die Auswahl einer lokal schwach\* konvergenten Teilfolge erlaubt. Diagonalargument. ■

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $\mu$  ein borelreguläres Maß auf  $U$  mit  $\mu(K) < \infty$  für  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt (Radonmaß). Sei  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mu$ -messbare Abbildung und  $\|\xi\| = 1$   $\mu$ -fast-überall. Dann wird durch

$$L(f) := \int_U \langle f(x), \xi(x) \rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$$

ein lineares Funktional  $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt. Es gilt

$$|L(f)| \leq \int_U |\langle f(x), \xi(x) \rangle| \mu(dx) \leq \mu(K) < \infty$$

falls  $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m)$ ,  $\text{supp}(f) \subset K$ ,  $K \subset U$  kompakt,  $\|f\| \leq 1$ . In dieser Situation gilt

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \leq 1, \text{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

für alle  $K \subset U$ ,  $K$  kompakt.

**Satz 4.13 (Riesz)**

Sei  $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ein lineares Funktional, das

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \leq 1, \text{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein Radonmaß  $\mu$  auf  $U$  und eine  $\mu$ -messbare Abbildung  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\|\xi(x)\| = 1$  für  $\mu$ -fast-alle  $x \in U$  und

$$L(f) = \int_U \langle f(x), \xi(x) \rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m).$$

Ferner gilt für  $V \subset U$  offen:

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \text{supp}(f) \subset V, \|f\| \leq 1\}.$$

**Beweis**

Siehe L. Simon, Lecture Notes of the ANU, Canberra, GMT. ■

Als Folge erhält man für Ströme lokalendlicher Masse.

**Satz 4.14**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $T \in \mathbf{M}_{k,loc}(U)$ .
- (2) Es gibt ein Radonmaß  $\mu_T$  auf  $U$  und eine  $\mu_T$ -messbare Abbildung  $\xi : U \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$  mit  $|\xi(x)| = 1$  für  $\mu_T$ -fast-alles  $x \in U$ , so dass gilt:

$$T(\omega) = \int \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \mu_T(dx), \quad \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Hierbei ist für  $V \subset U$  offen:

$$\mu_T(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \forall x \in U: |\omega(x)| \leq 1, \text{supp}(\omega) \subset V\} = \underline{\mathbf{M}}_V(T).$$

**Bemerkung:** (1) In der Situation des Satzes sagt man, dass  $T$  als Integral darstellbar ist.

- (2) Auf  $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$  gibt es die euklidische Norm  $|\cdot|$ , sowie die Komassen-Norm  $\|\cdot\|$ . Ferner existiert auf  $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$  neben der euklidischen Norm  $|\cdot|$  die Masse-Norm  $\|\cdot\|$ :

$$\|\xi\| := \sup\{\langle \omega, \xi \rangle : \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n, \|\omega\| \leq 1\}$$

**Zusammenhänge:**

$$|\omega| \geq \|\omega\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega|, \quad \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n,$$

$\|\omega\| = |\omega|$  für einen einfachen Kovektor  $\omega$ . Hierbei nennt man  $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$  einfach, falls es  $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\omega = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k$ . Es gilt nun

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} |\xi|, \quad \xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n, \quad \text{und } \|\xi\| = |\xi|$$

für  $\xi$  einfach. Für die Verknüpfung mit dem äußeren Produkt gilt dann

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \quad \|\varphi \wedge \omega\| \leq \binom{p+q}{p} \|\varphi\| \cdot \|\omega\|,$$

$$\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n, \eta \in \bigwedge_q \mathbb{R}^n, \varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n, \omega \in \bigwedge^q \mathbb{R}^n.$$

$$|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\xi\|$$

$$\text{für } \varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n, \xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n.$$

(3) Im vorangehenden Satz setzt man  $\vec{T}(x) := \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$  und  $\|T\| := \|\xi\| \cdot \mu_T$ , wobei

$$\|T\|(M) = \int \mathbf{1}_M(x) \|\xi(x)\| \mu_T(dx)$$

und erhält so:

$$T(\omega) = \int_U \langle \omega(x), \vec{T}(x) \rangle \|T\|(dx)$$

mit  $\|\vec{T}\| = 1$ ,  $\|T\|$ -fast-überall auf  $U$ ,  $\|T\|(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \|\omega(x)\| \leq 1 \text{ für } x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}$ , sowie  $\mathbf{M}_V(T) = \|T\|(V)$ .

