

# 6 Integralrechnung

## 6.1 Riemann-Integrale

(siehe Walter: Analysis I)

**Definition 6.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Eine *Zerlegung*  $Z$  von  $[a, b]$  ist eine Menge der Form

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \\ \tau_k \in I_k := [t_{k-1}, t_k] \text{ für } k = 1, \dots, n\},$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.  $\mathcal{Z}(a, b)$  ist die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$ . Die *Riemann-Summe* von  $f$  bzgl.  $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$  ist

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Man setzt  $d_k = t_k - t_{k-1}$  und  $|Z| = \max_{k=1, \dots, n} d_k$  (*Feinheit*).  $t_k$  heißt *Teilungspunkt*,  $\tau_k$  heißt *Stützstelle*. Kurzschreibweise:  $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\}$ .  $f$  heißt *Riemann-integrierbar*, falls es ein  $J \in \mathbb{R}$  gibt, sodass für jede Folge  $(Z_n) \subseteq \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt:  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n) = J$ . Dann heißt  $J$  das *Riemann-Integral* von  $f$ . Man schreibt

$$J = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Ferner  $R([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar}\}$ .

**Lemma 6.2** (CAUCHY-Kriterium). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $J \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

a)  $f$  ist Riemann-integrierbar mit  $J = \int_a^b f(x) \, dx$

b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall Z, Z' \in \mathcal{Z}(a, b) \text{ mit } |Z|, |Z'| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt:}$

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \leq \varepsilon \tag{6.1}$$

*Beweis.* b)  $\Rightarrow$  a) Es gelte (6.1). Sei  $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wähle  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\delta_\varepsilon > 0$  aus (6.1). Dann  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|Z_j| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $j \geq N_\varepsilon$ . (6.1) liefert  $|S(f, Z_n) - S(f, Z_m)| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ . Thm. 2.26 zeigt  $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, Z_m) = J$ . Damit  $|S(f, Z_n) - J| \leq \varepsilon$  ( $\forall n \geq N_\varepsilon$ ) (\*)  
 Sei  $Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z'_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann  $\exists N'_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  mit  $|Z'_n| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $n \geq N'_\varepsilon$ .  $\xrightarrow{6.1} |S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)| \leq \varepsilon \forall n \geq N'_\varepsilon$  (\*\*)  
 $\Rightarrow |S(f, Z'_n) - J| \leq |S(f, Z'_n) - S(f, Z_n)| + |S(f, Z_n) - J| \leq 2\varepsilon$  für alle  $n \geq N'_\varepsilon$ , nach (\*), (\*\*).  $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = J$

a)  $\Rightarrow$  b)  $f$  sei Riemann-integrierbar. Annahme: (6.1) sei falsch, also  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists Z_n, Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n|, |Z'_n| < \frac{1}{n}$ , aber  $\underbrace{|S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)|}_{\substack{\text{n.V.} \rightarrow J \\ \rightarrow J \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}}} > \varepsilon \nmid$

□

**Beispiel 6.3.** a) Sei  $a \leq c \leq d \leq b$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Setze  $f = \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}$ . Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar und  $\int_a^b f(x) dx = \alpha(d-c)$ . Speziell  $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$ ,  $\int_a^b \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}(x) dx = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $Z = \{t_j, \tau_j, j \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z| \leq \varepsilon$ . Seien  $l \leq m \leq n$ , sodass  $c \in I_l$ ,  $d \in I_m$ . Dann  $f(\tau_j) = \alpha$  für  $l < j < m$  und  $f(\tau_j) = 0$  für  $j < l - 1$  und  $j > m + 1$ .

$$|S(f, Z) - \alpha(d - c)| = \left| \sum_{j=l-1}^{m+1} f(\tau_j) d_j - \left( \sum_{j=l+1}^{m-1} \alpha d_j + \alpha(t_l - c + d - t_{m-1}) \right) \right| \leq 6|\alpha| |Z| \leq 6|\alpha| \varepsilon$$

Mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt Beh.

