

# 17. Orthogonalsysteme

## 17.1. Winkel und Orthogonalität

**Vorbemerkung:** Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und zugehöriger Norm  $\|\cdot\|$ , dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$$\forall x, y \in V \setminus \{0\} : \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

**Definition:** (a) Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Für  $x, y \in V \setminus \{0\}$  sei  $\phi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$  diejenige (eindeutig bestimmte) Zahl mit

$$\cos \phi = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$\phi$  heißt der **Winkel** zwischen  $x$  und  $y$ .

(b)  $x, y$  heißen **orthogonal** oder senkrecht zueinander, falls  $\langle x, y \rangle = 0$  gilt.  
Schreibe:  $x \perp y$ .

(c) Teilmengen  $M, N \subseteq V$  heißen orthogonal, falls gilt:

$$\forall x \in M \forall y \in N : x \perp y$$

Schreibe:  $M \perp N$ .

(d) Eine Teilmenge  $B \subseteq V$  heißt **Orthogonalsystem** (OGS), falls für  $x, y \in B$  gilt:

$$x \neq y \implies x \perp y$$

(e) Ein Orthogonalsystem  $B$  heißt **Orthonormalsystem** (ONS) wenn gilt:

$$\forall x \in B : \|x\| = 1$$

(f) Eine Basis  $B$  von  $V$  heißt **Orthogonalbasis** (OGB), bzw. **Orthonormalbasis** (ONB), falls  $B$  ein Orthogonalsystem, bzw. Orthonormalsystem, ist.

**Beispiel:** (1) Sei  $V = \mathbb{K}^n$  mit Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $S := \{e_1, \dots, e_n\}$  Standardbasis.

Dann ist  $S$  eine Orthonormalbasis und jede Teilmenge  $T \subseteq S$  ist ein Orthonormalsystem.

(2) Sei  $I := [a, b]$  ein Intervall.

Sei  $V := \{p \in \text{Abb}(I, \mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathbb{C}[T] : p(t) = P(t)\}$ .

$w : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sei stetig und mit der Eigenschaft  $w(t) = 0$  nur für endlich viele  $t \in I$ .

Wir erhalten ein Skalarprodukt auf  $V$ :

$$\langle p, q \rangle_w := \int_I w(t) p(t) \overline{q(t)} dt$$

Eine Basis von  $V$  ist  $\{p_n(t) =: t^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ .

Gesucht ist eine Orthonormalbasis und ein Verfahren zu ihrer Bestimmung.

**Bemerkung:** Jedes Orthogonalsystem  $B$  mit  $0 \notin B$  ist linear unabhängig.

**Beweis:** Es ist

$$\sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b = 0$$

Dann gilt für alle  $c \in B$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, c \rangle \\ &= \left\langle \sum_b \alpha_b b, c \right\rangle \\ &= \sum_b \alpha_b \langle b, c \rangle \\ &\stackrel{b=0 \forall b \neq c}{=} \alpha_c \underbrace{\langle c, c \rangle}_{\neq c} \\ &\implies \alpha_c = 0 \end{aligned}$$

■

## 17.2. Das E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

### Satz 13:

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und sei  $M := \{x_0, x_1, \dots\}$  eine abzählbare Teilmenge von  $V$ .

(1) Es existiert ein Orthogonalsystem  $\{y_0, y_1, \dots\}$  derart, dass gilt:

$$\forall n : \quad \langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \quad (\text{gleiche lineare Hülle}) \quad (17.1)$$

(2) Falls  $M$  linear unabhängig ist, so sind alle  $y_i \neq 0$  und  $B := \{z_0, z_1, \dots\}$  mit

$$z_i := \frac{1}{\|y_i\|} y_i$$

ist ein Orthonormalsystem mit

$$\forall n : \quad \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$$

**Beweis:** (1) Wir beschreiben einen Algorithmus zum Auffinden der  $y_n$ .

Start:  $y_0 := x_0$ . Angenommen: alle  $y_m$  für  $m < n$  sind bereits gefunden. Setze

$$y_n := x_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i$$

(nur über  $i$  mit  $y_i \neq 0$  summieren).

Damit folgt:

$$\begin{aligned} y_n &\in \underbrace{\langle y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n \rangle}_{=\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \\ x_n &\in \langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt (17.1).

Rest: Für alle  $m < n$  :  $y_n \perp y_m$ . Damit:

$$\begin{aligned} \langle y_n, y_m \rangle &= \langle x_n, y_m \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} \langle y_i, y_m \rangle \\ &= \langle x_n, y_m \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} \delta_{im} \langle y_i, y_i \rangle \\ &= \langle x_n, y_m \rangle - \langle x_n, y_m \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) ✓ Leicht selbst zu verifizieren. ■

**Beispiel:** Sei  $V = \mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt,  $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Dann:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0, \quad \|y_0\| = \sqrt{2} \\ y_1 &= x_1 - \frac{\langle x_1, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|y_1\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auswirkungen (des Orthogonalisierungsverfahrens) auf Matrizen:

Sei  $V \cong \mathbb{K}^n$  mit Standardskalarprodukt  $s$  und Basis  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ . Das Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthogonalbasis  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ .

$$\begin{aligned} c_\nu &= b_\nu - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{\langle \cdot, \cdot \rangle} \cdot c_i = \dots = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \longrightarrow A = M_{BC} = (\alpha_{i\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c_\nu}{\|c_\nu\|} &= \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\alpha_{i\nu}}{\|c_i\|} b_i = z_\nu \longrightarrow M_{BZ} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Erinnere (Darstellungsmatrix):**

$$D_{BB}(s) = (s(b_\nu, b_\mu)) \in \mathbb{K}^n$$

Da  $C$  eine Orthogonalbasis ist, folgt  $s(c_\nu, c_\mu) = \delta_{\nu\mu} \|c_\nu\|^2$ , also

$$D_{CC}(s) = \text{diag}(\dots, \|c_\nu\|^2, \dots)$$

Falls  $Z$  eine Orthonormalbasis ist, so folgt  $D_{ZZ}(s) = I$ .

Generell für beliebige Basen  $B, C$  und  $A = M_{BC}$ :

$$\begin{aligned} D_{CC}(s) &= (s(c_\nu, c_\mu)) \\ &= \left( s \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{i\nu}, \sum_j \alpha_{j\mu} b_j \right) \right) \\ &= \left( \sum_i \sum_j \alpha_{i\nu} \overline{\alpha_{j\mu}} \cdot s(b_i, b_j) \right) \\ &= A^\top (s(b_i, b_j)) \overline{A} \end{aligned}$$

**Definition:** Für beliebige  $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$  setze  $D^* := \overline{D}^\top$  (die sogenannte **Adjungierte**).

$$D_{CC}(s) = A^\top D_{BB}(s) \overline{A}$$

Speziell für jede Orthonormalbasis  $C$ :

$$D_{CC}(s) = I,$$

das folgt wegen  $M_{BC}^{-1} = M_{CB}$ .

Es ist

$$D_{BB}(s) = D^* D$$

für  $D := \overline{M}_{CB}$ , wobei  $D$  obere Dreiecksmatrix ist.

**Satz 14:**

Für  $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist äquivalent:

- (1)  $P$  ist hermitesch (symmetrisch) und positiv definit
- (2) Es gibt ein  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  mit  $P = A^* A$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

- (1)  $\implies$  (2) Sei  $V = \mathbb{K}^n$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis.  
 $P$  definiert ein Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= (\overline{\eta}_1, \dots, \overline{\eta}_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \\ P &= (s(e_i, e_j)) = D_{BB}(s) \end{aligned}$$

Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis und damit  $P = D^*D$ .

(2)  $\implies$  (1)  $P = A^*A$  ist hermitesch; zu zeigen:  $P^* = P$

$$\begin{aligned}
 P^* &= (A^* \cdot A)^* \\
 &= \overline{(A^* \cdot A)}^\top \\
 &= \overline{(A^\top \cdot A)}^\top \\
 &= (A^\top \cdot \overline{A})^\top \\
 &= \overline{A}^\top \cdot A \\
 &= A^*A \\
 &= P
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $s(x, y)$  ist hermitesche Form. Für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt:

$$\begin{aligned}
 s(x, x) &= \overline{x}^\top \cdot P \cdot x \\
 &= \overline{x}^\top \left( \overline{A}^\top \cdot A \right) x \\
 &= (\overline{Ax})^\top Ax \\
 &= s_0(Ax, Ax) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned}
 s_0(Ax, Ax) &= 0 \\
 \iff Ax &= 0 \\
 \stackrel{A \text{ inv.}}{\iff} x &= 0 \\
 \implies s &\text{ positiv definit}
 \end{aligned}$$

■

Falls speziell  $B$  und  $C$  Orthonormalbasen sind, folgt:

$$D_{BB}(s) = I = D_{CC}(s)$$

und  $D := \overline{M}_{CB}$ .

**Folgerung:** Die Basiswechselmatrix  $A = M_{BC}$  einer Orthonormalbasis  $C$  in eine andere Orthonormalbasis  $B$  gehört zur **orthogonalen Gruppe**

$$O(n) := \left\{ A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top \cdot A = I \right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

beziehungsweise zur **unitären Gruppe**

$$U(n) := \left\{ A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^\top \cdot \overline{A} = I \right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

**Bemerkung:**  $O(n)$ , beziehungsweise  $U(n)$ , ist eine Untergruppe von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , beziehungsweise  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

**Folgerung (Iwasawa-Zerlegung):** Jede Matrix  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  hat eine eindeutige Produktzerlegung

$$g = k \cdot b$$

mit  $k \in O(n)$  und  $b \in B(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \mid \beta_\nu > 0 \right\}$ . Das heißt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot B(n)$$

Analog gilt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = U(n) \cdot B(n)_{\mathbb{C}}$$

mit

$$B(n)_{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \beta_\nu \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