(4) Ist  $T$  durch ein Integral darstellbar, so erklärt man für  $A \subset U$ ,  $A$  Borelsch:

$$(T \lfloor A)(\omega) := \int_A \langle \omega, \vec{T} \rangle d\|T\|$$

oder für eine beschränkte Borelfunktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(T \lfloor f)(\omega) := \int_U f \cdot \langle \omega, \vec{T} \rangle d\|T\|.$$

## 4.4 Produkt, Push-forward und Homotopieformel

**Produkt von Strömen.** Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$  offen und  $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$ ,  $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$  Ströme. Im Folgenden sind  $x_1, \dots, x_{n_1}$  Koordinaten von  $\mathbb{R}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  und  $y_1, \dots, y_{n_2}$  sind Koordinaten (bzw. Koordinatenfunktionen) von  $\mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  (mit naheliegenden Identifikationen).

Sei  $\omega \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$ . Dann kann man  $\omega$  in der Form

$$\omega = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ |\alpha|+|\beta|=m_1+m_2}} \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta$$

geschrieben werden.

### Definition

Mit obiger Notation setzen wir

$$S \times T(\omega) := \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ |\alpha|=m_1 \\ |\beta|=m_2}} S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dy_\beta) dx_\alpha).$$

Man kann sich leicht überlegen, dass diese Definition korrekt ist, das heißt etwa, dass das Argument von  $S$  im Definitionsbereich von  $S$  ist und  $S \times T \in \mathcal{D}_{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$  wieder ein Strom ist.

### Satz 4.15

Seien  $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$  und  $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$  Ströme.

- (1) Seien  $p: \mathbb{R}^{m_1+m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  und  $q: \mathbb{R}^{m_1+m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $(x, y) \mapsto y$  die Projektionsabbildungen. Seien  $\varphi \in \mathcal{D}^k(U_1)$ ,  $\eta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-k}(U_2)$ . Dann gilt:

$$S \times T(p^\# \varphi \wedge q^\# \eta) = \begin{cases} S(\varphi) \cdot T(\eta), & k = m_1, \\ 0, & k \neq m_1 \end{cases}$$

und für

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha(x) \omega_\beta(y) dx_\alpha \wedge dy_\beta = \underbrace{\left( \sum_{\alpha} \omega_\alpha(x) dx_\alpha \right)}_{:= \omega_1(x)} \wedge \underbrace{\left( \sum_{\beta} \omega_\beta(y) dy_\beta \right)}_{:= \omega_2(y)}$$

gilt

$$S \times T(\omega) = S(\omega_1) \cdot T(\omega_2).$$

- (2)  $\text{spt}(S \times T) = \text{spt}(S) \times \text{spt}(T)$ .  
 (3)  $\partial(S \times T) = \partial S \times T + (-1)^{m_1} S \times \partial T$ .  
 (4) Seien  $P: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $x \mapsto (x, 0)$ ,  $Q: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $y \mapsto (0, y)$ . Haben  $S$  und  $T$  lokalendliche Massen, so auch  $S \times T$  und

$$S \times T(\cdot) = \int \langle \cdot, (\bigwedge_{m_1} P) \vec{S} \wedge (\bigwedge_{m_2} Q) \vec{T} \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|)$$

### Beweis

- (3) Sei  $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-1}(U_1 \times U_2)$ . Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \partial(S \times T)(\omega) &= S \times T(dw) \\ &= S \left( \sum_{i=1}^{n_1} T \left( \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dy_\beta \right) dx_i \wedge dx_\alpha \right) + (-1)^{|\alpha|} S \left( T \left( \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_\beta \right) dx_\alpha \right) \\ &= S(d_x(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{|\alpha|} S(T(d_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) \\ &= \partial S(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) + (-1)^{m_1} S(\partial T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= \partial S \times T(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) + (-1)^{m_1} (S \times \partial T)(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega). \end{aligned}$$