□

b) Sei  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ . *Behauptung.*  $f$  ist nicht Riemann-Integrierbar.

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Setze  $Z = \{t_k = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n; \tau_k = t_{k-1} \in \mathbb{Q}\}$ ,  $Z' = \{t' = \frac{k}{n}, \tau'_k = \frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n}, k = 1, \dots, n\}$ .  $\Rightarrow |Z| = |Z'| = \frac{1}{n}$ ,

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau_k)}_{=1} \cdot \frac{1}{n} = 1, S(f, Z') = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau'_k)}_{=0} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$  (6.1) kann für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  nicht gelten.

□

**Bemerkung 6.4** (Verfeinerung). Seien  $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  und  $t'_1, \dots, t'_l \in [a, b]$ . Ordne die  $t_k, t'_j$  zu  $a = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_m = b$ . Setze  $\hat{I}_j = [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$ ,  $\hat{d}_j = \hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$ . Wenn  $\hat{I}_j \subseteq [t_{k-1}, t_k]$ , dann definiere Stützstellen  $\hat{\tau}_j = \tau_k$ . Dann ist  $S(f, Z) = \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j$  im Allgemeinen keine Riemann-Summe, weil u. U.  $\hat{\tau}_j \notin \hat{I}_j$ .

**Satz 6.5.**  $C([a, b]) \subset R([a, b])$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Thm 4.16  $\implies f$  ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Seien  $Z = \{t_k, \tau_k\}, Z' = \{t'_k, \tau'_k\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z|, |Z'| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ . Verfeinere  $Z$  und  $Z'$  wie in Bem. 6.4 zu den gemeinsamen Teilungspunkten  $\{t_k, t_i\} = \{\hat{t}_j\}$ . Erhalte dabei Stützstellen  $\hat{\tau}_j$  zu  $Z$  und  $\hat{\tau}'_j$  zu  $Z'$ , wobei  $|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}'_j| \leq 2\frac{\delta_\varepsilon}{2} = \delta_\varepsilon$ , weil  $\hat{I}_j \subseteq I_k \cap I'_{l_j}$  und  $\hat{\tau}_j \in I_{k_j}, \hat{\tau}'_j \in \hat{I}_{l_j}$ . Somit

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \stackrel{6.4}{=} \left| \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j - \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}'_j) \hat{d}_j \right| \leq \sum_{j=1}^m \underbrace{|f(\hat{\tau}_j) - f(\hat{\tau}'_j)|}_{\leq \varepsilon} \hat{d}_j \leq \varepsilon(b-a)$$

Lemma 6.2  $\implies$  Beh. □

**Satz 6.6.** Seien  $f, g \in R([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in [a, b], h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gelten:

$$a) \alpha f + \beta g \in R([a, b]) \text{ und } \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$b) \text{ Wenn } f(x) \leq g(x) \ (\forall x \in [a, b]), \text{ dann } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{Speziell } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$c) |f| \in R([a, b]) \text{ und } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$d) h \in R([a, b]) \iff h|_{[a, c]} \in R([a, c]) \wedge h|_{[c, b]} \in R([c, b]).$$

$$\text{Dann } \int_a^b h(x) dx = \int_a^c h(x) dx + \int_c^b h(x) dx.$$

*Beweis.* Sei  $Z_n = \{t_{j,n}; \tau_{j,n}; j \leq m_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Setze  $d_{j,n} = t_{j,n} - t_{j-1,n}$ .

a)

$$S(\alpha f + \beta g, Z_n) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha f(\tau_{j,n}) + \beta f(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx \ (n \rightarrow \infty)}$$

b)

$$\underbrace{S(f, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} = \sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n} \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \underbrace{S(g, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx}$$

c) Abschätzung folgt aus  $\pm f \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \sup |f|$ . Siehe Ilias.

d) Siehe Ilias.

