

# B Übungen

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.1** Für zwei Strahlen  $g(t) := tv + w$  und  $h(s) = su + w$  mit  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist der Winkel im Schnittpunkt  $w$  definiert als die eindeutig bestimmte Zahl  $\eta \in [0, \pi]$  mit

$$\cos \eta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}.$$

Es sei nun  $\Delta = \Delta ABC$  ein Dreieck in der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  mit Kanten der Länge  $a, b, c$  (jeweils gegenüber von  $A, B, C$ ) und sei  $\alpha = \sphericalangle CAB$  der Winkel bei  $A$ , sowie  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel bei  $B$  bzw. bei  $C$ . Zeigen Sie

(i) den *Kosinussatz*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

(ii) den *Sinussatz*:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

*Lösung.* (i) Es seien  $g(t) = tv + C$  und  $h(s) = su + C$  mit  $v, u \in \mathbb{S}^1$ ,  $t \in [0, b]$ ,  $s \in [0, a]$  die parametrisierten Kanten von  $C$  nach  $B$  bzw. nach  $A$ . Dann lässt sich die Kante zwischen  $B$  und  $A$  schreiben als

$$k(r) = r \left( \frac{h(a) - g(b)}{c} \right) + B$$

mit  $r \in [0, c]$  und es gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= \|k(c)\|^2 \\ &= \|h(a) - g(b)\|^2 \\ &= \langle h(a) - g(b), h(a) - g(b) \rangle \\ &= \langle h(a), h(a) \rangle - 2\langle h(a), g(b) \rangle + \langle g(b), g(b) \rangle \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \end{aligned}$$

was den Kosinussatz beweist.

(ii) Nach dem Kosinussatz gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

also

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2 - bc \cos \alpha)^2 = 4b^2 c^2 \cos^2 \alpha.$$

Genau so gelten

$$(b^2 - a^2 - c^2)^2 = 4a^2 c^2 \cos^2 \beta, \quad (c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2 b^2 \cos^2 \gamma.$$

Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \frac{4a^2 b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{4a^2 b^2 c^2 (1 - \cos^2 \beta)} \\ &= \frac{4a^2 b^2 c^2 - a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2 c^2 - b^2 (b^2 - a^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{4a^2 b^2 c^2 - a^2 (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2)}{4a^2 b^2 c^2 - b^2 (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2)} \\ &= \frac{a^2 (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2)}{b^2 (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2)} \\ &= \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Da  $\sin|_{[0,\pi]} \geq 0$  folgt damit

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Die zweite Gleichheit folgt analog. □

**Aufgabe 1.2** Sei

$$\mathcal{J} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \mathcal{J}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{für } z = 0, \\ 0 & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{J}$  stetig ist.

*Lösung.* Wir zeigen Folgenstetigkeit auf allen drei Teilgebieten, auf denen  $\mathcal{J}$  definiert ist. Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  in  $\mathbb{C}$ .

$z = 0$ . Ist  $(z_n)$  eine Nullfolge, so gilt  $\frac{1}{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \infty = \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right),$$

$\mathcal{J}$  ist also stetig in  $z = 0$ .

$z = \infty$ . Sei nun also  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Dann gilt offenbar  $\mathcal{J}(z_n) = \frac{1}{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \mathcal{J}(\infty)$  und damit die Stetigkeit in  $z = \infty$ .

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Klar. □

**Aufgabe 1.3** Beweisen sie Proposition 1.1.4, indem Sie zeigen, dass die stereographische Projektion  $\bar{\sigma} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ein Homöomorphismus ist.

*Lösung.* Es gilt

$$\bar{\sigma} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad P = (x, y, z) \mapsto \bar{\sigma}(P) = \begin{cases} \sigma(P) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} & \text{für } P \neq (0, 0, 1), \\ \infty & \text{für } P = (0, 0, 1). \end{cases}$$

mit der gewöhnlichen stereographischen Projektion  $\sigma$ .  $\bar{\sigma}$  ist damit stetig auf  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ . Sei nun  $(z_n = (x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N = (0, 0, 1)$ . Dann gilt

$$\bar{\sigma}(z_n) = \left( \frac{x_n}{1-z_n}, \frac{y_n}{1-z_n}, 0 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = \bar{\sigma}(N) = \bar{\sigma}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right),$$

$\bar{\sigma}$  ist also stetig. Weiter ist durch

$$\tau : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad z = x + iy \mapsto \tau(z) = \begin{cases} \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) & \text{für } z \neq \infty, \\ (0, 0, 1) & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

eine stetige Umkehrabbildung für  $\bar{\sigma}$  gegeben, denn für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma} \circ \tau)(z) &= \bar{\sigma}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \left(1 - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^{-1} + i \frac{2y}{1+x^2+y^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^{-1} \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \left(\frac{2}{x^2+y^2+1}\right)^{-1} + i \frac{2y}{1+x^2+y^2} \left(\frac{2}{x^2+y^2+1}\right)^{-1} \\ &= x + iy \end{aligned}$$

und für  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^1$  gilt

$$\begin{aligned}
 (\tau \circ \bar{\sigma})(x, y, z) &= \tau \left( \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{2x}{1-z}}{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + 1}, \frac{\frac{2y}{1-z}}{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + 1}, \frac{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} - 1}{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + 1} \right) \\
 &= \left( \frac{2x(1-z)}{x^2 + y^2 + (1-z)^2}, \frac{2y(1-z)}{x^2 + y^2 + (1-z)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (1-z)^2}{x^2 + y^2 + (1-z)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{2x(1-z)}{2-2z}, \frac{2y(1-z)}{2-2z}, \frac{2-2z+2(1-z)^2}{2-2z} \right) \\
 &= (x, y, z).
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also, dass  $\bar{\sigma}$  ein Homöomorphismus ist. □

## Übungsblatt 2

**Aufgabe 2.1** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *kompakt*, wenn zu jeder Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  durch offene Mengen  $U_i \subseteq X$  eine endliche Teilüberdeckung  $X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$  existiert. Zeigen Sie ohne die stereographische Projektion zu verwenden, dass  $\overline{\mathbb{C}}$  mit der in der Vorlesung beschriebenen Topologie kompakt ist.

*Lösung.* Wir bemerken zunächst, dass eine Teilmenge  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  mit  $\infty \notin U$  offen in  $\overline{\mathbb{C}}$  ist genau dann, wenn  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen ist. Ist  $\infty \in U$ , so ist  $U$  offen genau dann, wenn  $U^C$  kompakt ist, denn: Ist  $\infty \in U$ , so gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\} \subseteq U$ . Damit ist  $U^C \subseteq \overline{B}_\epsilon$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge wieder kompakt. Wir zeigen nun, dass  $\overline{\mathbb{C}}$  kompakt ist. Sei dazu  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $\overline{\mathbb{C}}$ . Dann gibt es einen Index  $i_1 \in I$  mit  $\infty \in U_{i_1}$ ,  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U_{i_1}$  ist also kompakt. Da  $\{U_i\}_{i \in I \setminus \{i_1\}}$  dann  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U_{i_1}$  überdeckt, gibt es  $i_2, \dots, i_n \in I \setminus \{i_1\}$  sodass  $\bigcup_{k=2}^n U_{i_k} = \overline{\mathbb{C}} \setminus U_{i_1}$ . Damit ist

$$\overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} \setminus U_{i_1} \cup U_{i_1} = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k},$$

$\overline{\mathbb{C}}$  ist also kompakt. □

**Aufgabe 2.2** (i) Es sei die *Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene* definiert als

$$\mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2 := \{(A, b) \in \mathcal{O}(2) \times \mathbb{R}^2\}$$

mit der Verknüpfung

$$(A, b) \circ (C, d) := (AC, b + Ad).$$

Zeigen Sie, dass diese Gruppe auf der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  via

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times (\mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (A, b) \cdot x := Ax + b$$

transitiv operiert.

(ii) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation, die die obere Halbebene  $\mathbb{H}^2$  auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}^2$  abbildet.

*Lösung.* (i) Wir zeigen zunächst, dass  $\cdot$  tatsächlich eine Gruppenoperation definiert. Offenbar ist das neutrale Element der Bewegungsgruppe gegeben durch  $e_{\mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2} = (I_2, 0)$ . Dann gilt  $e_{\mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2} \cdot x = x$ . Sind nun  $(A, b), (C, d) \in \mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ , so erhalten wir weiter

$$((A, b) \circ (C, d)) \cdot x = (AC, b + Ad) \cdot x$$

$$\begin{aligned}
&= ACx + b + Ad \\
&= A(Cx + d) + b \\
&= (A, b) \cdot ((C, d) \cdot x),
\end{aligned}$$

das heißt,  $\cdot$  operiert auf  $\mathbb{E}^2$ . Für die Transitivität seien  $y_1, y_2 \in \mathbb{E}^2$  beliebig. Dann gilt

$$(I_2, -y_1 + y_2) \cdot y_1 = y_1 + (-y_1 + y_2) = y_2.$$

- (ii) Die Idee ist es, den reellen Kreis  $\overline{\mathbb{R}}$  auf  $\mathbb{S}^1$  abzubilden. Aus Stetigkeitsgründen muss dann bereits  $m(\mathbb{H}^2) \in \{\mathbb{D}^2, \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}^2\}$  gelten. Fordert man dann noch  $|m(i)| < 1$ , so ist  $m$  bestimmt. Wir haben den allgemeinen Ansatz

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ . Bilde das Tripel  $(0, 1, \infty)$  auf das Tripel  $(1, i, -1)$  ab. In beiden Tripeln liegt die für uns relevante Scheibe links des orientierten Weges  $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$  bzw.  $1 \longrightarrow 1 \longrightarrow -1$ , d.h. es gilt damit tatsächlich  $m(\mathbb{H}^2) = \mathbb{D}^2$ . Unsere Bedingungen liefern

$$1 = m(0) = \frac{b}{d}, \quad i = m(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{b+a}{b-a}, \quad -1 = m(\infty) = \frac{a}{c},$$

also wegen ersterem  $b = d$  sowie letzterem  $a = -c$ . Die zweite Bedingung besagt  $a + b = i(b - a)$ , was beispielsweise für  $b = 1$  und  $a = i$  erfüllt ist (beachte, dass diese Wahl nicht eindeutig ist). Damit ist  $m$  gegeben durch

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{iz + 1}{-iz + 1}$$

und es gilt tatsächlich  $|m(i)| = 0 < 1$ , also  $m(\mathbb{H}^2) = \mathbb{D}^2$ . □

**Aufgabe 2.3** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } z = \infty, \\ z^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht invariant unter  $\text{Möb}^+$  ist. Bestimmen Sie außerdem die größte Untergruppe von  $\text{Möb}^+$ , welche  $f$  invariant lässt.

*Lösung.* Betrachte die Möbiustransformation  $\mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}$ . Dann gilt offenbar

$$f(m(\infty)) = f(0) = 0 \neq \infty = f(\infty).$$

Um zu bestimmen, welche Möbiustransformationen  $f$  invariant lassen, machen wir den allgemeinen Ansatz

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

für gewisse  $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$  und  $ad - bc \neq 0$ . Einsetzen von gewissen Bedingungen in  $f \circ m = f$  liefert

$$f(\infty) = \infty \stackrel{!}{=} f(m(\infty)) = f\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a^2}{c^2},$$

also  $c = 0$ ,

$$f(0) = 0 \stackrel{!}{=} f(m(0)) = f\left(\frac{b}{d}\right) = \frac{b^2}{d^2},$$

also  $b = 0$ . Wegen  $ad - bc = ad \neq 0$  gilt außerdem  $a \neq 0 \neq d$ , also  $m(z) = \frac{a}{d}z$ . Weiter ist \*

$$z^2 = f(z) \stackrel{!}{=} f(m(z)) = f\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a^2}{d^2}z^2,$$

also  $a^2 = d^2$  und somit  $a = d$  oder  $a = -d$ . Mehr Bedingungen gibt es nicht, also ist  $\{id, -id\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  die größte Untergruppe von  $\text{Möb}^+$ , welche  $f$  invariant lässt.  $\square$

**Aufgabe 2.4** Beweisen Sie Proposition 1.4.4 aus der Vorlesung: Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4$  vier paarweise verschiedene Punkte in  $\overline{\mathbb{C}}$ . Dann liegen  $z_1, z_2, z_3, z_4$  auf einem Kreis in  $\overline{\mathbb{C}}$  genau dann, wenn das Doppelverhältnis  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  reell ist.

*Lösung.* Als Erinnerung sei erwähnt, dass Kreise in  $\overline{\mathbb{C}}$  von der Form

$$K = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0\}$$

sind, wobei  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$  Konstanten sind.

" $\Leftarrow$ " Sei zunächst  $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$  sowie  $K$  der von  $z_1, z_2, z_3$  eindeutig festgelegte Kreis in  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Sei weiter  $m \in \text{Möb}^+$  eine Möbiustransformation mit

$$m(z_1) = 0, \quad m(z_2) = 1, \quad m(z_3) = \infty,$$

sodass also  $m(K) = \overline{\mathbb{R}}$ . Da das Doppelverhältnis invariant unter  $\text{Möb}^+$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni [z_1, z_2; z_3, z_4] &= [m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4)] \\ &= [0, 1; \infty, m(z_4)] \\ &= \frac{(0 - m(z_4))(\infty - 1)}{(0 - 1)(\infty - m(z_4))} \\ &= m(z_4), \end{aligned}$$

wobei die üblichen Konventionen  $\frac{\infty}{\infty} = 1$  und  $\infty - 1 = \infty$  genutzt wurden. Damit ist  $m(z_4) \in \mathbb{R} = m(K)$  und damit  $z_4 \in K$ , was zu zeigen war.

" $\Rightarrow$ " Seien nun  $z_1, z_2, z_3, z_4$  auf einem Kreis  $K$  in  $\overline{\mathbb{C}}$  sowie  $m \in \text{Möb}^+$  eine Möbiustransformation mit  $m(K) = \overline{\mathbb{R}}$ . Nach obiger Rechnung gilt dann  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = m(z_4) \in \mathbb{R}$ , woraus die Behauptung schließlich folgt.  $\square$



## Übungsblatt 3

**Aufgabe 3.1** Es sei

$$C : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \bar{z} & \text{falls } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

die Spiegelung am Kreis  $\overline{\mathbb{R}}$ . Weiter sei  $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein beliebiger Kreis und  $m \in \text{Möb}$  eine Möbiustransformation, welche  $\overline{\mathbb{R}}$  auf  $A$  abbildet. Die *Spiegelung an  $A$*  definiert man nun als

$$C_A := m \circ C \circ m^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass  $C_A$  wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl von  $m$  abhängt.

*Lösung.* Seien  $m, n \in \text{Möb}$  Möbiustransformationen mit  $m(\overline{\mathbb{R}}) = A = n(\overline{\mathbb{R}})$ . Dann ist  $M := n^{-1} \circ m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ . Wir zeigen zunächst, dass  $M$  und  $C$  kommutieren. Dazu betrachten wir die 4 Formen, welche  $M$  nach Korollar 1.7.2 annehmen kann.

(i) Sei zunächst  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit Koeffizienten  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ . Dann ist

$$(C \circ M)(z) = \overline{\left( \frac{az+b}{cz+d} \right)} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = (M \circ C)(z),$$

also  $C \circ M = M \circ C$ .

