

# 1. Mannigfaltigkeiten

## 1.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### Erinnerung (LA/Analysis)

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle$
Norm	$\ a\  := \sqrt{\langle a, a \rangle}$
Metrik	$d(a, b) := \ a - b\ $
Winkel	$\cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\ a\  \cdot \ b\ }$

Die Funktion  $f : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt (oder  $C^\infty$ ) falls in jedem Punkt  $p \in U$  alle gemischten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.<sup>1</sup>

Die  $C^\infty$ -Funktion

$$u^i : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i = u^i(p) \end{array}$$

heißt  $i$ -te Koordinatenfunktion ( $i = 1, \dots, n$ ). Eine Abbildung  $\phi : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt glatt falls jede der reellen Funktionen  $u^i \circ \phi$  glatt ist ( $i = 1, \dots, n$ ).

### Karten und Atlanten

Sei  $M$  ein topologischer Raum, der hausdorff'sch ist und eine abzählbare Basis hat.

Ein Koordinatensystem (oder Karte) in  $M$  ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U(\overset{\circ}{\subset} M) \rightarrow \varphi(U)(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n)$$

Schreibt man  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ , dann heißen die Funktionen  $x^i := u^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  Koordinatenfunktionen von  $\varphi$ .  $n$  heißt Dimension von  $(\varphi, U)$ .

Ein  $n$ -dimensionaler, differenzierbarer Atlas für  $M$  ist eine Kollektion  $\mathcal{A}$  von  $n$ -dimensionalen Karten von  $M$ . Es gilt:

- (A1) Jeder Punkt von  $M$  liegt im Definitionsbereich mindestens einer Karte, d.h.  $M$  ist lokal euklidisch.
- (A2) Alle zu  $\mathcal{A}$  gehörigen Kartenwechsel sind glatt, das heißt: Sind die Karten  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  und  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$  in  $\mathcal{A}$  und  $V \cap U \neq \emptyset$ , so sind  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  sowie  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ , genannt Kartenwechsel, glatt.

---

<sup>1</sup>  $A \overset{\circ}{\subset} B := A$  offen und  $A \subset B$

## 1. Mannigfaltigkeiten

Eine Karte  $\psi$  von  $M$  heißt mit  $\mathcal{A}$  verträglich, wenn auch  $\mathcal{A} \cup \{\psi\}$  ein differenzierbarer Atlas für  $M$  ist.

$\mathcal{A}$  ist vollständig (oder maximal) wenn jede mit  $\mathcal{A}$  verträgliche Karte zu  $\mathcal{A}$  gehört.

### Definition

Eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einem vollständigen differenzierbaren  $n$ -dimensionalen Atlas.

**Bemerkung (Lokal euklidisch  $\nRightarrow$  hausdorffsch):** Sei  $Y := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \pm 1\}$  versehen mit Teilraum-Topologie.  $(s, t) \sim (s', t') : \Leftrightarrow s = s' > 0$ ,  $X := Y/\sim$  mit Quotienten-Topologie.

- $X$  ist lokal euklidisch (lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}$ ).
- $X$  ist nicht hausdorffsch:  $p = [(0, 1)]$ ,  $q = [(0, -1)]$  sind nicht durch offene Mengen trennbar.

### Beispiele

- (1)  $\mathbb{R}^n$ :  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$  ist ein Atlas. Durch Erweiterung zu einem vollständigen Atlas  $\mathcal{A}$  erhalten wir die standard-differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung:** Auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$ , existiert bis auf Diffeomorphismus genau eine differenzierbare Struktur. Auf  $\mathbb{R}^4$  existieren weitere, „exotische“ differenzierbare Strukturen.

- (2) Die Sphären  $S^n := \{p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$ . Wir behaupten:  $S^n$  ist eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Als Topologie wählen wir die Teilmengen-Topologie, d.h.  $U \subset S^n$  offen  $\iff \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen, so dass  $U = S^n \cap U'$ . Daher folgt auch, dass die Sphären auch hausdorff'sch sind und eine abzählbare Basis haben.

