

Kapitel 1

Räuber und Gendarm

1 Metrische Räume mit oberen Krümmungsschranken

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Weg $c : \mathcal{I} \rightarrow X$ heißt **(minimierende) Geodätische**, wenn $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in \mathcal{I}$ gilt. Der Raum X heißt **geodätischer Raum**, wenn für alle $x, y \in X$ eine Geodätische von x nach y existiert, beziehungsweise **R -geodätisch**, wenn dies für $d(x, y) \leq R$ gilt. Ist $c : [a, b] \rightarrow X$ ein Weg so heißt er **rektifizierbar**, falls seine Länge

$$\mathcal{L}(c) = \sup \left\{ \sum d(c(t_i), c(t_{i+1})) \mid t_1 < \dots < t_n, t_i \in \mathcal{I} \right\}$$

endlich ist. Es gilt $d(c(a), c(b)) \leq \mathcal{L}(c)$. Die Kurvenlänge ist invariant unter monotonen Reparametrisierungen. Die Längenfunktion $t \mapsto \mathcal{L}(c|_{[a, t]})$ ist monoton wachsend; insbesondere besitzt jede Kurve eine Bogenlängenparametrisierung. Der Raum (X, d) heißt **Längenraum** (oder d **innere Metrik**), falls die Metrik

$$\bar{d}(x, y) = \inf \{ \mathcal{L}(c) \mid c : \mathcal{I} \rightarrow X \text{ rektifizierbarer Weg, } c(0) = x, c(1) = y \}$$

mit d übereinstimmt.

Beispiele

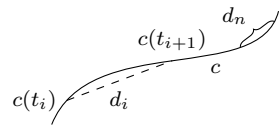
- 1) \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik ist ein geodätischer Raum und ein Längenraum.
- 2) Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Längenraum (Beweis zur Übung).
- 3) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so folgt dass (X, \bar{d}) eine Längenmetrik ist, das heißt $\bar{\bar{d}} = \bar{d}$ (das iterieren der Konstruktion liefert keine neue Metrik).
- 4) Jeder geodätische Raum ist ein Längenraum. Es gilt stets $d \leq \bar{d}$. Sind $x, y \in X$ und ist $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine Geodätische von x nach y , so gilt:

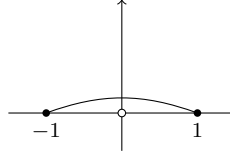
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \sup \left\{ \sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum (t_{i+1} - t_i) \right\} \\ &= t - a = d(x, y). \end{aligned}$$

Also

$$\bar{d}(x, y) = \inf_c \mathcal{L}(c) \leq \mathcal{L}(\gamma) = d(x, y)$$

- 5) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist ein Längenraum (bezüglich der euklidischen Metrik), aber kein geodätischer Raum.





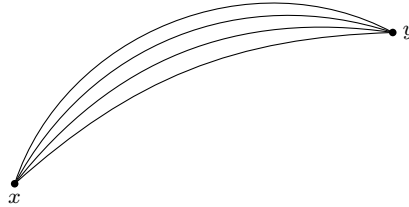
Es gibt keine kürzeste Verbindung

Satz (von Hopf-Rinow; Chom-Vossen 1935)

Es sei X ein lokalkompakter Längenraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist vollständig
- (ii) X ist **geodätisch vollständig**, das heißt jede Geodätische $c : [0, 1) \rightarrow X$ kann in 1 fortgesetzt werden.
- (iii) Beschränkte abgeschlossene Mengen sind kompakt.

Jede der obigen Aussagen impliziert, dass X ein geodätischer Raum ist.



Kanten e_n der Länge $1 + \frac{1}{n} \searrow 1$ Es gibt keine Kurve der Länge 1

Es bezeichne M_κ^2 die (eindeutigen) 2-dimensionalen, einfachzusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit der Schnittkrümmung $\text{sec} \equiv \kappa$, und D_κ ihren Durchmesser:

$$M_\kappa^2 = \begin{cases} \mathbb{S}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 & , \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^2 & , \kappa = 0 \\ \mathbb{H}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 & , \kappa < 0 \end{cases}$$

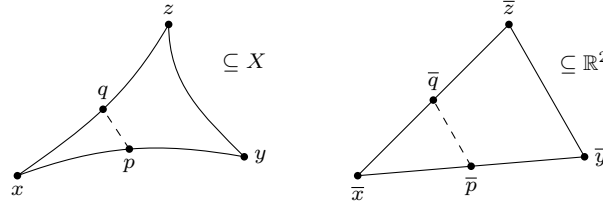
$$D_\kappa = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & , \kappa > 0 \\ \infty & , \kappa \leq 0 \end{cases}$$

wobei

$$\mathbb{H}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -\frac{1}{\kappa} \right\}.$$

Es sei X ein metrischer Raum. Ein **geodätisches Dreieck** $\Delta(x, y, z)$ besteht aus Geodätischen $c_{xy} = \overline{xy}$, $c_{yz} = \overline{yz}$ und $c_{zx} = \overline{zx}$ zwischen den Punkten x, y und z . Ein Vergleichsdreieck in M_κ^2 ist ein geodätisches Dreieck $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ mit gleichen Kantenlängen wie das ursprüngliche Dreieck. Ein solches Vergleichsdreieck existiert eindeutig, falls der Umfang $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2D_\kappa$ ist. Ein Punkt $\overline{p} \in \overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ heißt **Vergleichspunkt** zu $p \in \Delta(x, y, z)$, $p \in \overline{xy}$, falls $\overline{d}(\overline{x}, \overline{p}) = d(x, p)$. Das Dreieck $\Delta(x, y, z)$ erfüllt die **CAT (κ)-Ungleichung**, wenn für alle $p, q \in \Delta(x, y, z)$ mit Vergleichspunkten $\overline{p}, \overline{q}$ gilt:

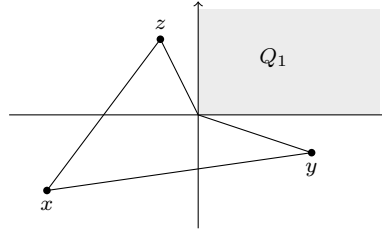
$$d(p, q) \leq \overline{d}(\overline{p}, \overline{q})$$



Der Raum X besitzt die obere Krümmungsschranke κ , wenn für alle $x \in X$ eine geodätische Umgebung existiert, in der alle Dreiecke die $\text{CAT}(\kappa)$ -Ungleichung erfüllen. Für $\kappa = 0$ heißt X **nicht-positiv gekrümmt**. Erfüllt X global die $\text{CAT}(\kappa)$ -Ungleichung, so heißt X **$\text{CAT}(\kappa)$ -Raum**.

Beispiele

- 1) \mathbb{R}^2 ist $\text{CAT}(0)$, $M^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist nichtpositiv gekrümmt.
- 2) \mathbb{S}^1 ist $\text{CAT}(1)$.
- 3) $\mathbb{R}^2 \setminus Q_1$, $Q_1 = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, mit der induzierten Längenmetrik ist $\text{CAT}(0)$.



- 4) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Schnittkrümmung $\text{sec}_g \leq \kappa$ und vollständig. Nach dem Satz von Topogonov hat M die obere Krümmungsschranke κ .