(ii) Im Fall  $M(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$  folgt

$$(C \circ M)(z) = \overline{\left( \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right)} = \frac{az+b}{cz+d} = (M \circ C)(z).$$

(iii) Ist  $M(z) = \frac{az+b}{c\bar{z}+d}$  mit reinimaginären Koeffizienten  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad - bc = 1$ , so folgt

$$(C \circ M)(z) = \overline{\left( \frac{az+b}{c\bar{z}+d} \right)} = \frac{-a\bar{z}-b}{-c\bar{z}-d} = (M \circ C)(z).$$

(iv) Ist schließlich  $M(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad - bc = 1$ , so erhalten wir

$$(C \circ M)(z) = \overline{\left( \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right)} = \frac{-az-b}{-cz-d} = (M \circ C)(z).$$

Damit erhalten wir mit  $m = n \circ M$

$$m \circ C \circ m^{-1} = n \circ M \circ C \circ (n \circ M)^{-1} = n \circ C \circ M \circ M^{-1} \circ n^{-1} = n \circ C \circ n^{-1},$$

die Definition der Spiegelung an  $A$  ist also unabhängig von der Wahl von  $m$ . □

**Aufgabe 3.2** Beweisen Sie Proposition 1.6.8: Es sei  $\text{Möb} := \langle \text{Möb}^+, C \rangle$  die allgemeine Möbiusgruppe, wobei  $C$  die Spiegelung am Kreis  $\overline{\mathbb{R}}$  bezeichne. Zeigen Sie, dass sich jedes Element von  $\text{Möb}$  als Komposition endlich vieler Spiegelungen an Kreisen in  $\overline{\mathbb{C}}$  schreiben lässt. (*Hinweis: Es genügt dies für die Transformationen  $C$ ,  $\mathcal{J}$  und  $f(z) = az + b$  mit  $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$  zu zeigen. Warum?*)

*Lösung.* Es ist  $C(z) = \bar{z}$  bereits eine Spiegelung sowie

$$\mathcal{J}(z) = (C \circ \overline{\mathcal{J}})(z)$$

mit der Spiegelung am Einheitskreis  $\overline{\mathcal{J}}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  ebenfalls Komposition von Spiegelungen an Kreisen. Es bleibt also noch die Aussage für  $f$  zu zeigen. Hierfür gehen wir in Polarkoordinaten  $a = r_1 e^{i\phi_1}$ ,  $b = r_2 e^{i\phi_2}$  und nutzen, dass sich  $f$  als Komposition einer Rotation, Streckung und Translation schreiben lässt. Die Rotation ist gegeben durch  $f_1(z) = e^{i\phi_1} z$ . Setze

$$m_2(z) := e^{i\frac{\phi_1}{2}} z, \quad m_2^{-1}(z) = e^{-i\frac{\phi_1}{2}} z.$$

Dann ist

$$(m_2 \circ C \circ m_2^{-1})(z) = e^{i\frac{\phi_1}{2}} \left( e^{i\frac{\phi_1}{2}} z \right) = e^{i\phi_1} z = f_1(z),$$

$f_1$  ist also eine Spiegelung. Die Streckung ist gegeben durch  $f_2(z) = r_1 z$ . Betrachte die Spiegelung am Einheitskreis

$$m_1(z) = \frac{iz + 1}{z + i}, \quad m_1^{-1}(z) = \frac{iz - 1}{-z + i}$$

sowie

$$m_3(z) = \frac{i\sqrt{r_1}z + \sqrt{r_1}}{z + i}, \quad m_3^{-1}(z) = \frac{iz - \sqrt{r_1}}{-z + i\sqrt{r_1}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (m_3 \circ C \circ m_3^{-1} \circ m_1 \circ C \circ m_1^{-1})(z) &= (m_3 \circ C \circ m_3^{-1}) \left( \frac{i\frac{-i\bar{z}-1}{-i\bar{z}-i} + 1}{\frac{-i\bar{z}-1}{-i\bar{z}-i} + i} \right) \\ &= (m_3 \circ C \circ m_3^{-1}) \left( \frac{\bar{z} - i - \bar{z} - i}{-i\bar{z} - 1 - i\bar{z} + 1} \right) \\ &= (m_3 \circ C \circ m_3^{-1}) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \\ &= (m_3 \circ C) \left( \frac{\frac{i}{\bar{z}} - \sqrt{r_1}}{-\frac{1}{\bar{z}} + i\sqrt{r_1}} \right) \\ &= (m_3 \circ C) \left( \frac{i - \sqrt{r_1}\bar{z}}{-1 + i\sqrt{r_1}\bar{z}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m_3 \left( \frac{-i - \sqrt{r_1}z}{-1 - i\sqrt{r_1}z} \right) \\
 &= \frac{i\sqrt{r_1} \frac{-i - \sqrt{r_1}z}{-1 - i\sqrt{r_1}z} + \sqrt{r_1}}{\frac{-i - \sqrt{r_1}z}{-1 - i\sqrt{r_1}z} + i} \\
 &= \frac{\sqrt{r_1} - ir_1z - \sqrt{r_1} - ir_1z}{-i - \sqrt{r_1}z - i + \sqrt{r_1}z} \\
 &= r_1z \\
 &= f_2(z),
 \end{aligned}$$

also ist auch die Streckung Komposition zweier Spiegelungen. Betrachte nun noch die Translation  $f_3(z) = z + b = z + r_2e^{i\phi_2}$ . Setze dazu

$$m_4(z) = e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}z, \quad m_4^{-1}(z) = e^{-i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}z$$

und

$$m_5(z) = e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}z + \frac{r_2}{2}e^{i\phi_2}, \quad m_5^{-1}(z) = \frac{z - \frac{r_2}{2}e^{i\phi_2}}{e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
 (m_5 \circ C \circ m_5^{-1} \circ m_4 \circ C \circ m_4^{-1})(z) &= (m_5 \circ C \circ m_5^{-1}) \left( e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})} \left( e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})} \bar{z} \right) \right) \\
 &= (m_5 \circ C \circ m_5^{-1}) \left( -e^{2i\phi_2} \bar{z} \right) \\
 &= (m_5 \circ C) \left( \frac{-e^{2i\phi_2} \bar{z} - \frac{r_2}{2}e^{i\phi_2}}{ei \left( \phi_2 + \frac{\pi}{2} \right)} \right) \\
 &= m_5 \left( \frac{-e^{-2i\phi_2}z - \frac{r_2}{2}e^{-i\phi_2}}{e^{-i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}} \right) \\
 &= e^{i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})} \left( \frac{-e^{-2i\phi_2}z - \frac{r_2}{2}e^{-i\phi_2}}{e^{-i(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}} \right) + \frac{r_2}{2}e^{i\phi_2} \\
 &= -e^{2i\phi_2} \left( -e^{-2i\phi_2}z - \frac{r_2}{2}e^{-i\phi_2} \right) + \frac{r_2}{2}e^{i\phi_2} \\
 &= z + r_2e^{i\phi_2} \\
 &= f_3(z).
 \end{aligned}$$

und auch  $f_3$  ist eine Verkettung von Spiegelungen an Kreisen. Insgesamt kann also  $m = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  als Komposition endlich vieler Spiegelungen an Kreisen von  $\overline{\mathbb{C}}$  geschrieben werden, was zu zeigen war. □

**Aufgabe 3.3** Sei  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det A = 1\}$  die spezielle lineare Gruppe. Zeigen Sie, dass  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  von den Matrizen der Form

$$T_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  erzeugt wird.

*Lösung.* Zunächst stellen wir fest, dass

$$T_x T_y = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^3 = S^{-1}.$$

Weiter ist für  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$T_x S T_y S T_z = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-xy & xyz-x-z \\ y & 1-yz \end{pmatrix}.$$

Es sei also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

beliebig mit  $ad - bc = 1$ .

**Fall (a)** Sei zunächst  $c \neq 0$ . Dann wähle  $y = c$  und erhalte

$$a = 1 - xy = 1 - xc, \quad d = 1 - yz = 1 - cz,$$

also  $x = \frac{1-a}{c}$  und  $\frac{1-d}{c}$ . Für  $b$  gilt dann automatisch wegen  $ad - bc = 1$

$$b = \frac{ad-1}{c} = \frac{(1-xy)(1-yz)-1}{y} = \frac{1-xy-yz+xy^2z-1}{y} = xyz - x - z,$$

es gilt also

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T_{\frac{1-a}{c}} S T_c S T_{\frac{1-d}{c}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Fall (b)** Sei nun  $c = 0$ . Dann gilt  $1 = ad - bc = ad$ , also insbesondere  $a \neq 0$ . Wegen

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

ist

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} = S^3 \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} \stackrel{(a)}{=} S^3 T_{\frac{1}{a}} S T_a S T_{\frac{1}{a}},$$

wobei Fall (a) genutzt wurde. □

**Aufgabe 3.4** Es sei  $\sigma : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto -\bar{z}$  die Spiegelung an der imaginären Achse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup (\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \sigma).$$

*Lösung.* Siehe Korollar 1.7.4 □

## Übungsblatt 4

- Aufgabe 4.1** (i) Bestimmen Sie all Möbiustransformationen  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  mit  $m(i) = i$ .  
(ii) Bestimmen Sie all Möbiustransformationen  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , welche die Parallelen zur imaginären Achse auf solche abbilden.

*Lösung.* (i) Nach Satz 1.7.3 kann  $m$  zwei Gestalten annehmen. Wir untersuchen beide getrennt:

- (1) Sei zunächst  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} i = m(i) &= \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{(ci + d)(-ci + d)} \\ &= \frac{1}{c^2 + d^2} (ac + bd + i(ad - bc)) \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{1}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert  $c^2 + d^2 = 1$  und  $ac + bd = 0$ , also

$$0 = acd + bd^2 = (1 + bc)c + bd^2 = c + b(c^2 + d^2) = b + c$$

und damit  $b = -c$ . Dies impliziert wegen  $1 = ad - bc = ad + c^2$  auch  $a = d$  und somit

$$\text{Möb}(\mathbb{H})_i := \text{Stab}_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(i) \cong \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ -c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}, c^2 + d^2 = 1 \right\} \cong \mathcal{O}(2).$$

- (2) Ist nun  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad - b = 1$ , so liefert die Forderung

$$\begin{aligned} i = m(i) &= \frac{-ai + b}{-ci + d} = \frac{(-ai + b)(-ci - d)}{(ci + d)(-ci - d)} \\ &= -\frac{1}{c^2 + d^2} (-ac - bd + i(ad - bc)) \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i \frac{1}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert  $c^2 + d^2 = -1$  und analog wie oben  $b = -c$ . Damit ist

$$\text{Möb}(\mathbb{H})_i \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ -c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times, c^2 + d^2 = -1 \right\} \cong i \mathcal{O}(2)$$

Insgesamt folgt damit

$$\text{Möb}(\mathbb{H})_i = \mathcal{O}(2) \cup i \mathcal{O}(2)$$

- (ii) Wir verfahren analog wie in (i) und betrachten die beiden Fälle getrennt.

- (1) Sei  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad-bc = 1$ . Betrachte die Gerade  $g : \operatorname{Re}(z) = 0$ . Dann sind  $0, i \in g$  und

$$m(0) = \frac{b}{d}, \quad m(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{bd+ac+i}{c^2+d^2}.$$

Damit  $m(g)$  auch parallel zur imaginären Achse ist, genügt es, dass  $\operatorname{Re}(m(i)) = \operatorname{Re}(m(0))$  gilt. Dies liefert

$$\operatorname{Re}(m(0)) = \frac{b}{d} \stackrel{!}{=} \frac{bd+ac}{c^2+d^2} = \operatorname{Re}(m(i)),$$

also

$$b = \frac{bd^2+acd}{c^2+d^2} = \frac{bd^2+c(bc+1)}{c^2+d^2} = \frac{b(c^2+d^2)+c}{c^2+d^2} = b + \frac{c}{c^2+d^2}$$

und damit  $c = 0$ . Damit ist wegen  $1 = ad-bc = ad$  somit  $d = \frac{1}{a}$  und  $m(z) = a^2z + ab$ . Wir zeigen nun noch, dass dieser Spezialfall bereits ausreicht. Da Geraden auf Geraden abbilden, wird auch jeder weitere Punkt in  $g$  auf die Gerade durch  $m(0)$  und  $m(i)$  abgebildet. Sind nun  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  beliebig,  $h : \operatorname{Re}(z) = \lambda$  eine beliebige Gerade, so gilt für die Punkte  $\lambda, \lambda + i\mu$  auf  $h$

$$\operatorname{Re}(m(\lambda)) = \operatorname{Re}(a^2\lambda + ab) = a^2\lambda + ab = \operatorname{Re}(a^2(\lambda + i\mu) + ab) = \operatorname{Re}(m(\lambda + i\mu)).$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H})_P \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\},$$

wobei wir mit  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})_P$  jene Möbiustransformationen bezeichnen, welche Parallelen zur imaginären Achse auf solche abbilden.

- (2) Ist nun  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad-bc = 1$ , so gilt

$$m(0) = \frac{b}{d}, \quad m(i) = \frac{-ai+b}{-ci+d} = \frac{(-ai+b)(-ci-d)}{(-ci+d)(-ci-d)} = -\frac{-ac-bd+i}{c^2+d^2} = \frac{ad+bc-i}{c^2+d^2},$$

es folgt also dieselbe Rechnung wie in (1).

Damit ist insgesamt

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H})_P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\},$$

wir sind also fertig. □

**Aufgabe 4.2** (i) Bestimmen Sie die Gruppe aller Möbiustransformationen, die  $\mathbb{S}^1$  invariant lassen.

(ii) Bestimmen Sie die Gruppe aller Möbiustransformationen, die  $\mathbb{D}^2$  invariant lassen.

*Lösung.* (i) Betrachte die Möbiustransformation  $n(z) = \frac{iz+1}{z+i}$  mit Inverser  $n^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$ . Es gilt  $n(\overline{\mathbb{R}}) = \mathbb{S}^1$ . Für eine Möbiustransformation  $p \in \text{Möb}$  gilt also  $p(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$  genau dann, wenn  $(n^{-1} \circ p \circ n)(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$  gilt, also wenn  $p = n \circ m \circ n^{-1}$  für ein  $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  gilt. In der Tat liefert eine weitere Möbiustransformation  $\tilde{n} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  mit  $\tilde{n}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathbb{S}^1$  die Mengengleichheit

$$A := \{n \circ m \circ n^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\} = \{\tilde{n} \circ m \tilde{n}^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\} =: \tilde{A},$$

denn wegen  $(n^{-1} \circ \tilde{n})(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$  können wir  $n^{-1} \circ \tilde{n} =: s \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  schreiben. Damit ist für  $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ , also  $n \circ m \circ n^{-1} \in A'$  auch

$$n \circ m \circ n^{-1} = \tilde{n} \circ s^{-1} \circ m \circ s \circ \tilde{n} = \tilde{n} \circ (s^{-1} \circ m \circ s) \circ \tilde{n} = \tilde{n} \circ \tilde{m} \circ \tilde{n}^{-1} \in A'$$

und genauso umgekehrt. Damit ist

$$\text{Möb}(\mathbb{S}^1) = \left\{ \left( z \mapsto \frac{iz+1}{z+i} \right) \circ m \circ \left( z \mapsto \frac{-iz+1}{z-i} \right) \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) \right\}$$

und wir können die exakte Gestalt einer solchen Möbiustransformation berechnen, indem wir die 4 möglichen Gestalten von  $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  betrachten.

(1) Sei zunächst  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ . Dann ist die zu  $p = n \circ m \circ n^{-1}$  zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & b+c+i(a-d) \\ b+c+i(d-a) & a+d+i(c-b) \end{pmatrix},$$

also

$$p(z) = \frac{(a+d+i(b-c))z + b+c+i(a-d)}{(b+c+i(d-a))z + a+d+i(c-b)} =: \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}.$$

(2) Sei  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad - bc = 1$ . Dann ist genau so

$$p(z) = \frac{(a+d+i(b-c))z + b+c+i(a-d)}{(b+c+i(d-a))z + a+d+i(c-b)} =: \frac{\alpha z + \beta}{-\bar{\beta} z - \bar{\alpha}}.$$

(3) Ist  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ , so ist

$$(m \circ n^{-1})(z) = m\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right) = \frac{a\overline{\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right)} + b}{c\overline{\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right)} + d} = \frac{(ai+b)\bar{z} + a+bi}{(ci+d)\bar{z} + c+di}$$



und die zu  $p = n \circ m \circ n^{-1}$  zugehörige Matrix ist

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ai + b & a + bi \\ ci + d & c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - a + i(b + d) & c - b + i(a + d) \\ b - c + i(a + d) & a - d + i(b + d) \end{pmatrix}$$

und damit mit

$$\gamma := d - a + i(b + d), \quad \delta := c - b + i(a + d)$$

schließlich

$$p(z) = \frac{(d - a + i(b + d))\bar{z} + c - b + i(a + d)}{(b - d + i(a + d))\bar{z} + a - d + i(b + d)} = \frac{\gamma\bar{z} + \delta}{-\gamma\bar{z} - \bar{\delta}}.$$

(4) Ist  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^\times$  und  $ad - bc = 1$ , so folgt analog

$$p(z) = \frac{(d - a + i(b + d))\bar{z} + c - b + i(a + d)}{(b - d + i(a + d))\bar{z} + a - d + i(b + d)} = \frac{\gamma\bar{z} + \delta}{\gamma\bar{z} + \bar{\delta}}.$$

(ii) Jede Möbiustransformation, welche  $\mathbb{D}^2$  invariant lässt, bildet  $\mathbb{S}^1$  auf  $\mathbb{S}^1$  ab, wir müssen also lediglich  $n$  in (i) so wählen, dass  $n(\mathbb{H}) = \mathbb{D}^2$ . Die erfüllt beispielsweise

$$n(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}, \quad n^{-1}(z) = \frac{-z - i}{-iz - 1}.$$

Dann gilt

$$\text{Möb}(\mathbb{D}^2) = \{n \circ m \circ n^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\mathbb{H})\}.$$

**Aufgabe 4.3** Führen Sie den Beweis von Satz 1.8.1 zu Ende: Es seien  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}$  sich zwei schneidene euklidische Geraden.

(i) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}$  konform ist, indem Sie die in der Vorlesung offen gelassenen Fälle

(1)  $\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)$  sind zwei euklidische Geraden.

