23. Analytische Geometrie

23.1. Quadriken

K sei ein Körper, $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} \underbrace{X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}}_{=:\underline{X}^{\underline{i}}} = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} \alpha_{\underline{i}} \cdot \underline{X}^{\underline{i}}$$

$\underline{i}$ heißt **Multiindex**.

Definition: Für $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ sei $|\underline{i}| := i_1 + \ldots + i_n$ der **Grad** von $\underline{X}^{\underline{i}}$.
Der **(Gesamt-)Grad** von f ist $\deg(f) := \max\{|\underline{i}| : \alpha_{\underline{i}} \neq 0\}$.

Ziel: Beschreibe die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f) := \{x = (x_1, \ldots, x_n \in K^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ für ein Polynom f mit $\deg(f) = 2$.

Bemerkung: Den Fall eines oder mehrerer Polynome vom Grad 1 erledigt die lineare Algebra. Mehrere Polynome vom Grad ≥ 2 behandelt die **Kommutative Algebra und algebraische Geometrie**.

Vorarbeit: Klassifiziere die Menge $\mathcal{N}(f)$ durch Klassifizierung der Polynome. (Erinnerung: Klasseneinteilung entspricht einer Äquivalenzrelation)

Dazu sei $G \leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(K^n)$ (Untergruppe).

Definiere hiermit eine Äquivalenzrelation auf Polynomen bzw. auf Teilmengen $T \subseteq K^n$.

$$f_1 \approx_G f_2 :\Longleftrightarrow \exists \mu \in K^\times \exists \varphi \in G : \; f_2 = \mu \cdot (f_1 \circ \phi)$$
$$M_1 \sim_G M_2 :\Longleftrightarrow \exists \varphi \in G : \; M_2 = \varphi(M_1)$$

Klar: $f_1 \approx_G f_2 \implies \mathcal{N}(f_1) \sim_G \mathcal{N}(f_2)$

Ziel: Klassifiziere die Polynome für spezielle G.

- Affine Klassifikation (für Char(K)$\neq$ 2):

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(K^n) = \{\varphi = (A, b) \mid A \in \mathrm{GL}_n(K), b \in K^n\}$$

- Euklidische Klassifikation:

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, b) \mid A \in O_n, b \in \mathbb{R}^n\}$$

Sei nun Char(K)$\neq$ 2.

Vorbereitung: Jedes Polynom f mit $\deg(f) = 2$ hat die Form

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i + \gamma$$

$$\text{mit einer symmetrischen Matrix } A = (\alpha_{ij}) \neq 0,\ b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in K^n,\ y \in K.$$

Beweis: (Symmetrie von A)
Falls A nicht symmetrisch ist, ersetze A durch

$$\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) =: A'$$

■

Beachte: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt

$$f\left(x^\top\right) = x^\top A x + 2 b^\top x + \gamma$$

mit $A^\top = A$.

$Q := \mathcal{N}(f)$ heißt **affine Quadrik**.

> **Lemma:**
> Für f wie oben und $\varphi = (C, d) \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(K^n)$ sei $g(y) := (f \circ \varphi)(y)$. Dann ist
>
> $$g(y) = y^\top A' y + 2 b'^\top y + \gamma'$$
>
> wobei $A' := C^\top A C$, $b' := C^\top (A d + b)$, $\gamma' := f(d)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(\varphi(y)) &= f(Cy + d) \\ &= \underbrace{(Cy + d)^\top}_{y^\top C^\top + d^\top} A (Cy + d) + 2 b^\top (Cy + d) + \gamma \\ &= y^\top \underbrace{C^\top A C}_{=:A'} y + d^\top A C y + \underbrace{\overbrace{y^\top C^\top A d}^{\in K^{1\times 1}}}_{= d^\top A^\top C y = d^\top A C y} + 2 b^\top C y + \underbrace{d^\top A d + 2 b^\top d + \gamma}_{=:\gamma'} \\ &= y^\top A' y + 2 b'^\top y + \gamma' \end{aligned}$$

■

Prinzip der Klassifikation: Zu gegebenem f finde (C, d), so dass A', b", γ' eine einfache, übersichtliche "Normalform" annehmen.

