

## 12. Wege im $\mathbb{R}^n$

### Definition

- (1) Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Dann heißt  $\gamma$  ein Weg im  $\mathbb{R}^n$
- (2) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\Gamma_\gamma := \gamma([a, b])$  heißt der zu  $\gamma$  gehörende Bogen,  $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ . 3.3  $\implies \Gamma_\gamma$  ist beschränkt und abgeschlossen.  $\gamma(a)$  heißt der Anfangspunkt von  $\gamma$ ,  $\gamma(b)$  heißt der Endpunkt von  $\gamma$ .  $[a, b]$  heißt Parameterintervall von  $\gamma$ .
- (3)  $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$  heißt der zu  $\gamma$  inverse Weg. Beachte:  $\gamma^- \neq \gamma$ , aber  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$ .

### Beispiele:

- (1) Sei  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $\Gamma_\gamma = S[x_0, y_0]$
- (2) Sei  $r > 0$  und  $y(t) := (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$   
 $\Gamma_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} = \partial U_r(0)$   
 $\tilde{\gamma}(t) := (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ .  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ , aber  $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$ .

**Erinnerung:**  $\mathfrak{Z}$  ist die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg. Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ .

$$L(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

Übung: Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$  und gilt  $Z_1 \subseteq Z_2 \implies L(\gamma, Z_1) \leq L(\gamma, Z_2)$

$\gamma$  heißt rektifizierbar (rb) :  $\iff \exists M \geq 0 : L(\gamma, Z) \leq M \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$ . In diesem Fall heißt  $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$  die Länge von  $\gamma$ .

Ist  $n = 1$ , so gilt:  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma \in \text{BV}[a, b]$ . In diesem Fall:  $L(\gamma) = V_\gamma([a, b])$ .

### Satz 12.1 (Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation)

Sei  $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \eta_1, \dots, \eta_n \in \text{BV}[a, b]$ .

### Beweis

Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathfrak{Z}$  und  $J = \{1, \dots, n\}$ .

$|\eta_j(t_k) - \eta_j(t_{k-1})| \stackrel{1.7}{\leq} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \stackrel{1.7}{\leq} \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})|$ . Summation über  $k \implies V_{\eta_j} \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})| = \sum_{\nu=1}^n V_{\eta_\nu}(Z) \implies \text{Behauptung} \quad \blacksquare$

**Übung:**  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma^-$  ist rektifizierbar. In diesem Fall:  $L(\gamma) = L(\gamma^-)$

**Summe von Wegen:** Gegeben:  $a_0, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l$  und Wege  $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $k = 1, \dots, l$ ) mit  $\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$  ( $k = 1, \dots, l-1$ ). Definiere  $\gamma : [a_0, a_l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\gamma(t) := \gamma_k(t)$ , falls  $t \in [a_{k-1}, a_k]$ .  $\gamma$  ist ein Weg im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \cup \Gamma_{\gamma_2} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_l}$ .  $\gamma$  heißt die Summe der Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  und wird mit  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_l$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg und  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$  und  $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  ( $k = 1, \dots, m$ )  $\implies \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ . Aus Analysis I, 25.1(7) und 12.1 folgt:

**Satz 12.2 (Summe von Wegen)**

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ , so gilt:  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sind rektifizierbar. In diesem Fall:  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m)$

**Definition**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein rektifizierbarer Weg. Sei  $t \in (a, b]$ . Dann:  $\gamma|_{[a, t]}$  ist rektifizierbar (12.2).

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a, t]}), & \text{falls } t \in (a, b] \\ 0, & \text{falls } t = a \end{cases}$$

heißt die zu  $\gamma$  gehörende **Weglängenfunktion**.

**Satz 12.3 (Eigenschaften der Weglängenfunktion)**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein rektifizierbarer Weg. Dann:

- (1)  $s \in C[a, b]$
- (2)  $s$  ist wachsend.

**Beweis**

(1) In der großen Übung

(2) Sei  $t_1, t_2 \in [a, b]$  und  $t_1 < t_2$ .  $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_1]}$ ,  $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ ,  $\gamma_3 := \gamma|_{[a, t_2]}$ . Dann  $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ .  
 $12.2 \implies \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sind rektifizierbar und  $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t_2)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{s(t_1)} + \underbrace{L(\gamma_2)}_{\geq 0} \implies s(t_2) \geq s(t_1)$ . ■

**Satz 12.4 (Rechenregeln für Wegintegrale)**

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f_1, \dots, f_n \in R[a, b]$ .

$$\int_a^b f(t) dt := \left( \int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

Dann:

(1)

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

**Beweis**(1) Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \implies$ 

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt$$

(2)  $y := \int_a^b f(t) dt$ . O.B.d.A:  $y \neq 0$ .  $x := \frac{1}{\|y\|} y \implies \|x\| = 1, y = \|y\| x. \|y\|^2 = y \cdot y = \|y\| (x \cdot y) = \|y\| \left( x \cdot \int_a^b f(t) dt \right) = \|y\| \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \leq \|y\| \int_a^b \underbrace{|x \cdot f(t)|}_{\leq \|y\| \|f(t)\| = \|f(t)\|} dt \leq \|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt$