□

Man setzt für  $f \in R([a, b])$ ,  $a \leq b$   $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$ . Auch in diesem Fall gilt Satz 6.6 entsprechend.

## 6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition 6.7.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$ , wenn  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$  ist. Man schreibt  $F = \int f dt = \int f = f^{[1]}$ . Beachte: mit  $F$  ist auch die Funktion  $F(x) + c$  für ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  ( $x \in [a, b]$ ) eine Stammfunktion von  $f$ .

**Lemma 6.8.** Sei  $f \in R([a, b])$  und  $f$  sei stetig bei  $x_0 \in [a, b]$ . Dann ist das unbestimmte Integral  $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ , differenzierbar bei  $x_0$  und  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Beweis.* Sei  $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ . Dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x - x_0} (F_0(x) - F_0(x_0)) - f(x_0) \right| &\stackrel{\text{Bsp. 6.3}}{=} \\ \left| \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{=} \\ \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \underbrace{\sup_{|x_0 - t| \leq |x - x_0|} |f(t) - f(x_0)|}_{\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)} \end{aligned}$$

□

**Theorem 6.9** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). a) Sei  $f \in C([a, b])$ . Dann ist jede Stammfunktion  $F$  gegeben durch

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt \quad (\forall x \in [a, b]).$$

Speziell  $x = b$ :

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a) =: F|_b^a.$$

b) Sei  $g \in C^1([a, b])$ . Dann  $\int_a^b g'(t) \, dt = g(b) - g(a)$ .

*Beweis.* a) Lem. 6.8  $\implies F_0(x) = \int_0^x f(t) \, dt$  ist eine Stammfunktion von  $f$ . Sei  $F$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ . Dann  $(F - F_0)' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{TODO 5.20}} F(x) - F_0(x) = F(a) - F_0(a) = F(a)$ .

b) folgt aus 1 mit  $f = g'$ .

□

*Bemerkung.* Für unstetige  $f$ ,  $g'$  ist der Hauptsatz viel schwieriger und zum Teil falsch. Ein Beispiel ist

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Wie in Bsp. TODO 5.11:  $g$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar und  $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$ ,  $x > 0 \implies g$  ist unbeschränkt und somit nicht Riemann-integrierbar. Also ist 6.9 2 nicht sinnvoll.

**Beispiel 6.10.** a) Wir kennen schon zahlreiche Stammfunktionen aus Kapitel 5.

b) Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $|x| < \varrho = \text{Konvergenzradius}$ . Betrachte  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ . Wie im Beweis von Thm. TODO 5.9 zeigt man, dass  $F$  den gleichen Konvergenzradius  $\varrho > 0$  hat. Thm. TODO 5.9  $\implies F'(x) = f(x)$ ,  $|x| < \varrho$ .  $F$  ist also eine Stammfunktion von  $f$ .

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1) \\ \implies F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

ist Stammfunktion von  $f$ . Weitere Stammfunktion ist  $\arctan$ . Da  $\arctan 0 = 0 = F(x)$ , folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

- c) Fläche  $A$  zwischen  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = x^2 - \pi x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ). Beachte  $f(\pi) \geq 0 \geq g(x)$  für alle  $x \in [0, \pi]$ . Also

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (f(x) - g(x)) \, dx \stackrel{\text{HS}}{=} \left( e^x - \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 \right) \right) \Big|_0^\pi \\ &= e^\pi - \left( \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\pi^2 \right) - (1 - 0) = e^\pi - \frac{\pi^3}{6} - 1. \end{aligned}$$

**Satz 6.11.**

**Beispiel 6.12.**

**Satz 6.13.**

**Beispiel 6.14.**

*Bemerkung 6.15* (Integration rationaler Funktionen). Sei  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p, q$  reelle gekürzte Polynome,  $q$  sei nicht konstant 0, höchster Koeffizient von  $p$  und  $q$  sei gleich 1.

