

# 3 Kongruenzen und Restklassenringe

In diesem Kapitel betrachten wir entweder  $R = \mathbb{Z}$  oder  $R = K[X]$ , wobei  $K$  ein Körper ist.

## Grundbegriffe

In den betrachteten Ringen gibt es eine eindeutige Restwahl: In  $R = \mathbb{Z}$  ist die Division mit Rest  $a = qm + r$  mit  $0 \leq r < |m|$ . Andere Restwahl wäre etwa  $a = qm + r'$  mit  $-\frac{|m|}{2} < r' \leq \frac{|m|}{2}$ . Es besteht folgender Zusammenhang:

$$r' = \begin{cases} r, & 0 \leq r \leq \frac{|m|}{2} \\ r - |m|, & \frac{|m|}{2} < r \leq |m| \end{cases}$$

In  $R = K[X]$  haben wir  $a = qm + r$  mit  $\text{grad } r < \text{grad } m$ .

Diese Reste sind eindeutig: Haben wir  $a = qm + r = \tilde{q}m + \tilde{r}$  mit  $0 \leq r, \tilde{r}, |m|$ . Dann ist  $(q - \tilde{q})m = \tilde{r} - r \implies |m| \mid \tilde{r} - r$ . Annahme:  $q - \tilde{q} \neq 0 \implies |\tilde{r} - r| \geq |m|$ , Wid. Also ist  $q = \tilde{q}$  und  $r = \tilde{r}$ . Der Beweis für  $R = K[X]$  funktioniert ähnlich.

**Definition (Gauß für  $R = \mathbb{Z}$ )**

$m, a, b, \in R$

(1)

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ (lies } a \text{ kongruent } b \text{ modulo } m)$$

$$\iff a \pmod{m} = b \pmod{m}$$

Gauß schreibt „Zwei Zahlen heißen kongruent mod  $m$ , wenn sie bei Division durch  $m$  den selben Rest lassen.“

(2)  $\bar{a} := \{b \in R \mid b \equiv a \pmod{m}\}$  heißt Restklasse modulo  $m$ .

(3)  $\bar{R} := R/mR := \{\bar{a} \mid a \in R\}$  heißt Restklassenring modulo  $m$ .

Warum ist Letzteres ein „Ring“? Der Dozent führt einen schönen Beweis durch Aufwickeln einer Schnur auf einer Tesa-Rolle durch.

**Beispiel**

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  mit  $\bar{0} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$  (die geraden Zahlen) und  $\bar{1} = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$  (die ungeraden Zahlen). Aus der Schule sind folgende Regeln bekannt:

(1)  $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ , „gerade + gerade = gerade“

(2)  $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$ , „gerade + ungerade = ungerade“

$$(3) \quad \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}, \text{ „ungerade} + \text{ungerade} = \text{gerade“}$$

**Bemerkung:**

$$(i) \ a \equiv b \pmod{m} \iff (ii) \ \overline{a} = \overline{b} \iff (iii) \ m|a - b$$

Merke: Kongruenz ist Gleichheit der Restklassen.

$\overline{qm} = \overline{0}$ . Die Idee: In  $\overline{R}$  wird alles durch  $m$  teilbare als „unwesentlich“ angesehen und durch 0 ersetzt.

**Beweis**

(i)  $\iff$  (ii): Kongruenz mod  $m$  ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf  $R$ .  $\overline{a}$  ist die Äquivalenzklasse von  $a$ . Lineare Algebra: Zwei Elemente sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Äquivalenzklassen überstimmen.

$$(i) \implies (iii): r = a \pmod{m} = b \pmod{m} \implies a = qm + r, b = q'm + r \text{ (Division mit Rest)} \\ \implies a - b = (q - q')m \implies m|a - b \quad \blacksquare$$

Um mit Restklassen zu rechnen, brauchen wir folgende Definitionen:

**Definition**

Jedes  $b \in \overline{a}$  heißt Vertreter der Klasse  $\overline{a} \in \overline{R}$ . Die Idee ist, die Operationen  $+$  und  $\cdot$  vertreterweise zu definieren. Wir haben also:

$$(\overline{R}, +, \cdot) \text{ mit } \overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}, \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

Zu zeigen: Die Definition ist vertreterunabhängig, also:  $\overline{a} = \overline{a'} \implies \overline{a + b} = \overline{a' + b}$  und  $\overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b}$ . Das ist klar:

$$\overline{a} = \overline{a'} \iff m|a - a' = a + b - (a' + b) \implies \overline{a + b} = \overline{a' + b} \\ m|a - a' \implies m|(a - a')b = ab - a'b \implies \overline{ab} = \overline{a'b}$$

**Bemerkung:**  $e \in R^\times, m \in R \implies R/mR = R/emR$  (da  $m|x \iff em|x$ ). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man  $m$  also normiert annehmen.

$m = 0$ , dann  $a \pmod{m} = b \pmod{m} \iff a = b$ , also  $\overline{a} = \{a\}$ , „ $a$ “. Also:  $R/oR = R$  und  $R/eR = R/R = \{\overline{0}\}$  („Nullring“)

Diese uninteressanten Fälle werden meist beiseite gelassen.

**Satz 3.1 (Restklassenring-Satz)**

Sei  $R$  ein euklidischer Ring,  $m \in R$ .

(1)  $(\overline{R} = R/mR, +, \cdot)$  ist ein Ring

(2)  $\overline{R}^\times = \{\overline{a} \in \overline{R} \mid \text{ggT}(a, m) = 1\}$

Zusatz: Zu  $\overline{a} \in \overline{R}^\times$ . Kann  $\overline{a}^{-1}$  effektiv mit Euklids Algorithmus berechnet werden.

### Definition

$\bar{a} \in \bar{R}^\times$  heißt eine prime Restklasse modulo  $m$ ,  $\bar{R}^\times$  heißt prime Restklassengruppe modulo  $m$ .  
(Sprachlich besser wäre eigentlich: Gruppe der zu  $m$  relativ primen Restklassen)

### Beweis

- (1) Alle Ringaxiome vererben sich von den Vertretern auf die Klassen.  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a} \implies (\bar{R}, +)$  ist kommutativ.  $0 := 0_{\bar{R}} = \bar{0}$ , da  $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$ .  $1_{\bar{R}} = \bar{1}$  ebenso.

Assoziativität der Addition:  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + (b + c)} = \bar{a} + \overline{b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ , Assoziativität der Multiplikation und Distributivgesetz analog.

- (2)  $\bar{a} \in \bar{R}^\times \xLeftrightarrow{\text{Def.}} \exists x \in R : \bar{x}\bar{a} = 1_{\bar{R}} = \bar{1} \iff 1 \equiv ax \pmod{m} \iff \exists q \in R : 1 = ax + qm \implies \text{ggT}(a, m) = 1$ , (da normal).

Der LinKom-Satz 1.10 liefert:  $d = \text{ggT}(a, m) \implies \exists x, y \in R : d = ax + by$ . Diesen Satz dürfen wir anwenden, da  $R$  euklidisch ist. Wir wenden ihn mit  $d = 1, q = y$  an und erhalten  $1 = ax + qm$ , wobei  $x$  durch Euklids Algorithmus geliefert wird.  $\implies \bar{1} = \bar{a}\bar{x} + \bar{q}\bar{m} = \bar{a}\bar{x}$ . Resultat:  $\bar{a}^{-1} = \bar{x}$  mit dem so berechnetem  $x$ . ■

### Folgerung 3.2

Ist  $m \in \mathbb{N}_+$ , dann gilt für Eulers Funktion  $\varphi$ :

$$\varphi(m) = \#\{R/mR\}^\times$$

Der Grund ist dass  $R/mR = \{\bar{0}, \dots, \overline{m-1}\}$  und  $(R/mR)^\times = \{\bar{r} | 0 \leq r < m, \text{ggT}(r, m) = 1\}$ , derer es  $\varphi(m)$  gibt.

Im Allgemeinen ist  $\bar{R}$  nicht integer. Beispielsweise in  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \bar{R}$  gilt:  $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = 0_{\bar{R}} = 0$ , aber  $\bar{2} \neq 0$

### Folgerung 3.3

Falls  $m$  unzerlegbar (also  $m$  Primzahl oder -polynom). Dann gilt:  $R/mR$  ist ein Körper.

Speziell:

- (1)  $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{P}$  ist Körper mit  $p$  Elementen.  
(2) Ist  $f \in K[X]$ ,  $f$  irreduzibel, so ist  $K[X]/f \cdot K[X] = \bar{R}$  ein Körper.

Grund:  $m$  sei unzerlegbar. Dann  $\bar{a} \in \bar{R}$ ,  $\bar{a} \neq 0 = \bar{0} \iff m \nmid a \implies \text{ggT}(m, a) = 1$  ( $1, m$  sind die einzigen normierten Teiler von  $m!$ )  $\implies a \in \bar{R}^\times$ . Es gilt also  $\bar{R}^\times = \bar{R} \setminus \{0\} \implies \bar{R}$  ist Körper.

$\bar{R} = R/mR \ni \bar{a} = a + Rm := \{a + qm | q \in R\}$  Restklasse von  $a$ .

Rechne in  $\bar{R}$ : **Idee:** Kodiere die Restklasse  $\bar{a}$  durch den Vertreter  $a \pmod{m}$ .