■

**Satz 12.5 (Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege)** $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein stetig differenzierbarer Weg. Dann:(1)  $\gamma$  ist rektifizierbar(2) Ist  $s$  die zu  $\gamma$  gehörende Weglängenfunktion, so ist  $s \in C^1[a, b]$  und  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$ (3)  $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ **Beweis**(1)  $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_j \in C^1[a, b] \xrightarrow{A1,25.1} \eta_j \in \text{BV}[a, b] \xrightarrow{12.1} \gamma$  ist rektifizierbar.(2) Sei  $t_0 \in [a, b]$ . Wir zeigen:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0 + 0). \quad (\text{analog zeigt man: } \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0 - 0)).$$

Sei  $t \in (t_0, b]$ ;  $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_0]}, \gamma_2 := \gamma|_{[t_0, t]}, \gamma_3 := \gamma|_{[a, t]}$ . Dann:  $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$  und  $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t)} =$

$$\underbrace{L(\gamma_1)}_{=s(t_0)} + L(\gamma_2) \implies s(t) - s(t_0) = L(\gamma_2) \quad (I).$$

$$\tilde{Z} := \{t_0, t\} \text{ ist eine Zerlegung von } [t_0, t] \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

**Definition:**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $F(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ . 2.Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  $\implies F$  ist differenzierbar und  $F'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$ . Sei

$Z = \{\tau_0, \dots, \tau_m\}$  eine beliebige Zerlegung von  $[t_0, t]$ .

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \gamma'(\tau) d\tau = \left( \dots, \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \eta'_k(\tau) d\tau, \dots \right) \stackrel{A1}{=} (\dots, \eta_k(\tau_j) - \eta_k(\tau_{j-1}), \dots) = \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})$$

$$\implies \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\| \stackrel{12.4}{\leq} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\gamma'(\tau)\| d\tau. \text{ Summation } \implies L(\gamma_2, Z) \leq \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = F(t) - F(t_0) \implies L(\gamma_2) \leq F(t) - F(t_0) \text{ (III).}$$

$$(I), (II), (III) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \stackrel{(II)}{\leq} L(\gamma_2) \stackrel{(I)}{=} s(t) - s(t_0) \stackrel{(III)}{\leq} F(t) - F(t_0)$$

$$\implies \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|\gamma'(t_0)\|} \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \underbrace{\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} F'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|}$$

$$(3) L(\gamma) = s(b) - s(a) \stackrel{AI}{=} \int_a^b s'(t) dt \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \blacksquare$$

### Beispiele:

$$(1) x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \quad (t \in [0, 1]). \quad \gamma'(t) = y_0 - x_0 \implies L(\gamma) = \int_0^1 \|y_0 - x_0\| dt = \|y_0 - x_0\|.$$

$$(2) \text{ Sei } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \gamma(t) := (t, f(t)), t \in [a, b]. \quad \gamma \text{ ist ein Weg im } \mathbb{R}^2. \quad \gamma \text{ ist rektifizierbar} \iff f \in \text{BV}[a, b]. \quad \Gamma_\gamma = \text{Graph von } f. \text{ Jetzt sei } f \in C^1[a, b] \xrightarrow{12.5} L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

$$(3) \gamma(t) := (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi]). \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t). \quad \|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \xrightarrow{12.5} s'(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \implies s(t) = t \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad (\text{Bogenmaß}). \quad \text{Winkelmaß: } \varphi := \frac{180}{\pi} t. \quad L(\gamma) = 2\pi.$$

### Definition

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein Weg.

$$(1) \gamma \text{ heißt } \mathbf{st\ddot{u}ckweise stetig differenzierbar} : \iff \exists z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \text{ mit: } \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \text{ sind stetig differenzierbar } (k = 1, \dots, m) \iff \exists \text{ stetig differenzierbare Wege } \gamma_1, \dots, \gamma_l : \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l.$$

$$(2) \gamma \text{ heißt } \mathbf{glatt} : \iff \gamma \text{ ist stetig differenzierbar und } \|\gamma'(t)\| > 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

$$(3) \gamma \text{ heißt } \mathbf{st\ddot{u}ckweise glatt} : \iff \exists \text{ glatte Wege } \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l$$

Aus 12.2 und 12.5 folgt:

### Satz 12.6 (Rektifizierbarkeit von Wegsummen)

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l$  st\ddot{u}ckweise stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbaren Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \implies \gamma$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_l)$ .

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\gamma$  heißt eine **Parameterdarstellung** von  $\Gamma_\gamma$ .

