III. Die Brownsche Bewegung

9. Definition und erste Eigenschaften

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T \subseteq \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$ eine Zeitindexmenge. Wir betrachten jetzt einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \in T}$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}$, das heißt dass $(X_t)_{t \in T}$ eine Familie von $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$-messbaren Zufallsvariablen ist.

X können wir betrachten als Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^T = \{f : T \to \mathbb{R}\}.$$

Wir schreiben dabei statt $\big(X(\omega)\big)(t)$ auch $X_t(\omega)$ oder $X(t, \omega)$.

Weiter sei $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$ die t-te Projektion. Eine σ-Algebra $\mathfrak{B}^T$ auf $\mathbb{R}^T$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^T &:= \sigma(\{\pi_t \mid t \in T\}) = \bigoplus_{t \in T} \mathfrak{B} \\
&= \sigma(\{f : T \to \mathbb{R} \mid f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_n) \in B_n,\, t_i \in T,\, B_i \in \mathfrak{B},\, i = 1, \dots, n\}) \\
&= \sigma(\{f : T \to \mathbb{R} \mid (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in B,\, t_i \in T,\, i = 1, \dots, n,\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\})
\end{aligned}$$

X ist genau dann $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}^T)$-messbar, wenn $\pi_t \circ X$ für alle $t \in T$ $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$-messbar ist (Siehe Stochastik II, Übungsaufgabe 21), also ist X $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}^T)$-messbar.

Jede Menge $A \in \mathfrak{B}^T$ besitzt folgende Struktur: Es gibt abzählbar viele Zeitpunkte $t_1, t_2, \dots \in T$ und ein $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$, so dass

$$A = \{f : T \to \mathbb{R} \mid \big(f(t_1), f(t_2), \dots\big) \in B\}.$$

X induziert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^X auf $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{B}^T)$.

Im Folgenden sei $T_0 := \{t_1, \dots, t_n\}$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\pi_{T_0} : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^{T_0}, \quad f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_n))$$

sei die Projektion auf die T_0-Koordinaten.

Die Verteilung von $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^{T_0}, \mathfrak{B}^{T_0})$ und ergibt sich als Bild von P^X unter π_{T_0}.

Die Gesamtheit dieser Verteilungen nennt man Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses (engl.: finite dimensional distribution, Fidis).

Definition
Ein Prozess, bei dem alle endlich-dimensionale Verteilungen Normalverteilungen sind, heißt *Gauss-Prozess*.

Ist $(X_t)_{t\in T}$ ein Gauss-Prozess, so nennen wir die Abbildung

$$t \mapsto EX_t$$

die *Erwartungswertfunktion* und

$$(s,t) \mapsto \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$$

die *Kovarianzfunktion* zu X.

Bemerkung: Beim Gauss-Prozess definiert die Erwartungswertfunktion und die Kovarianzfunktion bereits alle endlich-dimensionalen Verteilungen. Da für $T_0 = \{t_1, \dots, t_n\}$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ die Mengen

$$\pi_{T_0}^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \{f \in B^T \mid f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_n) \in B_n\}$$

ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}^T$ bilden, ist P^X auf $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{B}^T)$ durch die endlich-dimensionalen Verteilungen bzw. durch die Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion festgelegt.

Im Folgenden wollen wir weiter voraussetzen, dass die Pfade von X stetig sind, also

$$X : \Omega \to C(T) := \{f : T \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

wobei $T = [0,1]$ oder $T = [0,\infty)$ ist.

Jetzt ist $\pi_t : C(T) \to \mathbb{R}$ und $\mathfrak{B}(C(T)) := \sigma(\{\pi_t \mid t \in T\})$. Auch hier ist die Verteilung eines Prozesses durch seine endlich-dimensionalen Verteilungen festgelegt.

Definition
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T = \mathbb{R}_+$ oder $T = [0,R]$ mit $R > 0$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration und $(B_t)_{t\in T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ -adaptiver Prozess, d.h. B_t ist $(\mathcal{F}_t, \mathfrak{B})$-messbar. Gilt

a) $P(B_0 = 0) = 1$

b) P-fast-alle Pfade von $(B_t)_{t\in T}$ sind stetig.

c) Für alle $s,t \in T$ mit $s < t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ (d.h. $B_t - B_s$ unabhängig von 1_A, $A \in \mathcal{F}_s$) und $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt,

so heißt $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine (eindimensionale) *Brownsche Bewegung* oder auch *Wiener-Prozess*.

Bemerkung: a) Falls $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s,\ s \le t\})$, so spricht man von *der* Brownschen Bewegung.

b) Wir können B auf einer Nullmenge abändern zu $\tilde{B}$ und $\tilde{B}$ ist wieder eine Brownsche Bewegung. Dies hat aber Auswirkungen auf die Filtration.

c) Eine Brownsche Bewegung hat unabhängige Zuwächse (folgt aus Teil c) der Definition).

d) 1827 beobachtet Brown die Bewegung von Pollen in einer Flüssigkeit. 1900 verwendet Bachelier die Brownsche Bewegung zur Modellierung von Aktienkursen. 1905 beschrieb Einstein die Molekülbewegung mit der Brownschen Bewegung. 192? baute Wieder das mathematische Fundament der Brownschen Bewegung.

Lemma 9.1
Die Brownsche Bewegung $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

Beweis
Offenbar ist $E|B_t| < \infty$. Für $s \leq t$ gilt:

$$\begin{aligned} E[B_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[B_s + (B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= B_s + E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= B_s + 0 \end{aligned}$$

■

Satz 9.2
Die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \in T}$ ist ein Gauss-Prozess mit Erwartungswertfunktion $EB_t = 0$ und Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t = \min\{s, t\}$.

Ist umgekehrt $(X_t)_{t \in T}$ ein Gauss-Prozess mit $EX_t = 0$ und $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ und fast-sicher stetigen Pfaden, so ist $(X_t)_{t \in T}$ eine Brownsche Bewegung.

Beweis
Ist $(B_t)_{t \in T}$ die Brownsche Bewegung, so gilt $B_0 = 0$ und $B_t - B_0 = B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, also ist $EB_t = 0$ für alle $t \in T$. Da Zuwächse unabhängig sind folgt für $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(B_s, B_t) &= EB_sB_t - EB_sEB_t \\ &= EB_s(B_s + (B_t - B_s)) - 0 \\ &= EB_s^2 + EB_s(B_t - Bs) \\ &= EB_s^2 + 0 \\ &= \mathrm{Var}(B_s) \\ &= s \\ &= s \wedge t \end{aligned}$$

Außerdem ist für $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ der Vektor $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ multivariat normalverteilt. Aus diesem Vektor erhalten wir durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix den Vektor $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$, der demnach auch normalverteilt ist.

Sei jetzt $(X_t)_{t \in T}$ ein Gauss-Prozess mit stetigen Pfaden. Da $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 0)$ ist $X_0 = 0$. Also bleibt c) zu zeigen mit der natürlichen Filtration. Sei $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s \leq t$. Da X ein Gauss-Prozess ist, gilt

$$(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n}, X_s, X_t) \sim \mathcal{N}(0, \cdot).$$

Es gibt eine Matrix, die diesen Vektor in den Vektor

$$(X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \ldots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}, X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (*)$$

transformiert. Man kann nachrechnen, dass Σ Diagonalform hat, das heißt, dass $X_t - X_s$ von $(X_{s_1}, X_{s_2} - Xs_1, \ldots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ und damit auch von $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})$ unabhängig ist. Da

$\{X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_n} \in B_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_s$ bilden (siehe Henze, Stochastik II, Seite 103), ist $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. In $(*)$ kann man ablesen, dass $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. ∎

Satz 9.3
Ist $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch

a) $(-B_t)_{t \geq 0}$

b) $(B_{a+t} - B_a)_{t \geq 0}$ mit festem $a \geq 0$.

c) $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$ mit festem $c \neq 0$. In diesem Sinne ist die Brownsche Bewegung *selbstähnlich.*

d) $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ mit $\tilde{B}_t := t \cdot B_{\frac{1}{t}}$ für $t > 0$ und $\tilde{B}_0 := 0$.

Beweis
Wir beweisen nur Teil d):

Wir verwenden den Satz 9.2. Es seien $t_1, \dots, t_n > 0$. Dann ist

$$(B_{\frac{1}{t_1}}, \dots, B_{\frac{1}{t_n}})$$

normalverteilt, und damit ist auch

$$(t_1 \cdot B_{\frac{1}{t_1}}, \dots, t_n \cdot B_{\frac{1}{t_n}})$$

normalverteilt, da dies eine lineare Transformation ist. Also ist $\tilde{B}$ ein Gauss-Prozess.