Beliebige Vertretersysteme (ohne Einschränkung  $m \in \mathbb{N}_+, m > 1$ )

$\underline{R} = \mathbb{Z}$ :

$\text{Versys}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  „System Betrag kleinster positiven Reste“ oder  $\text{Versys}_m = \{v \in \mathbb{Z} | -\frac{m}{2} < v \leq \frac{m}{2}\}$  „Symmetrisches Restsystem“

$$\begin{aligned} R &= K[X]: \\ \text{Versys}_m &= \{f \in K[X] \mid \text{Grad } f < \text{Grad } m\} \quad (\text{Grad } m > 0) \end{aligned}$$

**Klar:**

$$\begin{aligned} \text{Versys}_m &\longrightarrow R/mR \quad (\text{Ist bijektiv}) \\ r &\longmapsto \bar{r} \\ a &\longmapsto \bar{a} \quad \text{mod } m \quad (\text{Umkehrung}) \end{aligned}$$

Transportiere die Struktur  $(\text{Versys}_m, \oplus, \odot)$ , wobei gilt:

$$r \oplus s := r + s \quad \text{mod } m \quad r \odot s := rs \quad \text{mod } m$$

Klar,  $r \mapsto \bar{r}$  ist ein Ringisomorphismus.

Vorzug bei  $R = \mathbb{Z}$ :

$r + s \quad \text{mod } m$  mit 1-Addition: Zahlen  $< 2m$

$r \cdot s$ : Zahlen  $< m^2$

$(m \quad \text{mod } \frac{m^2}{4})$  bei symmetrischen Resten)

Vorzug bei  $R = K[X]$ :

Ist  $n = \text{Grad } f$ , so ist  $\text{Versys}_m$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n$  (Basis z.B.:  $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$ )

$$\text{Grad } f < m, \text{Grad } g < m \implies \text{Grad } (f + g) < m \implies f \oplus g = f + g \implies \oplus = +$$

$\text{Versys}_m$  enthält  $K$  als Teilkörper (konstante Polynome), da:

$$\alpha, \beta \in K \subset K[X] \implies \alpha \odot \beta = \alpha\beta \quad \text{mod } m = \alpha\beta$$

### Folgerung 3.4

$\bar{R} = K[X]/mK[X]$  ist ein  $K$ -Vektorraum der  $\dim n = \text{Grad } m$  mit Basis  $1, \bar{X}, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^{n-1}$ . Identifiziert man  $\alpha \in K$  mit der Restklasse  $\bar{\alpha}$ , so enthält  $\bar{R}$  den Körper  $R$ .

### Folgerung 3.5

Ist  $m \in \mathbb{F}_p[X] = R$  irreduzibel, so ist  $R/mR = \bar{R}$  ein Körper mit  $q = p^n$  ( $n = \text{Grad } m$ ) Elementen!

**Grund:**  $\mathbb{F}_p$ -Basis ist  $1, \bar{X}, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^{n-1}$ .

$$\bar{R} = \{\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \bar{X} + \dots + \alpha_{n-1} \bar{X}^{n-1} \mid \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}_p\} \quad \text{mit } \#\bar{R} = p^n$$

Zum Rechnen in  $\bar{R}$  wird empfohlen  $\bar{\alpha} \in \mathbb{F}_p$  durch  $r = a \quad \text{mod } p$  zu ersetzen, mit  $r \in \text{Versys}_p$ .  $f \in \text{Versys}_p[X]$  hat die Form  $f = \sum_{i=0}^n c_i X^i$ ,  $c_i \in \text{Versys}_p$ .

Bei der Bestimmung von  $f + g$ ,  $f \cdot g$  ist bei allen Rechnungen mit Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$ ,  $+$  durch  $\oplus$  und  $\cdot$  durch  $\odot$  zu ersetzen. Man kann auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  in  $\mathbb{Z}[X]$  berechnen und dann zu allen Koeffizienten die Reste  $\quad \text{mod } p$  nehmen.

### Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_3[X], \mathbb{F}_3 &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, \text{Versys}_3 = \{0, 1, 2\} \\ \underbrace{(X^2 + 2X + 1) \cdot (2X + 1)}_{(= \bar{1} \cdot X^2 + \bar{2} \cdot X + \bar{1} \text{ in } \bar{R}[X])} &= 2X^3 + \underbrace{2 \odot 2}_{=1 \text{ in } \mathbb{Z}[X]} X^2 + 2X + X^2 + 2X + 1 \\ &= 2X^3 + 4X^2 + 2X + X^2 + 2X + 1 \\ &= 2X^3 + \underbrace{5}_{2 \text{ mod } 3} X^2 + \underbrace{4}_{1 \text{ mod } 3} X + 1 \\ &= 2X^3 + (1 \oplus 1)X^2 + (2 \oplus 2)X + 1 \\ &= 2X^3 + 2X^2 + X + 1 \end{aligned}$$

**Beispiel**

$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \underbrace{\bar{x}}_{\substack{\in \mathbb{F}_2 \\ =: \varrho}}, \bar{x} + 1\}$ , wenn  $m$  irreduzibel in  $\mathbb{F}_2[X]$ , Grad  $f = 2$

$$X^2 + 1 = (X + 1)^2 (= X^2 + \underbrace{2}_{=0}X + 1 = X^2 + 1 \text{ in } \mathbb{F}_2[X])$$

$X^2 + X + 1$  ist irreduzibel. (Alle Polynome vom Grad 1 sind  $X, X + 1, X^2, X(X + 1), (X + 1)^2 = X^2 + 1$  sind von  $m$  verschieden  $\implies$  irreduzibel)

$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \varrho, \varrho + 1\}$ ,  $\varrho^2 = ?$

$$(\bar{X})^2 = \underbrace{\bar{X}^2}_{\in \text{Versys}_m} \bmod m = \overline{X + 1} = \bar{X} + 1 = \varrho + 1$$

$$X^2 - 1 \cdot (X^2 + X + 1) = -X - 1 = X + 1 \text{ in } \mathbb{F}_2[X]$$

Rechenregel:  $\varrho^2 = \varrho + 1 \implies$  Multiplikationstafel

**Bemerkung:**

- $R \rightarrow \bar{R} = R/mR$ ,  $\kappa : a \mapsto \bar{a} = \kappa(a)$ , so ist  $\kappa$  surjektiver Ringhomomorphismus.  $\kappa(a + b) = \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \kappa(a + b)$
- Ist  $R$  ein Ring und  $z \in \mathbb{Z}$ , so definiert man:

$$z \cdot \varrho := \text{sgn}(z) \underbrace{(\varrho + \varrho + \dots + \varrho)}_{|z|-\text{Stück}}$$

**Beispiel**

$$\bar{R} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}$$

$$z\bar{a} = \overline{za} \text{ (leicht selbst nachzuweisen)} \quad m \cdot 1_{\bar{R}} = m \cdot \bar{1} = \bar{m} = 0_{\bar{R}}$$

**Rechenregeln:**  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2 \in R$

$$(z_1 + z_2)\varrho = z_1\varrho + z_2\varrho$$

$$z(\varrho_1 + \varrho_2) = z\varrho_1 + z\varrho_2$$

$$(z_1 z_2)\varrho = z_1(z_2\varrho)$$

$$z(\varrho_1 \varrho_2) = (z\varrho_1)\varrho_2 = \varrho_1(z\varrho_2) \text{ (Beweis leicht)}$$

Für  $f \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$  ist definiert ( $f = \sum_{i=0}^n z_i X^i$ ):

$$f(\bar{a}) = \sum_{i=0}^n z_i \bar{a}^i \in \bar{R} (= \sum_{i=0}^n \overline{z_i a^i} = \overline{f(a)})$$

Ergebnis:  $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$

**3.1 Zyklische Gruppen**

**Aufgabe:** Berechne  $3^{10^{500}} \bmod \underbrace{167}_{=:p}$  (Rechne in  $\text{Versys}_{167}$  !)

**Mathematische Hilfsmittel:** Ordnung eines Gruppenelements.

**Definition**

Sei  $G$  eine (ohne Einschränkung multiplikative) endliche Gruppe,  $x \in G$ . (Das neutrale Element werde mit  $1 = 1_G$  bezeichnet)

- (i)  $\text{ord}(x) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid x^n = 1\}$  heißt „*Ordnung von  $x$* “
- (ii)  $\#G$  heißt „*Ordnung von  $G$* “

**Bemerkung:**  $\text{ord}(x)$  existiert, da  $n > m, n, m \in \mathbb{N}_+$  vorhanden sind mit  $x^n = x^m$ , da  $G$  endlich.  $\implies x^{n-m} = 1$ . In allgemeinen Gruppen kann sein  $\{n \in \mathbb{N}_+ \mid x^n = 1\} = \emptyset$ , dann schreibt man  $\text{ord}(x) = \infty$

**Satz 3.6 (Elementordnungssatz)**

Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $x \in G$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Dann gelten:

- (i)  $x^m = x^n \iff m \equiv n \pmod{\text{ord}(x)}$   
Insbesondere  $x^m = x^{m \bmod \text{ord}(x)}$  und  $x^m = 1 \iff \text{ord}(x) \mid m$
- (ii)  $x^{\#G} = 1$  (d.h. nach (i)  $\text{ord}(x) \mid \#G$ )
- (iii)  $\text{ord}(x^m) = \frac{\text{ord}(x)}{\text{ggT}(m, \text{ord}(x))}$

**Anwendung:**

Satz von Euler: Sei  $m, x \in \mathbb{Z}, m > 0, \text{ggT}(x, m) = 1$ ,  $\varphi$  sei die Eulersche Funktion. Dann gilt:  $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

(Kleine) Satz von Fermat: Sei  $p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:  $x^p \equiv x \pmod{p}$

**Zum Satz von Euler:**

$G = (R/Rm)^\times, \#G = \varphi(m)$ .  $\bar{x} \in G \iff \text{ggT}(x, m) = 1$ . Elementordnungssatz (ii)  $\implies \bar{1} = 1_g = \bar{x}^{\#G} = \bar{x}^{\varphi(m)} = x^{\varphi(m)} \iff 1 \equiv x^{\varphi(m)} \pmod{m}$

**Zum Satz von Fermat:**

$\varphi(p) = p - 1$ . Aussage klar, wenn  $p \mid x (x \equiv 0 \equiv xp)$ .  $p \nmid x \implies \text{ggT}(p, x) = 1 \implies \bar{x}^{p-1} = \bar{x}^{\#G} = \bar{1} \implies \bar{x}^p = \bar{x} \implies x^p \equiv x \pmod{p}$

**Beweis (Elementordnungssatz)**

Sei  $x \in G, \text{ord}(X) =: l$ .