Bemerkung: φ bewirkt Wechsel des Koordinatensystems $y = \varphi^{-1}(x) = D_{\mathcal{L}}(x)$. y beschreibt $Q = \mathcal{N}(f)$ im Koordinatensystem $\mathcal{L}$.

Satz 36 (Satz von der quadratischen Ergänzung):
Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch vom Rang r und $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Dann existiert $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ so dass

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

Beweis: Sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ für alle i, j.
Nutze eine Variante des Gaußalgorithmus; es genügt Diagonalgestalt zu erreichen, den Rest erledigen Vertauschungsmatrizen V_{ij}.

ν-ter Schritt: Angenommen die Zeilen (Spalten) mit einer Nummer kleiner ν haben die gewünschte Form. Dann ist:

$$A_\nu := \begin{pmatrix} * & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & * & & & 0 \\ 0 & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Unterscheide folgende Fälle:

(1) $\alpha_{\nu\nu} \neq 0$:
Mache Zeilenumformung: Subtrahiere Vielfaches der ν-ten Zeile von der unteren Zeile, so dass dort die ν-te Spalte Null wird.
Dies geht mit

$$C' := I - \sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{\alpha_{k\nu}}{\alpha_{\nu\nu}} E_{k\nu} : \quad C'A_\nu = (\beta_{ij})$$

mit $\beta_{\nu+1,\nu} = \ldots = \beta_n = 0$. Die ν-te Zeile ist $\beta_{\nu j} = \alpha_{\nu j}\,(= \alpha_{j\nu})$.

(2) $\alpha_{\nu\nu} = 0$, $\alpha_{kk} \neq 0$ für ein $k > \nu$:
Bilde $A'_\nu := V_{\nu k} A_\nu V_{\nu k}$, dann weiter wie in Fall 1.

(3) $\alpha_{kk} = 0$ für $k = \nu, \dots, n$:
Ist $\alpha_{k\nu} = 0\,\forall k \geq \nu$, so ist bereits A_ν diagonal bis Zeile ν.
Sonst sei $\beta := \alpha_{k\nu} \neq 0$ für ein $k > \nu$ (addiere die k-te Zeile zur ν-ten). Nutze die Additionsmatrix $T := A_{\nu k}(1) = I + E_{\nu k}$ mit $T^\top = I + E_{k\nu}$.
Dann folgt $A'_\nu := TA_\nu T^\top$ hat $\alpha'_{\nu\nu} = 2\beta \neq 0$ (da $\mathrm{Char}(K) \neq 2$). Fahre fort wie in Fall 1. ∎

Vorsicht: Die $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind im allgemeinen nicht eindeutig.

Satz 37 (Trägheitssatz von Sylvester):
Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch vom Rang r.

(1) Für $K = \mathbb{C}$ existiert $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0)$$

(2) Für $K = \mathbb{R}$ existiert $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q}, 0, \dots, 0)$$

wobei p, q durch A eindeutig bestimmt sind.

Beweis: (1) Nach Satz 36 mit $D := \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)$.
Weiteres umformen liefert:

$$D^\top \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) \cdot D = \mathrm{diag}(\beta_1^2\alpha_1, \dots, \beta_r^2\alpha_r, 0, \dots, 0)$$

Falls β_i Nullstelle von $X^2 - \frac{1}{\alpha_i}$ ist, existiert in $\mathbb{C}$ immer in eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

(2) Ähnlich für $\mathbb{R}$. Vorzeichen berücksichtigen

Restbehauptung: p ist eindeutig bestimmt durch A
Behauptung: $p = \max\{\dim U \mid U \leq \mathbb{R}^n \text{ mit } s_A|_U \text{ positiv definit}\}$ wobei $s_A(x, y) := \langle Ax, y\rangle$.
Sei anderes C' mit zugehörigem p', q'. Setze

$$\begin{aligned} b_i &:= Ce_i \\ b_i' &:= C'e_i \\ U &:= \langle b_1, \dots, b_p\rangle \\ U' &:= \langle b_1', \dots, b_{p'}'\rangle \\ V &:= \langle b_{p+1}, \dots, b_{p+q}\rangle \\ V' &:= \langle b_{p'+1}', \dots, b_{p'+q'}'\rangle \end{aligned}$$

Dann sind $s_A|_U$, $s_A|_{U'}$, $-s_A|_V$, $-s_A|_{V'}$ positiv definit.

