

Kapitel 1

Schemata

§ 1 Garben

Definition 1.1

Sei X ein **topologischer Raum**, \mathcal{C} eine **Kategorie**. Eine **Prägarbe** \mathcal{F} auf X mit Werten in \mathcal{C} besteht aus einer Abbildung $\text{Off}(X) \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}$, $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ und **Morphismen** $\rho_U^{U'} : \mathcal{F}(U') \rightarrow \mathcal{F}(U)$ für alle $U \subseteq U'$ offen, sodass gilt:

- i) $\rho_U^U = \text{id}_U$ für alle $U \in \text{Off}(X)$
- ii) $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$ für alle $U \subseteq U' \subseteq U''$ in $\text{Off}(X)$

Bemerkung 1.2

Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X mit Werten in \mathcal{C} ist dasselbe wie ein kontravarianter **Funktor** $\mathcal{F} : \text{Off}(X) \rightarrow \mathcal{C}$.

Definition 1.3

Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X mit Werten in \mathcal{C} heißt **Garbe**, wenn für jedes $U \in \text{Off}(X)$, jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U und jede Familie $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ mit $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gilt:

Es gibt *genau ein* $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$. Dieses s wird als **Amalgam** bezeichnet.

Beispiele

- 1) X quasi-**projektive Varietät** über einem Körper k , $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$
Ring der **regulären Funktionen** auf U .
 $\Rightarrow \mathcal{O}_X$ ist Garbe von Ringen auf X (k -Algebren)
- 2) X topologischer Raum, $\mathcal{C}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
 \mathcal{C}_X ist Garbe von Ringen
- 3) Sei X topologischer Raum, G Gruppe, $\mathcal{G}(U) := G$ für alle $U \subseteq X$ offen, $\rho_U^{U'} = \text{id}_G$. Seien U, U' offen in X mit $U \cap U' = \emptyset$
 $\tilde{U} = U \cup U'$?!

Finde kein $g \in \mathcal{G}(\tilde{U}) = G$ mit $g = \begin{cases} \rho_{\tilde{U}}^U(g) & = g_1 \neq g_2 \\ \rho_{\tilde{U}}^{U'}(g) & = g_2 \neq g_1 \end{cases}$

Bemerkung 1.4

Sei X topologischer Raum, \mathcal{F} Garbe auf X . Dann ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ einelementig.

Beweis

Überdecke \emptyset durch eine leere Menge von offenen Teilmengen! Jedes $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ erfüllt $\rho_{\emptyset}^{U_i}(s_i) = s$ für alle $i \in \emptyset$, $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i$. Also gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$. \square

Definition 1.5

Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F}, \mathcal{G} Prägarben auf X .

Ein **Morphismus** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \text{Off}(X) \rightarrow \mathcal{C}$, das heißt φ besteht aus Morphismen (in \mathcal{C}) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ für jedes $U \in \text{Off}(X)$, die die folgenden Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & \mathcal{G}(U') \\ \rho_U^{U'} \downarrow & \quad \quad \quad \Downarrow & \downarrow \rho_U^{U'} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array} \quad \text{für alle } U \subseteq U' \text{ in } \text{Off}(X)$$

Definition + Bemerkung 1.6

Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X .

a) Für ein $x \in X$ sei ein **Halm** definiert als

$$\mathcal{F}_x = \lim_{x \in U \in \text{Off}(X)} \mathcal{F}(U) = \{(U, s) : x \in U \in \text{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

wobei $(U, s) \sim (U', s') \Leftrightarrow \exists x \in U'' \subseteq U \cap U'$ mit $\rho_{U''}^U(s) = \rho_{U''}^{U'}(s')$. \mathcal{F}_x heißt **Halm** von \mathcal{F} in x .

b) Für $x \in U \in \text{Off}(X)$ sei $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, s \mapsto (U, s)_{\sim} =: s_x$ der **natürliche Morphismus**.

c) (UAE)

Für jedes $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und jede konsistente Familie $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow C$ von Morphismen in \mathcal{C} gibt es genau einen Morphismus $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow C$ mit $\varphi_x \circ \sigma_x = \varphi_U$ für alle U

$$(U, s)_{\sim} \mapsto \varphi_U(s)$$

d) Jeder Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induziert für jedes $x \in X$ einen Morphismus

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

Bemerkung 1.7

Sei \mathcal{F} Garbe von abelschen Gruppen auf X , $U \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt:

$$s = 0 \Leftrightarrow s_x = 0 \text{ für alle } x \in U$$

Beweis

„ \Rightarrow “: \checkmark

„ \Leftarrow “: Für jedes $x \in U$ gibt es Umgebung U_x mit $s|_{U_x} = 0$. ($s|_{U_x} = \rho_{U_x}^U$). Die $(U_x)_{x \in U}$ bilden offene Überdeckungen, die $s|_{U_x}$ bilden konsistente Familie, s und 0 sind beides Amalgam $\xrightarrow[\text{eigenschaft}]{\text{Gruppen-}}$ $s = 0$ \square

Proposition 1.8

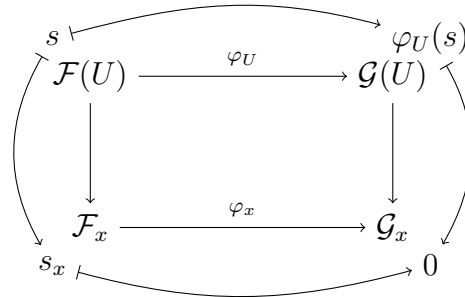
Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Garben von abelschen Gruppen auf X , $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Morphismus.

- a) φ_U injektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ injektiv für alle $x \in X$
- b) φ_U surjektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Rightarrow \varphi_x$ surjektiv für alle $x \in X$
- c) φ_U bijektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ bijektiv für alle $x \in X$

Beweis

- a) „ \Rightarrow “: Sei $x \in X, s_x \in \mathcal{F}$ mit $\varphi_x(s_x) = 0$.

\exists Umgebung von x und $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = \text{Keim}$ von s in x mit $\varphi_x(s_x) = \text{Keim}$ von $\varphi_U(s)$ in $x = \varphi_U(s)_x$

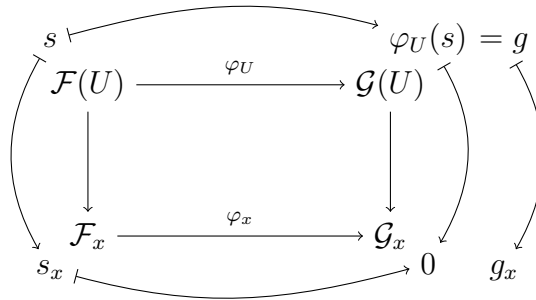


$$\Rightarrow \text{OE } \varphi_U(s) = 0 \xrightarrow[\text{injektiv}]{\varphi_U} s = 0$$

„ \Leftarrow “: Sei $U \subset \text{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = 0$

$$\Rightarrow \text{für alle } x \in U \text{ ist } \varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x = 0 \xrightarrow{\varphi \text{ injektiv}} s_x = 0 \xrightarrow{1.7} s = 0$$

- b) „ \Rightarrow “: Sei $g_x \in \mathcal{G}_x, (U, g)$ Repräsentant $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = g \Rightarrow \varphi_x(s_x) = g$



Beispiel

Sei $X = \mathbb{C}$, \mathcal{O} die Garbe der **holomorphen Funktionen** auf \mathbb{C} , \mathcal{O}^\times die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen. $\varphi = \exp$, das heißt für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $\varphi(f) = e^{2\pi i f}$.

φ ist Garbenhomomorphismus ($e^{f+g} = e^f \cdot e^g$). φ_x ist surjektiv für jedes $x \in X$ (lokal gibt es zu jeder holomorphen Funktion ohne Nullstellen einen Logarithmus). $\varphi_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ ist nicht surjektiv! (zum Beispiel gibt es keine holomorphe Funktion $\log z$ auf ganz \mathbb{C})

Schlimmer noch: φ_U ist nicht injektiv für jedes $U \in \text{Off}(\mathbb{C})$, das nicht einfach zusammenhängend ist.

c) „ \Rightarrow “: ✓

„ \Leftarrow “: Sei $U \subseteq X$ offen, $g \in \mathcal{G}(U)$.

Für jedes $x \in U$ gibt es $s_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(s_x) = g_x$. Wähle Repräsentanten $(U_x, s^{(x)})$ von s_x , sodass $\varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x}$ (das geht!) (denn: Sei (U, \tilde{s}) Repräsentant von $s_x \Rightarrow \varphi_U(\tilde{s}) \sim_x g|_U \Rightarrow \exists x \in U_x \subset U : \varphi_U(\tilde{s})|_{U_x} = g|_{U_x}$)

Die U_x bilden offene Überdeckungen von U , die $s^{(x)}$ bilden konsistente Familie (*)
 \Rightarrow Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s)|_{U_x} = \varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x} \Rightarrow \varphi_U(s) = g$.

(*) zu zeigen: $s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$

denn: $\varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(x)}|_{U_x \cap U_y}) = \varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(y)}|_{U_x \cap U_y})$, $\varphi_{U_x \cap U_y}$ injektiv nach Voraussetzung und a) \Rightarrow Behauptung \square

Proposition + Definition 1.9

Sei X topologischer Raum, \mathcal{F} Prägarbe auf X (mit Werten in \mathcal{C})

a) Es gibt genau eine Garbe \mathcal{F}^+ auf X und einen Morphismus $\vartheta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, sodass $\vartheta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ für jedes $x \in X$ ein **Isomorphismus** ist.

b) \mathcal{F}^+ heißt **zu \mathcal{F} assoziierte Garbe**.

c) (UAE)

Für jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ in eine Garbe \mathcal{G} gibt es genau einen Morphismus $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\varphi = \varphi^+ \circ \vartheta$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\vartheta} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

Beweis

a) Für $U \in \text{Off}(X)$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(U) &:= \{s : U \rightarrow \dot{\bigcup}_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s(x) \in \mathcal{F}_x \forall x \in U, \text{ zu jedem } x \in U \\ &\quad \text{gibt es Umgebung } U_x \text{ und } f \in \mathcal{F}(U) \text{ mit } s(y) = f_y \\ &\quad \text{für jedes } y \in U_x\} \end{aligned}$$

\mathcal{F}^+ ist Garbe ✓

Sei $\vartheta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ gegeben durch

$$\boxed{\vartheta_U(f)(x) = f_x \quad (U \in \text{Off}(X), f \in \mathcal{F}(U))}$$

ϑ ist Morphismus: ✓

ϑ ist Isomorphismus: ✓ \square

Definition + Bemerkung 1.10

Sei $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X .