- (1)  $x^m = x^n \iff x^{m-n} = 1 = 1_G \iff 1 = x^{ql+r} = (x^l)^q \cdot x^r = 1^q \cdot x^r = 1x^r = x^r$  (Falls  $r \neq 0$ , so haben wir einen Widerspruch zur Minimalwahl von  $l$ )  $\iff r = 0 \iff l \mid m - n \iff m \equiv n \pmod{l}$ .

Insbesondere:  $x^m = 1 \iff l \mid m, x^n = x^{n \bmod l}$

- (2)  $x^{\#G} = 1$ . Dies wird in dieser Vorlesung nur für kommutative  $G$  benötigt und bewiesen. Betrachte die Abbildung  $G \rightarrow G, x \mapsto y \cdot x$ . Sie ist bijektiv (die Umkehrabbildung ist  $y \mapsto yx^{-1}$ ), also  $\{y \mid y \in G\} = G = \{yx \mid y \in G\}$ .

$$\prod_{y \in G} y = \prod_{y, x \in G} (yx) = \prod_{y \in G} y \cdot x^{\#G} \implies x^{\#G} = 1$$

■

Also laut (1):  $\text{ord}(x) \mid \#G$

(3)  $\text{ord}(x^m) = k \implies 1 = (x^m)^k = x^{mk} \xrightarrow{(1)} l \mid mk$ . Sei  $d = \text{ggT}(m, l) \implies \frac{l}{d} \mid \frac{md}{d}k \implies \frac{l}{d} \mid k$ . Warum sind  $\frac{l}{d}$  und  $\frac{m}{d}$  relativ prim?  $d = \text{ggT}(m, l) = d \cdot \text{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{l}{d}) \implies \text{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{l}{d}) = 1$ . Aber  $k \mid \frac{l}{d}$  wegen  $(x^m)^{\frac{l}{d}} = x^{l \cdot \frac{m}{d}} = 1^{\frac{m}{d}} = 1$ ,  $k = \text{ord}(x^m)$  nach (1).

Ergebnis:  $k = \frac{l}{d} = \frac{\text{ord}(x)}{\text{ggT}(\text{ord}(x), m)}$

### Hilfestellungen zur Berechnung von $\text{ord}(x)$

#### Bemerkungen:

(i)  $\text{ord}(a) \mid \#G$  (wirklich  $a$ ?)

(ii) Sei  $x^d = 1$ . Dann gilt:  $d = \text{ord}(x) \iff \forall p \in \mathbb{P} \text{ mit } p \mid d: x^{\frac{d}{p}} \neq 1$ .

#### Beweis (Der Bemerkung (ii))

„ $\implies$ “: Klar

„ $\impliedby$ “: Sei  $x^d = 1$ ,  $x \neq \text{ord}(x)$ . Nach (1):  $\text{ord}(x) \mid d \implies \exists p \in \mathbb{P} : \text{ord}(x) \mid \frac{d}{p} \implies x^{\frac{d}{p}} = 1$  ■

Zur Berechnung von  $x^n$ : Naive rekursive Berechnung:  $x^{j+1} = x^j \cdot x$ . Hier hätten wir  $n$  Produkte zu berechnen! Westentlich bessere Methode: Stelle  $n$  binär da:  $n = \sum_{i=0}^t c_i \cdot 2^i$ ,  $c_t \neq 0$ ,  $c_i \in \{0, 1\}$ . Bezeichnung  $n = (c_t, c_{t-1}, \dots, c_0)_2$  mit den Binärziffern  $c_j$ .

$$x^n = x^{\sum_{i=0}^t c_i \cdot 2^i} = \prod_{i=0}^t \left(x^{2^i}\right)^{c_i} = \prod_{i=0, c_i \neq 0}^t x^{(2^i)}$$

Rekursiv:  $x^{2^0} = x^1 = x$  und  $x^{2^{i+1}} = (x^{2^i})^2$ .  $t$  ist etwa  $\log_2 n$ , man hat ungefähr  $2 \cdot \log_2 n$  Produkte zu berechnen.

#### Beispiel

$G = \mathbb{F}_9^\times$ ,  $\#G = 9 - 1 = 8$ . Mögliche  $\text{ord}(\alpha)$  für ein  $\alpha \in G$ : 1, 2, 4, oder 8.

$$\text{ord}(\alpha) = 1 \iff \alpha = 1$$

$$\text{ord}(\alpha) = 2 \iff \alpha \neq 1, \alpha^2 = 1 \iff \alpha = -1_G = -1$$

$$\text{ord}(\alpha) = 4 \iff \alpha^4 = 1, \alpha^2 \neq 1 \text{ (d.h. } \alpha \neq \pm 1)$$

$$\text{ord}(\alpha) = 8 \iff \alpha^4 \neq 1$$

$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/m \cdot \mathbb{F}_3[X]$ ,  $\text{ord}(m) = 2$ ,  $m$  irreduzibel. Beispielsweise ist  $X^2 + 1$  in  $R = \mathbb{F}_3[X]$  irreduzibel.

$\mathbb{F}_9$  hat  $\mathbb{F}_3$ -Basis  $1; \bar{x}$ .  $\mathbb{F}_9 = \underbrace{\{0, 1, -1, \dots\}}_{\mathbb{F}_3 = \text{Versys}_3} = \{a + b\bar{x} \mid a, b \in \mathbb{F}_3\}$

$$m = X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m} \implies X^2 \equiv -1 \pmod{m} \implies \bar{X}^2 = -1 = -1_{\mathbb{F}_9} = -1_{\mathbb{F}_3} \implies \bar{X}^4 = (-1)^2 = 1 \implies \text{ord}(\bar{X}) = 4.$$

$$(\bar{X} + 1)^2 = \bar{X}^2 + 2\bar{X} + 1 = -1 + 1 + 2\bar{X} = -\bar{X} \neq 1, (\bar{X} + 1)^4 = (-\bar{X})^2 = \bar{X}^2 = -1 \implies \text{ord}(\bar{X} + 1) = 8$$

Zurück zum Problem  $3^{(10^{500})} \bmod 167$ ,  $167 \in \mathbb{P}$ .  $G = \mathbb{F}_{167}$ ,  $\#G = \varphi(167) = 166 = 2 \cdot 83$ , also gilt  $\text{ord}(n) \in \{1, 2, 83, 166\}$ .

Laut Satzungssatz:  $3^{10^{500}} \equiv 3^{10^{500} \bmod \text{ord}(\bar{3})}$ .

Wir brauchen  $\text{ord}(3)$ :  $\bar{3}^2 = \bar{9} \neq 1_G \implies \text{ord}(\bar{3}) \neq 1, 2$ ,  $\text{ord}(\bar{3}) = 83 \iff \bar{3}^{83} = 1_G = \bar{1}$ .  $83 = (1010011)_2 = 64 + 16 + 2 + 1$ . Tabelle:  $3^{2^0}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist 3,  $3^{2^1}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $3^2 = 9$ ,  $3^{2^2}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $9^2 = 81$ ,  $3^{2^3}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $81^2 = 6651 = 30 \cdot 167 + 48 \equiv 48$ ,  $3^{2^4}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $48^2 \equiv 133$ ,  $3^{2^5}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $133^2 = 17629 \equiv 154$ ,  $3^{2^6}$  in  $\mathbb{F}_{167}$  ist  $154^2 \equiv 2$ . Also:  $\bar{3}^{83} = \bar{3} \cdot \bar{9} \cdot \bar{133} \cdot \bar{2} \cdot \bar{7182} \cdot \bar{1} = 1_G$ . Ergebnis:  $\text{ord}(\bar{3}) = 83$ .

$3^{10^{500}} = 3^{10^{500} \bmod 83}$ . Noch zu berechnen:  $10^{500} \bmod 83$ . Man kann  $\bar{10}$  in  $\mathbb{F}_{83}$  berechnen. Reicht auch  $\bar{10}^{500} = 10^{500 \bmod \varphi(83)}$ .  $\varphi(83) = 82$ ,  $500 \equiv 8 \bmod 82 \implies 10^{500} \equiv 10^8 \equiv 23 \bmod 83$

Also:  $\bar{3}^{10^{500}} = \bar{3}^{23} = \bar{124} = \bar{-33}$  und somit  $3^{10^{500}} = 124 \bmod 167$

### Satz 3.7 (Mersenne-Teiler-Satz)

Es seien  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $q \mid M_p = 2^p - 1$ . Dann gilt:  $q \equiv 1 \bmod p$

#### Beweis

$q \mid M_p \iff M_p = 2^p - 1 \equiv 0 \bmod q \iff \bar{2}^p = 1$  in  $\mathbb{F}_q^\times = G \implies \text{ord}(\bar{2}) = p$ , da 1 nicht geht und  $\text{ord}(\bar{2}) \mid p$  nach dem Satzungssatz.  $\text{ord}(\bar{2}) \mid \#G = \varphi(q) = q - 1 \implies q - 1 \equiv 0 \bmod p \implies q \equiv 1 \bmod p$  ■

#### Bezeichnungen:

(1)  $\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{l-1}\}$ , ( $l = \text{ord}(x)$ ), heißt die von  $x$  erzeugte zyklische Untergruppe von  $G$ .