Weiter gilt für $t > 0$:

$$E\tilde{B}_t = tEB_{\frac{1}{t}} = t \cdot 0 = 0$$

und $E\tilde{B}_0 = E0 = 0$. Sei $s, t > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\tilde{B}_s, \tilde{B}_t) &= \operatorname{Cov}(sB_{\frac{1}{s}}, tB_{\frac{1}{t}}) \\ &= s \cdot t \cdot (\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}) \\ &= s \wedge t \end{aligned}$$

und dies gilt auch für $s = 0$ und für $t = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{B}$ P-fast-sicher stetige Pfade hat. Nach Voraussetzung gibt es eine Menge $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) = 1$ und $t \mapsto B_t(\omega)$ für alle $\omega \in A$ stetig auf $[0, \infty)$. Für diese $\omega \in A$ ist dann auch $t \mapsto \tilde{B}_t(\omega)$ stetig auf $(0, \infty)$. Insbesondere gilt für $\omega \in A$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{m}} |\tilde{B}_t(\omega)| = \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{m}]} |\tilde{B}_q(\omega)|$$

Damit ist $t \mapsto \tilde{B}_t(\omega)$ in $t = 0$ stetig für alle $\omega \in \tilde{F}$ mit

$$\tilde{F} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{m}]} \{|\tilde{B}_q| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
P(\tilde{F}) &= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{m}]} \{|\tilde{B}_q| \le \frac{1}{n}\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{m}]} \{|\tilde{B}_q| \le \frac{1}{n}\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{K\to\infty} P\big(\bigcap_{j=1}^{K} \{|\tilde{B}_{q_j}| \le \frac{1}{n}\}\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{K\to\infty} P\big(\bigcap_{j=1}^{K} \{|B_{q_j}| \le \frac{1}{n}\}\big) \\
&= P(F)
\end{aligned}$$

mit

$$F := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{m}]} \{|B_q| \le \frac{1}{n}\}.$$

Wegen $A \subseteq F$ gilt $P(\tilde{F}) = 1$, damit $P(\tilde{F} \cap A) = 1$. Also sind P-fast-sicher alle Pfade von $\tilde{B}$ auch stetig in $t = 0$. ■

10. Existenz

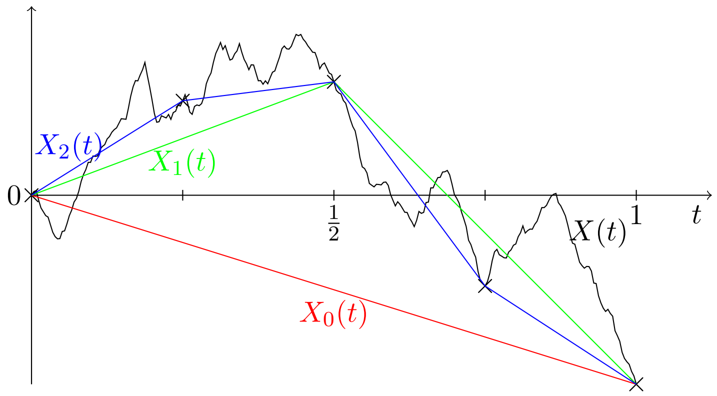
Die Existenz der Brownschen Bewegung wurde erst 1923 von Norbert Wiener bewiesen. Heute gibt es drei Standardverfahren, diese zu beweisen. Wir wählen hier einen funktional-analytischen Zugang.

Satz 10.1
Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, auf dem ein stochastischer Prozess $(B_t)_{0\le t\le 1}$ definiert werden kann, mit den Eigenschaften

a) $B_0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$

b) $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$

c) Für alle $0 \le s \le t \le 1$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von $\sigma(\{B_u,\ u \le s\})$ und $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt.



Beweis
Es sei $L^2 = L^2([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \int_0^1 f^2(x)dx < \infty\}$ beziehungsweise deren Äquivalenzklassen. Versehen mit

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

ist L^2 ein Hilbertraum. Weiter sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n := \{(n,k) \mid 1 \leq k \leq 2^n, k \text{ ungerade}\}$$

und $S := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. Definiere für $(n,k) \in S$

$$g_{01}(t) := 1$$
$$g_{nk}(t) := 2^{\frac{(n-1)}{2}} \left(1_{[(k-1)2^{-n},\, k2^{-n})}(t) - 1_{[k2^{-n},\, (k+1)2^{-n})}(t) \right) \quad \text{für } n \neq 0,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Diese Funktionen bilden eine Orthonormalbasis (die *Haar-Basis*) von L^2, das heißt $\|g_{nk}\| = 1$, $\langle g_{nk}, g_{ml} \rangle = 0$ für $(n,k) \neq (m,l)$ und es gilt die sogenannte Parsevalsche Gleichung:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n,k) \in S_n} \langle f, g_{nk} \rangle \langle g, g_{nk} \rangle$$

Es sei nun $\{Z_{nk} \mid (n,k) \in S\}$ eine Familie von unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Wir definieren $(X_n(t))_{0 \leq t \leq 1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch

$$X_n(t) := \sum_{m=0}^{n} \sum_{(m,k) \in S_m} f_{mk}(t) \cdot Z_{mk}$$

wobei für alle $t \in [0,1], (m,k) \in S$

$$f_{mk}(t) := \int_0^t g_{mk}(s) ds$$

die sogenannte *Schauder-Funktionen* sind. Diese $(X_n(t))_{0 \leq t \leq 1}$ sind stetige stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Es gilt $0 \leq f_{nk} \leq 2^{-\frac{(n+1)}{2}}$. Wir behaupten, dass für P-fast-alle $\omega \in \Omega$ die $(X_n(t, \omega))_{0 \leq t \leq 1}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig konvergiert. Dann wäre die Grenzfunktion X automatisch stetig.

Für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ verwenden wir ohne Beweis die Abschätzung

$$P(|Z| \geq a) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}} \text{ für alle } a > 0.$$

Sei $\|f\|_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ für $f \in C[0,1]$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(\|X_n - X_{n-1}\|_\infty > a_n) &= P(\| \sum_{(n,k) \in S_n} f_{nk}(t) Z_{nk} \|_\infty > a_n) \\
&= P(\sup_{(n,k) \in S_n} |Z_{nk}| > 2^{\frac{(n+1)}{2}} a_n) \\
&\leq \sum_{(n,k) \in S_n} P(|Z_{nk}| > 2^{\frac{(n+1)}{2}} a_n) \\
&= |S_n| \cdot P(|Z_{01}| > 2^{\frac{(n+1)}{2}} a_n) \\
&\leq 2^n \cdot P(|Z_{01}| > 2^{\frac{(n+1)}{2}} a_n) \\
&\leq 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_n} 2^{-\frac{(n+1)}{2}} e^{-\frac{1}{2} 2^{(n+1)} a_n^2}
\end{aligned}$$

mit $a_n := \sqrt{n 2^{-n}}$ wird daraus

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^n 2^{-\frac{n+1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} 2^{n+1} n 2^{-n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n n^{-\frac{1}{2}} e^{-n}
\end{aligned}$$

das heißt dass mit $A_n := \{\|X_n - X_{n-1}\|_\infty > (n 2^{-n})^{\frac{1}{2}}\}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt dann

$$P(\underbrace{\limsup_{n \to \infty} A_n}_{=:N}) = 0.$$

Das heißt, für jedes $\omega \notin N$ gibt es einen Index $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|X_m(\omega) - X_n(\omega)\|_\infty &\leq \sum_{k=(m \wedge n)+1}^{m \vee n} \|X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=(m \wedge n)+1}^{\infty} \sqrt{k 2^{-k}} \to 0 \text{ für } m, n \to \infty
\end{aligned}$$

Also ist $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ für $\omega \notin N$. Dieser Raum ist vollständig, also existiert eine Grenzfunktion $X(\omega)$, wobei wir $X(\omega) := 0$ für $\omega \in N$ setzen.

Der Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ hat P-fast-sicher stetige Pfade. Wir zeigen nun, dass dieser Prozess ein Gauss-Prozess wie in Satz 9.2 ist:

Es gilt jetzt für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \le s, t \le 1$

$$\begin{aligned} EX_n(t) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{(m,k)\in S_m} f_{nk}(t) \cdot EZ_{mk} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{(m,k)\in S_m} f_{nk}(t) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

und, wobei die gemischten Terme verschwinden, da die Z_{nk} unabhängig sind,

$$\begin{aligned} EX_n(t)X_n(s) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{(m,k)\in S_m} f_{nk}(t) f_{nk}(s) E{Z_{mk}}^2 \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{(m,k)\in S_m} f_{nk}(t) f_{nk}(s) \end{aligned}$$

Offenbar ist $f_{nk}(s) = \langle 1_{[0,s]}, g_{nk} \rangle$ und mit der Parsevalschen Gleichung folgt:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} EX_n(t)X_n(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{(m,k)\in S_m} \langle 1_{[0,s]}, g_{nk} \rangle \langle 1_{[0,t]}, g_{nk} \rangle \\ &= \langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \rangle \\ &= s \wedge t \end{aligned}$$

Sei $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$. Es gilt

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \to (X(t_1), \dots, X(t_k)) \quad P\text{-f.s.}$$

woraus die Konvergenz in Verteilung folgt und, dazu äquivalent, die Konvergenz der charakteristischen Funktionen $\varphi_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, $\varphi_n(\theta) = E \exp(i \sum_{\nu=1}^{k} \theta_\nu X_n(t_\nu))$, also

$$\varphi_n(\theta) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(\theta) = \exp(i \sum_{\nu=1}^{k} \theta_\nu X(t_\nu)).$$

Es gilt $\varphi_n(\theta) = \exp(-\frac{1}{2}\theta^\top \Sigma_n \theta)$ mit $(\Sigma_n)_{i,j} = EX_n(t_i)X_n(t_j)$. Mit $(*)$ folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} (\Sigma_n)_{i,j} = t_i \wedge t_j =: (\Sigma)_{i,j}$$

also

$$\varphi_n(\theta) \to \varphi(\theta) = \exp(-\frac{1}{2}\theta^\top \Sigma \theta)$$

Daraus folgt, dass $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ normalverteilt ist mit $EX_t = 0$ für alle $t \in [0,1]$ und $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ für alle $s, t \in [0,1]$. Mit Satz 9.2 folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Auf $(C[0,1], \mathfrak{B}(C[0,1]))$ definiert die Verteilung P^B von $(B_t)_{0\le t\le 1}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das sogenannte Wiener-Maß. Mit $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (C[0,1], \mathfrak{B}(C[0,1]), P^B)$ und $B_t = \pi_t$ hat man ein explizites Modell für $(B_t)_{0\le t\le 1}$, die sogenannte Kanonische Konstruktion.

