21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)

Satz 21.1 (CIS, Version I)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma_0, \gamma_1 : \ [0,1] \to \mathbb{C}$ seien Wege mit $\mathrm{Tr}(\gamma_0), \mathrm{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
Sind γ_0 und γ_1 in D homotop, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Beweis
Ohne Beweis

Satz 21.2 (CIS, Version II)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq D$.
Ist γ nullhomotop in D, so gilt

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Beweis
21.1

Satz 21.3 (CIS, Version III)
$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Beweis
21.2

Satz 21.4 (Charakterisierung von Elementargebieten, II)
Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$.
G ist ein Elementargebiet $\Leftrightarrow$ G ist einfach zusammenhängend

Beweis
„$\Rightarrow$“ Fall 1: $G = \mathbb{C} \Rightarrow$ G konvex, also einfach zusammenhängend (siehe 20.4)
Fall 2: $G \neq \mathbb{C} \overset{19.1}{\Rightarrow} \exists f \in H(G): \; f(G) = \mathbb{D}$ und f ist auf G injektiv.
Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. z_o :=Anfangspunkt von γ.
Zu zeigen: γ und γ_{z_0} sind in G homotop

$\Gamma := f \circ \gamma$. Γ ist ein geschlossener Weg in $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ ist konvex $\overset{10.4}{\Rightarrow}$ $\mathbb{D}$ ist einfach zusammenhängend.
Also existiert eine Homotopie $\tilde{H}$ von Γ nach $\gamma_{f(z_0)}$ in $\mathbb{D}$. $H := f^{-1} \circ \tilde{H}$ ist eine Homotopie von γ nach γ_{z_0} in G
„$\Leftarrow$“ Zu zeigen: $\forall f \in H(G) \exists F \in H(G): \; F' = f$ auf G
Sei $f \in H(G)$. Sei $z_0 \in G$ (fest).
Für $z \in G$ sei $\gamma^{(z)}$ ein Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma^{(z)}) \subseteq G$, $\gamma^{(z)}(0) = z_0, \gamma^{(z)}(1) = z$. (Parameterintervall von $\gamma^{(z)}$ sei [0,1])

$$F(z) := \int_{\gamma^{(z)}} f(w)dw \; (z \in G)$$

Voraussetzung + 21.1, 21.3 $\Rightarrow$ diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $\gamma^{(z)}$.
Fast wörtlich wie im Beweis von 9.2.: $F \in H(G), F' = f$ auf G. ∎

Satz 21.5 (Charakterisierung von Elementargebieten, III)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(1) G ist ein Elementargebiet

(2) G ist einfach zusammenhängend

(3) $\int_\gamma f(z)dz = 0 \; \forall f \in H(G)$ und für jeden geschlossenen Weg γ mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$

(4) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \; \exists g \in H(G): \; e^g = f$ auf G

(5) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \; \exists g \in H(G): \; g^2 = f$ auf G

(6) $G = \mathbb{C}$ oder $G \sim \mathbb{D}$

Beweis
(1)$\Leftrightarrow$(2): 21.4
(3)$\Rightarrow$(1): wie im Beweisteil „$\Leftarrow$“ von 21.4
(3)$\Rightarrow$(4),(5): 11.4
(4)$\Rightarrow$(5): siehe Beweis von 11.4

(5)$\Rightarrow$(6): 19.6
(6)$\Rightarrow$(1): wie im Beweisteil „$\Rightarrow$"von 21.4
(2)$\Rightarrow$(3): 21.2 ■

Definition
Sei $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$. A heißt in $\widehat{\mathbb{C}}$ zusammenhängend :$\Leftrightarrow$ jede lokal konstante Funktion $f: A \to \mathbb{C}$ ist auf A konstant.

Satz 21.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, IV)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

(1) G ist einfach zusammenhängend

(2) $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ ist zusammenhängend in $\widehat{\mathbb{C}}$

(3) Aus $\mathbb{C} \backslash G = A \cup K$, $A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$ folgt: $K = \emptyset$

Beweis
Ohne Beweis.