(2)  $G$  heißt zyklisch  $\iff \exists x \in G : G = \langle x \rangle \iff \exists x \in G : \text{ord}(x) = \#G$

**Bemerkung:** Die Abbildung  $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}l, +) \rightarrow (\langle x \rangle, \cdot)$  mit  $\bar{m} \mapsto x^m$  ist ein Isomorphismus von Gruppen.

## 3.2 Primitivwurzeln

Vorbereitungen über  $R = K[X]$ ,  $K$  ein Körper.

**Bemerkung:** Sei  $\alpha \in K$ ,  $f \in R$ ,  $\text{ord}(f) > 0$ . Dann gilt:

$$0 = f(\alpha) \iff X - \alpha \mid f \iff v_{X-\alpha}(f) > 0 \quad (X - \alpha \in \mathbb{P}_R)$$

$v_{X-\alpha}$  heißt Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha$  von  $f$ .

#### Beweis

Division mit Rest:  $f = q \cdot (X - \alpha) + r$ .  $\text{grad } r < \text{grad}(X - \alpha) = 1 \implies r \in K$  (konstantes Polynom), insbesondere  $r(\alpha) = r$ .  $f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = r$ . Also:  $r(\alpha) = 0 \iff r = 0 \iff X - \alpha \mid f$  ■



**Satz 3.8 (Nullstellenanzahls-Satz)**

$f \in K[X]$ ,  $f \neq 0$ ,  $n = \text{grad } f$ , so gilt:  $f$  hat höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen in  $K$ .

**Beweis**

$\alpha_1, \dots, \alpha_l$  seien  $l$  Nullstellen.  $v_{X-\alpha_j}(f) > 0 \implies \prod_{j=1}^l (X-\alpha_j) \mid f$ , wegen  $v_{X-\alpha_i}(\prod_{j=1}^l (X-\alpha_j)) = 1$  und  $v_m(\prod_{j=1}^l (X-\alpha_j)) = 0$  für alle anderen  $m \in \mathbb{P}$  sowie  $v_{X-\alpha_j}(f) \geq 1$ . Daraus folgt:  $l \leq \text{grad } f$  ■

Der Spezialfall  $K = \mathbb{F}_p$  ergibt den

**Satz 3.9 (Satz von Lagrange)**

Sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $f = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ . Es gibt ein  $j \in \{0, \dots, n\}$  mit  $c_j \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Dann fallen die „Lösungen“  $x \in \mathbb{Z}$  der Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

in höchstens  $n$  verschiedene Restklassen modulo  $p$ .

**Beweis**

Der Satz ist eine Übersetzung des Nullstellenanzahls-Satzes auf Kongruenzen. Betrachte die  $\overline{c_j} = \alpha_j \in \mathbb{F}_p \implies \exists j : \overline{c_j} \neq 0 \implies f = \sum_{i=0}^n \overline{c_i} X^i \neq 0$  in  $\mathbb{F}_p[X]$ ,  $\text{ord}(f) \leq n$ .  $f(x) = 0 \pmod{p} \iff \overline{f(x)} = f(\overline{x}) = 0_{\mathbb{F}_p}$ . Es gibt höchstens  $n$  Nullstellen  $\overline{x}$ , das heißt lösende Kongruenzklassen. ■

$p \in \mathbb{P}$  wird gebraucht, Aussage modulo  $m$ ,  $m \notin \mathbb{P}$ , im Allgemeinen falsch. Beispiele:  $m = 6$ ,  $f = X^2 + X$  hat in  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  die Nullstellen  $\overline{0}$ ,  $\overline{2}$ ,  $\overline{3}$ ,  $\overline{5}$ .  $m = 9$ ,  $f = X^2$  hat in  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  die Nullstellen  $\overline{0}$ ,  $\overline{3}$ ,  $\overline{-3}$ .

**Satz 3.10 (Primitivwurzelsatz)**

Sei  $K$  Körper,  $G$  eine *endliche* Untergruppe von  $K^\times$ . Dann ist  $G$  zyklisch. Genauer gilt:  $\#\{\alpha \in K \mid \text{ord}(\alpha) = \#G\} = \varphi(\#G)$  ( $\varphi$  die Eulersche Funktion)

**Bemerkung:** Ist  $\text{ord}(\alpha) = \#G$ , so heißt  $\alpha$  primitive  $\#G$ -te Einheitswurzel, da  $\alpha^{\#G} = 1$ , sozusagen  $\alpha = \sqrt[\#G]{1}$ . primitiv, da  $\alpha^m = 1$ , wobei  $\#G \mid m$ .

**Spezialfälle**

- (1)  $K = \mathbb{F}_q$ , also ein Körper mit  $q < \infty$  Elementen.  $G = \mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ ,  $\#G = q - 1$ . Nach dem Satz ist  $\mathbb{F}_q^\times$  zyklisch  $\alpha$  mit  $\langle \alpha \rangle = \mathbb{F}_q^\times$  heißt primitives Element.

- (2) Noch spezieller:  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $p \in \mathbb{P}$  besitzt  $\varphi(p-1)$  primitive Elemente  $\alpha = \bar{w}$ , ( $0 \leq w < p-1$ ). Solve  $w$  heißen Primitivwurzel modulo  $p$ .

### Beweis

Sei  $l = \#G$ ,  $G$  wie im Satz.

Für die  $d \mid l$ ,  $d \in \mathbb{N}_+$ , sei  $\lambda(d) = \#\{\alpha \in G \mid \text{ord}(\alpha) = d\}$ . Laut Elementordnungssatz gilt:  $l = \sum_{d \mid l} \lambda(d) = \sum_{d \mid l} \varphi(d)$  (Lemma von Gauß). Man will zeigen:  $\lambda(d) \leq \varphi(d)$  (\*), denn dann muss gelten:  $\forall d \mid l: \lambda(d) = \varphi(d)$ , denn sonst würde gelten:  $\sum_{d \mid l} \lambda(d) < \sum_{d \mid l} \varphi(d)$ .

(\*) ist klar, wenn  $\lambda(d) = 0$ . Sei also  $\lambda(d) \neq 0 \implies \exists \alpha \in G: \text{ord}(\alpha) = d$ . Sei  $A = \langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{d-1}\}$ . Klar:  $(\alpha^d)^d = 1 \implies \alpha^j$  ist eine Nullstelle von  $X^d - 1$ . Wegen  $\#A = d$  sind das  $d$  Nullstellen von  $X^d - 1$ , also alle solche.  $B = \{\beta \in G \mid \text{ord}(\beta) = d\}$ , dann  $\beta^d = 1 \implies \beta$  Nullstelle von  $X^d - 1 \implies \beta \in A$ .  $B \subseteq A$ .

$\alpha^j \in B \iff \text{ord}(\alpha^j) = d \implies d = \text{ord}(\alpha^j) = \frac{\text{ord}(\alpha)}{\text{ggT}(d, j)} \text{ (Elementordnungssatz)} \implies \text{ggT}(d, j) = 1 \implies B \subseteq \{\alpha^j \mid \text{ggT}(d, j) = 1, 0 \leq j \leq d\}$ .  $\#B = \lambda(d) \leq \#\{\alpha^j \mid \text{ggT}(d, j) = 1, 0 \leq j \leq d\} = \varphi(d)$

Der folgende Satz ist eine Anwendung des Primitivwurzelsatzes:

### Satz 3.11 (Eulers Quadratkriterium)

Sei  $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$  ( $\mathbb{F}_q$  ein Körper mit  $q$  Elementen,  $2 \mid q$ ). Dann gilt:

$$\alpha \text{ ist ein Quadrat in } \mathbb{F}_q^\times \iff \alpha^{\frac{q-1}{2}} = 1$$

Anderenfalls gilt:  $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = -1$

Euler formuliert den Satz so: Sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p > 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $p \mid m$ . Dann existiert ein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $x^2 \equiv m \pmod{p} \iff m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ . Solche  $m \pmod{p}$  heißen quadratische Reste.

Wenn Kongruenz als Gleichung in  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  gelesen wird, so gilt:

$$\alpha = \bar{x} \text{ Quadrat in } \mathbb{F}_p^\times \iff x \text{ quadratischer Rest modulo } p$$

### Beweis

Sei  $\zeta$  eine Primitivwurzel (Existenz folgt aus dem Primitivwurzelsatz).

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = 1$  und  $\alpha = \zeta^j$ .  $\zeta^{j \cdot \frac{q-1}{2}} = 1 \implies q-1 = \text{ord}(\zeta) \mid j \cdot \frac{q-1}{2} \implies \frac{j}{2} \in \mathbb{Z} \implies 2 \mid j \implies \beta = \zeta^{\frac{j}{2}}$  zeigt den Satz:  $\beta^2 = \zeta^j = \alpha$

„ $\Rightarrow$ “:  $\alpha$  Quadrat  $\iff \exists \beta \in \mathbb{F}_q: \alpha = \beta^2 \implies \exists k \in \mathbb{Z}: \beta = \zeta^k$ .  $\alpha = \zeta^{2k} \implies \alpha^{\frac{q-1}{2}} = \zeta^{(q-1)k} = 1$ , da  $\text{ord}(\zeta) = q-1$

$\alpha^{\frac{q-1}{2}}$  ist Nullstelle von  $X^2 - 1$ . Alle Nullstellen sind  $\{1, -1\}$ . 1 entfällt, also ist  $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = -1$  ■

Eulers Formulierung „ $m$  nicht quadratischer Rest“, auch „quadratischer Nichtrest“.  $\text{ggT}(m, p) = 1 \implies m^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

### 3.3 Zifferndarstellung nach Cantor

In diesem Abschnitt seien  $R = \mathbb{Z}$  oder  $R = K[X]$ ,  $K$  ein Körper.