11. Pfadeigenschaften

Satz 11.1
Ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so gilt für P-fast-alle $\omega \in \Omega$, dass

$$\sup_{t\geq 0} B_t(\omega) = \infty, \qquad \inf_{t\geq 0} B_t(\omega) = -\infty.$$

Beweis
Sei $Z := \sup_{t\geq 0} B_t$. Nach Satz 9.3 c) gilt für alle $c > 0$: $Z \overset{\mathrm{d}}{=} c \cdot Z$. Da $Z \geq 0$ folgt $P(Z \in \{0, \infty\}) = 1$.

Nach Satz 9.3 b) ist $(B_{1+t} - B_1)_{t\geq 0}$ wieder eine Brownsche Bewegung, das Supremum davon ist also wieder P-f.s. 0 oder ∞.

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &\leq P(B_1 \leq 0 \text{ und } B_t \leq 0 \text{ für alle } t \geq 1) \\ &= P(B_1 \leq 0 \text{ und } \sup_{t\geq 0}(B_{1+t} - B_1) \leq |B_1|) \\ &= P(B_1 \leq 0 \text{ und } \sup_{t\geq 0}(B_{1+t} - B_1) = 0) \end{aligned}$$

$(B_{1+t} - B_1)$ ist unabhängig von B_1, also gilt weiter

$$\begin{aligned} &= P(B_1 \leq 0) \cdot P(\sup_{t\geq 0}(B_{1+t} - B_1) = 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) \end{aligned}$$

Das heißt, dass $P(Z = 0) \leq \frac{1}{2} P(Z = 0)$, also muss $P(Z = 0) = 0$ und $P(\sup_{t\geq 0} B_t = \infty) = 1$ gelten.

Die Aussage für das Infimum folgt dann aus Satz 9.3 a). ∎

Bemerkung: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ P-fast-sicher unbeschränkt, da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind. Insbesondere kehrt $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft nach 0 zurück, und es gibt für P-fast-alle $\omega \in \Omega$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (t_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ und $B_{t_n}(\omega) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Zeitumkehr $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $\tilde{B}_0 = 0$ folgt, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ die Nullstellen des Pfades $t \to B_t(\omega)$ einen Häufungspunkt in 0 haben.

Definition
Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig in $x \in \mathbb{R}_+$ wenn es ein $\delta > 0$ und ein $K < \infty$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

für alle $y \in [x - \delta, x + \delta] \cap \mathbb{R}_+$.

Satz 11.2
P-fast-alle Pfade einer Brownschen Bewegung sind in keinem Punkt Lipschitz-stetig.

Beweis
Es seien $0 < a < b < \infty$ fest und $K > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $a - \frac{2}{n} > 0$ sei

$$A_n := \{\omega \in \Omega \mid \exists s \in (a,b)\ \forall t \in [s - \frac{2}{n}, s + \frac{2}{n}] : |B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq K|t-s|\}$$

Für jedes $I = [s - \frac{2}{n}, s + \frac{2}{n}]$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k-2}{n}, \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \in I$. Auf A_n gilt für $j = k-1, k, k+1$

$$\begin{aligned}\underbrace{|B(\frac{j}{n}) - B(\frac{j-1}{n})|}_{=:\Delta_{n,j}} &\leq |B(\frac{j}{n}) - B(s)| + |B(s) - B(\frac{j-1}{n})| \\ &\leq K \cdot \frac{2}{n} + K \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{4K}{n}\end{aligned}$$

Also ist

$$A_n \subseteq \bigcup_{k=\lfloor na \rfloor}^{\lceil nb+1 \rceil} \{\omega \in \Omega \mid \Delta_{n,j}(\omega) \leq \frac{4K}{n} \text{ für } j = k-1, k, k+1\}$$

Die Zuwächse der Brownschen Bewegung sind unabhängig, also folgt:

$$\begin{aligned}P(A_n) &\leq \sum_{k=\lfloor na \rfloor}^{\lceil nb+1 \rceil} P\Big(\Delta_{n,k-1} \leq \frac{4K}{n}\Big) \cdot P\Big(\Delta_{n,k} \leq \frac{4K}{n}\Big) \cdot P\Big(\Delta_{n,k+1} \leq \frac{4K}{n}\Big) \\ &\leq \lceil nb+1 \rceil \cdot P\Big(\Delta_{n,1} \leq \frac{4K}{n}\Big)^3\end{aligned}$$

Da $\sqrt{n}(B(\frac{1}{n}) - B(\frac{0}{n})) \sim \mathcal{N}(0,1)$ folgt

$$\begin{aligned}P\Big(\Delta_{n,1} \leq \frac{4k}{n}\Big) &= P\Big(\Delta_{n,1}\sqrt{n} \leq \frac{4k}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= \int_{-\frac{4k}{\sqrt{n}}}^{\frac{4k}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx \leq \frac{8k}{\sqrt{2\pi n}}\end{aligned}$$

und insgesamt $P(A_n) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.
Sei $n_0(a) := \inf\left\{n \in \mathbb{N} \mid a - \frac{2}{n} > 0\right\}$. Wegen $A_n \subset A_{n+1}$ folgt für $A := \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n$, dass $P(A) = 0$.
$A = A(k)$ hängt von k ab. $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(k)$ ist wieder eine Nullmenge, so dass $\forall \omega \notin N$ gilt: zu keinem $s \in (a,b)$ und keinem $\delta > 0$, $\exists k < \infty$ mit

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq k|t-s| \text{ mit } t \in [s-\delta, s+\delta]$$

$\Longrightarrow$ Die Pfade, die in einem $s \in (a,b)$ lipschitzstetig sind, sind in einer P-Nullmenge.

$$N = \mathcal{N}(a,b) \implies \tilde{N} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a = \frac{1}{k}, b = k}} \mathcal{N}(a,b) \text{ ist wieder Nullmenge}$$

■

$\Longrightarrow$ P-f.a. Pfade sind in keinem $s > 0$ lipschitzstetig. Bleibt $s = 0$ (Übung)

Bemerkung: Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ in $s \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so existiert

$$\lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

und f wäre in s lipschitzstetig. Satz 11.2 impliziert also, dass P-f.a. Pfade der Brownschen Bewegung in keinem Punkt differenzierbar sind.

Definition
Sei $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Totalvariation $V_a^b f$ von f auf $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ ist

$$V_a^b f = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|,$$

wobei $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist.

Bemerkung: Funktionen mit endlicher Totalvariation sind fast überall differenzierbar. Also haben die Pfade der Brownschen Bewegung P-f.s. unbeschränkte Totalvariation, d.h. auch kleine Stücke sind “unendlich lang”.

Definition
Sind die ZV $X, X_1, X_2, \dots \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so heißt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im *quadratischen Mittel konvergent* gegen X ($X_n \xrightarrow{L^2} X$), falls gilt:

$$\lim_{n \to \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

Bemerkung: $X_n \xrightarrow{L^2} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$.

Satz 11.3
Es sei $(\mathcal{Z}_n), \mathcal{Z}_n = \{0 = t_{n_0} \leq t_{n_1} \leq \cdots \leq t_{n_{k_n}} = t\}$ eine Folge von Zerlegungen von $[0,t]$ mit Feinheitsgraden

$$\delta(\mathcal{Z}_n) = \max_{j=1,\dots,k_n} |t_{n_j} - t_{n_{j-1}}|$$

so dass $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0$. Dann gilt mit $n \to \infty$:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k_n} (B(t_{n_j}) - B(t_{n_{j-1}}))^2}_{=:V_{\mathcal{Z}_n}} \xrightarrow{L^2} t$$

Beweis
Zu zeigen ist: $E(V_{\mathcal{Z}_n} - t)^2 \to 0$ für $n \to \infty$. Es gilt:

(1) $EV_{\mathcal{Z}_n} = \sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}}) = t$

(2) $E(B(t_{n_j}) - B(t_{n_{j-1}}))^4 = 3(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})^2$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}
EV_{\mathcal{Z}_n}^2 &= \sum_{j=1}^{k_n} E(B(t_{n_j}) - B(t_{n_{j-1}}))^4 + 2\sum_{j<l} E(B(t_{n_j}) - B(t_{n_{j-1}}))^2 \cdot E(B(t_{n_l}) - B(t_{n_{l-1}}))^2 \\
&= 3\sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})^2 + 2\sum_{j<l}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})(t_{n_l} - t_{n_{l-1}}) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})^2 \\
&= t^2 + 2\sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad E(V_{\mathcal{Z}_n} - t)^2 &= EV_{\mathcal{Z}_n}^2 - 2t^2 + t^2 \\
&= 2\sum_{j=1}^{k_n}(t_{n_j} - t_{n_{j-1}})^2 \\
&\le 2\delta(\mathcal{Z}_n) \cdot t \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

■

Bemerkung: Beachte, dass die Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n$ nicht von ω abhängt. Gilt zusätzlich $\mathcal{Z}_n \subset \mathcal{Z}_{n+1}$, so gilt sogar $V_{\mathcal{Z}_n} \xrightarrow{f.s.} t$. Dieser Grenzwert heißt quadratische Variation des Prozesses.