(2)  $\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)$  sind ein euklidischer Kreis und eine euklidische Gerade.

beweisen.

(ii) Zeigen Sie, dass  $C(z) = \bar{z}$  konform ist.

*Lösung.* (i) Wir betrachten zunächst einen allgemeinen Kreis  $X : \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$  in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $X$  eine euklidische Gerade genau dann, wenn  $\alpha = 0$  und ein euklidischer Kreis genau dann, wenn  $\alpha \neq 0$ . Ist  $X$  eine Gerade, also  $\alpha = 0$ , so ist  $\mathcal{J}(X)$  gegeben durch  $\beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma z\bar{z} = 0$ , also ist  $\mathcal{J}(X)$  ein euklidischer Kreis genau dann, wenn  $\gamma = 0$  (also  $0 \in X$ ) und eine Gerade, falls  $\gamma \neq 0$  (also  $0 \notin X$ ). Ist hingegen  $X$  ein euklidischer Kreis,

so ist  $\mathcal{J}(X)$  gegeben durch  $\alpha + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma z\bar{z} = 0$ , also ist  $\mathcal{J}(X)$  ein euklidischer Kreis, falls  $\gamma \neq 0$  und eine Gerade, falls  $\gamma = 0$ . Nun zur Aufgabe: Seien  $X_1, X_2$  sich im Punkt  $z_0$  schneidende euklidische Geraden der Steigung  $s_1, s_2$ . In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Schnittwinkel in  $z_0$  gerade

$$\angle_{z_0}(X_1, X_2) = \arctan s_2 - \arctan s_1$$

ist, wobei aus den Gleichungen  $X_k : \beta_k z + \bar{\beta}_k \bar{z} + \gamma_k = 0$  die Steigungen  $s_k$  als  $s_k = \frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)}$  berechnet werden.

- (1) Sind  $\mathcal{J}(X_1)$  und  $\mathcal{J}(X_2)$  euklidische Geraden, so gilt  $\gamma_k = 0$  und die Bildkreise sind gegeben durch  $\mathcal{J}(X_k) : \bar{\beta}_k z + \beta_k \bar{z} = 0$ . Die Bildsteigungen sind dann

$$\tilde{s}_k = \frac{\operatorname{Re}(\bar{\beta})}{\operatorname{Im}(\bar{\beta})} = -\frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)} = -s_k = -\arctan \theta_k,$$

woraus also

$$\angle_{\mathcal{J}(z_0)}(\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)) = \arctan \tilde{s}_2 - \arctan \tilde{s}_1 = \theta_1 - \theta_2 = -\angle_{z_0}(X_1, X_2)$$

folgt.

- (2) Ist  $X_1$  ein euklidischer Kreis und  $X_2$  euklidische Gerade, so sind die Geradengleichungen  $X_1 : \beta_1 z + \bar{\beta}_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0$  und  $X_2 : \beta_2 z + \bar{\beta}_2 \bar{z} = 0$ . Weiter hat  $\mathcal{J}(X_1)$  die Steigung (Siehe Proposition 1.8.1) gerade

$$\tilde{s}_1 = -s_1 = -\arctan \theta_1$$

sowie die Steigung von  $\mathcal{J}(X_2)$  nach (1) gerade

$$\tilde{s}_2 = -s_2 = -\arctan \theta_2.$$

Damit folgt wie in (1) die Behauptung.

- (ii) Für eine Gerade  $g : \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$  ist  $C(g) : \beta \bar{z} + \bar{\beta} z + \gamma = 0$ , das Bild also wieder eine Gerade. Genauso bildet  $C$  euklidische Kreise auf solche ab. Daraus folgt bereits die Konformität von  $C$ . □

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 5.1** Es sei  $M := \mathbb{R}^2$  und  $d_{KVV} : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \begin{cases} |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq y_1, \\ |x_2 - y_2| & \text{falls } x_1 = y_1 \end{cases}$$

definierte Abbildung. Zeigen Sie, dass  $(M, d_{KVV})$  ein metrischer Raum ist. Überlegen Sie sich, woher der Name kommt.

*Lösung.* Es sind die Axiome einer Metrik zu zeigen.

- (i) Da  $|\cdot|$  symmetrisch ist, gilt  $|x_1 - y_1| = |y_1 - x_1|$  und  $|x_2 - y_2| = |y_2 - x_2|$  für alle  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  und damit

$$d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_{KVV}((y_1, y_2), (x_1, x_2)).$$

- (ii) Da  $|x| \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  ist  $d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$  für alle  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Weiter ist  $d_{KVV}((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$  für alle  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Ist nun umgekehrt  $d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$ , so führt der Fall  $x_1 \neq y_1$  zum Widerspruch

$$0 = d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \geq |x_1 - y_1| > 0$$

und im Fall  $x_1 = y_1$  folgt  $x_2 - y_2 = 0$ , also  $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ . Insgesamt ist  $d_{KVV}$  damit positiv definit.

- (iii) Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien dazu  $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Wir müssen einige Fallunterscheidungen treffen.

**Fall (1)** Sei zunächst  $x_1 \neq z_1$ .

**Fall (1.1)** Sei  $y_1 \neq x_1$  und  $y_1 \neq z_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \\ &= |x_2| + |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |z_2| \\ &\leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |z_2| \\ &\leq |x_2| + |x_1 - y_1| + 2|y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2| \\ &= d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_{KVV}((y_1, y_2), (z_1, z_2)). \end{aligned}$$

**Fall (1.2)** Sei  $y_1 = x_1$  und  $y_1 \neq z_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 d_{KVV}((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \\
 &= |x_2 - y_2 + y_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \\
 &\leq |x_2 - y_2| + |y_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \\
 &= |x_2 - y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2| \\
 &= d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_{KVV}((y_1, y_2), (z_1, z_2)).
 \end{aligned}$$

**Fall (1.3)** Ist  $y_1 \neq x_1$  und  $y_1 = z_1$ , so folgt analog

$$\begin{aligned}
 d_{KVV}((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \\
 &= |x_2| + |x_1 - y_1| + |z_2 - y_1 + y_2| \\
 &\leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |z_2 - y_2| \\
 &= d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_{KVV}((y_1, y_2), (z_1, z_2)).
 \end{aligned}$$

**Fall (2)** Sei nun  $x_1 = z_1$ . Dann gibt es zwei Unterfälle:

**Fall (2.1)** Ist  $y_1 = x_1$  (und damit auch  $y_1 = z_1$ ), so gilt

$$\begin{aligned}
 d_{KVV}((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_2 - z_2| \\
 &\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\
 &= d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_{KVV}((y_1, y_2), (z_1, z_2)).
 \end{aligned}$$

**Fall (2.2)** Ist  $y_1 \neq x_1$  (und damit auch  $y_1 \neq z_1$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 d_{KVV}((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_2 - z_2| \\
 &\leq |x_2| + |z_2| \\
 &\leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2| \\
 &= d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_{KVV}((y_1, y_2), (z_1, z_2)).
 \end{aligned}$$

Damit gilt in allen Fällen die Dreiecksungleichung, womit  $d_{KVV}$  zu einer Metrik und  $(M, d_{KVV})$  zum metrischen Raum wird.

Zu zwei gegebenen Punkten in der Ebene misst die Metrik die Länge des Weges, wenn man senkrecht von einem Punkt zur  $x$ -Achse, dann entlang der  $x$ -Achse zum Lotfußpunkt des anderen Punktes und anschließend senkrecht zum zweiten Punkt entlang läuft. Dieser Weg erinnert an das Straßenbahnnetz in Karlsruhe, wo (fast) all Bahnlinien entlang der Kaiserstraße verlaufen und sich erst im Osten bzw. Westen in die verschiedenen Stadtteile abspalten.  $\square$

**Aufgabe 5.2** Zeigen Sie, dass die Translationen  $T(\mathbb{R}^2) = \{T_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto x + a \mid a \in \mathbb{R}^2\}$  ein Normalteiler in der euklidischen Isometriegruppe  $\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathcal{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$  ist.

*Lösung.* Wir wenden zunächst das Untergruppenkriterium an, um zu zeigen, dass  $T(\mathbb{R}^2)$  eine Untergruppe ist. Sicherlich ist  $T(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ , da  $\text{id}_{\mathbb{E}^2} \in T(\mathbb{R}^2)$ . Weiter gilt für  $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$(T_a \circ T_{-b})(x) = T_a(x - b) = x + a - b = T_{a-b}(x) \in T(\mathbb{R}^2),$$

also ist  $T(\mathbb{R}^2)$  eine Untergruppe (beachte, dass  $T_b^{-1} = T_{-b}$ ). Es bleibt noch die Normalteilereigenschaft zu überprüfen. Sei dazu  $\Phi_{A,a} \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  beliebig, wobei  $\Phi_{A,a}(x) = Ax + a$  ein beliebiges Element der Isometriegruppe von  $\mathbb{E}^2$  ist. Dann gilt  $\Phi_{A,a}^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}a$ , denn es gilt

$$(\Phi_{A,a} \circ \Phi_{A,a}^{-1})(x) = \Phi_{A,a}(A^{-1}x - A^{-1}a) = A(A^{-1}x - A^{-1}a) + a = x - a + a = x$$

und

$$(\Phi_{A,a}^{-1} \circ \Phi_{A,a})(x) = \Phi_{A,a}(Ax + a) = A^{-1}(Ax + a) - A^{-1}a = x + a - a = x.$$

Dann gilt für jedes  $b \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (\Phi_{A,a}^{-1} \circ T_b \circ \Phi_{A,a})(x) &= (\Phi_{A,a}^{-1} \circ T_b)(Ax + a) \\ &= \Phi_{A,a}^{-1}(Ax + a + b) \\ &= A^{-1}(Ax + a + b) - A^{-1}a \\ &= x + A^{-1}b \\ &= T_{A^{-1}b}(x), \end{aligned}$$

also  $\Phi_{A,a}^{-1} \circ T_b \circ \Phi_{A,a} \in T(\mathbb{R}^2)$ , was zu zeigen war. □

**Aufgabe 5.3** Ein Längenraum ist ein topologischer Raum  $X$ , der hausdorffsch ist, zusammen mit einer Klasse  $W$  von zulässigen Wegen in  $X$  und einer Abbildung  $L : W \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  mit den Bedingungen

(w1)  $W$  ist abgeschlossen unter Restriktionen, d.h. wenn  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  in  $W$  liegt, so auch  $\gamma|_{[c, d]}$  für alle  $a \leq c \leq d \leq b$ .

(w2)  $W$  ist abgeschlossen unter Verkettung, das heißt für Wege  $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow X, \gamma_2 : [c, d] \longrightarrow X$  in  $W$  mit  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  ist  $\gamma := \gamma_2 \circ \gamma_1$  in  $W$ .

(w3)  $W$  ist abgeschlossen unter Umparametrisierungen.

(w4)  $W$  enthält für jeden Punkt  $x \in X$  einen Weg  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  mit  $x = \gamma(t)$  für ein  $t \in [a, b]$ .

und

(l1)  $L$  ist additiv, das heißt für jeden Weg  $\gamma : [a, c] \longrightarrow X$  gilt  $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, b]}) + L(\gamma|_{[b, c]})$ .

(l2) Für jeden Weg  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  ist

$$L(\gamma, a, \cdot) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \quad t \mapsto L(\gamma, a, t) = L(\gamma|_{[a, t]})$$

eine stetige Funktion.

(l3)  $L$  ist invariant unter Umparametrisierungen von Wegen.

(l4)  $L$  verträgt sich mit der Topologie von  $X$ , das heißt für jeden Punkt  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  gilt

$$\inf\{L(\gamma|_{[a, b]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0.$$

Auf einem solchen Längenraum  $(X, W, L)$  kann man eine Abbildung

$$d_L : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \quad (x, y) \mapsto \inf\{L(\gamma|_{[a, b]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

definieren. Zeigen Sie, dass  $(X, d_L)$  ein metrischer Raum (mit nicht-endlicher Metrik) ist.

*Lösung.* Für den Beweis zeigen wir die Axiome einer Metrik.

- (i) Zur Symmetrie: Seien  $x, y \in X$ . Ist  $d_L(x, y) = \infty$ , so gibt es keinen Weg in  $W$  von  $x$  nach  $y$ , also wegen (w3) auch keinen von  $y$  nach  $x$ . Daraus ergibt sich  $d_L(y, x) = \infty = d_L(x, y)$ . Sei nun  $d_L(x, y) < \infty$ . Für jeden Weg  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  mit  $\gamma(a) = x$  und  $\gamma(b) = y$  ist  $\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow X$ ,  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$  ein Weg von  $y$  nach  $x$  (existiert nach (w3)). Aus (l3) folgt  $L(\gamma) = L(\bar{\gamma})$  und damit  $d_L(y, x) \leq d_L(x, y)$ . Dasselbe Argument andersherum liefert die andere Ungleichung und damit  $d_L(x, y) = d_L(y, x)$ .
- (ii) Seien  $x, y, z \in X$ . Wir müssen zeigen, dass  $d_L$  die Dreiecksungleichung erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} d_L(x, z) &= \inf\{L(\gamma|_{[a, b]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(a) = x, \gamma(b) = z\} \\ &= \inf\{L(\gamma|_{[0, 2]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(0) = x, \gamma(2) = z\} \\ &\leq \inf\{L(\gamma|_{[0, 2]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(0) = x, \gamma(2) = z, \gamma(1) = y\} \\ &= \inf\{L(\gamma|_{[0, 1]}) + L(\gamma|_{[1, 2]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(0) = x, \gamma(2) = z, \gamma(1) = y\} \\ &= \inf\{L(\gamma|_{[0, 1]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} + \\ &\quad \inf\{L(\gamma|_{[1, 2]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(1) = y, \gamma(2) = z\} \\ &= d_L(x, y) + d_L(y, z). \end{aligned}$$

Dabei wurde in der zweiten Gleichheit die Invarianz unter Umparametrisierungen, in der dritten Gleichheit die Additivität und in der vierten Gleichheit die Abgeschlossenheit unter Kompositionen benutzt.

- (iii) Da  $L(\gamma) \geq 0$  ist für alle  $\gamma \in W$  gilt  $d_L(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ . Zeige nun  $d_L(x, x) = 0$ .  
Wähle einen Weg  $\gamma_x : [a, b] \rightarrow X$  mit  $\gamma(t) = x$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[a,b]}) &= L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma|_{[t,t]}) + L(\gamma|_{[t,b]}) \\ &= L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[t,t]}), \end{aligned}$$

also

$$d_L(x, x) \leq L(\gamma|_{[t,t]}) = L(\gamma|_{[a,b]}) - L(\gamma|_{[a,b]}) = 0$$

und damit  $d_L(x, x) = 0$ . Seien nun umgekehrt  $x \neq y$ . Wir müssen zeigen, dass dann  $d_L(x, y) > 0$ . Da  $X$  hausdorffsch ist, können wir eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  wählen mit  $y \notin U_x$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d_L(x, y) &= \inf \{ L(\gamma|_{[a,b]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \} \\ &\geq \inf \{ L(\gamma|_{[a,b]}) \mid \gamma \in W \text{ und } \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x \} \\ &= > 0, \end{aligned}$$

$d_L$  ist also positiv definit und damit eine Metrik.

□

## Übungsblatt 6

**Aufgabe 6.1** (i) Beweisen Sie Satz 2.2.3, indem Sie zeigen, dass  $(\mathbb{S}^2(R), d_s)$  ein metrischer Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass  $\iota : (\mathbb{S}^2, d_s) \longrightarrow (\mathbb{S}^2(R), \frac{1}{R}d_s)$ ,  $x \mapsto Rx$  eine Isometrie ist.

(iii) Bestimmen Sie den Durchmesser  $\text{diam } \mathbb{S}^2(R) := \sup\{d_s(x, y) \mid x, y \in \mathbb{S}^2(R)\}$ .

*Lösung.* (i) Wir zeigen die Axiome der Metrik

$$d_s : \mathbb{S}^2(R) \times \mathbb{S}^2(R) \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (p, q) \mapsto d_s(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))} L_s(c).$$

- (1) Da  $\|c'(t)\|_e \geq 0$  für jede Kurve  $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))$ , gilt  $d_s(p, q) \geq 0$  für alle  $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ . Weiter gilt für den konstanten Weg  $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(R)$ ,  $t \mapsto c(t) = p$  für beliebiges  $p \in \mathbb{S}^2(R)$  bereits  $c'(t) = 0$ , also  $d_s(p, p) = 0$ . Sei nun umgekehrt  $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ ,  $p \neq q$ . Wir müssen zu zeigen, dass ihr Abstand nicht verschwindet. Wir gehen hierfür vor wie im Euklidischen. Wähle  $\epsilon > 0$ , sodass der euklidische Ball  $B_\epsilon(p) \subseteq \mathbb{R}^3$  den Punkt  $q$  nicht enthält und wähle einen Weg  $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(R)$  mit  $c(a) = p$  und  $c(b) = q$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es  $\delta \in [a, b]$  mit  $c(\delta) \in \partial B_\epsilon(p)$  und  $c([a, \delta]) \subseteq B_\epsilon(p)$ , das heißt  $\delta$  ist der Zeitpunkt, zu dem die Kurve  $c$  den Ball erstmalig verlässt. Dann gilt für die Länge der Kurve

$$L_s(c) = \inf_a^b \|c'(t)\|_e \, dt \geq \int_a^\delta \|c'(t)\|_e \, dt \geq d_s(p, c(\delta)) \geq d_e(p, c(\delta)) = \epsilon$$

und damit

$$d_s(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))} L_s(c) \geq \epsilon > 0,$$

$d_s$  ist also positiv definit.