- a) Sei $\text{Kern}(\varphi)$ die Prägarbe $\text{Kern}(\varphi)(U) := \text{Kern}(\varphi_U)$.
b) $\text{Kern}(\varphi)$ ist Garbe.
c) φ heißt **injektiv** (oder **Monomorphismus**) : $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi) = 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \\ \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \end{array}$$

$$\varphi \text{ Monomorphismus} \Leftrightarrow \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$$

- d) Sei \mathcal{B}_φ die Prägarbe $\mathcal{B}_\varphi(U) := \text{Bild}(\varphi_U)$

$$\text{Bild}(\varphi_U) := \mathcal{B}_\varphi^+$$

- e) φ heißt **surjektiv** (oder **Epimorphismus**) : $\Leftrightarrow \text{Bild}(\varphi) = \mathcal{G}$

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \begin{array}{l} \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{H}_1 \\ \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{H}_2 \end{array}$$

$$\varphi \text{ Epimorphismus} \Leftrightarrow \psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$$

Beweis

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & \mathcal{G}(U') \\ \rho_U^{U'} \downarrow & & \downarrow \rho_U^{U'} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

- b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $U \in \text{Off}(X)$, $s_i \in \text{Kern}(\varphi_{U_i}) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ konsistente Familie.

Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$. $\varphi_x(s_x) = 0$ für jedes $x \in U \xrightarrow{1.8a)} \varphi_U(s) = 0$

- e) $\text{Bild}(\varphi) = \mathcal{G} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Bild}(\varphi)_x}_{=\text{Bild}(\varphi_x)} = \mathcal{G}_x$ für alle x

φ Epimorphismus \Leftrightarrow für jedes $x \in X$ ist φ_x surjektiv, das heißt $\text{Bild}(\varphi_x) = \mathcal{G}_x$. \square

Definition 1.11

Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Garben abelscher Gruppen auf X , $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ Monomorphismus.

- a) \mathcal{G} heißt **Untergarbe** von \mathcal{F} .

- b) $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ ist Prägarbe auf X , die assoziierte Garbe \mathcal{F}/\mathcal{G} heißt **Quotientengarbe**.

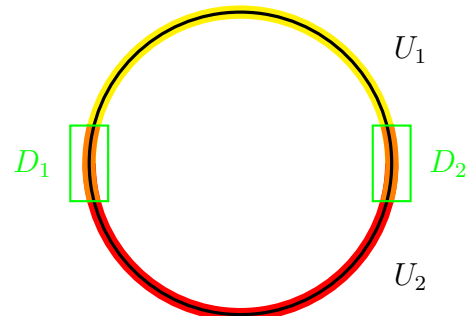
Beispiel

Sei $X = S^1$ (Einheitskreislinie)

$\mathcal{F} = \mathcal{C}$ (stetige Funktionen $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$)

\mathcal{G} = konstante Garbe \mathbb{Z}

$U = x, U_1, U_2$ wie im Bild



$$U_1 \cap U_2 = D_1 \cup D_2$$

Sei $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ mit $f_1|_{D_1} = 0, f_1|_{D_2} = 1, 0 = f_2 \in \mathcal{F}(U_2) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$ (!)
 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ in $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)/\mathcal{G}(U_1 \cap U_2) \Rightarrow (\bar{f}_i \in \mathcal{F}(U_i)/\mathcal{G}(U_i))_{i=1,2}$ ist konsistente Familie.
 Aber: Es gibt kein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_1} = f_1, f|_{U_2} = f_2$

Proposition 1.12

Sei X topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $x \in X$.

- Die Zuordnung $\Phi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ induziert exakten kovarianten Funktor von der Kategorie $\underline{\text{Sh}}(X)$ der Garben abelscher Gruppen auf X in die Kategorie $\underline{\text{Ab}}$ der abelschen Gruppen. Dabei ist $\Phi_x(\varphi) = \varphi_x$ für $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Morphismus.
- Die Zuordnung $\Phi_U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(U)$ induziert linksexakten kovarianten Funktor $\underline{\text{Sh}}(X) \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ (mit $\Phi_U(\varphi) = \varphi_U$)

Beweis

(*) Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exakte Sequenz in $\underline{\text{Sh}}(X)$. *Achtung:* Das bedeutet *nicht*, dass für jedes $\tilde{U} \in \text{Off}(X)$ die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}'(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{F}''(\tilde{U}) \rightarrow 0$ exakt sein muss.

Aber: (*) ist äquivalent zu: $0 \rightarrow \mathcal{F}'_y \xrightarrow{\varphi_y} \mathcal{F}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{F}''_y \rightarrow 0$ ist exakt für jedes $y \in X$

\Rightarrow a)

b) Φ_U linksexakt bedeutet:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0 \text{ ist exakt}$$

□

Das stimmt nach 1.8 und ...

Definition + Bemerkung 1.13

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig.

a) Sei \mathcal{F} Garbe auf X .

Dann ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ auf Y eine Garbe, sie heißt (direkte) **Bildgarbe** von \mathcal{F} (unter f). Bezeichnung: $f_*\mathcal{F}$

b) Sei \mathcal{G} Garbe auf Y .

Die zur Prägarbe $U \mapsto \lim_{\substack{f(U) \subseteq V \\ V \in \text{Off}(Y)}} \mathcal{G}(V)$ assoziierte Garbe heißt **Urbildgarbe** von \mathcal{G} .

Bezeichnung: $f^{-1}(\mathcal{G})$

c) f_* und f^{-1} sind kovariante Funktoren.

Beweis

a) Sei $U \subseteq Y$ offen, $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U , also $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f^{-1}(U)$. $s_i \in \underbrace{f_*\mathcal{F}(U_i)}_{=\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$, $i \in I$, konsistente Familie.

$\Rightarrow \exists$ Amalgam $s \in \underbrace{\mathcal{F}(f^{-1}(U))}_{=f_*\mathcal{F}(U)}$ mit $s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$ für alle $i \in I$.

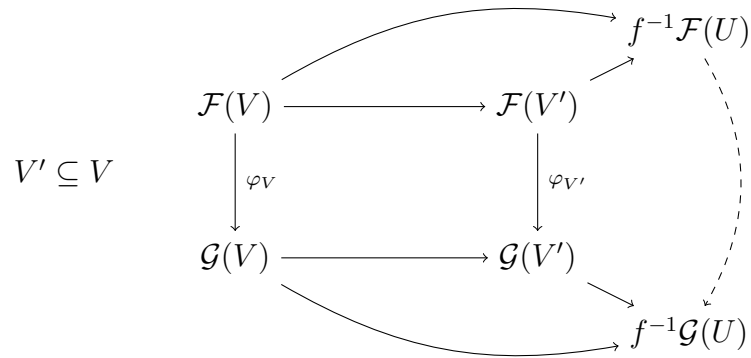
c) Sei $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Morphismus von Garben auf X .

i) Definiere $\varphi_* : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ durch

$$(\varphi_*)_U = \varphi_{f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow f_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

□

ii) Definiere $f^{-1}\varphi : f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ durch $(f^{-1}\varphi)_U = \lim_{f^{-1}(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} \varphi_V$



Proposition 1.14

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, \mathcal{F} eine Garbe auf X , \mathcal{G} Garbe auf Y . Dann gibt es eine (natürliche) Bijektion

$$\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Das bedeutet: f^{-1} ist linksadjungiert zu f_* .

Beweis

Definiere $\varphi_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ und $\psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$

Dann:

$$T_1 : \begin{cases} \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \alpha & \mapsto & f_*(\alpha) \circ \psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*\alpha} f_*\mathcal{F} \end{cases}$$

Analog: $T_2 : \beta \mapsto \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}(\beta)$

Rest: Übung

□

§ 2 Affine Schemata

Behauptung: $\alpha : R \rightarrow R'$ Ringhomom, $\mathfrak{p} \subset R'$ **Primideal** $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ Primideal in R

Beweis: Seien $f, g \in R$ mit $f \cdot g \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha(f \cdot g)}_{=\alpha(f) \cdot \alpha(g)} \in \mathfrak{p} \xrightarrow{\text{OE}} \alpha(f) \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$$

Definition + Bemerkung 2.1

Sei R ein Ring (das heißt kommutativer Ring mit Eins)

- $\text{Spec } R := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt **Spektrum** von R .
- Für $I \subseteq R$ sei $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : I \subseteq \mathfrak{p}\}$. $V(I)$ heißt **Nullstellenmenge** (vanishing set) von I , es ist $V(I) = V((I))$.
- Die $V(I)$, $I \subseteq R$ Ideal, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\text{Spec } R$, der **Zariski Topologie**.
- Für $V \subseteq \text{Spec } R$ heißt $I(V) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$ **Verschwindungsideal** von V .

Beweis

c) $\emptyset = V(R)$

$$\text{Spec } R = V(0)$$

$$\bigcap_{i \in I} V(I_i) = \bigcap_{i \in I} \{\mathfrak{p} \in I_i \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : I_i \subseteq \mathfrak{p} \forall i\} = V\left(\bigcup_{i \in I} I_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} I_i\right)$$

$$V(I_1) \cup V(I_2) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : I_1 \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I_1 \cdot I_2) \stackrel{?}{=} V(I_1 \cap I_2)$$

$$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$$

$$\mathfrak{p} \in V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p} \xrightarrow{\text{OE}} I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$$

□

Bemerkung 2.2

- $V(I(V)) = \bar{V}$ für jedes $V \subseteq \text{Spec } R$
- $I(V(I)) = \sqrt{I}$ für jedes ideal $I \subseteq R$

Beweis

a) „ \supseteq “: $V \subseteq V(I(V)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } R : \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$

„ \subseteq “: Es ist $\bar{V} = \bigcap_{V \subseteq V(I)} V(I)$ Ist I Ideal in R mit $V \subseteq V(I)$, so ist $I \subseteq I(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$.

$$\Rightarrow V(I) \supseteq V(I(V))$$

$$\Rightarrow V(I(V)) \subseteq \bigcap_{I: V \subseteq V(I)} V(I) = \bar{V}$$

b) $I(V(I)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \stackrel{!}{=} \sqrt{I}$ (Übung)

□

Proposition 2.3

Sei $V \subseteq \text{Spec } R$ abgeschlossen, $V \neq \emptyset$. Dann gilt: V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal

Beweis

Wie in Algebraische Geometrie I, Proposition 4.4

□

Bemerkung 2.4

Jeder Ringhomomorphismus $\alpha : R \rightarrow R'$ induziert stetige Abbildung $f_\alpha : \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$ durch $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, das heißt $\text{Spec} : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Ringe} & \rightarrow & \text{Top} \\ R & \mapsto & \text{Spec } R \end{array} \right.$ ist kontravarianter Funktor.

Beweis

Noch zu zeigen: f_α stetig.

Sei $V = V(I) \subseteq \text{Spec } R \Rightarrow f_\alpha^{-1}(V) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R' : \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \supseteq \alpha(I)\} = V(\alpha(I))$ \square

Bemerkung 2.5

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

Dann ist $m : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \text{Spec } k[V] \\ x & \mapsto & m_x \end{array} \right.$ injektiv und stetig.

Beweis

injektiv: \checkmark

m stetig: Sei $V(I) \subseteq \text{Spec } k[V]$ abgeschlossen.