Für $W := \mathrm{Kern}(\Lambda_A) = \langle b_{r+1}, \dots, b_n\rangle = \langle b_{r+1}', \dots, b_n'\rangle$ gilt

$$\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W = U' \oplus V' \oplus W$$

Damit folgt

$$U \cap (V' \oplus W) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}\forall x \in U \cap (V' \oplus W) : s_A(x,x) \geq 0, s_A(x,x) \leq 0 &\implies s_A(x,x) = 0 \\ &\implies x = 0\end{aligned}$$

Damit folgt $p = \dim U \leq \dim U' = p'$, da

$$\begin{aligned}\dim U' + \dim(V' + W) &= n \\ &\geq \dim(U + V' + W) \\ &= \dim(U \oplus V' + W) \\ &= \dim U + \dim(V' + W)\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $p = p'$. ■

Fortsetzung der Polynomklassifikation ($\deg = 2$) über beliebigem Körper K: Aus obigem Lemma und Satz 37 folgt: Der quadratische Anteil der Polynome $f(x) = x^\top Ax + 2b^\top x + \gamma$ lässt sich durch eine geeignete affine Abbildung $\varphi = (C, d)$ auf folgende einfache Gestalt bringen:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

Beachte: Abändern von C, etwa $C_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, B)$ mit $B \in \mathrm{GL}_{n-r}(K)$, ändert den quadratischen Anteil **nicht**.

Nächste Vereinfachung: linearer Term $2b'^\top y$
Kann eventuell $2b'^\top y = 0$ erreicht werden?

$$b' \overset{\text{Def.}}{=} C^\top(Ad + b) = 0 \iff Ad + b = 0$$

Das heißt das LGS $Az = -b$ hat die Lösung $z = d$.

Definition: Falls eine Lösung d existiert, so heißt d **Mittelpunkt** der Quadrik.

Beachte:

$$y = d + t \in \mathcal{N}(f) \implies d - t \in \mathcal{N}(f)$$

Beweis: $f(d + t) = 0$, das heißt:

$$\begin{aligned}&(d+t)^\top A(d+t) + 2b^\top(d+t) + \gamma = 0 \\ &(d+t)^\top A(d+t) + 2(-Ad)^\top(d+t) + \gamma = 0 \\ &(d+t)^\top A(d+t) - 2d^\top A(d+t) + \gamma = 0 \\ \iff &(d-t)^\top A(d+t) + \gamma = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(d-t) &= (d-t)^\top A(d-t) + 2(-Ad)^\top(d-t) + \gamma \\ &= -(d-t)^\top A(d+t) + \gamma \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Affine Klassifikation der Quadriken mit Mittelpunkt:

(1) Fall $K = \mathbb{C}$:

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 \quad (\gamma' = 0)$

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

(2) Fall $K = \mathbb{R}$:

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 \quad$ (ohne Einschränkung $p \geq q$)

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

Beispiel: $n = r = 2$

(1) Ellipse: $f = X_1^2 + X_2^2 - 1$

(2) Hyperbel: $f = X_1^2 - X_2^2 + 1$

Affine Klassifikation der Quadriken ohne Mittelpunkt:

Jetzt sei $Az = -b$ unlösbar. Es ist aber auch für A Diagonalform erreichbar: $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$, wobei $r = \operatorname{rg}(A)$ ist.
Daraus folgt: es existiert ein d mit

$$Ad + b =: c \in \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle \quad (c \neq 0)$$

Nun wähle $C_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, B)$, so dass $C_1^\top c = -e_{r+1}$.

$$C_1^\top c = C_1^\top (Ad + b) =: b'$$

Beachte: c bleibt unverändert wenn d durch $d + y$ mit $y \in \langle e_{r+1}, \ldots, e_n = \operatorname{Kern}(\Lambda_A)$ ersetzt wird.