Seien  $U_i^+$  bzw.  $U_i^-$  die offenen Hemisphären, definiert durch

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{p \in S^n \mid p_i > 0\} \\ U_i^- &:= \{p \in S^n \mid p_i < 0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Projektion in Richtung  $i$ -te Koordinaten-Achse) für  $i = 1, \dots, n+1$  mit

$$\varphi_i^\pm(p) := (u^1(p), \dots, u^{i-1}(p), u^{i+1}(p), \dots, u^{n+1}(p))$$

sind Karten mit glatten ( $C^\infty$ ) Kartenwechsel, was wir am Beispiel  $n = 2$  überprüfen:

$$(u^1, u^2) \xrightarrow{(\varphi_3^+)^{-1}} \left(u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right) \xrightarrow{\varphi_1^+} \left(u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right) \quad \left((u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right)$$

- (3) Kurven und Flächen in  $\mathbb{R}^3$  sind 1- bzw. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten

- (4a) Der  $n$ -dimensionale reell-projektiver Raum  $P^n\mathbb{R}$

**Definition**

Auf  $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  betrachte die Äquivalenz-Relation

$$x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, y = tx, \text{ also } (y^1, \dots, y^n) = (tx^1, \dots, tx^n)$$

Die Äquivalenzklassen sind also Geraden durch den Ursprung. Nun definieren wir:

$$P^n\mathbb{R} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

Wir behaupten nun dass  $P^n\mathbb{R}$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die Topologie erhalten wir aus dem topologischen Raum  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  über die Quotienten-Topologie, für die wir die surjektive Abbildung  $\pi$  verwenden:

$$\pi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n\mathbb{R} \\ x \mapsto [x]_{\sim} \end{array}$$

Zur Erinnerung: Die Quotiententopologie ist allgemein:

$$U \subset X / \sim \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset X \text{ offen}$$

Um zu zeigen, dass  $P^n\mathbb{R}$  eine abzählbare Basis hat, genügt es nach Lemma 1 des verteilten Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“ zu zeigen, dass  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n\mathbb{R}$  offen ist. ( $\pi$  ist offen wenn  $\pi$ -Bilder offener Mengen offen sind.) Dazu betrachten wir die Streckung  $\alpha_t : X \rightarrow X; x \mapsto tx$  ( $t \neq 0$ ).  $\alpha_t$  ist ein Homöomorphismus mit  $\alpha_t^{-1} = \alpha_{\frac{1}{t}}$ .

Sei nun  $U \subset X$  offen, so ist  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \neq 0} \alpha_t(U)$ . Da jedes  $\alpha_t(U)$  offen ist, ist  $\pi^{-1}(\pi(U))$  offen. Nach der Definition der Quotiententopologie also ist  $\pi(U)$  offen.

Weiter müssen wir zeigen, dass  $P^n\mathbb{R}$  hausdorff'sch ist. Anschaulich heißt das, um zwei „Geraden“  $[x]$  und  $[y]$  je einen offenen „Kegel“ zu finden, welche disjunkt sind. Wir zeigen dies über das Lemma 2 des Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“, wozu wir zeigen müssen:  $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$  ist abgeschlossen.

Die Idee ist, auf  $X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  die reelle Funktion  $f$  zu betrachten:

$$f(x, y) = f(x^1, \dots, x^{n+1}, y^1, \dots, y^{n+1}) := \sum_{i \neq j} |x^i y^j - x^j y^i|$$

$f$  ist stetig und  $f(x, y) = 0 \iff y = tx$  für ein  $t \neq 0 \iff x \sim y$ . Also ist  $R = f^{-1}(\{0\})$ . Da  $f$  stetig ist, ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen, also ist  $R$  abgeschlossen. Damit ist gezeigt, dass  $X / \sim$  hausdorff'sch ist.

Also ist  $P^n\mathbb{R}$  ein topologischer Raum mit den gewünschten Eigenschaften. Es bleibt zu zeigen, dass für diese Menge ein vollständiger Atlas existiert.

Wir definieren also  $n+1$  Karten  $(U_i, \varphi_i)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ). Es ist  $\bar{U}_i := \{x \in X \mid x^i \neq 0\}$  und  $U_i := \pi(\bar{U}_i) \subset P^n\mathbb{R}$ . Damit ist  $P^n\mathbb{R}$  abgedeckt ( $\bigcup_{i=1, \dots, n+1} U_i = P^n\mathbb{R}$ ). Weiter ist:

$$\begin{array}{c} U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_i : [x] \mapsto \left( \frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right) \end{array}$$

## 1. Mannigfaltigkeiten

Diese Definition ist representanten-unabhängig und injektiv:

$$\begin{aligned}\varphi_i([x]) = \varphi_i([y]) &\implies \frac{y^1}{y^i} = \frac{x^1}{x^i} =: t \\ &\implies y^1 = tx^1 \\ &\implies y = tx \\ &\implies [y] = [x]\end{aligned}$$

Auch ist  $\varphi_i$  stetig, und surjektiv:  $\varphi_i^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \dots, z^n)$ .