$\Rightarrow m^{-1}(V(I)) = \{x \in V : m_x \in V(I)\} = \{x : I \subseteq m_x\} = \{x : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\} = V(I)$ \square

Beispiel

Seien $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

Definition + Bemerkung 2.6

- Ein Punkt $x \in X$ (X topologischer Raum) heißt **generisch**, wenn $\overline{\{x\}} = X$ ist.
- Jede irreduzible Teilmenge von $\text{Spec } R$ hat genau einen generischen Punkt.
- Die irreduziblen Komponenten von $\text{Spec } R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R .

Bemerkung 2.7

Für jedes $f \in R$ ist $D(f) = \text{Spec } R \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : f \notin \mathfrak{p}\}$ offen in $\text{Spec } R$. Die $D(f), f \in R$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis

Sei $U \subseteq \text{Spec } R$ offen, $V = \text{Spec } R - U \Rightarrow \exists I \subseteq R$ Ideal mit $V = V(I)$. Für $f \in I$ ist $f \in \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in V$, das heißt $V(I) \subseteq V(f) \Rightarrow D(f) \subseteq U$ \square

Bemerkung 2.8

$\text{Spec } R$ ist quasikompakt.

Beweis

Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $\text{Spec } R$. $\exists U_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in R$.

Dann gilt: $\bigcup_{i \in I} D(f_i) = \text{Spec } R \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset \Leftrightarrow$ Die $f_i, i \in I$, erzeugen R

$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k$ mit $1 = \sum_{\nu=1}^k a_\nu f_{i_\nu}$ für gewisse $a_\nu \in R$

$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^k D(f_{i_\nu}) = \text{Spec } R$ \square

Definition + Bemerkung 2.9

Sei R ein Ring, $X = \text{Spec } R$

- Für $f \in R$ sei $\mathcal{O}_X(D(f)) := R_f$
- Die Zuordnung $D(f) \mapsto R_f$ ist eine \mathcal{B} -Garbe von Ringen auf X für die Basis $\mathcal{B} = \{D(f) : f \in R\}$ der Zariski-Topologie auf X .
- Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe \mathcal{O}_X von Ringen auf X mit $\mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$ für jedes $f \in R$. \mathcal{O}_X heißt **Strukturgarbe** auf X .
- Für beliebiges $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U) = \{s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} \mid s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\}$; für jedes $\mathfrak{p} \in U$ gibt es Umgebung $U_{\mathfrak{p}} \subseteq U$ von \mathfrak{p} und $f, g \in R$ mit $g \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$ sodass $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}(\mathfrak{q})$ für alle $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$
 $g \notin \mathfrak{q}$ bedeutet $\mathfrak{q} \in D(g)$; $\frac{f}{g}(\mathfrak{q}) := \text{Bild von } \frac{f}{g} \text{ in } R_{\mathfrak{q}}$
- $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$ für jedes $\mathfrak{p} \in X$.

Beweis

- Seien $f, g \in R$ mit $D(f) \subseteq D(g)$.

$$\Rightarrow V(g) \subseteq V(f) \Rightarrow f \in \bigcap_{(g) \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}$$

$$\Rightarrow \exists d \geq 1 \text{ mit } f^d \in (g), \text{ das heißt } \exists h \in R \text{ mit } f^d = g \cdot h$$

$$\Rightarrow \text{erhalte Homomorphismus } \begin{array}{ccc} R_g & \rightarrow & R_f \\ \frac{a}{g^k} & \mapsto & \frac{a \cdot h^k}{f^{d \cdot k}} \end{array}$$

Wohldefiniertheit: $\frac{g}{1} \cdot \frac{h}{f^d} = 1$ in R_f , da $g \cdot h - f^d = 0$ in R_f .

Zeige: $D(f) \mapsto R_f$ ist \mathcal{B} -Garbe.

Sei also $f \in R$, $(D(f_i))_{i \in I}$ offene Überdeckung von $D(f)$, $g_i \in R_{f_i}$ konsistente Familie (das heißt $g_i = g_j$ in $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = \mathcal{O}(D(f_i f_j)) = R_{f_i f_j}$).

Zu zeigen: $\exists! g \in R_f$ mit $g = g_i$ in R_{f_i} für jedes i :

- $\mathcal{O} f = 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ (X ist quasikompakt)
- Eindeutigkeit:** Ist $g = h$ in R_{f_i} , $i = 1, \dots, n$, so ist $(g - h) \cdot f_i^d = 0$ für ein $d \geq 1$. Die f_i^d , $i = 1, \dots, n$, erzeugen R (!)

$$(f_1, \dots, f_n)^{n \cdot d} \subseteq (f_1^d, \dots, f_n^d)$$

$$\Rightarrow g = h$$

- Existenz:** Schreibe $g_i = \frac{h_i}{f_i^N}$, $h_i \in R$, $N \geq 1$. Nach Voraussetzung ist $\overbrace{f_i^N f_j^N}^{=f_j^N h_i} g_i = \overbrace{f_j^N f_i^N}^{f_i^N h_j} g_j$ für ein (anderes) $N \geq 1$.

$$(f_1^N, \dots, f_n^N) = R \Rightarrow \exists b_i \in R \text{ mit } 1 = \sum_{i=1}^n b_i f_i^N$$

$$\text{Setze } g := \sum_{i=1}^n b_i h_i$$

Dann ist für $j = 1, \dots, n$

$$f_j^N g = f_j \sum_{i=1}^n b_i h_i = \sum_{i=1}^n b_i f_j^N h_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{b_i f_i^N}_{=1} h_j = h_j = f_j^N g_j \text{ in } R_{f_j}$$

$$\Rightarrow g = g_j \text{ in } R_{f_j}$$

□

Definition 2.10

Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, \mathcal{O}_X die Strukturgarbe. Dann heißt (X, \mathcal{O}_X) **affines Schema**.

Beispiele

1) $R = k$ Körper $\Rightarrow X = \operatorname{Spec} k = \{(0)\}$, $\mathcal{O}_X(X) = k$

2) $R = k[X]$, k Körper. Ist $\{(0)\}$ offen? Nein!

$k = \mathbb{Q}$: $\mathfrak{p} = (X^2 + X + 1)$ ist abgeschlossener Punkt

$$R_{\mathfrak{p}}/m_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{q} = (X - a), a \in k, R_{\mathfrak{q}}/m_{\mathfrak{q}} \cong k[X]/(X - a) \cong k$$

Bemerkung 2.11

Sei (X, \mathcal{O}_X) affines Schema, $X = \operatorname{Spec} R$. Dann ist für jedes $f \in R$ auch $(D(f), \mathcal{O}_X(f))$ affines Schema. *Genauer:* $(D(f), \mathcal{O}_X(D(f))) = (\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f})$

Beweis

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal} : f \notin \mathfrak{p}\}$$

$$\operatorname{Spec} R_f = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$$

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R_f \\ a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

$$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \not\ni f, \mathfrak{p} \cdot R_f = \mathfrak{q} \cdot R_f$$

$$\text{Sei } x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p} \xrightarrow{!} \frac{x}{1} \notin \mathfrak{p} \cdot R_f$$

$$\text{Sei } x = \frac{a}{f^d}, a \in \mathfrak{p}, d \geq 1 \Rightarrow f^d \cdot x \in \mathfrak{p} \not\subset$$

$$\text{Sei } h = \frac{g}{f^d} \in R_f. \text{ Zu zeigen:}$$

$$\underbrace{\mathcal{O}_x|_{D(f)}(D(h))}_{\mathcal{O}_X(D(f) \cap D(g) = R_{f \cdot g})} \cong \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}(D(h))}_{(R_f)_h = R_{f \cdot g}}$$

□

§ 3 (Allgemeine) Schemata

Definition 3.1

- a) Ein **geringter Raum** ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe \mathcal{O}_X von Ringen.
- b) Ein geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **lokal** geringter Raum, wenn für jedes $x \in X$ der **Halm** $\mathcal{O}_{X,x}$ ein **lokaler Ring** ist.

Bemerkung 3.2

Jedes affine Schema $(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$ ist ein lokal geringter Raum.

Definition 3.3

- a) Ein **Morphismus** $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zusammen mit einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ von Garben.
 - b) Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist ein Morphismus $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ wie in a) sodass für jedes $x \in X$ der auf den Halmen induzierte Homomorphismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ die Bedingung $f_x^\#(m_{f(x)}) \subseteq m_x$ erfüllt ($f_x^\#$ heißt dann **lokaloer Homomorphismus**).
- $$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} = \lim_{f(x) \in U} \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(U)}_{x \in}) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Beispiel

Sei R lokaler Ring, nullteilerfrei, $K = \text{Quot}(R) \neq R$. Dann ist die Inklusion $R \hookrightarrow K$ *nicht* lokal.

Proposition 3.4

Die Kategorie der affinen Schemata mit Morphismen aus Definition 3.3 b) ist (anti-)äquivalent zur Kategorie der Ringe.

Beweis

- (i) Sie Zuordnung $R \rightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$ ist Funktor. Sei $\alpha : R \rightarrow S$ Ringhomomorphismus, $f_\alpha : \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R, \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$. Nach Bemerkung 2.4 ist f_α stetig und $f_\alpha^{-1}(D(g)) = D(\alpha(g))$.

Definiere $f_\alpha^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\text{Spec } S}$ durch

$$\underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec } R}(D(g))}_{= R_g \ni \frac{a}{g^d}} \rightarrow \underbrace{(f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\text{Spec } S}(D(g))}_{\frac{\alpha(a)}{\alpha(g)^d}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } S}(f_\alpha^{-1}(D(g))) = \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec } S}(D(\alpha(g)))}_{= S_{\alpha(g)}} \in$$

Noch zu zeigen: $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}$ ist lokal für jedes $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S$

Sei $\mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } R$, das heißt $\mathfrak{p} = f_\alpha(\mathfrak{q})$.

Das maximale Ideal $m_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $m_\mathfrak{q}$) in $\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \mathfrak{p}} (= R_\mathfrak{p})$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_{\text{Spec } S, \mathfrak{q}}$) ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$).

Für $a = \frac{b}{f} \in m_\mathfrak{p}$ ($b \in \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}$) ist $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}(a) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(f)} \in m_\mathfrak{q}$, da $b \in \mathfrak{q} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(b) \in \mathfrak{q}$ und $f \notin \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(f) \notin \mathfrak{q}$. \square

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels)

$\alpha : R \hookrightarrow K$, $\dim R = 1$ (zum Beispiel diskreter Bewertungsring)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} K = \{(0)\} & \rightarrow & \mathrm{Spec} R = \{(0), m\} \\ (0) & \mapsto & (0) \\ (f_\alpha^\#)_{(0)} : R_{(0)} = K & \rightarrow & K \end{array}$$

Beweis (Fortsetzung des Beweises von Proposition 3.4)

(ii) Ist (X, \mathcal{O}_X) affines Schema, $X = \mathrm{Spec} R$, so ist $R = \mathcal{O}_X(X)$. Ein Morphismus $\mathrm{Spec} S \rightarrow \mathrm{Spec} R$ induziert Homomorphismus

$$f^\# : \underbrace{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R}(\mathrm{Spec} R)}_{=R} \rightarrow \underbrace{f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} S}(\mathrm{Spec} R)}_{\substack{= \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} S}(f^{-1}(\mathrm{Spec} R))=S \\ f^{-1}(\mathrm{Spec} R)=\mathrm{Spec} S}}$$

Nachrechnen: Die Funktoren in (i) und (ii) sind zueinander invers. \square

Definition 3.5

Ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **Schema**, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt und affine Schemata $(\mathrm{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R_i})$ für jedes $i \in I$, sodass

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \stackrel[\text{geringter Raum}]{\text{als lokal}} \cong (\mathrm{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R_i})$$

Bemerkung + Definition 3.6

Sei (X, \mathcal{O}_X) Schema, $U \subseteq X$ offen.

Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ auch ein Schema. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt **offenes Unterschema** von X .

Beweis

Sei $X = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec} R_i$ eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata.

$\Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(U \cap \mathrm{Spec} R_i)}_{\subset \mathrm{Spec} R_i \text{ offen}}$, wobei $U \cap \mathrm{Spec} R_i \subset \mathrm{Spec} R_i$ offen, also $= \bigcup_{j \in J} D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$

$(D(f_{ij}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R_i}|_{D(f_{ij})})$ ist affines Schema nach Bemerkung 2.11 \square

Proposition 3.7 (Verkleben)

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) Schemata, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen und $\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_Y|_V)$ Isomorphismus von Schemata (das heißt von lokal geringten Räumen). Sei $Z = (X \cup Y)/\sim$ der topologische Raum, der durch Verkleben von X und Y längs φ entsteht.

Dann gibt es genau eine Garbe \mathcal{O}_Z auf Z mit $\mathcal{O}_Z|_X = \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Z|_Y \cong \mathcal{O}_Y$.

Beweis

Die offenen Teilmengen von X und von Y bilden eine Basis der Topologie auf Z . \square

Beispiel

$$\begin{array}{l} X = \mathbb{A}^1, U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \\ Y = \mathbb{A}^1, V = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \end{array} \quad \varphi = \mathrm{id} \quad \begin{array}{c} \textcolor{blue}{U} \text{---} \bullet \text{---} X \\ \textcolor{blue}{V} \text{---} \bullet \text{---} Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \text{---} Z$$

Beispiele

1) Quasiprojektive Varietäten:

$V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, k Körper quasi-projektiver Varietäten. V besitzt endliche Überdeckung durch affine Varietäten $V = \bigcup_{i=1}^r X_i$.

V ist „Verklebung“ dieser affinen Varietäten. Jedes X_i bestimmt affines Schema $\text{Spec } k[X_i]$. Verklebe die $\text{Spec } k[X_i]$ zu Schema (X, \mathcal{O}_X) . X hat dieselben abgeschlossenen Punkte wie V (falls k algebraisch abgeschlossen).

Beobachtung: (X, \mathcal{O}_X) hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der gewählten affinen Überdeckung ab.

Proposition 3.8

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt:

- Die Zuordnung $V \mapsto \text{Spec } k[V]$ ist ein volltreuer, auf Objekten injektiver Funktor t von der Kategorie der affinen Varietäten/ k in die Kategorie der affinen Schemata.
- t setzt sich fort zu volltreuem, auf Objekten injektivem Funktor

$$\text{quasiprojektive Varietäten}/k \rightarrow \text{Schemata}$$

Bezeichnung 3.9

$\mathbb{A}_k^n := \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ (vergleiche $\mathbb{A}^n(k)$)

Beispiele

2) $X = Y = \mathbb{A}_k^1$, $U = V = D(T) = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{(T)\}$, $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[T]$. Verklebe X und Y längs $\text{id} : U \rightarrow V$.

Erhalte Schema Z mit offenen Einbettungen $i_X : X \rightarrow Z$, $i_Y : Y \rightarrow Z$ sodass $Z - \{0_X, 0_Y\}$ isomorph zu $U = V$ ist.

$$i_X((T)) =: 0_X, i_Y((T)) =: 0_Y$$

Es gilt:

- Z ist irreduzibel.
- Sei $W \subseteq Z$ offen, $0_X \in W$, $0_Y \in W$, $f \in \mathcal{O}_Z(W)$. Dann ist $f(0_X) = f(0_Y)$.
- Die Diagonale $\Delta = \{(z_1, z_2) \in Z \times Z : z_1 = z_2\}$ ist nicht abgeschlossen.

Folgerung: Z ist nicht isomorph zu einem affinen Schema. Beweis in der Übung.

Definition + Bemerkung 3.10

Sei $S := \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ graduierter Ring ($S_d \cdot S_e = S_{d+e}$)

- $\text{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \subset S : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}$
 $(S_+ := \bigoplus_{d > 0} S_d)$ heißt **homogenes Spektrum** von S .
- Für ein homogenes Ideal $I \subseteq S$ sei $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S, I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Die $V(I)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\text{Proj } S$ (**Zariski Topologie**).
- Für homogenes $f \in S$ sei $D_+(f) := \text{Proj } S - V(f)$. Die $D_+(f)$, $f \in S$ homogen, bilden Basis.

d) Für $f \in S$ homogen sei

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f)) := S_f^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{f^d} : a \text{ homogen vom Grad } d \cdot \deg(f) \right\}$$

e) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ von Ringen auf $\text{Proj } S$ mit $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f)) = S_f^{\text{hom}}$.

f) Für $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ ist

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S, \mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \text{ homogen, } \deg a = \deg b, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

(lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} := \{ \frac{a}{b} \in S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p} \}$)

g) $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$ ist Schema.

Beweis

g) $D_+(f), \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f))}_{\ni \mathfrak{p} \mapsto \{ \frac{a}{f^d} \in S_f^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p} \}} \cong \text{Spec } S_f^{\text{hom}}$

□

Beispiel

$$S = k[X_0, \dots, X_n]$$

Dann: $\text{Proj } S = t(\mathbb{P}^n(k)) =: \mathbb{P}_k^n$, denn $D_+(X_i) = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$

§ 4 Abgeschlossene Unterschemata

Bemerkung + Definition 4.1

Sei R Ring, $I \subseteq R$ Ideal

- a) Die Abbildung $V(I) \rightarrow \text{Spec}(R/I), \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \bmod I$ ist ein Homöomorphismus.
- b) $(V(I), \mathcal{O}_{\text{Spec}(R/I)})$ heißt **abgeschlossenes Unterschema** von $\text{Spec } R$.
- c) Die abgeschlossenen Unterschemata von $\text{Spec } R$ entsprechen bijektiv den Idealen in R .
- d) Für abgeschlossene Unterschemata $Z_i \in \text{Spec } R/I_i$ gilt: Z_2 ist abgeschlossenes Unterschema von Z_1 („ $Z_2 \leq Z_1$ “) $\Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$.
Es ist dann $Z_2 = V(I_2) \subseteq V(I_1) = Z_1$

Beispiel

$X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}[X]$, $Z_1 = \text{Spec } k[X]/(X^2)$, $Z_2 = \text{Spec } k[X]/(X^2 - X)$. Dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ als topologische Räume aber nicht als abgeschlossene (Unter-) Schemata.

Definition + Bemerkung 4.2

Sei $I \subseteq R$ Ideal, $Z = \text{Spec } R/I$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema von $X = \text{Spec } R$.

- a) Für $U \subseteq X$ offen sei $I(U) := I \cdot \mathcal{O}_X(U)$, das Bild von I unter Restriktion. \mathcal{I} ist Garbe von Idealen auf X .
- b) Sei $j : Z \rightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $j_* \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$

Beweis

- b) Für $f \in R$ ist $j_* \mathcal{O}_Z D(f) = \mathcal{O}_Z j^{-1} D(f) = \mathcal{O}_Z (D(f) n \mathbb{Z}) = \mathcal{O}_Z (D(\bar{f})) = (R/I) \bar{f} = R_f / I R_f = \mathcal{O}_X / \mathcal{I} (D(f))$ □

Folgerung 4.3

In der Situation 4.2 wird $j : Z \rightarrow X$ zum Schemamorphismus, wobei

$$\begin{array}{ccc} j^\# \mathcal{O}_X & \longrightarrow & j_* \mathcal{O}_Z \\ & \searrow & \nearrow \sim \text{ b) } \\ & \mathcal{O}_X / \mathcal{I} & \end{array}$$

die Quotientenabbildung $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ ist.

Definition 4.4

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema

- a) Eine Garbe \mathcal{I} (von abelschen Gruppen) auf X heißt **Idealgarbe**, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ $\mathcal{I}(U)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist und die Restriktionshomomorphismen $\mathcal{O}_X(U)$ -linear sind.
- b) Ist $X = \text{Spec } R$ affines Schema, so heißt eine Idealgarbe \mathcal{I} auf X **quasikohärent**, wenn es ein Ideal I in R gibt mit $\mathcal{I}(U) = I \mathcal{O}_X(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$.
- c) Eine Idealgarbe \mathcal{I} auf X heißt **kohärent**, wenn für jedes offene affine Unterschema $U \subseteq X$ die Einschränkung $\mathcal{I}|_U$ quasikohärent ist.

Proposition 4.5

Eine Idealgarbe \mathcal{I} auf X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt durch affine Unterschemata U_i gibt, sodass $\mathcal{I}|_{U_i}$ quasikohärent ist für jedes i .
(Beweis Übung)

Definition + Bemerkung 4.6

- a) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Ein abgeschlossenes Unterschema von X ist ein Schema (Y, \mathcal{O}_Y) , wobei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ für eine quasikohärente Untergarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.
- b) Ist (Y, \mathcal{O}_Y) abgeschlossenes Unterschema, so gilt für jedes offene $U \subseteq X$: $U \cap Y$ ist das abgeschlossene Unterschema von U , das zu \mathcal{I}/U gehört. Ist U affin, so ist \mathcal{I}/U die von $\mathcal{I}(U)$ induzierte Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 4.7

- a) Sei R ein Ring.
 $N_R := \sqrt{(0)} = \{x \in R \mid \exists n \geq 1 : x^n = 0\}$ ist ein Ideal in R , das **Nilradikal**.
- b) Ein Ring R heißt **reduziert**, wenn $N_R = (0)$ ist.
- c) Ist $X = \operatorname{Spec} R$, so heißt $X_{\text{Red}} := \operatorname{Spec} R/N_R$ das zu X assoziierte **reduzierte Schema**.
- d) X_{Red} ist abgeschlossenes Unterschema von X und $X_{\text{Red}} \hookrightarrow X$ ist Homöomorphismus.
- e) Sei X ein Schema, \mathcal{N}_X die durch $\mathcal{N}_X(U) = \text{Nilradikal in } \mathcal{O}_X(U)$ definierte Idealgarbe. Dann gilt: \mathcal{N}_X ist quasikohärent.
- f) Das zu \mathcal{N}_X assoziierte abgeschlossene Unterschema von X heißt \mathcal{X}_{red} . (X, \mathcal{O}_X) heißt **reduziert**, wenn $\mathcal{X}_{\text{red}} \cong X$ als Schema, das heißt $\mathcal{N}_X = 0$.