- a) Polynomdivision: es existieren Polynome  $p_0, r$  mit  $\text{grad } p_0 \leq \text{grad } q$ , sodass  $f = r + \frac{p_0}{q}$ .  
 $\implies r$  kann integriert werden
- b) Fundamentalsatz der Algebra:  $\exists! z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  (mit  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$ ) und  $\exists! n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ , sodass:  $q(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - z_m)^{n_m}$ .
- c) Komplexe Partialbruchzerlegung (TODO Königsberger §4.3):  $\exists! c_{jk} \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{(x - z_1)} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{m1}}{(x - z_m)} + \dots + \frac{c_{mn_m}}{(x - z_m)^{n_m}} \quad (6.2)$$

- d) Integration:

- a) Terme mit  $c_{jk}, z_j \in \mathbb{R}$  in (6.2) können integriert werden (man hat Formel für Stammfunktion)
- b) Komplexer Fall für Nennerpotenz  $k = 1$ : Da  $p_0, q$  reell sind, gilt (für  $x \in \mathbb{C}$ ):

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{\overline{p_0(\bar{x})}}{q(\bar{x})} \stackrel{(6.2)}{=} \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(\bar{x} - z_j)^k} = \sum_{j,k} \frac{\overline{c_{jk}}}{(x - z_j)^k}$$

Da (6.2) eindeutig ist, gilt: wenn  $c_{jk}, z_j \notin \mathbb{R}$ , dann  $\exists l \neq j$ , sodass  $\bar{z}_j = z_l$  und  $\overline{c_{jk}} = c_{lk}$  (gleiches  $k$ ). Für  $k = 1$  treten im komplexen Fall also Terme der Form auf:

$$\frac{c}{x - z} + \frac{\bar{c}}{x - \bar{z}} = \frac{(c + \bar{c})x - (c\bar{z} + \bar{c}z)}{(x - z)(x - \bar{z})} = \frac{2 \operatorname{Re}(c)x - 2 \operatorname{Re}(c\bar{z})}{x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2} =: \frac{ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta}, \quad (6.3)$$

mit  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$ .

Übung: Stammfunktion für (6.3)

e) Komplexer Fall für  $k > 1$ : Mit komplexer Integration erhält man:

$$\int \left( \frac{c}{(t-z)^k} + \frac{\bar{c}}{(t-\bar{z})^k} \right) dt = \frac{-2 \operatorname{Re} (c(x-\bar{z})^k)}{(k+1) (x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2)^{k-1}} \quad (6.4)$$

(siehe TODO Amann/Escher: Analysis II, Bem. II.5.10)

reelle Methode: Walter, Analysis I, §11.5

**Fazit.** 2 zugestanden, findet man Formel für eine Stammfunktion von  $f$ .

**Beispiel.** a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben,  $a \neq b$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ .

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \stackrel{(6.2), \text{Ansatz}}{=} \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{x-b} \implies 1 = c_1(x-b) + c_2(x-a) \quad (*)$$

(für zu bestimmende  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ )

Berechne  $c_1, c_2$ : (\*) gilt nach stetiger Fortsetzung für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Einsetzen:

$$x = a : \quad 1 = c_1(a-b) \neq 0 \implies c_1 = \frac{1}{a-b}$$

$$x = b : \quad 1 = 0 + c_2(b-a) \implies c_2 = \frac{1}{b-a}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{b-a} \left( -\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right)$$

$$\begin{aligned} \implies \int f(t) dt &= -\frac{1}{b-a} \left( \int \frac{dt}{t-a} - \int \frac{dt}{t-b} \right) \\ &= -\frac{1}{b-a} (\ln |x-a| - \ln |x-b|) \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (x \neq a, b) \text{ (Probe!)} \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Ansatz mit (6.2) und (6.3):