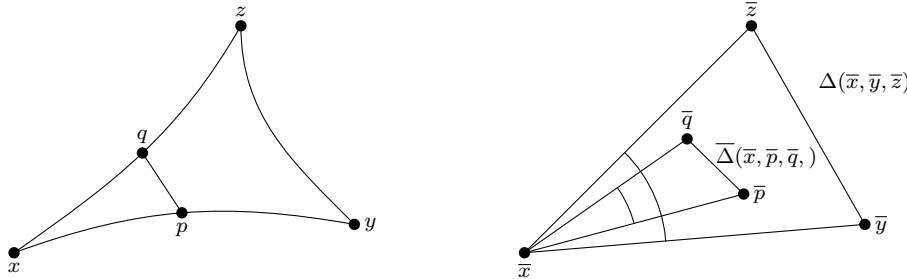
Eigenschaften von $\text{CAT}(\kappa)$ -Räumen

- Geodätische der Länge $< D_\kappa$ sind eindeutig.
- Bälle vom Radius $< \frac{1}{2}D_\kappa$ sind konvex und zusammenziehbar.
- $\text{CAT}(0)$ -Räume sind zusammenziehbar.

Charakterisierung von $\text{CAT}(\kappa)$ -Räumen

Für jedes geodätische Dreieck $\Delta(x, y, z)$ vom Umfang $< 2D_\kappa$ und Punkte $p \in \overline{xy}$ und $q \in \overline{xz}$ gilt für Vergleichsdreiecke $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ und $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q})$:

$$\angle_{\overline{x}}(\overline{p}, \overline{q}) \leq \angle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z}) \quad (\text{in } M_\kappa^2)$$



Ist X ein $\text{CAT}(\kappa)$ -Raum und sind c_1 und c_2 Geodätische mit gleichem Startpunkt $c_1(0) = c_2(0) = x$ so ist der Winkel $\angle_{\overline{x}}(\overline{c_1(s)}, \overline{c_2(t)})$ monoton wachsend in s und t . Damit ist der Winkel

$$\angle(c_1, c_2) = \lim_{s, t \rightarrow 0} \angle_{\overline{x}}(\overline{c_1(s)}, \overline{c_2(t)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \angle_{\overline{x}}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t)})$$

wohldefiniert.

Satz (von Hadamart-Cartan; Alexander-Bishop 1990)

Es sei X ein vollständiger metrischer Raum mit der oberen Krümmungsschranke $\kappa \leq 0$. Dann ist seine universelle Überlagerung \tilde{X} (bezüglich der induzierten Metrik) (global) CAT(κ).

2 Konvexität

Eine Teilmenge C eines CAT(0)-Raumes (geodätischer Raum) heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in C$ das geodätische Segment von x nach y existiert und in ganz C verläuft. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem CAT(0)-Raum heißt **konvex**, falls für jede Geodätische $c : [0, 1] \rightarrow X$ die Funktion $f \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex im gewöhnlichen Sinne ist.

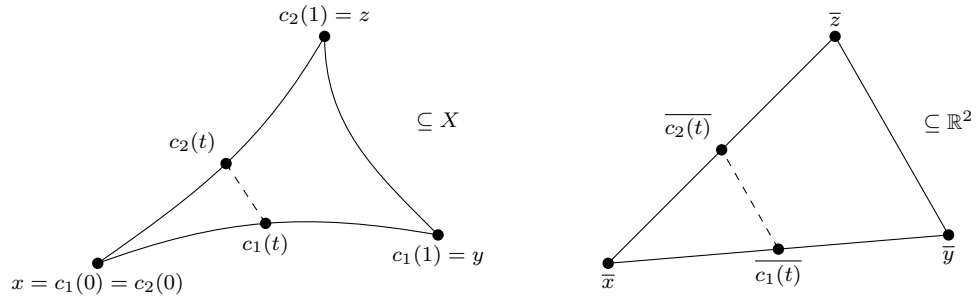
Ist X ein CAT(0)-Raum, so ist die Metrik konvex, das heißt für Geodätische $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow X$ ist die Funktion

$$t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$$

konvex, wie man in der folgenden Beweisskizze erkennt:

Beweisskizze

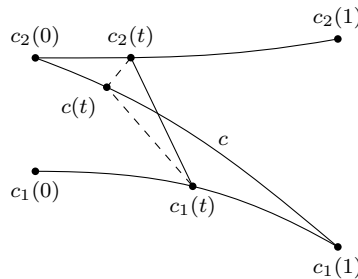
Wir betrachten ohne Einschränkung den Fall dass beide Geodätischen den gleichen Startpunkt $x = c_1(0) = c_2(0)$ haben:



Bei Betrachtung des Vergleichsdreiecks zu $\Delta(c_1(0), c_1(1), c_2(1))$ erhalten wir aus der CAT(0)-Ungleichung:

$$d(c_1(t), c_2(t)) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t)}) = t \cdot d_{\mathbb{R}^2}(\overline{y}, \overline{z}) = t \cdot d_{\mathbb{R}^2}(c_1(1), c_2(1))$$

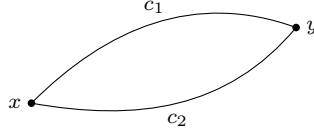
Betrachte nun c von $c_2(0)$ nach $c_1(1)$.



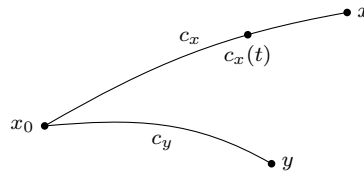
Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} d(c_1(t), c_2(t)) &\leq d(c_1(t), c(t)) + d(c_2(t), c(t)) \\ &\leq (1-t) \cdot d(c_1(0), c_2(0)) + t \cdot d(c_1(1), c_2(1)) \end{aligned} \quad (\square)$$

Geodätische Segmente in X sind immer eindeutig, wie man mit der folgenden Skizze erkennen kann:



Die Abstandsfunktion $d(c_1(\cdot), c_2(\cdot))$ ist konvex mit Nullstellen in 0 und 1, also konstant Null und damit $c_1 = c_2$. Nun fixiere $x_0 \in X$, und sei c_x das geodätische Segment von x_0 nach x .



Damit wird $H(x, t) = c_x(t)$ eine Retraktion von X auf $\{x_0\}$.

Ist C eine vollständige konvexe Teilmenge von X , so existiert eine „orthogonale Projektion“ $\pi : X \rightarrow C$ mit folgenden Eigenschaften:

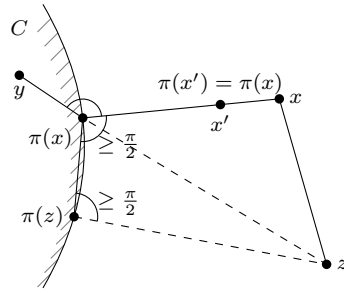
- (i) Für jedes $x \in X$ ist $\pi(x) \in C$ der eindeutig bestimmte Punkt mit

$$d(x, \pi(x)) = d(x, C) = \inf\{d(x, c) \mid c \in C\}$$

- (ii) Für Punkte $y \in C$ und $x \notin C$, mit $\pi(x) \neq y$, gilt $\angle_{\pi(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$.

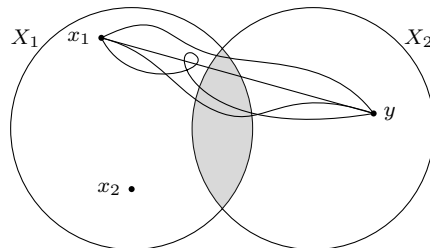
- (iii) Es gilt $\pi(\overline{x\pi(x)}) = \{\pi(x)\}$.

- (iv) π ist eine Retraktion von X auf C , welche Abstände nicht vergrößert.