- (4) Sei  $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$ . Die Voraussetzung besagt, dass

$$S = \int_{U_1} \langle \cdot, \vec{S} \rangle d\|S\|$$

und

$$T = \int_{U_2} \langle \cdot, \vec{T} \rangle d\|T\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S \times T(\omega) &= S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= \int \langle T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) \langle dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int_{U_1} \int_{U_2} \langle \omega_{\alpha\beta} dy_\beta, \vec{T} \rangle d\|T\| \langle dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x, y) dy_\beta, \vec{T}(y) \rangle \langle dx_\alpha, \vec{S}(x) \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|) \\ &= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta, (\bigwedge_{n_1} P) \vec{S}(x) \wedge (\bigwedge_{n_2} Q) \vec{T}(y) \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|). \blacksquare \end{aligned}$$

Fazit: Es gilt insbesondere

$$\|S \times T\| = \|S\| \otimes \|T\|, \quad \overrightarrow{S \times T} = (\bigwedge_{n_1} P) \vec{S} \wedge (\bigwedge_{n_2} Q) \vec{T}.$$

### Beispiel

Ist  $T$  durch ein Integral darstellbar, so auch  $\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T$  mit  $\|\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T\| = \lambda_{[0,1]}^1 \otimes \|T\|$  und  $\overrightarrow{\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T} = \epsilon_1 \wedge \vec{T}$  (hier wurden die Einbettungsabbildungen weggelassen).

**Bild eines Stromes.** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen. Ferner seien  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  und  $f: U \rightarrow V$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung. **Voraussetzung:**  $f|_{\text{spt}(T)}$  sei eigentlich (das heißt, für  $K \subset V$ ,  $K$  kompakt sei  $f^{-1}(K) \cap \text{spt}(T) \subset U$  stets kompakt).

### Beispiel

Seien  $f: U := (0, \infty) \rightarrow V := \mathbb{R}$  und  $T := \llbracket 0, b \rrbracket \in \mathcal{D}_0(U)$  für  $b > 0$ . Dann ist

$$f^{-1}([0, b]) \cap \text{spt}(T) = (0, b] \cap [0, b] = (0, b] \subset U$$

nicht kompakt.

### Definition

Seien  $f$  und  $T$  wie oben. Sei  $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ . Sei  $\gamma \in \mathcal{D}_0(U)$  mit

$$\text{spt}(T) \cap \underbrace{\text{supp}(f^\# \omega)}_{\subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))} \subset \{\gamma = 1\}^o.$$

Dann setzt man

$$(f_\# T)(\omega) := T(\gamma \wedge f^\# \omega).$$

**Bemerkungen:** (i)  $\text{supp}(f^\# \omega) \subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))$  und  $\text{supp}(\omega) \subset V$  ist kompakt, das heißt  $\text{spt}(T) \cap \text{supp}(f^\# \omega) \subset \text{spt}(T) \cap f^{-1}(\text{supp}(\omega))$ . Dabei ist  $\text{spt}(T) \cap f^{-1}(\text{supp}(\omega))$  kompakt und  $\text{spt}(T) \cap \text{supp}(f^\# \omega)$  abgeschlossen und damit auch kompakt.

- (ii) Auf die Einführung von  $\gamma$  kann man im Allgemeinen nicht verzichten, da  $\text{supp}(f^\# \omega)$  nicht kompakt sein muss.
- (iii) Die Definition von  $(f_\# T)(\omega)$  ist von der konkreten Wahl von  $\gamma$  unabhängig. Seien nämlich  $\gamma_1, \gamma_2$  wie oben. Es ist

$$\text{supp}((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^\# \omega) \cap \text{spt}(T) = \emptyset.$$

Daraus folgt mittels einer Zerlegung der Eins

$$T((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^\# \omega) = 0.$$

Dies schließlich ergibt

$$T(\gamma_1 \wedge f^\# \omega) = T(\gamma_2 \wedge f^\# \omega).$$

- (iv) Manchmal geht es auch ohne  $\gamma$ .

