Kapitel 5

Hyperbolische Geometrie im 20. Jahrhundert

5.1 δ-hyperbolische Räume nach Gromov

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine *Geodätische* oder ein *geodätisches Segment* von $x \in X$ nach $y \in X$ ist eine Abbildung $c : [0, l] \longrightarrow X$, $c(0) = x$, $c(l) = y$, sodass für alle $t_1 \leqslant t_2 \in [0, l]$ gilt: $d(c(t_1), c(t_2)) = t_2 - t_1$. Für das Segment schreiben wir $[x, y]$. Ein metrischer Raum heißt *geodätisch*, falls es zwischen je 2 Punkten stets ein geodätisches Segment gibt.

Beispiel 5.1.1 Die Standardräume $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ sind alle geodätisch. Dabei sind $\mathbb{E}^n$ und $\mathbb{H}^n$ sogar eindeutig geodätisch, die Geodätischen zwischen je zwei Punkten sind also eindeutig. Zwischen antipodalen Punkten auf der Sphäre hingegen gibt es unendlich viele Geodätische.

Sei nun $\delta \geqslant 0$. Ein geodätischer, metrischer Raum (X, d) heißt δ-*hyperbolisch*, falls alle geodätischen Dreiecke in X δ-dünn sind, d.h. für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ und ein Dreieck Δ beschreibende geodätischen Segmente $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$ gilt

$$[x_i, x_j] \subseteq U_\delta(\Delta \backslash [x_i, x_j])$$

Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist dabei

$$U_\delta(Y) = \{x \in X \mid d(x, y) \leqslant \delta \text{ für ein } y \in Y\}$$

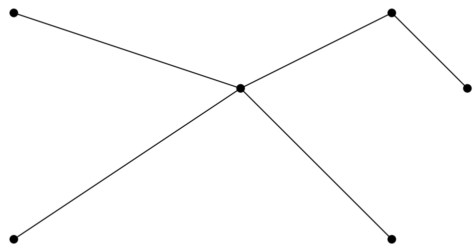
die δ-*Umgebung* von Y. (X, d) heißt *Gromov-hyperbolisch*, falls (X, d) δ-hyperbolisch ist für ein $\delta \geqslant 0$.

Beispiel 5.1.2 (i) Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum, d.h. es gilt

$$\operatorname{diam}(X) = \max_{x,y \in X} d(x,y) < \infty.$$

Dann ist X ist Gromov-hyperbolisch mit $\delta = \operatorname{diam}(X)$, dem Durchmesser von X. Damit ist δ-hyberbolisch eine Eigenschaft der "Grob-Geometrie" ("large scale").

(ii) Kombinatorische Räume (als eindimensionale Simplizialkomplexe) mit der induzierten Längenmetrik (d.h. jeder 1-Simplex besitzt die Länge 1): Erinnerung: Ein *kombinatorischer Graph G* besteht aus Ecken $E(G)$ (0-Simplices) und Kanten $K(G)$ (1-Simplices). Ein *Baum* ist ein Graph ohne Kreise, wobei ein Kreis ein geschlossener Weg ist.



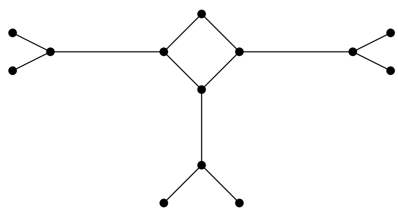
Die Metrik auf einem Graphen ist für $x, y \in E(G)$ definiert wie folgt:

$$d_G(x,y) = \inf_{c \text{ Kantenzug}} L(c)$$

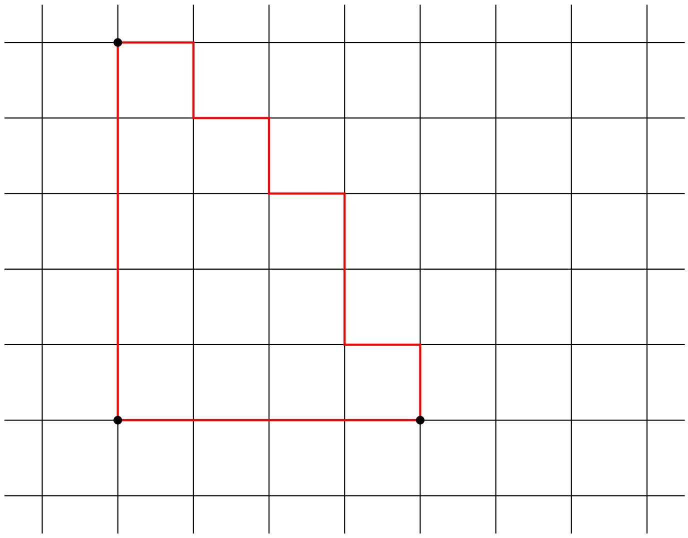
wobei in Kantenzug zwei Ecken verbindet und jede Kante isometrisch zu $[0,1]$ ist. Man kann als Verfeinerung auch den Abstand für Punkte auf den Kanten definieren. Man sieht leicht, dass Bäume 0-hyperbolisch sind.

(iii) Die euklidische Ebene $\mathbb{E}^2$ ist nicht Gromov-hyperbolisch, da Dreiecke beliebig groß werden können.

(iv) Ein Graph, der kein Baum ist, kann trotzdem δ-hyperbolisch sein (für $\delta > 0$):



(v) Es gibt auch Graphen, die nicht δ-hyperbolisch sind:



(vi) $\mathbb{E}^n$ ist nicht Gromov-hyperbolisch für $n \geqslant 2$. $\mathbb{E}^1$ hingegen ist 0-hyperbolisch.

(vii) Die klassischen hyperbolischen Räume $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$, $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ und $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ sind δ-hyperbolisch für $\delta = \ln(1+\sqrt{2})$ (bereits gezeigt für $n = 2$, $n \geqslant 3$ als Übung (Aufgabe 13.1)).

Wir wissen nun, dass kombinatorische Bäume 0-hyperbolisch sind. Gilt auch die Umkehrung? Nicht ganz! Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der SNCF-Metrik

$$d_{\text{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_e, & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ \|x\|_e + \|y\|_e, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

ist 0-hyperbolisch, aber kein Baum.

