

§ 17 Das Integral im Komplexen

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, $u := \operatorname{Re}(f), v := \operatorname{Im}(f)$, also: $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}, f = u + iv$.

Wir verstehen \mathbb{C} mit der σ -Algebra \mathfrak{B}_2 (wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2).

Definition

f heißt (Borel-) **messbar**, genau dann wenn gilt: f ist \mathfrak{B}_d - \mathfrak{B}_2 -messbar.

Aus 3.2 folgt: f ist messbar genau dann, wenn u und v messbar sind.

Definition

Sei f messbar. f heißt **integrierbar** (ib.) genau dann, wenn u und v integrierbar sind. In diesem Fall setze

$$\int_X f \, dx := \int_X u \, dx + i \int_X v \, dx \quad (\in \mathbb{C})$$

Es gilt: $|u|, |v| \leq |f| \leq |u| + |v|$ auf X . Hieraus und aus 4.9 folgt: f ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Definition

$$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f|^p \, dx < \infty\}$$

(Achtung: mit den Betragsstrichen in ob. Integral ist der komplexe Betrag gemeint!)

$$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$$

$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Vektorraum (siehe 17.1) und \mathcal{N} ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$.

$$L^p(X, \mathbb{C}) := \mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) / \mathcal{N}$$

Definition

Für $f, g \in L^2(X, \mathbb{C})$ setze

$$(f|g) := \int_X f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

sowie

$$f \perp g : \Longleftrightarrow (f|g) = 0 \quad (f \text{ und } g \text{ sind } \mathbf{orthogonal}).$$

(\bar{z} bezeichne hierbei die komplex Konjugierte von z , vgl. Lineare Algebra).

Klar:

- (1) $L^p(X, \mathbb{C})$ ist mit $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ ein komplexer normierter Raum (NR).

(2) $(f|g)$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X, \mathbb{C})$. Es ist

$$(f|g) = \overline{(g|f)},$$

$$(f|f) = \int_X f(x) \overline{f(x)} \, dx = \int_X |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_2^2, \text{ also:}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} \quad (f, g \in L^2(X, \mathbb{C}))$$

(Beachte: es ist $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ für $z \in \mathbb{C}$).

Inoffizielle Anmerkung: Dieses Skalarprodukt ist auf \mathbb{C} nur linear in der ersten Komponente! Wenn man einen \mathbb{C} -Skalar aus der zweiten Komponente rausziehen möchte, muss man diesen komplex konjugieren:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{C} : \quad & (f|\alpha g) = \overline{\alpha} (f|g) \\ & (\alpha f|g) = \alpha (f|g) \end{aligned}$$

Satz 17.1

(1) Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_X f \, dx + \beta \int_X g \, dx$$

(ii) $\operatorname{Re} \left(\int_X f \, dx \right) = \int_X \operatorname{Re}(f) \, dx$ und $\operatorname{Im} \left(\int_X f \, dx \right) = \int_X \operatorname{Im}(f) \, dx$

(iii) \bar{f} ist integrierbar und

$$\int_X \bar{f} \, dx = \overline{\int_X f \, dx}$$

(2) Die Sätze 16.1 bis 16.3 und das Beispiel 16.6 gelten in $L^p(X, \mathbb{C})$.

(3) $L^p(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Banachraum, $L^2(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Hilbertraum.

Beispiel 17.2

Sei $X = [0, 2\pi]$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$e_k(t) := e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt) \quad \text{und} \quad b_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_k$$

Dann gilt: $b_k, e_k \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und

$$\int_0^{2\pi} e_0(t) \, dt = 2\pi$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$ ist

$$\int_0^{2\pi} e_k(t) \, dt = \frac{1}{ik} e^{ikt} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ik} (e^{2\pi ki} - 1) = 0$$

Damit ist

$$(b_k | b_l) = \int_0^{2\pi} b_k \overline{b_l} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l \\ 0, & \text{falls } k \neq l \end{cases}$$

Insbesondere ist $\|b_k\|_2 = 1$. Das heißt $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist ein **Orthonormalsystem** in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.
Zur Übung: $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Definition

Sei $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in \mathbb{C} und $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in $L^2(X, \mathbb{C})$.

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$s_n := \sum_{k=-n}^n \alpha_k = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k = \alpha_{-n} + \alpha_{-(n-1)} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ in \mathbb{C} , so schreiben wir $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{k=-n}^n f_k = \sum_{|k| \leq n} f_k$$

Gilt für ein $f \in L^2(X, \mathbb{C})$: $\|f - \sigma_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so schreiben wir

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \quad \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \text{ im Sinne der } L^2\text{-Norm} \right)$$

Definition

Sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2. $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)** von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ genau dann, wenn es zu jedem $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ eine Folge

$$(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$$

gibt, mit

$$(*) \quad f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k b_k$$

Frage: Ist $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$?

Antwort: Ja! In 18.5 werden wir sehen, dass (*) gilt mit $c_k = (f | b_k)$.

