

3 Vertiefung der Theorie

Weiterhin sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$.

3.1 Nullmengen

Problem: $\mathcal{L}^1(X)$ ist Vektorraum, aber $\|f\|_1 = \int |f| dx$ ist keine Norm auf $\mathcal{L}^1(X)$, da $\int \mathbf{1}_N dx = 0$ für alle $N \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda(N) = 0$, z.B. $N = \mathbb{Q}, d = 1$.

Definition 3.1. Eine Menge $N \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(N) = 0$ heißt (d -dimensionale, Borel-) Nullmenge (NM).

Bemerkung 3.2. a) Wir haben bereits die eindimensionalen Nullmengen \mathbb{Q} und die Cantormenge C , sowie Nullmengen in höheren Dimensionen wie Hyperebenen und Graphen stetiger Funktionen gesehen.

b) Wenn $M, N \in \mathcal{B}_d$, $M \subset N$ und N eine Nullmenge ist, dann ist auch M eine Nullmenge.

Wenn $N_j \in \mathcal{B}_d$ Nullmengen sind, dann ist $N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ eine Nullmenge.

Beweis. Dass $N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j \in \mathcal{B}_d$ liegt, ist klar. Nach [Satz 1.14](#) gilt:

$$0 \leq \lambda_d(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(N_j) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow \lambda_d(N) = 0$$

Damit sind abzählbare Mengen Nullmengen. Ferner gilt:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{d-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \times \mathbb{R}^{d-1}$$

ist eine d -dimensionale Nullmenge, wobei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

Beachte: $\mathbb{R} := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ ist keine eindimensionale Nullmenge (Vereinigung nicht abzählbar). \square

c) Sei $A \in \mathcal{B}_d$. Nach [Thm 1.25](#) gilt, dass A genau dann eine Nullmenge ist, wenn offene Intervalle I_j ($j \in \mathbb{N}$) existieren mit:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \leq \epsilon.$$

- d) Sei $N \in \mathcal{B}_d$ eine Borel-Nullmenge. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt dann Lebesgue-Nullmenge. Es gibt ein $C \subset \mathbb{R}$ (Cantormenge) mit $C \notin \mathcal{B}_1$.
 \Rightarrow Dieses M ist keine Borel-Nullmenge (AE 3. kor IX 5.30)
 Nach Aufgabe 3.1 ist

$$\mathcal{L}_d = \{A \subset \mathbb{R}^d : A = B \cup N, B \in \mathcal{B}_d, N \text{ ist Lebesgue-Nullmenge}\}$$

eine σ -Algebra und $\tilde{\lambda}_d(A) = \lambda_d(B)$ (wobei $A = B \cup N$ für $B \in \mathcal{B}_d$ und eine Nullmenge N) ist Maß auf \mathcal{L}_d . Ferner stimmt das Integral bezüglich $\tilde{\lambda}_d$ für Borelfunktionen f mit unserem Integral dem bezüglich λ_d überein.

Es gibt in (1.9) $\mathcal{L}_d = \mathcal{A}(\lambda_d)$ (AE 3: Theorem IX. 5. 7+8)

Ferner: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannintegrierbar. Man kann zeigen, dass f außerhalb einer Lebesgueschen Nullmenge stetig ist. Da f beschränkt ist, ist es folglich integrierbar bezüglich dem fortgesetzten Lebesguemaß $\tilde{\lambda}_d$ und Riemannintegral und Lebesgueintegral stimmen überein (Elstrodt, Satz IV 6.1).

Definition 3.3. Eine Eigenschaft E besteht für fast alle (*f.a.*) $x \in X$ oder fast überall (*f.ü.*), wenn es eine Nullmenge N gibt, sodass E für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Beispiel 3.4. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Nach Korollar 2.24 ist die Menge $N := \{|f| = \infty\}$ eine Nullmenge, also: $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X \setminus N$, also ist f fast überall endlich.

Lemma 3.5. • Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und sei $f = g$ (*f.ü.*). Dann ist g integrierbar und $\int_X f dx = \int_X g dx$.

Insbesondere kann man f durch $\tilde{f} := \mathbf{1}_{\{|f| < \infty\}} \cdot f$ ersetzen (vgl. Beispiel 3.4) und es gilt $\int_X f dx = \int_X \tilde{f} dx$.

- Wenn $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $f = g$ (*f.ü.*), dann gilt auch $\int_X f dx = \int_X g dx$.

Beweis. Nach Voraussetzung: \exists NM N mit $f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus N$.

Da g messbar ist, existiert:

$$\begin{aligned} \int_X |g| dx &= \int_X \mathbf{1}_N |g| dx + \int_X \mathbf{1}_{X \setminus N} \underbrace{|g|}_{=|f|} dx = \int_X \mathbf{1}_N |f| dx \stackrel{\text{Lem 2.18}}{=} 0 \\ &\stackrel{\text{Bem 2.26}}{=} \int_X |f| dx < \infty \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung folgt mit Satz 2.23, dass g integrierbar ist.

Ferner liefert Satz 2.25:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_N g(x) dx \right| \leq \int_N |g(x)| dx \stackrel{\text{Lem 2.18}}{=} 0 \\ \Rightarrow \int_X g dx &\stackrel{\text{Bem 2.26}}{=} \underbrace{\int_N g dx}_{=0 = \int_N f dx} + \int_{X \setminus N} g dx = \int_X f dx \end{aligned}$$

Zweite Behauptung folgt genauso. □

Definition 3.6. Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar ($\forall n \in \mathbb{N}$) sind fast überall konvergent, wenn $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ und fast alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Wenn $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ für fast alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$, dann konvergiert f_n fast überall gegen f .

Lemma 3.7. Seien $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast überall konvergent. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ (f.ü.). Jede andere messbare Funktion $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ (f.ü.) ist fast überall gleich f .
Bemerkung: Nicht jeder fast überall Limes messbarer Funktionen ist messbar.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Nullmenge N , sodass

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Nach Satz 2.8 ist $\mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f_n$ messbar. Ferner konvergiert $\mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f_n$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise

$$\text{gegen } f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ mit: } f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & x \in X \setminus N \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

Mit Satz 2.7 folgt, dass f messbar ist.

Nach der Konstruktion gilt: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(f.ü.)} f$. Wenn $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$ fast überall für eine

messbare Funktion g , dann existiert eine Nullmenge N_1 , sodass $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$ ($\forall x \in X \setminus N_1 \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$ und $f_n(x) \rightarrow g(x) \forall x \notin N \cup N_1 =: N_2$ (Nullmenge). Mit der Eindeutigkeit des Limes folgt dann:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in X \setminus N_2. \quad \square$$

Beispiel. Sei $M \notin \mathcal{B}_1$ die Lebesgue-Nullmenge aus Bemerkung 3.2d), wobei $M \subset C$. Dann konvergiert $f_n = 0$ (f.ü.) gegen $f = \mathbf{1}_M$, da $f_n(x) = f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus C$. C ist eine Nullmenge.

Aber: $f = \mathbf{1}_M$ ist nicht messbar.

Bemerkung 3.8. Es gibt folgende Variante des Satzes von der Monotonen Konvergenz.

Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar ($\forall n \in \mathbb{N}$), sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq f_{n+1}$ (f.ü.).

Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(f.ü.)} f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx =$

$$\int_X f dx.$$

Beweis. Nach Voraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N} \exists$ eine Nullmenge N_n mit $f_n(x) \leq f_{n+1}, \forall x \in X \setminus N_n$.

Die Menge $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ ist eine Nullmenge. Daraus folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \notin N, n \in \mathbb{N}$.

Setze $\tilde{f}_n = \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f_n \Rightarrow \tilde{f}_n = f_n$ (f.ü.), $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}_{n+1}, (\forall n \in \mathbb{N})$.

Setze $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{f}_n$ ist messbar.

$$\int f dx \stackrel{\text{Thm 2.19}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n dx \stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx$$

□

3.2 Der Lebesguesche Konvergenzsatz

Theorem 3.9 (Lemma von Fatou). *Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann gilt:*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx$$

Speziell konvergiere f_n fast überall gegen ein $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Dann folgt:

$$\int_X f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx$$

(Damit ist f integrierbar, falls $(\int f_n(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.)