Definition 5.1.3 (i) Sei (X,d) ein geodätischer, metrischer Raum. Ein *topologisches Segment* zwischen $x, y \in X$ ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0,1] = I \longrightarrow \gamma(I) \subseteq X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

(ii) Ein *reeller Baum* (oder $\mathbb{R}$-*Baum*) ist ein geodätischer metrischer Raum (X,d) mit der Eigenschaft, dass es für je zwei Punkte $x, y \in X$ genau ein topologisches Segment zwischen x und y gibt.

Satz 5.1.4 *Ein geodätischer metrischer Raum ist 0-hyperbolisch genau dann, wenn er ein $\mathbb{R}$-Baum ist.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei (X,d) ein $\mathbb{R}$-Baum, $x,y,z \in X$ und $[x,y] \cup [y,z] \cup [x,z]$ das durch die drei Punkte eindeutig festgelegte geodätische Dreieck. Wir zeigen exemplarisch $[x,y] \subseteq [y,z] \cup [x,z]$. Angenommen es gelte $[x,y] \nsubseteq [y,z] \cup [x,z]$. Wähle dann einen Teilweg $[x',y'] \subseteq [x,y]$ sodass $[x',y'] \cap ([x,z] \cup [y,z]) = \{x',y'\}$. Dann ist der der Weg $\overline{x'zy'}$ jedoch ein von $[x', y']$ verschiedenes topologisches Segment zwischen x' und y', ein Widerspruch zur Eindeutigkeit.

"$\Rightarrow$" Sei nun (X, d) 0-hyperbolisch. Da in einem 0-hyperbolischen Raum geodätische Segmente eindeutig sind, ist lediglich zu zeigen, dasss jedes topologische Segment auch ein geodätisches Segment ist. Seien $x, y \in X$ und $\gamma : I \longrightarrow \gamma(I)$ ein topologisches Segment, das x und y verbindet. Weiter sei $[x, y]$ das eindeutige geodätische Segment zwischen x und y.

Beh. (a) Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $[x, y] \subseteq U_\epsilon(\text{Bild } \gamma)$.

Mit der Behauptung folgt: Bild $\gamma = [x, y]$. Denn als homöomorphes Bild eines Intervalls ist Bild (γ) vollständig. Für alle $z \in [x, y]$ existiert also $t_n \in I$ mit $d(z, \gamma(t_n)) \leqslant \frac{1}{n}$. Die Dreiecksungleichung liefert dann für $n \leqslant m$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leqslant \frac{2}{n},$$

$(\gamma(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und konvergiert, da Bild γ vollständig ist. Damit gilt $\gamma(t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(t^*)$ für ein $t_* \in I$. Es folgt

$$d(z, \gamma(t^*)) = \lim_{n\to\infty} d(z, \gamma(t_n)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

also $z = \gamma(t^*)$. Insgesamt gilt also $[x, y] \subseteq$ Bild γ und schließlich Bild $\gamma = [x, y]$, was zu zeigen war. Es bleibt noch die Behauptung zu beweisen.

Bew. (a) Sei $\epsilon > 0$. Da Bild γ als stetiges Bild eines Kompaktums ebenfalls kompakt ist, existieren $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = y$ auf Bild γ, sodass $d(x_{i-1}, x_i) \leqslant 2\epsilon$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$. Das eindeutige geodätische Segment $[x_{i-1}, x_i]$ liegt dann in einer ϵ-Umgebung von $\{x_{i-1}, x_i\}$, also auch in einer ϵ-Umgebung von Bild γ. Da X nach Voraussetzung 0-hyperbolisch ist, folgt (mit Induktion)

$$[x, y] = [x_0, x_N] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} [x_{i-1}, x_i] \subseteq U_\epsilon\left(\text{Bild } \gamma\right),$$

woraus die Behauptung folgt. □

5.2 Quasi-Isometrien und Quasi-Geodätische

Definition 5.2.1 Sei $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

(i) f heißt *topologische Isometrie*, falls

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in X$.

(ii) f heißt λ-*Bilipschitz-Abbildung*, falls eine Konstante $\lambda \geqslant 1$ existiert, sodass

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x,y) \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_X(x,y)$$

für alle $x, y \in X$. Insbesondere sind 1-Bilipschitz-Abbildungen gerade topologische Isometrien.

(iii) f heißt (λ, ϵ)-*quasi-isometrische Einbettung*, falls Konstanten $\lambda \geqslant 1, \epsilon \geqslant 0$ existieren, sodass

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x,y) - \epsilon \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_X(x,y) + \epsilon$$

für alle $x, y \in X$. Insbesondere sind $(\lambda, 0)$-quasi-isometrische Einbettungen gerade λ-Bilipschitz-Abbildungen.

(iv) f heißt (λ, ϵ)-*Quasi-Isometrie*, falls f eine (λ, ϵ)-quasi-isometrische Einbettung ist und zusätzlich eine Konstante $D \geqslant 0$ existiert, sodass jeder Punkt von Y in einer D-Umgebung von $f(X) \subseteq Y$ liegt, das Bild also "D-dicht" ist. Insbesondere ist f für $D = 0$ surjektiv.

(v) Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *quasi-isometrisch*, falls eine Quasi-Isometrie $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ existiert.

Im Folgenden werden wir quasi-isometrische Invarianten bestimmen, um das Klassifikationsproblem lösen zu können.

Beispiel 5.2.2 (i) Ein metrischer Raum (X, d) ist quasi-isometrisch zu einem Punkt genau dann, wenn $\mathrm{diam} X < \infty$.

(ii) $\mathbb{Z}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik ist quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}$ (mit $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda = 1, \epsilon = 0$ und $D = 1$). Genau so sind $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{R}^n$ quasi-isometrisch.

(iii) die stetigen Funktionen $\mathcal{C}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ sind quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}$.