### Beispiele:

- (1)  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_1(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \ t \in [0, 1], \gamma_2(t) := \gamma_1^-(t) \ t \in [0, 1], \gamma_3(t) := x_0 + 7t(y_0 - x_0) \ t \in [0, \frac{1}{7}]$ .  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sind Parameterdarstellungen von  $S[x_0, y_0]$ .
- (2)  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), (t \in [0, 2\pi]), \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t), (t \in [0, 4\pi])$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  sind Parameterdarstellungen von  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

### Definition

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien Wege.

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **äquivalent**, in Zeichen  $\gamma_1 \sim \gamma_2 : \iff \exists h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  stetig und streng wachsend,  $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$  und  $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t)) \ \forall t \in [a, b]$  (also  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ ).  $h$  heißt eine **Parametertransformation** (PTF). Analysis 1  $\implies h([a, b]) = [\alpha, \beta] \implies \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$ . Es gilt:  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1} \implies \gamma_2 \sim \gamma_1$ . „ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.

### Beispiele:

- (1)  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  seien wie in obigem Beispiel (1).  $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \approx \gamma_2$ .
- (2)  $\gamma_1, \gamma_2$  seien wie in obigem Beispiel (2).  $\gamma_1 \approx \gamma_2$ , denn  $L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$

### Satz 12.7 (Eigenschaften der Parametertransformation)

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien äquivalente Wege und  $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  eine Parametertransformation.

- (1)  $\gamma_1$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma_2$  ist rektifizierbar. In diesem Falle:  $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$
- (2) Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  glatt  $\implies h \in C^1[a, b]$  und  $h' > 0$ .

### Beweis

(2) In den großen Übungen.

- (1) Es genügt zu zeigen: Aus  $\gamma_2$  rektifizierbar folgt:  $\gamma_1$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$ . Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \implies \tilde{Z} := \{h(t_0), \dots, h(t_m)\}$  ist eine Zerlegung von  $[\alpha, \beta]$ .

$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{j=1}^m \|\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \|\gamma_2(h(t_j)) - \gamma_2(h(t_{j-1}))\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

$\implies \gamma_1$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$ . ■

**Weglänge als Parameter** Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein glatter Weg. 12.5  $\implies \gamma$  ist rb.  $L := L(\gamma)$ . 12.5  $\implies s \in C^1[a, b]$  und  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \ \forall t \in [a, b]$ .  $s$  ist also *streng wachsend*. Dann gilt:  $s([a, b]) = [0, L], s^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$  ist streng wachsend und stetig db.  $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)}$  für  $\sigma \in [0, L], s(t) = \sigma$ .

## 12. Wege im $\mathbb{R}^n$

### Definition

$\tilde{\gamma}[0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\tilde{\gamma}(\sigma) := \gamma(s^{-1}(\sigma))$ , also  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ ;  $\tilde{\gamma}$  ist ein Weg im  $\mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ ;  $\Gamma_{\gamma} = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$ .

12.7  $\implies \tilde{\gamma}$  ist rb,  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = L$ ,  $\tilde{\gamma}$  ist stetig db.  $\tilde{\gamma}$  heißt Parameterdarstellung von  $\Gamma_{\gamma}$  mit der Weglänge als Parameter. Warum?

Darum: Sei  $\tilde{s}$  die zu  $\tilde{\gamma}$  gehörende Weglängenfunktion.  $\forall \sigma \in [0, L] : \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma))$ . Sei  $\sigma \in [0, L]$ ,  $t := s^{-1}(\sigma) \in [a, b]$ ,  $s(t) = \sigma$ .

$$\tilde{\gamma}'(\sigma) = (s^{-1})'(\sigma) \cdot \gamma'(s^{-1}(\sigma)) = \frac{1}{s'(t)} \gamma'(t) \stackrel{12.5}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \implies \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \quad (\implies \tilde{\gamma} \text{ ist glatt}).$$

$$\tilde{s}'(\gamma) \stackrel{12.5}{=} \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \stackrel{\tilde{s}(0)=0}{\implies} \tilde{s}(\sigma) = \sigma.$$

Also:  $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1$ ,  $\tilde{s}(\sigma) = \sigma \quad \forall \sigma \in [0, L]$ .

### Beispiel

$\gamma(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;  $\gamma$  ist stetig db; Nachrechnen:  $\|\gamma'(t)\| = e^t \quad \forall t \in [0, 1] \implies \gamma$  ist glatt.

$$s'(t) \stackrel{12.5}{=} \|\gamma'(t)\| = e^t \implies s(t) = e^t + c \implies 0 = s(0) = 1 + c \implies c = -1, \quad s(t) = e^t - 1 \quad (t \in [0, 1]) \implies L = L(\gamma) = s(1) = e - 1. \quad e^t = 1 + s(t), \quad t = \log(1 + s(t)).$$

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) = \gamma(\log(1 + \sigma)) = \frac{1+\sigma}{\sqrt{2}}(\cos(\log(1 + \sigma)), \sin(\log(1 + \sigma))), \quad \sigma \in [0, e - 1].$$