Die Koordinatenwechsel  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  sind affin, also  $C^\infty$  (Übungsaufgabe).

Diese Karten lassen sich zu einem vollständigen Atlas für  $P^n\mathbb{R}$  erweitern, also liegt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vor.

(4b)  $P^n\mathbb{C}$  ist eine  $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, was sich ähnlich zeigen lässt. Die doppelte Dimension kommt von der 2-dimensionalität von  $\mathbb{C}$ .

(5) Wir wollen aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue Mannigfaltigkeiten erhalten.

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit vollständigem Atlas  $\mathcal{A}$ . Sei  $\mathcal{A}'$  die Menge aller Koordinatensysteme mit Definitionsbereich in einer offenen Teilmenge  $O \subset M$ .  $\mathcal{A}'$  ist ein Atlas für  $O$ . Die entsprechende differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt offene Untermannigfaltigkeit.

### Beispiel

Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL_n\mathbb{R} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

ist eine  $n^2$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit:  $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}$  ist eine  $n^2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $GL_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\det A = 0\}$  ist offen, da die Determinantenfunktion stetig ist, also  $\{\det A = 0\}$  abgeschlossen ist.

(6) Die Produkt-Mannigfaltigkeit: Sind  $M^m$  und  $N^n$   $m$ - bzw.  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, so ist das topologische Produkt  $M \times N$  eine  $(n+m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Atlas besteht aus den Karten  $\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$  für Karten  $(U, \varphi)$  von  $M$  und  $(V, \psi)$  von  $N$ .

### Beispiel

( $S^1$  ist der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \\ \mathbb{T}^n &= \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-dimensionaler Torus}}\end{aligned}$$

(7) Eine Lie-Gruppe  $G$  ist eine Gruppe die zugleich eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt und zwar so, dass die Gruppenoperationen  $i$  und  $m$  differenzierbare Abbildungen (siehe nächster Abschnitt) sind.

$$\begin{aligned}m : G \times G &\rightarrow G, & m(g_1, g_2) &= g_1 g_2 \\ i : G &\rightarrow G, & i(g) &= g^{-1}\end{aligned}$$

**Beispiele**

- (i) Die eindimensionalen Gruppen  $GL_n\mathbb{R}$ ,  $GL_1\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$
- (ii) Die null-dimensionale Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- (iii) Die spezielle Orthogonale Gruppe

$$SO(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

welche homöomorph zu  $S^1$  ist.

- (iv) Die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\}$$

welche homöomorph zu  $S^3$  ist.

- (8) Ein Kegel ist keine differenzierbare Mannigfaltigkeit (“die Spitze ist nicht differenzierbar”).

**1.2. Differenzierbare Abbildungen****Definition (differenzierbare Abbildung)**

Eine Abbildung  $f : M^m \rightarrow N^n$  zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbar (oder glatt) im Punkt  $p \in M$  falls für eine (und damit jede) Karte  $\varphi : U \rightarrow U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$  um  $p$  und  $\psi : V \rightarrow V' = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$  mit  $f(U) \subset V$  die Darstellung von  $f$  in lokalen Koordinaten  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow V'$  glatt (oder  $C^\infty$ ) ist.

Die Unabhängigkeit der Aussage von der Wahl der Karte folgt aus der Definition des Atlases. Seien  $\tilde{\varphi}$  und  $\psi$  andere Karten um  $p$  bzw.  $f(p)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} &= \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \tilde{\varphi}^{-1} \\ &= \underbrace{(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \end{aligned}$$

Also  $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  ist  $C^\infty \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  ist  $C^\infty$ .

Spezialfälle sind:

- Falls  $n = 1$  heißt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion
- Falls  $m = 1$  heißt  $f : \mathbb{R} \rightarrow N$  heißt differenzierbare Kurve

**Definition**

$C^\infty(M)$  ist die Menge aller  $C^\infty$ -Funktionen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .

**Bemerkung:**  $C^\infty(M)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra bezüglich Addition, Multiplikation, skalare Multipli-

## 1. Mannigfaltigkeiten

kation:  $(p \in M, \lambda \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(f + g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (f \cdot g)(p) &:= f(p) \cdot g(p) \\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p)\end{aligned}$$

### Definition (Diffeomorphismus)

Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt Diffeomorphismus falls  $f$  bijektiv und  $f$  sowie  $f^{-1}$  glatt sind.

### Beispiele

- (1) Identität auf  $M$
- (2) Kartenwechsel

Die Menge  $\text{Diff}(M)$  aller (Selbst-)Diffeomorphismen von  $M$  bilden eine Gruppe.