(iv) Aus der geometrischen Gruppentheorie: Jede endlich erzeugte Gruppe $G = \langle S \rangle$ definiert auf natürliche Weise eine Metrik auf G, wodurch G zum metrischen Raum (G, d_S) wird (beachte, dass die Metrik vom Erzeugendensystem abhängt). Ist S' ein weiteres Erzeugendensystem, so sind die resultierenden metrischen Räume (G, d_S) und $(G, d_{S'})$ quasi-isometrisch.

Was passiert nun mit Geodätischen unter Quasi-Isometrien? Erinnerung: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist eine Geodätische eine isometische Einbettung $\gamma : I \longrightarrow X$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Analog ist eine (λ, ϵ)-*Quasi-Geodätische* in einem metrischen Raum (X, d) eine (λ, ϵ)-quasi-isometrische Einbettung $c : I \longrightarrow X$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ ist, das heißt es gilt

$$\frac{1}{\lambda}|t-t'|-\epsilon \leqslant d(c(t),c(t')) \leqslant \lambda|t-t'|+\epsilon$$

für alle $t,t' \in I$. Falls $I=[0,\infty)=\mathbb{R}^0_+$, so heißt c *geodätischer Strahl*. Beachte: Für $\epsilon \neq 0$ ist eine (λ,ϵ)-Quasi-Geodätische nicht zwingend stetig! Wir werden sehen: In hyperbolischen Raumen sind Quasi-Geodätische jedoch "nahe" bei Geodätischen (man nennt dies *Trapping* oder *Stabilität* von Geodätischen). Dies wird zeigen, dass Hyperbolizität eine quasi-isometrische Invariante ist.

Bemerkung 5.2.3 *Beachte: Trapping gilt in der eukldischen Ebene $\mathbb{E}^2$ nicht: Die Spirale*

$$c:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{E}^2, \qquad t\mapsto \begin{pmatrix} t\cos(\log 1+t) \\ t\sin(\log 1+t)\end{pmatrix}$$

ist ein quasi-geodätischer Strahl, kann aber nicht durch einen geodätischen Strahl "eingefangen" werden.

Sei nun (X,d) ein metrischer Raum und $c:[a,b]\longrightarrow X$ eine stetige Kurve. Wir definieren die *Länge von c* durch

$$l(c) := \sup_{a=t_0\leqslant\ldots\leqslant t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i),c(t_{i+1})).$$

c heißt rektifizierbar, falls $l(c)<\infty$.

Bemerkung 5.2.4 (Parametrisierung nach Bogenlänge) *Sei $c:[a,b]\longrightarrow X$ rektifizierbar mit $l:=l(c)$. Weiter sei*

$$\lambda:[a,b]\longrightarrow[0,l], \qquad t\mapsto\lambda(t)=l\left(c|_{[a,t]}\right).$$

Dann ist $\tilde{c}:[0,l]\longrightarrow X$ mit $\tilde{c}\circ\lambda=c$ rektifizierbar und es gilt $l\left(\tilde{c}|_{[a,t]}\right)=t$.

Beweis. Siehe Bridson-Haifliger, S.13. □

Satz 5.2.5 *Sei (X,d) ein δ-hyperbolischer, geodätischer metrischer Raum und $c:[a,b]\longrightarrow X$ ein stetiger, rektifizierbarer Weg in X mit Anfangspunkt $p=c(a)$ und Endpunkt $q=c(b)$. Sei Weiter $[p,q]$ ein geodätischer Segment, das p und q verbindet. Dann gilt für alle $x\in[p,q]$:*

$$d(x,\text{Bild } c)\leqslant \delta|\log_2 l(c)|+1.$$

Beweis. Ist $l(c)\leqslant 1$, so gilt

$$d(x,\text{Bild } c)\leqslant d(x,p)\leqslant d(p,q)\leqslant l(c)\leqslant 1\leqslant \delta|\log_2 l(c)|+1,$$

die Behauptung ist also klar. Sei also $l(c) > 1$. Nach Bemerkung 2.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass c eine Abbildung $c : [0,1] \longrightarrow X$ ist, die Bild c proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt es gilt

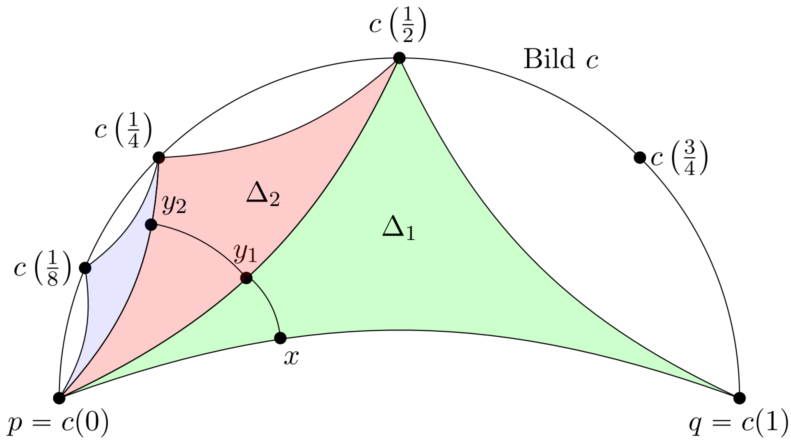
$$d(c(t), c(t')) = l(c)|t - t'|$$

für $t, t' \in [0,1]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1 \leqslant \frac{l(c)}{2^N}.$$

Betrachte nun das Dreieck

$$\Delta_1 := \Delta\left(\left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right)\right], \left[c\left(\frac{1}{2}\right), c(1)\right], [c(0), c(1)]\right)$$



Dann ist Δ_1 ein geodätisches Dreieck, dass die Seite $[p, q]$ enthält. Sei nun $x \in [p, q] = [c(0), c(1)]$. Da X δ-hyperbolisch ist, können wir $y_1 \in \left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[c\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ derart whälen, dass $d(x, y_1) \leqslant \delta$. Falls $y_1 \in \left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right)\right]$, betrachte ein weiteres Dreieck

$$\Delta_2 := \Delta\left(\left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right)\right], \left[c(0), c\left(\frac{1}{4}\right)\right], \left[c\left(\frac{1}{4}\right), c\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right).$$

