§ 10.

Implizit definierte Funktionen

Beispiele:

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. $f(x,y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0,y_0) = 0$ und $y_0 \overset{(<)}{>} 0$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x, g(x)) = 0\ \forall x \in U$, nämlich $g(x) = \overset{(-\sqrt{\cdots})}{\sqrt{1-x^2}}$

Sprechweisen: „g ist implizit durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ definiert" oder „die Gleichung $f(x,y) = 0$ kann in der Form $y = g(x)$ aufgelöst werden"

(2) $f(x,y,z) = y + z + \log(x+z)$. Wir werden sehen: $\exists$ Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,-1)$ und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0,-1) = 1$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0\ \forall\ (x,y) \in U$.

Der allgemeine Fall: Es seien $p, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$, D offen, $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Punkte in D (bzw. $\mathbb{R}^{n+p}$) bezeichnen wir mit (x,y), wobei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, also $(x,y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$. Damit:

$$f' = \left(\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{matrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}} \left| \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{matrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y}\ (p \times p)\text{-Matrix}} \right. \right); \text{ also } f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Satz 10.1 (Satz über implizit definierte Funktionen)
Sei $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}^p$ mit:

(1) $(x, g(x)) \in D\ \forall x \in U$

(2) $g(x_0) = y_0$

(3) $f(x, g(x)) = 0\ \forall x \in U$

(4) $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$

(5) $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0\ \forall x \in U$

(6) $g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\ \forall x \in U$

Beweis
Definition: $F : D \to \mathbb{R}^{n+p}$ durch $F(x,y) \coloneqq (x, f(x,y))$. Dann: $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+p})$ und

$$F'(x,y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & & \\ & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & & & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \end{array}\right)$$

Dann:

(I) $\det F'(x,y) \overset{\text{LA}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $((x,y) \in D)$, insbesondere: $\det F'(x_0,y_0) \neq 0$. Es ist $F(x_0,y_0) = (x_0, 0)$. 9.3 $\implies$ $\exists$ eine offene Umgebung $\mathbb{U}$ von (x_0,y_0) und eine offene Umgebung ϑ von $(x_0, 0)$ mit: $\mathbb{U} \subseteq D, f(\mathbb{U}) = \vartheta$. F ist auf $\mathbb{U}$ injektiv, $F^{-1} : \vartheta \to \mathbb{U}$ ist stetig differenzierbar und

(II) $\det F'(x,y) \overset{\text{(I)}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{U}$

Bezeichnungen: Sei $(s,t) \in \vartheta$ $(s \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^p)$, $F^{-1}(s,t) \eqqcolon (u(s,t), v(s,t))$, also $u : \vartheta \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v : \vartheta \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Dann: $(s,t) = F(F^{-1}(s,t)) = (u(s,t), f(u(s,t), v(s,t))) \implies u(s,t) = s \implies F^{-1}(s,t) = (s, v(s,t))$. Für $(x,y) \in \mathbb{U}$: $f(x,y) = 0 \iff F(x,y) = (x,0) \iff (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, v(x,0)) \iff y = v(x,0)$, insbesondere: $y_0 = v(x_0, 0)$. $U \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in \vartheta\}$. Es gilt: $x_0 \in U$. Übung: U ist eine offene Umgebung von x_0.

Definition: $g : U \to \mathbb{R}^p$ durch $g(x) \coloneqq v(x,0)$, für $x \in U$ gilt: $(x,0) \in \vartheta \implies F^{-1}(x,0) = (x, v(x,0)) = (x, g(x)) \in \mathbb{U}$. Dann gelten: (1), (2), (3) und (4). (5) folgt aus (II).

Zu (6): Definition für $x \in U : \psi(x) \coloneqq (x, g(x)), \psi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$,

$$\psi'(x) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & & \\ & g'(x) & \end{array}\right)$$

(3) $\implies$ $0 = f(\psi(x))$ $\forall x \in U$. 5.4 $\implies$ $0 = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \middle| \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right) \cdot \psi'(x) \overset{\text{LA}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)$ $\forall x \in U$. (5) $\implies$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ invertierbar, Multiplikation von links mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1}$ liefert (6). ∎

Beispiel
$f(x,y,z) = y + z + \log(x+z)$. Zeige: $\exists$ offene Umgebung U von $(0,-1)$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0,-1) = 1$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0$ $\forall (x,y) \in U$. Berechne g' an der Stelle $(0,-1)$.
$f(0,-1,1) = 0$, $f_z = 1 + \frac{1}{x+z}$; $f_z(0,-1,1) = 2 \neq 0$. Die Behauptung folgt aus dem Satz über impliziert definierte Funktionen. Also: $0 = y + g(x,y) + \log(x + g(x,y))$ $\forall (x,y) \in U$.

Differentiation nach x: $0 = g_x(x,y) + \frac{1}{x+g(x,y)}(1+g_x(x,y))\ \forall (x,y) \in U \overset{(x,y)=(0,-1)}{\Longrightarrow} 0 = g_x(0,-1) + \frac{1}{1}(g_x(0,-1)+1) \implies g_x(0,-1) = -\frac{1}{2}$.
Differentiation nach y: $0 = 1 + g_y(x,y) + \frac{1}{x+g(x,y)} g_y(x,y)\ \forall (x,y) \in U \xrightarrow{\text{(x,y)=(0,-1)}} g_y(0,-1) = -\frac{1}{2}$.
Also: $g'(0,-1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.