Konstruktion

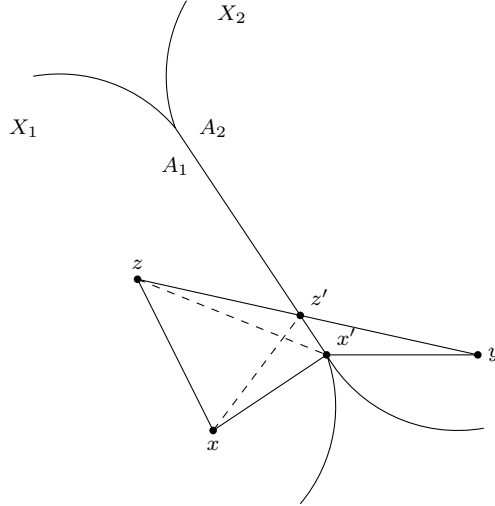
Es seien X_1 und X_2 zwei CAT(0)-Räume. Dann ist $X_1 \times X_2$ ebenfalls ein CAT(0)-Raum bezüglich der Produktmetrik. Die Geodätischen von $X_1 \times X_2$ sind genau die Produkt $c_1 \times c_2$ von Geodätischen c_i in X_i .



Weitere CAT(0)-Räume erhält man durch „Verkleben“ entlang konvexer Teilmengen. Es sei A ein vollständiger metrischer Raum und seien $\iota_i : A \hookrightarrow X_i \subseteq X_i$ Isometrien auf konvexen Teilmengen in X_1 beziehungsweise X_2 . Dann ist $X_1 \cup_A X_2 = X_1 \dot{\cup} X_2 / \{\iota_1(a) = \iota_2(a) \in A\}$ mit der Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} d_{X_i}(x, y) & x, y \in X_i \\ \inf_{a \in A} \{d(x, \iota_i(a)) + d(\iota_j(a), y)\} & x \in X_i, y \in X_j, i \neq j \end{cases}$$

ein CAT(0)-Raum.



Betrachte die Vergleichsdreiecke $\Delta(\bar{x}, \bar{x}', \bar{z}')$ und $\Delta(\bar{z}', \bar{y}, \bar{x}')$

3 Räuber und Gendarm

Regeln

Das Spielfeld D sei eine zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n . Eine Startkonfiguration sei gegeben durch eine endliche Anzahl von Verfolgern $P_1, \dots, P_N \in D$ und einen Flüchtigen $E \in D$. Wir betrachten zunächst (zeitlich) diskrete Modelle. Es bezeichnen P_k^t beziehungsweise E^t die Positionen der Verfolger beziehungsweise des Flüchtigen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$.

Spielverlauf

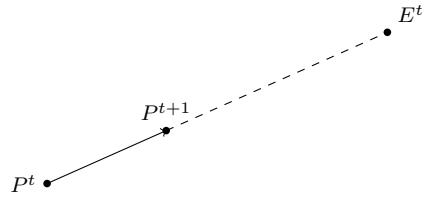
Zum Zeitpunkt t wählt zunächst E^t eine neue Position E^{t+1} mit dem Abstand $d(E^t, E^{t+1}) \leq 1$, also höchstens eine Einheit entfernt von der vorherigen Position, danach (simultan) die Verfolger P_k^t , entsprechend mit $d(P_k^t, P_k^{t+1}) \leq 1$. Die Verfolger gewinnen, wenn für jedes $C > 1$ ein $t \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(E^t, P_k^t) < C$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz

Auf jedem Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist „GREEDY“ stets erfolgreich (mit mindestens einem Verfolger).

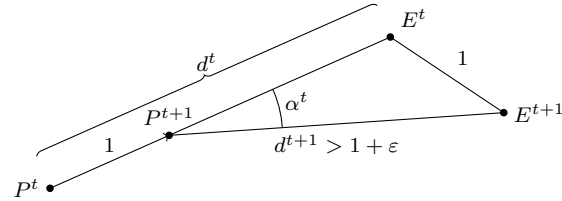
Greedy

Der Verfolger bewegt sich um die Distanz 1 auf der Strecke $\overline{P^t E^t}$:



Beweisskizze (allgemein später)

Skizze zum GREEDY Algorithmus:

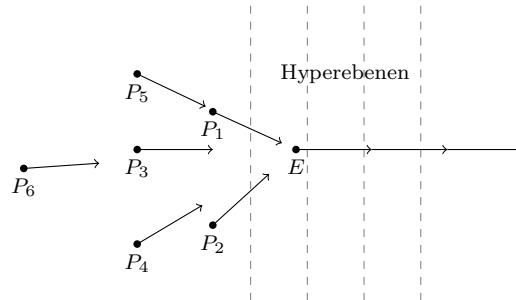


$$d^{t+1} \leq 1 + (d^t - 1) = d^t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d^t =: d^\infty$$

Angenommen der Flüchtige würde entkommen. Dann wäre $d^\infty > 1$ und damit der Winkel $\alpha^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, das bedeutet D würde beliebig lange Geradensegmente enthalten, wäre also nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. (\square)

Mehrere Verfolger in \mathbb{R}^n

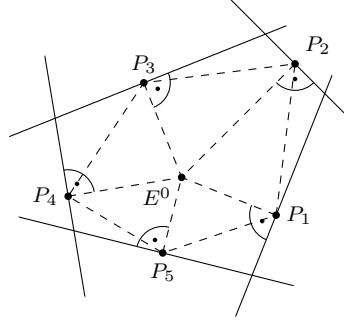
Wann ist ein Entkommen bei mehreren Verfolgern überhaupt möglich? Wir schauen uns die folgende Zeichnung an:



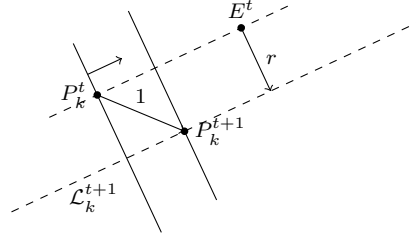
Sei $C^t = \text{conv}(P_1^t, \dots, P_N^t)$ die konvexe Hülle zum Zeitpunkt t . Ein Entkommen ist möglich, wenn es eine trennende Hyperebene gibt, also wenn $E \notin \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1^t, \dots, P_N^t)$, wobei $\overset{\circ}{\text{conv}}$ das Innere der konvexen Hülle bezeichnet. Es stellt sich die Frage, ob die Umkehrung auch zutrifft, also ob nie ein Entkommen möglich ist, wenn $E \in \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$. Bei GREEDY ist das nicht der Fall, der Beweis ist dem Leser zur Übung überlassen. Wir wenden uns nun also einen neuen Algorithmus anschauen.

Planes

Die Idee hinter dem PLANES Algorithmus ist den Bereich um die Verfolger durch Hyperebenen einzugrenzen und systematisch zu verkleinern.



- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(P_k^t, E^t, E^{t+1})$
- Gerade \mathcal{L}_k^{t+1} parallel zu $\overline{E^t P_k^t}$ durch E^{t+1}



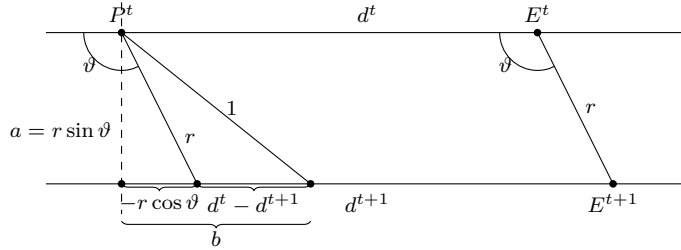
- $P_k^{t+1} \in \mathcal{L}_k^{t+1}$ mit $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$ und $d_k^{(t+1)}, E^{t+1})$ minimal

Satz (Kopperty-Ravishankar '05)

Es sei $D = \mathbb{R}^n$. Falls $E \in \mathring{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$ gilt, so ist PLANES erfolgreich.