Beweis

- e) *Zu zeigen:* Für $f \in R$, R Ring, gilt: $\mathcal{N}_{(R_f)} = \mathcal{N}_R R_f$.

„ \supseteq “: Sei $a \in \mathcal{N}_R$, also $a^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Für $x \in R_f$ ist $ax \in \mathcal{N}_{R_f}$

„ \subseteq “: $x = \frac{a}{f^d} \in R_f, x^n = 0 \Rightarrow \frac{a^n}{f^{dn}} = 0 \Rightarrow a^n = 0$ □

§ 5 Faserprodukte

Definition + Bemerkung 5.1

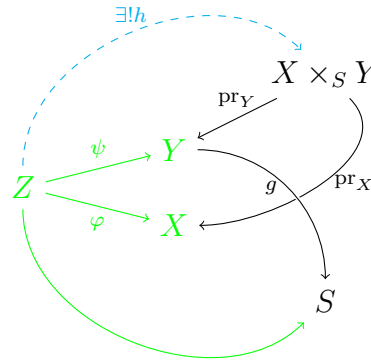
Seien X, Y, S Mengen, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow S$ Abbildungen.

a) $X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ heißt **Faserprodukt**.

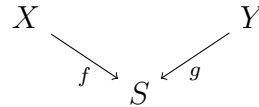
b) Es gilt: $X \times_S Y = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$

c) Das Faserprodukt erfüllt folgende UAE:

Für alle Mengen Z , Abbildungen $\varphi : Z \rightarrow X$, $\psi : Z \rightarrow Y$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ gibt es genau eine $h : Z \rightarrow X \times_S Y$ mit $\varphi = \text{pr}_X \circ h$, $\psi = \text{pr}_Y \circ h$.



d) Das Faserprodukt ist der Limes des Diagramms



Beweis

c) Setze $h(z) := (\varphi(z), \psi(z))$

□

Beispiele

- 1) $S = \{s\} \Rightarrow X \times_S Y = X \times Y$
- 2) $X \subseteq S, Y \subseteq S$, f, g die Inklusionen $\Rightarrow X \times_S Y = X \cap Y$
- 3) $Y \subseteq S$, $g : Y \hookrightarrow S \Rightarrow X \times_S Y = f^{-1}(Y)$
- 4) $X = Y \Rightarrow X \times_S Y = \text{Equalizer}(f, g)$

Definition 5.2

Seien X, Y, S Schemata, $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ Morphismen.

Dann heißt ein Schema $X \times_S Y$ zusammen mit Morphismen $\text{pr}_X : X \times_S Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$, sodass $f \circ \text{pr}_X = g \circ \text{pr}_Y$ ist, **Faserprodukt** von X und Y über S , wenn die UAE aus 5.1 c) erfüllt ist.

Definition + Bemerkung 5.3

Sei S ein Schema.

- a) Ein **S-Schema** ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \rightarrow S$.
- b) Die S -Schemata bilden eine Kategorie Sch/S.

c) Das Faserprodukt $X \times_S Y$ ist das Produkt von $f : X \rightarrow S$ und $g : Y \rightarrow S$ in $\underline{\text{Sch}}/S$.

Beispiel

$S = \text{Spec } k$, k Körper

Ein Morphismus $X \rightarrow \text{Spec } k$ ist nach Übung 3, Aufgabe 1 vollständig bestimmt durch einen Ringhomomorphismus $k \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Dieser macht $\mathcal{O}_X(X)$ zur k -Algebra und \mathcal{O}_X zu einer Garbe von k -Algebren. Insbesondere sind k -Varietäten über den Funktor t k -Schemata. Das Faserprodukt von k -Varietäten ist das Produkt der k -Varietäten (im Sinne von Algebraische Geometrie I) (siehe unten).

Satz 1

Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert für alle S -Schemata $f : X \rightarrow S$ und $g : Y \rightarrow S$. Es ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis

(1) $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $S = \text{Spec } R$ affin. f und g machen A und B zu R -Algebren.

Behauptung: Das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ erfüllt $\text{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$.

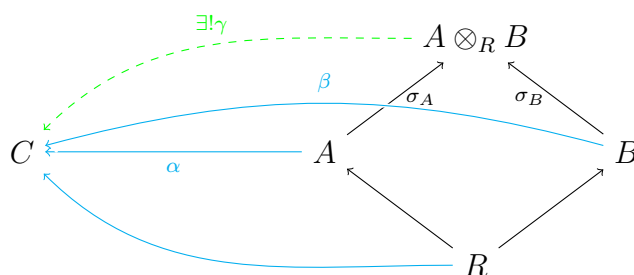
Erinnerung: Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R -Moduln M, n „linearisiert“ die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ (x, y) & \longmapsto & x \otimes y \\ \Phi \text{ bilinear} \searrow & & \swarrow \exists! \varphi \text{ linear} \\ & P & \end{array}$$

- Sind $M = A$ und $N = B$ R -Algebren, so hat $A \otimes_R B$ eine Struktur als R -Algebra:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- $\sigma_A : A \rightarrow A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1$
 $\sigma_B : B \rightarrow A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b$ sind R -Algebren-Homomorphismen.
- $A \otimes_R B$ erfüllt die richtige UAE



„Beweis:“ $\tilde{\gamma} : A \times B \rightarrow C, (a, b) \mapsto \alpha(a) \cdot \beta(b)$ ist bilinear, induziert also $\gamma : A \otimes B \rightarrow C$ linear. Nachrechnen: γ Ringhomomorphismus, γ eindeutig.

Also: $\text{Spec}(A \otimes_R B)$ erfüllt die geforderte UAE für alle affinen Schemata Z .

Ist Z beliebiges Schema, so induzieren $\varphi : Z \rightarrow X$ und $\psi : Z \rightarrow Y$ R -Algebrahomomorphismen $\alpha : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$, $\beta : B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$.

α und β induzieren $\gamma : A \otimes_R B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$, also (Übung 3, Aufgabe 1) Morphismus $h : Z \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$.

(2) X, Y, Z nicht notwendig affin.

Überdecke S durch offene affine Schemata $S_i = \text{Spec } R_i$ ($i \in I$). Sei $X_i := f^{-1}(S_i)$, $Y_i := g^{-1}(S_i)$ (offen in X beziehungsweise Y).

Überdecke X_i durch offene affine Schemata $X_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$

Überdecke Y_i durch offene affine Schemata $Y_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$

Nach (1) existiert $X_{ij} \otimes_{S_i} Y_{ik}$ für alle i, j, k

Behauptung 1: Sei T ein Schema, V, W T -Schemata, $(V_l)_{l \in L}$ offene Überdeckung von V . Existiert $V_l \times_T W$ für jedes l , so existiert $V \times_T W$.

Wende Behauptung 1 an auf

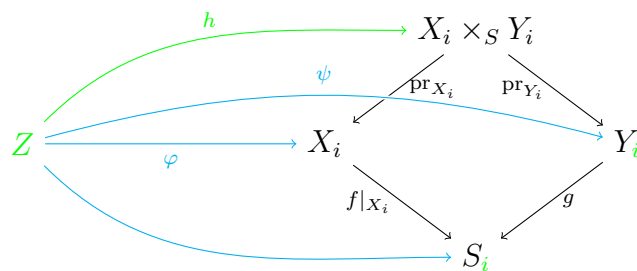
- $T = S_i, V = X_i, W = Y_{ik}, V_l = X_{il} \Rightarrow X_i \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall i, k$
- $T = S_i, V = Y_i, W = X_i, V_l = Y_{il} \Rightarrow X \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall i$

Behauptung 2: Für jedes i ist $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$

Dann wende Behauptung an auf

$$T = S, V = X, W = Y, V_l = X_l \Rightarrow X \times_S Y \text{ existiert}$$

Beweis 2:



$$\Psi(Z) \subseteq g^{-1}\left(\underbrace{f\left(\underbrace{\varphi(Z)}_{\subseteq X_i}\right)}_{\subseteq S_i}\right) \subseteq Y_i$$

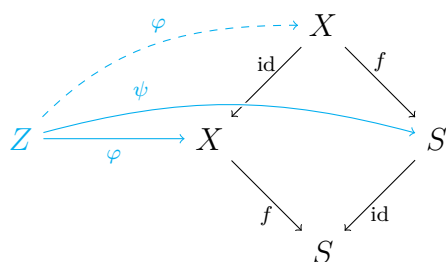
Beweis 1: Verklebe die $V_l \times_T W$ längs $U_{lm} = \text{pr}_l^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_l \times_T W$. Es gilt: $U_{lm} = (V_l \cap V_m) \times_T W$. Dann ist $U_{lm} = U_{ml}$, lassen sich also verkleben zu Schema V . Zeige: $\tilde{V} = V \times_T W$ \square

Bemerkung 5.4

- $X \times_S S \cong X$ für jedes S -Schema
- $(X \times_S T) \times_T Y \cong X \times_S Y$ für alle...

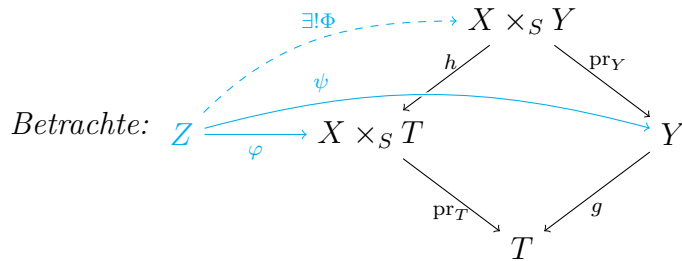
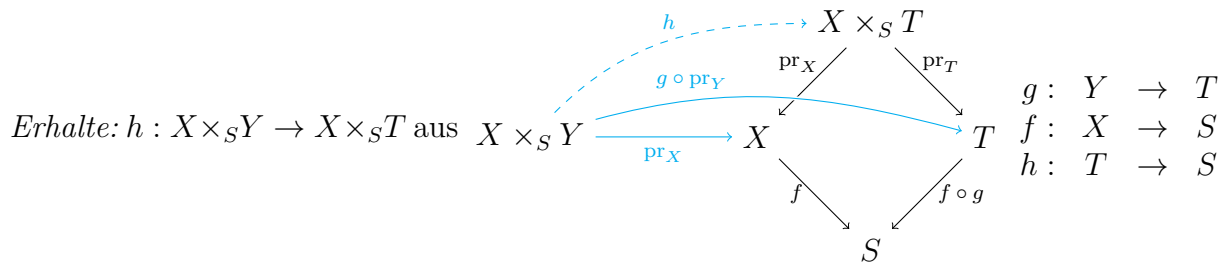
Beweis

- Zeige: X erfüllt die UAE von $X \times_S S$

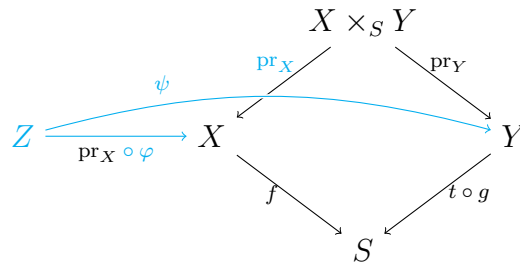


Es gilt $\text{id}_S \circ \psi = f \circ \varphi$ im unteren Dreieck, also auch im Oberen.

