# 11. Unendliche Reihen

**Definition**
Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Die Folge $(s_n)$ mit $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (oder mit $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).
$s_n$ heißt die **n-te Teilsumme** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $a_n$ heißt **n-tes Reihenglied** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** (***divergent***) $:\iff$ $(s_n)$ konvergiert (*divergiert*).
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert** oder die **Reihensumme** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (Im Konvergenzfall hat also das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *zwei* Bedeutungen).

**Bemerkung:** (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(2) Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n\geq p}$ eine Folge. Dann definiert man entsprechend $s_n := a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n \quad (n \geq p)$ und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$. Meist gilt: $p = 1$ oder $p = 0$.

**Beispiele:**

(1) Die **harmonische Reihe** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ :

$a_n = \frac{1}{n}, s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \overset{10.2}{\Longrightarrow} (s_n)$ divergiert.

Also: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

(2) Die **geometrische Reihe** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$ :

$\overset{7.3}{\Longrightarrow} (s_n)$ konvergiert $\iff |x| < 1$. In diesem Fall: $s_n \to \frac{1}{1-x} \quad (n \to \infty)$.

Also: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist konvergent $\iff |x| < 1$. In diesem Fall: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. §7 $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \ (n \to \infty)$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(5) $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \cdots\}$ Sei $\varepsilon > 0$.

$I_n := (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$. $a_n \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{Q} \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Länge von $I_n := |I_n|; \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$; $s_n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}) \to \varepsilon \ (n \to \infty)$ (*Unendliche geometrische Reihe*). D.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$. Die Rationalen Zahlen können so mit abzählbaren Intervallen überdeckt werden, dass die Summe der Intervalle beliebig klein ist.

**Satz 11.1 (Cauchy- und Monotoniekriterium sowie Nullfolgeneigenschaft)**
$(a_n)$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$ und $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

(1) Cauchy-Kriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ :
$\underbrace{|\sum_{k=m+1}^{n} a_k|}_{=s_n - s_m} < \varepsilon \; \forall n > m \geq n_0$.

(2) Monotoniekriterium: Sind alle $a_n \geq 0$ und ist $(s_n)$ beschränkt, so folgt daraus: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann:

(i) $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

(ii) Für $\nu \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots$ konvergent und für $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_\nu \to 0 \quad (\nu \to \infty)$

**Beweis**

(1) Wende Cauchy-Kriterium (10.1) auf $(s_n)$ an.

(2) $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \implies s_n$ ist monoton wachsend $\overset{\text{Vor.}}{\underset{6.3}{\implies}}$ $(s_n)$ konvergiert.

(3) Sei $s := \lim s_n$, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

(i) $s_n - s_{n-1} = a_n \implies a_n \to s - s = 0 \quad (n \to \infty)$

(ii) Für $n \geq \nu + 1 : \sigma_n := a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots + a_n = s_n - (a_1 + \ldots + a_\nu) = s_n - s_\nu$
$\implies \sigma_n \to s - s_\nu \quad (n \to \infty)$
$\implies \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $r_\nu = s - s_\nu$
$\implies r_\nu \to 0 \quad (\nu \to \infty)$ ∎

**Satz 11.2 (Rechenregeln bei Reihen)**
Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Beweis**
klar. ∎

**Definition**
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** $:\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

**Satz 11.3 (Dreiecksungleichung für Reihen)**
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

**Beweis**
Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Voraussetzung und Satz 11.1(1) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \ \forall n > m \geq n_0$$

$$\implies |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \ \forall n > m \geq n_0$$

$$\overset{11.1(1)}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.}$$

$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad \sigma_n := |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \implies |s_n| \leq \sigma_n$

$$\overset{n\to\infty}{\implies} |\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$ ■

**Beispiel**
Die **alternierende Harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.
Hier: $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. $|a_n| = \frac{1}{n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut.
**Behauptung:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. (Später: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log 2$)
**Beweis:** $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{>0} \implies (s_{2n})$ ist monoton wachsend. Analog:
$(s_{2n-1})$ ist monoton fallend. $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - \frac{1}{2n}$ $(*)$
Dann gilt $s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \overset{(*)}{=} s_{2n-1} - \frac{1}{2n} < s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1 \implies (s_{2n})$ und $(s_{2n-1})$ sind beschränkt. 6.3 $\implies$ $(s_{2n})$ und $(s_{2n-1})$ sind konvergent. Aus $(*)$ folgt dann $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$. A16 $\implies$ $(s_n)$ hat genau einen Häufungswert. 9.3 $\implies$ $(s_n)$ ist konvergent.