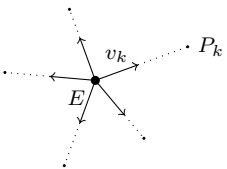
Beweis

Zunächst stellen wir mit der folgenden Zeichnung einige Vorüberlegungen an:



Falls $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $r \cos \vartheta \geq 0$ und damit folgt $d^t - d^{t+1} \geq 0$. Im Fall $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ gilt $r \cos \vartheta = -r \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}$ und damit folgt dann

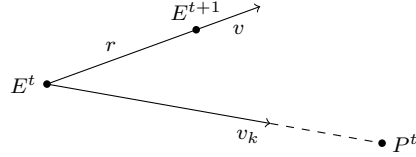
$$d^t - d^{t+1} = \sqrt{1 - r \sin^2 \vartheta} - r \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} \stackrel{r \leq 1}{\geq} (1 - r) \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} \geq 0.$$



Es bezeichne $v_k := \frac{P_k^0 - E^0}{\|P_k^0 - E^0\|}$ den Einheitsvektor in Richtung $\overline{E^0 P_k^0}$. Da $E \in \mathring{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Sphäre $\mathbb{B}_\varepsilon \subseteq \mathring{\text{conv}}(v_1, \dots, v_N)$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass die v_1, \dots, v_{n+1} in allgemeiner Lage sind und dass $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq \mathring{\text{conv}}(v_1, \dots, v_{n+1})$, sowie $E = 0$ ist. Für ein $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in (0, 1)$ mit $\varepsilon v = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$ und es folgt

$$\varepsilon = \varepsilon \|v\|^2 = \langle v, \varepsilon v \rangle = \sum \lambda_k \langle v, v_k \rangle.$$

man findet also ein k , so dass $\langle v, v_k \rangle \geq \frac{\varepsilon}{n+1} = d_{\min} > 0$ gilt. Es seien $v = \frac{E^{t+1} - E^t}{\|E^{t+1} - E^t\|}$ und $k = k(v)$ wie oben. Dann gilt $\cos \vartheta_k^t = \langle v, v_k \rangle \geq d_{\min}$.



Es gilt:

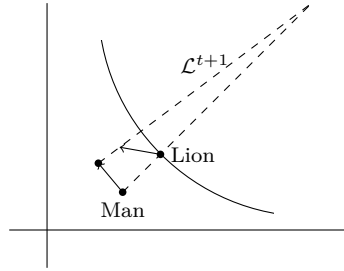
$$\begin{aligned}
 d^t - d^{t+1} &= \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta_k^t} + r \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \sqrt{1 - r^2} + r \cos \vartheta_k^t \\
 &= \sqrt{1 - r^2} - \cos \vartheta_k^t (1 - r) + \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \sqrt{1 - r} (\sqrt{1 + r} - \sqrt{1 - r}) + \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \langle v, v_k \rangle \geq d_{\min} > 0
 \end{aligned}$$

und

$$d^{t+1} = \sum_k d_k^{t+1} \leq \left(\sum_k d_k^t \right) - d_{\min} \leq \dots \leq \sum_k d_k^0 - t d_{\min} \quad \square$$

Modifikation: Spheres

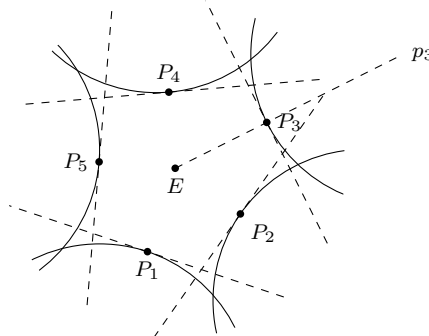
Wir betrachten das LION AND MAN Problem: ein Mensch versucht einem Löwen zu entkommen.



Der Löwe wählt einen Punkt, so dass er zwischen den Menschen und dem Punkt steht. Als Abgrenzung dient im Gegensatz zu PLANES keine Hyperebene, sondern eine Sphäre durch den Punkt und die Position des Löwen.

Spheres

- *Initialisierung:* Wähle Punkte p_k auf Geraden durch E und P_k so, dass $P_k \in \overline{p_k E}$ gilt und die Komponente von $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_{d(p_k, P_k)}(p_k)$, welche E enthält, beschrieben ist.



- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(p_k, P_k^t, E^{t+1})$
- $P_k^{t+1} \in \overline{p_k E^{t+1}}$ mit $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$ und $d(P_k^{t+1}, E^{t+1})$ minimal.



Beweisskizze

$$\Rightarrow d(D^{t+1}, E^{t+1}) < d(Q, E^{t+1})$$

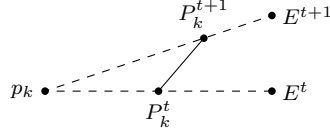
The diagram shows a region R^t in the plane, bounded by several curves. Five points are marked on the boundary: P_1^t , P_2^t , P_3^t , P_4^t , and P_5^t . The region is labeled R^t .

$$\underbrace{d(P^t, E_k^t)}_{=d^t} - d(Q, E^{t+1}) \geq \langle v_k, v \rangle \geq d_{\min} > 0$$

Unser Ziel ist es nun eine Verallgemeinerung auf beliebige konvexe Gebiete zu finden. Kopparty & Ravishankar diskutieren den folgenden Fall: Das Spielfeld D besteht aus dem Schnitt von endlich vielen Halbräumen H_l .



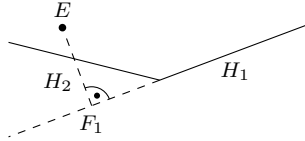
Die orthogonale Projektion F_l von E auf den Rand von H_l stellt zusätzliche (virtuelle) Verfolger dar, deren Bewegungen auf den Rand ∂H_l von H_l beschränkt sind. Für SPHERES lässt sich zeigen, dass die den Bewegungsspielraum von E einschränkende Bälle „monoton wachsen“. Genauer:



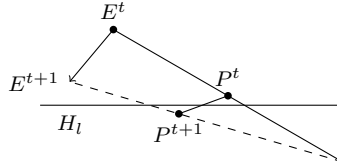
Falls also $d(p_k, E_k^{t+1}) \leq \text{konst.}$ für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt, so ist SPHERES erfolgreich. Dies ist äquivalent dazu, dass E im Inneren der konvexen Hülle von $P_1, \dots, P_k, F_1, \dots, F_k$ liegt.