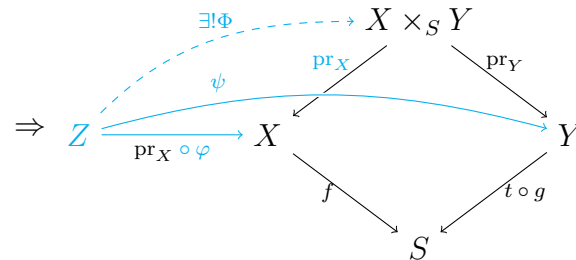
b) Zeige: $X \times_S Y$ erfüllt die UAE von $(X \times_S T) \times_T Y$



Es gilt: $f \circ \text{pr}_X = t \circ g \circ \text{pr}_Y$



Zu zeigen: $f \circ \text{pr}_X \circ \varphi = t \circ g \circ \psi = t \circ \text{pr}_T \circ \varphi$



Wir wissen: $\text{pr}_T \circ \varphi = g \circ \psi$

Zu zeigen: (i) $h \circ \Phi = \varphi$

(ii) $\text{pr}_Y \circ \Phi = \psi$ ✓

Für (i) ist zu zeigen: (i₁) $\text{pr}_X \circ h \circ \Phi = \text{pr}_X \circ \varphi$ ✓

$$(i_2) \underbrace{\text{pr}_T \circ h \circ \Phi}_{\underbrace{g \circ \text{pr}_Y}_{g \circ \psi}} = \text{pr}_T \circ \varphi$$

Damit ist die Existenz von Φ gezeigt. Eindeutigkeit in der Übung. □

§ 6 Punkte

Definition + Bemerkung 6.1

Sei X ein Schema, $x \in X$

a) $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ heißt **Restklassenkörper** von X im Punkt x .

Beispiele

1) $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

$$x = p \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{F}_p$$

$$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{Q}$$

2) $X = \mathbb{A}_k^1$

$$x = (X - a) \ (a \in k) \Rightarrow \kappa(x) = k$$

$$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = k(X) = \operatorname{Quot}(k[X])$$

3) $X = \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[X, Y]$

$$x = (f), \ f \text{ irreduzibel} \Rightarrow \kappa(x) = \operatorname{Quot}(k[V]) = k(V) \ (V = V(f))$$

b) Sei $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus, $s := f(x)$. f induziert Homomorphismus $\kappa(s) \rightarrow \kappa(x)$.

c) Für einen Körper k gibt es genau dann einen Morphismus $\iota : \operatorname{Spec} k \rightarrow X$ mit $\iota(0) = x$, wenn $\kappa(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von k ist.

d) In der Situation c) heißt x ***k*-wertiger Punkt** von x .

Beweis

b) f induziert lokalen Homomorphismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{S,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, das heißt $f_x^\#(m_s) \subseteq m_x \Rightarrow f_x^\#$ induziert $\kappa(s) \rightarrow \kappa(x)$.

c) Sei $U = \operatorname{Spec} R$ affine Umgebung von x .

ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : R \rightarrow k$ mit $\operatorname{Kern}(\alpha) = \mathfrak{p}$, wobei \mathfrak{p} das zu x gehörige Primideal in R ist.

Es ist $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_{\mathfrak{p}}$, also $\kappa(x) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$

Also: ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : \begin{matrix} R & \rightarrow & k \\ \mathfrak{p} & \mapsto & (0) \end{matrix}$, also $\bar{\alpha} : \kappa(x) \rightarrow k$

„ \Leftarrow “: $\alpha : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\bar{\alpha}} k$

□

Bemerkung 6.2

Seien X, Y S -Schemata.

Dann ist die Abbildung $\begin{cases} X \times_S Y & \rightarrow & \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \\ z & \mapsto & (\operatorname{pr}_X(z), \operatorname{pr}_Y(z)) \end{cases}$ surjektiv.

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_S Y & & \\ & \swarrow \operatorname{pr}_X & & \searrow \operatorname{pr}_Y & \\ X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

Beweis

Abbildung wohldefiniert: ✓

Seien $x \in X, y \in Y$ mit $f(x) = g(y) =: s \in S$. Seien $\kappa : \kappa(s), \kappa(x), \kappa(y)$ die Restklassenkörper. $\mathcal{O}_\kappa \subseteq \kappa(x), \kappa \subseteq \kappa(y)$. Sei k ein Körper mit $\kappa(x) \subseteq k, \kappa(y) \subseteq k$ (zum Beispiel Komposition). Sei $Z := \text{Spec } k$.

Nach 6.1 c) gibt es Morphismen $\varphi : Z \rightarrow X, \varphi(0) = x, \psi : Z \rightarrow Y, \psi(0) = y$. Es ist $f \circ \varphi = g \circ \psi \Rightarrow \exists h : Z \rightarrow X \times Y$ mit $\text{pr}_X \circ h = \varphi, \text{pr}_Y \circ h = \psi$. Setze $z := h(0)$. \square

Definition + Bemerkung 6.3

Sei $f : X \rightarrow Y$ Morphismus von Schemata, $y \in Y$

- $X_y = f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec } \kappa(y)$ heißt **Faser** von f über y . Dabei ist $\iota : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$ der zu y gehörige Morphismus aus 6.1.
- $\text{pr}_X : X_y \rightarrow X$ ist injektiv.
- $\text{pr}_X(X_y) \rightarrow \{x \in X : f(x) = y\}$ ist bijektiv.
- Ist y abgeschlossen, so ist X_y abgeschlossenes Unterschema.

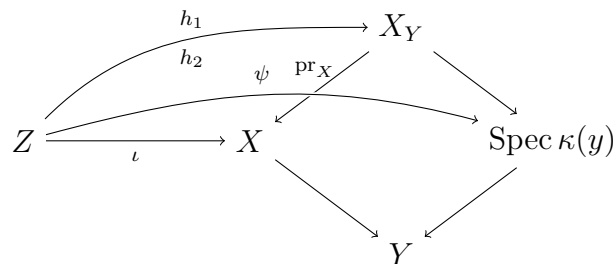
Beweis

c) Folgt aus b) und 6.2.

d) Folgt aus c).

- Seien $x_1, x_2 \in X_y$ mit $\text{pr}_X(x_1) = \text{pr}_X(x_2) =: x \in X \Rightarrow f(x) = y$. Sei $Z = \text{Spec } \kappa(x)$ und $\iota : Z \rightarrow X$ mit $\iota(0) = x$. Sei $\psi : Z \rightarrow \text{Spec } \kappa(y)$ der von $f^\#$ induzierte Morphismus (6.1 b)).

Nach 6.1 b) ist $\kappa(x) \subseteq \kappa(x_i), i = 1, 2$.



$\xRightarrow{6.1c} \exists$ Morphismen $h_i : Z \rightarrow X_y$ mit $h_i(0) = x_i, i = 1, 2$

Es gilt: $\text{pr}_Z \circ h_i = \psi, i = 1, 2$

$\text{pr}_X \circ h_i = \iota$ nach Definition von h_i

$\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} h_1 = h_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

\square

Beispiele

- $f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1, x \mapsto x^2$; f werde induziert von $\alpha : k[X] \rightarrow k[X], X \mapsto X^2$

$$\text{Sei } y = (X - a) \Rightarrow X_y = \mathbb{A}_k^1 \times_{\mathbb{A}_k^1} \text{Spec } k = \text{Spec}(\underbrace{k[X] \otimes_{k[X]} k}_{\cong k[X]/\alpha(X-a)})$$

$$k[X]/\alpha(X-a) = k[X]/(X^2 - a) = \begin{cases} k \oplus k & \text{falls } a \in (k^\times)^2 \\ k[X]/(X^2) & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

2) $X = (x, y)$ -Ebene $\cup (z, w)$ -Ebene in \mathbb{A}_k^4

$$= V(z, w) \cup V(x, y) = V(xz, yz, xw, yw)$$

$f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^2, (x, y, z, w) \mapsto (x + z, y + w)$ wird induziert von $\alpha : k[s, t] \rightarrow k[X, Y, Z, W] \rightarrow k[V], s \mapsto X + Z, t \mapsto Y + W$.

Sei $y = „(0, 0)“ = (s, t) \Rightarrow V_y = V \times_{\mathbb{A}_k^2} \text{Spec } k = \text{Spec}(k \otimes_{k[s, t]} k) \cong k[V] / \alpha(s, t) =$

$$k[V] / (X + Z, Y + W) = k[X, Y, Z, W] / (X + Z, Y + W, XZ, YZ, XW, YW)$$

$$= k[X, Y] / (-X^2, -XY, -Y^2) =: R$$

Beachte: $\dim_k R = 3$

Definition + Bemerkung 6.4

Sei X ein Schema, T ein weiteres Schema.

- Ein **T -wertiger Punkt** von X ist ein Morphismus $T \rightarrow X$.
- Der Funktor $h_X : \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}, T \mapsto \text{Hom}(T, X)$ heißt **Punktfunktor** zu X . h_X ist kontravarianter Funktor.
- Die h_X definieren Funktor $h : \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Fun}}(\underline{\text{Sch}}^{\text{op}}, \underline{\text{Sets}})$. Dieser Funktor ist Kovariant. $(\underline{\text{Fun}}(\underline{\text{Sch}}^{\text{op}}, \underline{\text{Sets}}))$ ist die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Schemata nach Mengen; op steht für „opposite“)

Beispiele

- Sei $T = \text{Spec}(k[\varepsilon] / (\varepsilon^2))$ (k ein Körper), $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[X, Y]$. Ein T -wertiger Punkt von X ist ein Ringhomomorphismus $\alpha : k[X, Y] \rightarrow k[\varepsilon] / (\varepsilon^2)$. Sei α surjektiv, $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = (X, Y)$.

Also $\alpha(X) = a\varepsilon, \alpha(Y) = b\varepsilon$ ($a, b \in k$) $\Rightarrow \alpha(bX - aY) = 0$. α bestimmt also nicht nur einen Punkt x von X , sondern auch eine „Richtung“ in x .

- $T = \text{Spec } R$, R diskreter Bewertungsring.

$$T = \{t_0, t_1\}, t_0 \in \overline{\{t_1\}}, K := \text{Quot } R, X \text{ ein Schema}, \kappa(t_0) = k, \kappa(t_1) = K$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, X) = \{ & (x_0, x_1, x_2) : x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, \iota : \kappa(x_1) \rightarrow K \\ & \text{Homomorphismus mit } \iota(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}) \subseteq R \text{ und } \iota(m_{x_0}) \subseteq m \} \end{aligned}$$

§ 7 Endlichkeitseigenschaften

Definition 7.1

Sei X ein Schema.