Dann ist Δ_2 ebenfalls ein geodätisches Dreieck und besitzt $\left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ als gemeinsame Seite mit Δ_1. Ist hingegen y_1 auf der anderen Seite, also $y_1 \in \left[c\left(\frac{1}{2}\right)\right]$, so definiere Δ_2 wie folgt:

$$\Delta_2 := \Delta\left(\left[c\left(\frac{1}{2}\right), c\left(1\right)\right], \left[c\left(\frac{1}{2}\right), c\left(\frac{3}{4}\right)\right], \left[c\left(\frac{3}{4}\right), c\left(1\right)\right]\right).$$

In jedem Fall existiert wieder wegen der Hyperbolizität von X ein $y_2 \in \Delta_2 \backslash \Delta_1$ mit $d(y_1, y_2) \leqslant \delta$. Diese Konstruktion setzen wir iterativ fort: Im $n+1$-ten Schritt berachte das geodätische Dreieck

Δ_{n+1}, das die Seite $[c(t_n), c(t'_n)]$ mit Δ_n gemeinsam hat und y_n enthält. Weiter sei $c(t_{n+1})$ die dritte Ecke des Dreiecks mit $t_{n+1} = \frac{t_n+t'_n}{2}$. Wann wählen wir $y_{n+1} \in \Delta_{n+1} \backslash [c(t_n), c(t'_n)]$ mit $d(y_n, y_{n+1}) \leqslant \delta$.
Im N-ten Schritt erhalten wir somit einen Punkt y_N mit

$$d(x, y_N) \leqslant d(x, y_1) + d(y_1, y_2) + \ldots + d(y_{N-2}, y_{N-1}) + d(y_{N-1}, y_N) \leqslant N\delta,$$

der auf einem geodätischen Segment der Länge $\frac{l(c)}{2^N}$ (beachte, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, also sukzessives Halbieren der Intervallenlänge auch eine Halbierung der Bildkurve herbeiführt) mit Endpunkten in Bild c liegt. Sei y derjenige Endpunkt, der am nächsten bei y_N liegt. Dann gilt

$$d(x, y) \leqslant d(x, y_N) + d(y_N, y) \leqslant N\delta + \frac{1}{2}\frac{l(c)}{2^N} = N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}}.$$

Nach der Wahl von N ist $\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1$ und $2^N \leqslant l(c)$, also $N \leqslant \log_2 l(c)$ und damit

$$d(x, \text{Bild } c) \leqslant d(x, y) \leqslant N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}} \leqslant \delta|\log_2 l(c)| + 1,$$

was gerade zu zeigen war. □

Bemerkung 5.2.6 *Eine vergleichbare Aussage in $\mathbb{E}^2$ gibt es nicht.*

Definition 5.2.7 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen von X. Dann ist

$$\text{Hd}(A, B) := \inf\{\epsilon \geqslant 0 \mid A \subseteq U_\epsilon(B),\ B \subseteq U_\epsilon(A)\}$$

der *Hausdorff-Abstand* von A und B.

Satz 5.2.8 (Stabilität von Quasi-Geodätischen) *Sei (X, d) ein δ-hyperbolischer, geodätischer, metrischer Raum, $c : [a, b] \longrightarrow X$ eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodätische mit Anfangs- und Endpunkten $c(a) = p$, $c(b) = q$ und $[p, q]$ ein geodätisches Segment, dass p und q verbindet. Dann existiert eine Konstante $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$, sodass*

$$\text{Hd}([p, q], \text{Bild } c) \leqslant R.$$

Bevor wir die Aussage beweisen, leiten wir die wichtigste Folgerung her. Ein (λ, ϵ)-quasi-geodätisches Dreieck besteht aus drei (λ, ϵ)-Quasi-Geodätischen $q_i : [0, T_i] \longrightarrow X$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ mit

$$q_1(T_1) = q_2(0), \qquad q_2(T_2) = q_3(0), \qquad q_3(T_3) = q_1(0).$$

Das Dreieck heißt K-*dünn* für eine Konstante $K \geqslant 0$, falls für jedes $i \in \{1,2,3\}$ gilt: Jeder Punkt $x \in$ Bild q_i ist in einer K-Umgebung von $\Delta \backslash$Bild q_i enthalten.

Korollar 5.2.9 *Ein geodätischer, metrischer Raum (X,d) ist Gromov-hyperbolisch genau dann, wenn für jedes $\lambda \geqslant 1$ und jedes $\epsilon \geqslant 0$ eine Konstante $M \geqslant 0$ existiert, sodass jedes (λ,ϵ)-quasi-geodätische Dreieck M-dünn ist.*

Satz 5.2.10 *Seien (X,d_X), (Y,d_Y) geodätische, metrische Räume und $f : Y \longrightarrow X$ eine (λ,ϵ)-quasi-isometrische Einbettung. Dann gilt: Ist X δ-hyperbolisch, so ist Y δ'-hyperbolisch für ein $\delta \geqslant 0$.*

Beweis. Sei $\Delta \subseteq Y$ ein geodätisches Drieieck in Y. Wir müssen zeigen, dass Δ mit einer uniformen Konstante dünn ist. Es bezeichnen $c_1([0,1]), c_2([0,1]), c_3([0,1])$ die Seiten von Δ. Dann ist $f(\Delta)$ ein (λ,ϵ)-quasi-isometrisches Dreieck mit Seiten $(f \circ c_1)([0,1])$, $(f \circ c_2)([0,1])$ und $(f \circ c_3)([0,1])$. Nach Korollar 2.9 ist $f(\Delta)$ M-dünn für eine Konstante $M := M(\lambda,\epsilon) \geqslant 0$, das heißt es gibt (beispielsweise) für $x \in$ Bild c_1 ein $y \in$ Bild $c_2 \cup$ Bild c_3, sodass $d_X(f(x), f(y)) \leqslant M$. Da f eine (λ,ϵ)-quasi-isometrische Einbettung ist, gilt weiter

$$d_Y(x,y) \leqslant \lambda d_X(f(x), f(y)) + \epsilon \leqslant \lambda M + \epsilon =: \delta'$$

und analog für die anderen Seiten. Damit Δ δ'-dünn, was zu zeigen war. □

Lemma 5.2.11 *Sei (X,d) ein geodätischer, metrischer Raum und $c : [a,b] \longrightarrow X$ eine (λ,ϵ)-Quasi-Geodätische. Dann existiert eine stetige (λ,ϵ')-Quasi-Geodätische $c' : [a,b] \longrightarrow X$ mit*

(i) c und c' haben dieselben Anfangs- und Endpunkte, das heißt es gilt $c(a) = c'(a)$ sowie $c(b) = c'(b)$.