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}, \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ zu bestimmen sind}$$

$$\implies x = a(x-1)(1+x^2) + b(1+x^2) + (cx+d)(x-1)^2 \quad (*)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad 1 &= 0 + 2b + 0 &\implies b &= \frac{1}{2} \\ x = 0: \quad 0 &= -a + b + d &\implies a - d &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (+)$$

Koeffizientenvergleich (vgl. Thm. TODO 5.28):

$$\begin{aligned} \text{für } x^2: \quad 0 &= a + 0 + c &\implies c &= -a \\ \text{für } x^3: \quad 0 &= -a + b - 2c + d = -a + \frac{1}{2} + 2c + d &\implies a + b &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (++)$$

$$(+) \text{ und } (++) : 2a = 0 \implies a = 0 = c, d = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \\ \implies \int f(t) dt &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \arctan x \right) \end{aligned}$$

## 6.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

**Beispiel** (Zinseszins). Gegeben seien Anfangskapital  $u_0$ , Anlage dauert Zinsrate nach Zeit  $\frac{t}{n}$  mit Wiederanlage der Zinsen.  $u_k$  sei Kapital zur Zeit  $\frac{kt}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned} \implies u_1 &= u_0 + \frac{at}{n} u_0 = \left( 1 + \frac{at}{n} \right) u_0 \\ u_2 &= u_1 + \frac{at}{n} u_1 = \left( 1 + \frac{at}{n} \right)^2 u_0 \\ \text{iterativ: } u_n &= \left( 1 + \frac{at}{n} \right)^n u_0 \end{aligned}$$

„instantane Wiederanlage“ = TODO „ $n \rightarrow \infty$ “. Damit  $u_n \rightarrow e^{at} u_0$  (vgl. Aufg. 5.6, Aufg. 12.3 e).  $\rightsquigarrow u(t) = e^{at} u_0$  = Kapital zur Zeit  $t$  bei instantaner Wiederanlage.

Nach Bem. TODO 5.21 ist  $u \in C^1(\mathbb{R})$  die einzige Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (a, u_0 \in \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

Andere Interpretation:  $a = \frac{u'(t)}{u(t)}$  = momentane, relative Änderung des Kapitals („pro Kopf“). Weitere Beispiele für diese Differentialgleichung: Radioaktiver Zerfall ( $a < 0$ ), Populationswachstum bei unbeschränktem Nahrungsangebot ( $u(t)$  = Stoffmenge)



„ $\frac{u'}{u} = a$ “ ist unplausibel für Population (etwa da  $u(t) \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) für  $a > 0$ ).  
 VERHULST (1837): Gesetz für begrenztes Wachstum:  $\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda - \frac{\lambda u(t)}{u_\infty}$  ist  $u(t)$ -abhängig.  
 „mehr Konkurrenten“ = TODO  $u(t)$  groß = TODO weniger Wachstum

$$\implies \begin{cases} u'(t) = \lambda \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right) u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Gegeben sind  $\lambda, u_0, u_\infty > 0$  ( $\lambda$ : Wachstumsparameter,  $u_\infty$ : Sättigungsparameter,  $u_0$ : Anfangswert). Gesucht:  $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$ , das (6.5) für  $t \geq 0$  löst.

*Bemerkung.* Spezielle, „stationäre“ Lösungen:  $u(t) = 0$  mit  $u_0 = 0$  oder  $u(t) = u_\infty$  mit  $u_0 = u_\infty$  (für alle  $t \in \mathbb{R}$ ). Im folgenden sei  $u_0 \neq u_\infty$ ,  $u_0 > 0$ .