- a) X heißt **lokal noethersch**, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, sodass die R_i noethersch sind.
- b) X heißt **noethersch**, wenn es eine endliche Überdeckung wie in a) gibt.

Beispiel

Quasiprojektive Varietäten sind noethersch.

Proposition 7.2

- a) Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.
- b) Ein Schema X ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes offene affine Unterschema $U = \operatorname{Spec} R$ gilt: R ist noethersch

Beweis

a) folgt aus b)

b) Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ offen in X , R_i noethersch. Sei $U = \operatorname{Spec} R$ offen in X .

Zu zeigen: R ist noethersch

Es gilt: $U \cap U_i$ ist offen in U_i für jedes i . $\Rightarrow U \cap U_i = \bigcup_{j \in J_i} D(f_{ij})$ für geeignete $f_{ij} \in R_i$.

$D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$, $R_{ij} := (R_i)_{f_{ij}}$ ist noethersch

$D(f_{ij})$ ist auch offen in U .

$\Rightarrow \exists g_{ijk} \in R$ mit $D(f_{ij}) = \bigcup_k D(g_{ijk})$

Sei $\varphi_{ij} : R \rightarrow R_{ij}$ der von $D(f_{ij}) \hookrightarrow U$ induzierte Ringhomomorphismus

$\Rightarrow R_{g_{ijk}} \stackrel{(!)}{\cong} (R_{ij})_{\varphi_{ij}(g_{ijk})} \Rightarrow R_{g_{ijk}}$ ist noethersch

Die $D(g_{ijk})$ überdecken U .

U ist quasikompakt \Rightarrow endlich viele der g_{ijk} genügen zum Überdecken. Nenne sie g_1, \dots, g_r . Sei nun $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ Kette von idealen in R . Für $i = 1, \dots, r$ sei $\varphi_i : R \rightarrow R_{g_i}$ der natürliche Homomorphismus $\Rightarrow \varphi_i(I_1) \cdot R_{g_i} \subseteq \varphi_i(I_2) \cdot R_{g_i} \subseteq \dots$ wird stationär

Behauptung: Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt:

$$I = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$$

Beweis der Behauptung:

„ \subseteq “: \checkmark

„ \supseteq “: Sei $b \in \bigcup_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$

Für jedes $i = 1, \dots, r$ gibt es $a_i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i(b) = \frac{b}{1} = \frac{a_i}{g_i^n}$ in R_{g_i} . $\Rightarrow \exists m_i$ mit $g_i^{m_i}(g_i^{n_i}b - a_i) = 0$ in $R \Rightarrow g_i^{m_i+n_i}b = g_i^{m_i}a_i \in I \Rightarrow \exists M$ mit $g_i^M b \in I$ für $i = 1, \dots, r$

Nach Voraussetzung ist $\left. \begin{array}{l} (g_1, \dots, g_r) = R \\ \Rightarrow (g_1^M, \dots, g_r^M) = R \end{array} \right\} \Rightarrow b \in I \quad \square$

Definition + Proposition 7.3

Sei $f : X \rightarrow Y$ Morphismus von Schemata.

- a) f heißt **lokal von endlichem Typ**, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \text{Spec } A_i)_{i \in I}$ von Y gibt und für jedes $i \in I$ eine offene affine Überdeckung $(U_{ij} = \text{Spec } B_{ij})_{j \in J_i}$ von $f^{-1}(U_i) \subseteq X$, so dass B_{ij} (durch den von f induzierten Homomorphismus) endlich erzeugte A_i -Algebra ist $\forall i \in I, j \in J_i$.
- b) f heißt **von endlichem Typ**, wenn in a) jedes $f^{-1}(U_i)$ eine endliche Überdeckung der gewünschten Art hat.
- c) Ist f (lokal) von endlichem Typ, so gibt es für jedes offene affine $U = \text{Spec } A \subseteq Y$ eine endliche offene affine Überdeckung $U_i = \text{Spec } B_i$ von $f^{-1}(U)$, so dass B_i endlich erzeugte A -Algebra ist.

Beweis

c) Ähnlich 7.2 □

Beispiele 7.4

- 1) Jeder Morphismus von quasiprojektiven Varietäten/ k ist von endlichem Typ.
- 2) Insbesondere ist für jede quasiprojektive Varietät V/k der „Strukturmorphismus“ $V \rightarrow \text{Spec } k$ von endlichem Typ.
- 3) $\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$ ist nicht lokal von endlichem Typ.

Definition 7.5

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata heißt **endlich**, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \text{Spec } A_i)_{i \in I}$ von Y gibt, so dass für jedes $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ affin ist (also $f^{-1}(U_i) = \text{Spec } B_i$) und dabei B_i als A_i -Modul endlich erzeugt ist.

Bemerkung 7.6

Ist $f : X \rightarrow Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ endlich für jedes $y \in Y$.

Beweis

Sei $U = \text{Spec } A$ affine Umgebung von $y \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \text{Spec } B$

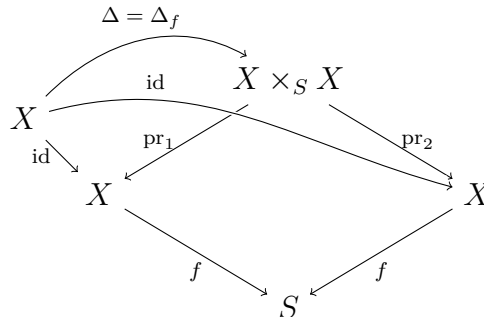
B ist nach Voraussetzung endl. erzeugter A -Modul. Weiter ist $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist endlich-dimensionaler $\kappa(y)$ -Vektorraum $\Rightarrow B \otimes_A \kappa(y)$ hat nur endlich viele Primideale □

§ 8 Eigentliche Morphismen

Definition 8.1

Sei $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus von Schemata.

- a) Der von id_X induzierte Morphismus $\Delta = \Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ heißt **Diagonalmorphismus** (oder Diagonale) zu f .



$$\text{Es ist } \text{pr}_1(\Delta(X)) = \text{pr}_2(\Delta(X))$$

- b) f heißt **separiert** (oder auch X heißt separiert über S), wenn Δ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Erinnerung 8.2

Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist.

Beispiel

Sei $X = \text{Spec } k[t]_{(0)} \rightarrow \text{Spec } k[t]_{(0)} = \mathbb{A}_k^1$ mit doppeltem Nullpunkt (§3 Beispiel 2), $F : X \rightarrow \text{Spec } k$ der Strukturmorphismus. f ist nicht separiert, da $\Delta(X)$ nicht abgeschlossen in $X \times_k X$, denn $(0_1, 0_2) \notin \Delta$ aber $\in \overline{\Delta}$.

Bemerkung 8.3

Jeder Morphismus affiner Schemata ist separiert.

Beweis

Sei $f : X = \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A = Y$ Morphismus, induziert von Ringhomomorphismus $\alpha : A \rightarrow B$. Dann ist $X \times_Y X = \text{Spec}(B \otimes_A B)$.

$$\Delta : X \rightarrow X \times_Y X \text{ wird induziert von } \mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \rightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossene Einbettung. □

Bemerkung 8.4

Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.

Beweis

Sei $i : U \hookrightarrow X$ offene abgeschlossene Einbettung. $\Rightarrow U \times_X U \cong U$ und für $\Delta : U \rightarrow U \times_X U \cong U$ gilt $\Delta = \text{id}_U$. □

Definition 8.5

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata.

- a) f heißt **universell abgeschlossen**, wenn für jeden Morphismus $g : Y' \rightarrow Y$ gilt: $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ ist abgeschlossen.

- b) f heißt **eigentlich**, wenn es von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

Beispiel

$\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ ist abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen.

Denn:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

pr_1 ist nicht abgeschlossen.

$$V = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^2, \text{pr}_1(V) = ?$$

$$V = V(XY - 1) \Rightarrow \text{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$$

$\Rightarrow \text{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen ($\mathbb{C} = k$ algebraisch abgeschlossen)

Definition 8.6

- a) Ein nullteilerfreier Ring R heißt **Bewertungsring**, wenn für jedes $x \in K = \text{Quot } R$ gilt: $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. R ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m = \{x \in R : x^{-1} \notin R\}$, $(x + y)^{-1} = \text{Übung??}$
- b) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, R ein Bewertungsring, $K = \text{Quot } R$, $U = \text{Spec } K$, $T = \text{Spec } R$.

Ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array}$ heißt **Bewertungsdiagramm** für f .

Satz 2

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, X noethersch, f von endlichem Typ für „eigentlich“. Dann gilt:

- a) f ist genau dann $\left\{ \begin{array}{l} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K = U & \xrightarrow{h_2} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\ \text{Spec } R = T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array} \quad (*)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{array} \right\}$ einen Morphismus $h : T \rightarrow X$ gibt sodass $(*)$ kommutiert

Dabei sei R ein Bewertungsring und $K = \text{Quot}(R)$.

- b) Sind X und Y noethersch und f von unendlichem Typ, so genügt es, Bewertungsdiagramme zu diskreten Bewertungsringen zu betrachten.

Erinnerung

R Bewertungsring $\Leftrightarrow R$ nullteilerfrei, für $x \in \text{Quot}(R)^\times$ ist $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

Bewertung: G abelsche Gruppe, \leq Totalordnung auf G , sodass aus $x \leq y$ folgt: $x + a \leq y + a \forall a \in G$, $v : k^\times \rightarrow G$ Homomorphismus mit $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Beispiel

Sei $X = \mathbb{A}_k^1$, $Y = \operatorname{Spec} k$, $f : X \rightarrow Y \dots$

$K = k(T)$, $R = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[T], \deg h \geq \deg g\}$, R diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(R)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \operatorname{Spec} k(T) & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & & k(T) \longleftarrow k[T] \\
 \downarrow & & \downarrow f & & \uparrow \quad \quad \quad \nearrow h? \\
 \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k & & R \longleftarrow k
 \end{array}$$

Es gibt kein h , da $k[T] \hookrightarrow k(T)$ nicht über R faktorisiert: $T \notin R$

Bemerkung**Beweisskizze**

I) „separiert“

„ \Rightarrow “: Seien h, h' Fortsetzungen von h_0 .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

h' (parallel to h)

Sei $\tilde{h} : T \rightarrow X \times_Y X$ der von h und h' induzierte Morphismus.

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{\quad h' \quad} & & & X \\
 \searrow \tilde{h} & & X \times_Y X & \xrightarrow{\operatorname{pr}_2} & \downarrow f \\
 & & \downarrow \operatorname{pr}_1 & & X \\
 & & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\
 \swarrow h & & & &
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $h(t_1) = h'(t_1) = h_0(t_1) =: x_1 \Rightarrow \tilde{h}(t_1) \in \Delta(X)$

$\Delta(X)$ ist nach Voraussetzung abgeschlossen $\Rightarrow \tilde{h}(t_0) \in \overline{\{\tilde{h}(t_1)\}} \subseteq \Delta(X) \Rightarrow h(t_0) = h'(t_0) \Rightarrow h = h'$, weil $h^\#$ und $h'^\#$ durch h_0 festgelegt sind.