Kopparty & Ravishankar behaupten, dies sei notwendig und hinreichend für den Erfolg von SPHERES. Bei unserer bisherigen Betrachtung unseres Algorithmus fallen zwei Probleme ins Auge:

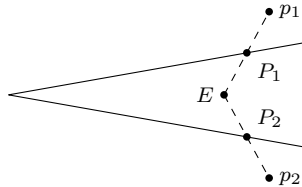
- F_l liegt unter Umständen nicht in D



- Der Algorithmus ist unter Umständen nicht wohldefiniert



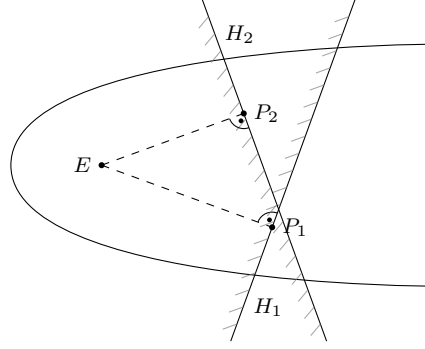
Es werden möglicherweise Verfolgerpositionen außerhalb von D errechnet. Das Verwerfen aller Verfolger P_k mit $p_k \notin D$ führt unter Umständen dazu, dass alle P_k verworfen werden



Die folgende Bedingung ist äquivalent zum ersten Problem:

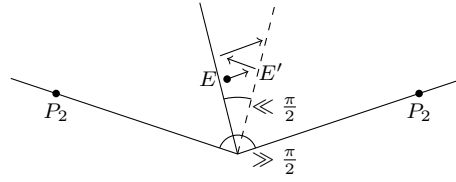
Definition (Alexander-Bishop-Ghrist '09)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Für $k \leq N$ bezeichne H_k die abgeschlossene Halbebene, welche E enthält und deren Rand durch P_k und orthogonal zu $\overline{EP_k}$ verläuft.

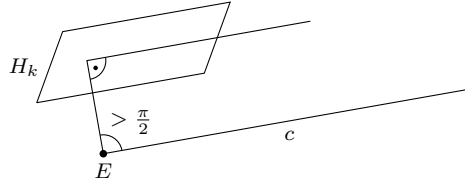


Die Konfiguration erfüllt die Bedingung **(BC)**, falls $D \cap \bigcap_{k \leq N} H_k$ beschränkt ist.

Die Lösung des zweiten Problems bedarf einer Modifikation von SPHERES. Im zweidimensionalen Fall ändern Randkollisionen der Verfolger (heuristisch) nichts.



Im dreidimensionalen Fall sollte es möglich sein eine Konstellation in einem „breiten und flachen“ Gebiet die Verfolger in jedem Schritt zu Kollisionen zu zwingen, so dass eine Fluchtstrategie existiert. Zunächst lässt sich zeigen, dass (BC) notwendig ist: Falls $D \cap \bigcap_{k \leq N} H_k$ beschränkt ist, so existiert ein Strahl c mit dem Startpunkt E und $c \cap H_k = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$.



Dann gilt $\angle_E(c, \overline{EP_k}) > \frac{\pi}{2}$ für alle $k \leq N$. Somit enthält der Halbraum $H = \{x \mid \langle x, \dot{c} \rangle \leq \langle E, \dot{c} \rangle\}$ alle Verfolger P_k und c ist eine Fluchtstrategie.

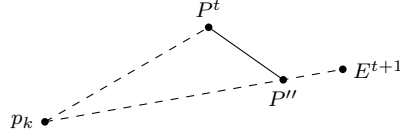
Zur Lösung des „Kollisionsproblems“

Modifikation von SPHERES nach (A-B-G '09) zu ROTATING SPHERES . Die Idee besteht darin die Mittelpunkte p_k in jedem Schritt so zu bewegen, dass

- $P_k^{t+1} \in D$
- (BC) erhalten bleibt
- Die Bälle um P_k hinreichend wachsen, so dass der Bewegungsspielraum von E eingeschränkt wird.

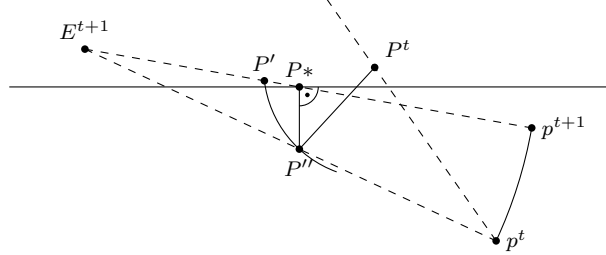
Rotating Spheres

- *Initialisierung:* Wähle Punkte p_k^0 auf dem Strahl von E durch P_k so, dass $P_k \in \overline{Ep_k}$ gilt und die Komponente von $D \setminus \bigcup_{k \leq N} \mathbb{B}_{d(p_k, P_k)}(p_k)$ welche E enthält, beschränkt ist. (folgt aus (BC))
- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(D, p_k^t, P_k^t, E^{t+1})$
- $P_k'' \in \overline{p_k^t E^{t+1}}$ mit $d(P_k^t, P_k'') = 1$ und $d(P_k'', E^{t+1})$ minimal



Falls $P'' \in D$: $P_k^{t+1} = P''$, $p_k^{t+1} = p_k^t$

Falls $P'' \notin D$: Betrachte die folgende Zeichnung



Es bezeichne P^* die orthogonale Projektion von P'' auf D und p_k^{t+1} den Punkt auf dem Strahl von E^{t+1} durch P^* mit $d(E^{t+1}, p_k^t) = d(E^{t+1}, p_k^{t+1})$. Dann sei $P_k^{t+1} = P'$ der Punkt auf $\overline{p_k^{t+1} E^{t+1}}$ mit $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$ und $d(P_k^{t+1}, E^{t+1})$ minimal.

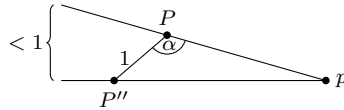
Satz (A-B-G '09)

Für jedes konvexe Gebiet D ist ROTATING SPHERES erfolgreich, wenn die Konfiguration D, P_1, \dots, P_N die Bedingung (BC) erfüllt.

Beweisskizze

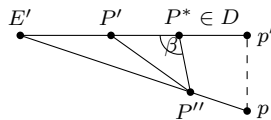
1) Es gilt $d(p_k^{t+1}, P_k^{t+1})^2 > d(p_k^t, P_k^t)^2 + 1$. Setze $p = p_k^t$, $p' = p_k^{t+1}$, $P = P_k^t$, $P' = P_k^{t+1}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Falls $P'' \in D$: Es gilt



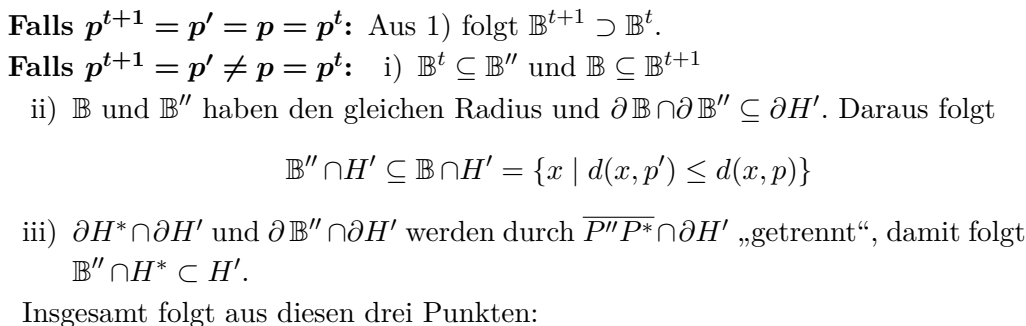
$$d(p, P'')^2 = d(p, P)^2 + d(P, P'')^2 - 2d(p, P)d(P, P'') \cdot \underbrace{\cos \alpha}_{< 0} > d(p, P)^2 + 1$$

Falls $P'' \notin D$: Es gilt



$P^* = \text{proj}_D(P'') \in D$, $P'' \notin D$, $E \in D$. Damit folgt für den Winkel $\beta = \angle_{P^*}(E', P'') \geq \frac{\pi}{2}$ und $d(p, P'') \leq d(p', P^*) \leq d(p', P')$, der Rest geht weiter wie oben.

