

12. Das Schwarzsche Lemma

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Satz 12.1 (Schwarzsches Lemma)

Es sei $f \in H(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$.

Dann:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1 (*).$$

Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so ex. ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit:
 $f(z) = \lambda z$.

Beweis

O.b.d.A.: $f \not\equiv 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists g \in H(\mathbb{D}) : f(z) = zg(z)$. Sei $z \in \mathbb{D}$. Wähle $r > 0$ so, dass $r < 1$ und $|z| < r$. Dann: $|g(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \stackrel{r \rightarrow 1}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 1$. Also $|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$.
 $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$ Also gilt (*). Es sei $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \Rightarrow |g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |g|$ hat ein Maximum in \mathbb{D} . 11.6 \Rightarrow g konstant $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : g(z) = \lambda \forall z \in \mathbb{D}$. Dann: $f(z) = \lambda z$. Es ist $|\lambda| = |g(0)| = 1$ oder $|\lambda| = |g(z_0)| = 1 \Rightarrow \lambda \in \partial\mathbb{D}$. ■

Definition

Sei $a \in \mathbb{D}$ und $S_a \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\})$ def. durch $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Beachte 1

$|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$, also $\frac{1}{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$. $S_a(a) = 0$, $S_a(0) = -a$.

Satz 12.2

Sei $a \in \mathbb{D}$. Dann:

- (1) S_a ist auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ injektiv.
- (2) $S_a^{-1} = S_{-a}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$
- (3) $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$
- (4) $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$
- (5) Ist $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, so ist $\lambda S_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis

(1) Nachrechnen.

$$(2) \quad w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \iff z-a = w - \bar{a}zw \iff z(1+\bar{a}w) = w+a \iff z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w} = S_{-a}(w)$$

(3) Sei $|z| = 1$, also $z = e^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$). $|S_a(z)| = \left| \frac{e^{it}-a}{1-\bar{a}e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\bar{a})} \right| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{it}||e^{-it}-\bar{a}|} = 1$. Also:

$$S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}, \quad \partial\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(\underbrace{S_{-a}(\partial\mathbb{D})}_{\substack{\text{wie oben} \\ \subseteq \partial\mathbb{D}}}) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D}).$$

(4) Sei $z \in \mathbb{D}$. $|S_a(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=1} |S_a(w)| \stackrel{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$ Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := S_a(z)$. Annahme:

$$|w| = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |z| = |S_{-a}(w)| = 1 \text{ Wid. Also } S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Genauso } S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Dann } \mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$$

(5) folgt aus (1) und (4). ■

Satz 12.3

Sei $f \in H(\mathbb{D})$

$f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und $f(0) = 0 \iff \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z$.

Beweis

" \Leftarrow ": Klar

" \Rightarrow ": Dann $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $f^{-1}(0) = 0$. Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := f(z)$; dann:

$$z = f^{-1}(w), \quad |z| = |f^{-1}(w)| \stackrel{12.1}{\leq} |w| = |f(z)| \stackrel{12.1}{\leq} |z| \text{ Also } |f(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad 12.1 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z \quad \forall z \in \partial\mathbb{D} \quad \blacksquare$$

Satz 12.4

$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$

Beweis

" \supseteq ": 12.2 (5)

" \subseteq ": Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. $g := f \circ S_a$; $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und $g(0) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$.

12.3 $\Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : g(z) = \lambda z$. Es ist $f = g \circ S_a = \lambda S_a$ ■