☠ Ein differenzierbarer Homöomorphismus ist im allgemeinen **kein** Diffeomorphismus! So ist etwa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  ein differenzierbarer Homöomorphismus, aber  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$  ist zwar stetig aber nicht glatt.

## 1.3. Tangentialvektoren und -räume

### Erinnerung

$v \in T_p \mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : U(p) \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $C^\infty$ . Dann ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$ :

$$\partial_v f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv)$$

Für  $v = e_i$  erhält man die  $i$ -te partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{e_i} f$$

Es gilt:  $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$

$$\begin{aligned}\partial_v(af + bg) &= a\partial_v f + b\partial_v g \\ \partial_v(f \cdot g) &= f(p) \cdot \partial_v g + g(p) \cdot \partial_v f\end{aligned}$$

### Definition (Funktionskeim)

Zwei Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf offenen Umgebungen von  $p \in M$  differenzierbar sind, heißen äquivalent, falls sie auf einer Umgebung übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionskeime in  $p \in M$ . Die Menge aller Funktionskeime in  $p$  schreiben wir als  $C^\infty(p)$ .

**Definition (Tangentialvektor)**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein Tangentialvektor an  $M$  in  $p$  ist eine Funktion  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  so dass gilt: ( $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(p)$ )

$$(T1) \quad v \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear: } v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

$$(T2) \quad \text{Leibniz-Regel: } v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

Sei  $T_p M$  die Menge aller Tangentialvektoren von  $M$  im Punkt  $p$

**Beispiel**

$$v(f) := 0$$

Wie rechnet man mit Funktionskeimen? Praktisch genügt es mit Repräsentanten, also in  $p$  differenzierbaren Funktionen zu rechnen.

**Lemma 1.1**

- a)  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle (T1) und (T2) für Funktionen, die in  $p$  differenzierbar sind. Falls  $f$  und  $g$  in einer Umgebung von  $p$  übereinstimmen (d.h.  $f \sim g \iff [f] = [g]$ ) so ist  $v(f) = v(g)$ . Also insbesondere:  $\tilde{v}([f]) := v(f)$ .
- b) Falls  $h$  in einer Umgebung von  $p$  konstant ist, so ist  $v(h) = 0$ .

**Beweis**

- a) Da  $v$  linear ist, genügt es zu zeigen: Falls  $f = 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , so ist  $v(f) = 0$  ( $v(g - h) = 0 \implies v(g) = v(h)$ ). Dazu betrachte die „Abschneidefunktion“  $\tilde{g}$  mit

$$(1) \quad \text{Träger von } \tilde{g} := \{q \in M \mid \tilde{g}(q) \neq 0\} \subset U$$

$$(2) \quad 0 \leq \tilde{g} \leq 1 \text{ auf } M$$

$$(3) \quad \tilde{g} = 1 \text{ in einer Umgebung } V \text{ von } p, V \subset U.$$

Es ist dann  $f\tilde{g} = 0$  auf  $M$ . Nun folgt aus den Axiomen (T1) und (T2) dass wegen  $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$  gilt:  $v(0) = 0$ . Somit ist

$$0 = v(0) = v(f\tilde{g}) \stackrel{(T2)}{=} v(f) \underbrace{\tilde{g}(p)}_{=1} + \underbrace{f(p)}_{=0} v(\tilde{g}) = v(f).$$

- b) Nach a) können wir annehmen dass  $h$  konstant  $c$  auf  $M$  ist. Es ist dann  $v(h) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1)$ . Aus  $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1)$  folgt  $v(1) = 0$  und damit die Behauptung. ■

$T_p M$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum: ( $v, w \in T_p M, f \in C^\infty(p), a \in \mathbb{R}$ )

$$(v + w)(f) := v(f) + w(f)$$

$$(a \cdot v)(f) := a \cdot v(f)$$

## 1. Mannigfaltigkeiten

Weitere Beispiele von Tangentialvektoren via Karten:

Sei  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  ein Koordinatensystem (eine Karte) von  $M$  im Punkt  $p$ . (d.h.  $x^i = u^i \circ \varphi$ ). Für  $f \in C^\infty(p)$  setze:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty p \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

ist ein Tangentialvektor in  $p$ .

### Satz 1.1 (Basis-Satz)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  eine Karte um  $p \in M$ . Dann bilden die Tangentialvektoren  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , eine Basis von  $T_p M$  und es gilt für alle  $v \in T_p M$ :

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Insbesondere ist  $\dim T_p M = m = \dim M$ .