- (2) Für  $p, q, r \in \mathbb{S}^2(R)$  gilt

$$\Omega_{qr}(\mathbb{S}^2(R)) \circ \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R)) := \{\gamma \circ \eta \mid \gamma \in \Omega_{qr}(\mathbb{S}^2(R)), \eta \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2(R))\} \subseteq \Omega_{pr}(\mathbb{S}^2(R))$$

und damit  $d_s(p, r) \geq d_s(p, q) + d_s(q, r)$ , die Dreiecksungleichung.

- (3) Da für jeden Weg auch der umgekehrte Weg existiert und dieselbe Länge hat, folgt Symmetrie.

(ii) Wir müssen zeigen, dass für  $p, q \in \mathbb{S}^2$  gilt  $d_s(p, q) = \frac{1}{R}d_s(\iota(p), \iota(q)) = \frac{1}{R}d_s(Rp, Rq)$ . Es gilt

$$\frac{1}{R}d_s(\iota(p), \iota(q)) = \frac{1}{R} \inf_{\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))} L_s(\gamma)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{R} \inf_{\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))} \int_a^b \sqrt{\left(\frac{x'(t)}{R}\right)^2 + \left(\frac{y'(t)}{R}\right)^2 + \left(\frac{z'(t)}{R}\right)^2} \, dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))} \int_a^b \sqrt{\left(\left(\frac{x(t)}{R}\right)'\right)^2 + \left(\left(\frac{y(t)}{R}\right)'\right)^2 + \left(\left(\frac{z(t)}{R}\right)'\right)^2} \, dt \\
 &\geq \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt \\
 &= d_s(p, q)
 \end{aligned}$$

wobei genutzt wurde, dass für  $\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))$  mit  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  die Kurve  $\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{x(t)}{R}, \frac{y(t)}{R}, \frac{z(t)}{R}\right)$  eine Kurve in  $\Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)$  ist. Genau so folgt

$$\begin{aligned}
 Rd_s(p, q) &= R \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)} L_s(\gamma) \\
 &= R \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)} \int_a^b \sqrt{(Rx'(t))^2 + (Ry'(t))^2 + (Rz'(t))^2} \, dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}(\mathbb{S}^2)} \int_a^b \sqrt{((Rx(t)))'^2 + ((Ry(t)))'^2 + ((Rz(t)))'^2} \, dt \\
 &\geq \inf_{\gamma \in \Omega_{RpRq}(\mathbb{S}^2(R))} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt \\
 &= d_s(\iota(p), \iota(q)),
 \end{aligned}$$

die umgekehrte Ungleichung.

- (iii) Es ist  $d_s(x, y) = L_s(\gamma)$  für den kürzesten Weg  $\gamma$ , der entlang eines Großkreises auf  $\mathbb{S}^2(R)$  verläuft. Zu zwei Punkten  $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$  gibt es einen eindeutig bestimmten Großkreis und zwei Segmente, die  $p$  und  $q$  verbinden. Das kürzere davon ist kürzer als der halbe Umfang, also  $d_s(p, q) \leq \frac{U}{2} = \pi R$ . Andererseits haben Antipodenpunkte genau den Abstand  $\pi R$ , also gilt  $\text{diam}(\mathbb{S}^2(R)) = \pi R$ .  $\square$

**Aufgabe 6.2** Zeigen Sie:

- (i) Die Sphäre  $(\mathbb{S}^2(R), d_s)$  ist 2-Punkt-homogen.
- (ii) Der hyperbolische Raum  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  ist 2-Punkt-homogen.

*Lösung.* (i) Seien  $(a, b), (x, y)$  zwei Punktepaaire in  $\mathbb{S}^2(R)$  mit  $d_s(a, b) = d_s(x, y)$ . Wir müssen zeigen, dass es eine Isometrie  $\Phi \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2(R))$  gibt mit  $\Phi(x) = a$  und  $\Phi(y) = b$ . Da  $\mathbb{S}^2(R)$  homogen ist, können wir ohne Einschränkung  $a = x$  annehmen. Außerdem operiert

$\mathcal{O}(3)$  transitiv auf der Menge der Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  mit Norm  $R$ , wir können also weiter  $a = (0, 0, R)$  annehmen. Wir brauchen also eine Isometrie  $\Phi$  mit  $\Phi(0, 0, R) = (0, 0, R)$  und  $\Phi(y) = b$ , es muss also  $\Phi \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2(R))_a \cong \mathcal{O}(2)$  enthalten sein. Aus  $d_s(a, b) = d_s(x, y) = d_s(a, y)$  folgt  $b_3 = y_3$  und damit aus

$$\left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = b_3^2 + \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + y_3^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

auch

$$r := \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|.$$

Da  $\mathcal{O}(2)$  transitiv auf Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  mit Norm  $r$  operiert, gibt es eine solche Isometrie  $\Phi \in \mathcal{O}(2)$  mit  $\Phi(y_1, y_2) = (b_1, b_2)$  und  $\Phi(b_3) = b_3 = y_3$ , insgesamt also  $\Phi(y) = b$ , was zu zeigen war.

(ii) Für  $\alpha + i\beta \in \mathbb{H}^2$  gilt mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

bereits  $T_A(i) = \alpha + i\beta$ , es bleibt noch zu zeigen, dass für  $z, w \in \mathbb{H}^2$  mit  $d_h(z, i) = d_h(w, i)$  eine Isometrie  $\Phi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  gibt mit  $\Phi(w) = z$  und  $\phi(i) = i$ . Wir wissen bereits

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R})_i \cong \text{PO}(2).$$

Es sind also  $z, w$  auf dem hyperbolischen Kreis mit Radius  $r := d_h(z, i) = d_h(w, i)$  um  $i$ , man kann also  $z$  mit einer Drehung um  $i$  (welche  $i$  selbst fix lässt) auf  $w$  abbilden. Dies wollen wir im folgenden präzisieren. Betrachte dazu für  $P := ie^r$  die  $\text{PO}(2)$ -Bahn

$$\begin{aligned} \text{PO}(2) \cdot ie^r &= \left\{ \frac{aie^r + b}{-bie^r + a} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(aie^r + b)(a + bie^r)}{b^2e^{2r} + a^2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{-abe^{2r} + a^2ie^r + b^2ie^r + ab}{b^2e^{2r} + a^2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{ab(1 - e^{2r}) + ie^r}{b^2e^{2r} + a^2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{ab(1 - e^{2r}) + ie^r}{a^2(1 - e^{2r}) + e^{2r}} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{e^r - e^{-r}}{2}(u + iv) + \frac{e^r + e^{-r}}{2}i \mid u^2 + v^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \sinh r(u + iv) + \cosh r \mid u^2 + v^2 = 1 \right\} \\
 &= B_r(i),
 \end{aligned}$$

wobei folgendermaßen substituiert wurde:

$$u = \frac{ab(1 - e^{2r})}{a^2(1 - e^{2r}) + e^{2r}}, \quad v = \frac{2e^{2r} - (1 + e^{2r})(a^2(1 - e^{2r}) + e^{2r})}{(e^{2r} - 1)(a^2(1 - e^{2r}) + e^{2r})}$$

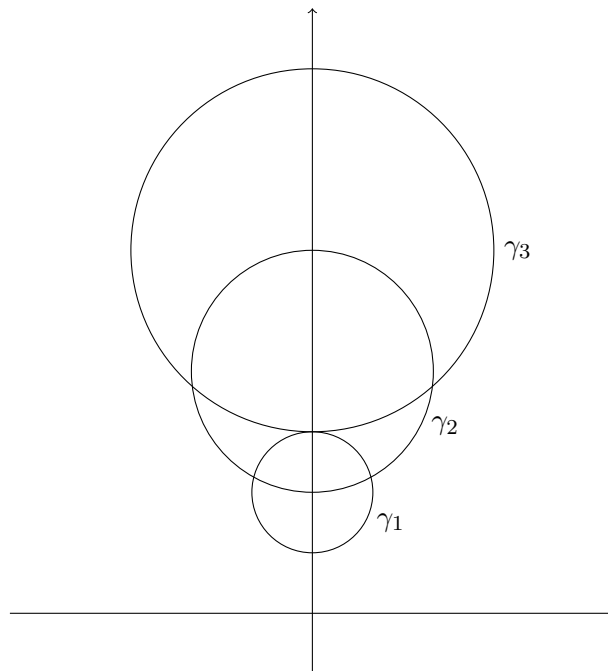
(eine aufwändige Rechnung zeigt, dass  $a^2 + b^2 = 1$  genau dann, wenn  $u^2 + v^2 = 1$ ). Daraus folgt, dass  $z$  und  $w$  in derselben Bahn sind und damit 2-Punkt-Homogenität von  $\mathbb{H}^2$ .  $\square$

**Aufgabe 6.3** Es sei  $R > 0$  und

$$\gamma_R : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} R \cos 2\pi t \\ R \sin 2\pi t + 2R \end{pmatrix}.$$

- (i) Skizzieren Sie das Bild von  $\gamma_R$  für  $R = 1, R = 2$  und  $R = 3$ .
- (ii) Berechnen Sie die euklidische Länge von  $\gamma_R$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass die hyperbolische Länge von  $\gamma_R$  unabhängig von  $R$  ist.

*Lösung.* (i) Wir erhalten folgendes Bild:



- (ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi R \sin 2\pi t \\ 2\pi R \cos 2\pi t \end{pmatrix},$$

also  $\|\gamma'(t)\|_e = 2\pi R$ . Für die euklidische Länge folgt also

$$L_e(\gamma_R) = \int_0^1 \|\gamma'_R(t)\|_e \, dt = \int_0^1 2\pi R \, dt = 2\pi R.$$

- (iii) Es gilt  $\text{im}(\gamma_R(t)) = R(2 + \sin 2\pi t)$ . Für die hyperbolische Länge gilt also

$$L_h(\gamma_R) = \int_0^1 \frac{\|\gamma'_R(t)\|_e}{\text{Im}(\gamma_R(t))} \, dt = \int_0^1 \frac{2\pi}{2 + \sin 2\pi t} \, dt,$$

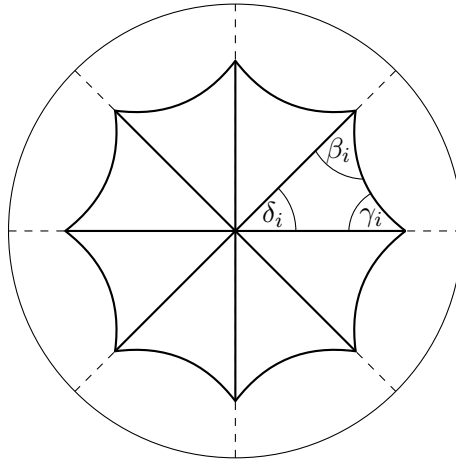
was nicht von  $R$  abhängt.

□

**Aufgabe 6.4** (i) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines hyperbolischen  $n$ -Gons.

(ii) Zeigen Sie, dass es ein hyperbolische Achteck gibt, dessen Innenwinkel all  $90^\circ$  betragen.

*Lösung.* (i) sei  $\Delta$  ein hyperbolisches  $n$ -Eck mit Innenwinkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und betrachte die  $n$  Dreiecke  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , die entstehen, wenn man die Eckpunkte mit einem beliebigen inneren Punkt (durch Geodätische) verbindet.



Bezeichne die Innenwinkel mit  $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ , wobei  $\beta_i + \gamma_{i-1} = \alpha_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$  und  $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi - \beta_i - \gamma_i - \delta_i \\ &= n\pi - \left( \sum_{i=1}^n \delta_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \beta_i + \gamma_i \right) \\ &= (n-2)\pi - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right). \end{aligned}$$

(ii) Betrachte das regelmäßige Achteck mit Ecken auf dem Rand im Unendlichen (im Einheitskreismodell). Dann gilt  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, 8\}$  und nach Teil (i)  $\mu(\Delta) = 6\pi$ . Verschiebe nun die Ecken gleichmäßig zum Ursprung. Dann gilt  $\mu(\Delta_8) \rightarrow 0$  und damit

$$\alpha := \alpha_i = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \alpha_i = \frac{6\pi - \mu(\Delta)}{8} \rightarrow \frac{3\pi}{4}.$$

Dieser Vorgang ist stetig und der Zwischenwertsatz liefert uns für jedes  $0 \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$  ein Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha$ , also insbesondere auch für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

## Übungsblatt 7

**Aufgabe 7.1** Beweisen Sie Satz 2.4.4: Für  $z, w \in \mathbb{H}^2$  gilt

(i)

$$d_h(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

(ii)

$$\cosh(d_h(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

(iii)

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}.$$

(iv)

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}.$$

(v)

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

*Lösung.* (iii) Wurde in der Vorlesung gezeigt.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) &= \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{|z - w|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\ &= \frac{\sqrt{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + |z - w|^2}}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\ &= \frac{\sqrt{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + (\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(w))^2}}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\ &= \frac{\sqrt{(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w))^2}}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}} \\ &= \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}. \end{aligned}$$

(v) Es gilt nach (iii) und (iv)

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right) = \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}d_h(z, w)\right)} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

(i) Mit (v) und der Identität  $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  gilt

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) &= 2 \operatorname{arctanh} \left( \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} \right) \\ &= 2 \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left( \frac{1}{2} d_h(z, w) \right) \right) \\ &= d_h(z, w). \end{aligned}$$

(ii) Schließlich gilt mit  $\cosh(2x) = 2 \sinh^2(x) + 1$

$$\cosh^2(d_h(z, w)) = \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} + 1,$$

was die letzte Formel beweist. □

**Aufgabe 7.2** (i) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$m : (\mathbb{H}^2, d_h) \longrightarrow (\mathbb{D}^2, d_h^*), \quad z \mapsto m(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

eine Isometrie ist.

(ii) Zeigen Sie des weiteren die folgenden Formeln für die Metrik  $d_h^*$ :

(1) Für  $0 < r < 1$  gilt  $d_h^*((0, 0), (0, r)) = \ln \frac{1+r}{1-r}$ .

(2) Für  $z, w \in \mathbb{D}^2$  gilt

$$\cosh^2 \left( \frac{1}{2} d_h^*(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

*Lösung.* (i) Wir zeigen, dass für jeden Weg  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$  gilt  $L_h(\gamma) = L_h^*(m \circ \gamma)$ , also

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt \stackrel{!}{=} \int_a^b \frac{2\|(m \circ \gamma)'(t)\|}{1 - \|(m \circ \gamma)(t)\|^2} dt = L_h^*(m \circ \gamma),$$

indem wir Gleichheit der Integranden zeigen. Mit der Kettenregel gilt  $(m \circ \gamma)'(t) = m'(\gamma(t))\gamma'(t)$ .

$m$  abgeleitet ergibt

$$m'(z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{iz + 1}{z + i} \right) = \frac{i(z + i) - (iz + 1)}{(z + i)^2} = -\frac{2}{(z + i)^2},$$

es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{2\|(m \circ \gamma)'(t)\|}{1 - \|(m \circ \gamma)(t)\|^2} &= \frac{2\left\| \frac{-2}{(\gamma(t) + i)^2} \gamma'(t) \right\|}{1 - \left\| \frac{i\gamma(t) + 1}{\gamma(t) + i} \right\|^2} \\ &= \frac{4\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma(t) + i\|^2 - \|i\gamma(t) + 1\|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\|\gamma'(t)\|}{x(t)^2 + (y(t) + 1)^2 - (x(t)^2 + (y(t) - 1)^2)} \\
&= \frac{4\|\gamma'(t)\|}{4\gamma(t)} \\
&= \frac{\|\gamma'(t)\|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))},
\end{aligned}$$

woraus nun die Behauptung folgt.