**Lemma 4.16**

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $T \in \mathcal{D}_k(U)$ ,  $f: U \rightarrow V$  von der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$ , wobei  $f|_{\text{spt}(T)}$  eigentlich ist. Dann gilt

- (1)  $\text{spt}(f_\# T) \subset f(\text{spt}(T))$
- (2)  $\partial(f_\# T) = f_\#(\partial T)$ .
- (3) Ist  $T$  durch ein Integral darstellbar, so gilt das auch für  $f_\# T$  und

$$\|f_\# T\| \leq f_\#(\|T\| \llbracket \bigwedge_m Df \vec{T} \rrbracket).$$

Hierbei ist für eine messbare Menge  $A \subset V$  die rechte Seite erklärt durch

$$f_\#(\|T\| \llbracket \bigwedge_m Df \vec{T} \rrbracket)(A) = \int_{f^{-1}(A)} \|\bigwedge_m Df_x \vec{T}(x)\| \|T\|(dx).$$

**Satz 4.17 (Homotopieformel)**

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen, seien  $f, g: U \rightarrow V$  von der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$  und  $h: [0, 1] \times U \rightarrow V$  von der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$  mit  $h(0, \cdot) = f$  und  $h(1, \cdot) = g$ . Sei  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  und  $h|_{[0, 1] \times \text{spt}(T)}$  sei eigentlich. Dann gilt

$$g_\# T - f_\# T = h_\#(\llbracket [0, 1] \times \partial T \rrbracket) + \partial h_\#(\llbracket [0, 1] \times T \rrbracket),$$

wobei für  $k = 0$  der erste Term in der Summe entfällt.

**Beweis**

Wegen  $\text{spt}(\llbracket [0, 1] \times T \rrbracket) = [0, 1] \times \text{spt}(T)$  und  $\text{spt}(\partial T) \subset \text{spt}(T)$  und nach Voraussetzung sind alle



Ströme erklärt. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) &= h_{\#} \partial(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) \\
 &= h_{\#}(\partial \llbracket 0, 1 \rrbracket \times T + (-1)^1 \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= h_{\#}((\delta_1 - \delta_0) \times T - \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= h_{\#}(\delta_1 \times T) - h_{\#}(\delta_0 \times T) - h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= g_{\#}T - f_{\#}T - h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T).
 \end{aligned}$$

Sei für den letzten Schritt  $\tau: U \rightarrow \mathbb{R} \times U$ ,  $x \mapsto (0, x)$ . Dann ist  $\delta_0 \times T = \tau_{\#}T$ . In der Tat:

$$\delta_0 \times T(\omega(t, x)dx) = \delta_0(T(\omega(t, x)dx)) = T(\omega(0, x)dx)$$

und

$$\tau_{\#}T(\omega(t, x)dx) = T(\gamma \wedge \tau^{\#}(\omega(t, x)dx)) = T(\gamma \wedge \omega(0, x)dx) = T(\omega(0, x)dx).$$

Hiermit folgt

$$h_{\#}(\delta_0 \times T) = h_{\#}(\tau_{\#}T) = (h \circ \tau)_{\#}T = f_{\#}T.$$

Die hierbei benutzte Eigenschaft  $h_{\#} \circ \tau_{\#} = (h \circ \tau)_{\#}$  ist leicht einzusehen. ■

### Beispiel

Sei  $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$  mit  $\partial T = 0$ ,  $\text{spt}(T)$  kompakt,  $k \geq 1$ . Nach der Homotopieformel gilt

$$g_{\#}T - f_{\#}T = \partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) + 0.$$

Ist spezieller:  $g(x) := x$ ,  $f(x) := 0$ , so gilt  $g_{\#}T = T$ ,  $f_{\#}T = 0$  und somit:

$$T = \underbrace{\partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)}_{\in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

### Korollar 4.18

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.17.

