

## 22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieversionen)

In diesem Paragraphen sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  stets ein Gebiet.

### Definition

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$ .

- (1)  $\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$  ("Inneres" von  $\gamma$ )  
 $\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$  ("Äußeres" von  $\gamma$ )
- (2) Sei  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .  $\gamma$  heißt in  $G$  **nullhomolog** :  $\iff n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$   
 $(\iff \text{Int}(\gamma) \subseteq G)$

### Beispiele:

- (i) Jeder geschlossene Weg in  $\mathbb{C}$  ist in  $\mathbb{C}$  nullhomolog.
- (ii)  $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ),  $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$ ;  $\gamma$  ist in  $G$  nicht nullhomolog.

### Satz 22.1

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

- (1) Ist  $\gamma$  nullhomotop in  $G \Rightarrow \gamma$  ist nullhomolog in  $G$ .
- (2) Ist  $G$  einfach zusammenhängend, so ist  $\gamma$  in  $G$  nullhomolog.

### Beweis

- (1) Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ . Dann ist  $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$  holomorph auf  $G$ .

$$\stackrel{21.2}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=2\pi i \, n(\gamma, z_0)} = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

- (2) folgt aus (1) ■

### Satz 22.2

Sei  $f \in H(G)$  und  $\gamma$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

$\varphi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  sei definiert durch:

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

- (1)  $\varphi$  ist stetig.
- (2) Für  $z \in G$  (fest) hat  $w \mapsto \varphi(w, z)$  in  $z$  eine hebbare Singularität;  $w \mapsto \varphi(w, z)$  ist also holomorph auf  $G$   
 Für  $w \in G$  (fest) hat  $z \mapsto \varphi(w, z)$  in  $w$  eine hebbare Singularität;  $z \mapsto \varphi(w, z)$  ist also holomorph auf  $G$
- (3)  $h(z) := \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$  ( $z \in G$ ). Ist  $\gamma$  nullhomolog in  $G$ , so ist  $h \equiv 0$  auf  $G$ .

**Beweis**

(1) 11.9

(2) 13.1

- (3) (A) Es ist  $h \in C(G)$ . Sei  $z_0 \in G$  und  $(z_n)$  eine Folge in  $G$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ .  $g_n(w) := \varphi(w, z_n)$ ,  $g(w) := \varphi(w, z_0)$  ( $w \in G$ ). Sei  $\Gamma$  der stückweise glatte Ersatzweg für  $\gamma$  (wie in §20).  
 Übung:  $(g_n)$  konvergiert auf  $\Gamma$  gleichmäßig gegen  $g$ .

$$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\Gamma} g_n(w) dw \rightarrow \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \varphi(w, z_0) dw = \int_{\gamma} \varphi(w, z_0) dw = h(z_0)$$

 Also:  $h(z_n) \rightarrow h(z_0)$ 

(B) Es ist  $h \in H(G)$ . Sei  $\Delta \subseteq G$  ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es zu zeigen:  $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$   
 9.1 und (2)  $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz = 0 \quad \forall w \in G$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left( \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \right) dz \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma} \underbrace{\left( \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz \right)}_{=0} dw = 0$$

$$(C) \quad \mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\gamma)}_{\subseteq G} \cup \text{Ext}(\gamma) \cup \underbrace{\text{Tr}(\gamma)}_{\subseteq G} = G \cup \text{Ext}(\gamma)$$

 Sei  $z_0 \in \text{Ext}(\gamma)$ . Sei  $C$  die Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ :  $z_0 \in C$ .

$$\stackrel{16.2}{\Rightarrow} n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow C \subseteq \text{Ext}(\gamma). \quad \stackrel{16.1/2}{\Rightarrow} C \text{ ist offen.} \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_{\delta}(z_0) \subseteq C \subseteq \text{Ext}(\gamma).$$

 Also ist  $\text{Ext}(\gamma)$  offen. [Analog:  $\text{Int}(\gamma)$  offen]

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \notin \text{Tr}(\gamma)) \stackrel{9.5}{\Rightarrow} g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)), \text{ insbesondere gilt } g \in H(\text{Ext}(\gamma)).$$

$$\text{Sei } z \in G \cap \text{Ext}(\gamma): h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = g(z) - f(z) 2\pi i$$

$$\underbrace{n(\gamma, z)}_{=0} = g(z). \text{ Also: } h = g \text{ auf } G \cap \text{Ext}(\gamma). \text{ Dann ist}$$

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & , z \in G \\ g(z) & , z \in \text{Ext}(\gamma) \end{cases} \text{ eine ganze Funktion.}$$

 Übung:  $F(z) \rightarrow 0$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ). 10.2  $\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0$ 

■

**Satz 22.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)**

 Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  und  $\gamma$  sei nullhomolog in  $G$ . Dann:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall f \in H(G) \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

**Beweis**

Sei  $f \in H(G)$  und  $z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$ .  $\stackrel{22.2(3)}{\Rightarrow} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=n(\gamma,z)} \blacksquare$

**Satz 22.4 (CIS, Homologieversion I)**

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G) \iff \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

**Beweis**

" $\Rightarrow$ ": Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ ;  $f(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow f \in H(G) \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=n(\gamma,z_0)} = 0$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $f \in H(G)$  und  $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$ ;  $g(z) = (z - z_0)f(z)$ ;  $g \in H(G)$ .

Wende 22.3 auf  $g$  an :

$$n(\gamma, z_0) \underbrace{g(z_0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \underbrace{\frac{g(w)}{w-z_0}}_{=f(w)} dw \Rightarrow \int_{\gamma} f(w) dw = 0. \quad \blacksquare$$

**Satz 22.5**

$G$  ist einfach zusammenhängend  $\iff$  jeder geschlossene Weg  $\gamma$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  ist in  $G$  nullhomolog.

**Beweis**

" $\Rightarrow$ " 22.1(2)

" $\Leftarrow$ " Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  und  $f \in H(G)$

Vorraussetzungen  $\Rightarrow \gamma$  ist in  $G$  nullhomolog. 22.4  $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . 21.5  $\Rightarrow G$  ist einfach zusammenhängend.  $\blacksquare$

**Definition**

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  geschlossene Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_1), \text{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  heißen in  $G$  homolog :  $\iff n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$ .

**Satz 22.6 (CIS, Homologieversion II)**

$\gamma_1, \gamma_2$  seien wie in obiger Definition und in  $G$  homolog.

Dann:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \forall f \in H(G)$$

**Beweis**

Sei  $f \in H(G)$  und  $z_j := \text{Anfangspunkt von } \gamma_j \text{ (} j = 1, 2 \text{)}$ .

$\stackrel{3.4}{\Rightarrow} \exists \text{ Weg } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \text{Tr}(\gamma) \subseteq G, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$

$\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$ .  $\Gamma$  ist ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$

Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ :  $n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$

D.h.:  $\Gamma$  ist in  $G$  nullhomolog. 22.4  $\Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$  ■