Somit: $f = \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 \underbrace{-2X_{r+1}}_{2b'^\top X} + \gamma'$

Schließlich: affine Transformation $\varphi = \left(I, \frac{1}{2}\gamma' e_{r+1}\right)$ führt zu

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 - 2\left(X_{r+1} + \frac{1}{2}\gamma'\right) + \gamma' \\ &= \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 - 2X_{r=1} \end{aligned}$$

(1) Fall $K = \mathbb{C}$: $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - 2X_{r+1} \quad$ (für $r < n$)

(2) Fall $K = \mathbb{R}$: $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 - 2X_{r+1} \quad (p \geq q)$

Euklidische Klassifikation

($\varphi = (x \mapsto Cx + d)$ mit $C \in O_n$ sei zugelassen)
Zur Diagonalisierung von A verwende den Spektralsatz. Das heißt, es existiert $C \in O_n$: $C^\top AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$ sei.

Der Rest ist wie oben. Damit erhalten wir folgende Normalformen:

(1) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2$ (bis auf einen gemeinsamen Faktor $\mu \neq 0$ eindeutig)

(2) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 + 1$

(3) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 - 2X_{r+1}$

Definition: Die Zahlen $|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$ heißen **Halbachsenlängen**, die Geraden $\langle e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, r)$ heißen die **Hauptachsen** der Quadrik in Normalform. Der Übergang in Normalform heißt auch **Hauptachsentransformation**.

23.2. Der Tangentialraum

Sei K ein beliebiger Körper.

Definition: Die Nullstellenmenge $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f)$ eines Polynoms $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ heißt **Hyperfläche**.

Im folgenden sei stets $\mathcal{N}(f) \neq \varnothing$. Es sei $P \in \mathcal{F} \subseteq K^n$ ein Punkt auf der Hyperfläche.
Betrachte die Geraden $G = P + \langle u \rangle$ mit $u \in K^n$.

$$Q \in G : \; Q = P + \tau u \quad \text{mit } u \in K^n$$

Beachte: $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ impliziert $T | \, f(P + Tu) \in K[T]$ (da Nullstelle bei $T = 0$).

Definition: Eine Gerade heißt **Tangente** an $\mathcal{F}$ in P, falls $T^2 \big| \, f(P + Tu)$ gilt.

Ziel: Bestimme alle Tangenten durch P (d.h. u variiert).

Dazu schreibe:

$$f(P + Tu) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots \quad \text{mit } \alpha_i = \alpha_i(u)$$

Es gilt: $\alpha_1 \in \operatorname{Hom}(K^n, K)$. Daraus folgt: es existiert ein Vektor $J_p(f) := J_p \in K^{1 \times n}$ mit $\alpha_1(u) = J_p \cdot u$. J_p heißt **Jacobi-Matrix**.

In Analogie zur Analysis schreibe

$$J_p =: \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=p}$$

Es gilt

$$J_p = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \Big|_{x=p}$$

Das heißt:

$$G = P + \langle u \rangle \text{ ist Tangente} \iff J_p u = 0 \iff u \in J_p^\perp$$

Definition: (a) $P \in \mathcal{F}$ heißt **regulär**, falls $J_p \neq 0$.
Die Hyperebene $T_p(\mathcal{F}) := P + J_p^\perp$ heißt **Tangentialraum**.

(b) Sonst heißt P **singulär** (oder **Singularität**).