Bemerkung: Eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ mit $V_a^b f < \infty$, hat stets quadratische Variation 0, da

$$\sum_{k=1}^{n}(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 \le \max_{1\le k\le n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \cdot \sum_{i=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Also $V_a^b B(\cdot, \omega) = \infty \quad \forall 0 \le a < b < \infty$.

12. Die Brownsche Bewegung als Markov-Prozess

Definition
Ein *stochastischer Kern* (Übergangswahrscheinlichkeit) $P(x, A)$ von $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist eine Funktion, so dass

a) für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $A \mapsto P(x, A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und

b) für alle $A \in \mathfrak{B}$ ist $x \mapsto P(x, A)$ messbar.

Definition
Eine Familie $(P_t)_{t\geq 0}$ von stochastischen Kernen von $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt *Markov-Halbgruppe* oder *Übergangs-Halbgruppe*, wenn für alle $s, t \geq 0$ und für alle $A \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_t(y, A) P_s(x, dy)$$

Bemerkung: Wir schreiben kurz: $P_{s+t} = P_s \otimes P_t$.

Beispiel 12.1
Für $t \geq 0$ sei $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$ die Normalverteilung mit Erwartungswert x und Varianz t, wobei $\mathcal{N}(x, 0) := \delta_x$.

$$P_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2} dy$$

ist messbar (Fubini) und es gilt

$$\begin{aligned}
\int P_t(y, A) P_s(x, dy) &= \int_A \Big(\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(z-y)^2}}_{=: f_2(z-y)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2s}(y-x)^2}}_{=: f_1(y)} dy \Big) dz \\
&= \int_A \Big(\int f_2(z-y) \cdot f_1(y) dy \Big) dz \\
&= P_{s+t}(x, A).
\end{aligned}$$

Definition
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $(X_t)_{t\geq 0}$ ein dazu adaptierter reellwertiger Prozess, ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Halbgruppe. Gilt dann $X_0 \sim \nu$ und für alle $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathfrak{B}$

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_{t-s}(X_s, A) \tag{$*$}$$

so heißt $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein (homogener) *Markov-Prozess* mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ und Startverteilung ν.

Bemerkung: a) In der Regel ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die natürliche Filtration zu $(X_t)_{t\geq 0}$.

b) Zum Nachweis von $(*)$ genügt zu zeigen, dass für alle $F \in \mathcal{F}_s$, $A \in \mathfrak{B}$

$$\underbrace{\int_F 1_{[X_t \in A]} dP}_{P(F \cap \{X_t \in A\})} = \int_F (P_{t-s})(X_s, A) dP$$

da $P_{t-s}(X_s, A)$ als messbare Funktion von X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist.

Besitzt $\mathcal{F}_s$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{E}$, so genügt es, die Gleichung für alle $F \in \mathcal{E}$ nachzuprüfen.

Satz 12.1
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung mit zugehöriger natürlicher Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit Startverteilung δ_0 und stochastischen Kernen $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$.

Beweis

Wir zeigen zunächst eine Hilfsaussage: Seien $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte $(\mathfrak{B}^n, \mathfrak{B})$-messbare Funktion. Setze $Y_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ für $i = 1, \dots, n$. $Y_1, \dots, Y_n$ sind unabhängig und $Y_i \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$. Also gilt:

$$\begin{aligned} Eg(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) &= Eg(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + \dots + Y_n) \qquad (\triangle) \\ &= \int \cdots \int g(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n) \\ &\qquad \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})(dy_n)\mathcal{N}(0, t_{n-1} - t_{n-2})(dy_{n-1}) \cdots \mathcal{N}(0, t_1)(dy_1) \\ &= \int \cdots \int g(x_1, \dots, x_n)\mathcal{N}(x_{n-1}, t_n - t_{n-1})(dx_n) \cdots \mathcal{N}(0, t_1)(dx_1) \end{aligned}$$

Es sei $A \in \mathfrak{B}$, $0 \leq s \leq t$. Zu zeigen ist, dass $P(B_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathcal{N}(B_s, t-s)(A)$, das heißt

$$\int_F 1_{[B_t \in A]} dP = \int_F \mathcal{N}(B_s, t-s)(A) dP \qquad (\square)$$

für alle $F \in \mathcal{F}_s$, beziehungsweise auf einem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_s$. Ein solcher ist

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{B_{t_k} \in A_k\} \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = s,\ A_1 \dots, A_n \in \mathfrak{B}.$$

Setze $g(x_1, \dots, x_n, x) = 1_A(x) \cdot \prod_{k=1}^n (1_{A_k}(x_k))$ in $(\triangle)$:

$$\begin{aligned} Eg(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) &= Eg(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + Y_n) \\ &= \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \int_A \mathcal{N}(x_n, t-s)(dx)\mathcal{N}(x_{n-1}, t_n - t_{n-1})(dx_n) \cdots N(0, t_1)(dx_1) \\ &= \text{linke Seite von } (\square) \text{ mit obigen } F \end{aligned}$$

Setze jetzt $g(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{N}(x_n, t-s)(A) \prod_{k=1}^n 1_{A_k}(x_k)$ in $(\triangle)$:

$$\begin{aligned} Eg(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) &= \int \cdots \int_{\{B(t_1) \in A_1, \dots, B(t_n) \in A_n\}} \mathcal{N}(x_n, t-s)(A) dP \\ &= \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \mathcal{N}(x_n, t-s)(A) N(x_{n-1}, t_n - t_{n-1})(dx_n) \cdots \mathcal{N}(0, t_1)(dx_1) \\ &= \text{rechte Seite von } (\square) \text{ mit obigen } F \end{aligned}$$

Da $\int_A \mathcal{N}(x_n, t-s)(dx) = \mathcal{N}(x_n, t-s)(A)$ ist $(\square)$ gezeigt. ∎

Bemerkung: Die Markov-Eigenschaft lässt sich schreiben als

$$P(X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_t(X_s, A) \qquad (*)$$

für alle $A \in \mathfrak{B}$, $s, t \geq 0$.

Definiere für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\to \mathbb{C}$), falls existent, für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(P_t f\big)(x) := \int f(y) P_t(x, dy)$$

Also kann man schreiben:

$$P_t(X_s, A) = \int 1_A(y) P_t(X_s, dy) = \big(P_t 1_A\big)(X_s)$$

für $f = 1_A$ kann man $(*)$ schreiben als

$$E[f(X_{s+t}) \mid \mathcal{F}_s] = \big(P_t f\big)(X_s) \tag{$\triangle$}$$

Mittels Algebraischer Induktion und der monotonen Konvergenz in bedingter Version kann man daraus folgern, dass die Gleichung $(\triangle)$ für alle messbaren, beschränkten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt.

Umgekehrt stellt sich die Frage: Für welche Funktionenklasse muss die Gleichung $(\triangle)$ gelten, um $(*)$ zu folgern?

Für $s = 0$ und $\mathcal{F}_s = \{\emptyset, \Omega\}$ folgt $(*)$, wenn $(\triangle)$ für alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form $f(x) = e^{i\theta x}$, $\theta \in \mathbb{R}$ gilt. (Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen)

Dies gilt auch für bedingte charakteristische Funktionen, das heißt $(*)$ ist erfüllt, wenn für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$E[e^{i\theta X_{s+t}} \mid \mathcal{F}_s] = \int e^{i\theta y} P_t(X_s, dy).$$

Damit kann man Satz 12.1 direkt zeigen:

$$\begin{aligned} E[e^{i\theta B_{s+t}} \mid \mathcal{F}_s] &= E[e^{i\theta(B_s + B_{s+t} - B_s)} \mid \mathcal{F}] \\ &= e^{i\theta B_s} \cdot E[e^{i\theta B_{s+t} - B_s}] \\ &= e^{i\theta B_s} \cdot e^{-\theta^2 \frac{t}{2}} \\ &= \int e^{i\theta y} P_t(B_s, dy) \end{aligned}$$

In Kapitel II haben wir gesehen, dass die Übergangsmatrizenfunktion $(P(t))_{t\geq 0}$ durch die Intensitätsmatrix Q in bestimmten Fällen charakterisiert werden kann.
Insbesondere ist:

$$q_{ij} := \lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$$

Unter bestimmten Voraussetzungen kann auch $(P_t)_{t\geq 0}$ bei allgemeinen Markov-Prozessen aus dem sogenannten Generator

$$\mathcal{G} := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t - P_0)$$

bestimmt werden. Wir betrachten hier die Brownsche Bewegung.