(ii) $\epsilon' = 2(\lambda + \epsilon)$.

(iii) Für alle $t, t' \in [a,b]$ gilt

$$l\left(c'|_{[t,t']}\right) \leqslant k_1 d\left(c'(t), c'(t')\right) + k_2,$$

wobei $k_1 = \lambda(\lambda+\epsilon)$ und $k_2 = (\lambda\epsilon' + 3)(\lambda+\epsilon)$.

(iv) Für den Hausdorff-Abstand der beiden Quasi-Geodätischen gilt

$$\mathrm{Hd}\left(\text{Bild } c, \text{Bild } c'\right) \leqslant \lambda + \epsilon.$$

Beweis. Es sei $\Sigma := \mathbb{Z} \cap (a,b) \cup \{a,b\} = \{a = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = b\}$. Für $s \in \Sigma$ setze $c'(s) := c(s)$. zwischen aufeinanderfolgenden Punkten $c(s_i)$ und $c(s_{i+1})$ wähle ein linear, proportional zur Bogenlänge parametrisiertes geodätisches Segment. Definiere anschließend c' als die Verkettung dieser Segmente. Zu den einzelnen Eigenschaften:

(i) Nach Definition von c' gilt $c'(a) = c(a)$ sowie $c'(b) = c(b)$.

(iv) Für die Länge jedes Teilsegments gilt

$$l\left(c'|_{[s_i,s_{i+1}]}\right) = d\left(c'(s_i), c'(s_{i+1})\right) = d\left(c(s_i), c(s_{i+1})\right) \leqslant \lambda d(s_i, s_{i+1}) + \epsilon \leqslant \lambda + \epsilon.$$

Da jeder Punkt von Bild $c \cup$ Bild c' in einer $\frac{\lambda+\epsilon}{2}$-Umgebung von $c(\Sigma) = c'(\Sigma)$ liegt, folgt bereits die Behauptung.

(ii) Für beliebiges $t \in [a, b]$ sei $[t]$ derjenige Punkt von Σ, welcher am nächsten zu t ist. Da c eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodätische ist und $c([t]) = c'([t])$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
d\left(c'(t), c'(t')\right) &\leqslant d\left(c'(t), c'([t])\right) + d\left(c'([t]), c'([t'])\right) + d\left(c'([t'], c'(t')\right) \\
&\leqslant \frac{\lambda+\epsilon}{2} + \quad d\left(c'([t]), c'([t'])\right) + \frac{\lambda+\epsilon}{2} \\
&= d\left(c([t]), c([t'])\right) + \lambda + \epsilon \\
&\leqslant \lambda d_{\mathbb{R}}([t], [t']) + \epsilon + \lambda + \epsilon \\
&= \lambda|[t] - [t']| + \lambda + 2\epsilon \\
&\leqslant \lambda\left(|[t] - t| + |t - t'| + |t' - [t']|\right) + \lambda + 2\epsilon \\
&\leqslant \lambda\left(|t - t'| + 1\right) + \lambda + 2\epsilon \\
&= \lambda|t - t'| + 2(\lambda + \epsilon).
\end{aligned}$$

Wir erhalten außerdem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|t - t'| - 2(\lambda + \epsilon) &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|t - t'| - 1\right) - (\lambda + 2\epsilon) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|t - [t]| + |[t] - [t']| + |[t'] - t'| - 1\right) - (\lambda + 2\epsilon) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2} + |[t] - [t']| + \frac{1}{2} - 1\right) - (\lambda + 2\epsilon) \\
&= \frac{1}{\lambda}|[t] - [t']| - \epsilon - (\lambda + \epsilon) \\
&\leqslant d\left(c([t]), c([t'])\right) - (\lambda + \epsilon) \\
&= d\left(c'([t]), c'([t']\right) - (\lambda + \epsilon) \\
&\leqslant d(c'([t]), c'(t)) + d(c'(t), c'(t')) + d(c'(t').c'([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\
&\leqslant \frac{\lambda+\epsilon}{2} + d(c'(t), c'(t')) + \frac{\lambda+\epsilon}{2} - (\lambda + \epsilon) \\
&= d\left(c'(t), c'(t')\right),
\end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung wegen

$$\frac{1}{\lambda}\big(|t-t'|-1\big)-(\lambda+2\epsilon)=\frac{1}{\lambda}|t-t'|-\frac{1}{\lambda}-(\lambda+2\epsilon)\geqslant\frac{1}{\lambda}|t-t'|-\lambda-(\lambda+2\epsilon)=\frac{1}{\lambda}|t-t'|-2(\lambda+\epsilon)$$

gilt. Für $\epsilon' := 2(\lambda+\epsilon)$ gilt also

$$\frac{1}{\lambda}|t-t'|-\epsilon' \leqslant d(c(t),c(t')) \leqslant \lambda|t-t'|+\epsilon'$$

für alle $t,t' \in [a,b]$, $c' : [a,b] \longrightarrow X$ ist also eine (λ,ϵ')-quasi-isometrische Einbettung und damit (λ,ϵ')-quasi-geodätisch.