(ii) (1) Es gilt  $m(i) = (0, 0)$  sowie

$$m\left(\frac{1+r}{1-r}i\right) = \frac{-\frac{1+r}{1-r} + 1}{\frac{1+r}{1-r}i + i} = \frac{-1-r+1-r}{(1+r)i + i - ir} = -\frac{2r}{2i} = ri = (0, r),$$

also

$$d_h^*((0, 0), (0, r)) = d_h^*\left(m(i), m\left(\frac{1+r}{1-r}i\right)\right) = d_h\left(i, \frac{1+r}{1-r}i\right) = \ln \frac{1+r}{1-r},$$

was zu zeigen war.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}
\cosh^2(d_h^*(z, w)) &= \cosh^2\left(d_h^*\left(m\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right), m\left(\frac{-iw+1}{w-i}\right)\right)\right) \\
&= \cosh^2\left(d_h\left(\frac{-iz+1}{z-i}, \frac{-iw+1}{w-i}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\left|\frac{-iz+1}{z-i} - \overline{\left(\frac{-iw+1}{w-i}\right)}\right|}{2\sqrt{\operatorname{Im}\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right)\operatorname{Im}\left(\frac{-iw+1}{w-i}\right)}}\right)^2
\end{aligned}$$

Zwischenrechnungen ergeben

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-iz+1}{z-i} - \frac{i\bar{w}+1}{\bar{w}+i}\right| &= \left|\frac{(-iz+1)(\bar{w}+i) - (i\bar{w}+1)(z-i)}{(z-i)(\bar{w}+i)}\right| \\
&= \frac{2|1-z\bar{w}|^2}{|z-i||\bar{w}+i|} \\
&= \frac{2|1-z\bar{w}|^2}{|z-i||w-i|}
\end{aligned}$$

sowie mit  $z = x + iy$



$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \left( \frac{-iz + 1}{z - i} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{-i(x + iy) + 1}{x + iy - 1} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left( \frac{y + 1 - ix}{x + i(y - 1)} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left( \frac{(y + 1 - ix)(x - i(y - 1))}{x^2 + (y - 1)^2} \right) \stackrel{[6pt]}{=} \frac{1 - x^2 y^2}{x^2 + (y - 1)^2} \\
 &= \frac{1 - |z|^2}{|z - i|^2},
 \end{aligned}$$

ebenso

$$\operatorname{Im} \left( \frac{-iz + 1}{z - i} \right) = \frac{1 - |w|^2}{|w - i|^2}.$$

Diese liefern dann

$$\cosh^2(d_h^*(z, w)) = \left( \frac{\left| \frac{-iz+1}{z-i} - \overline{\left( \frac{-iw+1}{w-i} \right)} \right|}{2\sqrt{\operatorname{Im} \left( \frac{-iz+1}{z-i} \right) \operatorname{Im} \left( \frac{-iw+1}{w-i} \right)}} \right)^2 = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)},$$

was zu zeigen war. □

**Aufgabe 7.3** (i) Beweisen Sie, dass hyperbolische Kreise euklidische Kreise (mit anderen Radien und anderen Mittelpunkten) sind.

(ii) Berechnen Sie außerdem den hyperbolischen Radius für einen euklidischen Kreis in  $\mathbb{D}^2$  mit Zentrum in  $(0, 0)$  und euklidischem Radius  $\rho$ .

*Lösung.* (i) Sei  $K$  ein hyperbolischer Kreis in  $\mathbb{H}^2$  um  $i$  mit Radius  $\ln R$  für ein  $R > 1$ . Sei  $x = x + iy \in \mathbb{H}^2$  ein beliebiger Punkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 z \in K &\iff d_h(i, z) = \ln R = d_h(i, iR) \\
 &\iff \frac{|i - z|}{|i - \bar{z}|} = \frac{|i - iR|}{|i + iR|} \\
 &\iff \frac{|i - z|^2}{|i - \bar{z}|^2} = \frac{|i - iR|^2}{|i + iR|^2} \\
 &\iff |i||1 + R|^2|i - z|^2 = |i||1 - R|^2|i - \bar{z}|^2 \\
 &\iff (1 + R)^2(1 + iz - i\bar{z} + z\bar{z}) = (1 - R)^2(1 + z\bar{z} - iz + i\bar{z}) \\
 &\iff (1 + R^2)(iz - i\bar{z}) + 2R(1 + z\bar{z}) = (1 - R^2)(i\bar{z} - iz) - 2R(1 + z\bar{z}) \\
 &\iff 4Rz\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4R = 0,
 \end{aligned}$$

was einer euklidischen Kreisgleichung entspricht.

- (ii) Im Einheitskreismodell haben die Punkte  $\rho$ ,  $i\rho$  und  $-\rho$  Abstand  $\ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$  vom Ursprung. Betrachtet man nun einen hyperbolischen Kreis um  $i$  mit Radius  $r$  in  $\mathbb{H}^2$ , so liegen die beiden Punkte  $ie^r$  und  $ie^{-r}$  auf dem Kreis. Dieser entspricht also einem euklidischen Kreis mit Mittelpunkt  $\frac{e^r + e^{-r}}{2} = \cosh r$  und Radius  $\frac{e^r - e^{-r}}{2} = \sinh r$ .  $\square$

## Übungsblatt 8

**Aufgabe 8.1** Zeigen Sie: Die Geodätischen in  $(\mathbb{D}^2, d_h^*)$  sind Segmente von euklidischen Kreisen Orthogonal zum Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$ .

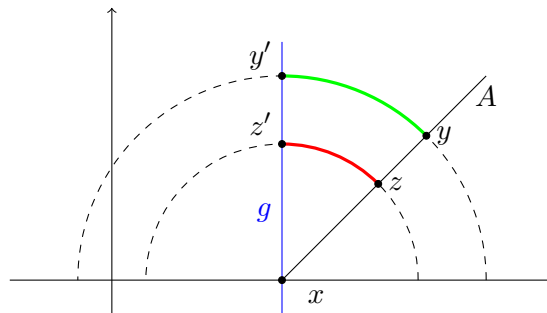
*Lösung.* Sei  $g$  eine Geodätische in  $(\mathbb{D}^2, d_h^*)$ . Sei  $m : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  die übliche Isometrie und betrachte  $m^{-1}(g)$ . Dann ist  $m^{-1}(g)$  eine Geodätische in  $(\mathbb{H}^2, d_h)$ , also der Schnitt von  $\mathbb{H}^2$  mit einem verallgemeinerten Kreis in  $\overline{\mathbb{C}}$ , der senkrecht auf  $\overline{\mathbb{R}}$  ist. Da  $g = m(m^{-1}(g))$  und  $m \in \text{Möb}$  kreistreu und konform ist, ist auch  $g$  Schnitt eines verallgemeinerten Kreises in  $\overline{\mathbb{C}}$  mit  $\mathbb{D}^2$ , der senkrecht auf  $m(\overline{\mathbb{R}}) = \mathbb{S}^1$  ist.  $\square$

**Aufgabe 8.2** Zeigen Sie, dass Äquidistanten zu einer hyperbolischen Geodätischen  $h$ , d.h. Kurven bestehend aus Punkten mit konstantem Abstand zu  $h$  keine hyperbolischen Geodätischen sind.

*Lösung.* Sei  $g$  zunächst eine Parallele zur imaginären Achse mit Fußpunkt  $x \in \mathbb{R}$  und  $a$  eine Äquidistante zu  $g$  mit Abstand  $\delta > 0$ . Sei  $y \in \mathbb{H}^2$  mit  $d_h(y, g) = \delta$ , also ohne Einschränkung  $y \in a$ . Sei  $m_\lambda$  für  $\lambda > 0$  diejenige Möbiustransformation, welche zentrisch um  $x$  mit dem Faktor  $\lambda$  streckt (also  $m_\lambda(z) = \lambda(z - x)$ ). Betrachte den Strahl

$$A := \{m_\lambda(y) \mid \lambda > 0\}$$

der Strahl von  $x$  durch  $y$ . Wir behaupten jetzt, dass  $A$  äquidistant zu  $g$  ist.



Der Abstand  $\delta$  von  $y$  zu  $g$  wird realisiert vom grünen Kreissegment. Ist  $z \in A$  nun beliebig, so wird der Abstand von  $z$  zu  $g$  realisiert vom roten Kreissegment. Die Längen dieser Segmente ist nach Lemma 2.10.3 ist jedoch identisch, daher ist  $A = a$  eine Äquidistante zu  $g$  mit Abstand  $\delta$ , aber nicht mehr senkrecht zu  $\overline{\mathbb{R}}$ , also keine Geodätische. Ist  $h$  nun eine beliebige Gerade, so wähle eine Möbiustransformation  $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H}^2)$  mit  $m(h) = g$ . Dann ist für jede Äquidistante  $a$  von  $g$  auch  $m^{-1}(a)$  eine Äquidistante zu  $h$  und keine Geodätische, da sonst auch  $a = m(m^{-1}(a))$  eine Geodätische wäre, was nach obiger Erkenntnis falsch ist.  $\square$

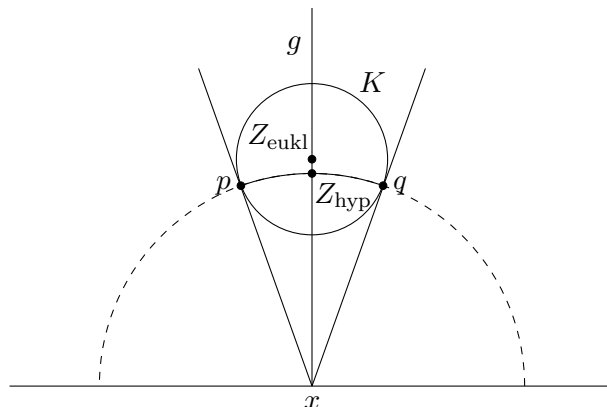
**Aufgabe 8.3** (i) Beweisen Sie Lemma 2.10.4: Sei  $g$  eine Geodätische in  $\mathbb{H}^2$  und  $p \in \mathbb{H}^2$ ,  $p \notin g$ . Dann gilt für den Lotfußpunkt  $p' \in g$

$$d_h(p, g) = \min_{q \in g} d_h(p, q) = d_h(p, p').$$

(ii) Um den hyperbolischen Mittelpunkt eines Kreises  $K$  in  $\mathbb{H}^2$  zu ermitteln, kann man folgende Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) durchführen:

- (1) Man zeichne die vertikale Geodätische  $g$  durch den euklidischen Mittelpunkt  $Z_{\text{eukl}}$  von  $K$  und erhält den Schnittpunkt  $x$  von  $g$  mit der reellen Achse.
- (2) Man zeichne die beiden Tangenten an  $K$ , die durch  $x$  laufen und erhält die beiden Berührungspunkte  $p, q$  auf  $K$ .
- (3) Man zeichne die hyperbolische Geodätische  $h$  durch  $p$  und  $q$  und erhält den Schnittpunkt  $z$  von  $h$  und  $g$ .

Zeigen Sie, dass  $z$  der hyperbolische Mittelpunkt  $Z_{\text{hyp}}$  von  $K$  ist.



*Lösung.* (i) Sei  $p' \in g$  und betrachte das Dreieck  $\Delta = \Delta(p'pq)$  mit Innenwinkel  $\alpha$  bei  $q$ . Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\sinh d_h(p, q)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sinh d_h(p, p')}{\sin \alpha},$$

also

$$d_h(p, p') = \sin \alpha \sinh d(p, p') \leq d_h(p, q),$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Es gilt:  $p$  und  $q$  sind die beiden einzigen Punkte auf  $K$  mit maximalem Abstand zu  $g$  (denn  $p$  und  $q$  haben beide als einziges maximalen Polarwinkel) und  $Z_{\text{hyp}}$  ist der Lotfußpunkt von  $p$  bzw.  $q$  auf  $g$ . Sei nun  $w \neq Z_{\text{hyp}}$  auf  $g$  und innerhalb von  $K$ . Angenommen  $w$  ist der hyperbolische Mittelpunkt von  $K$ . Wähle  $r \in K$ , sodass  $w$  der Lotfußpunkt von  $r$  ist.

Damit ist

$$d_h(g, p) > d_h(g, r) \stackrel{(i)}{=} d_h(w, r) = d_h(w, p) > d_h(g, p),$$

ein Widerspruch. Ist  $z$  außerhalb von  $K$ , so ist  $z$  sicherlich nicht der hyperbolische Mittelpunkt von  $K$ . Damit ist  $Z_{\text{hyp}}$  der hyperbolische Mittelpunkt, was zu zeigen war.  $\square$

## Übungsblatt 9

**Aufgabe 9.1** (i) Zeigen Sie, dass das Flächenelement für das Kreisscheibenmodell  $(\mathbb{D}^2, d_h^*)$  in Polarkoordinaten  $r, \theta$  gegeben ist durch

$$dA = \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\theta.$$

- (ii) Berechnen Sie den hyperbolischen Umfang  $L_h(\partial B_R)$  einer hyperbolischen Kreisscheibe mit Radius  $R > 0$ .
- (iii) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt  $\mu(B_R)$  einer hyperbolischen Kreisscheibe  $B_R$  mit Radius  $R > 0$ .

*Lösung.* (i) In  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  gilt für  $A \subseteq \mathbb{H}^2$

$$\mu(A) = \int_A dA = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy,$$

also  $dA(x, y) = \frac{1}{y^2}$ . Fasse die Isometrie

$$m : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto \frac{-iz + 1}{z - i}$$

als Funktion

$$m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + (1-y)^2} (2x, 1 - x^2 - y^2)$$

auf. Dann gilt

$$(dA \circ m)(x, y) = \frac{(x^2 + (1-y)^2)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

und

$$Dm(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial m_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial m_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial m_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + (1-y)^2)^2} \begin{pmatrix} 2(y-1)^2 - 2x^2 & 4x(y-1) \\ 4x(y-1) & 2(y-1)^2 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \det Dm(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + (1-y)^2)^4} ((2(y-1)^2 - 2x^2)^2 - (4x(y-1))^2) \\ &= \frac{1}{(x^2 + (1-y)^2)^4} (4(x^2 + (1-y)^2)^2) \\ &= \frac{4}{(x^2 + (1-y)^2)^2}. \end{aligned}$$

Die Transformationsformel liefert nun für  $A \subseteq \mathbb{D}^2$

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(m^{-1}(A)) \\ &= \int_{m^{-1}(A)} dA(x, y) \\ &= \int_A m(dA(x, y)) |\det Dm(x, y)| \, dx dy \\ &= \int_{m(A)} \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \, dx dy,\end{aligned}$$

also  $dA = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$ . Übergang zu Polarkoordinaten liefert die Behauptung.

- (ii) Wähle ohne Einschränkung  $B_R = B_R(0) \subseteq \mathbb{D}^2$ . In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der hyperbolische Radius  $R$  dem euklidischen Radius

$$\rho = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}$$

entspricht. Definiere nun

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{D}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\rho \sin t \\ \rho \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}L_h(\partial B_R) = L_h(c) &= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{(-\rho \sin t)^2 + (\rho \cos t)^2}}{1 - ((\rho \cos t)^2 + (\rho \sin t)^2)} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{1 - \rho^2} \, dt \\ &= \frac{4\pi\rho}{1 - \rho^2}.\end{aligned}$$

- (iii) Wir wählen denselben Ball und rechnen

$$\begin{aligned}A_h(B_R) = \mu(B_R(0)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{4r}{(1 - r^2)^2} \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{?}{1 - r^2} \right]_0^\rho \, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{1 - \rho^2} - 4\pi \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{1 - \rho^2}.\end{aligned}$$

Für  $R \rightarrow \infty$  gilt  $\rho \rightarrow 1$  und damit  $\rho^2 \sim \rho$ . Für die isoperimetrische Konstante gilt dann

$$\frac{\mu(B_R(0))}{L(\partial B_R)} = \rho \rightarrow 1,$$

was wir in der Vorlesung bereits gesehen haben.  $\square$

**Aufgabe 9.2** Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines Fundamentalbereichs eine Invariante der Gruppe  $\Gamma$  ist: Es Seien  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{H}^2$  zwei Fundamentalbereiche für  $\Gamma$ , sodass die Ränder hyperbolischen Flächeninhalt Null haben und es gelte  $\mu(P_1) < \infty$ . Dann gilt  $\mu(P_1) = \mu(P_2)$ .

*Lösung.* Da  $\mu(\partial P_i) = 0$ , gilt  $\mu(P_i) = \mu(\overset{\circ}{P}_i)$  für  $i = 1, 2$ . Es gilt weiter

$$P_1 \supseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (P_1 \cap \gamma \overset{\circ}{P}_2).$$

Da  $P_2$  ein Fundamentalbereich für  $\Gamma$  ist, gilt

$$\gamma \overset{\circ}{P}_2 \cap \tilde{\gamma} \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$$

für alle  $\gamma \neq \tilde{\gamma} \in \Gamma$ , es folgt also

$$\mu(P_1) \geq \mu\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} P_1 \cap \gamma \overset{\circ}{P}_2\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu\left(P_1 \cap \gamma \overset{\circ}{P}_2\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma^{-1}(P_1) \cap \overset{\circ}{P}_2).$$

Da auch  $P_1$  ein Fundamentalbereich für  $\Gamma$  ist, gilt  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(P_1) = \mathbb{H}^2$  und damit

$$\mu(P_1) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma^{-1}(P_1) \cap \overset{\circ}{P}_2) = \mu\left(\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(P_1)\right) \cap \overset{\circ}{P}_2\right) = \mu(\overset{\circ}{P}_2) = \mu(P_2).$$

Analog zeigt man die umgekehrte Ungleichung, woraus die Behauptung dann folgt.  $\square$

**Aufgabe 9.3** Bestimmen Sie den Flächeninhalt des kleinsten hyperbolischen Dreieck, dessen Innenwinkel von der Form  $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$  mit  $k, l, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  sind.