Für diesen Satz benötigen wir noch das

### Lemma 1.2 (Analysis)

Sei  $g$  eine  $C^\infty$ -Funktion in einer bezüglich  $o$  sternförmigen offenen Umgebung von  $o \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:  $g = g(0) + \sum_{j=1}^n u^j g_j$  für  $C^\infty$ -Funktionen  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

### Beweis (Lemma 1.2)

Taylorintegralformel:

$$g(u) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tu) dt = \sum_{j=1}^n u^j \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^j}(tu) dt$$

■

### Beweis (Satz 1.1)

(a)  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  ist ein Tangentialvektor in  $p$ . (Rechnung hier ausgelassen) und für die  $k$ -te Koordinatensystem  $x^k := u^k \circ \varphi$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k) = \frac{\partial (x^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial u^k}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \delta_{ik}.$$



(b) Die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sind linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Dann ist für  $k = 1, \dots, m$ :

$$0 = 0(x^k) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p}_{\delta_{ik}}(x^k) = \lambda_k$$

(c) Die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bilden ein Erzeugendensystem. Ohne Einschränkung gelte  $\varphi(p) = 0$  (\*). Sei  $v \in T_p M$  und  $a_k := v(x^k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Setze

$$w := v - \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p \in T_p M.$$

Dann ist für alle  $k = 1, \dots, m$ :

$$w(x^k) = v(x^k) - \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p(x^k) = a_k - \sum_{i=1}^m a_i \delta_{ik} = 0 \quad (**)$$

Nun wollen wir zeigen:  $w = 0$ , d.h.  $w(f) = 0$  für alle  $f \in C^\infty(p)$ . Sei  $f \in C^\infty(p)$ . Dann ist  $g := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(p))$ .

$$\begin{aligned} w(f) &= w(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\ &= w(g \circ \varphi) \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} w\left(g(0) + \sum_{j=1}^m (w^j \circ \varphi) \cdot (g_j \circ \varphi)\right) \\ &\stackrel{(T1),(T2)}{=} 0 + \sum_{j=1}^m \underbrace{w(x^j)}_{\stackrel{(**)}{=} 0} \cdot (g_j \circ \varphi)(p) + \underbrace{x^j(p)}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \cdot w(g_j \circ \varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

## 1.4. Tangentialabbildungen

In diesem Abschnitt verwendete Notation:  $\Phi : M \rightarrow N$  differenzierbar,  $f \in C^\infty(M)$  oder  $f \in C^\infty(p)$ ,  $\varphi : U \rightarrow U'$  eine Karte.

Sei  $\Phi : M^m \rightarrow N^n$  eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist  $\Phi$  in jedem Punkt von  $p \in M$  durch lineare Abbildungen  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  zu „approximieren“.

### Definition

Das Differential (oder die Tangentialabbildung) von  $\Phi$  in  $p$  ist:  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  mit  $d\Phi_p(v) : C^\infty(\Phi(p)) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$d\Phi_p(v)(f) := v(f \circ \Phi).$$

## 1. Mannigfaltigkeiten

Nun ist zu zeigen dass  $d\Phi_p(v) \in T_{\Phi(p)}N$ :

(T1)

$$\begin{aligned} d\Phi_p(v)(a \cdot f + b \cdot g) &= v((a \cdot f + b \cdot g) \circ \Phi) \\ &= v(a \cdot f \circ \Phi + b \cdot g \circ \Phi) \\ &= a \cdot v(f \circ \Phi) + b \cdot v(g \circ \Phi) \\ &= a \cdot d\Phi_p(v)(f) + b \cdot d\Phi_p(v)(g) \end{aligned}$$

(T2)

$$\begin{aligned} d\Phi_p(v)(fg) &= v((fg) \circ \Phi) \\ &= v((f \circ \Phi) \cdot (g \circ \Phi)) \\ &= v(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + v(g \circ \Phi)(f \circ \Phi)(p) \\ &= d\Phi_p(v)(f) + \dots \end{aligned}$$

Beachte, dass aus der Definition direkt folgt: Ist  $\Phi = \text{id}_M : M \rightarrow M$ ,  $p \mapsto p$ , so gilt  $d\Phi_p(v) = d(\text{id})_p(v) = v$  für alle  $v \in T_pM$ .