- (a) Ist  $T$  durch ein Integral darstellbar, so gilt mit der affinen Homotopie  $h(t, x) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$ :

$$\mathbf{M}(h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)) \leq \|T\| (|g - f| \cdot \max\{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\}).$$

- (b) Ist  $\mathbf{M}(T) < \infty$  und  $h$  wie in (a), so gilt

$$\mathbf{M}(h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)) \leq \sup_{\text{spt}(T)} |g - f| \cdot \sup_{\text{spt}(T)} \{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\} \cdot \mathbf{M}(T).$$

**Beweis**

Für  $\psi \in \mathcal{D}^{k+1}(V)$  folgt:

$$\begin{aligned}
h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(\psi) &= \int_{(0,1) \times U} \langle e_1 \wedge \vec{T}, h^{\#}\psi \rangle (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)) \\
&= \int_{(0,1) \times U} \langle \psi(h(t, x)), \underbrace{\bigwedge_{k+1} Dh_{(t,x)}(e_1 \wedge \vec{T})}_{=(g(x)-f(x)) \wedge \underbrace{\bigwedge_k D_x h_{(t,x)} \vec{T}}_{=(1-t)Df_x(\vec{T})+t \cdot Dg_x(\vec{T})}} \rangle (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)) \\
&= \int_{(0,1) \times U} \|\psi(h(t, x))\| \cdot ((1-t)\|Df_x\|^k + t \cdot \|Dg_x\|^k) (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)). \blacksquare
\end{aligned}$$

**Anwendung:** Sei  $U$  sternförmig in  $\mathbb{R}^n$  bezüglich  $u \in U$ . Betrachte:  $g(x) := x$ ,  $f(x) := u$ ,  $x \in U$ ,  $h(t, x) := (1-t) \cdot u + t \cdot x$ . Für  $\psi \in \mathcal{D}^k(U)$  ist  $f^{\#}\psi = 0$  ( $k \geq 1$ ) und  $g^{\#}\psi = \psi$ . Wir betrachten den speziellen Strom

$$T(\beta) := \langle \beta, \eta \rangle, \quad \beta \in \mathcal{D}^k(U),$$

wobei  $\eta: U \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$  fest gewählt ist mit kompaktem Träger in  $U$  und von der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_{\#}T(\psi) &= T(\gamma \wedge g^{\#}\psi) = T(\gamma \wedge \psi) = \langle \gamma \wedge \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \\
f_{\#}T(\psi) &= 0
\end{aligned}$$

$$h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T)(\psi) = \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T(h^{\#}\psi) = \partial T((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}) = T(d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}))$$

$$\partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(\psi) = h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(d\psi) = \dots$$

Ist  $d\psi = 0$ , so erhält man aus der Homotopieformel für Ströme:

$$\langle \psi, \eta \rangle = T(d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket})) + 0$$

und damit

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}), \eta \rangle.$$

Dies zeigt

$$\varphi = d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}).$$

Also ist  $\psi$  exakt. Dies ist ein Beweis des Lemmas von Poincaré.

**Bild eines Stromes unter einer Lipschitzabbildung.** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $T \in \mathbf{N}_{k, \text{loc}}(U)$  und sei  $f: U \rightarrow V$  Lipschitz sowie  $f|_{\text{spt}(T)}$  eigentlich. Zu  $f$  gibt es eine Folge  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildungen von  $U$  nach  $V$  mit einer globalen Schranke für die Lipschitzkonstante, wobei  $f_i \rightarrow f$  gleichmäßig konvergiert. Mit der Homotopieformel sieht man nun

$$|(f_{i\#}T)(\omega) - (f_{j\#}T)(\omega)| \leq c \cdot \sup_{f^{-1}(K) \cap \text{spt}(T)} |f_i - f_j|,$$

falls  $K \subset V$ ,  $K$  kompakt und  $\text{supp}(\omega) \subset K^\circ$ . Folglich ist  $(f_{i\#}T)(\omega)$  eine Cauchyfolge reeller Zahlen, und es existiert also

$$(f_{\#}T)(\omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} (f_{i\#}T)(\omega).$$

Man kann zeigen:

- $f_{\#}T \in \mathbf{N}_{k,loc}(V)$ .
- Die Definition ist von der Wahl der Folge unabhängig.
- $\partial f_{\#}T = f_{\#}\partial T$ .
- $\text{spt}(f_{\#}T) \subset f(\text{spt}(T))$ .