*Lösung.* Mit der Bedingung

$$\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} < \pi$$

und der Flächenformel

$$\mu(\Delta) = \pi - \frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{l} - \frac{\pi}{m} = \pi \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right)$$

für hyperbolische Dreiecke findet man durch sukzessives Probieren  $k = 2, l = 3$  und  $m = 7$ .  $\square$



## Übungsblatt 10

**Aufgabe 10.1** Sei  $g \subseteq \mathbb{H}^2$  eine hyperbolische Geodätische. Die *Spiegelung an  $g$*  ist die Abbildung  $\sigma_g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ , welche durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: Für alle  $z \in \mathbb{H}^2$  trifft das (eindeutig bestimmte) geodätische Segment  $\overline{z\sigma_g(z)}$  von  $z$  nach  $\sigma_g(z)$  die Geodätische  $g$  orthogonal und wird von dieser halbiert. Zeigen Sie:

- (i) Ist  $g_0$  die positive imaginäre Achse, so gilt  $\sigma_{g_0}(z) = -\bar{z}$  für alle  $z \in \mathbb{H}^2$ .
- (ii) Ist  $g$  eine beliebige Geodätische und  $\phi$  eine hyperbolische Isometrie mit  $g = \phi(g_0)$ , dann gilt  $\sigma_g = \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$  und dies ist unabhängig von der Wahl von  $\phi$ .

*Lösung.* (i) Es sei  $z = (\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta)$  in Polarkoordinaten gegeben. Dann ist der Spiegelpunkt  $-\bar{z} = (-\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) = (\lambda \cos \pi - \theta, \lambda \sin \pi - \theta)$  und das geodätische Segment zwischen  $z$  und  $-\bar{z}$  ist gerade der parametrisierte Halbkreis mit Zentrum 0 und Radius  $\lambda$ , schneidet  $g_0$  also im Punkt  $m := (0, \lambda) = (\lambda \cos \frac{\pi}{2}, \lambda \sin \frac{\pi}{2})$ . Dann gilt Nach Lemma 2.10.3

$$d_h(m, z) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} (1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \frac{\pi}{2})} = \ln \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

und wegen

$$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

folgt

$$d_h(m, z) = \ln \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \ln \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \ln \frac{\sin \pi - \theta (1 + \cos \frac{\pi}{2})}{\sin \frac{\pi}{2} (1 + \cos \pi - \theta)} = d_h(-\bar{z}, m),$$

$g$  halbiert also die Geodätische. Weiter ist der Tangentialvektor an der Geodätischen senkrecht zu  $g_0$ , denn ist  $\overline{-\bar{z}z}$  parametrisiert durch  $c: [\theta, \pi - \theta] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $t \mapsto \lambda(\sin t + i \cos t)$ , so gilt offenbar  $m = c(0)$  und  $c'(0) = -1 \perp i \parallel g_0$ .

- (ii) Sei nun  $g$  beliebig und  $\phi$  eine hyperbolische Isometrie mit  $\phi(g_0) = g$ . Für  $z \in \mathbb{H}^2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{z\sigma_g(z)} \perp g &\Longleftrightarrow \overline{\phi^{-1}(z)\phi^{-1}(\sigma_g(z))} \perp \phi^{-1}(g) \\ &\Longleftrightarrow \overline{\phi^{-1}(z)\phi^{-1}(\sigma_g(z))} \perp g_0 \\ &\Longleftrightarrow \phi^{-1}(\sigma_g(z)) = \sigma_{g_0}(\phi^{-1}(z)) \\ &\Longleftrightarrow \phi^{-1} \circ \sigma_g = \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \sigma_g = \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}, \end{aligned}$$

wobei (i) und die Konformität von  $\phi$  benutzt wurde. Wegen der Längentreue von  $\phi$  gilt

außerdem  $d(z, g) = d(\sigma_g(z), g)$  genau dann, wenn  $d(\phi^{-1}(z), g_0) = d(\phi^{-1}(\sigma_g(z)), g_0) = d(\sigma_{g_0}(\phi^{-1}(z)), g_0)$ , was wir in (i) bereits gezeigt haben. Auch die Winkeltreue (also der senkrechte Schnitt) folgt aus der Konformität. Es bleibt noch die Unabhängigkeit von  $\phi$  zu zeigen. Sei dazu  $\psi \in \text{Ism}(\mathbb{H}^2)$  eine weitere hyperbolische Isometrie mit  $\psi(g_0) = g$ . Wir müssen zeigen, dass dann

$$\phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1} = \psi \circ \sigma_{g_0} \circ \psi^{-1}.$$

Betrachte dazu  $m := \psi^{-1} \circ \phi$ . Dann gilt  $m(g_0) = g_0 = i\mathbb{R}$ . Welche Möbiustransformationen erhalten  $i\mathbb{R}$ ? Sicher zum einen  $C(z) = -\bar{z}$ . Für die weiteren machen wir den Ansatz

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit  $m(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ . Dann erhalten wir zwei Fälle:

**Fall (a)**  $m(0) = \frac{b}{d} = 0$ , also  $b = 0$  und  $d \neq 0$ . Damit ist  $m_1(z) = \frac{az}{cz+d}$ . Schreibe  $m_1(i) = ui$  für ein  $u > 0$ . Dann ist

$$ui = m_1(i) = \frac{ai}{ci + d},$$

woraus  $c = 0$  folgt, also  $m_1(z) = \frac{a}{d}z$ .

**Fall (b)**  $m(\infty) = \frac{a}{c} = \infty$ , also  $d = 0$  und  $b \neq 0$ . Damit ist  $m_2(z) = \frac{az+b}{cz}$ . Schreibe  $m_2(i) = vi$  für ein  $v > 0$ . Dann ist

$$vi = m_2(i) = \frac{ai + b}{ci},$$

woraus  $a = 0$  folgt, also  $m_2(z) = \frac{b}{cz}$ .

Wir sehen nun

$$(C \circ \sigma_{g_0} \circ C^{-1})(z) = (C \circ \sigma_{g_0})(-\bar{z}) = C(z) = -\bar{z} = \sigma_{g_0}(z),$$

$$(m_1 \circ \sigma_{g_0} \circ m_1^{-1})(z) = (m_1 \circ \sigma_{g_0})\left(\frac{d}{a}z\right) = m_1\left(-\frac{d}{a}\bar{z}\right) = -\bar{z} = \sigma_{g_0}(z),$$

$$(m_2 \circ \sigma_{g_0} \circ m_2^{-1})(z) = (m_2 \circ \sigma_{g_0})\left(\frac{b}{cz}\right) = m_2\left(-\frac{b}{c\bar{z}}\right) = -\bar{z} = \sigma_{g_0}(z),$$

also ist auch  $m \in \langle C, m_1, m_2 \rangle$  und damit  $m = m \circ \sigma_{g_0} \circ m^{-1}$ . Damit folgt

$$\phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1} = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \phi) \circ \sigma_{g_0} \circ (\phi^{-1} \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \sigma_{g_0} \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \psi \circ \sigma_{g_0} \circ \psi^{-1},$$

was zu zeigen war. □

**Aufgabe 10.2** Bestimmen Sie die Dreiecksgruppe  $\Gamma_\Delta$  für das Fundamentaldreieck  $\Delta = (2, 3, 7)$  (Schwarz Dreieck).

*Lösung.*  $\Delta$  ist das Dreieck mit Innenwinkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ . Nach Definition ist

$$\Gamma_\Delta = \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \mid \sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, (\sigma_a \sigma_b)^7, (\sigma_b \sigma_c)^2, (\sigma_a \sigma_c)^3 \rangle.$$

**Aufgabe 10.3** (i) Bestimmen Sie einen Dirichlet-Fundamentbereich  $D(\Gamma_1)$  für die Gruppenoperation von  $\Gamma_1 = 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{E}^2$  durch Translationen.

(ii) Bestimmen Sie einen Dirichlet-Fundamentbereich  $D(\Gamma_2)$  für die Gruppenoperation von  $\Gamma_2 = \langle z \mapsto z + a \rangle$  für  $a > 0$  auf  $\mathbb{H}^2$ .

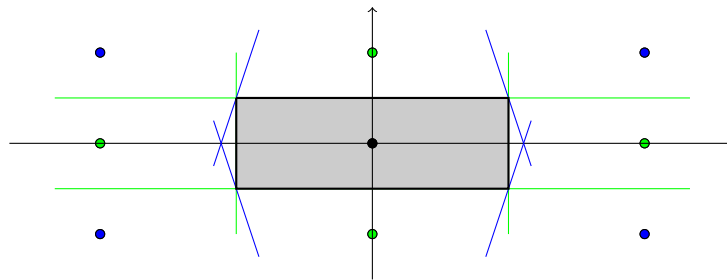
(iii) Bestimmen Sie einen Dirichlet-Fundamentbereich  $D(\Gamma_3)$  für die Gruppenoperation von  $\Gamma_3 = \left\langle z \mapsto \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}z} \right\rangle$  auf  $\mathbb{H}^2$ .

*Lösung.* In allen Teilaufgaben wollen wir Satz 3.1.3 benutzen.

(i) Es wird der Punkt  $p = (0, 0)$  offenbar von keinem Gruppenelement  $(z, w) \in 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  fixiert, wir können also durch

$$D(\Gamma_1) = D_p(\Gamma_1) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid d_e((x, y), (0, 0)) \leq d_e((x+z, y+w), (0, 0)) \text{ für alle } (z, w) \in \Gamma_1\}$$

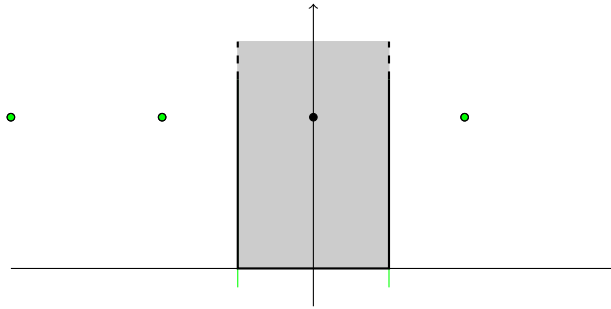
einen Fundamentbereich bestimmen. Wie in Beispiel 3.1.4 erhalten wir durch Mittelebenenkonstruktion



gerade

$$D(\Gamma_1) = \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \times \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

(ii) Als nicht fixierten Punkt wählen wir  $p = i$ . Durch Mittelebenenkonstruktion erhalten wir



Das gibt uns

$$D(\Gamma_2) = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times (0, \infty) = \left\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |\operatorname{Re}(Z)| \leq \frac{a}{2}\right\}.$$

(iii) Wegen

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \in \operatorname{SO}(2) = \operatorname{Stab}_{\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)}(i)$$

ist, wird  $i$  von allen  $\gamma \in \Gamma_3$  fixiert,  $i$  liegt also auf dem Rand aller Translate jedes Fundamentalbereichs. Weiter ist  $A^{12} = I_2$  und  $A^k \neq I_2$  für  $0 \leq k < 12$ , also  $|\Gamma_3| = 12$ , ein Fundamentalbereich besitzt also 12 Translate. Wähle  $p = 2i$ . Die Punkte  $\gamma \cdot p$  liegen auf dem Kreis um  $i$  und sind Schnittpunkte von Geodätischen durch  $i$  mit Winkeln  $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \dots$  zu  $i\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Durch Mittelebenenkonstruktion erhält man wieder einen Fundamentalbereich. Geht man stattdessen via

$$m : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2, \quad z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

zum Einheitskreismodell über, so ist  $q = m(p) = \frac{1}{3}i$  und  $0 = m(i)$ , die Geodätischen von oben verlaufen also durch den Ursprung, sind also Geraden. Der Ein Fundamentalbereich ist also durch das Zwölftel des Einheitskreises gegeben.  $\square$

# Übungsblatt 11

**Aufgabe 11.1** Es sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$  und

$$\Gamma(r) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv r \right\}$$

Zeigen Sie, dass  $\Gamma(r)$  für  $r \geq 3$  torsionsfrei ist, also keine Untergruppen endlicher Ordnung besitzt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie: Ist  $A = I + rB \in \Gamma(r)$  und  $A^m = I_2$ , so gilt  $rd \mid m$ , wobei  $d$  den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge von  $B$  ist.
- (ii) Zeigen Sie weiter, dass für jedes nichttriviale Element  $A \in \Gamma(r)$  gilt  $r = \mathrm{ord}(A)$ .

*Lösung.* (i) Sei  $\tilde{B} := \frac{1}{\mathrm{ggT}(B)}B = \frac{1}{d}B$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} I_2 = A^m &= (I_2 + rB)^m \\ &= (I_2 + rd\tilde{B})^m \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} I_2^{m-k} \tilde{B}^k (rd)^k \\ &= I_2 + rdm\tilde{B} + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} r^k d^k \tilde{B}^k \\ &= I_2 + rdm\tilde{B} + (r^2 d^2) \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} r^{k-2} d^{k-2} \tilde{B}^k \\ &\equiv I_2 + rdm\tilde{B} \pmod{r^2 d^2}, \end{aligned}$$

also  $rdm\tilde{B} \equiv 0 \pmod{r^2 d^2}$ . Da  $\mathrm{ggT}(\tilde{B}) = 1$ , folgt  $rdm \equiv 0 \pmod{r^2 d^2}$ , also  $r^2 d^2 \mid rdm$  und damit  $rd \mid m$ , was zu zeigen war.

- (ii) Es gelte nun  $A^m = I_2$  für  $A \in \Gamma(r)$ ,  $A \neq I_2$ . Sei zunächst  $m = p$  eine Primzahl und  $r = 2$ . Dann folgt nach (i)  $d = 1$  und damit  $r = m = 2 = \mathrm{ord}(A)$ . Sei nun  $r \geq 3$ , also  $m = p = r \geq 3$  und wieder  $d = 1$ . Dann ist  $mrd = r^2$ . Außerdem gilt  $r \mid \binom{m}{k}$  für  $m \neq k \neq 0$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} I_2 = A^m &= I_2 + rdm\tilde{B} + r^2 d^2 \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} r^{k-2} d^{k-2} \tilde{B}^k \\ &= I_2 + r^2 \tilde{B} + r^2 d^2 \binom{m}{2} \tilde{B}^2 + (r^2 d^2) \sum_{k=3}^m \binom{m}{k} r^{k-2} d^{k-2} \tilde{B}^k \end{aligned}$$

Dies gibt modulo  $r^3 d^3$  gerade  $r^2 \tilde{B} \equiv 0 \pmod{r^3}$ , ein Widerspruch zu  $\text{ggT}(\tilde{B}) = 1$ . Ist  $m$  nun keine Primzahl, so gilt für jeden Primfaktor  $p$  von  $m$

$$I_2 = A^m = \left(A^{\frac{m}{p}}\right)^p,$$

ein Widerspruch zur obigen Betrachtung. □

**Aufgabe 11.2** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.3.1:

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\beta : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}, 0 \right)$$

eine Isometrie ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

eine Isometrie ist.

*Lösung.* Wir verfahren in völliger Analogie zum Beweis, dass  $\alpha$  eine Isometrie ist und zeigen, dass  $\beta$  und  $\gamma$  Weglängen erhalten.