Ausgangspunkt ist die Folge  $\gamma = (m_0, m_1, m_2, \dots)$ ,  $m_j \in R$  mit  $m_j > 1$  bei  $R = \mathbb{Z}$  oder  $\text{grad}(m_j) > 0$  bei  $R = K[X]$ .

Definiere  $M_0 = 1$ ,  $M_k = m_0 \cdot \dots \cdot m_{k-1}$ .

**Satz 3.12 (Ziffersatz)**

Jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  bzw.  $n \in K[X]$ ,  $n \neq 0$  hat eine eindeutige Darstellung

$$n = z_r M_r + z_{r-1} M_{r-1} + \dots + z_1 M_1 + z_0 \quad (*)$$

wobei  $r \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq z_j < m_j$  bzw.  $\text{grad}(z_j) < \text{grad}(m_j)$

**Bezeichnungen:** Die  $z_j$  heißen  $\gamma$ -adische Ziffern und  $(*)$  Zifferndarstellung (vorlesungs-spezifisch). Kurzbezeichnung:  $n = (z_r, z_{r-1}, \dots, z_0)_\gamma$ . Die Kommata dürfen bei Eindeutigkeit weggelassen werden.

Spezialfall:  $m_0 = m_1 = m_2 = \dots =: m$  gibt Zifferndarstellung  $n = z_r m^r + z_{r-1} m^{r-1} + \dots + z_0 = (z_r, \dots, z_0)_m$  heißt  $m$ -adische Darstellung von  $n$ .

Spezialbenennungen:

$m$	Zifferndarstellung	Ziffern	
10	Dezimaldarstellung	0,1,...,9	bei Menschen beliebt (10 Finger)
2	Binär oder dyadisch	0,1	bei Computern beliebt (0,1 gut realisierbar)
8	Oktalдарstellung	0,...,7	
16	Hexadezimal	0,...,9,A,B,C,D,E,F	Speicherverwaltung im Rechner

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
 (A8C)_{16} &= 10 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 1 \\
 &= 2700 := (2700)_{10} \\
 &= (10101001100)_2 \\
 &= (5214)_8
 \end{aligned}$$

$\gamma = (m_0, m_1, \dots)$ ,  $m_j \in \mathbb{Z}$  (bzw.  $K[X]$ ),  $m_j > 1$  bzw.  $\text{Grad } m_j > 0$   
 $M_0 = 1$ ,  $M_k = m_0 \cdot \dots \cdot m_{k-1}$

$\gamma$ -adische Entwicklung von  $n \in \mathbb{N}_+$  bzw.  $n \in K[X]$ ,  $n \neq 0$ :

$$n = z_r M_r + z_{r-1} M_{r-1} + \dots + z_1 M_1 + z_0 \cdot 1 \quad (3.1)$$

$\gamma$ -adische Darstellung, wenn  $0 \leq z_j < m_j$  (bzw.  $\text{Grad } z_j < \text{Grad } m_j$ )

### Beweis (Ziffersatz)

Fall (3.1) vorliegt: Wegen  $M_k | M_{k+1} | M_{k+2} | \dots$  :

$$n \equiv z_{k-1}M_{k-1} + z_{k-2}M_{k-2} + \dots + z_0 \pmod{M_k}$$

Speziell:  $n \equiv z_0 \pmod{M_1 = m_0} \implies n - z_0 = n'm_0, n' \in \mathbb{Z}$  bzw.  $K[X]$

Beweisidee: Induktion nach  $n$  bzw. Grad  $n$  (hier nur  $\mathbb{Z}, K[X]$  fast genau so)

Behauptung: Sei  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Dann existiert für alle  $\gamma$ 's dieser Art die  $\gamma$ -dische Darstellung (3.1).

Induktion nach  $n$ :

Falls  $n < m_0$ , dann  $z_0 = n, n = z_0M_0$  ist ( $\star$ )

Falls  $n \geq m_0$ ,  $z_0 = (n \bmod m_0), n'$  aus  $n - z_0 = n'm_0 (n' = \frac{n-z_0}{m_0})$ . Klar  $0 \leq z_0 < m_0 \leq n \implies 0 < n' < n$ .

Induktionshypothese anwendbar auf  $n'$  mit  $\gamma' = (m'_1, m'_2, \dots), m'_j = m_{j+1} (j \geq 0)$ .

$\exists \gamma'$ -adische Darstellung von  $n'$ :

$$n' = z'_{r'}M'_{r'} + z'_{r'-1}M'_{r'-1} + \dots + z'_1M'_1 + z'_0 (r' \in \mathbb{N}, z'_{r'} \neq 0)$$

$$n \leq z'_j < m'_j = m_{j+1} \implies n = n'm_0 + z_0 = z'_{r'}M_{r'+1} + \dots + z'_1M_1 + z_0$$

Das ist die gesuchte  $\gamma'$ -adische Darstellung von  $n$  mit  $r := r' + 1, z'_j = z_j + 1 (j = 0, \dots, r')$  also

$$0 \leq z_{j+1} = z_j < m'_j = m_{j+1}$$

Dies ist ein Algorithmus, wenn die Abbildung  $j \mapsto m_j$  berechenbar ist.

Eindeutigkeit: Ebenfalls Induktion.  $z_0$  muss  $n \bmod m_0$  sein. Induktionshypothese  $n'$  eindeutig dargestellt  $\implies$  Darstellung von  $n$  eindeutig (Details: selbst!) ■

Bemerkung: Zur Berechnung von  $(n_1 + / \cdot n_2)_\gamma$  aus  $(n_1)_\gamma$  und  $(n_2)_\gamma$  ähnliche Algorithmen wie für  $()_{10}$ .

## 3.4 Simultane Kongruenzen

### 3.4.1 Prinzip des Parallelen Rechnens

$R_j (j = 1, \dots, l)$  seien algebraische Strukturen gleicher Art mit gleichbezeichneten Verknüpfungen  $*$ , zum Beispiel:

Gruppen  $* \in \{\cdot\}$

Abelsche Gruppen  $* \in \{+\}$

Ringe  $* \in \{+, \cdot\}$

Vektorräume  $* \in \{+, \text{Skalarmultiplikation}\}$

Dann ist auch  $S = \prod_{i=1}^l R_j = R_1 \times \dots \times R_l$  eine algebraische Struktur mit Verknüpfungen (komponentenweise):

$$S \ni (a_1, \dots, a_l), (b_1, \dots, b_l), a_j, b_j \in R_j$$

$$(a_1, \dots, a_l) * (b_1, \dots, b_l) := (a_1 * b_1, \dots, a_l * b_l)$$

$$\alpha(a_1, \dots, a_l) := (\alpha a_1, \dots, \alpha a_l) \text{ bei K-Vektorräumen.}$$

Sind  $j$  Ringe/Gruppen/Abelsche Gruppen/Vektorräume, so auch  $S$ .

Grund: Alles vererbt sich von den Komponenten!

Zum Beispiel Ringe:  $0_S = (0_{R_1}, \dots, 0_{R_l}), 1_S = (1_{R_1}, \dots, 1_{R_l})$ , kurz:  $0 = (0, \dots, 0), 1 = (1, \dots, 1)$ ,  
 $-(a_1, \dots, a_l) = (-a_1, \dots, -a_l)$

Zum Beispiel Assoziativität:

$$((a_1, \dots, a_l) * (b_1, \dots, b_l)) * (c_1, \dots, c_l) = ((a_1 * b_1) * c_1, \dots, (a_l * b_l) * c_l) = (a_1, \dots, a_l) * ((b_1, \dots, b_l) * (c_1, \dots, c_l))$$

**Warnung!** Sind die  $R_j$  Körper, so ist für  $l > 1$ ,  $S$  kein Körper.

Zum Beispiel:  $\underbrace{(1, 0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\neq 0} = (1 \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0, 0) = 0$

### Lemma 3.13

Sind die  $R_j$  Ringe, so  $S^\times = \prod_{j=1}^l R_j^\times$

Grund: Muss sein  $(a_1, \dots, a_l)^{-1} = (a_1^{-1}, \dots, a_l^{-1})$

Falls ein Isomorphismus  $\psi : R \rightarrow S = \prod_{j=1}^l R_j$  vorliegt, so wird das Rechnen in  $R$  zurückgeführt auf das gleichzeitig („parallele“) Rechnen in dem  $R_j$  wie folgt:

$$\psi(a) = (a_1, \dots, a_l), \psi(b) = (b_1, \dots, b_l)$$

$$a * b = \psi^{-1}(\psi(a * b)) = \psi^{-1}(\psi(a) * \psi(b)) = \psi^{-1}((a_1 * b_1, \dots, a_l * b_l))$$

Praxis: Berechne die  $a_j * b_j$  gleichzeitig auf verschiedenen Prozessoren. Wende  $\psi, \psi^{-1}$  wie oben an. Nützt nur, wenn  $\psi, \psi^{-1}$  gut und schnell berechenbar sind.

### 3.4.2 Der Chinesische Restsatz

Frage: Morgen ist Freitag, der 2. Juni. Nach wievielen ( $x = ?$ ) Tagen fällt frühestens der Dienstag auf einen 17. des Monats?

Vorraussetzung: Chinesische Kalender vor ca. 2000 Jahren: Alle Monate haben 20 Tage.

Wochentag	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Wochentagsnr.	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2
Monatstagnr.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

(Wochentagsnummer modulo 7, Monatstagnummer modulo 30)

Gesucht ist also die kleinste positive Lösung  $x$  der Kongruenzen:

$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$x \equiv 17 - 2 \pmod{30}$$

$R$  sei euklidischer Ring,  $a_1, \dots, a_l, m_1, \dots, m_l \in R$

$$x \equiv a_j \pmod{m_j}, \quad (j = 1, \dots, l) \quad (3.2)$$

heißt *System simultaner Kongruenzen* (mit gesuchter Lösung  $x \in R$ ).