$$C_b^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist zweimal stetig differenzierbar, } f \text{ beschränkt}\}$$

Satz 12.2
Es sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die Übergangshalbgruppe zur Brownschen Bewegung. Dann gilt:

$$\mathcal{G}f := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = \frac{1}{2} f'' \text{ für alle } f \in C_b^2(\mathbb{R})$$

Beweis
Sei $f \in C_b^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(P_t f - f)(x) &= \int \frac{1}{t}(f(y) - f(x))\mathcal{N}(x,t)(dy)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int t^{-\frac{3}{2}}(f(y) - f(x))e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy = (*)\end{aligned}$$

Substitution mit $z = \frac{y-x}{\sqrt{t}}$ liefert:

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{t}(f(x + z\sqrt{t}) - f(x))e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x + z\sqrt{t}) = f(x) + z\sqrt{t}f'(x) + \frac{1}{2}z^2 t f''(\xi) \text{ mit } \xi \in (x, x + z\sqrt{t})$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{t}(P_t f - f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{f'(x)}{\sqrt{t}} \int ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^2 f''(\xi)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Es gilt: $f''(\xi) \to f''(x)$ für $t \to 0$. Da f'' beschränkt ist, folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)(x) = \frac{1}{2}f''(x) \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2}dz}_{=1}$$

■

13. Die starke Markov-Eigenschaft mit Anwendungen

Wir benötigen zunächst folgende Hilfsüberlegungen:
Ist $\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ eine Stoppzeit, so ist

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die σ-Algebra der τ-Vergangenheit (vgl. Stochastik II).

Lemma 13.1

a) Ist τ eine Stoppzeit, so wird durch

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} \frac{\lceil 2^n \tau(\omega) \rceil}{2^n} & \text{, falls } \tau(\omega) < \infty \\ \infty & \text{, falls } \tau(\omega) = \infty \end{cases}$$

eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten definiert, die für $n \to \infty$ fast sicher gegen τ konvergiert.
Ist τ beschränkt, so nimmt jedes τ_n nur endlich viele Werte an.

b) Ist $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden, so ist für alle $t \geq 0$ die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$$

$\mathfrak{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-messbar.

c) Ist τ eine endliche Stoppzeit und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden, so ist

$$X_\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

$\mathcal{F}_\tau$-messbar.

Bemerkung: Einen stochastischen Prozess X mit der Messbarkeitseigenschaft aus Teil b.) nennt man *progressiv messbar.*

Beweis

a) Es ist zu zeigen, dass τ_n eine Stoppzeit ist:

$$\{\tau_n \leq t\} = \left\{ \tau \leq \underbrace{\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}}_{\leq t} \right\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0.$$

Die anderen Aussagen sind "klar".

b) Wir zeigen zunächst:

$$(s,\omega) \mapsto 1_{[u,v)}(s) \cdot X_v(\omega)$$

ist $\mathfrak{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-messbar für $0 \leq u < v \leq t$. Denn: Sei $A \in \mathfrak{B}$ mit $0 \notin A$, dann ist

$$(1_{[u,v)} X_v)^{-1}(A) = \underbrace{[u,v)}_{\in \mathfrak{B}[0,t]} \times \underbrace{X_v^{-1}(A)}_{\mathcal{F}_v \subset \mathcal{F}_t}$$

Analog: $(s,\omega) \mapsto 1_t(s) X_t(\omega)$ ist messbar. Sei jetzt:

$$X^{(n)}(s,\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n})}(s) \cdot X(\frac{(k+1)t}{n}, \omega) + 1_t(s) \cdot X_t(\omega)$$

$X^{(n)}$ ist eine Linearkombination von Abbildungen vom obigen Typ, also $\mathfrak{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-messbar.

c) Es ist zu zeigen: Für alle $A \in \mathfrak{B}$ und $t \geq 0$ ist

$$X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Wir betrachten die Abbildungen:

$$g : \Omega \longrightarrow [0,t] \times \Omega, g(\omega) = (\tau(\omega) \wedge t, \omega)$$
$$h : [0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, h(s,\omega) = X_s(\omega)$$

mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$ auf $[0,t] \times \Omega$. g ist $(\mathcal{F}_t, \mathfrak{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t)$-messbar, da für alle $A \in \mathcal{F}_t, s \leq t$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega \mid (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in [0,s] \times A\} = A \cap \underbrace{\{\tau \leq s\}}_{\in \mathcal{F}_s} \in \mathcal{F}_t$$

Die Messbarkeit von h folgt aus b.). Es gilt also:

$$\begin{aligned} & h(g(\omega)) = h(\tau(\omega) \wedge t, \omega) = X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega) \text{ ist } (\mathcal{F}_t, \mathfrak{B})\text{-messbar} \\ \Longrightarrow\ & X^{-1}_{\tau\wedge t}(A) \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } A \in \mathfrak{B} \\ \Longrightarrow\ & X^{-1}_{\tau}(A) \cap \{\tau \leq t\} = \underbrace{X^{-1}_{\tau\wedge t}(A)}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

■

Satz 13.2
Es sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, τ eine endliche Stoppzeit. Dann sind die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ und der Prozess $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t\geq 0}$ stochastisch unabhängig und $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t\geq 0}$ hat dieselbe Verteilung wie $(B_t)_{t\geq 0}$.

Beweis
Wir zeigen zunächst: Für alle $t \geq 0$ ist $B_{\tau+t} - B_\tau$ unabhängig von $\mathcal{F}_\tau$ und hat Verteilung $\mathcal{N}(0,t)$. Angenommen, τ nimmt nur abzählbar viele Werte an. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$, $C \in \mathfrak{B}$, dass

$$\begin{aligned} P(A \cap \{B_{\tau+t} - B_\tau \in C\}) &= \sum_{s\geq 0} P(\underbrace{A \cap \{\tau = s\}}_{\in \mathcal{F}_s} \cap \{B_{\tau+t} - B_\tau \in C\}) \\ &= \sum_{s\geq 0} P(A \cap \{\tau = s\}) \cdot \underbrace{P(B_{s+t} - B_s \in C)}_{\mathcal{N}(0,t)(C)} \\ &= P(A) \cdot \mathcal{N}(0,t)(C). \end{aligned}$$

Mit $A = \Omega$ ergibt das:

$$P(B_{\tau+t} - B_\tau \in C) = \mathcal{N}(0,t)(C)$$

und für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$ und $C \in \mathfrak{B}$ gilt

$$P(A \cap \{B_{\tau+t} - B_\tau \in C\}) = P(A) \cdot P(B_{\tau+t} - B_\tau \in C).$$

Sei jetzt τ eine beliebige (endliche) Stoppzeit und

$$\tau_n := \frac{\lceil 2^n \tau \rceil}{2^n}.$$

Wegen $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$ folgt für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$:

$$P(A \cap \{B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n} \in C\}) = P(A) \cdot \mathcal{N}(0,t)(C)$$

Für die Unabhängigkeit genügt es, $C = (-\infty, c)$, $c \in \mathbb{R}$, zu betrachten, da diese ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}$ bilden.

Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty}\int_A 1_{(-\infty,c)}(B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n})dP=\int_A 1_{(-\infty,c)}(B_{\tau+t}-B_\tau)dP \qquad (*)$$

Stetigkeit der Pfade impliziert $B_{\tau_n}\to B_\tau$, $B_{\tau_n+t}\to B_{\tau+t}$ mit $n\to\infty$ und mit majorisierter Konvergenz ($1_{(-\infty,c)}\leq 1$) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_A 1_{(-\infty,c)}(B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n})dP=\int_A \lim_{n\to\infty}1_{(-\infty,c)}(B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n})dP$$

Das Problem ist nun, dass die Indikatorfunktion nicht stetig ist. Jedoch ist $B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n}\sim\mathcal{N}(0,t)$, also ist $B_{\tau+t}-B_\tau\sim\mathcal{N}(0,t)$ und $P(B_{\tau+t}-B_\tau=c)=0$, und damit gilt $(*)$. Damit ist die Anfangsbehauptung gezeigt.