2) Setze $C^t = D \setminus \bigcup_{k \leq N} \mathbb{B}_k^t$, $\mathbb{B}_k^t = \mathbb{B}_{d(p_k^t, P_k^t)}(p_k^t)$. Behauptung: $\overline{C^{t+1}} \subseteq C^t$.



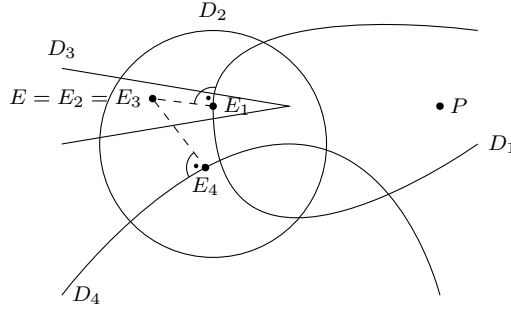
Daraus folgt $\overline{C^{t+1}} \subset C^t$.

- $$\begin{aligned} x_k \in \mathbb{B}_k^t \cap D &\subseteq \mathbb{B}_k'' \cap H_k^* \\ &\subseteq H' = \{x \mid d(x, p^{t+1}) \leq d(x, p)\}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(C_1 + C_2)^2 &\stackrel{(3)}{\geq} (d(x_k, p_k^t) + d(x_k, E^t))^2 \\
&\stackrel{(4)}{\geq} d(p_k, E^t)^2 \\
&\geq d(p_k, P_k^t)^2 \\
&\stackrel{(1)}{\geq} d(p_k^0, P_k^0) + t
\end{aligned} \tag{\square}$$

Anwendung/Verallgemeinerung

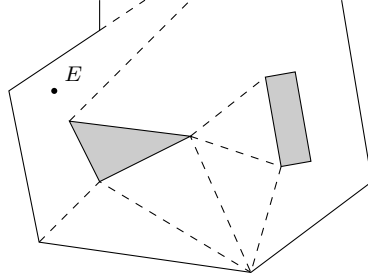
Betrachte Gebiete $D \subseteq \mathbb{R}^n$, welche sich als endliche Vereinigung konvexer abgeschlossener D_α schreiben lassen.



Es seien $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener konvexer Gebiete D_α . Für $E \in D$ bezeichne $E_\alpha = \text{proj}_{D_\alpha}(E)$. Eine Konfiguration $D, E, \{P_k\}$ erfüllt **(EBC)**, falls eine Partition von $\{P_k\}$ in Mengen $\{P_{\alpha i} \mid i \leq N_\alpha\} \subset D_\alpha$ existiert, so dass für $D_\alpha, E_\alpha, \{P_{\alpha i}\}$ (BC) gilt. In diesem Fall existiert eine erfolgreiche Verfolgerstrategie. Die Schrittweite ≤ 1 für E (bezüglich der Längenmetrik von $D = \bigcup D_\alpha$) impliziert $d(E^t, E^{t+1}) \leq 1$ in der Metrik (jedes) \mathbb{R}^{n_α} .

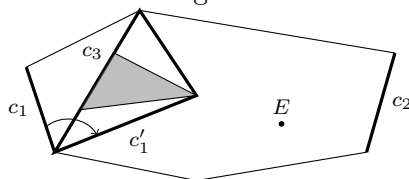
Da jedes proj_{D_α} Abstände nicht vergrößert, gilt auch für alle E_α Schrittweite ≤ 1 . In jedem Gebiet D_α gilt nach endlicher Zeit $P_{\alpha, i}^t = E_\alpha = \text{proj}_{D_\alpha}(E)$. Falls $E_\alpha \neq E$, setze $P_{\alpha, i}^T = E_\alpha^T$ für alle $T \geq t$. Nach endlicher Zeit gilt dann $P_{\alpha, i_\alpha}^t = E_\alpha^t$ für alle α und damit ist $E^t = E_{\bar{\alpha}}^t$ für ein $\bar{\alpha}$, das heißt $P_{\bar{\alpha}, i_{\bar{\alpha}}}^t = E^t$.

Bhadanin-Ister '12: In jedem einfachen kompakten Polygon mit Hindernissen existiert eine erfolgreiche Verfolgerstrategie.



Bei Polygonen kann man für Hindernisse eine Triangulierung wählen. Der Nachteil dabei ist dass man einen Verfolger pro Gebiet braucht. Dies funktioniert auch, wenn das Gebiet in eine Richtung unbeschränkt ist.

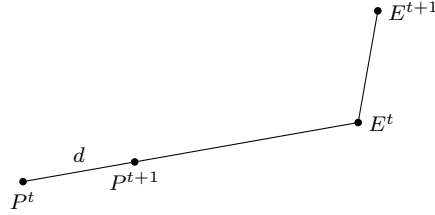
- A) **(Aigner-Fromme '84)** Jedes P kann ein geodätisches Segment c „bewachen“, das heißt E wird gefangen, falls es c überquert.
- B) **(Ister et al. '05)** in jedem einfach zusammenhängenden Polygon existiert eine erfolgreiche Strategie mit einem Verfolger.



Wähle Kanten(züge) $c_1 \ni P_1$ und $c_2 \ni P_2$. Setzt c_3 so, dass D in Komponenten zerfällt. Dann ist entweder P_1 oder P_2 frei. Nach endlicher Zeit liegt E in einem einfach zusammenhängenden Polygon.

4 Geometrische Charakterisierung von Flucht- und Verfolgerkurven

Im Folgenden sei das Soielfeld D ein CAT(0)- (beziehungsweise CAT(1)-) Raum. Alle Resultate beziehen sich auf GREEDY mit der Schrittweite $d > 0$, das heißt $P^{t+1} \in \overline{P^t E^t}$ mit $d(P^t, P^{t+1}) = d$.



Wie spiegelt sich der Ausgang eines Spiels in der Geometrie der Kurven P^t , beziehungsweise E^t , wider? Dabei verstehen wir die Wege P^t , beziehungsweise E^t , als stückweise geodätische Kurven $P = \bigcup \overline{P^t P^{t+1}}$. Für $d = 1$ ist P beziehungsweise E nach der Bogenlänge parametrisiert.

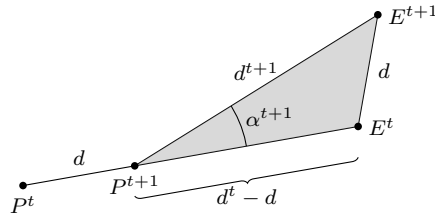
Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

Ist D ein CAT(0)-Raum, so ist D genau dann kompakt, wenn P stets gewinnt (mit einem Verfolger).

Beweis

Ist D nicht kompakt, so existiert ein geodätischer Strahl als Fluchtstrategie.

Angenommen es existiert eine Fluchtstrategie. Für den Verfolgerabstand $d^t = d(P^t, E^t)$ gilt $d^{t+1} \leq (d^t - d) + d = d^t$.