**Bemerkung:** Im Allgemeinen gibt es *keine* Lösung.

$$x \equiv a \pmod{m} \implies x \equiv a \pmod{m}, \text{ falls } d \mid m$$

$$\text{System: } x \equiv 1 \pmod{4}, x \equiv 0 \pmod{6} \implies x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 0 \pmod{2} \implies 1 \equiv 0 \pmod{2} \implies \text{Widerspruch!}$$

**Satz 3.14 (Chinesischer Restsatz, rechnerische Form)**

Sei  $R$  ein euklidischer Ring,  $m_1, \dots, m_l \in R$ ,  $a_1, \dots, a_l \in R$  derartig, dass  $\forall i, j \in \mathbb{Z}$  mit  $1 \leq i < j \leq l$  gilt:

$$\text{ggT}(m_i, m_j) = 1 \text{ („paarweise relativ prime } m_j\text{“)}$$

Dann hat das System simultaner Kongruenzen (3.2) eine Lösung. Sämtliche Lösungen bilden eine Restklasse modulo  $m$  mit  $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_l$

**Beweis**

$$l = 1: x = a_1 \text{ oder } x = (a_1 \pmod{m_1}) \iff (x \equiv a_1) \pmod{m_1} \text{ und } 0 \leq x \leq m_1$$

$$l = 2: x \equiv a_1 \pmod{m_1}. x \text{ muss in der Form } x = a_1 + um_1, u \in R \text{ angesetzt werden.}$$

*Idee:* Bestimme  $u$  so, dass  $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ . Also in  $\bar{R} = R/m_2R$  soll werden:

$$\bar{a}_1 + \bar{u}\bar{m}_1 = \bar{a}_1 + \bar{u}\bar{m}_1 = \bar{a}_2, \text{ daher tut es: } \bar{u} = (\bar{a}_2 - \bar{a}_1)\bar{m}_1^{-1}$$

Geht, da  $\bar{m}_1^{-1}$  existiert und da  $\bar{m}_1 \in (R/m_2R)^\times$ . Nach dem Restklassensatz:  $\bar{m}_1 \in (R/m_2R)^\times \iff \text{ggT}(m_1, m_2) = 1$

Algorithmisch  $\bar{u} = \bar{m}_1^{-1}$ ,  $u$  kann mit LinKom-Satz, also euklidischem Algorithmus, bestimmt werden. *Erinnerung:*  $\text{ggT}(m_1, m_2) = um_1 + vm_2$ ,  $u, v$  berechnet der Algorithmus.

$$1 = \bar{u}\bar{m}_1, \bar{m}_2 = 0, \bar{u} = \bar{m}_1^{-1}$$

Für dieses  $u \in R$  ist  $x = a_1 + um_1$  (eventuell  $\pmod{m, m_2}$ ) die gesuchte Lösung.

$$l > 2: \text{Induktionshypothese löst } x' \equiv a_j \pmod{m_j} (j = 1, \dots, l-1).$$

$$\text{Löse dann } x \equiv x' \pmod{m_1 \cdot \dots \cdot m_{l-1}} \implies x \equiv x' \equiv a_j \pmod{m_j}, j = 1, \dots, l-1 \implies x \equiv a_l \pmod{m_l} \implies x \text{ ist die gesuchte Lösung.} \blacksquare$$

**Beispiel**

Gegeben sind die Kongruenzen:

$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$x \equiv 19 \pmod{30}$$

Ansatz:  $x = 4 + u \cdot 7 \equiv 19 \pmod{30}$ . Im  $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ :  $\bar{4} + \bar{u} \cdot \bar{7} = \bar{19} \implies \bar{u} = (\bar{19} - \bar{4})^{-1} \cdot \bar{7}^{-1}$ . Es ist  $\bar{7}^{-1} = \bar{13}$ , also  $u \equiv 13 \cdot 15$ , etwa  $x = 4 + 13 \cdot 15 \cdot 7 \equiv 109 \pmod{210}$ .

Wir fügen eine Bedingung hinzu:  $x \equiv 1 \pmod{77}$ . So ist nun zu lösen:

$$x \equiv 109 \pmod{30}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

Es ist  $\bar{210}^{-1} = \bar{1}$  im  $\mathbb{F}_{11}$ , also  $x = 109 + 2 \cdot 210 \equiv 529 \pmod{11 \cdot 3 \cdot 7}$

**Bemerkung (zur Praxis):** Das System  $x \equiv x_i \pmod{m_i}$ , ( $i = 0, \dots, l$ ). Der Beweis liefert eine  $\gamma$ -adische Darstellung von  $x$  und  $m = y \gamma = (m_0, \dots, m_l)$  wie folgt:  $y = z_{l-1}M_{l-1} + \dots + z_0$ . Die  $z_i$  sind rekursiv aus  $z_0 = x_0 \pmod{m_0}$ ,  $y' \equiv x'_i \pmod{m_j}$ , ( $i = 1, \dots, l$ ). Also  $y' = \frac{x-z_0}{m_0}$ ,  $x'_i = (x_i - z_0)u_{i0} \pmod{m_j}$ .  $\overline{u_{i0}} = \overline{m_0^{-1}}$  in  $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ .  $x'_i$  in  $\gamma'$ -adischer Darstellung nach Induktions-Voraussetzung ( $\gamma' = (m_1, \dots, m_l)$ ).

Empfehlung zur Praxis, vor allem wenn viele Kongruenzen zu den selben  $m_i$  zu lösen sind:

- (1) Berechne die  $u_{ij}$  nur einmal.
- (2) Belasse die Ergebnisse  $m$  in der Form  $x = (z_{l-1}, \dots, z_0)_\gamma$

Zum parallelen Rechnen: Seien  $R, m_1, \dots, m_l$  wie im chinesischen Restsatz. Betrachte die Abbildung

$$R/mR \rightarrow \prod_{j=1}^l (R/m_j R)$$

$$\psi : x + mR \mapsto (\dots, x + m_j R, \dots)$$

$\psi$  ist wohldefiniert:  $x + mR = x' + mR \iff x \equiv x' \pmod{m} \iff x \equiv x' \pmod{m_j}$  und ein Ringhomomorphismus (leicht zu sehen).

Wir beobachten: Ist  $\psi : A \rightarrow B$  eine Abbildung, so gilt, dass  $\psi$  injektiv genau dann ist wenn die Gleichung  $\psi(x) = b$  höchstens eine Lösung  $x$  hat. Surjektivität heißt analog, dass jede Gleichung  $\psi(x) = b$  mindestens eine Lösung  $x$  hat.  $\psi$  bijektiv ist dann gleichbedeutend damit, dass  $\psi(x) = b$  genau eine Lösung hat.

Für obiges  $\psi$  gilt:  $b = (\dots, a_j + m_j R, \dots)$ .  $\psi(x + m_j R) = b: (\dots, x + m_j R, \dots) = (\dots, a_j + m_j R, \dots) = b$ .  $x + mR$  Urbild von  $b \iff \forall j : x + m_j R = a_j + m_j R \iff \forall j : x \equiv a_j \pmod{m_j}$ . Also:

- $\psi$  surjektiv  $\iff \forall b \exists \text{Lösung } x \equiv a_j \pmod{m_j}$
- $\psi$  injektiv  $\iff \text{Lösung } x \text{ ist eindeutig modulo } m$

Ergebnis: Der chinesische Restsatz wie oben ist gleichbedeutend mit:

**Satz 3.15 (Theorem B, Chinesischer Restsatz, theoretische Form)**

$R$  ein euklidischer Ring,  $m_1, \dots, m_l \in R$ ,  $\text{ggT}(m_i, m_j) = 1$  für  $i \neq j$ . Dann hat man den Ringisomorphismus:

$$R/mR \rightarrow \prod_{j=1}^l (R/m_j R)$$

$$\psi : x + mR \mapsto (\dots, x + m_j R, \dots)$$

**Bemerkung (Zur Praxis):**  $\psi^{-1}$  wird gegeben durch lösen simultaner Kongruenzen. „Komponentenweises Rechnen: Rechnen im  $R/mR$  ersetzt durch paralleles Rechnen in den  $R/m_j R$ “

**Bemerkung (Theoretische Anwendung):** Voraussetzungen wie im Satz. Die Einheitengruppe  $(R/mR)^\times$  ist isomorph durch  $\psi$  zu  $\prod_{j=1}^l (R/m_j R)^\times$ . Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so gilt  $\varphi(m) = \prod_{j=1}^l \varphi(m_j)$ , also ein neuer Beweis für die Multiplikativität von  $\varphi$ .

## 3.5 Ausgewählte Anwendungen von Kongruenzen

### 3.5.1 Diophantische Gleichungen

Sei  $0 \neq f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  (Polynom mit  $n$  Unbekannten und Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$ ),  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung der Form  $f(x) = 0$ ,  $f$  wie oben, mit einer „Lösung  $x$ “.

Der Wunsch hier ist: Man finde möglichst viel Informationen über die Menge  $\mathcal{V}_f(\mathbb{Z}) := \{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) = 0\}$  aller ganzzahligen Lösungen.

Das Problem ist oft extrem schwierig. Zum Beispiel die diophantischen Gleichungen  $x^n + y^n + z^n = 0$ ,  $x = (x, y, z)$ , auch bekannt als das Fermatproblem.

Information für Logik-Freunde: Das 10. Hilbertsche Problem (Paris 1900):

Man finde einen Algorithmus, der zu gegebenem  $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  entscheidet, ob  $\mathcal{V}_f(\mathbb{Z}) = \emptyset$  oder  $\mathcal{V}_f(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$  ist.