### Lemma 1.3

Sei  $\Phi \in C^\infty(M, N)$ ,  $\xi = (x^1, \dots, x^m)$  eine Karte um  $p \in M$  und  $\eta = (y^1, \dots, y^n)$  eine Karte um  $\Phi(p) \in N$ . Dann gilt:

$$d\Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)} \quad (*)$$

### Beweis

Sei  $w \in T_{\Phi(p)}N$  die linke Seite von (\*). Dann gilt nach dem Basis-Satz (Satz 1.1) ist

$$w = \sum w(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)}.$$

Nach der Definition des Differentials ist

$$w(y^i) = d\Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) (y^i) = \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p).$$

■

### Definition

Die Matrix

$$\left( \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \right) = \left( \frac{\partial(y^i \circ \Phi \circ \xi^{-1})}{\partial u^j}(\xi(p)) \right) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

heißt Jacobi-Matrix von  $\Phi$  bezüglich  $\xi$  und  $\eta$ .

**Lemma 1.4 (Kettenregel)**

Falls  $\Phi \in C^\infty(M, N)$  und  $\Psi \in C^\infty(N, L)$ , so gilt

$$d(\Psi \circ \Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p.$$

**Beweis**

Mit einer Testfunktion  $g$  überprüfen wir:

$$d(\Psi \circ \Phi)(v)(g) = v(g \circ \Psi \circ \Phi) = d\Phi(v)(g \circ \Psi) = d\Psi(d\Phi(v))(g) \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Falls  $\Phi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus ist, so folgt wegen

$$\text{id} = d(\text{id})_p = d(\Phi \circ \Phi^{-1})|_p \stackrel{\text{Lemma 1.4}}{=} d\Phi_p \circ d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}$$

dass

$$(d\Phi_p)^{-1} = d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}.$$

Das heißt insbesondere, dass  $d\Phi_p$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist, und  $\dim M = \dim N$ .

**Satz 1.2 (Inverser Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten)**

Ist  $\Phi \in C^\infty(M, N)$  und  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  ein Vektorraum-Isomorphismus für ein Punkt  $p \in M$ , dann existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$  und eine Umgebung  $W$  von  $\Phi(p)$  so dass  $\Phi|_V$  ein Diffeomorphismus von  $V$  auf  $\Phi(V) = W$  ist.  $\Phi|_V$  nennen wir einen lokalen Diffeomorphismus.

**Beweis**

Wähle eine Karte  $\xi$  um  $p \in M$  und eine Karte  $\eta$  um  $\Phi(p) \in N$ . Nach dem Satz über inverse Funktionen (Analysis II) ist  $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus (da  $d(\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}) = d\eta \circ d\Phi \circ (d\xi)^{-1}$ , was jeweils reguläre lineare Abbildungen sind).  $\blacksquare$

## 1.5. Tangentialvektoren an Kurven

Die bisherige Herangehensweise an die Tangentialvektoren war sehr abstrakt, was Vor- und Nachteile hat. Ein weiterer Ansatz ist der Zugang über Kurven, den wir im Folgenden untersuchen.

Eine Kurve ist eine  $C^\infty$ -Abbildung  $c : I \rightarrow M$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  (meist mit  $0 \in I$ ) und  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die erste (und einzige) Koordinatenfunktion der trivialen Karte von  $I \subset \mathbb{R}$  schreiben wir als  $u := u^1$ . Der Tangentialvektor ist dann  $\frac{d}{du}|_t := \frac{\partial}{\partial u^1}|_t \in T_t I = T_t \mathbb{R}$ .

**Definition**

Der Tangentialvektor an  $c$  in  $c(t)$  ist

$$c'(t) := dc_t \left( \frac{d}{du} \Big|_t \right) \in T_{c(t)}M.$$

Diese Tangentialvektoren haben interessante Eigenschaften:

- (1) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $c'(t)(f) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t)$  (Richtungsableitung)
- (2) Falls  $v \in T_pM$  und  $c$  eine Kurve mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = v$ , dann gilt:

$$v(f) = \frac{d}{dt} (f \circ c)(0)$$

- (3) Ist  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve und  $\Phi : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung, so ist  $\Phi \circ c : I \rightarrow N$  eine glatte Kurve in  $N$  und es gilt dass

$$d\Phi_{c(t)}(c'(t)) = (\Phi \circ c)'(t)$$

**Beweis**

$$d\Phi(c')(f) = c'(f \circ \Phi) = \frac{d}{du} (f \circ \Phi \circ c)(t) = (\Phi \circ c)'(t)(f) \quad \blacksquare$$

- (4) Ist  $\varphi$  eine Karte um  $p$  und  $c_i(t) : \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  die  $i$ -te Koordinatenline um  $p$  bezüglich  $\varphi$ , so gilt

$$c'_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (i = 1, \dots, n)$$

**Beweis**

Sei  $f \in C^\infty(p)$ .

$$\begin{aligned} c_i(p)(f) &= \frac{d}{dt} (f \circ c_i)(0) \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i))(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## 1.6. Untermannigfaltigkeiten und spezielle differenzierbare Abbildungen

Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\Phi : M^m \rightarrow N^n$  heißt

- Immersion, falls  $d\Phi_p : T_pM \rightarrow T_{\Phi(p)}N$  injektiv ist für alle  $p \in M$ .

