24. Uneigentliche Integrale

In diesem Paragraphen gelte stets: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gelte $\varphi \in R[a,b]$ für jedes Intervall $[a,b] \subseteq I$.

(I) 1. Typ uneigentlicher Integrale Sei $a \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ a < \beta$ und $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\beta} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ und ist dieser Grenzwert reell, so heißt das **uneigentliche Integral** $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent** und $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t\to\beta} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Ist das Integral $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

Beispiele:

(1)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad (a = 0, \beta = 1)$$

Für $t \in (0,1)$: $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin|_0^t = \arcsin t \to \frac{\pi}{2}$ $(t \to 1)$. Das heißt: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ konvergiert und hat den Wert $\frac{\pi}{2}$.

(2)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (a = 0, \beta = \infty)$$

Für $t > 0$: $\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x|_0^t = \arctan t \to \frac{\pi}{2}$ $(t \to \infty)$. Also: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ konvergiert und hat den Wert $\frac{\pi}{2}$.

(3) *(wichtig)* Sei $\alpha > 0$. Übung:
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \iff \alpha > 1$$

(II) 2. Typ uneigentlicher Integrale Sei $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ a \in \mathbb{R},\ \alpha < a$ und $f : (\alpha, a] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Entsprechend zum 1. Typ definiert man die Konvergenz bzw. Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_\alpha^a f(x)\mathrm{d}x$ (nämlich $\lim_{t\to\alpha} \int_t^a f(x)\mathrm{d}x$).

Beispiele:

(1)
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Für $t < 0$: $\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x|_t^0 = -\arctan t = \arctan(-t) \to \frac{\pi}{2}$ $(t \to -\infty)$

(2) *(wichtig)* Sei $\alpha > 0$. Übung:
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \iff \alpha < 1$$

(III) 3. Typ uneigentlicher Integrale Sei $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < \beta$ und $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ ist **konvergent**, genau dann wenn es ein $c \in (\alpha, \beta)$ gibt mit: $\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert *und* $\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. In diesem Fall gilt: $\int_\alpha^\beta f\mathrm{d}x := \int_\alpha^c f\mathrm{d}x + \int_c^\beta f\mathrm{d}x$ (Übung: diese Definition ist unabhängig von c)

Beispiele:

(1) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ konvergiert und hat den Wert π.

(2) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ divergiert, denn $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ divergiert.

Das Folgende formulieren wir nur für den Typ (I) (sinngemäß gilt alles auch für Typ (II), (III)):

Definition

$\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ heißt **absolut konvergent** $:\iff \int_a^\beta |f|\mathrm{d}x$ ist konvergent.

Satz

Sei $g : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

(1) $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ konvergiert $\iff \exists c \in (a, \beta) : \int_c^\beta f\mathrm{d}x$ konvergiert.

In diesem Fall gilt: $\int_a^\beta f\mathrm{d}x = \int_a^c f\mathrm{d}x + \int_c^\beta f\mathrm{d}x$.

(2) **Cauchykriterium**: $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ konvergiert $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta) : |\int_u^v f\mathrm{d}x| < \varepsilon\ \forall u, v \in (c, \beta)$

(3) Ist $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ absolut konvergent, dann gilt: $\int_a^\beta f\mathrm{d}x < \int_a^\beta |f|\mathrm{d}x$ und $|\int_a^\beta f\mathrm{d}x| < \int_a^\beta |f|\mathrm{d}x$.

(4) **Majorantenkriterium**: Ist $|f| \leq g$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta g\mathrm{d}x$ konvergent, dann konvergiert $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$ absolut.

(5) **Minorantenkriterium**: Ist $f \geq g \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta g\mathrm{d}x$ divergent, dann divergiert $\int_a^\beta f\mathrm{d}x$.

Beispiele:

(1) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=:f(x)}\mathrm{d}x$, $g(x) := \frac{1}{x}$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1\ (x \to \infty)$.

$\implies \exists c \in (1, \infty) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}\ \forall x \geq c \implies f(x) \geq \frac{1}{2x}\ \forall x \geq c$. $\int_c^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ divergiert $\implies \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$ divergiert $\implies \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ divergiert.

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert, $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ divergiert.