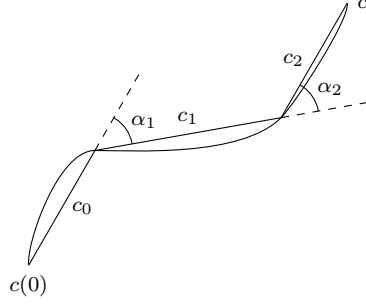
Also konvergiert d^t monoton fallend gegen ein $d^\infty > d$. Betrachtet man den euklidischen Vergleichswinkel $\bar{\alpha}^t$ zu $\alpha^t = \angle_{P^t}(E^{t+1}, E^t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \cos \bar{\alpha}^{t+1} &= \frac{(d^{t+1})^2 + (d^t - d)^2 - d^2}{2d^{t+1}(d^t - d)} \\ &= \frac{(d^{t+1})^2 + (d^t)^2 - 2d^t}{2d^{t+1}(d^t - d)} \\ &\rightarrow \frac{2d^\infty(d^\infty - d)}{2d^\infty(d^\infty - d)} = 1. \end{aligned}$$

Also konvergiert $\bar{\alpha}^t$ gegen 0. Da für Vergleichswinkel stets $\alpha^t \leq \bar{\alpha}^t$ gilt, folgt $\alpha^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. □

Erinnerung

Es sei c eine reguläre ebene Kurve $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und κ die Krümmung von c . Dann ist $\tau_c = \int_0^l \kappa$ die **Totalkrümmung** von c . Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\kappa = \|\ddot{c}\|$. Bezeichnet ϑ die Drehwinkelfunktion von \dot{c} , das heißt $\dot{c}(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$, so gilt $\|\ddot{c}\| = \|(-\vartheta' \sin \vartheta, \vartheta' \cos \vartheta)\| = |\vartheta'|$. Damit ist die Totalkrümmung die akkumulierte Winkeländerung von c .



Ist c_1, \dots, c_n eine Polynomapproximation von c , so ist die Summe der Komplementärwinkel $\alpha_i = \pi - \beta_i = \pi - \angle(c_{i-1}, c_i)$ eine Approximation der Totalkrümmung von c .

Definition (Totalkrümmung)

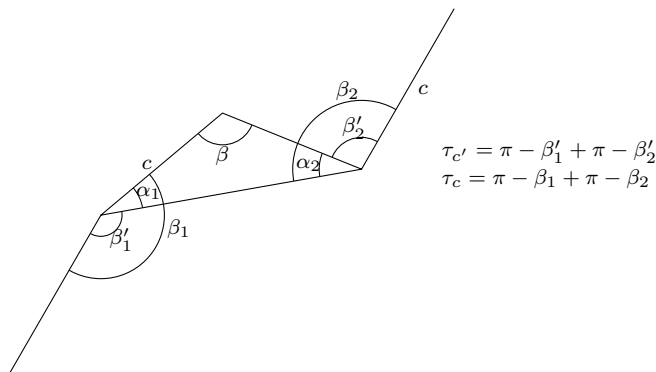
Es sei c eine stückweise geodätische Kurve in einem $\text{CAT}(\kappa)$ -Raum. Sind $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = l$ so, dass $c_i = c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ geodätisch Segmente sind, so bezeichne $\beta_i = \angle_{c(t_i)}(c_{i-1}, c_i)$ die Innenwinkel. Die **Totalkrümmung** von c sei $\tau_c = \sum_i \pi - \beta_i$. Für eine beliebige Kurve sei

$$\tau_\gamma = \limsup \{ \tau_c \mid c \text{ Polygonapproximation von } \gamma \}$$

$$\tau_\gamma(t) = \tau_\gamma|_{[0, t]}$$

Im Fall von $\text{CAT}(0)$ gilt Monotonität.

Ist c eine Verfeinerung einer Polygonapproximation c' von γ , so gilt $\tau_{c'} \leq \tau_c$, wie man an der Zeichnung erkennen kann:



Es gilt

$$\begin{aligned}
 \tau_c &= \pi - \beta_1 + \pi - \beta + \pi - \beta_2 \\
 &\geq \pi - (\beta'_1 + \alpha_1) + \pi - \beta + \pi - (\beta'_2 + \alpha_2) \\
 &= \underbrace{\pi - \beta'_1 + \pi - \beta'_2}_{\tau_{c'}} + \underbrace{\pi - (\beta + \alpha_1 + \alpha_2)}_{\leq \bar{\beta} + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \pi} \\
 &\geq \tau_{c'}
 \end{aligned}$$

Definition (Umfang einer Kurve)

Es sei c eine Kurve. Der **Umfang** R_c von c ist der Radius des kleinsten Balles, der das Bild von c enthält:

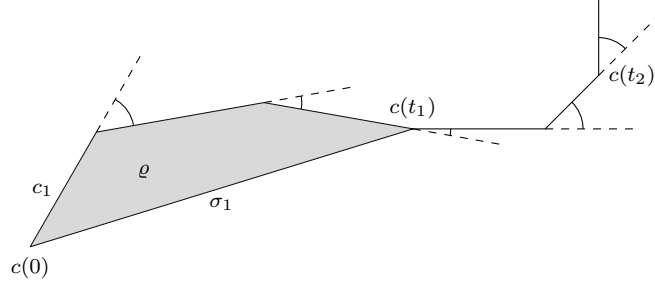
$$R_c(t) = \inf\{R \mid \text{Bild } c|_{[0,t]} \subset \mathbb{B}_R(c(0))\} = \sup_t \{d(c(0), c(t))\}$$

Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einem CAT(0)-Raum. Dann gilt

- (i) Gilt $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_c(t)}{t} = 0$, so folgt dass c unbeschränkt ist.
- (ii) Falls $\tau_c(t) \leq \text{const} \cdot t^\lambda$ für ein $\lambda \in (0, 1)$ gilt (das heißt $\tau_c \in O(t^\lambda)$), so folgt $R_c(t) \geq \text{const} \cdot t^{1-\lambda}$ für hinreichend große t (das heißt $R_c \in \Omega(t^{1-\lambda})$).

Man kann $c|_{[0,t]}$ durch eine hinreichend feine Polynomapproximation ersetzen:



Wähle eine Partitionierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ so, dass $c_i = c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ eine Totalkrümmung $\leq \frac{\pi}{2}$ hat mit $n \leq \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1$. Es bezeichne σ_i die Sekante $c(t_{i-1})c(t_i)$ und ρ_i das durch c_i und σ_i definierte Polygon. Jede Kurve (und insbesondere jedes Polygon) in einem CAT(κ)-Raum lässt sich „ausfüllen“.

Satz (Rechetnyak 1968)

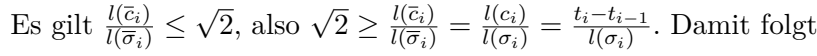
Es sei c eine geschlossene Kurve in einem CAT(κ)-Raum X mit $l(c) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Dann existiert ein konvexes Gebiet $C \subseteq M_\kappa^2$ und eine Bogenlängenparametrisierung \bar{c} von ∂C , sowie eine nicht-expandierende Abbildung $\varphi : C \rightarrow X$ mit $\varphi \circ \bar{c} = c$.