(iii) Für ganze Zahlen $m \leqslant n \in [a,b]$ gilt

$$l\left(c'|_{[m,n]}\right)=\sum_{i=m}^{n-1} d\left(c'(i),c'(i+1)\right)=\sum_{i=m}^{n-1} d\left(c(i),c(i+1)\right)\leqslant(\lambda+\epsilon)|n-m|$$

sowie

$$l\left(c'|_{[a,n]}\right)\leqslant(\lambda+\epsilon)(m-a+1),\qquad l\left(c'|_{[n,b]}\right)\leqslant(\lambda+\epsilon)(b-n+1).$$

Für $t,t' \in [a,b]$ folgt also

$$\begin{aligned} l\left(c'|_{[t,t']}\right) &\leqslant l\left(c'|_{[t,[t]]}\right)+l\left(c'|_{[[t],[t']]}\right)+l\left(c'|_{[[t'],t']}\right)\\ &\leqslant (\lambda+\epsilon)\big([t]-[t']+2\big) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$d\left(c'(t),c'(t')\right)\geqslant\frac{1}{\lambda}|t-t'|-\epsilon'\geqslant\frac{1}{\lambda}\big([t]-[t']-1\big)-\epsilon'$$

und damit

$$\begin{aligned} l\left(c'|_{[t,t']}\right) &\leqslant (\lambda+\epsilon)\big([t]-[t']+2\big)\\ &= \lambda(\lambda+\epsilon)\left(\frac{1}{\lambda}\big([t]-[t']-1\big)+\frac{3}{\lambda}\right)\\ &= \lambda(\lambda+\epsilon)\left(\frac{1}{\lambda}\big([t]-[t']-1\big)-\epsilon'\right)+(\lambda+\epsilon)(3+\lambda\epsilon')\\ &\leqslant \lambda(\lambda+\epsilon)d\left(c'(t),c'(t')\right)+(\lambda+\epsilon)(3+\lambda\epsilon')\\ &= k_1 d\left(c'(t),c'(t')\right)+k_2, \end{aligned}$$

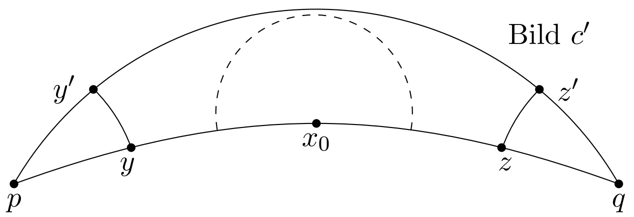
was zu zeigen war. □

Beweis von Satz 2.8 Zunächst ersetzen wir die Quasi-Geodätische c durch eine stetige Quasi-

Geodätische c' wie in Lemma 2.11. Sei $[p, q]$ das geodätische Segment zwischen den Endpunkten von c bzw. c'. Weiter sei

$$D := \max_{x \in [p,q]} \left\{ d(x, \text{Bild } c' \right\}$$

und $x_0 \in [p, q]$ ein Punkt, in dem das Maximum angenommen wird.



Der offene Ball mit Radius D und Zentrum x_0 trifft dann Bild c' nicht. Idee: Benutze Satz 5.2.5, um eine Schranke für D zu finden, die nicht von der Kurve abhängt (sondern nur von λ, ϵ und δ). Wähle hierzu $y \in [p, x_0] \subseteq [p, q]$, sodass $d(y, x_0) = 2D$. Ist $d(p, x_0) < 2D$, so wähle stattdessen $y = p$. Analog finden wir einen Punkt $z \in [x_0, q]$. Wähle weiter $y', z' \in$ Bild c' mit $d(y, y') \leqslant D$ und $d(z, z') \leqslant D$ sowie geodätische Segmente $[y, y']$ und $[z', z]$. Sei nun γ der parametrisierte Weg, welcher zunächst entlang $[y, y']$, dann c' und anschließend $[z', z]$ läuft. Dann liegt Bild γ nach Konstruktion außerhalb des D-Balls um x_0. Es gilt

$$d(y', z') \leqslant d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leqslant D + 4D + D = 6D.$$

Aus Lemma 2.11 (iii) folgt nun

$$l(\gamma) \leqslant d(y, y') + k_1 d(y', z') + k_2 + d(z, z') \leqslant k_1 6D + k_2 + 2D$$

und Satz 2.5 liefert wegen $D = d(x_0, \text{Bild } c')$

$$D - 1 \leqslant \delta |\log_2 l(\gamma)| \leqslant \delta |\log_2(k_1 6D + k_2 + 2D)|$$

Diese Ungleichung zwischen eine linearem Term in D und einem logarithmischen Term in D kann nur erfüllt sein, falls D beschränkt ist, das heißt Satz 5.2.5 liefert implizit eine obere Schranke für D, welche nur von λ, ϵ und δ abhängt. Sei D_0 eine solche Schranke.

Beh. (a) Es gilt Bild $c' \subseteq U_{R'}([p, q])$ mit $R' = D_0(1 + k_1) + \frac{k_2}{2}$.

Bew. (a) Betrachte ein maximales Teilintervall $[a', b'] \subseteq [a, b]$, sodass $c'|_{[a',b']}$ außerhalb der D_0-Umgebung $U_{D_0}([p, q])$ liegt (existiert kein solches, so folgt die Behauptung mit $R' = D_0$).

Jeder Punkt von $[p,q]$ liegt per Definition von D_0 in $U_{D_0}(\text{Bild } c')$, das heißt es gilt

$$[p,q] \subseteq U_{D_0}\left(\text{Bild } c'|_{[a,a']} \cup \text{Bild } c'|_{[b',b]}\right).$$

Da Intervalle zusammenhängend sind, existieren $w \in [p,q]$, $t \in [a,a']$ und $t' \in [b',b]$, sodass

$$d(w, c'(t)) \leqslant D_0, \qquad d(w, (c'(t')) \leqslant D_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt insbesondere

$$d(c'(t), c'(t')) \leqslant d(c'(t), w) + d(w, c'(t')) \leqslant 2D_0$$

und nach Lemma 2.11 (iii) gilt damit

$$l\left(c'|_{[t,t']}\right) \leqslant k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2 \leqslant k_1 2D_0 + k_2.$$

Für beliebiges $z = c'(t) \in \text{Bild } c'$ gibt es also $t' \in [a,a'] \cup [b',b]$ mit

$$d(c'(t), c'(t')) \leqslant \frac{1}{2}(k_1 2D_0 + k_2) = k_1 D_0 + \frac{k_2}{2}$$

und es folgt

$$d(z,[p,q]) \leqslant d(z, x_0) \leqslant d(z, c'(t')) + d(c'(t')) \leqslant k_1 D_0 + \frac{k_2}{2} + D_0 \leqslant D_0(1+k_1) + \frac{k_2}{2} = R',$$

also $z \in U_{R'}([p,q])$ und damit $\text{Bild } c' \subseteq U_{R'}([p,q])$.

Wir können den Beweis nun abschließen. Nach Lemma 2.11 (iv) gilt

$$\text{Hd}\left(\text{Bild } c, \text{Bild } c'\right) \leqslant \lambda + \epsilon$$

und da Hd eine Metrik auf der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X bildet folgt

$$\text{Hd}\left([p,q], \text{Bild } c\right) \leqslant \text{Hd}\left([p,q], \text{Bild } c'\right) + \text{Hd}\left(\text{Bild } c', \text{Bild } c\right) \leqslant R' + \lambda + \epsilon =: R = R(\lambda, \epsilon, \delta),$$

die Behauptung des Satzes. □

5.3 Hyperbolische Gruppen

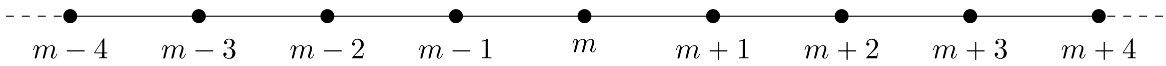
In diesem Abschnitt soll auf Verbindungen zwischen Geometrie und Gruppentheorie eingegangen werden. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit $G = \langle S \rangle$ für ein Erzeugendensystem $S = \{s_i | i \in$

$I\}$ mit endlicher Indexmenge I und $S^{-1} = S$, das heißt für alle $g \in G$ gibt es $s_1, \ldots, s_k \in S$ mit $g = s_1 \cdots s_k$ (Beachte, dass S keineswegs eindeutig ist).

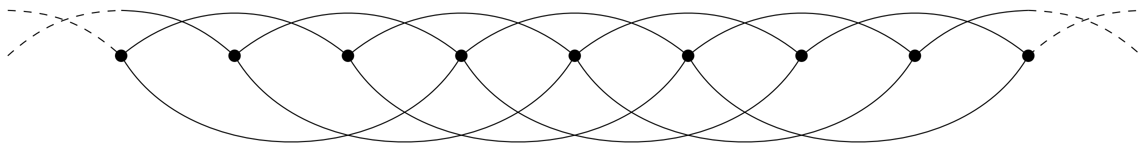
Beispiel 5.3.1 Für $G = (\mathbb{Z}, +)$ wähle $S = \{-1, 1\}$ oder $\tilde{S} = \{-3, -2, 2, 3\}$. Wegen $\mathrm{ggT}(2, 3) = 1$ gilt $\langle \tilde{S} \rangle = \mathbb{Z}$.

Dies wollen wir nun geometrisieren (nach A. Cayley, 1878): Zu $G = \langle S \rangle$ assoziiere einen Graphen, einen *Cayley-Graphen* $\mathrm{Cay}(G, S)$ zu (G, S) mit G als Menge der Eckpunkte sowie Kanten zwischen $g, h \in G$ genau dann, wenn es $s \in S$ gibt, sodass $h = gs$.

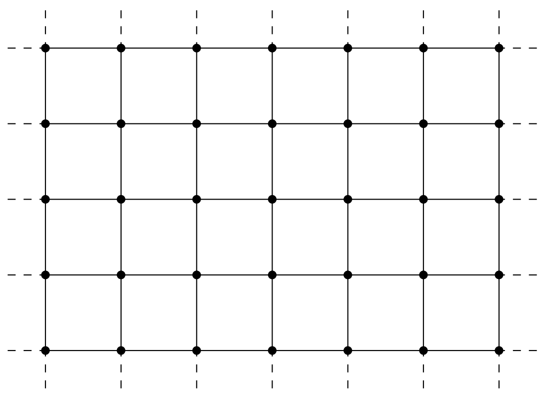
Beispiel 5.3.2 Betrachte zu nächst $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-1, 1\} =: \langle S \rangle$. Dann existiert zwischen zwei ganzen Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ eine (nicht orientierte) Kante genau dann, wenn sie sich um ein Element in S unterscheiden, also genau dann, wenn $|m - n| = 1$. Der zugehörig Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, S)$ sieht dann wie folgt aus:



Beispiel 5.3.3 Betrachte nun $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-3, -2, 2, 3\} \rangle =: \langle \tilde{S} \rangle$ Wir erhalten dann ein den Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \tilde{S} \rangle$

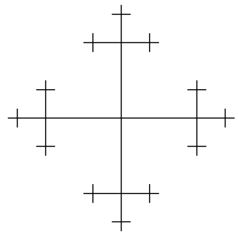


Beispiel 5.3.4 Sei $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ mit $S = \{\pm e_1, \pm e_2\}$. Der zugehörige Cayley-Graph hat dann die Gestalt



Beispiel 5.3.5 Für die freie Gruppe $F_2 = F(a, b)$ in zwei Erzeugern mit $S = \{a, b\}$ erhalten wir

einen Cayley-Graphen



Nun wollen wir auf einem Cayley-Graphen eine topologische Struktur definieren. Definiere hierfür die *Wortmetrik* auf G bzw. auf $\mathrm{Cay}(G, S)$

$$d_S(g, h) := \min \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \mid \text{ es existieren } s_1, \ldots, s_m \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_m \right\} = d_S(e, g^{-1}h).$$

Dann ist d_S eine linksinvariante Metrik auf $\mathrm{Cay}(G, S)$ und entspricht der kombinatorischen Graphenmetrik. Eine Gruppe $G = \langle S \rangle$ wird so zu einem geometrischen Objekt. Allerdings hängt die geometrische Struktur von der Wahl es Erzeugendensystems S von G ab. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den entstehenden metrischen Räumen? Wir haben einen entscheidenden Satz:

Satz 5.3.6 *Sei G eine Gruppe sowie $S, \tilde{S}$ Erzeugendensysteme für G. Dann induziert die Identitätsabbildung* id_G *eine $(\lambda, 0)$-Quasi-Isometrie zwischen den metrischen Räumen* $(\mathrm{Cay}(G, S), d_S)$ *und* $(\mathrm{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$.

Beweis. Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

Eine geometrische Eigenschaft einer endlich erzeugten Gruppe entspricht also einer Eigenschaft eines Cayley-Graphen, welche invariant unter Quasi-Isometrien ist (Gromov, 1987). Wir führen nun die Definition einer hyperbolischen Gruppe ein:

Definition 5.3.7 Eine endlich erzeugte Gruppe $G = \langle S \rangle$ heißt *hyperbolisch*, falls der Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ als metrischer Raum δ-hyperbolisch ist für ein $\delta = \delta(S) \geqslant 0$.

Nach Satz 5.4 ist Hyperbolizität eines geodätischen, metrischen Raums eine Quasi-Isometrie-Invariante, Hyperbolizität einer endlich erzeugten Gruppe ist also eine geometrische Eigenschaft.

Beispiel 5.3.8
(i) $F_2 = F(a, b)$ ist δ-hyperbolisch, da sein Graph ein Baum und damit 0-hyperbolisch ist.
(ii) $\mathbb{Z}^2$ ist nicht hyperbolisch, wie wir in Beispiel 5.1.2 bereits gesehen haben.

Eine wichtige Beobachtung: Jeder metrische Raum (X, d), der quasi-isometrisch zu $(\mathrm{Cay}(G, S), d_S)$ ist, ist auch quasi-isometrisch zu $(\mathrm{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$ ist. Die Frage ist nun: Wie findet man zu einer gegebenen Gruppe $G = \langle S \rangle$ einen zu $(\mathrm{Cay}(G, S), d_S)$ quasi-isometrischen metrischen Raum (X, d)? Eine Antwort bietet der folgende Satz:

Satz 5.3.9 (Satz von Schwarz-Milnor) *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, welche auf einem geodätischen, metrischen Raum (X, d) durch Isometrien operiere. Weiter existiere eine Teilmenge $B \subseteq X$ mit* $\mathrm{diam}B < \infty$ *und*

(i) $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot B$

(ii) Die Menge $S = \{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \varnothing\}$ *ist endlich.*

Dann gilt: Für alle $x \in X$ ist die Bahn-Abbildung

$$\phi_x : G \longrightarrow G \cdot x \subseteq X, \qquad g \mapsto g \cdot x$$

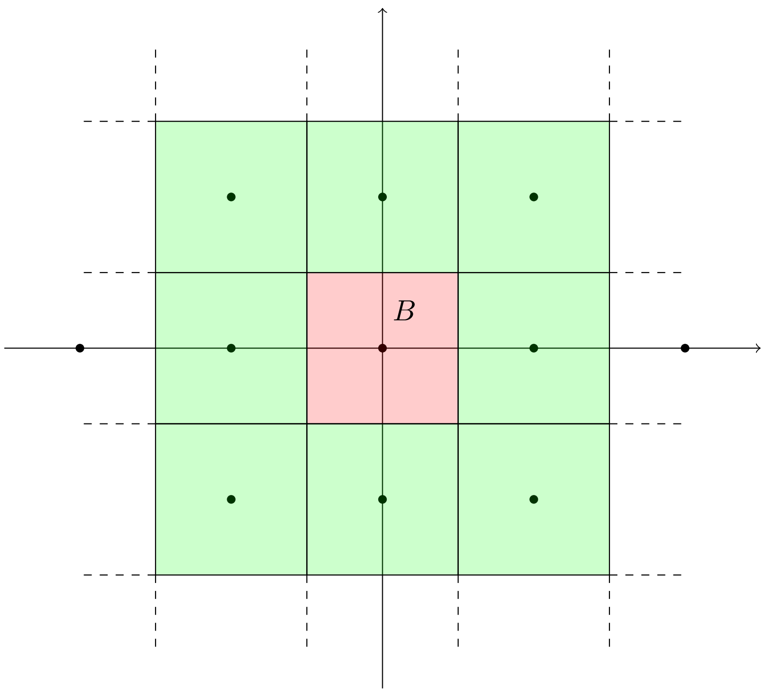
eine Quasi-Isometrie.

Beweis. Siehe Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

Beispiel 5.3.10 Die Gruppe $(\mathbb{Z}^2, +)$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Isometrien via

$$\cdot : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (m, n) \cdot (x, y) \mapsto (x + m, y + n).$$

Wähle $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:



Offenbar gilt

$$\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} g \cdot B = \mathbb{R}^2$$

sowie

$$\begin{aligned} S &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid (m,n) \cdot B \neq \varnothing\} \\ &= \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1),(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)\} \end{aligned}$$

Satz 3.9 liefert also eine Quasi-Isometrie.

Beispiel 5.3.11 Mit Dreiecksgruppen können ähnliche Konstruktionen durchgeführt werden.

Welche Quasi-Isometrie-Invarianten gibt es noch?

- z.B. Wachstumsfunktionen (quadratisch, exponentiell,...)
- isoperimetrische Ungleichungen

Aus der Topologie betrachten wir nun die Klassifikation von kompakten, orientierbaren, 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ("Flächen"): Hier für bezeichne das Geschlecht g eine Fläche die Anzahl der "Henkel" der Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem g bis aus Homöomorphie genau eine solche Fläche F_g: Für $g = 0$ erhalten wir die Sphäre, $g = 1$ entspricht dem Torus (welcher durch das Anbringen eines Henkels an die Sphäre hervorgeht), für $g = 2$ die Sphäre mit zwei Henkeln usw.

- Für $g = 0$ ist F_0 die 2-Sphäre. Sie hat konstante Krümmung 1.
- F_1 ist der flache Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Er ist lokal euklidisch (als Quotient der eukldischen Ebene), hat also konstante Krümmung 0.
- Für $g \geqslant 2$ gilt wegen des Satzes von Gauß-Bonnet, welcher

  $$\int_{F_g} \kappa \mathrm{d}A = 2\pi\chi(F_g) = 2\pi(2-2g)$$

  besagt, dass F_g negativ gekrümmt ist. Mann kann zeigen, dass F_g als Quotient von $\mathbb{H}^2$ nach einer direkten Gruppe realisiert wird.