## 4.5 Rektifizierbare Ströme

### Definition

(a) Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Ein Strom  $T \in \mathcal{D}_k(U)$  heißt rektifizierbar, falls es

- eine  $\mathcal{H}^k$ -messbare, abzählbar  $k$ -rektifizierbare Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{H}^k(M \cap K) < \infty$  für  $K \subset U$ ,  $K$  kompakt,
- eine  $\mathcal{H}^k$ -messbare Abbildung  $\xi: M \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$  mit  $\|\xi\| = 1$   $\mathcal{H}^k$ -fast-überall auf  $M$  und  $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$  mit  $v_i(x) \in \bigwedge_k T_x M$  für  $\mathcal{H}^k$ -fast-alles  $x \in M$ ,
- eine  $\mathcal{H}^k$ -messbare Funktion  $\theta: M \rightarrow [0, \infty]$

gibt, so dass gilt

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle \theta d\mathcal{H}^k.$$

- (b) Ist  $\theta$  sogar ganzzahlig, so heißt ein solcher Strom  $T$  ganzzahlig rektifizierbar. Die Menge der ganzzahlig rektifizierbaren Ströme wird mit  $\mathcal{R}_k(U)$  bezeichnet.
- (c)  $T$  heißt integraler Strom, falls  $T$  und  $\partial T$  ganzzahlig rektifizierbare Ströme sind. Die Menge der integralen Ströme wird mit  $\mathcal{I}_k(U)$  bezeichnet.

**Bemerkungen:** (1) Übersicht:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_k(U) & \subset & \mathcal{R}_k(U) \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{N}_{k,loc}(U) & \subset & \mathbf{M}_{k,loc}(U) \end{array}$$

(2) Sei  $T \in \mathcal{R}_k(U)$  und sei  $\theta$  auf  $M$  integrierbar. Dann ist

$$\mathbf{M}(T) = \int_M \theta d\mathcal{H}^k.$$

(3)  $\mathcal{I}_k(U) \subset \mathcal{R}_k(U) \cap \mathbf{N}_{k,loc}(U)$ . Gilt „ $\supset$ “? Die positive Antwort wird nachfolgenden als Satz formuliert (Randrektifizierbarkeit).

### Beispiele

(1) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$[M] \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n).$$

(2) Sei  $M$  wie in (1) und  $\mathcal{H}^{k-1}(\partial M) < \infty$ . Dann gilt

$$[M] \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n),$$

denn  $\partial[M] = [\partial M]$ .

(3)  $\tilde{T} \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$  sei definiert durch

$$\tilde{T}(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_2(s, 0) ds.$$

Dann ist  $\tilde{T}$  nicht 1-rektifizierbar. Aber

$$T(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_1(s, 0) ds$$

ist 1-rektifizierbar.

(4) Es ist

$$T_j := \sum_{i=1}^j \llbracket \{-\frac{i}{j}\} \times [0, \frac{1}{j}] \rrbracket \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^2).$$

Es gilt  $\mathbf{M}(T_j) = 1$ ,  $\mathbf{M}(\partial T_j) = 2j$ ,  $T_j \xrightarrow{s} \tilde{T}$  für  $j \rightarrow \infty$ . Wir erhalten so eine Folge integraler Ströme, deren schwacher Limes nicht rektifizierbar ist.

