18. Der Satz von Montel

Satz 18.1 (Satz von Montel)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge in $H(D)$ und es gelte mit einem $c \geq 0$: $|f_n(z)| \leq c \ \forall z \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (*)
Dann enthält (f_n) eine auf D lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

Beweis
Wegen (*) und des Satzes von Arzelà-Ascoli (Ana3) genügt es zu zeigen:

$$\text{Zu } \epsilon > 0 \text{ und } z_0 \in D \text{ existiert ein } \delta > 0 : |f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall z, w \in U_\delta(z_0)$$

Sei $\epsilon > 0$ und $z_0 \in D$. $\exists r > 0 : \overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$
$\gamma(t) := z_0 + 2re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
$\delta := \frac{1}{2}\min\{\frac{\epsilon r}{2c}, 2r\}$.
Sei $n \in \mathbb{N}, z, w \in U_\delta(z_0)$. Für $\lambda \in \mathrm{Tr}(\gamma)$: $|\lambda - z|, |\lambda - w| \geq r$
$\implies \frac{|f_n(\lambda)|}{|\lambda - z||\lambda - w|} \leq \frac{c}{r^2}$
Dann: $|f_n(z) - f_n(w)| \overset{9.4}{=} \frac{1}{2\pi}|\int\limits_\gamma \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - w} d\lambda|$
$= \frac{|z-w|}{2\pi}|\int\limits_\gamma \frac{f_n(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - w)} d\lambda| \leq \frac{|z-w|}{2\pi}\frac{c}{r^2}2\pi 2r = \frac{2c}{r}|z - w|$
$= \frac{2c}{r}|z - z_0 + z_0 - w| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{2c}{r}(|z - z_0| + |w - z_0|) < \frac{2c}{r}2\delta$

$\leq \frac{2c}{r}\frac{\epsilon r}{2c} = \epsilon$.