Sei jetzt $A\in\mathcal{F}_\tau$, $0=:t_0<t_1<\cdots<t_n$, $C_1,\dots,C_n\in\mathfrak{B}$. Wende die bisher bewiesene Aussage auf die Stoppzeiten $\tau+t_{n-1},\tau+t_{n-2},\dots,\tau+t_0$ an, so folgt:

$$P(A\cap\bigcap_{k=1}^n\{B(\tau+t_k)-B(\tau+t_{k-1})\in C_k\})=P(A)\cdot\prod_{k=1}^n P(B(\tau+t_k)-B(\tau+t_{k-1})\in C_k)$$

Da die Mengen

$$\bigcap_{k=1}^n\{B(\tau+t_k)-B(\tau+t_{k-1})\in C_k\}$$

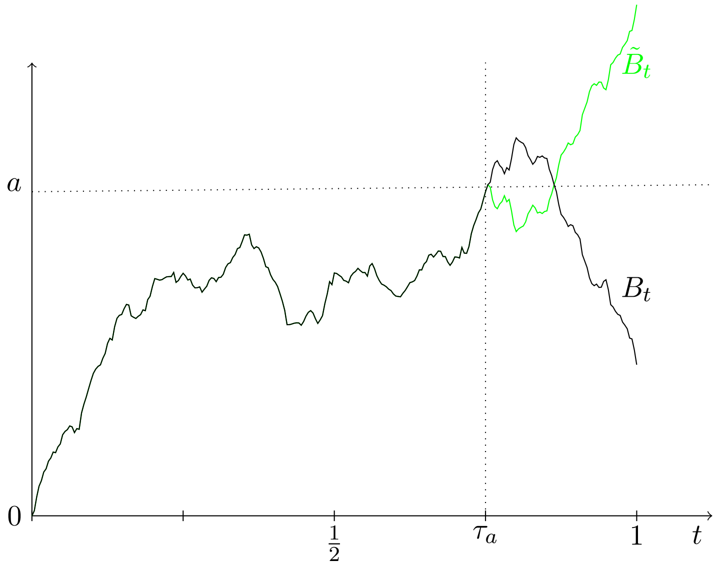
ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem der von $(B_{\tau+t}-B_\tau)_{t\geq 0}$ erzeugten σ-Algebra bilden, folgt die Unabhängigkeit. Analog folgt die Verteilungsaussage. ∎

Bemerkung: $(B_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ heißt Prä-τ-Prozess, $(B_{\tau+t}-B_\tau)_{t\geq 0}$ heißt Post-τ-Prozess.

Satz 13.3 (Das Spiegelungsprinzip)
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung, τ eine endliche Stoppzeit. Dann ist auch der ab τ gespiegelte Prozess $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$:

$$\tilde{B}_t(\omega):=\begin{cases}2B_{\tau(\omega)}(\omega)-B_t(\omega), & t\geq\tau(\omega)\\ B_t(\omega), & t<\tau(\omega)\end{cases}$$

eine Brownsche Bewegung.



Beweis
Es sei $X_t := B_{\tau\wedge t}$, $Y_t := B_{\tau+t} - B_\tau$, $t \geq 0$. Sei jetzt

$$\begin{aligned}\psi : [0,\infty) \times C[0,\infty) \times C[0,\infty) &\to C[0,\infty)\\ (a, f, g) &\mapsto h\end{aligned}$$

wobei

$$h(t) := \begin{cases} f(t), & \text{falls } t \leq a \\ f(a) + g(t-a), & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun ist $B = \psi(\tau, X, Y)$. Nach Satz 13.2 ist (τ, X) unabhängig von Y und Y ist eine Brownsche Bewegung, also ist (τ, X) unabhängig von $-Y$ und $-Y$ ist eine Brownsche Bewegung, das heißt

$$(\tau, X, Y) \overset{\mathrm{d}}{=} (\tau, X, -Y)$$

also ist $B = \psi(\tau, X, Y) \overset{\mathrm{d}}{=} \psi(\tau, X, -Y) = \tilde{B}$. ∎

Eine klassische Anwendung des Spiegelungsprinzips ist die Bestimmung der Verteilung von

$$M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

Dazu betrachten wir die Stoppzeit

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ (wobei wir $\inf \emptyset = \infty$ setzen).

Satz 13.4
Es sei $t \geq 0$. Dann haben M_t, $M_t - B_t$ und $|B_t|$ dieselbe Verteilung.

Beweis
Es sei $x > 0$ und $y < x$. Sei $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ so, dass $f(0) = 0$, $f(t) \leq y$, $\max_{0 \leq s \leq t} f(s) \geq x$. Es sei

$$g(s) = \begin{cases} f(s), & s \leq \tau_x \\ 2x - f(s), & s > \tau_x \end{cases}$$

also ist $g(0) = 0$ und $g(t) \geq 2x - y$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(M_t \geq x, B_t \leq y) &= P(\tilde{B}_t \geq 2x - y) \\ &\overset{13.3}{=} P(B_t \geq 2x - y) \\ &= P\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq \frac{2x-y}{\sqrt{t}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

für alle $x > 0$, $y < x$. Die gemeinsame Dichte von (M_t, B_t) ist

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(M_t \geq x, B_t \leq y) \\ =&\frac{\partial}{\partial}\left(-\phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ =&-\phi'\left(\frac{2x-y}{\sqrt{t}}\right)\frac{2}{t} \qquad \text{, für } x \geq 0, y \leq x, \text{ sonst } 0 \end{aligned}$$

wobei $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dichtetransformation liefert:

$$\begin{aligned} & f_{M_t, M_t - B_t}(x,y) \\ &= -\frac{2}{t}\phi'\left(\frac{x+y}{\sqrt{t}}\right), \quad x, y \geq 0 \\ \implies f_{M_t}(x) &= \int f_{M_t, M_t - B_t}(x,y) dy \\ &= -\int \frac{2}{t}\phi'\left(\frac{x+y}{\sqrt{t}}\right) dy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x+y}{\sqrt{t}}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Analog:$f_{M_t - B_t}(y) = \frac{2}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)$, $\quad y \geq 0$ und daraus folgt $M_t \overset{\mathrm{d}}{=} M_t - B_t$. Die Dichte von $|B_t|$ kann man direkt bestimmen und man erhält wieder denselben Ausdruck. ∎

Bemerkung: Satz 13.3 kann verwendet werden, um die Verteilung von bestimmten Eintrittszeiten der Brownschen Bewegung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} &\{\tau_a \leq t\} = \{M_t \geq a\}, \quad a > 0 \\ \implies &P(\tau_a \leq t) = P(M_t \geq a) = P(|B_t| \geq a) = P(|B_1| \geq \frac{a}{\sqrt{t}}), \qquad \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

Also gilt für die Dichte f_{τ_a} von τ_a:

$$\begin{aligned} f_{\tau_a}(t) =& \frac{d}{dt}\left(\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} 2\phi(y)dy\right) \\ =& \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Es gilt: $E\tau_a = \infty$.
Wir betrachten jetzt $Z(\omega) := \{t \geq 0 \mid B_t(\omega) = 0\}$ die Nullstellen der Pfade $t \mapsto B_t(\omega)$ einer Brownschen Bewegung.

Definition
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, wenn sie mit der Menge ihrer Häufungspunkte übereinstimmt.

Satz 13.5
Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ist $Z(\omega)$ perfekt.

Beweis
Nach Voraussetzung existiert ein $C \in \mathcal{F}$ mit $P(C) = 1$ und $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in C$. Da $Z(\omega) = B^{-1}(\omega)(\{0\})$ ist $Z(\omega)$ abgeschlossen für alle $\omega \in C$, da $\{0\}$ abgeschlossen und $t \mapsto B_t(\omega)$ stetig ist.
Es bleibt noch zu zeigen, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ jedes $t \in Z(\omega)$ Häufungspunkt von $Z(\omega)$ ist. Wir wissen bereits (Vergleich: Bemerkung nach Satz 11.1), dass ein $A_0 \in \mathcal{F}$ existiert, mit $P(A_0) = 1$ und für alle $\omega \in A_0$ ist $t_0 = 0$ Häufungspunkt von $Z(\omega)$. Für $q > 0, q \in \mathbb{Q}$ seien

$$\begin{aligned} \tau_q(\omega) :=& \inf\{t \geq q \mid B_t(\omega) = 0\} \\ A_q :=& \{\omega \in \Omega \mid \tau_q(\omega) \text{ ist Häufungspunkt von } Z(\omega) \cap (\tau_q(\omega), \infty)\} \end{aligned}$$

Da τ_q eine Stoppzeit ist, ist $\tilde{B}_t := B_{\tau_q + t} - \underbrace{B_{\tau_q}}_{=0, P-f.s.} = B_{\tau_q + t}$ nach Satz 13.2 wieder eine Brownsche Bewegung. Daraus folgt: $P(A_q) = 1$.
Sei

$$A := C \cap \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q}, \\ q \geq 0}} A_q$$

Da $P(A) = 1$ genügt es zu zeigen, dass $Z(\omega)$ für alle $\omega \in A$ perfekt ist.
Annahme: Es existiert ein $t_0 \in Z(\omega)$, das für ein $\omega \in A$ kein Häufungspunkt von $Z(\omega)$ ist. Dann ist $t_0 > 0$ und es existiert $\varepsilon > 0$ mit $(t_0 - \varepsilon, t_0) \cap Z(\omega) = \emptyset$. Sei $q \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \cap \mathbb{Q}$. Da $t_0 \in Z(\omega)$ ist $\tau_q(\omega) = t_0$. Daraus folgt, dass $\tau_q(\omega) = t_0$ kein Häufungspunkt von $Z(\omega) \cap (t_0, \infty)$ ist. Widerspruch!
Also gilt die Behauptung. ∎

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $Z(\omega)$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ eine Lebesgue-Nullmenge ist (also insbesondere kein Intervall $[a, b]$ enthält). Weiter gilt, dass nichtleere perfekte Mengen überabzählbar sind.