- Submersion, falls  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  surjektiv ist für alle  $p \in M$ .
- Einbettung, falls  $\Phi$  eine Immersion ist und  $M$  homöomorph zu  $\Phi(M) \subset N$  (versehen mit der Teilraum-Topologie) ist.

Eine Teilmenge  $M \subset N$  heißt (reguläre) Untermannigfaltigkeit, falls die Inklusionsabbildung  $i : M \hookrightarrow N$ ,  $i(p) := p$ , eine differenzierbare Einbettung ist.

Manchmal definiert man eine (allgemeine) Untermannigfaltigkeit als injektive Immersion  $\Phi : M \rightarrow N$ , so dass  $M$  und  $\Phi(M)$  diffeomorph sind. Dabei hat  $\Phi(M)$  nicht notwendigerweise die Teilraum-Topologie.

### Beispiele

(1) Immersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{k+l} \\ (x^1, \dots, x^k) &\mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Lokal sieht jede Immersion so aus.

(2) Submersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{k+l} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x^1, \dots, x^{k+l}) &\mapsto (x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

Auch hier kann man zeigen, dass jede Submersion lokal so aussieht.

(3) Die Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t^3, t^2)$  ist differenzierbar, aber keine Immersion, denn

$$c'(0) = dc_0 \left( \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\neq 0} \right) = (0, 0).$$

(4) Die Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

(5)  $\mathbb{R}^2$  versehen mit der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (u, v) \iff \begin{aligned} x &\equiv u \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \\ y &\equiv v \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ergibt den zweidimensionalen Torus  $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim$ . Wir betrachten nun die Kurve  $c_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow T^2$ ,  $t \mapsto (e^{it}, e^{i\alpha t})$ .

### Satz (Kronecker)

- $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$  geschlossene Kurve.
- $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$  dicht in  $\mathbb{R}^2$

### Beweis

Siehe V.I. Arnold: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

■

## 1. Mannigfaltigkeiten

Daraus folgt: Für  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$  ist  $c_\alpha$  eine injektive Immersion, aber keine Einbettung, da  $c_\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$  mit der Teilraumtopologie nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist.

**Bemerkungen:** (1) Jede Immersion ist lokal eine Einbettung.

(2) Einbettungs-Satz von Whitney (1936): Jede differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit kann in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  eingebettet werden:

$$\Phi : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

(Beweis: L.Führer: Topologie)

## 1.7. Tangentialbündel und Vektorfelder

### Satz 1.3 (Tangentialbündel)

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}.$$

$TM$  ist eine  $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

$TM$  heißt Tangentialbündel und ist ein Spezialfall eines Vektorraumbündels. In der Physik entspricht dies dem Phasenraum (Ort, Geschwindigkeit).

### Beweis

(Skizze) Sei  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  ein Atlas für  $M$ . Ist  $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ , so gilt nach Basis-Satz (Satz 1.1), dass  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mid i = 1, \dots, n \right\}$  eine Basis von  $T_p M$  für alle  $p \in U_\alpha$  ist. Für  $v \in T_p M$  gilt also  $v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ .

Somit erhalten wir für jedes  $\alpha \in A$  eine bijektive Abbildung

$$h_\alpha : \begin{aligned} V_\alpha := TU_\alpha &= \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n)) \end{aligned}$$

Ohne Beweis:  $(V_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in A}$  ist ein differenzierbarer Atlas für  $TM$ . ■

**Definition**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $TM$  das Tangentialbündel von  $M$  und  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $(p, v) \mapsto p$  die natürliche (oder kanonische) Projektion.

Ein Vektorfeld (VF) auf  $M$  ist eine Abbildung  $V : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto v_p$  mit  $\pi \circ V = \text{id}_M$ , d.h.  $v_p \in T_p M$ .

Das Vektorfeld ist differenzierbar ( $C^\infty$ , glatt), falls  $V : M \rightarrow TM$  eine differenzierbare Abbildung ist. Äquivalent dazu: Für alle  $f \in C^\infty(M)$  ist  $Vf \in C^\infty(M)$  mit  $(Vf)(p) := v_p(f)$ .