#### Satz 4.19

- (1) (Randrektifizierbarkeit) Sei  $T \in \mathcal{R}_k(U)$  und  $\mathbf{M}_V(\partial T) < \infty$  für alle  $V \subset U$  mit  $V$  offen, so dass  $\bar{V}$  kompakte Teilmenge von  $U$  ist. Dann ist  $T \in \mathcal{I}_k(U)$ .
- (2) (Closure Theorem) Seien  $T_j \in \mathcal{R}_k(U)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , und

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)) < C_V < \infty$$

für alle  $V \subset U$  mit  $V$  offen, so dass  $\bar{V}$  eine kompakte Teilmenge von  $U$  ist. Gilt  $T_j \xrightarrow{s} T \in \mathcal{D}_k(U)$  für  $j \rightarrow \infty$ , so ist  $T \in \mathcal{R}_k(U)$ .

- (3) (Kompaktheitssatz) Seien  $T_j$  wie in (2). Dann gibt es eine Teilfolge  $T_{j'}$  von  $T_j$  und  $T \in \mathcal{R}_k(U)$  mit  $T_{j'} \xrightarrow{s} T$ .

#### Beweis

Idee: Simultaner Beweis von (1) und (2)/(3) durch vollständige Induktion über  $k$ . Aus (2)/(3) für  $k-1$  und dem Deformationssatz folgt (1) für  $k$ . Ferner geht das Konzept „Schnitt eines Stroms“ ein. ■

**Polyedrische Ströme** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $[0, \varepsilon]^n + \varepsilon \cdot z$ ,  $z \in \mathbb{Z}^n$  ein kompakter  $\varepsilon$ -Würfel. Ein  $k$ -dimensionaler  $\varepsilon$ -Würfel ist erklärt als das relative Innere einer  $k$ -dimensionalen Seite eines solchen  $\varepsilon$ -Würfels.

#### Definition

Ein  $k$ -dimensionaler polyedrischer Strom in  $\mathbb{R}^n$  der Seitenlänge  $\varepsilon$  ist ein Strom der Form

$$P := \sum_Q a_Q \llbracket Q \rrbracket,$$

wobei  $Q$  ein  $k$ -dimensionaler  $\varepsilon$ -Würfel ist. Ein solcher Strom heißt ganzzahlig polyedrischer, falls  $a_Q \in \mathbb{Z}$ .

- Bemerkungen:** (1)  $\mathbf{M}(P) = \sum_Q |a_Q| \varepsilon^k$
- (2)  $\mathbf{M}(\partial P) \leq 2^k \mathbf{M}(P)$ .  $\partial P$  ist stets polyedrisch.

**Satz 4.20 (Deformationssatz)**

Es gibt eine Konstante  $c = c(n)$ , so dass für jedes  $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $k$ -dimensionaler polyedrischer Strom  $P$  existiert und ferner  $R \in \mathbf{N}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  und  $S \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^n)$  existieren, so dass gilt

$$T = P + \partial R + S$$

mit

- (1)  $\mathbf{M}(P) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)$ ,  $\mathbf{M}(\partial P) \leq c \cdot \mathbf{M}(\partial T)$ ,
- (2)  $\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(T)$ ,  $\mathbf{M}(S) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)$ ,
- (3)  $\mathbf{M}(\partial R) \leq c \cdot (\mathbf{M}(T) + \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T))$ ,
- (4)  $\text{spt}(P), \text{spt}(R) \subset \text{spt}(T)_{\delta(\varepsilon)}$  und  $\text{spt}(\partial P), \text{spt}(\partial R) \subset \text{spt}(\partial T)_{\delta(\varepsilon)}$  mit  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (5) Ist  $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$ , so können  $P, R$  als rektifizierbare Ströme gewählt werden. Ist  $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$ , so kann auch  $S$  als rektifizierbarer Strom gewählt werden.

Wir formulieren noch einige Anwendungen:

**Satz 4.21 (Schwache Polyedrische Approximation)**

Sei  $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ . Dann gibt es eine Folge  $P_i$  von polyedrischen Strömen mit  $P_i \xrightarrow{s} T$ , wobei die Massen der  $P_i$  uniform beschränkt sind.