14. Das Invarianzprinzip von Donsker

Eine Brownsche Bewegung kann durch eine geeignet skalierte Irrfahrt approximiert werden: Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen, mit $E\xi_i = 0, \mathrm{Var}(\xi_i) = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty$ (z.B. $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$). Weiter sei

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} \xi_j, k \in \mathbb{N},\ S_0 = 0$$

und

$$Y_t := S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1} \text{ für } t \geq 0.$$

Hier fehlt ein Bild, auf dem zu sehen ist, dass Y_t das lineare Interpolationspolynom der Punkte S_k ist.

Wir skalieren jetzt (Y_t) in der Zeit und im Zustandsraum

$$X_t^{(n)} := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{n \cdot t}, \quad t \geq 0$$

Bemerkung: Offenbar ist

$$D_k^{(n)} = X^{(n)}_{\frac{(k+1)}{n}} - X^{(n)}_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{k+1}$$

unabhängig von $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ und es gilt $ED_k^{(n)} = 0$ und $\mathrm{Var}(D_k^{(n)}) = \frac{1}{n}$, also ist $(X^{(n)})_{t \geq 0}$ der Brownschen Bewegung nicht unähnlich.

Lemma 14.1
Seien (X_n), X und (Y_n) Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in einem metrischen Raum (S, ρ). Falls $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ und $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, dann gilt $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Satz 14.2
Mit $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ definiert wie oben und Zeitpunkten $0 \leq t_1 < \dots < t_l < \infty$ gilt:

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_l}^{(n)}) \xrightarrow{\mathrm{d}} (B_{t_1}, \dots, B_{t_l}),\ n \to \infty,$$

wobei $(B_t)_{t \geq 0}$ die Brownsche Bewegung ist.

Beweis
Wir betrachten hier den Fall $l = 2$ (Rest analog) und zeigen $(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}) \xrightarrow{\mathrm{d}} (B_s, B_t)$ für $0 \leq s < t$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(|X_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor tn \rfloor}| > \varepsilon) &\le P(|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot 1 \cdot \xi_{\lfloor tn \rfloor + 1}| > \varepsilon) \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2 n} \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
&P(\|(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{\lfloor sn \rfloor}, S_{\lfloor tn \rfloor})\|^2 > \varepsilon) \\
\le\ &P(|X_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor tn \rfloor}|^2 > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_s^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor sn \rfloor}|^2 > \frac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}
$$

und damit genügt es nach 14.1 zu zeigen, dass

$$
\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{\lfloor sn \rfloor}, S_{\lfloor tn \rfloor}) \xrightarrow{\text{d}} (B_s, B_t)
$$

Nach dem „Continuous Mapping Theorem" genügt es zu zeigen:

$$
\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j, \sum_{\lfloor sn \rfloor + 1}^{\lfloor tn \rfloor} \xi_j) \xrightarrow{\text{d}} (B_s, B_t - B_s)
$$

Wir betrachten die charakteristische Funktion:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E(\exp(\frac{i\theta}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j + \frac{i\gamma}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{\lfloor sn \rfloor + 1}^{\lfloor tn \rfloor} \xi_j)) \\
&\qquad \overset{\xi_i \text{ unabh.}}{=} \lim_{n\to\infty} E(\exp(\frac{i\theta}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j)) \cdot E(\exp(\frac{i\gamma}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{\lfloor sn \rfloor + 1}^{\lfloor tn \rfloor} \xi_j))
\end{aligned}
$$

Nach dem Zentralem Grenzwertsatz können wir verwenden, dass

$$
\frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor sn \rfloor}} \sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j \xrightarrow{\text{d}} Z\sqrt{s}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).
$$

Da

$$
|(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor sn \rfloor}}) \sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j| \xrightarrow{\text{P}} 0 \text{ für } n \to \infty,
$$

folgt mit 14.1, dass

$$
\lim_{n\to\infty} E(\exp(\frac{i\theta}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor sn \rfloor} \xi_j)) = e^{-\theta^2 \frac{s}{2}}
$$

und analog für den zweiten Grenzwert. Mit dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt die Behauptung. ■

Also konvergieren alle endlich-dimensionalen Verteilungen gegen die entsprechenden endlich-dimensionalen Verteilungen der Brownschen Bewegung.

Schwache Konvergenz kann man aber noch allgemeiner auffassen:

Definition
(vergleiche Stochastik 2) Sei (S,ρ) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}(S)$. Seien $\{P_n\}, P$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S,\mathfrak{B}(S))$. $\{P_n\}$ konvergiert schwach gegen P ($P_n \xrightarrow{w} P$) genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f(s)dP_n(s)=\int_S f(s)dP(s)$$

für alle beschränkten, stetigen Funktionen f auf S gilt.

Auf dem gegeben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ fassen wir die Brownsche Bewegung $B=(B_t)_{t\geq 0}$ als Abbildung $B:\Omega\to C[0,\infty)=\{f:[0,\infty)\to\mathbb{R}\mid f \text{ stetig}\}$ auf. Auf $C[0,\infty)$ betrachten wir die Metrik

$$\rho(f,g):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{0\leq t\leq n}(|f(t)-g(t)|\wedge 1).$$

Offenbar gilt: $X^{(n)} \xrightarrow{w} X$ impliziert $(X^{(n)}_{t_1},\dots,X^{(n)}_{t_l}) \xrightarrow{d} (X_{t_1},\dots,X_{t_l})$, da für $f:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$, f stetig und beschränkt, auch $f\circ\pi_{T_0}:C[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $T_0=\{t_1,\dots,t_l\}$, wieder stetig und beschränkt ist und also gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int f(X^{(n)}_{t},\dots,X^{(n)}_{t_l})dP_n &= \lim_{n\to\infty}\int (f\circ\pi_{T_0})(X^{(n)})dP_n\\ &=\int (f\circ\pi_{T_0})(X)dP\\ &=\int f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})dP.\end{aligned}$$

Reicht jetzt die Konvergenz der Fidis aus, damit $X^{(n)} \xrightarrow{w} X=B$?

Definition
(vergleiche Stochastik 2) Sei (S,ρ) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}(S)$, $\{P_n, n\in\mathbb{N}\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S,\mathfrak{B}(S))$. Diese Familie heißt straff, falls für alle $\varepsilon>0$ eine kompakte Menge $K\subseteq S$ existiert, so dass für alle $P\in\{P_n,n\in\mathbb{N}\}$ gilt dass $P(K)>1-\varepsilon$.

Beispiel 14.1
Sei $(X^{(n)}_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X^{(n)}_t=\begin{cases} nt, & 0\leq t\leq \frac{1}{2n}\\ 1-nt, & \frac{1}{2n}\leq t\leq\frac{1}{n}\\ 0, & t>\frac{1}{n}\end{cases}$$

Hier fehlt ein Bild von $X^{(n)}_t$
eine Folge von (deterministischen) Prozessen in $C[0,\infty)$ und $X\equiv 0$. Offenbar gilt für alle

$0 \leq t_1 < \cdots < t_l$, dass $(X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_l}) \xrightarrow{n\to\infty} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_l}) = (0, \ldots, 0)$.
Allerdings ist für $H : C[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H(f) := \left(\max_{0\leq t\leq 1} f(t)\right) \wedge 1 \quad \text{(stetig und beschänkt)}$$
$$\int H(f)dP_n = \frac{1}{2} \text{ konvergiert für } n \to \infty \text{ nicht gegen } \int H(f)dP(f) = 0$$

Also gilt $P_n \xrightarrow{w} P$ nicht.

Satz 14.3
Sei $\{X_{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ eine straffe Familie von stetigen Prozessen, so dass für alle $0 \leq t_1 < \cdots < t_l < \infty$ die Folge $((X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_l}))_n$ in Verteilung konvergiert. Sei P_n das von $X^{(n)}$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C[0,\infty), \mathfrak{B}(C[0,\infty)))$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P_n \xrightarrow{w} P$ unter dem für die Projektionen $X_t : C[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, X_t(\omega) = \omega_t$ gilt: $(X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_l}) \xrightarrow{d} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_l})$

Beweis
Offenbar ist jede Teilfolge $\{\hat{X}^{(n)}\}$ von $\{X^{(n)}\}$ straff. Nach dem Satz von Prohorov (Stochastik II, Satz 5.8 oder Karatzas/Shrewe S. 67) hat jede straffe Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Seien $\{\hat{X}^{(n)}\}$ und $\{\check{X}^{(n)}\}$ verschiedene Teilfolgen, die Maße auf $C[0,\infty)$ induzieren, die gegen ein Maß P beziehungsweise Q konvergieren (d.h. $\hat{P}^n \xrightarrow{w} P, \check{P}^n \xrightarrow{w} Q$)).
Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} &P(f \in C[0,\infty) | (f(t_1), \ldots, f(t_l)) \in A) \\ =&Q(f \in C[0,\infty) | (f(t_1), \ldots, f(t_l)) \in A) \end{aligned}$$

für alle $A = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_l], l \geq 1, x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq t_1 < \cdots < t_l < \infty$. Wegen dem Maßeindeutigkeitssatz folgt $P = Q$.
Annahme: Es existiert eine Folge $\{P^n\}$ von $\{X^{(n)}\}$ induzierten Maßen, die nicht schwach gegen P konvergieren. Dann existiert eine beschränkte stetige Funktion $h : C[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\int h(f)P_n(df) \nrightarrow \int h(f)P(df), n \to \infty$.
Sei jetzt $\{\tilde{P}^n\}$ eine Teilfolge, so dass $\lim_{n\to\infty} \int h(f)\tilde{P}^n(df)$ existiert, aber ungleich $\int h(f)P(df)$ ist. Für jede Teilfolge $\{\hat{P}^n\}$ von $\{\tilde{P}^n\}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int h(f)\hat{P}^n(df) \neq \int h(f)P(df)$ und der Limes existiert. Das ist ein Widerspruch zu obiger Überlegung. ∎