Beweis. Setze $g_j := \inf_{n \geq j} f_n$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Dann folgt $g_j \leq g_{j+1}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ ist g_j nach Satz 2.7 messbar. Ferner gilt $\sup_{j \in \mathbb{N}} g_j = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $g_j \leq f_n$ ($\forall n \geq j$). Damit gilt:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_X \sup_{j \in \mathbb{N}} g_j(x) dx \stackrel{\text{Def 2.9}}{=} \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_X g_j(x) dx$$

Ferner: $g_j \leq f_n$ $\forall n \geq j$. Mit Lem 2.18 folgt dann:

$$\begin{aligned} \int g_j(x) dx &\leq \int f_n(x) dx \quad (\forall n \geq j) \\ \Rightarrow \int g_j(x) dx &\leq \inf_{n \geq j} \int f_n(x) dx \\ \Rightarrow \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx &\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq j} \int f_n(x) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \end{aligned}$$

Für die zweite Behauptung: Sei N eine Nullmenge mit $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$. Dann:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \int \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f_n(x) dx \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f_n(x) dx \stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

Theorem 3.10 (Lebesgue, majorisierte Konvergenz). *Seien $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar, sodass f_n fast überall konvergiert für $n \rightarrow \infty$ und $|f_n| \leq g$ (f.ü.) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein integrierbares $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(f.\ddot{u}.)} f$ und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx \text{ und } \int_X |f_n(x) - f(x)| dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Diese Aussage gilt auch für jedes $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ anstelle von f , wenn $\tilde{f} = f$ (f.ü.).

Bemerkung. a) Sei $\lambda(X) < \infty$, $|f_n(x)| \leq M$ ($\forall x, n$) $\Rightarrow g := M \cdot \mathbf{1}_X$ integrierbar und $|f_n| \leq g$ (einfache Majorante).

b) Sei $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, setze $f_n := \mathbf{1}_{\{q_1, \dots, q_n\}} \Rightarrow |f_n| \leq \mathbf{1}_{[0, 1]}$ und $f_n \rightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = f$

Damit ist der Satz von Lebesgue anwendbar, aber f ist nicht Riemannintegrierbar, also ist [Thm 3.10](#) für das Riemannintegral sinnlos.

Bemerkung 3.11. Ohne Majorante kann die Aussage von [Thm 3.10](#) falsch sein. Beispiele für $X = \mathbb{R}$:

a) $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n})} \rightarrow f = 0$ (p.w.), aber $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$.

b) $f_n = \mathbf{1}_{[n, \infty]} \rightarrow 0$ (p.w.). Hier gilt sogar $f_n \geq f_{n+1}$. Trotzdem ist:

$$\int f dx = 0 < \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int f_n dx}_{=\infty}.$$

Ana III, 01.12.2008

Beweis von [Thm 3.10](#). Nach [Lem 3.7](#) existiert ein integrierbares $\hat{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{f}$ (f.ü.).

Wie im Beweis von [Bemerkung 3.8](#). existiert eine Nullmenge N , sodass

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (\forall x \notin N, n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{f}(x) \quad (\forall x \in N)$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(x)| \leq g(x) \quad (\forall x \notin N).$$

[Satz 2.23](#) $\Rightarrow \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot f, \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot \hat{f}$ sind integrierbar ($\forall n \in \mathbb{N}$) [Lem 3.5](#) $\Rightarrow f_n, \hat{f}$ sind integrierbar.

Sei $N_1 = N \cup \{|\hat{f}| = \infty\} \cup \{g = \infty\}$. Nach [Korollar 2.24](#) ist N_1 eine Nullmenge.

Setze $g_n := |f| + \mathbf{1}_{X \setminus N_1} \cdot g - \mathbf{1}_{X \setminus N_1} \cdot |f - f_n|$ und $f = \mathbf{1}_{X \setminus N_1} \cdot \hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad (\text{f.ü.}).$$

Es gilt: $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f| + g$ (f.ü.). Da $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f|$ (auf $X \setminus N_1$), ist $g_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Dann:

$$\begin{aligned} \int (|f| + g) dx &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n dx \\ &\stackrel{\text{Satz 2.25}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X \setminus N_1} |f| + g dx - \int_{X \setminus N_1} |f - f_n| dx \right) \\ &\stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \underbrace{\int_X (|f| + g) dx}_{< \infty, \text{ da } f, g \text{ int'bar}} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| dx = 0$. Damit folgt die Behauptung.

(Beachte: g_n ist messbar nach [Satz 2.8](#)) □

Korollar 3.12. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $A_n \in \mathcal{B}(X)$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Weiter seien alle $f_n = \mathbf{1}_{A_n} \cdot f$ integrierbar und $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} |f| dx < \infty$. Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int_X f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dx.$$

Falls zusätzlich $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, sowie f stetig und $|f|$ auf X uneigentlich Riemannintegrierbar sind, dann ist f integrierbar und das Riemann- und Lebesgueintegral stimmen überein.

Beweis. Sei $f_n = \mathbf{1}_{A_n} \cdot f$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Nach Voraussetzung gilt: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ (pw). Ferner: $|f_n| = \mathbf{1}_{A_n} \cdot |f| \leq \mathbf{1}_{A_{n+1}} \cdot |f| = |f_{n+1}|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Aus [Thm 2.19](#) folgt:

$$\int_X f dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} |f| dx < \infty$$

[Satz 2.23](#) $\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Weiter gilt $|f_n| \leq |f|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), also ist $|f|$ eine Majorante der f_n .

Nach [Thm 3.10](#) gilt nun:

$$\int_{A_n} f dx = \int_X f_n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f dx$$

Für die letzte Behauptung wähle $a_n + 1 \leq a_n < b_1 \leq b_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Da $|f|$ uneigentlich riemannintegrierbar ist, konvergiert $\int_{a_n}^{b_n} |f| dx$, ist aber beschränkt. Betrachte $A_n = [a_n, b_n]$. Dann folgt die Behauptung aus dem ersten Beweisteil und $R - \int_{a_n}^{b_n} f dx = \int_{[a_n, b_n]} f dx$. (siehe Bemerkung 2.26) \square

Beispiel. Sei $X = [1, \infty)$. Es gilt:

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{\int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx}_{-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}} \right) = 2$$

$\stackrel{\text{Kor 3.12}}{\Rightarrow} g(x) := x^{-\frac{3}{2}}$ ist integrierbar auf X .

Setze $f_n(x) = x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}, X \geq 1$. Dann folgt $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($\forall x \geq 1$). $|f_n| \leq g$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\stackrel{\text{Thm 3.10}}{\Rightarrow} \int f_n dx \rightarrow 0, \int |f_n| dx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Korollar 3.13. a) Seien $f_j, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für jedes $j \in \mathbb{N}$. Sei N eine Nullmenge, sodass $g_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $x \in X \setminus N$ konvergiert und sodass $|g_n(x)| \leq g(x)$ ($\forall n \in \mathbb{N}, x \in X \setminus N$). Setze $\sum_{j=1}^\infty f_j(x) := 0$ für $x \in N$. Dann ist $\sum_{j=1}^\infty f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt

$$\int_X \sum_{j=1}^\infty f_j(x) dx = \sum_{j=1}^\infty \int_X f_j(x) dx.$$

b) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ für disjunkte $A_j \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt:

$$\int_X f(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f(x) dx.$$

Beweis. a) Da $|g_n| \leq g$ (f.ü.) und $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ((f.ü.)), ist $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ integrierbar und

$$\begin{aligned} \exists \int_X \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} f_j dx}_{=f} &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n dx \stackrel{\text{Thm 3.10}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n dx \\ &\stackrel{\text{Satz 2.25}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx. \end{aligned}$$

b) Setze $f_j := \mathbf{1}_{A_j} \cdot f$, $g := |f|$. Dann gilt $|\sum_{j=1}^n f_j| = |\mathbf{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} \cdot f| \leq |f|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$. Also folgt b) aus a). □

Theorem 3.14 (Stetigkeitssatz). Seien $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $t_0 \in U$ und $f : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben.

- a) Für jedes $t \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ von X nach \mathbb{R} messbar.
- b) Es gibt ein integrierbares $g : X \rightarrow [0, \infty]$ und Nullmengen N_t für jedes $t \in U$, sodass $|f(t, x)| \leq g(x)$ für alle $t \in U$ und alle $x \in X \setminus N_t$.
- c) Es gibt eine Nullmenge N , sodass die Funktion $t \mapsto f(t, x)$ von U nach \mathbb{R} für jedes $x \in X \setminus N$ bei t_0 stetig ist.

Dann ist die Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \int_X f(t, x) dx$, für alle $t \in U$ definiert und bei t_0 stetig. Das heißt:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(t, x) dx \stackrel{!}{=} \int_X f(t_0, x) dx = F(t_0).$$

Beweis. Nach a) und b) ist $x \mapsto f(t, x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar.