Beweisskizze

Man sieht leicht ein, dass falls $c|_{[a,b]}$ geodätisch ist, so auch $\bar{c}|_{[a,b]}$ und dass für Winkel β , beziehungsweise $\bar{\beta}$ solcher aufeinanderfolgender Segmente $\beta \leq \bar{\beta}$ gilt. (□)

Beweis (zu Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

- (i) Es existiert zu ρ_i ein konvexes Polygon $\bar{\rho}_i$ mit den gleichen Seitenlängen wie ρ_i . Wie auch ρ_i besteht $\bar{\rho}_i$ aus einem konvexen Polygon \bar{c}_i mit der Totalkrümmung $\tau_{\bar{c}_i} = \sum \pi - \bar{\beta}_i \leq \sum \pi - \beta_i \leq \frac{\pi}{2}$ und eine Sekante σ_i .



also

Ist c beschränkt, so folgt $\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \text{const} > 0$. Sei nun ohne Einschränkung c eine Polynomapproximation. Zerlege c in $n \leq \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1$ Teilkurven c_i mit $\tau_{c_i} \leq \frac{\pi}{2}$. Bezeichnet σ_i die Sekante der Teilkurve c_i , so gilt

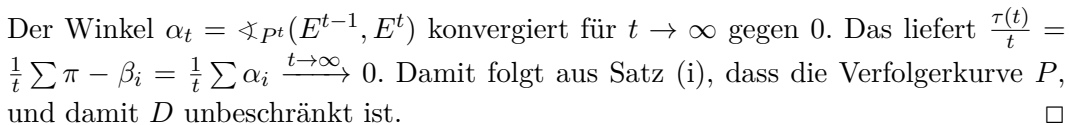
und es folgt

und

Wenn c unbeschränkt ist, so ist $l(\sigma_i)$ beschränkt. Daraus folgt $\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \text{const} > 0$ für $t \gg 0$ und damit folgt die Aussage von (i).

$$t \leq \underbrace{\sqrt{2} \left(\frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)}_{\leq \text{const} \cdot t^\lambda} \underbrace{\sup l(\sigma_i)}_{\leq 2R_c(t)} \leq \text{const} \cdot t^\lambda \cdot R_c(t)$$

Es wurde bereits gezeigt, dass eine erfolgreiche Flucht gilt:

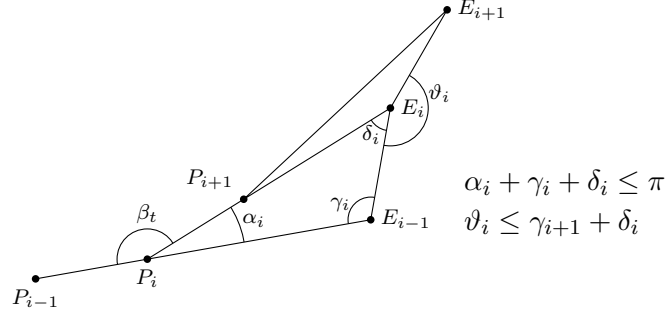


Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

Es sei D ein $\text{CAT}(0)$ -Raum. Dann gilt $\tau_P \leq \tau_E + \pi$.

Beweis

Betrachte die folgende Zeichnung:



Es gilt

$$\begin{aligned}
 \tau_P(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \beta_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \gamma_i - \delta_i \\
 \tau_E(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \vartheta_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \gamma_{i+1} - \delta_i \\
 \tau_P - \tau_E(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\pi - \gamma_i - \delta_i) - (\pi - \gamma_{i+1} - \delta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{i+1} - \gamma_i = \gamma_n - \gamma_1 \leq \pi
 \end{aligned}
 \quad \square$$

5 Positive Krümmungsschranken

Im Folgenden Sei D stets ein $\text{CAT}(1)$ -Raum. Beispiele für solche Räume sind die Einheitssphäre \mathbb{S}^n , die euklidische Ebene mit ausgeschnittenem offenen Ball $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_1^o$ oder verallgemeinert $\mathbb{R}^n \setminus \dot{\bigcup} \mathbb{B}_1^o(p_i)$

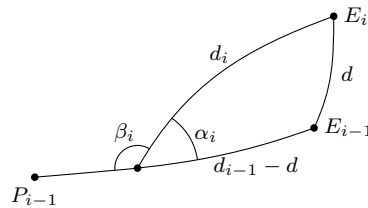
Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

Es sei D ein $\text{CAT}(1)$ -Raum und E_t eine erfolgreiche Fluchtstrategie mit $d_0 = d(E_0, P_0) < \pi$. Dann gilt

$$\tau_p(t) \leq \text{const} \cdot \sqrt{t}.$$

Beweisskizze

Betrachte die Zeichnung



Aus der Dreiecksungleichung folgt $d_i \leq (d_{i-1} - d) + d = d_{i-1}$, also ist d_i monoton fallend. Es gilt

$$d_i \leq d_0 < \pi$$

Damit hat jedes Dreieck $\Delta P_i E_{i-1} E_i$ den Umfang $< 2\pi$ und besitzt damit ein eindeutiges Vergleichsdreieck in \mathbb{S}^2 . Damit gilt für den Vergleichswinkel $\bar{\alpha}_i$ dass $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$ und es gilt

$$\tau_p(t) = \sum \pi - \beta_i \leq \sum \alpha_i \leq \sum \bar{\alpha}_i.$$

Falls E_i eine erfolgreiche Fluchtstrategie ist, gilt $d_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} d_i > d$. Es sei $\delta_i = d_i - d_{i-1} \geq 0$. Wendet man den sphärischen Kosinussatz auf das Vergleichsdreieck an, so folgt

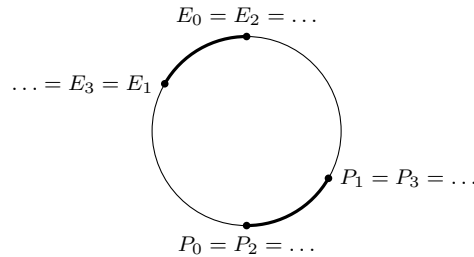
$$\cos d \leq \cos d + \delta_i \sin d - \text{const} \cdot \bar{\alpha}_i^2$$

und daraus folgt $\bar{\alpha}_i^2 \leq \text{const} \cdot \delta_i \cdot d$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \tau_p(nd) &\leq \sum \bar{\alpha}_i \leq \sqrt{(n-1) \sum \bar{\alpha}_i^2} \\ &\leq \sqrt{(n-1) \cdot \text{const} \cdot d \cdot (d_0 - d_\infty)} \\ &\leq \text{const} \sqrt{nd} \end{aligned} \quad (\square)$$

Bemerkung (zu $d_0 < \pi$)

Betrachte das folgende Szenario in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_{\frac{3}{2}}(0)$



E und P starten an gegenüberliegenden Polen. Im ersten Schritt läuft E den Kreis entlang nach links, während P nach rechts läuft. Da P jedes mal eine Geodätische wählt und es nun zwei kürzeste Wege gibt kann P diese ungeschickte Wahl treffen. In zweiten Schritt läuft E wieder zurück, während P erneut die unglückliche Wahl trifft und ebenfalls zurückläuft. E und P wiederholen diese Prozedur immer wieder und treffen sich niemals, weshalb $\tau_P(t)$ in diesem Szenario linear wächst.

Korollar

Ist D ein $\text{CAT}(0)$ -Raum und E_t erfolgreich, so gilt $\tau_P(t) \leq \text{const} \sqrt{t}$.

Beweis

Winkel sind invariant unter Skalierungen. Damit sind die $\text{CAT}(0)$ Bedingung und die Totalkrümmung invariant. Sei $\tilde{d}(\cdot, \cdot) = \frac{\pi}{2d_0} d(\cdot, \cdot)$ die skalierte Metrik, dann ist $\tilde{d}_0 = \frac{\pi}{2} < \pi$. Der Rest folgt aus dem Satz. \square

Korollar

Unter denselben Voraussetzungen wie in obigem Korollar gilt $R_E(t) \geq \text{const}$.

Beweis

Es gilt $R_P(t) \geq \text{const} \sqrt{t}$ nach dem obigen Korollar und Satz (ii). Ferner gilt

$$d(E_0, E_t) \geq d(P_0, P_t) - d(P_t, E_t) - d(E_0, P_0) \geq d(P_0, P_t) - \text{const}$$

Daraus folgt

$$R_E(t) = \sup\{d(E_0, E_t)\} \geq \dots \geq \text{const} \cdot R_P(t) \geq \text{const} \sqrt{t} \quad \square$$