Lösung von (6.5): Wir nehmen an, es gebe eine Lösung  $u \in C^1([0, b])$  von (6.5). Wenn  $u_0 > u_\infty$  ( $u_0 < u_\infty$ ), dann existiert ein  $t_0 > 0$ , sodass  $u(t) > 0$ ,  $u(t) > u_\infty$  ( $u(t) < u_\infty$ ) für alle  $0 \leq t \leq t_0$  (da  $u$  stetig und  $u(0) = u_0$ ).

$$(6.5) \implies \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty} \quad (\forall 0 \leq s \leq t_0)$$

$$\xrightarrow{\int_0^t \dots ds} \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} ds = \int_0^t \frac{\lambda}{u_\infty} ds = \frac{\lambda}{u_\infty} t \quad (\forall 0 \leq t \leq t_0)$$

Substitution:  $x = u(s)$ ,  $\frac{dx}{ds} = u'(s)$ ,  $u(0) = u_0$

$$\begin{aligned} &\implies \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{(u_\infty - x)x} = \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{x}{|x - u_\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)} \\ &\xrightarrow{x>0} \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = \frac{\lambda}{u_\infty} t + \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\xrightarrow{\cdot u_\infty, \exp} \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = e^{\lambda t} \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\implies u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)e^{\lambda t}}. \end{aligned}$$

Probe zeigt, dass dieses  $u$  (6.5) für alle  $t \geq 0$  löst.

Es gilt:

- $u(t) > 0$  für alle  $t \geq 0$  ( $u_0 > 0$ ) (biologisch sinnvoll)
- $u(t) \rightarrow u_\infty$  für  $t \rightarrow \infty$
- $u(t)$  wächst und  $u(t) < u_\infty$  ( $\forall t > 0$ ), falls  $u_0 < u_\infty$
- $u(t)$  fällt und  $u(t) > u_\infty$  ( $\forall t > 0$ ), falls  $u_0 > u_\infty$

Gegeben sei  $f \in C([a, b])$ ,  $g \in C(\mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in (a, b)$ . Suchen  $u \in C^1([0, \tau))$  und  $\tau \in (0, \infty)$ , sodass  $u(t) \in (a, b)$  für alle  $t \in [0, \tau)$  und

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)f(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (6.6)$$

(in (6.5):  $f(x) = \left(1 - \frac{x}{u_\infty}\right)x$ ,  $g(x) = \lambda$ )

**Satz 6.16** (Trennung der Variablen). *Sei  $f \in C((a, b))$ ,  $g \in C(\mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in (a, b)$ ,  $f(u_0) \neq 0$ . Dann existiert ein  $t_0 > 0$  und eine eindeutige Lösung  $u \in C^1([0, t_0])$  von (6.6).*

*Beweis.* Sei etwa  $f(u_0) > 0$  und  $\tau > 0$ . Wähle  $\varepsilon \in (0, f(u_0))$ . Da  $f$  stetig ist, existiert  $\delta > 0$  mit  $f(x) > \varepsilon$  für alle  $x \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subseteq (a, b)$ . Sei  $M := \max_{|x-u_0| \leq \delta} f(x) < \infty$  (Satz vom Maximum). Setze  $t_0 = \min\{\frac{\delta}{Mc}, T\}$ ,  $c = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$ .

a) Eindeutigkeit: Sei  $u \in C^1([0, \tau))$  eine Lösung von (6.6). Annahme:  $\tau > t_0$  und es existiere  $t_1 \in (0, t_0)$  mit  $|u(s) - u_0| \leq \delta$  für alle  $0 \leq s < t_1$  und  $|u(t_1) - u_0| = \delta$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u(t_1) - u_0| &\stackrel{\text{HS}}{=} \left| \int_0^{t_1} \underbrace{u'(s)}_{\stackrel{(6.6)}{=} f(u(s))g(s)} ds \right| \\ &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \int_0^{t_1} |f(u(s))| |g(s)| ds \leq \int_0^{t_1} Mc ds \leq Mct_1 < Mct_0 = \delta \quad \nexists \end{aligned}$$

$\Rightarrow |u(s) - u_0| \leq \delta$  für alle  $0 \leq s < \min\{t_0, T\} =: \bar{t}$ . Damit (6.6)  $\Rightarrow \frac{u'(s)}{f(u(s))} = g(s)$ .

