§ 1 σ-Algebren und Maße

In diesem Paragraphen sei $\varnothing \neq X$ eine Menge.

Definition
Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{A}$ heißt eine **σ-Algebra** auf X, wenn gilt:

(σ_1) $X \in \mathfrak{A}$

(σ_2) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so ist auch $A^c \in \mathfrak{A}$.

(σ_3) Ist (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\bigcup A_j \in \mathfrak{A}$.

Beispiel

(1) $\{X, \varnothing\}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren auf X.

(2) Sei $A \subseteq X$, dann ist $\{X, \varnothing, A, A^c\}$ eine σ-Algebra auf X.

(3) $\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra auf X.

Lemma 1.1
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, dann:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{A}$

(2) Ist (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\bigcap A_j \in \mathfrak{A}$.

(3) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt:

- (i) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{A}$
- (ii) $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$
- (iii) $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}$

Beweis

(1) $\varnothing = X^c \in \mathfrak{A}$ (nach (σ_2)).

(2) $D := \bigcap A_j$. $D^c = \bigcup A_j^c \in \mathfrak{A}$ (nach (σ_2) und (σ_3)), also gilt auch $D = (D^c)^c \in \mathfrak{A}$.

(3) (i) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{A}$ folgt aus (σ_3) mit $A_{n+j} := \varnothing$ ($j \geq 1$).

(ii) $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$ folgt aus (2) mit $A_{n+j} := X$ ($j \geq 1$).

(iii) $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathfrak{A}$ ∎

Lemma 1.2
Sei $\varnothing \neq \mathcal{F}$ eine Menge von σ-Algebren auf X. Dann ist

$$\mathfrak{A}_0 := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

eine σ-Algebra auf X.

Beweis
(σ_1) $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : X \in \mathfrak{A} \implies X \in \mathfrak{A}_0$.

(σ_2) Sei $A \in \mathfrak{A}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A \in \mathfrak{A} &\implies \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A^c \in \mathfrak{A} \\ &\implies A^c \in \mathfrak{A}_0 \end{aligned}$$

(σ_3) Sei (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}_0$, dann ist (A_j) Folge in $\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$, dann gilt:

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : \bigcap A_j \in \mathfrak{A} \implies \bigcap A_j \in \mathfrak{A}_0$$ ■

Definition
Sei $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{F} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}\}$. Definiere

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

Dann ist wegen 1.2 $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra auf X. $\sigma(\mathcal{E})$ heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra**. $\mathcal{E}$ heißt ein **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Lemma 1.3
Sei $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(1) $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die "kleinste"σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

(2) Ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra, so ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

(3) Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, so ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.

Beweis
(1) Klar nach Definition.

(2) $\mathfrak{A} := \mathcal{E}$, dann gilt $\mathfrak{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}$.

(3) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$, also folgt nach Definition $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$. ■

Beispiel

(1) Sei $A \subseteq X$ und $\mathcal{E} := \{A\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{X, \varnothing, A, A^c\}$.

(2) $X := \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{E} := \{\{1\},\{1,2\}\}$. Dann gilt:

$$\sigma(\mathcal{E}) := \{X, \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$$

Erinnerung: Sei $d \in \mathbb{N}, X \subseteq \mathbb{R}^d$. $A \subseteq X$ heißt **offen** (**abgeschlossen**) in X, genau dann wenn ein offenes (abgeschlossenes) $G \subseteq \mathbb{R}^d$ existiert mit $A = X \cap G$.
Beachte: A abgeschlossen in $X \iff X \setminus A$ offen in X.

Definition
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

(1) $\mathcal{O}(X) := \{A \subseteq X : A \text{ ist offen in } X\}$

(2) $\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$ heißt **Borelsche σ-Algebra** auf X.

(3) $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Elemente von $\mathfrak{B}_d$ heißen **Borelsche Mengen** oder **Borel-Mengen**.

Beispiel

(1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Ist $A \subseteq$ offen (abgeschlossen) in X, so ist $A \in \mathfrak{B}(X)$.

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen (abgeschlossen) so ist $A \in \mathfrak{B}_d$.

(3) Sei $d = 1, A = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ (mit $r_i \neq r_j$ für $i \neq j$). Also ist $\mathbb{Q} = \bigcup\{r_j\}$. Sei nun $r \in \mathbb{Q}$, dann ist $B := (-\infty, r) \cup (r, \infty) \in \mathfrak{B}_1$. Daraus folgt $\{r_j\} \in \mathfrak{B}_1$, also auch $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1$.
Allgemeiner lässt sich zeigen: $\mathbb{Q}^d := \{(x_1, \dots, x_d) : x_j \in \mathbb{Q} (j = 1, \dots, d)\} \in \mathfrak{B}_d$.