„ \Leftarrow “: Genügt zu zeigen: $\Delta(X)$ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$. Weil X noethersch ist, können wir verwenden:

Proposition 8.7

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein quasikompakter Morphismus von Schemata.

Dann gilt: $f(X)$ ist abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow$ für jedes $y_1 \in f(X)$ und jedes $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ ist $y_0 \in f(X)$ („abgeschlossen unter Spezialisierung“)

Beweis

[Har77] Chapter II, Lemma 4.5 □

Sei also $x_1 \in \Delta(X)$, $x_0 \in \overline{\{x_1\}} \subseteq X \times_Y X$. Sei $Z := \overline{\{x_1\}}$ mit der reduzierten Struktur $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z, x_0}$, $K = \mathcal{O}_{Z, x_1} = \kappa(x_1) = \operatorname{Quot} \mathcal{O}$.

Proposition + Definition 8.8

Sei K ein Körper, $R \subset K$ ein lokaler Ring.

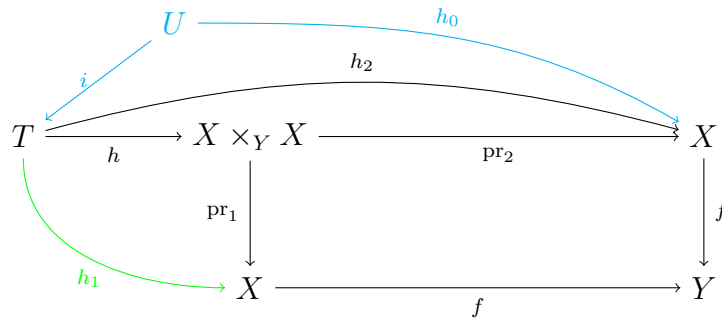
- a) (R_1, m_1) **dominiert** (R_2, m_2) , wenn $R_2 \subseteq R_1$ und $m_2 = m_1 \cap R_2$.
- b) R ist Bewertungsring $\Leftrightarrow R$ ist maximal bezüglich Dominanz
- c) R wird dominiert von einem Bewertungsring.

Beweis

[AM94] Chapter 5, Theorem 5.11 □

Sei also $R \subset K$ Bewertungsring, der \mathcal{O} dominiert. Nach Vorüberlegung gibt es Morphismus $h : T = \text{Spec } R \rightarrow X \times_Y X$ mit $h(t_1) = x_1$, $h(t_0) = x_0$.

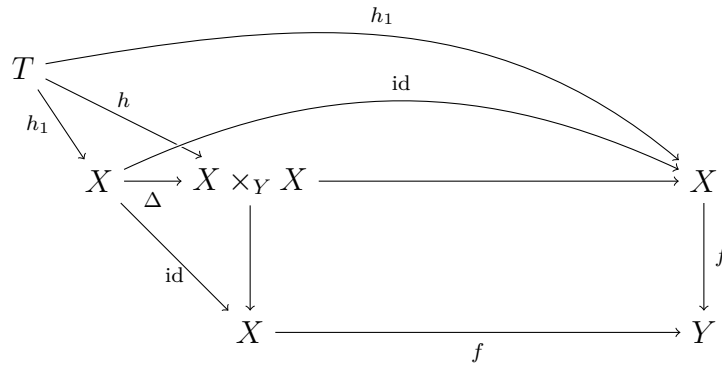
Sei $h_i := \text{pr}_i \circ h$, $i = 1, 2$



$$\Rightarrow f \circ h_1 = f \circ h_2$$

Da $x_1 \in \Delta(X)$ ist $h_1|_U = h_2|_U$, $U = \text{Spec } K$.

$\xRightarrow{\text{Vor.}} h_1 = h_2 \Rightarrow h$ faktorisiert über $\Delta \Rightarrow x_0 \in \Delta(X)$.



II) „eigentlich“

„ \Rightarrow “: Eindeutigkeit von h folgt aus I

Existenz von h : Im Basiswechseldiagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y T & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array}$$

ist f' nach Voraussetzung abgeschlossen.

Sei $\varphi : U \rightarrow X \times_Y T$ der von h_0 und i induzierte Morphismus

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h_0 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 U & \xrightarrow{\varphi} & X \times_Y T & \longrightarrow & X \\
 \downarrow i & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 & & T & \xrightarrow{h_1} & Y
 \end{array}$$

Da $i = f' \circ \varphi$ ist und i dominant, ist auch f' dominant $\xrightarrow{f' \text{ abg.}} f'$ surjektiv

Sei $z_1 = \varphi(t_1) \in X \times_Y T$, also $f'(z_1) = t_1$ (generischer Punkt), $Z := \overline{\{z_1\}}$ mit reduzierter Struktur.

Auch $f'|_Z$ ist surjektiv, also gibt es $z_0 \in Z$ mit $f'(z_0) = t_0$. f' induziert lokalen Ringhomomorphismus $R = \mathcal{O}_{T,t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,z_0}$ und Einbettung $K = \kappa(t_1) \hookrightarrow \kappa(z_1)$. φ induziert $\kappa(z_1) \hookrightarrow \kappa(t_1) = K$, also $\kappa(z_1) \cong K$.

$\xrightarrow{\text{Prop. 8.8}} R \cong \mathcal{O}_{Z,z_0} \xrightarrow{\text{§3 Bsp.2}} \exists h : t \rightarrow X$ mit $h(t_i) = \text{pr}_X(z_i)$, $i = 0, 1$

„ \Leftarrow “: Zu zeigen: Wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm genau eine Fortsetzung h von h_1 gibt, so ist f eigentlich.

Es genügt zu zeigen: f' ist universell abgeschlossen. Sei also Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X' = X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 Y' & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Zu zeigen: f' ist abgeschlossen. Sei dafür $Z' \subseteq X'$ abgeschlossen, $y_1 = f'(z_1) \in f'(Z')$ und $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$.

Zu zeigen: $y_0 \in f'(Z')$ (das genügt nach Proposition 8.7)

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,y_0}$, wobei $Z = \overline{\{y_1\}}$ (mit reduzierter Struktur)

$\text{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \xrightarrow{(f')^\#} \kappa(z_1) =: K$

$K|\kappa(y_1)$ ist endliche Körpererweiterung (da f von endlichem Typ) $\xrightarrow{\text{Prop.8.8}}$ Es gibt Bewertungsring R von K , der \mathcal{O} dominiert \Rightarrow Es gibt Morphismus $h_1 : T = \text{Spec } R \rightarrow Y'$ mit $h_1(t_i) = y_i$, $i = 0, 1$. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec } K = U & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{\quad} & Y' & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

$\nearrow h'$ (blau gestrichelt) $\nearrow h$ (grün gestrichelt)

ein Bewertungsdiagramm für f . Nach Voraussetzung gibt es $h : T \rightarrow X$ mit ...

Die UAE des Faserprodukts liefert $h' : T \rightarrow X'$ mit $f'(h'(t_0)) = h_1(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in f'(Z')$.

$h'(t_0) := z_0 \in \overline{\{h'(t_1)\}} = \overline{\{z_1\}} \in Z'$ □

Folgerung 8.9

Für Morphismen noetherscher Schemata gilt:

- a) Die Komposition $\left\{ \begin{array}{c} \text{separierter} \\ \text{eigentlicher} \end{array} \right\}$ Morphismen ist $\left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$.
- b) $\left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$ ist stabil unter Basiswechsel.
- c) Ist $g \circ f \left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich und } g \text{ separiert} \end{array} \right\}$, so ist $f \left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$.

Beweis

Bewertungskriterium anwenden

□

Proposition 8.10

Der Strukturmorphismus $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ ist eigentlich.

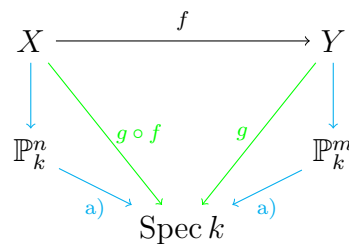
Folgerung 8.11

Sei k ein Körper

- a) \mathbb{P}_k^n ist eigentlich über $\text{Spec } k$.
- b) Sind V, V' projektive Varietäten über k , $f : V \rightarrow V'$ Morphismus, so ist der induzierte Morphismus $t(V) \rightarrow t(V')$ eigentlich.

Beweis

- b) Sei $X := t(V), Y := t(V')$ (abgeschlossene Unterschemata)

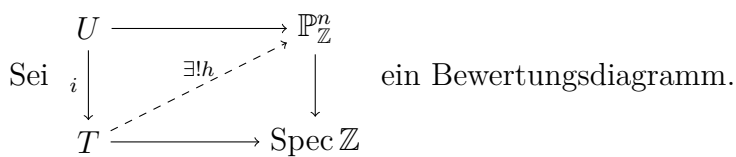


Aus 8.9 a) und 8.9 c) folgt: f ist eigentlich.

□

Beweis (von Proposition 8.10)

\mathbb{P}_k^n ist von endlichem Typ über $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ✓



Zu zeigen: $\exists! h : T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$

Sei $\xi_1 : h_0(t_1)$; $\exists \xi_1 \in \bigcap_{i=0}^n U_i$ ($U_i = D(X_i)$) (sonst ist $\xi_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$ Induktion über n)
 $\Rightarrow \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \xi_1}^\times$ für alle $i, j \Rightarrow$ Das Bild \tilde{f}_{ij} von $\frac{x_i}{x_j}$ in $\underbrace{\kappa(\xi_1)}_{=\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \xi_1}/m_{\xi_1}}$ ist $\neq 0 \Rightarrow f_{ij} := h_0^\#(\tilde{f}_{ij}) \in K^\times$

Sei $v : K^\times \rightarrow G$ die zu R gehörige Bewertung. Wähle $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $v(f_{j0}) = \min_{k=1}^n v(f_{kj}) \Rightarrow v(f_{ij}) = v(f_{i0}) - v(f_{j0}) \geq 0$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow f_{ij} \in R$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow \frac{X_i}{X_j} \mapsto f_{ij}$ definiert Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}] \rightarrow R$, also Morphismus $h : T \rightarrow U_j \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$

Eindeutigkeit von h : Sei $h' : T \rightarrow U_k$ eine weitere Fortsetzung von h_0 .

Dann ist $k \neq j$, weil $U_j \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist (8.3). Sei $\beta : \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_k}, \dots, \frac{X_n}{X_k}] \rightarrow R$ der zugehörige Ringhomomorphismus $\Rightarrow \beta(\frac{X_i}{X_k}) = h_0^\#(\frac{X_i}{X_k}) = f_{ik} \in R^\times$

Es ist $f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk} \Rightarrow \beta$ induziert denselben Morphismus $T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ wie α . □