$$\Rightarrow G(t) := \int_0^t g(s) ds = \int_0^t u'(s) df(u(s))s \stackrel{x=u(s)}{=} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} \quad \text{für alle } 0 \leq t < \bar{t} \quad (6.7)$$

Setze  $H(y) = \int_{u_0}^y dx f(x)$  für  $y \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \Rightarrow H(u(t)) = G(t)$ .  $H$  ist strikt wachsend

$$u(t) = H^{-1}(G(t)) \quad (\forall 0 \leq t < \bar{t}) \quad (6.8)$$

b) Existenz: Sei  $u$  durch (6.8) für  $0 \leq t \leq t_0$  gegeben. Dann  $u(0) = H^{-1}(G(0)) = H^{-1}(0) = u_0$ . Kettenregel und Umkehrsatz liefern:

$$\exists u'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} G'(t) \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{H'(u(t))} \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{\frac{1}{f(u(t))}} g(t) = f(u(t))g(t)$$

$\Rightarrow u$  löst (6.6).

Fazit:  $u$  aus (6.8) ist eine Lösung von (6.6) und jede weitere Lösung ist auf  $[0, t_0]$  gleich diesem  $u$  und kann, falls  $\tau < t_0$ , zu  $u$  auf  $[0, t_0]$  fortgesetzt werden.  $\square$

**Beispiel 6.17.** a)

$$\text{Betrachte } \begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0. \text{ Es sei } u_0 > 0.$$

$$\implies f(x) = x^2, g(t) = 1.$$

$$\xrightarrow{\text{TV, (6.7)}} \underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x^2}}_{= -\frac{1}{x} \Big|_{u_0}^{u(t)}} = \int_0^t 1 \, ds = t$$

$$\implies t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

$$\implies u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t} \text{ für } 0 \leq t < \frac{1}{u_0} =: \tau$$

Zum Beispiel für  $u_0 = 1$ :  $u(t) = \frac{1}{1-t}$  (Probe!). „blow up“.

b)

$$\text{Sei } a \in C(\mathbb{R}), u_0 \in \mathbb{R}. \text{ Betrachte } \begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0.$$

$\implies f(x) = x$ . Sei  $u_0 > 0$ . Trennung der Variablen liefert

$$\underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x}}_{= \ln u(t) - \ln u_0} = \int_0^t a(s) \, ds$$

$$\implies u(t) = \exp \left( \ln u_0 + \int_0^t a(s) \, ds \right) = \exp \left( \int_0^t a(s) \, ds \right) u_0$$

Probe zeigt: Dies löst die Gleichung für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $u_0 \in \mathbb{R}$ .

c)  $u'(t) = \sqrt{u(t)}$ ,  $u(0) = 0$ ,  $t \geq 0$ .  $\implies f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(t) = 1$ .  $\implies f(0) = f(u_0) = 0$ , haben Lösung  $v(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ . Führe Trennung der Variablen trotzdem durch. Sei  $u$  eine weitere Lösung, die auf  $(0, t_0]$  ungleich 0 ist. Dann  $\frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} = 1$  für  $0 < s \leq t_0$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < t_0$

$$\xrightarrow{\text{TV}} \int_{\varepsilon}^t 1 \, ds = \int_{\varepsilon}^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} \, ds = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left( \sqrt{u(t)} - \sqrt{u(\varepsilon)} \right).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ :  $t = 2\sqrt{u(t)}$  ( $0 < t \leq t_0$ )  $\implies u(t) = \frac{t^2}{4}$ . Probe:  $u$  löst Gleichung.

## 6.4 Uneigentliche Integrale

**Definition 6.18.**    a)

b)

*Bemerkung 6.19.*    a)

b)

**Beispiel 6.20.**    a)

b)

c)

d)

**Satz 6.21.**    a)

b)

**Beispiel 6.22.**    a)

b)

c)

d)

**Beispiel 6.23.**

**Beispiel 6.24.**

**Trapezregel.**    ...