Definition

(1) Seien $I_1, \dots, I_d$ Intervalle in $\mathbb{R}$. $I_1 \times \dots \times I_d$ heißt ein **Intervall** in $\mathbb{R}^d$.

(2) Seien $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

$$a \le b :\iff a_j \le b_j \quad (j = 1, \dots, d)$$

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $a \le b$.

$$\begin{aligned} (a,b) &:= (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \\ (a,b] &:= (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \\ [a,b) &:= [a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d) \\ [a,b] &:= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \end{aligned}$$

mit der Festlegung $(a,b) := (a,b] := [a,b) := \varnothing$, falls $a_j = b_j$ für ein $j \in \{1, \dots, d\}$.

(4) Für $k \in \{1, \dots, d\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere die folgenden **Halbräume**:

$$\begin{aligned} H_k^-(\alpha) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \le \alpha\} \\ H_k^+(\alpha) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \ge \alpha\} \end{aligned}$$

Satz 1.4 (Erzeuger der Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$)
Es seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\} \\
\mathcal{E}_2 &:= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\} \\
\mathcal{E}_3 &:= \{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots, d\}
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen von Intervallen und Halbräumen.

Beweis

(1) Sei $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d), \mathfrak{M} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b, (a,b) \subseteq G\}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ abzählbar und $G = \bigcup_{I \in \mathfrak{M}} I$. also gilt:

$$G \in \sigma(\mathcal{E}_1) \implies \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$$

(2) Sei $(a,b) \in \mathcal{E}_1$.
Fall 1: $(a,b) = \varnothing \in \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$
Fall 2: $(a,b) \neq \varnothing, a = (a_1 \ldots, a_d), b = (b_1 \ldots, b_d)$. Dann gilt für alle $j \in \{1, \ldots, d\} : a_j < b_j$, also gilt auch:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall j \in \{1, \ldots, d\} : a_j < b_j - \frac{1}{n}$$

Definiere $c_n := (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^d$. Dann gilt:

$$(a,b) = \bigcup_{n \geq N} (a, b - c_n] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$$

Also auch $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ und damit $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$.

(3) Seien $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{Q}^d$ mit $a \leq b$. Nachrechnen:

$$(a,b] = \bigcap_{k=1}^{d} (H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c) \in \sigma(\mathcal{E}_3).$$

Das heißt $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$.

(4) $H_k^-(\alpha)$ ist abgeschlossen, somit ist $H_k^-(\alpha)^c$ offen und damit $H_k^-(\alpha)^c \in \mathfrak{B}_d$, also auch $H_k^-(\alpha) \in \mathfrak{B}_d$. Damit ist $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathfrak{B}_d \implies \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathfrak{B}_d$. ■

Definition
Sei $\varnothing \neq \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\varnothing \neq Y \subseteq X$.

$$\mathfrak{M}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$$

heißt die **Spur von $\mathfrak{M}$ in** Y.

Satz 1.5 (Spuren und σ-Algebren)
Sei $\varnothing \neq Y \subseteq X$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X.

(1) $\mathfrak{A}_Y$ ist eine σ-Algebra auf Y.

(2) $\mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A} \iff Y \in \mathfrak{A}$

(3) Ist $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist $\sigma(\mathcal{E}_Y) = \sigma(\mathcal{E})_Y$.

Beweis

(1) (σ_1) Es ist $Y = Y \cap X \in \mathfrak{A}_Y$, da $X \in \mathfrak{A}$.

(σ_2) Sei $B \in \mathfrak{A}_Y$, dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $B = A \cap Y$. Also ist $Y \setminus B = (X \setminus A) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$, da $X \setminus A \in \mathfrak{A}$ ist.

(σ_3) Sei (B_j) eine Folge in $\mathfrak{A}_Y$, dann existiert eine Folge $(A_j) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ mit $B_j = A_j \cap Y$. Es gilt:

$$\bigcup B_j = \bigcup (A_j \cap Y) = (\bigcup A_j) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$$

(2) Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„$\implies$" Es gilt $Y \in \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$.

„$\impliedby$" Sei $B \in \mathfrak{A}_Y$, dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $B = A \cap Y \in \mathfrak{A}$.

(3) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) &\implies \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \\ &\implies \sigma(\mathcal{E}_Y) \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \end{aligned}$$

Sei nun:

$$\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E}_Y)\}$$

Übung: $\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra auf X.
Sei $E \in \mathcal{E}$ dann ist $E \cap Y \in \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y)$ also $E \in \mathcal{D}$ und damit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E})_Y &\subseteq \sigma(\mathcal{D})_Y = \mathcal{D}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{D}\} \\ &\subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y) \end{aligned}$$

■

Folgerungen 1.6
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

(1) $\mathfrak{B}(X) = (\mathfrak{B}_d)_X$

(2) Ist $X \in \mathfrak{B}_d$, so ist $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d : A \subseteq X\} \subseteq \mathfrak{B}_d$.