Satz von Julia Robinson (1910-85), J. Matjasevič: Es gibt keinen solchen Algorithmus!

Triviale, aber wichtige Methode:  $f(x) = 0$  hat Lösung  $x \in \mathbb{Z}^n \implies f(x) = 0$  hat Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  (Analysis) und  $\forall m \in \mathbb{Z} : f(x) \equiv 0 \pmod m$  lösbar  $\iff \forall t \in \mathbb{N}_+ \forall p \in \mathbb{P} : f(x) \equiv 0 \pmod{p^t}$  lösbar. Die Folgerung ist, dass falls für ein  $m \in \mathbb{N}_+$  gilt, dass für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $0 \leq x_j < m_j$  gilt:  $f(x) \not\equiv 0 \pmod m$ , so gilt  $\mathcal{V}_f(\mathbb{Z}) = \emptyset$ , es gibt also keine Lösung.

#### Beispiel

$f = X_1^2 + X_2^2 - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , diophantische Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = k$ . Unlösbar für  $k < 0$  (da keine Lösung in  $\mathbb{R}^2$ ). Nur interessant:  $k > 0$ .

Betrachtung modulo 4:

$$0^2 = 0, (\pm 1)^2 = 1, (\pm 2)^2 = 0 \implies (x_1^2 + x_2^2) \bmod 4 = \begin{cases} 0 + 0 \\ 0 + 1 \\ 1 + 1 \end{cases} \in \{0, 1, 2\}.$$

Für  $k \equiv 3 \pmod 4$  hat  $x_1^2 + x_2^2 = k$  also keine ganzzahlige Lösung!

Es kann eine Primzahl  $p \neq 2$  nur dann Summe zweier Quadrate sein, wenn  $p \equiv 1 \pmod 4$  ist. Hier gilt auch die Umkehrung, Beweis folgt eventuell später.

#### Beispiel

$f = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - k$ , also  $x^2 + y^2 + z^2 = k$ . Modulo 4 führt hier zu keiner Aussage. Wie betrachten modulo 8:  $0^2 = 0, (\pm 1)^2 = 1, (\pm 2)^2 = 4, (\pm 3)^2 = 1, (\pm 4)^2 = 0$ . Also gilt:



$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \bmod 8 = \begin{cases} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 1 + 0 \\ 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \\ 0 + 4 + 0 \\ \vdots \end{cases} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ergebnis: Für  $k < 0$  oder  $k \equiv 7 \pmod{8}$  hat die Diophantische Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k$  keine Lösung.

Zur Information, nach Gauß: Die Umkehrung gilt auch für ungerade  $k$ .

Satz von Lagrange:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) hat immer Lösungen.

Gelegentlich erlangt man Ergebnisse auch über andere Gleichungen:

### Beispiel

Gesucht sind Lösungen von  $9^x + x^3 = k$  mit  $x \in \mathbb{N}_+$ .

Betrachtung modulo 9:  $9^x \equiv 0 \pmod{9}$ .  $0^3 = 0$ ,  $(\pm 1)^3 = \pm 1$ ,  $(\pm 2)^3 = \mp 1$ ,  $(\pm 3)^3 = 0$ ,  $(\pm 4)^3 = \pm 1 \implies x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$ . Ergebnis: Für  $k \equiv 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod{9}$  hat die Gleichung keine Lösung in  $x \in \mathbb{Z}$ .

## 3.5.2 Interpolation

Hier sei  $R = K[X] \ni f, \alpha, \beta \in K$ :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \beta &\iff (f - \beta)(\alpha) = 0 \\ &\iff (X - \alpha) \mid f - \beta \\ &\iff f \equiv \beta \pmod{(X - \alpha)} \end{aligned}$$

Das System  $f \equiv \beta_j \pmod{(X - \alpha_j)}$  ( $j = 0, \dots, n$ )  $\iff \forall j = 0, \dots, n : f(\alpha_j) = \beta_j$  (Voraussetzung  $\alpha_i \neq \alpha_j$  für  $i \neq j$ , d.h.  $\text{ggT}(X - \alpha_i, X - \alpha_j) \neq 0$ ).

Der Chinesische Restsatz ergibt nun: Zu gegebenen  $n + 1$  Punkten  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$  ( $\alpha_i \neq \alpha_j$ ) und Punkten  $\beta_0, \dots, \beta_n \in K$  gibt es genau ein  $f \bmod (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$ , also  $\text{ord}(f) \leq n$  mit  $f(\alpha_j) = \beta_j$ . Damit ist das Interpolationsproblem gelöst.

*Frage:* Kann man bei Interpolation die Tangentensteigung (allgemein  $f^{(j)}(\alpha_k)$ ) auch vorschreiben (Hermite'sche Interpolationsaufgabe)? Ja für  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (Übung).

$f \in K[X]$ ,  $(X - \alpha)$ -adische Darstellung. Ziffern  $z_j \in K[X]$  haben Grad  $z : j < \text{grad}(X - \alpha) = 1$ , das heißt  $z_j \in K$ .  $f = \sum_{j=0}^n z_j (X - \alpha)^j$ , das ist die Taylor-Entwicklung in  $\alpha$ .  $z_j$  gegeben durch  $\frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}$ .

$$f \equiv g_{\alpha,d} \pmod{(X - \alpha)^{\alpha+1}}, \quad g_{\alpha,d} := \sum_{j=0}^d z_j (X - \alpha)^j \quad (3.3)$$

$g_{\alpha,d}$  ist gegeben durch  $f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(d)}(\alpha)$ .

System (3.3) entspricht der Vorgabe der  $f^{(j)}(\alpha)$ , Interpolation mit  $m_{j,k} = (X - \alpha_k)^{d_j}$  ist lösbar mit dem Restsatz.

### 3.5.3 Rechnen im Computer mit großen ganzen Zahlen

Prinzip: Gleichheit in  $\mathbb{Z}$  entspricht Kongruenz und einer passender Abschätzung.

**Bemerkung:**  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ , etwa  $2 \nmid m$ . Ist  $u \equiv v \pmod{m}$  und  $|u|, |v| \leq \frac{m}{2}$ , so ist  $u = v$ , weil  $u, v$  sind im symmetrischen Versys<sub>m</sub>.

Wende dies an auf die Berechnung von  $f(x)$ ,  $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Kennt man eine Schranke  $|f(x)| < \frac{m}{2}$ , so genügt es,  $f(x) \pmod{m}$  auszurechnen.  $f(x) \pmod{m}$  kann für  $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_l$  durch Berechnen von  $y_j = f(x) \pmod{m_j}$  ( $j = 1, \dots, l$ ) ersetzt werden, das ergibt simultane Kongruenz  $y = y_j \pmod{m_j}$ , die mit dem chinesischen Restsatz gelöst werden kann.

## 3.6 Struktur der Primrestklassengruppe mod $m$

$R$  euklidisch,  $m = \prod_{i=1}^l p_i^{t_i}$  Primzerlegung,  $t_j \in \mathbb{N}_+$ . Aus dem Chinesischen Restsatz:  $(R/mR)^\times \cong \prod_{j=1}^l (R/p_j^{t_j} R)^\times$  (beachte:  $\text{ggT}(p_i^{t_i}, p_j^{t_j}) = 1$  für  $i \neq j$ ). Es genügt also  $G := R/p^t R$  mit  $p \in P$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$  zu betrachten. Hier nur der Fall  $R = \mathbb{Z}$  ( $R = \mathbb{F}_p[X]$  geht ähnlich).

*Erinnerung:*  $t = 1$ ,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ ,  $\mathbb{F}_p^\times$  ist zyklisch, es existiert eine Primitivwurzel  $w \pmod{p}$ .

*Frage:* Wie ist der Fall für  $t > 1$ ?

Für  $p > 2$  existiert eine Primitivwurzel!

Gesucht ist also eine Primitivwurzel  $u$ , das heißt  $\text{ord } \bar{u} = \varphi(p^t) = (p-1)p^{t-1}$  in  $G$ . Es genügt  $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $p-1 \mid \text{ord } \bar{u}_1$  und  $p^{t-1} \mid \text{ord } \bar{u}_2$  zu finden. Wegen  $\text{ord } \bar{u}_j \mid \#G = (p-1)p^{t-1}$  gilt  $s \mid p-1$ . Daraus folgt, für  $v_1 := u_1^{p^{t-1}}$ ,  $v_2 := u_2^{p-1}$  ist

$$\text{ord } \bar{v}_1 = \text{ord } \bar{u}_1^{p^{t-1}} = \frac{\text{ord } \bar{u}_1}{\text{ggT}(\text{ord } \bar{u}_1, p^{t-1})} = \frac{(p-1)p^r}{p^r} = p-1.$$

Ebenso:  $\text{ord } \bar{v}_2 = p^{t-1}$  (Nachrechnen). Aus Übungsaufgabe 3 (a) Blatt 7 folgt mit  $u := v_1 v_2 \pmod{p^t}$ ,  $\text{ord } \bar{u} = (p-1)p^{t-1}$ . Bevor wir fortfahren, benötigen wir noch ein Lemma, das wir zum Beweis eines Hilfssatzes benötigen.

#### Lemma 3.16 ((1 + p)–Lemma)

$p \in \mathbb{P}$ ,  $p > 2$ ,  $r \in \mathbb{N}_+$ ,  $u \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:  $(1 + up)^{p^{r-1}} \equiv 1 + up^r \pmod{p^{r+1}}$ .

#### Beweis

Beweis via Induktion nach  $r$ .

$$r = 1: (1 + up)^{p^{1-1}} = 1 + up \equiv 1 + up^1 \pmod{p^2} \quad \checkmark.$$

$r > 1$ : Induktionshypothese (für  $r-1$ ):

$$(1 + up)^{p^{r-2}} \equiv 1 + up^{r-1} \pmod{p^r}.$$

$$\begin{aligned} \implies (1+up)^{p^{r-2}} &= 1 + up^{r-1} + zp^r \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \implies (1+up)^{p^{r-1}} = \left((1+up)^{p^{r-2}}\right)^p = \\ &= (1 + (up^{r-1} + zp^r))^p = 1 + \sum_{i=1}^p \underbrace{\binom{p}{i}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{(up^{r-1} + zp^r)^i}_{=(p^{r-1}(u+zp))^i =: c_i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \geq 2, i > 2: v_p(c_i) &= v_p \left( \binom{p}{i} \right) + v_p(p^{(r-1)i}) + \underbrace{v_p(u+zp)^i}_{\geq 0} \geq (r-1)i \geq (r-1)r > r+1 \implies \\ p^{r+1} \mid c_1 &\implies c_i \equiv 0 \pmod{p^{r+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = 2: v_p(c_2) &= v_p \left( \frac{p(p-1)}{2} \right) + \underbrace{v_p(p^{2(r-1)})}_{=2(r-1)} + \underbrace{v_p(u+zp)^2}_{\geq 0} \geq 2r-2+1 = 2r-1 \geq r+1 \implies \\ c_2 &\equiv 0 \pmod{p^{r+1}}. \end{aligned}$$

$$i = 1: c_1 = p \cdot p^{r-1}(u+zp) = up^r + zp^{r+1} \equiv up^r \pmod{p^{r+1}}.$$

$\implies$  Behauptung. ■

### Hilfssatz

Sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p > 2$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

- (1) Ist  $w$  eine Primitivwurzel mod  $p$ , so gilt in  $G = (\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times : p-1 \mid \text{ord } \bar{w}$ ,  $\bar{w} = w + p^t\mathbb{Z}$ .  
( $u_1 = w$  wählbar).
- (2)  $\text{ord}(\overline{1+p}) = p^{t-1}$  ( $v_2 = 1+p$  wählbar).

### Beweis

- (1) Sei  $l = \text{ord } \bar{w}$ , also  $\bar{w}^l = 1$ , das heißt  $w^l \equiv 1 \pmod{p^t}$ .  $t \geq 1 \implies w^l \equiv 1 \pmod{p^1} \implies$  in  $\mathbb{F}_p$  ist  $\bar{w}^l = 1$ ,  $\text{ord } \bar{w} = p-1 \implies p \cdot a \mid l$  (Elementar-Ordnungssatz).
- (2) Folgt aus Lemma 3.16

$(1+p)^{p^{t-1}} \equiv 1 + 1 \cdot p^t \pmod{p^{t-1}} \implies (1+p)^{p^{t-1}} \equiv 1 \pmod{p^t} \implies \overline{1+p^{p^{t-1}}} \implies \text{ord } \overline{1+p} \mid p^{t-1}$ . Für  $t \geq 2$  ist noch zu zeigen:  $(1+p)^{p^{t-2}} \not\equiv 1 \pmod{p^t}$ .  $(1+p)^{p^{t-2}} \equiv 1 + p^{t-1} \pmod{p^t}$  (nach Lemma 3.16).  $\overline{1+p^{p^{t-2}}} = \overline{1 + \underbrace{p^{t-1}}_{\neq 0}} \neq \overline{1} = 1$ . ■

Gezeigt (für  $p > 2$ ):

### Satz 3.17 (Struktursatz für $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$ , eigentlich ein Theorem)

Sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ . Dann gilt:

- (1) Falls  $p > 2$ , so ist  $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$  zyklisch (das heißt, es gibt eine Primitivwurzel  $u \pmod{p^t}$ , also  $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times = \{1, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{p^{t-1}(p-1)-1}\}$ ).
- (2) Falls  $p = 2$ :  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times$ ,  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$  zyklisch. Für  $t > 2$  ist  $(\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z})^\times$  *nicht* zyklisch, doch es gilt: Jedes  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z})^\times$  lässt sich eindeutig in der Form  $\bar{a} = \overline{(-1)}^\varepsilon \cdot \bar{5}^s$  schreiben, mit  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $s \pmod{2^{t-2}}$  (eindeutig).  $(\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z})^\times$  ist sozusagen bis auf das Vorzeichen  $(-1)^\varepsilon$  zyklisch.

#### Info:

Man kann sagen: Ist  $u \in \mathbb{Z}$  Primitivwurzel mod  $p^2$ , so auch mod  $p^t \forall t \in \mathbb{N}_+$

Es gibt viele Arbeiten über Primitivwurzeln, z. B. analytische Zahlentheorie (sehr schwierig) gibt Schranken  $s(p)$  so, dass in  $\{2, \dots, s(p)\}$  PW mod  $p$  zu finden.

Artins Vermutung: 2 (oder jedes  $n \in \mathbb{N}_+, n \neq 1$ ) ist Primitivwurzel für  $\infty$ -viele  $p \in \mathbb{P}$ .

Rechnen in  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^x$  auf dem Computer, falls viele Produkte zu berechnen sind.

Primzerlegung  $m = p_1^{t_1} \cdot \dots \cdot p_l^{t_l} \quad t_j \in \mathbb{N}_+$

Kodierte  $a + m\mathbb{Z} = \bar{a}$  wie folgt:

Berechne vorab PW  $u_j$  mod  $p_j^{t_j}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^x &\rightarrow \prod_{j=1}^l (\mathbb{Z}/p_j^{t_j}\mathbb{Z})^x \\ \alpha = a + m\mathbb{Z} &\mapsto (\dots, a + p_j, \dots) \end{aligned}$$

$$\text{Bijektiv:} \quad \alpha \leftrightarrow (\dots, r(\alpha, j), \dots)$$

$$\alpha \cdot \beta \leftrightarrow (\dots, r(\alpha, j) + r(\beta, j) \bmod p_j^{t_j-1}(p_j - 1), \dots)$$

$\alpha^{-1}$  ähnlich

Zum Rechnen mit großen ganzen Zahlen (Skizze)

Prinzip: Gleichheit in  $\mathbb{Z}$  = Kongruenz + passende Abschätzung

Bemerkung:  $m \in \mathbb{N}, m > 1$ , etwa  $2 \nmid m$ . Ist  $u \equiv v \bmod m$  und  $|u| \leq \frac{m}{2}, |v| \leq \frac{m}{2}$ , so ist  $u = v$ .

Grund:  $u, v$  sind in  $\text{Versys}_m$  (symm. Vertretersystem der Reste mod  $m$ ), also  $u = v$ .

Wende dies an auf die Berechnung von  $f(x)$ ,  $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}$ . Kennt man Schranke  $|f(x)| < \frac{m}{2}$  so genügt es  $f(x) \bmod m$  auszurechnen.

$f(x) \bmod m$  kann für  $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_l$  durch Berechnen von  $f(x) \bmod m_j =: y_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) ersetzt werden + 1x chinesischer Restsatz:  $y \equiv y_j \bmod m_j$ .

#### Aufgabe:

Berechne mit dem Computer  $\det A$  (exakt),  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$

Soll sein  $n$  mäßig groß,  $A = (a_{ij})$ , die  $a_{ij}$  mäßig groß.

Naives Verfahren: Gauß-Algorithmus in  $\mathbb{Q}$ :

Ärger: Sehr große Integer-Zahlen als Zähler und Nenner entstehen während der Rechnung unkontrolliert. Mögliche bessere Vorgehensweise, etwa  $|a_{ij}| \leq s$  (Schranke)

Leibnitzformel:  $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i, \pi(i)}$  liefert Abschätzung  $|\det A| \leq s^n \cdot n!$  ( $n! = \#S_n$ )

Schranke  $S = 2 \cdot |\det A| = 2 \cdot s^n \cdot n!$  kann sehr groß sein. Wähle Primzahlen ( $\neq 2$ )  $p_1, \dots, p_t$  ( $t$  verschieden) mit  $S \leq p_1 \cdot \dots \cdot p_t$ . Dann  $|\det A| \leq \frac{p_1 \cdot \dots \cdot p_t}{2} = \frac{m}{2}$ ,  $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_t$

Kann oft sein:  $t$  mäßig groß, alle  $p_j$  mäßig groß. (z. B.:  $s = 100, n = 100 \Rightarrow S = 100^{100} \cdot 2 \cdot 100! \leq 2 \cdot 100^{120}$  Es reichen also 130  $p_j$ 's mit  $p_j > 100$ , diese können  $< 1000$  gewählt werden  $\Rightarrow$  in  $\mathbb{F}_{p_j}$  kann sehr gut und schnell gerechnet werden!

$\Rightarrow$  Berechnung von  $\det \bar{A}$ ,  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$  in  $\mathbb{F}_{p_j}^{n \times n}$  kann durch Herstellen von Dreiecksform von  $\bar{A}$  für mäßig große  $n$  schnell berechnet werden. (Durch Arbeiten in  $\text{Versys}_p$  entstehen niemals große Zahlen!) Das ergibt  $y_j \in \text{Versys}_p$  mit  $\det A \bmod p_j = y_j$ . Es ist dann  $y \equiv y_j \bmod p_j$  zu lösen (simultane Kongruenz  $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_t$ ). Daher für  $y \in \text{Versys}_m$  (symm.) ist  $\det A = m \cdot y$  kann sehr groß sein, aber die Kongruenz ergibt sehr große Zahlen nur kontrolliert! (Mäßig große Zahlen, falls man mit  $\gamma$ -adischer Darstellung von  $y = \det A$ ,  $\gamma = (p_1, \dots, p_t, \dots)$  zufrieden ist.