Beispiel: (1) "Kurven" $y = p(x)$ mit $p(x) \in K[x]$

$$f(X, Y) = Y - p(X)$$

$\mathcal{N}(f)$ ist Singularitätenfrei, da

$$\begin{aligned} J_p &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial X}, 1 \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(2) Kurve $y^2 - x^3$ $\quad f(X, Y) = Y^2 - X^3$

$$J_p = \left(3X^2, 2Y \right)_{(X,Y)=P} = 0 \iff P = (0, 0)$$

Also: $(0, 0)$ ist die einzige Singularität.

Satz 38:
Sei φ eine Affinität von K^n und $\mathcal{F}$ eine Hyperfläche. Dann gilt

(1) $P \in \mathcal{F}$ regulär $\Longleftarrow$ $\varphi(P)$ regulär in $\varphi(\mathcal{F})$

(2) P regulär $\iff T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) = \varphi(T_p(\mathcal{F}))$

Beweis: (1) $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{N}\left(f \circ \varphi^{-1} \right)$
Taylorentwicklung von $f \circ \varphi^{-1}$ bei $\varphi(P)$
Schreibe:

$$\varphi^{-1}(x) = Ax + b$$

mit $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$.
Kettenregel anwenden auf $f \circ \varphi^{-1}(X) = f(AX + b)$ mit

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},\ AX + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial X_i}(AX+b)\bigg|_{X=\varphi(P)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}\bigg|_{Y=P} \cdot \frac{\partial (AX+b)_j}{\partial X_i}\bigg|_{X=\varphi(P)} \\
&= J_p(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) = J_P(f) \cdot A$$

$$\begin{aligned}
P \text{ regulär in } \mathcal{F} &\iff J_P(f) \neq 0 \\
&\overset{\exists A^{-1}}{\iff} J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \neq 0 \\
&\iff \varphi(P) \text{ regulär in } \varphi(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) &= \varphi(P) + J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)^{\perp} \\
&\overset{!}{=} \varphi(\underbrace{P + J_P(f)^{\perp}}_{=T_P(\mathcal{F})})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_P(f)Av = 0 &\iff Av \in J_P(f)^{\perp} \\
&\iff v \in A^{-1}\left(J_P(f)^{\perp}\right)
\end{aligned}$$

Beachte: $A^{-1} = \Lambda_\varphi$

Beispiel: $\mathcal{F} = Q$ Quadrik mit $f(P) = P^\top AP + 2b^\top P + \gamma = 0 \quad \left(A = A^\top\right)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
f(P+Tu) &= \underbrace{f(P)}_{=0} + 2TP^\top Au + 2Tb^\top u + T^2u^\top Au \\
&= T \cdot 2\left(P^\top A + b^\top\right)u + T^2u^\top Au \\
&= T \cdot J_P(f) \cdot u + T^2u^\top Au
\end{aligned}$$

P singulär genau dann wenn $f(P) = 0$ und $AP = -b$ (das liefert entweder eine Hyperebene oder die leere Menge).

Folgerung (aus Satz 38):

(1) Alle Singularitäten bleiben bei Affinitäten erhalten

(2) Es genügt die Normalformen der affinen Klassifikation auf Singularitäten zu untersuchen

23.3. Die oskulierende Quadrik

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f) \in K^n$ Hyperfläche, $P \in \mathcal{F}$ regulärer Punkt mit

$$T_P(\mathcal{F}) = \left\{ P + (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top,\ \lambda_i \in K,\ \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top = 0 \right\}$$

Die definierende Gleichung ist aus der formalen Taylorentwicklung um P ablesbar.

$$f\left(P + (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top\right) = f(P) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X_i X_j}\right|_{X=P} \lambda_i \lambda_j + \text{ höhere Terme}$$

(Dabei ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$)
Daher sagt man: Der Tangentialraum approximiert $\mathcal{F}$ in einer Umgebung von P in "erster" Näherung (d.h. Terme vom Grad größer 2 weglassen). Die Approximation wird besser je höher der Grad der zugelassenen Terme ist.

Wir lassen nun nur Terme bis zum Grad 2 zu.

