9. Einige Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

(I): $y' = f(\frac{y}{x})$. Setze $u := \frac{y}{x}$. Dies führt auf eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen für u.

Beispiel

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u := \frac{y}{x} \quad &\Longrightarrow \quad y = xu \\
y' = u + xu' \quad &\Longrightarrow \quad u + xu' = u - \frac{1}{u^2} \\
&\Longrightarrow \quad u' = -\frac{1}{xu^2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{xu^2} \\
&\Longrightarrow \quad u^2 \mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}u^3 = -\log x + c \\
&\Longrightarrow \quad u^3 = -3\log x + 3c \ (c \in \mathbb{R}) \\
u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad 1 = u^3(1) = 3c \\
&\Longrightarrow \quad c = \frac{1}{3} \\
u^3 = 1 - 3\log x \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\log x} \text{ auf } (0, \sqrt[3]{e}) \text{ (Lösung des AWPs)}
\end{aligned}$$

(II) Bernoullische Differentialgleichung: $y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$, wobei p und q stetig sind und $0 \neq \alpha \neq 1$. Dividiere durch y^α und setze $u := y^{1-\alpha}$. Dies führt auf eine lineare Differentialgleichung für u.

Beispiel
$(*)$ $y' - xy + 3xy^2 = 0$ $(\alpha = 2)$. Dann: $\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} + 3x = 0$; $u := \frac{1}{y} \Longrightarrow u' = -\frac{y'}{y^2} \Longrightarrow -u' - xu + 3x = 0 \Longrightarrow u' = -xu + 3x$. Allgemeine Lösung hiervon: $u(x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3$ $(c \in \mathbb{R})$. Allgemeine Lösung von $(*)$: $y(x) = \frac{1}{ce^{-\frac{1}{2}x^3} + 3}$ $(c \in \mathbb{R})$

(III) Riccatische Differentialgleichung: $(*)$ $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$, wobei g, h, k stetig sind. Sei y_1 eine bekannte Lösung von $(*)$; setze $z := \frac{1}{y - y_1}$. Nachrechnen: $(**)$ $z' = (g(x) +$

$2y_1(x)h(x))z + h(x)$ (lin. Dgl für z). Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet: $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ wobei z die allgemeinen Lösungen von $(**)$ durchläuft.