(i) Sei also

$$c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad t \mapsto c(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)) =: (x_1, \dots, x_{n+1})$$

eine differenzierbare Kurve in  $\mathbb{K}^n$  sowie

$$\beta \circ c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}^n, \quad t \mapsto \left( \frac{x_1(t)}{1+x_{n+1}(t)}, \dots, \frac{x_n(t)}{1+x_{n+1}(t)}, 0 \right) := (y_1, \dots, y_{n+1})$$

die Bildkurve. Es gilt

$$L_{\mathbb{K}^n}(c) = \int_0^1 \frac{1}{x_{n+1}(t)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} x'_k(t)^2} \, dt =: \int_0^1 A(t) \, dt$$

sowie

$$L_{\mathbb{L}^n}(\beta \circ c) = \int_0^1 \frac{2}{1 - \sum_{k=1}^n y_k(t)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y'_k(t)^2} \, dt =: \int_0^1 B(t) \, dt,$$

wir zeigen also Gleichheit der Integranden. Es gilt

$$y'_k = \frac{dy_k}{dt} = \frac{x'_k(1+x_{n+1}) - x'_{n+1}x_k}{(1+x_{n+1})^2} = \frac{1}{1+x_{n+1}} \left( x'_k - \frac{x_k x'_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right).$$

Weiter erhalten wir aus  $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1$  durch Ableiten

$$x_{n+1}x'_{n+1} = - \sum_{k=1}^n x_k x'_k.$$

Das Quadrat des zweiten Integranden ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} B(t)^2 &= \left( \frac{2}{1 - \sum_{k=1}^n y_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (y'_k)^2} \right)^2 \\ &= \frac{4}{\left(1 - \sum_{k=1}^n y_k^2\right)^2} \left( \sum_{k=1}^n (y'_k)^2 \right) \\ &= \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{1+x_{n+1}^2} \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1+x_{n+1}} \left( x'_k - \frac{x_k x'_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right) \right)^2 \\ &= \frac{4}{\left(1 - \frac{1-x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}^2}\right)^2} \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left( \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{(x'_{n+1})^2 x_k^2}{(1+x_{n+1})^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2x_k x'_k x'_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right) \\ &= \frac{4}{\left(\frac{2x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}}\right)^2} \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \left( \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + (x'_{n+1})^2 \left( \frac{1-x_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})^2} + \frac{2x_{n+1}}{1+x_{n+1}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left( \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + (x'_{n+1})^2 \left( \frac{1-x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 2x_{n+1}^2}{(1+x_{n+1})^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left( \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + (x'_{n+1})^2 \frac{(1+x_{n+1})^2}{(1+x_{n+1})^2} \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left( \sum_{k=1}^{n+1} (x'_k)^2 \right) \\ &= A(t)^2 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit für  $p, q \in \mathbb{K}^n$

$$d_{\mathbb{K}^n}(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{K}^n)} L_{\mathbb{K}^n}(c) = \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{K}^n)} L_{\mathbb{D}^n}(\beta \circ c) \geq \inf_{c \in \Omega_{\beta(p)\beta(q)}(\mathbb{D}^n)} (c) = d_{\mathbb{D}^n}(\beta(p), \beta(q))$$

und auch umgekehrt, also die Behauptung.

(ii) Wir verfahren analog. Sei

$$c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{L}^n, \quad t \mapsto c(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)) =: (x_1, \dots, x_{n+1})$$

eine differenzierbare Kurve und

$$\gamma \circ c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad t \mapsto \left( \frac{x_1(t)}{x_{n+1}(t)}, \dots, \frac{x_n(t)}{x_{n+1}(t)}, \frac{1}{x_{n+1}(t)} \right) =: (y_1, \dots, y_n)$$

die Bildkurve. Es gilt

$$L_{\mathbb{L}^n}(c) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{k=1}^n x'_k(t)^2 - x'_{n+1}(t)^2} dt =: \int_0^1 A(t) dt$$

sowie

$$L_{\mathbb{K}^n}(\gamma \circ c) = \int_0^1 \frac{1}{y_{n+1}(t)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} y'_k(t)^2} dt =: \int_0^1 B(t) dt,$$

wir zeigen also Gleichheit der Integranden. Es gilt

$$y'_k = \frac{dy_k}{dt} = \frac{x_k x_{n+1} - x'_{n+1} x_k}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_{n+1}} \left( x'_k - \frac{x'_{n+1} x_k}{x_{n+1}} \right)$$

für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sowie

$$y'_{n+1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{x_{n+1}} = -\frac{x'_{n+1}}{x_{n+1}^2}.$$

Weiter folgt aus

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - x_{n+1}^2 = -1 \iff \sum_{k=1}^n x_k^2 = x_{n+1}^2 - 1$$

durch Ableiten

$$\sum_{k=1}^n x_k x'_k = x_{n+1} x'_{n+1}.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} B(t)^2 &= \frac{1}{y_{n+1}^2} \left( \sum_{k=1}^{n+1} (y'_k)^2 \right) \\ &= x_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{x_{n+1}} \left( x'_k - \frac{x'_{n+1} x_k}{x_{n+1}} \right) \right)^2 + \left( \frac{x'_{n+1}}{x_{n+1}^2} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{x_{n+1}'^2 x_k^2}{x_{n+1}^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k x'_k x'_{n+1}}{x_{n+1}} + \frac{(x'_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} \\ &= \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + \frac{(x'_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} (x_{n+1}^2 - 1) - 2 \frac{x'_{n+1}}{x_{n+1}} x_{n+1} x'_{n+1} + \frac{(x'_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} \\ &= \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 + (x'_{n+1})^2 - \frac{(x'_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} - 2(x'_{n+1})^2 + \frac{(x'_{n+1})^2}{x_{n+1}^2} \\ &= \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 - (x'_{n+1})^2 \\ &= A(t)^2, \end{aligned}$$

woraus wie oben die Behauptung folgt. □



**Aufgabe 11.3** Es sei  $\mathbb{L}^n$  das Hyperboloid-Modell des  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes und  $q_L(x, y) := x \star y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$  das Lorentz-Produkt von  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Weiter sei  $\|x\|_L := \sqrt{q_L(x, x)}$  und  $l(x, y) := \|x - y\|_L$ . Zeigen Sie:

- (i)  $q_L$  ist symmetrisch und bilinear.
- (ii)  $l$  ist symmetrisch und positiv definit auf  $\mathbb{L}^n$  (*Hinweis: Sie können ohne Einschränkung  $x = (0, \dots, 0, x_{n+1})$  annehmen*).
- (iii)  $l$  ist keine Metrik auf  $\mathbb{L}^n$ .

*Lösung.* (i) Es gilt für  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$q_L(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1} = \sum_{k=1}^n y_k x_k - y_{n+1} x_{n+1} = q_L(y, x)$$

und für  $x, y, z \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q_L(\alpha x + y, z) &= \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + y_k) z_k - (\alpha x_{n+1} + y_{n+1}) z_{n+1} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n x_k z_k + \sum_{k=1}^n y_k z_k - \alpha x_{n+1} z_{n+1} - y_{n+1} z_{n+1} \\ &= \alpha \left( \sum_{k=1}^n x_k z_k - x_{n+1} z_{n+1} \right) + \sum_{k=1}^n y_k z_k - y_{n+1} z_{n+1} \\ &= \alpha q_L(x, z) + q_L(y, z). \end{aligned}$$

- (ii) Für  $x, y \in \mathbb{L}^n$  gilt

$$l(x, y) = \|x - y\|_L = \sqrt{q_L(x - y, x - y)} = \sqrt{(-1)^2 q_L(y - x, y - x)} = \|y - x\|_L = l(y, x).$$

Weiter gilt freilich  $l(x, x) = 0$ . Seien nun  $(\hat{x}, x_{n+1}) = x \neq y = (\hat{y}, y_{n+1}) \in \mathbb{L}^n$ . Wir müssen zeigen, dass  $l(x, y) > 0$ . Gelte zunächst  $x_{n+1} = y_{n+1}$ . Dann ist  $\hat{x} \neq \hat{y}$  und damit

$$l(x, y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2 = \|\hat{x} - \hat{y}\|_e^2 > 0.$$

Sei nun also  $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 < (x_{n+1} - y_{n+1})^2 &\iff x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}y_{n+1} + y_{n+1}^2 > 0 \\ &\iff x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 - 2x_{n+1}y_{n+1} + 1 > x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 + 1 \\ &\iff 0 \leq (x_{n+1}y_{n+1} - 1)^2 > (x_{n+1}^2 - 1)(y_{n+1}^2 - 1) \\ &\iff x_{n+1}y_{n+1} - 1 > \sqrt{(x_{n+1}^2 - 1)(y_{n+1}^2 - 1)} \\ &\iff -1 \geq \sqrt{(x_{n+1}^2 - 1)(y_{n+1}^2 - 1)} - x_{n+1}y_{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 l(x, y)^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 - x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}y_{n+1} - y_{n+1}^2 \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 - x_{n+1}^2 \right) + \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 - y_{n+1}^2 \right) - 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + 2x_{n+1}y_{n+1} \\
 &= -2 - 2 \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1}y_{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)},$$

wir erhalten also

$$\begin{aligned}
 l(x, y)^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2 \\
 &= -2 - 2 \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1}y_{n+1} \right) \\
 &\geq -2 - 2 \left( \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)} - x_{n+1}y_{n+1} \right) \\
 &= -2 - 2 \left( \sqrt{(x_{n+1}^2 - 1)(y_{n+1}^2 - 1)} - x_{n+1}y_{n+1} \right) \\
 &\stackrel{(*)}{>} -2 - 2(-1) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(iii) Offenbar muss die Dreiecksungleichung verletzt sein. In der Tat gilt für

$$x = (1, 0, \dots, 0, \sqrt{2}), \quad y = (0, \dots, 0, 1), \quad z = (-1, 0, \dots, 0, \sqrt{2})$$

die Ungleichung

$$l(x, y) + l(y, z) = \sqrt{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} < 1 + 1 = 2 = l(x, z),$$

also definiert  $l$  keine Metrik auf  $\mathbb{L}^n$ .

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 12.1** Ein Punkt  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$  heißt *zeitartig*, falls  $q_L(z) < 0$ . Seien  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $x_{n+1}y_{n+1} > 0$ . Dann definiert man den zeitartigen Winkel  $\star(x, y)$  zwischen  $x$  und  $y$  durch

$$\cosh \star(x, y) = \frac{x \star y}{\|x\|_L \|y\|_L}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Es gilt  $\star(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = ty$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Für  $x, y \in \mathbb{L}^n$  gilt  $\star(x, y) = d_{\mathbb{L}^n}(x, y)$ .

*Lösung.* (i) Seien zunächst  $x$  und  $y$  linear abhängig, also  $x = ty$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\frac{x \star y}{\|x\|_L \|y\|_L} = \frac{t(y \star y)}{\|ty\|_L \|y\|_L} = \frac{t\|y\|_L^2}{t\|y\|_L^2} = 1,$$

also  $\star(x, y) = \operatorname{arccosh} 1 = 0$ . Seien nun  $x$  und  $y$  nicht linear abhängig. Dann schreibe  $y = \alpha x + x^\perp$  mit einem zu  $y$  orthogonalen Anteil  $x^\perp \neq 0$ . Dann gilt

$$x \star y = x \star (\alpha x + x^\perp) = \alpha(x \star x) + x \star x^\perp = \alpha(x \star x)$$

und

$$y \star y = (\alpha x + x^\perp) \star (\alpha x + x^\perp) = 2\alpha(x \star x^\perp) + x^\perp \star x^\perp + \alpha^2(x \star x) = \|x^\perp\|_L^2 + \alpha^2\|x\|_L^2.$$

Weiter gilt

$$x \star x^\perp = \sum_{k=1}^n x_k x_k^\perp - x_{n+1} x_{n+1}^\perp \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^\perp)^2} - x_{n+1} x_{n+1}^\perp.$$

Nach Voraussetzung ist  $x$  zeitartig, es gilt also

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 < x_{n+1}^2$$

und wir können ohne Einschränkung  $x_{n+1}, y_{n+1} > 0$  annehmen. Dann folgt

$$0 \leq x_{n+1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^\perp)^2} - x_{n+1} x_{n+1}^\perp = x_{n+1} \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^\perp)^2} - x_{n+1}^\perp \right),$$

also

$$|x_{n+1}^\perp| < \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^\perp)^2}$$

und damit

$$x^\perp \star x^\perp = \sum_{k=1}^n (x_k^\perp)^2 - (x_{n+1}^\perp)^2 > 0,$$

wegen der Zeitartigkeit von  $x$  also  $-(x \star x)(x^\perp \star x^\perp) > 0$ . Wir erhalten

$$(x \star y)^2 = \alpha^2(x \star x)^2 = (x \star x)((y \star y) - (x^\perp \star x^\perp)) > (x \star x)(y \star y) = \|x\|_L^2 \|y\|_L^2$$

und damit

$$\cosh \mathfrak{x}(x, y) = \frac{x \star y}{\|x\|_L \|y\|_L} > 1,$$

was  $\mathfrak{x}(x, y) \neq 0$  impliziert.

(ii) Aus der Vorlesung (Satz 4.5.5) wissen wir

$$\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(x, y)) = -(x \star y) = \frac{x \star y}{\|x\|_L \|y\|_L} = \cosh \mathfrak{x}(x, y).$$

Injektivität von  $\cosh$  auf  $[0, \infty)$  liefert  $d_{\mathbb{L}^n}(x, y) = \mathfrak{x}(x, y)$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Aufgabe 12.2** (i) Zeigen Sie, dass für  $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  die Abbildung

$$\Phi_P : \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$$

definiert durch

$$\begin{pmatrix} z' - y' & x' \\ x' & z' + y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z - y & x \\ x & z + y \end{pmatrix} P^T$$

eine lineare Isometrie von  $\mathbb{L}^2$  ist.

(ii) Zeigen Sie, dass  $\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{O}^+(2, 1)$ ,  $P \mapsto \Phi_P$  ein Gruppenhomomorphismus mit  $\ker \sigma = \{\pm I_2\}$  ist.

*Lösung.* (i) Bestimme zunächst die Abbildungsmatrix  $M_P$ . Schreibe  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $ad - bc = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} z' - y' & x' \\ x' & z' + y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - y & x \\ x & z + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} az - ay + bx & ax + bz + by \\ cz - cy + dx & cx + dz + dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2z - a^2y + abx + abx + b^2z + b^2y & acz - acy + bcx + bdx + bdz + bdy \\ acz - acy + bcx + bdx + bdz + bdy & c^2z - c^2y + cdx + cdx + d^2z + d^2y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2abx + y(b^2 - a^2) + z(b^2 + a^2) & x(ad + bc) + y(bd - ac) + z(ad + bc) \\ x(ad + bc) + y(bd - ac) + z(bd + ac) & 2cdx + y(d^2 - c^2) + z(d^2 + c^2) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

also

$$x' = x(ad + bc) + y(bd - ac) + z(bd + ac),$$

$$y' = \frac{((z' + y') - (z' - y'))}{2} = x(cd - ab) + \frac{y}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + \frac{z}{2}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2),$$

$$z' = \frac{((z' + y') + (z' - y'))}{2} = x(ab + cd) + \frac{y}{2}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) + \frac{z}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Die Abbildungsmatrix ist dann gegeben durch

$$M_P := \begin{pmatrix} ad + bc & bd - ac & bd + ac \\ cd - ab & \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) & \frac{1}{2}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) \\ ab + cd & \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass  $M \in \mathcal{O}^+(2, 1)$ . Es gilt  $m_{33} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) > 0$  und mit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rechnet man

$$M_P J M_P^T J = \begin{pmatrix} b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd & 0 & 0 \\ 0 & b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd & 0 \\ 0 & 0 & b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd \end{pmatrix} = I_3$$

und Satz 4.5.3 liefert die Behauptung.

- (ii) Für  $P, Q \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  mit Abbildungsmatrizen  $M_P, M_Q \in \mathcal{O}^+(2, 1)$  und  $(x, y, z) \in \mathbb{L}^2$  gilt mit Regeln aus der linearen Algebra

$$\begin{aligned}
 (\sigma(P) \circ \sigma(Q))(x, y, z) &= \sigma(P)(\sigma(Q)(x, y, z)) \\
 &= \sigma(P)(M_Q(x, y, z))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (M_P M_Q)(x, y, z) \\
&= M_{PQ}(x, y, z) \\
&= \sigma(PQ)(x, y, z).
\end{aligned}$$

Zeige nun noch die Aussage über den Kern: Ist  $P \in \ker \sigma$ , so gilt  $\Phi_P = \text{id}$ , also  $M_P = I_3$ . Dann gilt (zum Beispiel)

$$0 = bd - ac = bd + ac,$$

also  $b = 0$  oder  $d = 0$  sowie  $a = 0$  oder  $c = 0$ . Das sind vier Fälle:

**Fall (a)**  $a = 0 = b$  widerspricht  $m_{11} = 1$ .

**Fall (b)**  $c = 0 = d$  widerspricht  $m_{11} = 1$ .

**Fall (c)**  $a = 0 = d$  liefert  $1 = \frac{1}{2}(-b^2 - c^2) < 0$ , einen Widerspruch.

**Fall (d)** Dann folgt  $b = 0 = c$ . Wegen  $ad = 1$  und  $1 = \frac{1}{2}(a^2 + d^2)$ ,  $0 = \frac{1}{2}(a^2 - d^2)$  folgt  $a^2 = d^2 = 1$ , also  $a = d = \pm 1$  und damit  $P = \pm I_2$ .

### Aufgabe 12.3 Fortsetzung von Aufgabe 12.2.

- (i) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix  $M \in \mathcal{O}^+(2, 1)$  als Produkt  $M = R_\alpha L_x R_\beta$  von Matrizen der Form

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \sinh x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$$

schreiben lässt.