Seien $t_n \in U$ mit $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_0$. Setze $g_n(x) := f(t_n, x)$ ($x \in X, n \in \mathbb{N}$).

$\tilde{N} := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{t_n} \cup N$ ist eine Nullmenge.

Nach c) gilt: $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t_0, x)$ ($\forall x \notin \tilde{N}$) und nach b):

$|g_n(x)| \leq g(x)$ ($\forall n \in \mathbb{N}, x \notin \tilde{N}$). Mit [Thm 3.10](#) folgt

$$\int_X g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f(t_0, x) dx = F(t_0).$$

□

Korollar 3.15. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, $a = \inf I$. Dann ist $t \mapsto F(t) = \int_a^t f(s)ds$ auf I stetig und $F(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$.

Beweis. Es gilt $F(t) = \int_I \underbrace{\mathbf{1}_{(a,t)}(x)}_{=h(t,x)} \cdot f(x) dx \Rightarrow |h(t,x)| \leq |f(x)|, \forall t, x$ und $|f|$ ist integrierbar. Sei $t_0 \in I$ fest aber beliebig.

Es gilt: $h(t,x) = \begin{cases} f(x), & t > x, \\ 0, & t \leq x \end{cases} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} h(t_0, x)$ für jedes $x \neq t_0$.

Nun liefert [Thm 3.14](#) die Behauptung mit $N = N(t_0) = \{t_0\}$ in c), denn:

$$F(t) = \int_I h(t,x) dx \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \int_I h(t_0, x) = F(t_0).$$

□

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Sei $t > 0$ fest, aber beliebig. Wähle $\epsilon \in (0, t)$. Für $x > 0$ gilt dann $|e^{-tx} \cdot f(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot e^{-\epsilon x}$ ist integrierbar auf \mathbb{R}_+ .

Genauso: Sei $t \geq t_0 > 0$, $\epsilon \in (0, t_0)$. Dann ist $g(x) = e^{-\epsilon x} \cdot \|f\|_\infty$ die Majorante in [Thm 3.14](#) und somit existiert die ‘‘Lapacetransformation‘‘

$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot f(x) dx$ und sie ist stetig für $t \geq 0$. Da t_0 beliebig war, gilt dies für alle $t > 0$.

Ana III, 05.12.2008

Theorem 3.16. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle

- a) $\forall t \in U : x \mapsto f(t, x), X \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar
- b) \exists eine Nullmenge N_1 , sodass $t \mapsto f(t, x), U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar für alle $x \notin N_1$ und alle $t \in U$
- c) \exists eine Nullmenge N_2 und ein integrierbares $g : X \rightarrow [0, \infty]$, sodass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(t, x) \right| \leq g(x), \quad \forall x \notin N_2, \quad j = 1, \dots, k, \quad t \in U$$

Dann ist

$$F(t) := \int_X f(t, x) dx$$

in $t \in U$ partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t, x) dx = \int_X \frac{\partial}{\partial t_j} f(t, x) dx \quad (\forall j \in \mathbb{N}, t \in U).$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, k\}$, $t_0 \in U$ fest, aber beliebig. Sei $\tau_n \neq 0$ mit $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Setze $s_1 := t_0 + \tau_n \cdot e_j$. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $s_n \in B(t_0, r) \subset U$. Sei $N = N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge.

Setze $g_n(x) := \frac{1}{\tau_n}(f(s_n, x) - f(t_0, x))$ für $n \in N$, $x \in X$. Nach b) gilt dann $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t_j} f(t_0, x) \forall x \notin N$.

Der Mittelwertsatz liefert: Es existieren σ_n mit $|\sigma_n| \leq |\tau_n|$ (abhängig von x, t_0, j), sodass

$$|g_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0 + \sigma_n \cdot e_j, x) \right| \stackrel{c)}{\leq} g(x) \quad (\forall x \notin N, n \in \mathbb{N}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0, x) dx & \stackrel{\text{majorisierte}}{\text{Konvergenz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} (F(s_1) - F(t_0)) \\ & = \frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t_0, x) dx. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Wir haben schon gesehen, dass $t \mapsto \hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot f(x) dx$ für $t > 0$ existiert und stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $t \geq \epsilon$. Dann gilt

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} \cdot f(x) \right| = |-x e^{-tx} \cdot f(x)| \leq x e^{-\frac{\epsilon}{2}x} e^{-\frac{\epsilon}{2}x} \cdot \|f\|_\infty \leq \frac{2}{\epsilon \epsilon} \|f\|_\infty \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2}x}.$$

Und $\frac{2}{\epsilon \epsilon} \|f\|_\infty \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2}x}$ ist integrierbar. Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt mit [Thm 3.16](#):

$$\exists \hat{f}'(t) = \int_0^\infty x e^{-tx} \cdot f(x) dx.$$

3.3 Iterierte Integrale

Schreibe $z \in \mathbb{R}^d$ als $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ mit $d = k + l$. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy.$$

Probleme:

- 1) Sind $y \mapsto f(x, y)$, $x \mapsto f(x, y)$ [messbar](#) und integrierbar?
- 2) Sind $x \mapsto \int f(x, y) dy$, $y \mapsto \int f(x, y) dx$ [messbar](#) und integrierbar?
- 3) Gilt die Formel?

Sei $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$. Dann folgt, dass $p_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $p_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ stetig und damit [messbar](#) sind.

Lemma 3.17. Wenn $A \in \mathcal{B}_k$ und $B \in \mathcal{B}_l$, dann gilt $A \times B \in \mathcal{B}_d$.

Beweis. Es gilt $A \times \mathbb{R}^l = p_1^{-1}(A) \in \mathcal{B}_d$ und $\mathbb{R}^k \times B = p_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}_d$. Damit folgt $A \times B = (A \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times B) \in \mathcal{B}_d$. \square

Definition. Für $C \in \mathcal{B}_d$ definiere die Schnitte

$$\begin{aligned} C_y &:= \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in C\} \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l) \\ C^x &:= \{y \in \mathbb{R}^l : (x, y) \in C\} \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k) \end{aligned}$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \in \mathbb{R}^l$, $x \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt für $C = A \times B$:

$$C^x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases} \quad (3.1)$$

Setze:

$$\begin{aligned} j_y : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^d, \quad j_y(x) = (x, y) \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l). \\ j^x : \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R}^d, \quad j^x(y) = (x, y) \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k). \\ &\Rightarrow j_y, j^x \text{ sind stetig und messbar.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dann gilt $C_y = j_y^{-1}(C)$, $C^x = (j^x)^{-1}(C)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und alle $y \in \mathbb{R}^l$.

Für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiere die Schnittfunktionen:

$$\begin{aligned} f_y &= f \circ j_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f_y(x) = f(x, y) \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l) \\ f^x &= f \circ j^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f^x(y) = f(x, y) \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lemma 3.18. Seien $C \in \mathcal{B}_d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$. Dann gelten:

- $C_y \in \mathcal{B}_k$ und $C^x \in \mathcal{B}_l$
- $f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind messbar

Beweis. Folgt aus (3.2), (3.3) und der Messbarkeit von f_y, f^x . \square

Definition. Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann definiere:

$$\begin{aligned} \varphi_C(x) &= \lambda_l(C^x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C^x}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x, y) dx \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k) \\ \psi_C(y) &= \lambda_k(C_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{C_y}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_C(x, y) dx \quad (\forall y \in \mathbb{R}^l) \end{aligned} \quad (3.4)$$

(Diese Definition ist sinnvoll wegen Lem 3.18 und weil $\mathbf{1}_C > 0$)

An dieser Stelle wird z.B. verwendet, dass

$$\mathbf{1}_{C^x}(y) = \begin{cases} 1, & y \in C^x \\ 0, & y \notin C^x \end{cases} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in C \\ 0, & (x, y) \notin C \end{cases} = \mathbf{1}_C(x, y) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l)$$

gilt.

Lemma 3.19. Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann sind $\varphi_C : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$, $\psi_C : \mathbb{R}^l \rightarrow [0, \infty]$ messbar.

Beweis. Es reicht f_c zu betrachten. Sei dafür $I = I' \times I''$ mit $I' \in \mathcal{J}_k$, $I'' \in \mathcal{J}_l$. Dann gilt

$$f_I(x) \stackrel{\text{Def 3.1}}{=} \begin{cases} \lambda_l(I''), & x \in I' \\ 0, & x \notin I' \end{cases} = \lambda_l(I'') \cdot \mathbf{1}_{I'}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k)$$

Damit folgt die Messbarkeit von f_i (+).

Somit $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{D} = \{C \in \mathcal{B}_d : \varphi_C \text{ messbar}\} (*)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $Q_n := (-n, n]^d$ und $\mathcal{D}_n := \{C \subset Q_n : C \in \mathcal{D}\}$. Wir schreiben $Q_n = Q'_n \times Q''_n$ mit $Q'_n = (-n, n]^k$, $Q''_n = (-n, n]^l$.

Damit ergeben sich folgenden Eigenschaften für \mathcal{D}_n :

(A1) Wegen (+) gilt $Q_n \in \mathcal{D}_n$.

(A2) Da $\lambda_l(C^x) \leq \lambda_l(Q''_n) < \infty$, sind für $C \in \mathcal{D}_n$ $\varphi_C, \varphi_{Q_n}, \varphi_{Q_n \setminus C}$ \mathbb{R}_+ -wertig.

Weiter gilt $\mathbf{1}_{Q_n \setminus C} = \mathbf{1}_{Q_n} - \mathbf{1}_C$. Damit ist $\varphi_{Q_n \setminus C} \stackrel{(3.4)}{=} \varphi_{Q_n} - \varphi_C$ messbar, da $C \in \mathcal{D}$ und (+) gilt $Q_n \setminus C \in \mathcal{D}_n$.

(A3') Seien $\{C_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}_n$ disjunkt. Dann gilt $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j \in \mathcal{D}_n$. Denn

$$\begin{aligned} \varphi_{\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j}(x) &\stackrel{(3.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j}(x, y) dy \stackrel{C_j \text{ disjunkt}}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{C_j}(x, y) dy \\ &\stackrel{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C_j}(x, y) dy \stackrel{(3.4)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{C_j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist φ_{C_i} messbar. Damit folgt, dass $\varphi_{\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j}$ als Reihe messbarer, positiver Funktionen messbar. Also gilt

$$\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j \in \mathcal{D}_n.$$

Somit gilt (A3').

Ferner gilt nach $\mathcal{J}_d \cap Q_n \stackrel{\text{Lem 1.10}}{=} \{F \in \mathcal{J}_d : I \subset Q_n\} \subset \mathcal{D}_n$.

Mit Lem 3.20 folgt dann $\mathcal{D}_n = \sigma(\mathcal{J}_d \cap Q_n) = \mathcal{B}(Q_n)$.

Ana III, 08.12.2008

Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Setze

$$\varphi_C(x) := \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x, y) dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k)$$

Dann ist φ_C messbar für $C \in \mathcal{B}_d$ und $C \subset Q_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $C \in \mathcal{B}_d$ beliebig. Dann gilt $C \cap Q_n \subset Q_n$, $C \cap Q_n \in \mathcal{B}_d$. Somit ist auch $\varphi_{C \cap Q_n}$ messbar und es gilt

$C \cap Q_n \subset C \cap Q_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

Es gilt $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C \cap Q_n$. Daraus folgt

$$\mathbf{1}_{C \cap Q_n} \leq \mathbf{1}_{C \cap Q_{n+1}}, \quad \mathbf{1}_{C \cap Q_n}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_C(x, y) \quad \forall z = (x, y) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l.$$

Mit [Beppo Levi](#) folgt dann

$$\varphi_{C \cap Q_n}(x) \stackrel{(3.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C \cap Q_n}(x, y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x, y) dy \stackrel{(3.4)}{=} \varphi_C \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k).$$

Damit ist φ_C [messbar](#) als punktweiser Limes [messbarer](#) Funktionen. \square

Lemma 3.20. Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E})$ und \mathcal{D} erfülle (A1), (A2) und (A3'). Dann gilt $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$.

Beweis. Siehe Extravorlesung. \square

Satz 3.21. Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann gilt

$$\lambda_d(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y) dy.$$

Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_C(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_C(x, y) dx \right) dy.$$

(Vergleiche [\(3.4\)](#).)

Beweis. Nach [Lem 3.19](#) und da die Integranden positiv sind, existieren für alle $C \in \mathcal{B}_d$

$$\mu(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x) dx, \quad \nu(C) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y) dy.$$

Sei $I \in \mathcal{J}_d$. Dann folgt $\exists I' \in \mathcal{J}_k, I'' \in \mathcal{J}_l$ mit $I = I' \times I''$. Dann gilt

$$\mu(I) \stackrel{(3.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \cdot \mathbf{1}_{I'}(x) dx = \lambda_l(I'') \cdot \lambda_k(I') \stackrel{(1.2)}{=} \lambda_d(I).$$

Genauso zeigt man, dass $\mu(I) = \lambda_d(I)$ gilt.

Also gilt $\lambda_d = \mu = \nu$ auf \mathcal{J}_d .

Es ist klar, dass λ_d ein Maß ist und dass $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$.

Seien $C_j \in \mathcal{B}_d$ disjunkt ($j \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu \left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} C_j \right) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l \left(\left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} C_j \right)^x \right) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l \left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} C_j^x \right) dx \\ &\stackrel{(M2)}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_l(C_j^x)}_{\geq 0} dx \stackrel{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C_j^x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j^x). \end{aligned}$$

Also ist μ ein Maß. Genauso zeigt man die Maßeigenschaft für ν .

Im Beweis von [Thm 1.20](#) haben wir gesehen, dass \mathcal{J}_d die Voraussetzungen A), B) von [Thm 1.19](#) (Eindeutigkeitssatz) erfüllt. Somit impliziert [Thm 1.19](#), dass $\lambda_d = \mu = \nu$ auf \mathcal{B}_d gilt. □

Korollar 3.22. Für $N \in \mathcal{B}_d$ sind äquivalent:

- a) $\lambda_d(N) = 0$
- b) Für (f.a.) $x \in \mathbb{R}^k$ gilt $\lambda_d(N^x) = 0$
- c) Für (f.a.) $x \in \mathbb{R}^l$ gilt $\lambda_k(N^x) = 0$

Beweis. Folgt direkt aus [Satz 3.21](#) und [Lem 2.18c](#)). □

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge. Setze $N := M \times \mathbb{R}^l$. Dann folgt mit [Lem 3.17](#) $N \in \mathcal{B}_d$. Es gilt $N_y = M$ ($\forall y \in \mathbb{R}^l$) (vergleiche [\(3.1\)](#)). Schließlich folgt dann mit [Kor 3.22](#), dass N ebenfalls eine Nullmenge ist.

Bemerkung 3.23. Es existiert ein $M \subset [0, 1]^2$, sodass M in keiner Nullmenge aus \mathcal{B}_2 liegt (und insbesondere ist M keine zweidimensionale Nullmenge), aber alle M^x , M_y höchstens ein Element haben. Damit folgt $\lambda(M^x) = \lambda(M_y) = 0 \forall x, y$.

Also implizieren b) und c) in [Kor 3.22](#) nicht einmal, dass $M \in \mathcal{B}_2$. (Vergleiche Elstrodt Bsp V. 1.9)

Bemerkung 3.24. Sei $\emptyset \neq D \in \mathcal{B}_d$ und $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setze

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus D \end{cases} \quad (\text{“0-Fortsetzung“})$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{f}(x) \leq 0\} = \begin{cases} \{x \in D : f(x) \leq a\} \cup D^c, & a \geq 0 \\ \underbrace{\{x \in D : f(x) \leq a\}}_{\in \mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}_d}, & a < 0 \in \mathcal{B}_d. \end{cases}$$

Also ist \tilde{f} messbar. □

Beispiel 3.25. Sei $B := B(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < r, |y| < \sqrt{r^2 - x^2}\} \in \mathcal{B}_2$. Damit folgt

$$B^x = \begin{cases} \emptyset, & |x| \geq r \\ (-\sqrt{r^2 - x^2}, +\sqrt{r^2 - x^2}), & |x| < r. \end{cases}$$

Und damit

$$\lambda_1(B^x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq r \\ w \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| < r. \end{cases}$$

Mit [Satz 3.21](#) folgt dann

$$\lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B^x) dx = \int_{-r}^r 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{Ana1}}{\stackrel{\text{Bsp 6.14}}{=}} \pi \cdot r^2.$$

Genauso zeigt man, dass $\lambda_2(\overline{B}) = \pi \cdot r^2$. Damit folgt für alle $A \in \mathcal{B}_2$ mit $B \subset A \subset \overline{B}$: $\lambda_2(A) = \pi \cdot r^2$.

Beispiel 3.26 (Rotationskörper). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow [0, \infty]$ [messbar](#). Setze f wie in [Bem 3.24 messbar](#) auf \mathbb{R} fort. Definiere dann

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 < f(z)^2\} = \{(\tilde{f} \circ p_z)^2 - p_x^2 - p_y^2 > 0\} \in \mathcal{B}_3.$$

Setze weiter für $z \in I$ $V_2 := B(0, f(z))$ und für $z \notin I$ $V_2 := \emptyset$. Dann folgt mit [Satz 3.21](#)

$$\lambda_3(V) = \int_I \lambda_2(B(0, f(z))) dz \stackrel{\text{Bsp 3.25}}{=} \pi \cdot \int_I f(z)^2 dz.$$

Beispiel:

Sei $I = [1, \infty)$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1, x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}\}$. Dann folgt

$$\lambda_3(V) = \pi \cdot \int_1^\infty \frac{dz}{z^2} = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dz}{z^2} = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{z} \right]_1^b = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = \pi.$$

Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ [messbar](#). Nach [Lem 3.18](#) existieren dann

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) dy & (\forall x \in \mathbb{R}^k) \\ G(y) &:= \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) dx & (\forall y \in \mathbb{R}^l). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Theorem 3.27 (Fubini). Sei $d = k + l$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

a) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ [messbar](#). Dann sind $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ und $G : \mathbb{R}^l \rightarrow [0, \infty]$ [messbar](#) und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy. \tag{3.6}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gibt es Nullmengen $M \in \mathbb{R}^k$, $N \in \mathbb{R}^l$, sodass $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ und $f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist für alle $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$.

Definiere $F(x)$ für $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ und $G(y)$ für $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ wie in [\(3.5\)](#) und setze

$F(x) = 0$ für alle $x \in M$ und $G(y) = 0$ für alle $y \in N$.
Dann sind $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $G : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) dy.$$

Meist schreibt man dafür wieder (3.6).

Beweis. (Der Beweis erfolgt in den vier Schritten der Integraldefinition.)

- a) 0) Für $f = \mathbf{1}_C$, $C \in \mathcal{B}_d$ wurde a) schon in [Lem 3.19](#) und [Satz 3.21](#) gezeigt.
1) Sei $f := \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mathbf{1}_{C_k} \geq 0$ messbar. Dann ist $F \stackrel{(3.4)}{=} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \varphi_{C_k}$ nach [Satz 2.8 messbar](#) (verwende [Lem 3.19](#)). Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz &= \sum_{k=1}^m a_k \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{C_k}(z) dz \\ &\stackrel{0)}{=} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C_k}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mathbf{1}_{C_k}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

(Die andere Gleichheit in (3.6) zeigt man genauso.)

Ana III, 12.12.2008

- 2) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es einfache $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f_n(z) \leq f_{n+1}(z)$, $f(z) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$ ($\forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{R}^d$).
Setze $F_n(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) dy \leq F_{n+1}(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^k, n \in \mathbb{N}$). Mit 1) folgt dann die Messbarkeit von F_n ($\forall n \in \mathbb{N}$). Mit [Beppo Levi](#) für $(f_n)^x$ folgt

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy =: F(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k).$$

Damit ist $f : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ als Grenzwert messbarer Funktionen messbar.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz &\stackrel{\text{Beppo Levi}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(z) dz \\ &\stackrel{1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) dy \right)}_{=F_n(x)} dx \\ &\stackrel{\text{Beppo Levi}}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Die Andere Gleichheit in (3.6) folgt genauso. Damit ist a) gezeigt.

- b) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann folgt, dass $|f| : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar ist und dass $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nach [Lem 3.18 messbar](#) ist. Dann gilt

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| dz = \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| dy \right)}_{=: \Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^l} |f^x| dy} dx. \quad (+)$$

Dann folgt die Integrierbarkeit von $\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ (Φ ist [messbar](#) nach [Lem 3.19](#)). [Kor 2.24](#) impliziert, dass $M := \{\Phi = \infty\} \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge ist. Damit ist nach [Kor 3.22](#) auch $M \times \mathbb{R}^l$ eine d-dimensionale Nullmenge. Mit (+) folgt nun, dass $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ integrierbar ist. Setze

$$F(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy, & x \in M \\ 0, & x \in M \end{cases} = \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, y) dy, \quad (*)$$

wobei $\tilde{f} = \mathbf{1}_{M^c \times \mathbb{R}^l} \cdot f$ ist. Also ist \tilde{f} [messbar](#) ist.

Da $|\tilde{f}| = \mathbf{1}_{M^c \times \mathbb{R}^l} \cdot |f^x|$ gilt, folgt, dass $\tilde{f} : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^k$ integrierbar ist.

Ferner gilt

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) dy - \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) dy =: F^+(x) - F^-(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k),$$

wobei $F^\pm(x) \in \mathbb{R}_+$ ($\forall x \in \mathbb{R}^k$). Nach a) sind damit F^\pm messbar und somit ist auch F messbar. Außerdem gilt $|F| \leq \Phi$, welches integrierbar ist. Mit [Satz 2.23](#) ist dann F integrierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l \setminus M} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx}_{(**)} = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx \\ & \stackrel{\text{Satz 2.23}}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} F^-(x) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) dy \right) dx \\ & \stackrel{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_+ dz - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_-(z) dz \stackrel{\text{Def. des Integrals}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) dz}_{(++)} \\ & \stackrel{f=\tilde{f} \text{ (f.ü.)}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz. \end{aligned}$$

Die andere Gleichheit in [\(3.6\)](#) folgt analog.

□

Bemerkung. In [Thm 3.27b](#)) gilt (3.6), wenn man die iterierten Integrale wie in (**) und (++) modifiziert.

Bemerkung 3.28. a) Man kann [Fubini](#) auf endlich oft iterierte Integrale verallgemeinern. Es existiert also eine Variante für $f(z) = f(x_1, \dots, x_m)$.

b) Nach [Bem 3.23](#) existiert $f = \mathbf{1}_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, sodass die iterierten Integrale existieren und gleich sind (es gilt $F = 0$, $G = 0$), aber f ist nicht in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ [messbar](#). Also muss man die [Messbarkeit](#) in [Fubini](#) vorausgesetzt werden.

c) Wenn f weder integrierbar noch positiv ist, kann es passieren, dass die iterierten Integrale in (3.6) existieren und ungleich sind.

Beispiel (Cauchy):

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in (0, 1)^2 \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 1)^2. \end{cases}$$

Dann gilt für $(x, y) \in (0, 1)^2$

$$f(x, y) = \frac{\partial \partial}{\partial y \partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial \partial}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Sei $x > 0$. Dann existiert

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}_{= \frac{y}{x^2 + y^2}} dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dann folgt die Existenz von

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Entsprechend existiert auch

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = [\arctan(x)]_0^1 = -\frac{\pi}{4},$$

aber es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

- d) Selbst wenn f **messbar** (und nicht positiv) ist, folgt im Allgemeinen aus der Existenz und Gleichheit der iterierten Integrale in (3.6) nicht die Integrierbarkeit von $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \in [-1, 1] \setminus \{0, 0\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gebrauchsanweisung für Fubini. Seien $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $D \in \mathcal{B}_d$.

- a) Prüfe, ob f in (x, y) **messbar** ist.
b) Setze f **messbar** fort zu $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (etwa mit 0, vergleiche Bem 3.24). Dann folgt die **messbar**Messbarkeit von $\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}$.
c) Falls nötig, zeige mit a)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_D \cdot |\tilde{f}| dz = \int \int |\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}| dx dy = \int \int |\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}| dy dx < \infty.$$

Dann folgt $\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}$ ist integrierbar.

- d) **Fubini b)** liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_D(x, y) \cdot \tilde{f}(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_D(x, y) \cdot \tilde{f}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.29. Sei $Q = X \times Y$ für $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_k$, $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}_l$. Sei $f : Q \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar oder **messbar** und positiv. Sei $\tilde{f}(x, y) = \mathbf{1}_X(x) \cdot \mathbf{1}_Y(y) \cdot f(x, y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_Q f(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) dz \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_X(x) \cdot \mathbf{1}_Y(y) \cdot \tilde{f}(x, y) dy dx \\ &= \int_X \int_Y f(x, y) dy dx \stackrel{\text{genauso}}{=} \int_Y \int_X f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Beispiel. a) Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. Da D abgeschlossen ist, gilt $D \in \mathcal{B}_2$. Seien $f(x, y) = \frac{1}{x} \cos(xy)$ für $(x, y) \in D$ und $\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{x} \cos(xy)$, $(x, y) \in Q := (0, 0) \times \mathbb{R}_+$. Dann sind f und \tilde{f} stetig und damit **messbar** und es gilt $\tilde{f}|_D = f$ (in (x, y)).