Definition
Wir fügen $\mathbb{R}$ das Symbol $+\infty$ hinzu. Es soll gelten:

(1) $\forall a \in \mathbb{R} : a < +\infty$

(2) $\pm a + (+\infty) := +\infty =: (+\infty) \pm a$

(3) $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$

Sei etwa $[0, +\infty] := [0, \infty) \cup \{+\infty\}$.

(1) Sei (x_n) eine Folge in $[0, +\infty]$. Es gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty :\iff \forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_c : x_n > c$$

(2) Sei (a_n) eine Folge in $[0, +\infty]$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = +\infty$$

genau dann wenn $a_j = +\infty$ für ein $j \in \mathbb{N}$ oder, falls alle $a_j < +\infty$, wenn $\sum a_n$ divergiert.

Wegen 13.1 Ana I können Reihen der obigen Form beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich ihr Wert verändert.

Definition
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ eine Abbildung. μ heißt ein **Maß** auf $\mathfrak{A}$, genau dann wenn gilt:

(M_1) $\mu(\varnothing) = 0$

(M_2) Ist (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j)$. Diese Eigenschaft heißt **σ-Additivität**.

Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$, so heißt $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein **Maßraum**.
Ein Maß μ heißt **endlich**, genau dann wenn $\mu(X) < \infty$. Ein Maß μ heißt ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, genau dann wenn $\mu(X) = 1$ ist.

Beispiel

(1) Sei $\mathfrak{A} = \times(X)$ und $x_0 \in X$. $\delta_{x_0} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ sei definiert durch:

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Klar ist, dass $\delta_{x_0}(\varnothing) = 0$ ist.
Sei (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$.

$$\delta_{x_0}(\bigcup A_j) = \left.\begin{cases} 1, & x_0 \in \bigcup A_j \\ 0, & x_0 \notin \bigcup A_j \end{cases}\right\} = \sum \delta_{x_0}(A_j)$$

δ_{x_0} ist ein Maß auf $\times(X)$ und heißt **Punktmaß** oder **Dirac-Maß**.

(2) Sei $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \times(X)$ und (p_j) eine Folge in $[0, +\infty]$. Definiere $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ durch:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , A = \varnothing \\ \sum_{j \in A} p_j & , A \neq \varnothing \end{cases}$$

Übung: μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A} = \times(\mathbb{N})$ und heißt ein **Zählmaß**. Sind alle $p_j = 1$, so ist $\mu(A)$ gerade die Anzahl der Elemente von A.

(3) Sei $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum, $\varnothing \neq Y \subseteq X$ und $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Y. Definiere $\mu_0 : \mathfrak{A}_0 \to [0,+\infty]$ durch $\mu_0(A) := \mu(A)$ $(A \in \mathfrak{A}_0)$. Dann ist $(Y,\mathfrak{A}_0,\mu_0)$ ein Maßraum.
Ist spezieller $Y \in \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$ und man definiert $\mu_{|Y} : \mathfrak{A}_Y \to [0,+\infty]$ durch $\mu_{|Y}(A) := \mu(A)$.

Satz 1.7
$(X,\mathfrak{A},\mu)$ sei ein Maßraum, es seien $A, B \in \mathfrak{A}$ und (A_j) sei eine Folge in $\mathfrak{A}$. Dann:

(1) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(2) Ist $\mu(A) < \infty$ und $A \subseteq B$, $\implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(3) Ist μ endlich, dann ist $\mu(A) < \infty$ und $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$

(4) $\mu\left(\bigcup A_j\right) \leq \sum \mu(A_j)$ (σ-Subadditivität)

(5) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, so ist $\mu(\bigcup A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(6) Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(\bigcap A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Beweis

(1)-(3) $B = (B \setminus A) \cup A$. Dann: $\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$

(4) $B_1 = A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \quad (k \geq 2)$

Dann: $B_j \in \mathfrak{A}$, $B_j \subseteq A_j$ $(j \in \mathbb{N})$; (B_j) disjunkt und $\bigcup A_j = \bigcup B_j$. Dann:

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) = \mu\left(\bigcup B_j\right) = \sum \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(A_j)} \leq \sum \mu(A_j)$$

(5) $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ $(k \geq 2)$

Dann: $B_j \subseteq \mathfrak{A}$; $B_j \subseteq A_j$ $(j \in \mathbb{N})$; $\bigcup A_j = \bigcup B_j$ und $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$

Dann: $\mu(\bigcup A_j) = \mu(\bigcup B_j) = \sum \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(B_j)}_{=\mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \mu(A_n)}$

(6) Übung ∎