

§ 13.

Wegintegrale

In diesem Paragraphen seien alle vorkommenden Wege stets stückweise stetig differenzierbar.

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\Gamma := \Gamma_\gamma$. $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

$$(1) \text{ Für } j \in \{1, \dots, n\} : \int_\gamma g(x) dx_j := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \eta'_j(t) dt$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x) \cdot dx &:= \int_\gamma f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n \\ &:= \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j(x) dx_j \end{aligned}$$

Es ist $\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ und heißt das **Wegintegral von f längs γ** .

Beispiel

$f(x, y, z) := (z, y, x)$, $\gamma(t) = (t, t^2, 3t)$, $t \in [0, 1]$. $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t)$, $\gamma'(t) = (1, 2t, 3)$, $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$.

$$\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}.$$

Satz 13.1 (Rechnen mit Wegintegralen)

γ, Γ, f seien wie oben, $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei rektifizierbar und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

$$(1) \int_\gamma (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_\gamma f(x) \cdot dx + \eta \int_\gamma g(x) \cdot dx$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = - \int_\gamma f(x) \cdot dx$$

$$(4) \left| \int_\gamma f(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$$

$$(5) \text{ Ist } \hat{\gamma} \sim \gamma \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

Beweis

(1) klar

(2) Ana I, 23.9

(3) nur für γ stetig differenzierbar. $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$, $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(b + a - t)) \cdot \gamma'(b + a - t)(-1) dt = (\text{subst. } \tau = b + a - t, d\tau = dt) \\ &= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

(4) Übung

(5) Sei $\hat{\gamma} = \gamma \circ h$, $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig und streng wachsend. $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$. Nur für γ und h stetig db. Dann ist $\hat{\gamma}$ stetig db.

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t) dt = (\text{subst. } \tau = h(t), d\tau = h'(t) dt) = \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definition

γ, Γ seien wie immer in diesem Paragraphen. γ sei stückweise stetig differenzierbar. s sei die zu γ gehörende Weglängenfunktion und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. 12.4 $\implies s$ ist wachsend $\xrightarrow{\text{Ana I}} s \in BV[a, b]$; $g \circ \gamma$ stetig $\xrightarrow{\text{Ana I, 26.6}} g \circ \gamma \in R_s[a, b]$.

$$\int_{\gamma} g(x) ds := \int_a^b g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Integral bzgl. der Weglänge.**Satz 13.2 (Rechnen mit Integralen bzgl. der Weglänge)**Seien γ, g wie oben.

$$(1) \int_{\gamma^-} g(x) ds = \int_{\gamma} g(x) ds$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x) ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x) ds.$$

Beispiel $g(x, y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2}$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} g(\gamma(t)) &= (1 + t^2 + 3t^2)^{1/2} = (1 + 4t^2)^{1/2}, \quad \gamma'(t) = (1, 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = (1 + 4t^2)^{1/2} \implies \\ \int_{\gamma} g(x, y) ds &= \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Gegeben: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ rektifizierbare Wege, $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \dots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$. $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m}$.

$\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma \text{ ist ein rektifizierbarer Weg im } \mathbb{R}^n \text{ mit: } \Gamma_\gamma = \Gamma, L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m) \text{ und } \int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \dots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx \text{ f\"ur jedes stetige } f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n\}$.

Ist $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, so sagt man γ entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Satz 13.3 (Stetige Differenzierbarkeit der Aneinanderhängung)

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$ seien wie oben. Dann: $\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq \emptyset$.

Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Beweis

O.B.d.A: $m = 2$. Sei $c > b_1$ beliebig.

Def. $h : [b_1, c] \rightarrow [a_2, b_2]$ linear wie folgt: $h(x) = px + q$, $h(b_1) = a_2$, $h(c) = b_2$. $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$.
Dann: $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$. $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$. 12.2, 12.7, 13.2 $\implies \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. ■

Beispiel

In allen Beispielen sei $f(x, y) = (y, x - y)$ und $t \in [0, 1]$.

(1) $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$.

Sei $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. Anfangspunkt von γ ist $(0,0)$, Endpunkt von γ ist $(1,1)$. Nachrechnen:
 $\int_{\gamma_1} f(x, y) \cdot d(x, y) = 0$, $\int_{\gamma_2} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$. Also: $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

(2) $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2(t) = (t, 1)$.

Sei $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$, Anfangspunkt von γ ist $(0,0)$, Endpunkt von γ ist $(1,1)$. Nachrechnen:
 $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

(3) $\gamma(t) = (t, t^3)$. Anfangspunkt von γ ist $(0,0)$, Endpunkt von γ ist $(1,1)$. Nachrechnen:
 $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