Definition: Die Quadrik

$$Q_{P,\mathcal{F}} := \left\{ P + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X_i X_j}\right|_{X=P} \cdot \lambda_i \lambda_j = 0 \right\}$$

heißt **oskulierende** Quadrik zu $\mathcal{F}$ im Punkt P (auch **Schmieg-Quadrik** genannt).

Bemerkung: Die oskulierende Quadrik ist eine affine Invariante wie der Tangentialraum, d.h. für jede Affinität φ gilt:

$$Q_{\varphi(P),\varphi(\mathcal{F})} = \varphi\left(Q_{P,\mathcal{F}}\right)$$

Beweis: wie für den Tangentialraum. ∎

Beispiel: Die **Torusfläche**
$\mathcal{T} = \mathcal{N}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ für

$$f(x, y, z) = (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) - 4R^2(x^2 + y^2)$$

Wir benötigen eine Liste der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ f_y &= 4y(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ f_z &= 4z(R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Welche singulären Punkte $f|_P = 0 = f_x|_P = f_y|_P = f_z|_P$ existieren?

- Fall $0 < r < R$:

$$R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 0 \quad \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$$

Aus $P = (x, y, z)$ singulär folgt $z = 0$ (da $f_z|_P = 0$). Währe $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, so ergäbe $f_x = f_y = 0$

$$x^2 + y^2 = R^2 + r^2$$

In f einsetzen:

$$\left(2R^2\right)^2 = 4R^2(R^2 + r^2) \quad \text{Widerspruch!}$$

Also folgt $x = y = z = 0$. Aber: $f(0,0,0) = R^2 - r^2 > 0$, da $R > r$, d.h. $(0,0,0) \notin \mathcal{T}$.

Damit sind alle Punkte auf $\mathcal{T}$ regulär.

- Fall $r \geq R > 0$:
  Es gibt singuläre Punkte. Welche? Übung.

23.4. Durchschnitte von Hyperebenen

Sei K ein beliebiger Körper, $R = K[X_1, \ldots, X_n]$.

Problem: Beschreibe die (gemeinsamen) Nullstellen endlich vieler vorgegebener Polynome $f_i \in \mathbb{R}$.

Mit $\mathcal{F}_i := \mathcal{N}(f_i)$ betrachte also

$$\mathcal{D} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{N}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

Eine Gerade $G = P + \langle u \rangle$ heißt Tangente an $\mathcal{D}$ in $P \in \mathcal{D}$, wenn G Tangente an jede Hyperfläche $\mathcal{F}_i$ ist, d.h.

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n}\right)_{X=P} \cdot u = 0 \quad \forall i$$

d.h. mit der **Jacobi-Matrix**:

$$J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X=P} \in K^{m \times n}$$

Es gilt: $J_P \cdot u = 0$.

Definition: Die $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ schneiden sich in $P \in \mathcal{D}$ **transversal** wenn $\operatorname{rg}(J_P) = m$. Dann heißt P regulärer Punkt von $\mathcal{D}$ und

$$T_{P,\mathcal{D}} := P + \operatorname{Kern}\left(\Lambda_{J_P}\right)$$

heißt Tangentialraum.

Bemerkung: $T_{P,\mathcal{D}} = T_{P,\mathcal{F}_1} \cap \ldots \cap T_{P,\mathcal{F}_n}$ bei transversalem Schneiden.

Beispiel: Die orthogonale Gruppe $O_n = \left\{A = (\alpha_{rs}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^\top = I\right\}$

(1) O_n ist der Durchschnitt von Hyperflächen (Quadriken) im $\mathbb{R}^3$.

Der zugehörige Polynomring ist

$$R = \mathbb{R}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nn}] \in \mathbb{R}[X]$$

Nach Definition von O_n gilt:

$$O_n = \left\{ (\alpha_{rs}) \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \delta_{ij} \right\}$$

d.h. $\alpha_{rs} \in \mathbb{R}^{n^2}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$f_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} X_{jk} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}$$

Beachte: $f_{ij} = f_{ji}$, daraus folgt $O_n = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathcal{F}_{ij}$ mit $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{N}(f_{ij})$.