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_D |f| d(x, y) &= \int_Q \mathbf{1}_D |\tilde{f}| d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{1}_D(x, y)}_{=1 \Leftrightarrow x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \underbrace{|\cos(xy)|}_{\leq 1} dy dx \\ &\leq \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} dy dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1. \end{aligned}$$

Somit ist f integrierbar. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\int_D f(x, y) d(x, y) &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_D(x, y) \cdot \frac{\cos(xy)}{x} dy dx \\
&\stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} dy dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \cdot \sin(xy) \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sin(1)}{x} dx = \sin(1).
\end{aligned}$$

Ana III, 15.12.2008

- b) Sei $\alpha \in (0, 1)$, $g : (0, 1) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Setze $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f(x, y) = (x - y)^{-\alpha} \cdot g(y)$. \tilde{f} sei die Nullfortsetzung von f . Sei $G(x, y) := g(y) \forall (x, y) \in D$. Dann ist $G = g \circ p_2$ messbar auf D . Damit ist auch f in (x, y) als Produkt messbarer Funktionen messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_D |f| dz &\stackrel{\text{Fub a)}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{\mathbf{1}_D(x, y)}_{=1 \Leftrightarrow y \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in D_y} \cdot \tilde{f}(x, y) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x - y)^{-\alpha} \cdot |g(y)| dx \right) dy \\
&\stackrel{t=x-y}{\stackrel{dt=dx}}{=} \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-y} t^{-\alpha} dt}_{\left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_0^{1-y} = \frac{1}{1-\alpha} (1-y)^{1-\alpha}} \cdot |g(y)| dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \underbrace{(1-y)^{1-\alpha}}_{\leq 1} \cdot |g(y)| dy = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 |g(y)| dy < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist f integrierbar, also existiert das Integral und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_D f(x) dz &\stackrel{\text{Fub b)}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{\mathbf{1}_D(x, y)}_{=1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x \Leftrightarrow y \in D^x} \cdot \tilde{f}(x, y) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^x (x - y)^{-\alpha} \cdot g(y) dy \right)}_{=: F(x)} dx.
\end{aligned}$$

Beachte: für $g(y) := |\frac{1}{2} - y|^{\alpha-1}$, $y \in (0, 1)$ (integrierbar) gilt aber

$$F(0.5) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y \right)^{-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2} - y \right)^{\alpha-1} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y \right)^{-1} dy = \infty.$$

c) In Ana1 haben wir bereits die Existenz von folgendem Limes gezeigt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx}_{=: I_R, R > 0}.$$

Für $x > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-xy} dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-xy} dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \cdot e^{-xy} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot (1 - e^{-bx}).$$

Somit folgt

$$I_R = \int_0^R \int_0^\infty \underbrace{\sin(x) \cdot e^{-xy}}_{=: f(x,y)} dy dx$$

und $f : [0, R] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Ferner gilt

$$\int_D |f| dz \stackrel{\text{Fub a)}}{=} \int_0^R \int_0^\infty |\sin(x)| \cdot e^{-xy} dy dx = \int_0^R \frac{|\sin(x)|}{x} dx < \infty.$$

Da der Integrand stetig ist, folgt, dass $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} I_R &\stackrel{\text{Fub b)}}{=} \int_D f dz = \int_0^\infty \int_0^R \sin(x) \cdot e^{-xy} dx dy \\ &\stackrel{2x \text{ PI}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \cdot (1 - e^{-yR} \cdot (y \cdot \sin(R) + \cos(R))) dy \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}}_{[\arctan(y)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \cdot e^{-yR} \cdot (y \cdot \sin(R) + \cos(R)) dy}_{\leq \int_0^\infty \frac{1+y}{1+y^2} \cdot e^{-yR} dy \stackrel{(*)}{\leq} 2 \cdot \int_0^\infty e^{-yR} dy = \frac{2}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$: $\frac{1+y}{1+y^2} \leq 2$. Also folgt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

3.4 Transformationssatz

Wir kennen aus Ana1 bereits die Substitutionsregel:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi \in C([a, b])$ mit $\varphi([a, b]) = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(y) dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Unser Ziel ist es nun, dies auf Funktionen $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ zu verallgemeinern.

Definition. Schon in Ana2 haben wir folgendes definiert. Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen und nichtleer. Sei $\phi : X \rightarrow Y$ bijektiv mit $\phi \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$ und $\phi^{-1} \in C^1(Y, \mathbb{R}^d)$. Dann heißt ϕ ein **Diffeomorphismus**.

TODO: Wie schreibe ich das schön auf...?

Bemerkung. Sei ϕ **diffeomorph**. Dann $x \in \phi'(\phi(x)) \Rightarrow I = (\phi)'(\phi(x))\phi'(x)$. Also ist $\phi'(x)$ invertierbar für alle x .

Satz (Grundversion des Transformationssatzes). Seien $\emptyset \neq X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : X \rightarrow Y$ **diffeomorph**. Sei $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar oder **messbar** und positiv. Dann ist $g(x) := f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|$ integrierbar oder **messbar** und positiv und es gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)| dx.$$

Beispiel (Polarkoordinaten für $d = 2$). Sei $\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Dann ist $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Aus Ana2 wissen wir, dass $\det \phi'(r, \varphi) = r > 0$ ($\forall r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$) gilt und dass $\phi : (0, R) \times (0, 2\pi) \rightarrow B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ für alle $R > 0$ bijektiv ist.

TODO: Blödes Bild... :-P

Für $\alpha \in (0, 2\pi)$ und $R > 0$ setze $V_\alpha := \phi((0, R) \times (0, \alpha))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_2(V_\alpha) &= \int_{V_\alpha} 1 d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{(0, R) \times (0, \alpha)} 1 \cdot r d(r, \varphi) \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_0^\alpha \int_0^R r dr d\varphi \\ &= \int_0^\alpha d\varphi \cdot \int_0^R r dr = \frac{\alpha R^2}{2}. \end{aligned}$$

Problem: $B(0, R) = \underbrace{\phi([0, R] \times [0, 2\pi])}_{=: Q}$. Dann ist Q nicht offen und $\det \phi'(0, \varphi)$. Außerdem gilt $\phi(0, \alpha) = \phi(0, \beta) \forall \alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, also ist ϕ nicht injektiv.

Definition. Wir nennen weiter für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^d$

$$A^0 = \{x \in A : \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}$$

das Innere von A .

Theorem 3.30 (Transformationssatz). Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$, $A \in \mathcal{B}_d$, $A \subset U$, sodass $X := A^0 \neq \emptyset$ gilt und $A \setminus A^0$ eine Nullmenge ist. Ferner sei $B := \phi(A) \in \mathcal{B}_d$, ϕ sei auf X injektiv $\det \phi'(x) \neq 0 \forall x \in X$.

Dann ist $Y = \phi(X)$ offen, $\phi : X \rightarrow Y$ **diffeomorph**, $B \setminus Y$ ist eine Nullmenge. Weiter gelten

a) Sei $f : B \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_B f(y) dy = \int_A \underbrace{f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|}_{:=g(x)} dx. \quad (3.7)$$

- b) Sei $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar auf B äquivalent dazu, dass g integrierbar auf A ist. In diesem Fall gilt (3.7).

Beweis. Extra Vorlesung am 16.12.2008. □

Bemerkung. a) Grundversion folgt aus Thm 3.30, falls $A = X = U$ offen, nach der Vorbemerkung über Ana2.

- b) Die Funktion g in Thm 3.30 ist messbar, da f messbar ist und $\phi \in C^1$ nach Kapitel 2.

- c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}_d$, $\lambda_1(A) = \infty$, aber $A^0 = \emptyset$.

- d) Sei $A = [0, R) \times [0, 2\pi)$. Dann ist $A^0 = (0, R) \times (0, 2\pi)$, also ist $A \setminus A^0$ eine zweidimensionale Nullmenge. Sei ϕ die Polarkoordinatenabbildung. Dann gilt $\phi(A) = B(0, R)$ und $\phi : A^0 \rightarrow B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ diffeomorph. Mit dem Trafo folgt

$$\begin{aligned} \lambda(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 dy = \int_A 1 \cdot rd(r\varphi) \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi \\ &= \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.31. Sei $T \in L(\mathbb{R}^d)$ invertierbar, $v \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}_d$. Dann gelten $B = TA + v = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists x \in A : y = Tx + v\} \in \mathcal{B}_d$ und $\lambda_d(TA + v) = |\det T| \lambda_d(A)$. Also gilt für jede Bewegung T (d.h., $\det T = \pm 1$) $\lambda(TA + v) = \lambda(A)$. Somit ist λ bewegungsinvariant.

