0.7.4 Aufgabe 4

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

Wir betrachten: (i) $Ax = b$ (ii)$A^\top Ax = A^\top b$
Zu zeigen: (i) lösbar $\Rightarrow$ (ii) lösbar und die Lösungsmengen sind gleich **Beweis:**

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : Ax_0 = b \\ &\Rightarrow \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : (A^\top A) \cdot x_0 = A^\top b \Leftrightarrow \text{(ii) lösbar} \end{aligned}$$

Und: Da x_0 sowohl (i) als auch (ii) löst, reicht es z.z., dass die Lösungsmengen der homogenen LGS'e gleich sind.

Sei x_1 eine Lösung von $Ax = 0$, d.h. es gilt $Ax_1 = 0 \Rightarrow A^\top x_1 = A^\top \cdot 0 = 0$
Also ist x_1 Lösung von $A^\top Ax = 0$

Sei x_2 eine Lösung von $\underbrace{A^\top Ax = 0}_{(*)}$, d.h. $A^\top Ax_2 = 0$

$$\begin{aligned} Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y \; (*) \quad \Rightarrow \quad & x^\top A^\top Ax = x^\top = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (Ax)^\top (Ax) = 0 \Leftrightarrow y^\top y = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + ... + y_n^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y_1 = y_2 = ... = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & Ax_2 = 0 \end{aligned}$$

Also ist x_2 Lösung von $Ax = 0 \Rightarrow$ Lösungsmengen gleich $\square$

0.8 Übung 7, 17.12.2004

0.9 Übung 8, 3.01.2005

0.10 Übung 9, 10.01.2005

0.11 Übung 10, 17.01.2005

0.11.1 Aufgabe 1

a) Sei $x = (x_1, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\phi(x) = Ax = (a_1, ..., a_n) \cdot (x_1, ..., x_n)^\top = x_1 \cdot a_1 + ... + x_n \cdot a_n$. Also ist Bild $\phi = \{\phi(x) | x \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 \cdot a_1 + ... + x_n \cdot a_n | x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\} = [a_1, ..., a_n]$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$