(2) Die $\mathcal{F}_{ij}$ schneiden sich transversal in $P = I$.

Also insbesondere

$$T_{I,O_n} = \bigcap_{i \leq j} T_{I,\mathcal{F}_{ij}}$$

mit

$$\begin{aligned}
\dim T_{I,O_n} &= n^2 - \operatorname{card}\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} \\
&= n^2 - \sum_{j=1}^{n} j \\
&= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} n(n-1)
\end{aligned}$$

Beweis (der Transversalität): Aus $\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} =: f_{ik,pq}$ folgt: Jacobi-Matrix $J_I = \alpha_{ik,pq}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times n^2}$ mit $\alpha_{ik,pq} := f_{ik,pq}|_{X=I}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{ij} X_{kj}}{\partial X_{pq}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} \frac{\partial X_{kj}}{\partial X_{pq}} + X_{kj} \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{pq}} \right) \\
&= X_{iq} \delta_{kp} + X_{kq} \delta_{ip}
\end{aligned}$$

Auswerten bei $P = I$ liefert $\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip} = \alpha_{ik,pq}$.

Bilde das Skalarprodukt zweier Zeilen von J_I (Zeile ik mit Zeile jl):

$$\begin{aligned}\sum_{pq} \alpha_{ik,pq} \cdot \alpha_{jl,pq} &= \sum_{pq} (\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip})(\delta_{jq}\delta_{lp} + \delta_{lq}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{ji}\delta_{lk} + \delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{li} + \delta_{lk}\delta_{ji} \\ &= 2(\delta_{ij}\delta_{lk} + \delta_{jl}\delta_{jk}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } ik \neq jl \\ 2 \vee 4 & \text{für } ik = jl \end{cases}\end{aligned}$$

$\delta_{il}\delta_{jk} = 1$ impliziert $i = l$, $j = k$ und wegen $i \leq k$, $j \leq l$ gilt $i \leq k = j \leq l = i$, also $ik = ii = il$.

Damit folgt: Die Zeilen von J_I sind paarweise orthogonal und jeweils ungleich Null. $\mathrm{rg}(J_I)$ ist gleich der Anzahl Zeilen. Das heißt die $\mathcal{F}_{ij}$ schneiden sich transversal bei I. ∎

(3) Der Tangentialraum bei I ist

$$T_{I,O_n} = I + \bigoplus_{i<k} \mathbb{R}(\underbrace{E_{ik} - E_{ki}}_{=:B_{ik}})$$

Beweis: Die B_{ik} sind offenbar linear unabhängig im $\mathbb{R}^{n^2}$, also

$$\dim\langle B_{ik} \mid i < k\rangle = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

und $B_{ik} \in \mathrm{Kern}(\Lambda_{J_I})$, da $J_I \cdot B_{ik} = 0$ (leicht). ∎

Definition: Eine Untergruppe $\mathcal{J} \leq \mathrm{GL}_n(K)$ (wie hier O_n), die als Durchschnitt von Hyperflächen definiert ist, heißt **algebraische (Matrizen-)Gruppe**.

Bemerkung: Solche $\mathcal{J}$ haben den großen Vorzug, dass Regularität an einem Punkt $Q \in \mathcal{J}$ sich auf alle anderen Punkte von $\mathcal{J}$ überträgt.

Satz 39:
Sei $\mathcal{J}$ eine algebraische Gruppe mit mindestens einem Punkt. Dann ist jeder Punkt $Q \in \mathcal{J}$ regulär und

$$T_{Q,\mathcal{J}} = Q \cdot T_{I,\mathcal{J}} = \{Q \cdot T \mid T \in T_{I,\mathcal{J}}\}$$

Beweis: $\Lambda_Q : B \mapsto Q \cdot B$ ist eine Affinität von $K^{n\times n}$.

Schon gesehen: Affinitäten erhalten die Regularität und führen Tangentialräume ineinander über. ∎

Korollar:
Q_n ist Singularitätenfrei und die Dimension von T_{P,O_n} ist $\frac{n(n-1)}{2}$.