Ana III, 19.12.2008

Beweis. Sei $\phi(x) = Tx + v$. Dann gilt $B := \phi(A) = (\phi^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}_d$, da ϕ^{-1} stetig und damit messbar. Satz 1.24 sagt dann $\lambda(TA + v) = \lambda(TA)$. Für $A \in \mathcal{B}_d$ setze $\mu(A) := \lambda(TA)$. Dann gilt sofort $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$.

Seien $A_j \in \mathcal{B}_d$ ($j \in \mathbb{N}$) disjunkt. Da T injektiv ist, sind auch die TA_j ($j \in \mathbb{N}$) disjunkt. Ferner gilt $T \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists! x \in A_j \text{ mit } y = Tx\} = \biguplus_{j \in \mathbb{N}} TA_j$. Damit gilt

$$\mu \left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \lambda \left(T \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \lambda \left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} TA_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(TA_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Also ist μ ein Maß.

Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mu(A + x) = \lambda(TA + Tx) \stackrel{\text{Satz 1.24}}{=} \lambda(TA) = \mu(A)$, womit μ Translationsinvariant ist. Mit Satz 1.24 folgt dann

$$\mu(A) = c(T) \cdot \lambda(A), \tag{*}$$

wobei $c(T) = \mu([q_1]^d) = \lambda(T[q_1]^d)$ gilt. Demnach müssen wir $c(T) = |\det T|$ zeigen. Dies erledigen wir in drei Schritten:

1) Sei speziell $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $T[0, 1]^d$ ein Würfel mit 0^d als Ecke und den Kantenlängen $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|$. Also gilt für sein Volumen $\lambda(T[0, 1]^d) = |\lambda_1| \cdots |\lambda_d| = |\det T|$.

2) Sei speziell T orthogonal (d.h. $\exists T^{-1} = T^T$). Dann gilt

$$|Tx|_2^2 = (Tx|Tx) = (T^T T|x) = |x|_2^2.$$

Genauso gilt

$$|T^{-1}x| = |x|_2 \Rightarrow TB(0, 1) = B(0, 1). \quad (+)$$

Damit folgt

$$c(T) \cdot \lambda(B(0, 1)) \stackrel{(*)}{=} \mu(B(0, 1)) = \lambda(TB(0, 1)) \stackrel{(+)}{=} \lambda(B(0, 1)).$$

Also gilt $c(T) = 1 = |\det T|$, da $T^{-1} = T^T$.

3) Sei nun T beliebig invertierbar.

Beh: \exists orthogonale Matrizen Q, S und eine Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

mit $T^{-1} = Q^{-1}DS$.

Ist Beh gezeigt, dann folgt $|\det T| = |\det Q^{-1}| \cdot |\det D| \cdot |\det S| = |\det D|$. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} c(T) &= \lambda\left(T[0, 1]^d\right) = \lambda\left(Q^{-1}DS[0, 1]^d\right) \stackrel{2)}{=} \lambda\left(DS[0, 1]^d\right) \stackrel{1)}{=} |\det D| \\ &= \lambda\left(S[0, 1]^d\right) \stackrel{2)}{=} |\det D| = \lambda\left([0, 1]^d\right) = 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir den Beweis erbracht haben, sobald Beh gezeigt ist.

Beweis von Beh. Die Matrix $T^T T$ ist symmetrisch, da $(T^T T)^T = T^T (T^T)^T = T^T T$, und positiv definit nach (+). Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $Q^{-1} = Q^T$ und D^2 wie oben existieren, sodass

$$T^T T = Q^T D^2 Q \quad (++)$$

gilt. Setze $S := D^{-1}QT$. Dann gelten $Q^{-1}DS = T$ und

$$SS^T = D^{-1}QT T^T Q^T D^{-1} \stackrel{(++)}{=} D^{-1} \underbrace{QQ^T}_{=I} D^2 \underbrace{QQ^T}_{=I} D^{-1} = I.$$

□

Damit ist das Lemma gezeigt.

□

Lemma 3.32. Seien $\emptyset \neq X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\phi : X \rightarrow Y$ *diffeomorph*, $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $\phi(A) \in \mathcal{B}_d$ und es gilt

$$\lambda_d(\phi(A)) = \int_A |\det \phi'(x)| dx.$$

Beweis. Extra Vorlesung. □

Lemma 3.33. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ und $N \subset U$ eine d -dim. Nullmenge. Dann ist $F(N)$ auch eine d -dimensionale Nullmenge.

Beweis von Thm 3.30. Vorberkung: Nach Voraussetzung gilt $B \setminus Y \in \mathcal{B}_d$ und $A \setminus X$ ist eine Nullmenge. Ferner gilt $B \setminus Y = \phi(A) \setminus \phi(X) \subset \phi(A \setminus X) \stackrel{\text{Lem 3.33}}{\subset} \text{Nullmenge}$. Damit ist $B \setminus Y$ eine Nullmenge.

a) Sei $f \geq 0$. Dann gilt $\int_{B \setminus Y} f dx = 0 = \int_{A \setminus X} g dx$. Daraus folgt

$$\int_B f dy = \int_Y f dy, \quad \int_A g dx = \int_X g dx.$$

b) $f = \mathbf{1}_Y \cdot f$ (f .ü.), $g = \mathbf{1}_X \cdot g$ (g .ü.). *Lem 3.5* zeigt

f integrierbar auf $B \Leftrightarrow f$ integrierbar auf Y und dann gilt

$$\int_Y f dx = \int_B f dy.$$

Entsprechendes gilt für g . Fazit: Das Theorem muss nur für $A = X$ und $B = Y$ gezeigt werden.

Nach Ana2 ist $\phi : X \rightarrow Y$ *diffeomorph* und Y ist offen.

a) 1) Sei $f \geq 0$ einfach mit $f = \sum_{k=1}^m z_k \cdot \mathbf{1}_{B_k}$, $B_k \in \mathcal{B}(Y)$. Da ϕ stetig ist, folgt $\phi^{-1}(B_k) =: A_k \in \mathcal{B}(X) \forall k \in \mathbb{N}$. Weiter ist $B_k = \phi(A_k)$ und es gilt für alle $x \in X, k = 1, \dots, m$

$$\mathbf{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_k \\ 0, & x \notin A_k \end{cases} = \begin{cases} 1, & \phi(x) \in B_k \\ 0, & \phi(x) \notin B_k \end{cases} = \mathbf{1}_{B_k}(\phi(x)).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_Y f dy &= \sum_{k=1}^m z_k \cdot \int_Y \mathbf{1}_{B_k} dy \stackrel{\text{s.o.}}{=} \sum_{k=1}^m z_k \cdot \lambda(\phi(A_k)) \\ &\stackrel{\text{Lem 3.32}}{=} \sum_{k=1}^m z_k \cdot \int_{A_k} |\det \phi'(x)| dx \\ &= \int_X \sum_{k=1}^m z_k \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{A_k}(x)}_{=\mathbf{1}_{B_k}(\phi(x))} \cdot |\det \phi'(x)| dx \\ &= \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)| dx. \end{aligned}$$

- 2) Sei $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ **messbar**. Dann existieren einfache $f_n : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Y f dy &\stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n dy \stackrel{1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \underbrace{f_n(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|}_{=: g_n(x) \leq g_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)} dx \\ &\stackrel{\text{BL}}{=} \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)| dx. \end{aligned}$$

Damit ist a) gezeigt.