**Beweis**

Wähle  $\epsilon_i := 1/i$  im Deformationssatz. Dann gibt es Ströme  $P_i, R_i, S_i$  mit den im Deformationssatz beschriebenen Eigenschaften. Wegen (1) sind die Massen von  $P_i$  und  $\partial P_i$  uniform beschränkt. Aus  $\mathbf{M}(R_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(T) \rightarrow 0$  folgt  $R_i \xrightarrow{s} 0$  und daher auch  $\partial R_i \xrightarrow{s} 0$ . Wegen  $\mathbf{M}(S_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(\partial T) \rightarrow 0$  folgt  $S_i \xrightarrow{s} 0$ . Insgesamt ist also  $\partial R_i + S_i \xrightarrow{s} 0$  und daher  $P_i \xrightarrow{s} T$ . ■

Sei  $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  und  $\text{spt}(T)$  kompakt.

Gibt es  $S \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\partial S = T$ ? Notwendige Bedingung:  $\partial T = 0$ . Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie wir schon gesehen haben.

**Isoperimetrisches Problem:** Finde eine Massenschranke für die „Füllung  $S$ “ von  $T$ .

**Satz 4.22 (Isoperimetrische Ungleichung)**

Sei  $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\partial T = 0$ ,  $\text{spt}(T)$  kompakt. Dann gibt es ein  $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{spt}(R)$  kompakt,  $\partial R = T$  und

$$\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}$$

mit  $c = c(n)$ .

**Beweis**

Sei o.B.d.A.  $\mathbf{M}(T) \neq 0$ . Setze  $\epsilon := (2c\mathbf{M}(T))^{1/k}$ , wobei  $c$  wie im Deformationssatz gewählt wird. Zu  $T$  seien  $P, R, S$  wie im Deformationssatz gewählt. Wegen (2) und der Voraussetzung folgt  $S = 0$ . Weiterhin gilt

$$\mathbf{M}(P) \leq c\mathbf{M}(T) = \frac{1}{2}\epsilon^k < \epsilon^k,$$

und daher ist  $\mathbf{M}(P) = 0$ , das heißt  $P = 0$ . Somit ist  $P = \partial R$  und

$$\mathbf{M}(R) \leq c\mathbf{M}(T) = c(2c\mathbf{M}(T))^{1/k}\mathbf{M}(T) = c'\mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}.$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung. ■

Schließlich ergeben die zur Verfügung stehenden Sätze auch einen raschen Beweis für eine Lösung des Plateauschen Problems in der Kategorie der Ströme.

**Satz 4.23 (Plateau Problem)**

Sei  $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\partial T = 0$ ,  $\text{spt}(T)$  kompakt. Dann existiert  $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\partial S = T$ ,  $\text{spt}(S)$  kompakt und

$$\mathbf{M}(S) = \inf\{\mathbf{M}(R) : R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n), \partial R = T\}.$$

**Beweis**

Zu  $T$  existiert ein  $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $T = \partial R$  und  $\text{spt}(R)$  kompakt (vgl. den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung). Da  $T$  lokalendliche Masse hat, gilt dies auch für  $\partial R$ , so dass der Randrektifizierbarkeitssatz ergibt, dass  $R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ . Damit ist klar, dass sich das Infimum über eine nichtleere Menge erstreckt. Sei  $R_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  eine minimierende Folge. Wegen  $\partial R_i = T$  ist die Voraussetzung des Kompaktheitssatzes erfüllt. Es existiert somit ein  $S \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $T = \partial R_i \xrightarrow{s} \partial S$ , also  $T = \partial S$ . Eine erneute Anwendung des Randrektifizierbarkeitssatzes zeigt sogar  $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ . Wegen der Unterhalbstetigkeit der Masse ist auch  $\mathbf{M}(S)$  gleich dem Infimum. Durch die Projektion  $\pi_{\#}(R_i)$  der Ströme einer minimierenden Folge auf die abgeschlossene, konvexe Hülle von  $\text{spt}(T)$  erreicht man, dass auch  $\text{spt}(S)$  kompakt ist. ■