Wir definieren für  $p \in M$  und  $f \in C^\infty(M)$ :

- $(f \cdot V)(p) := f(p)v_p$  sowie
- $(V + W)(p) := v_p + w_p$ .

Damit ist  $\mathcal{VM}$  (die Menge aller Vektorfelder auf  $M$ ) ein  $C^\infty(M)$ -Modul.

Die lokale Darstellung der Vektorfelder liefert uns Basisfelder: Sei  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  für  $U \subset M$ . Dann ist für  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow TU \quad p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

ein Vektorfeld auf  $U$ , nämlich das  $i$ -te Koordinaten-Vektorfeld von  $\varphi$  oder „begleitendes  $n$ -Bein“

Nach dem Basissatz (Satz 1.1) gilt: Jedes Vektorfeld  $V \in \mathcal{VM}$  kann auf  $U$  geschrieben werden als

$$V = \sum_{i=1}^n V(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

**Definition**

Eine Derivation von  $C^\infty M$  ist eine Abbildung  $\mathcal{D} : C^\infty M \rightarrow C^\infty M$  mit

(D1)  $\mathcal{D}$  ist  $\mathbb{R}$ -linear:  $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$

(D2) Leibnitz:  $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cdot g + f\mathcal{D}(g)$

Aus den Axiomen (T1), (T2) für Tangentialvektoren folgt, dass  $V \in \mathcal{VM}$  eine Derivation ist.

Umgekehrt gilt, dass jede Derivation von einem Vektorfeld kommt: Sei  $\mathcal{D}$  eine Derivation. Definiere für jeden Punkt  $p \in M$ :  $v_p(f) := \mathcal{D}(f)(p)$ . Aus (D1), (D2) folgt:  $v_p \in T_p M$  und  $V : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto v_p$  ist ein Vektorfeld.

Weiter gilt für alle  $p \in M$ :  $(Vf)(p) = v_p(f) = (\mathcal{D}f)(p)$ , also ist  $Vf = \mathcal{D}f$ , insbesondere ist  $V$  glatt. Also entspricht  $\mathcal{VM}$  den Derivationen auf  $C^\infty M$ .

Warum also führen wir Derivationen ein? Die entscheidende Eigenschaft ist dass das Produkt zwei Vektorfelder  $V$  und  $W$

$$(V \cdot W)(f) := V(Wf)$$

keine Derivation ist, da (D2) nicht erfüllt ist, also  $(V \cdot W)$  kein Vektorfeld ist!

Dies korrigieren wir mit der Lie-Klammer

$$[V, W] := V \cdot W - W \cdot V$$

## 1. Mannigfaltigkeiten

welche eine Derivation liefert! Insbesondere ist also  $[V, W]$  wieder ein Vektorfeld.

Also

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM} \\ (V, W) \mapsto [V, W]$$

### Lemma 1.5

$\mathcal{VM}$  versehen mit der Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM}$  ist eine Lie-Algebra.

### Definition

Eine reelle Lie-Algebra ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $L$  mit einer Verknüpfung  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$  mit

(L1)  $\mathbb{R}$ -Linearität:  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$  sowie  $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$  für  $a, b \in \mathbb{R}$

(L2) Schiefsymmetrie:  $[x, y] = -[y, x]$

(L3) Jacobi-Identität:  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$

## Vektorfelder und Differentialgleichungen

Sei  $V \in \mathcal{VM}$ . Eine Integralkurve von  $V$  ist eine differenzierbare Kurve  $\alpha : I \rightarrow M$  mit  $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$  für alle  $t \in I$ .

In einem Koordinatensystem  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  gilt:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} \quad \text{sowie} \quad V(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^n V(x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$

Also gilt für  $i = 1, \dots, n$

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \iff \frac{d}{dt} (x^i \circ \alpha) = V(x^i \circ \alpha)$$

Dies ist ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus Existenz- und Eindeigkeitssätzen für solche Systeme (zum Beispiel Königsberger II, 4.2) folgt

### Satz 1.4 (Existenz und Eindeigkeit der Integralkurven)

Sei  $V \in \mathcal{VM}$ . Dann existiert für jeden Punkt  $p \in M$  ein Intervall  $I = I(p)$  um 0 und eine eindeutige Integralkurve  $\alpha : I \rightarrow M$  von  $V$  mit  $\alpha(0) = p$ .

### Korollar

Ist  $v \in T_p M$ , dann existiert eine differenzierbare Kurve  $\alpha : I \rightarrow M$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha'(0) = v$ .



Beweisidee: Ergänze  $v$  zu einem Vektorfeld in einer Umgebung von  $p$  und wende Satz 1.4 an.