- b) 3) Sei $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **messbar**. Dann ist $g_{\pm}(x) = f_{\pm}(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|$ für alle $x \in X$. Aus 2) folgt, dass (3.7) für f_{\pm} und g_{\pm} gilt. Damit gelten

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow f_{\pm} \text{ integrierbar} \stackrel{a)}{\Leftrightarrow} g_{\pm} \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g \text{ integrierbar}$$

und

$$\int_Y f dy = \int_Y f_+ dy - \int_Y f_- dy \stackrel{(3.7)}{=} \int_X g_+ dx - \int_X g_- dx = \int_X g dx.$$

Damit ist b) gezeigt. □

Beispiel 3.34 (Affiner Transformationssatz). Sei $\phi(x) = Tx + v$ für festes $v \in \mathbb{R}^d$ und $T \in L(\mathbb{R}^d)$ mit $\det T \neq 0$. Sei $A \in \mathcal{B}_d$, sodass $A \setminus A^0$ eine Nullmenge ist, $A^0 \neq \emptyset$. Daraus folgt $B = TA + v \in \mathcal{B}_d$. Für $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (integrierbar oder **messbar** und positiv) gilt

$$\int_B f(y) dy = |\det T| \cdot \int_A f(Tx + v) dx.$$

Beispiel 3.35 (d-dimensionale Polarkoordinaten). Sei $(r, \varphi, \Theta_1, \dots, \Theta_{d-2}) =: (r, \varphi, \Theta) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Setze

$$\phi_d(r, \varphi, \Theta) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ r \cdot \sin(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & r \cdot \sin(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & r \cdot \sin(\Theta_{d-2}) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Klar: $\phi_d \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Sei $H_d = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-2}$, wobei $H_2 = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$. $W_d = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-2}$, wobei $H_2 = (0, 2\pi)$.

Beh: Seien $R > 0$, $(r, \varphi, \Theta) \in \mathbb{R}^d$. Dann gelten $|\phi_d(r, \varphi, \Theta)| = r$ und

$$\det \phi'(r, \varphi, \Theta) = r^{d-1} \cdot \cos(\Theta_1) \cdot \cos^2(\Theta_2) \cdots \cos^{d-2}(\Theta_{d-2}) = r^{d-1} \cdot \text{TODO}.$$

$\phi_d : (0, \infty) \times W_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist injektiv, $\phi_d((0, \infty) \times W_d) = \mathbb{R}^d \setminus H_d$,

$\phi_d(\mathbb{R}_+ \times \overline{W}_d) = \mathbb{R}^d$, $\phi_d((0, R) \times W_d) = B(0, R)$, $\phi_d([0, R] \times \overline{W}_d) = \overline{B(0, R)} \setminus H_d$.

Zum Beweis siehe. Aman/Escher III, Lemma X.8.8. \square

Sei $A = [0, R) \times \overline{W}_d$ Dann folgt $A^0 = (0, R) \times \overline{W}_d \Leftarrow \lambda_d(A \setminus A^0) = 0$. Ferner ist $B(0, R) = \phi(A)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \lambda(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 dy \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{(0, R)} |\det \phi| dx \\ &\stackrel{(3.8)}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^{d-1} \cos(\Theta_1) \cdots \cos^{d-1}(\Theta_{d-2}) d\Theta_{d-2} \cdots d\Theta_1 d\varphi dr \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \underbrace{\int_0^R r^{d-1} dr}_{=\frac{1}{d}R^d} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \prod_{k=1}^{d-2} 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t) dt}_{=: I_k} = \frac{2^{d-1}}{d} \cdots \pi \cdot I_1 \cdot I_2 \cdots I_{d-2}. \end{aligned}$$

Dabei: $I_k \stackrel{\text{PI}}{=} \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}$ mit $I_1 = 1$, $I_2 = \pi$. Per Induktion folgt

$$\lambda(B(0, R)) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}!} \cdot R^d, & d \text{ gerade} \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d \cdot (d-2) \cdots 3 \cdot 1} \cdot R^d, & d \text{ ungerade} \end{cases} \stackrel{!}{=} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d \cdot \Gamma(\frac{d}{2})} \cdot R^d.$$

Setze

$$\kappa_d := \lambda_d(B(0, 1)) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}, \text{ wobei } \kappa_1 = 2, \kappa_2 = \pi, \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi \text{ gilt.} \quad (3.9)$$

Dabei ist $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$. Es gelten

$$\Gamma(1) = 1, \quad x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1). \quad (3.10)$$

Also $\Gamma(n) = n!$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Und es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, siehe Ana1.

Ana III, 22.12.2008

Beispiel 3.36 (rotationssymmetrische Funktion). Sei $I \subset \mathbb{R}_+$ ein Intervall, $a = \inf I_+$, $b = \sup I$, $\phi : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setze $f(y) := \phi(|y|_2)$ für $y \in R = \{y \in \mathbb{R}^d : |y|_2 \in I\}$ in \mathbb{R}^2 .

TODO: Bild

Mit [Bsp 3.35](#): $\phi_d : A := I \times \overline{W}_d \rightarrow R$ surjektiv. $\phi_d : A^0 \rightarrow R^0$ ist [diffeomorph](#), $A^0 = I^0 \times W_d$. Damit ist $A \setminus A^0$ eine Nullmenge. Mit [Thm 3.30](#) folgt:

$$f \text{ auf } \mathbb{R} \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g = f \circ \phi_d(\det \phi'_d) \text{ integrierbar auf } A,$$

wobei $g(r, \varphi, \Theta) = \phi(r) \cdot r^{d-1} \cdot \underbrace{\cos(\Theta) \cdots \cos^{d-2}(\Theta_{d-2})}_{=: w(\Theta)}$ und $w > 0$ stetig und beschränkt

auf W_d ist.

[Fubini](#)sagt:

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g \text{ integrierbar} \Leftrightarrow r \mapsto r^{d-1} \phi(r) \text{ integrierbar auf } I$$

und

$$\begin{aligned}
\int_R f(y) dy &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(r) \cdot r^{d-1} \cdot w(\Theta) d\Theta d\varphi dr \\
&\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_a^b r^{d-1} \phi(r) dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_{W_d} w(\Theta) d\Theta}_{\stackrel{(3.9)}{=} \kappa_d \frac{d}{2\pi}} \\
&= d \cdot \kappa_d \cdot \int_a^b r^{d-1} \phi(r) dr = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{r(\frac{d}{2})} \cdot \int_a^b r^{d-1} \phi(r) dr.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) gilt stets für $\phi \geq 0$. Wir setzen

$$w_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{r(\frac{d}{2})} = d \cdot \kappa_d. \tag{3.12}$$

Speziell $w_2 = 2\pi$, $w_3 = 4\pi$.

Beispiel. $d = 3$, $\phi(r) = \frac{1}{r}$, $I = (0, R)$. Dann gilt

$$\int_{B(0,R)} \frac{dx}{|x|^2} \stackrel{(3.11)}{=} w_B \cdot \int_0^R r^2 \cdot \frac{1}{r} dr = 4\pi \cdot \int_0^R r dr = 2\pi \cdot R^2.$$

Hier gilt $f(y) = \frac{1}{|y|^2}$.

Satz 3.37. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *messbar*, es gebe Konstanten $c, \epsilon > 0$ mit

$$|f(x)| = \begin{cases} c \cdot |x|_2^{-d+\epsilon}, & 0 \leq |x|_2 \leq 1 \\ c \cdot |x|_2^{-d-\epsilon}, & |x|_2 \geq 1 \end{cases}.$$

Dann ist f integrierbar.

Beweis. Sei $\phi(r) = c \cdot r^{-d+\epsilon}$ für $0 < r \leq 1$, $\phi(r) = c \cdot r^{-d-\epsilon}$ für $r \geq 1$. Sei $g(x) = \phi(|x|_2)$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und $g(0) = 0$. Dann ist $g \geq 0$ und *messbar*. Mit *Bsp 3.36* folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx &= w_d \cdot \int_0^\infty r^{d-1} \phi(r) dr \\
&= c \cdot \underbrace{\int_0^1 r^{d-r} r^{-d+\epsilon} dr}_{=r^{-1+\epsilon}} + c \cdot \int_1^\infty \underbrace{r^{d-1} r^{-d-\epsilon}}_{=r^{-1-\epsilon}} dr < \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist g integrierbar. Da $|f| \leq g$, folgt mit *Satz 2.23*, dass auch f integrierbar ist. \square

Beispiel 3.38.

$$J := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|_2^2} dx = \pi^{\frac{d}{2}}.$$

Beweis.

$$J \stackrel{\text{Fub}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{d \text{ mal}} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_d^2} dx_d \dots dx_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^d.$$

Im Falle $d = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r dr \\ &\stackrel{s=r^2=\phi(r)}{=} 2\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^\infty e^{-s} ds = \pi. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Folgerung:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-t} dt \stackrel{\substack{t=s^2=\phi(s) \\ \frac{dt}{ds}=\phi'(s)=2s}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-s^2} 2s \stackrel{\text{s.o.}}{=} \sqrt{\pi} = 2 \cdot \int_0^\infty e^{-s^2} ds.$$