**Beweis:** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$   $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  folgt: Die Spalten  $b_1, \dots, b_n$  sind eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ . Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis  $\{c_1, \dots, c_n\}$  mit Übergangsmatrix  $A = M_{BC} \in B(n)$ . Denn:

$$c_\nu := \sum_{i=1}^n \alpha_{i\nu} b_i$$

besagt  $g \cdot A = (c_1, \dots, c_n)$  und  $k = (c_1, \dots, c_n) \in O(n)$ , da  $k^\top \cdot k = (\langle c_i, c_j \rangle) = I$ . ■

### 17.3. Orthogonale Projektion und orthogonales Komplement

#### Satz 15 (Satz von Pythagoras):

Für  $x, y \in V$  mit  $x \perp y$  gilt:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ist  $\{x_1, \dots, x_N\}$  ein Orthogonalsystem, so folgt

$$\left\| \sum_{\nu=1}^N x_\nu \right\|^2 = \sum_{\nu=1}^N \|x_\nu\|^2$$

Der Beweis folgt leicht mit vollständiger Induktion. ■

**Satz 16:**

Sei  $U \leq V$  mit  $\dim V < \infty$ .

- (1) Für alle  $x \in V$  existiert genau ein  $y \in U$  mit  $d := \|x - y\| = \min\{\|x - u\| \mid u \in U\}$ .
- (2) Dieses  $y \in U$  ist auch charakterisiert durch:  $(x - y) \perp U$ .  
Schreibe:  $y =: \Pi_U(x)$ .
- (3) Die Abbildung  $\Pi_U \in \text{End}(V)$  ist stetig; es gilt  $\Pi_U^2 = \Pi_U$  und  $\|\Pi_U(x)\| \leq \|x\|$ .  
 $d$  heißt **Abstand** von  $x$  und  $U$ ,  $y = \Pi_U(x)$  die **orthogonale Projektion** von  $x$  auf  $U$ ,  $z := x - y$  heißt **Lot** von  $x$  auf  $U$ ,  $y$  **Lotfußpunkt**.

**Beweis:** (1) Wähle eine Orthonormalbasis  $S = \{e_i \mid i = 1, \dots, r\}$  in  $U$ . Setze  $y = \Pi_U(x) := \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$ .

**Behauptung:**  $\forall u' \in U : \quad x - y \perp y - u'$

$$\begin{aligned} \langle x - y, y - u' \rangle &= \underbrace{\langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle}_{\stackrel{!}{=} 0} + \underbrace{\langle y, u' \rangle - \langle x, u' \rangle}_{\stackrel{!}{=} 0} \\ \langle x, y \rangle &= \left\langle x, \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_i \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle \end{aligned}$$

$u'$  in Basisdarstellung: Mit  $u' = \sum_j \alpha_j e_j$  folgt

$$\begin{aligned} \langle y, u' \rangle &= \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_i \langle x, e_i \rangle \overline{\alpha_i} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, u' \rangle &= \left\langle x, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_j \overline{\alpha_j} \langle x, e_j \rangle \end{aligned}$$

Mit Pythagoras folgt:

$$\begin{aligned} \|x - u'\|^2 &= \|x - y + y - u'\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \underbrace{\|y - u'\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Es ist also  $\|x - u'\| \geq \|x - y\|$ , wobei Gleichheit genau für  $y - u' = 0$  gilt. Damit folgt die Eindeutigkeit von  $y$ .

- (2) Sei  $y \in U$  und  $x - y \perp U$ . Dann gilt  $\langle x, e_i \rangle = \langle y, e_i \rangle$  für alle  $i$ .  
Es folgt:

$$\begin{aligned} y &= \sum_i \langle y, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \\ &= \Pi_U(x) \end{aligned}$$

- (3) Aus  $x - y \perp y$  folgt mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \\ &\geq \|y\|^2 \\ &= \|\Pi_U(x)\|^2 \end{aligned}$$

Es folgt:  $\Pi_U$  ist (Lipschitz-)stetig.

$\Pi_U^2 = \Pi_U$  ist leicht selbst zu verifizieren. ■

**Definition:** Sei  $M \subseteq V$  Teilmenge. Der Vektorraum

$$M^\perp := \{y \in V \mid y \perp M\}$$

heißt **Orthogonalraum** oder **orthogonales Komplement** von  $M$ .

**Lemma:**

(1)  $M_1 \subseteq M_2 \implies M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$

(2)  $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$

- (3) Aus  $M_i \subseteq V$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) folgt

$$\left( \bigcup_{i=1}^n M_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^n M_i^\perp$$

- (4) Aus  $U_i \leq V$  (Teilräume) folgt

$$\left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right)^\perp \supseteq \sum_{i=1}^n (U_i^\perp)$$

(5)  $\langle M \rangle \leq (M^\perp)^\perp$  und  $M^\perp = \left( (M^\perp)^\perp \right)^\perp$ .

- (6) Im Spezialfall  $\dim V < \infty$  gilt:

(a) Mit  $U \leq V$  folgt  $V = U \oplus U^\perp$  (insbesondere  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ ) und  $(U^\perp)^\perp = U$

(b) Mit  $U_i \leq V$  folgt  $(\bigcap_{i=1}^n U_i)^\perp = \sum_{i=1}^n (U_i^\perp)$



**Beweis:** Übung!

■