Wie kann man jetzt Straffheit für $S = C[0,\infty)$ charakterisieren? Dazu sei für $f \in C[0,\infty)$ $T > 0, \delta > 0$ das "Stetigkeitsmodul" definiert als

$$m^T(f,\delta) := \max_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ 0 \leq s,t \leq T}} |f(s) - f(t)|$$

Für $m^T(f,\delta)$ gilt jetzt:

Lemma 14.4
Das Stetigkeitsmodul $m^T(f,\delta)$ besitzt folgende Eigenschaften:

a) $f \mapsto m^T(f,\delta)$ ist stetig bezüglich der Metrik ρ

b) $\delta \mapsto m^T(f,\delta) \uparrow$

c) $\lim_{\delta\to 0} m^T(f,\delta) = 0$ für alle $f \in C[0,\infty)$.

ohne Beweis.
Wir benötigen folgenden Satz:

Satz 14.5
Sei $A \subset C[0,\infty)$. Der Abschluss $\bar{A}$ ist kompakt, genau dann wenn

$$\sup_{f\in A} |f(0)| < \infty$$

und

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{f\in A} m^T(f,\delta) = 0$$

für alle $T > 0$.

ohne Beweis (Karatzas/Shrewe S. 62)
Die Charakterisierung der Straffheit auf $C[0,\infty)$ ist jetzt wie folgt:

Satz 14.6
Eine Folge $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C[0,\infty),\mathfrak{B}(C[0,\infty)))$ ist straff, genau dann wenn

a) $\lim_{a\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} P_n(\{f : |f(0)| > a\}) = 0$

b) $\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} P_n(\{f : m^T(f,\delta) > \varepsilon\}) = 0$ für alle $T > 0, \varepsilon > 0$.

Beweis
Sei zunächst $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ straff. Nach Definition existiert zu jedem $\eta > 0$ ein kompaktes K mit $P_n(K) \geq 1-\eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\overset{14.3}{\Longrightarrow} \forall f \in K \text{ ist } |f(0)| < a \text{ für großes } a \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \text{ a.) ist erfüllt .}$$

Weiter gilt nach Satz 14.5 für T und $\varepsilon > 0$:
Es existiert $\delta_0 > 0$ mit

$$\forall f \in K, 0 \leq \delta < \delta_0 : m^T(f, \delta) \leq \varepsilon$$

$\implies$ b.) ist erfüllt.
Umgekehrt gilt jetzt a.) und b.). Für $T \in \mathbb{N}$ und $\eta > 0$ wählen wir $a > 0$ so, dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P_n(\{f : |f(0)| > a\}) \leq \frac{\eta}{2^{T+1}}$$

Wähle $\delta_k > 0, k = 1, 2, \dots$ so, dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P_n(\{f : m^T(f, \delta_k) > \frac{1}{k}\}) \leq \frac{\eta}{2^{T+k+1}}$$

Definiere $A_T := \{f : |f(0)| \leq a, m^T(f, \delta_k) \leq \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots\}$,

$$A := \bigcap_{T=1}^{\infty} A_T$$

Die Mengen A_T, A sind abgeschlossen (vergleiche Lemma 14.4 a.)). Es gilt

$$P_n(A_T) = 1 - P_n(A_T^c) \geq 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta}{2^{T+k+1}} = 1 - \frac{\eta}{2^T}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $P_n(A_T^c) \leq \frac{\eta}{2^T}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

„$\Longleftarrow$“

$$A := \bigcap_{T=1}^{\infty} A_T$$

ist abgeschlossen und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_n(A_T^c) \leq \frac{\eta}{2^T}.$$

Daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} P_n(A) &= P_n(\bigcap_{T=1}^{\infty} A_T) \\ &= 1 - P_n(\bigcup_{T=1}^{\infty} A_T^c) \\ &\geq 1 - \sum_{T=1}^{\infty} P_n(A_T^c) \\ &\geq 1 - \sum_{T=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^T} \\ &= 1 - \eta \end{aligned}$$

Nach Satz 14.5 ist A kompakt, womit die Behauptung gezeigt ist. ∎

Satz 14.7 (Invarianzprinzip von Donsker (1951))
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E\xi_k = 0$ und $0 < \mathrm{Var}(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$.

Definiere $X^{(n)} := (X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ wie zu Beginn des Abschnitts, also

$$X_t^{(n)} := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}, \quad t \geq 0$$

wobei

$$Y_t := S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}$$

für $t \geq 0$ und $S_k := \sum_{j=1}^k \xi_j$ und P_n sei das auf $(C[0,\infty), \mathfrak{B}(C[0,\infty))$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß.

Dann gilt $P_n \xrightarrow{w} P$, wobei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so dass $W_t := \pi_t : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f_t$, die Brownsche Bewegung ist.

Beweis
Nach Satz 14.2, Satz 14.3 reicht es zu zeigen, dass $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist. Dazu verwenden wir Satz 14.6.

Da $X_0^{(n)} = 0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist (1) klar. Es bleibt zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ gilt:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} P(\max\{|X_s^{(n)} - X_t^{(n)}| \mid |s-t| < \delta,\, 0 \leq s,t \leq T\} > \varepsilon) = 0$$

beziehungsweise

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P(\max\{|X_s^{(n)} - X_t^{(n)}| \mid |s-t| < \delta,\, 0 \leq s,t \leq T\} > \varepsilon) = 0$$

da für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass die Wahrscheinlichkeit für $\delta \to \infty$ gegen null geht.

Es gilt jetzt:

$$\begin{aligned} &P(\max\{|X_s^{(n)} - X_t^{(n)}| \mid |s-t| < \delta,\, 0 \leq s,t \leq T\} > \varepsilon) \\ &\qquad = P(\max\{|Y_s - Y_t| \mid |s-t| \leq n\delta,\, 0 \leq s,t \leq nT\} > \varepsilon\sigma\sqrt{n}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\max\{|Y_s - Y_t| \mid |s-t| \leq n\delta,\, 0 \leq s,t \leq nT\} \\ &\leq \max\{|Y_s - Y_t| \mid |s-t| \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1,\, 0 \leq s,t \leq \lfloor nT \rfloor + 1\} \\ &\leq \max\{|S_{j+k} - S_k| \mid 1 \leq j \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1,\, 0 \leq k \leq \lfloor nT \rfloor + 1\} \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P(\max\{|S_{j+k} - S_k| \mid 1 \leq j \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1,\, 0 \leq k \leq \lfloor nT \rfloor + 1\} > \varepsilon\sigma\sqrt{n}) = 0.$$

Etwa eine Seite an in der Vorlesung ausgelassener Rechnungen zeigt, dass:

$$P(\max\{|S_{j+k} - S_k| \mid 1 \leq j \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1,\ 0 \leq k \leq \lfloor nT \rfloor + 1\} > \varepsilon\sigma\sqrt{n}) \leq 2\frac{T}{\delta} \underbrace{P(\max_{1 \leq j \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1} |S_j| > \frac{1}{3}\varepsilon\sigma\sqrt{n})}_{=:A}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\delta} P(A) = 0.$$

Nach einer weiteren halben Seite Rechnung weiß man, dass

$$P(\max_{1 \leq j \leq \lfloor n\delta \rfloor + 1} |S_j| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}) \leq 2P(|S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1}| \geq \sigma\sqrt{n}(\varepsilon - \sqrt{2\delta}))$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\lfloor n\delta \rfloor + 1}} S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

also mit Lemma 14.1:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n\delta}} S_{n\delta} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$$

Sei $\lambda > 0$ und $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $\varphi_k \to \varphi$ und punktweise fallend und

$$\varphi(x) = 1_{(-\infty,-\lambda] \cup [\lambda,\infty)}(x)$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\limsup_{n \to \infty} P(|S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1}| \geq \lambda\sigma\sqrt{n\delta}) \leq \lim_{n \to \infty} E\varphi_k(\frac{1}{\sigma\sqrt{n\delta}} S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1}) = E\varphi_k(Z).$$

Mit $k \to \infty$ gilt dann

$$\begin{aligned}\limsup_{n \to \infty} P(|S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1}| \geq \lambda\sigma\sqrt{n\delta}) &\leq E\varphi(Z) = P(|Z| \geq \lambda) \\ &\leq \frac{E|Z|^3}{\lambda^3}\end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda := \frac{\varepsilon - \sqrt{2\delta}}{\sqrt{\delta}}$, so folgt:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\delta} P(|S_{\lfloor n\delta \rfloor + 1}| \geq \sigma\sqrt{n}(\varepsilon - \sqrt{2\delta})) \leq \frac{\sqrt{\delta}}{(\varepsilon - \sqrt{2\delta})^3} E|Z|^3$$

Mit $\delta \to 0$ folgt dann die Behauptung. ■