- (ii) Folgern Sie, dass  $\sigma : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{O}^+(2, 1)$  surjektiv ist.  
 (iii) Folgern Sie  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{O}^+(2, 1)$ .

*Lösung.* (i) Für  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}
A &:= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \sinh x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cosh x - \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cosh x & \cos \alpha \sinh x \\ -\sin \alpha \cos \beta \cosh x - \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cosh x & -\sin \alpha \sinh x \\ \cos \beta \sinh x & \sin \beta \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sei nun

$$M = (m_1 | m_2 | m_3) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+(2, 1).$$

Dann gilt

$$-1 = m_3 \star m_3 = m_{13}^2 + m_{23}^2 - m_{33}^2 \geq -m_{33}^2,$$

also  $m_{33} \geq 1$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also  $x \in \mathbb{R}$  mit  $m_{33} = \cosh x$ . Mit obiger Gleichung folgt nun

$$m_{13}^2 + m_{23}^2 = -1 + m_{33}^2 = -1 + \cosh^2 x = \sinh^2 x,$$

also  $(m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{S}^1(\sinh x)$ . Wir können damit  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$  so wählen, dass

$$m_{13} = \cos \tilde{\alpha} \sinh x, \quad m_{23} = \sin \tilde{\alpha} \sinh x.$$

Setze nun  $\alpha := -\tilde{\alpha}$ . Dann ist

$$m_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sinh x \\ -\sin \alpha \sinh x \\ \cosh x \end{pmatrix}.$$

Nach Definition ist  $M \in \mathcal{O}^+(2, 1)$  genau dann, wenn  $M^T \in \mathcal{O}^+(2, 1)$ , es muss also auch die Gleichung

$$-1 = m_3^T \star m_3^T = m_{31}^2 + m_{32}^2 - m_{33}^2 = m_{31}^2 + m_{32}^2 - \cosh^2 x$$

gelten, also

$$m_{31}^2 + m_{32}^2 = -1 + \cosh^2 x = \sinh^2 x.$$

So wie eben können wir also  $\beta \in \mathbb{R}$  so wählen, dass

$$m_{31} = \cos \beta \sinh x, \quad m_{32} = \sin \beta \sinh x.$$

Es gilt nun also

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cos \alpha \sinh x \\ m_{21} & m_{22} & -\sin \alpha \sinh x \\ \cos \beta \sinh x & \sin \beta \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}.$$

Eine weitaus aufwändigere Rechnung zeigt, dass die übrigen Bedingungen die verbleibenden

Einträge ebenfalls eindeutig festlegen.

- (ii) Sei die lineare Isometrie  $F : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$  gegeben durch  $A \in \mathcal{O}^+(2, 1)$  und schreibe  $A = R_\alpha L_x R_\beta$ . Betrachte die Matrizen

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_x = \begin{pmatrix} \cosh \frac{x}{2} & \sinh \frac{x}{2} \\ \sinh \frac{x}{2} & \cosh \frac{x}{2} \end{pmatrix}, \quad P_\beta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Mit der Formel aus Aufgabe 12.2(i) und den Additionstheoreme ergeben sich die Abbildungsmatrizen gerade zu

$$M_{\sigma(P_\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} & 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ -2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_\alpha,$$

$$M_{\sigma(P_\beta)} = R_\beta,$$

$$M_{\sigma(Q_x)} = \begin{pmatrix} \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} & 0 & 2 \cosh \frac{x}{2} \sinh \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \cosh \frac{x}{2} \sinh \frac{x}{2} & 0 & \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \sinh x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}.$$

Setze nun  $S := P_\alpha Q_x P_\beta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$M_{\sigma(S)} = M_{\sigma(P_\alpha Q_x P_\beta)} = M_{\sigma(P_\alpha) \circ \sigma(Q_x) \circ P_\beta} = M_{\sigma(P_\alpha)} M_{\sigma(Q_x)} M_{\sigma(P_\beta)} = R_\alpha L_x R_\beta = A,$$

also ist  $F = \phi_S = \sigma(S)$  und es folgt Surjektivität von  $\sigma$ .

- (iii) Der Isomorphiesatz sowie die vorangegangenen Teilaufgaben liefern

$$\mathcal{O}^+(2, 1) = \mathrm{Bild}(\sigma) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{Kern}(\sigma) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

was zu zeigen war. □



## Übungsblatt 13

**Aufgabe 13.1** Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  der  $n$ -dimensionale hyperbolische Raum  $\mathbb{H}^n$  ein  $\delta$ -hyperbolischer Raum mit  $\delta = \ln(1 + \sqrt{2})$  ist.

*Lösung.* Die Seiten eines beliebigen Dreiecks  $\Delta \subseteq \mathbb{H}^3$  sind auf einer Halbkugelschale senkrecht zur Ebene  $x_3 = 0$ , bilden also ein geodätisches Dreieck in  $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{H}^2$ . Dann folgt die Behauptung per Induktion.  $\square$

**Aufgabe 13.2** Es sei die Abbildung  $c$  gegeben durch

$$c : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos \log(1+t) \\ t \sin \log(1+t) \end{pmatrix}$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $c$  ein quasi-geodätischer Strahl ist.
- (ii) Skizzieren Sie das Bild von  $c$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass es keinen geodätischen Strahl in  $\mathbb{E}^2$  gibt, der endlichen Abstand von  $c$  hat.

*Lösung.* (i) Es gilt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \log(1+t) - \frac{1}{1+t} \sin \log(1+t) \\ \sin \log(1+t) + \frac{t}{1+t} \cos \log(1+t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|^2 &= \left( \cos \log(1+t) - \frac{t \sin \log(1+t)}{1+t} \right)^2 + \left( \sin \log(1+t) + \frac{t \cos \log(1+t)}{1+t} \right)^2 \\ &= \cos^2 \log(1+t) - \frac{2t}{1+t} \cos \log(1+t) \sin \log(1+t) + \frac{t^2}{(1+t)^2} \sin^2 \log(1+t) \\ &\quad + \sin^2 \log(1+t) + \frac{2t}{1+t} \cos \log(1+t) \sin \log(1+t) + \frac{t^2}{(1+t)^2} \cos^2 \log(1+t) \\ &= 1 + \frac{t^2}{(1+t)^2} \\ &< 2, \end{aligned}$$

also  $\|c'(t)\|^2 < \sqrt{2}$ . Folglich ist  $c$  Lipschitz-stetig mit  $L = \sqrt{2}$  es gilt also

$$d(c(t), c(t')) \leq \sqrt{2}|t - t'|$$

für all  $t, t' \in [0, \infty)$ . Weiter gilt

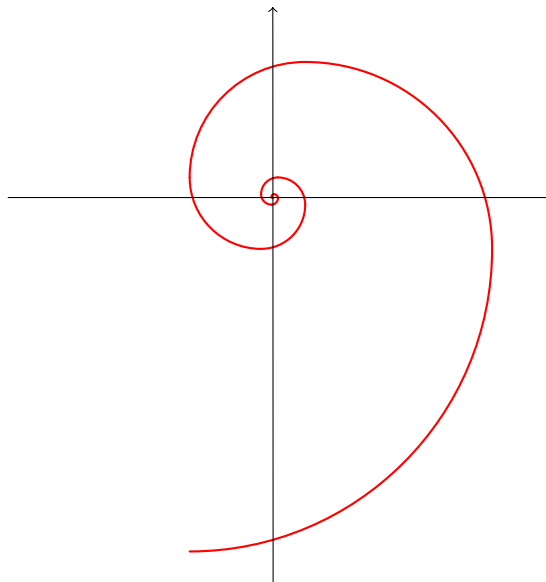
$$\begin{aligned}
 \|c(t) - c(t')\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} t \cos \log(1+t) - t' \cos \log(1+t') \\ t \sin \log(1+t) - t' \sin \log(1+t') \end{pmatrix} \right\|^2 \\
 &= t^2 + t'^2 - 2tt' \cos \log(1+t) \cos \log(1+t') - 2tt' \sin \log(1+t) \sin \log(1+t') \\
 &= t^2 + t'^2 - 2tt' (\cos \log(1+t) \cos \log(1+t') + \sin \log(1+t) \sin \log(1+t')) \\
 &= t^2 + t'^2 - 2tt' \cos \log \frac{1+t}{1+t'} \\
 &\geq t^2 + t'^2 - 2tt' \\
 &= |t - t'|^2 \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} |t - t'|,
 \end{aligned}$$

wir erhalten insgesamt damit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |t - t'| \leq d_e(c(t), c(t')) \leq \sqrt{2} |t - t'|$$

für all  $t, t' \in [0, \infty)$ ,  $c$  ist also ein geodätischer Strahl.

(ii) Wir erhalten folgendes Bild:



(iii) Sei  $\gamma$  ein beliebiger geodätischer Strahl mit  $\gamma(0) = 0 = c(t)$ . Dann hat  $\gamma$  die Gestalt

$$\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \alpha t \end{pmatrix}$$

oder

$$\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

oder

$$\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

ohne Einschränkung betrachten wir den dritten Fall. Angenommen es gäbe ein  $R > 0$  mit  $\text{Hd}(\text{Bild}(\gamma), \text{Bild}(c)) \leq R$ . Wähle  $k \in \mathbb{N}$  sodass  $\tilde{t} := e^{(2k+\frac{1}{2})\pi} - 1 > R$ . Dann gilt

$$c(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \tilde{t} \cos \log(1 + \tilde{t}) \\ \tilde{t} \sin \log(1 + \tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} \cos \frac{\pi}{2} \\ \tilde{t} \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$$

Dann folgt aber

$$R \leq \tilde{t} = d(0, c(\tilde{t})) = \min_{t \in [0, \infty)} d(0, c(t)),$$

also  $c(\tilde{t}) \notin U_R(\text{Bild}(\gamma))$ , ein Widerspruch zur Annahme. □

**Aufgabe 13.3** Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und  $(Z, d_Z)$  metrische Räume. Zeigen Sie:

- (i) Wenn es eine  $(\lambda, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie  $f : X \longrightarrow Y$  gibt, so gibt es auch eine  $(\lambda', \epsilon')$ -Quasi-Isometrie  $g : Y \longrightarrow X$  und ein  $k \geq 0$ , sodass

$$d_X((g \circ f)(x), x) \leq k, \quad d_Y((f \circ g)(y), y) \leq k$$

für alle  $x \in X, y \in Y$ .

- (ii) Es seien  $g : X \longrightarrow Y$  und  $h : Y \longrightarrow Z$   $(\lambda_g, \epsilon_g)$ - bzw.  $(\lambda_h, \epsilon_h)$ -quasi-isometrische Einbettungen. Dann ist  $h \circ g$  eine  $(\lambda_g \lambda_h, \epsilon_h + \lambda_h \epsilon_g)$ -quasi-isometrische Einbettung.
- (iii) Die Verkettung zweier Quasi-Isometrien ist wieder eine Quasi-Isometrie.

*Lösung.* (i) Nach Voraussetzung gilt für  $x_1, x_2 \in X$

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - \epsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \epsilon.$$

Außerdem gibt es  $D \geq 0$ , sodass  $Y \subseteq U_D(f(X))$ , für alle  $y \in Y$  gibt es also  $x \in X$  mit  $d_Y(y, f(x)) \leq D$ ; insbesondere ist  $f^{-1}(U_D(y))$  also nichtleer. Definiere nun  $g$  durch

$$g : Y \longrightarrow X, \quad y \mapsto x \in f^{-1}(U_D(y)).$$

Dann gilt  $f(g(y)) \in U_D(y)$  und damit

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(g(y)), y) \leq D$$

sowie

$$d_X((g \circ f)(x), x) = d_X(g(f(x)), x) \leq \lambda d_Y(f(g(f(x))), f(x)) + \lambda \epsilon.$$

Da  $g(f(x)) \in f^{-1}(U_D(f(x)))$ , ist  $f(g(f(x))) \in U_D(f(x))$  und somit

$$d_X((g \circ f)(x), x) \leq \lambda D + \lambda \epsilon = \lambda(D + \epsilon).$$

Da  $D \leq \lambda(D + \epsilon)$ , setze  $k := \lambda(D + \epsilon)$  und erhalte

$$d_X((g \circ f)(x), x) \leq k, \quad d_Y((f \circ g)(y), y) \leq k$$

für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Es bleibt nun noch zu zeigen, dass  $g$  eine  $(\lambda', \epsilon')$ -Quasi-Isometrie ist. Sei  $x \in X$  beliebig. Wähle  $y := f(x) \in Y$ . Dann gilt nach obigenm

$$d_X(x, g(y)) = d_X(x, g(f(x))) \leq \lambda(D + \epsilon) =: D',$$

wir müssen also nur noch zu zeigen, dass  $g$  eine quasi-isometrische Einbettung ist. Für  $y_1, y_2 \in Y$  gilt

$$\begin{aligned} d_X(g(y_1), g(y_2)) &\leq \lambda \epsilon + \lambda d_Y(f(g(y_1)), f(g(y_2))) \\ &\leq \lambda \epsilon + \lambda (d_Y(y_1, y_2) + 2D) \\ &= \lambda d_Y(y_1, y_2) + \lambda(2D + \epsilon), \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung aus  $f(g(y_1)) \in U_D(y_1)$ ,  $f(g(y_2)) \in U_D(y_2)$  und der Dreiecksungleichung folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned} d_X(g(y_1), g(y_2)) &\geq \frac{1}{\lambda} d_Y(f(g(y_1)), f(g(y_2))) - \frac{\epsilon}{\lambda} \\ &\geq \frac{1}{\lambda} (d_Y(y_1, y_2) - 2D) - \frac{\epsilon}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} d_Y(y_1, y_2) - \frac{1}{\lambda} (2D + \epsilon) \\ &\geq \frac{1}{\lambda} d_Y(y_1, y_2) - \lambda(2D + \epsilon). \end{aligned}$$

Mit  $\lambda' := \lambda$  und  $\epsilon' := \lambda(2D + \epsilon)$  folgt also aus den beiden Ungleichungen, dass  $g$  eine  $(\lambda', \epsilon')$ -quasi-isometrische Einbettung ist, insgesamt also eine  $(\lambda', \epsilon')$ -Quasi-Isometrie.

(ii) Wir haben für  $x_1, x_2 \in X$  sowie  $y_1, y_2 \in Y$  die beiden Ungleichungsketten

$$\frac{1}{\lambda_g} d_X(x_1, x_2) - \epsilon_g \leq d_Y(g(x_1), g(x_2)) \leq \lambda_g d_X(x_1, x_2) + \epsilon_g$$

sowie

$$\frac{1}{\lambda_h} d_Y(y_1, y_2) - \epsilon_h \leq d_Z(h(y_1), h(y_2)) \leq \lambda_h d_Y(y_1, y_2) + \epsilon_h.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d_Z((h \circ g)(x_1), (h \circ g)(x_2)) &\leq \lambda_h d_Y(g(x_1), g(x_2)) + \epsilon_h \\ &\leq \lambda_h (\lambda_g d_X(x_1, x_2) + \epsilon_g) + \epsilon_h \\ &= \lambda_g \lambda_h d_X(x_1, x_2) + \epsilon_h + \lambda_h \epsilon_g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_Z((h \circ g)(x_1), (h \circ g)(x_2)) &\geq \frac{1}{\lambda_h} d_Y(g(x_1), g(x_2)) - \epsilon_h \\ &\geq \frac{1}{\lambda_h} \left( \frac{1}{\lambda_g} d_X(x_1, x_2) - \epsilon_g \right) - \epsilon_h \\ &= \frac{1}{\lambda_g \lambda_h} d_X(x_1, x_2) - \left( \frac{1}{\lambda_h} \epsilon_g + \epsilon_h \right) \\ &\geq \frac{1}{\lambda_g \lambda_h} d_X(x_1, x_2) - (\lambda_h \epsilon_g + \epsilon_h), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(iii) Wir schließen den Beweis an jenen von (ii) an und zeigen noch die Quasi-Dichtheit von  $h \circ g$ . Seien also  $D_g, D_h \geq 0$ , sodass  $U_{D_g}(g(X)) \subseteq Y$  und  $U_{D_h}(h(Y)) \subseteq Z$ . Wir müssen  $D \geq 0$  finden, sodass  $U_D((h \circ g)(X)) \subseteq Z$ , für jedes  $z \in Z$  ein  $x \in X$  mit  $d_Z((h \circ g)(x), z) \leq D$ . Sei also  $z \in Z$  beliebig und wähle  $y \in Y$  und anschließend  $x \in X$  mit

$$d_Z(h(y), z) \leq D_h, \quad d_Y(g(x), y) \leq D_g.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_Z((h \circ g)(x), z) &\leq d_Z((h \circ g)(x), h(y)) + d_Z(h(y), z) \\ &\leq \lambda_h d_Y(g(x), y) + \epsilon_h + D_h \\ &\leq \lambda_h D_g + \epsilon_h + D_h \\ &=: D, \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □