

## 13 Konfidenzbereiche

Sei  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$  statistisches Modell,  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^s$ .

### 13.1 Definition

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Eine Abbildung  $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$  heißt **Konfidenzbereich** für  $g(\vartheta)$  zum Niveau  $1 - \alpha$  genau dann, wenn

- (1)  $\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\} \in \mathcal{B} \quad \forall \vartheta \in \Theta$
- (2)  $P_\vartheta(\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\}) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$ .

Falls  $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$  eine Zufallsvariable mit Verteilung  $P_\vartheta$  ist, so die zweite Bedingung gleichbedeutend mit

$$P_\vartheta(C(X) \ni g(\vartheta)) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Falls  $s = 1$  und  $C(x)$  für alle  $x \in \mathfrak{X}$  ein Intervall ist, so heißt  $C(\cdot)$  ein **Konfidenzintervall**.<sup>36</sup>

Beispiel:

$$X = (X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), g(\vartheta) = \mu$$

$$C(X) = [\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}]$$

ist Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha$  nach 2.4.

### 13.2 Bemerkung (Pivot-Methode)

Praktische Berechnung von Konfidenzintervallen:

Finde Funktion  $k$  so, dass die Verteilung von  $k(X, \vartheta)$  unabhängig von  $\vartheta$  ist, d.h., dass  $H(x) := P_\vartheta(k(X, \vartheta) \leq x)$  unabhängig von  $\vartheta$  ist.

Dann existieren Konstanten  $a, b$ :

$$P_\vartheta(a \leq k(X, \vartheta) \leq b) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

<sup>36</sup>Anmerkung: Ermitteln wir z.B. das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Erwartungswert einer Population, dann bedeutet dies, dass wir bei durchschnittlich 5 von 100 gleichgroßen Zufallsstichproben ein Konfidenzintervall ermitteln, das den Erwartungswert nicht enthält.

Falls man das Ereignis  $\{a \leq k(X, \vartheta) \leq b\}$  umschreiben kann als  $\{U(X) \leq g(\vartheta) \leq O(X)\}$ , so ist  $[U(X), O(X)]$  Konfidenzintervall für  $g(\vartheta)$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

Im Beispiel oben:  
Verteilung von

$$k(X, \vartheta) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

unabhängig von  $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ .

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$  ist Pivot für  $g(\vartheta) = \mu$ .

$[-t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \leq k(X, \vartheta) \leq t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}] \rightarrow C(X)$  im Beispiel oben]

Weiteres Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} U(0, \vartheta), \vartheta > 0, g(\vartheta) = \vartheta$

MLE<sup>37</sup> von  $\vartheta$ :  $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

Verteilungsfunktion von  $X_{(n)}$  ist  $(\frac{x}{\vartheta})^n, 0 \leq x \leq \vartheta$

$\Rightarrow$  Verteilungsfunktion von  $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$  ist  $x^n, 0 \leq x \leq 1$ , also ist  $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$  Pivot für  $\vartheta$ .

Wähle a, b so, dass

$$P_{\vartheta}(a \leq \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leq b) = b^n - a^n \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \quad (\forall \vartheta \in \Theta)$$

Dann ist  $[\frac{X_{(n)}}{b}, \frac{X_{(n)}}{a}]$   $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\vartheta$ .

Wie a und b wählen?

- Intervall  $[a, b]$  „kleinstmöglich“ wählen
- andere Optimalitätsbegriffe

### 13.3 Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und (nichtrandomisierten) Tests

1.  $C(x)$  sei Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha$  für  $\vartheta$  (d.h.

$$P_{\vartheta}(C(X) \ni \vartheta) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta).$$

Zu testen ist  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ .

Definiere Test  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \vartheta_0 \notin C(x) \\ 0 & , \vartheta_0 \in C(x) \end{cases}$$

---

<sup>37</sup>ML-Schätzer (*Estimator*)

Umfang von  $\varphi$ :

$$E_{\vartheta_0} \varphi(x) = 1 - \underbrace{P_{\vartheta_0}(\vartheta_0 \in C(x))}_{\geq 1-\alpha} \leq \alpha$$

d.h.  $\varphi$  ist Niveau  $\alpha$ -Test.

2. Umgekehrt sei für jedes  $\vartheta_0 \in \Theta$  ein Niveau  $\alpha$ -Test  $\varphi_{\vartheta_0}(x)$  für obige Situation gegeben (d.h.  $P_{\vartheta_0}(\varphi_{\vartheta_0}(X) = 0) \geq 1 - \alpha$ ,  $\vartheta_0 \in \Theta$ ).  
Definiere  $C^*(x) = \{\vartheta_0 : \varphi_{\vartheta_0}(x) = 0\}$

$$\Rightarrow P_{\vartheta}(C^*(X) \ni \vartheta) = P_{\vartheta}(\varphi_{\vartheta}(x) = 0) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

d.h.  $C^*(X)$  ist  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für  $\vartheta$ .

Beispiel (1 Stichproben-t-Test):

1.  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ :  $[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$ .  
Lehne  $H_0 : \mu = \mu_0$  ab, falls  $\mu_0 \notin$  Konfidenzintervall.

$$\begin{aligned} &\hat{=} |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\hat{=} \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

2. Umgekehrt:

$$\frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Ablehnbereich für Test  $\varphi_{\mu_0}$  von  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  für jedes  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \{\mu : \varphi_{\mu}(x) = 0\} \\ &= \left\{ \mu : \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left\{ \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ .

Bemerkungen:

- (i) Es besteht also eine Dualität zwischen Signifikanztests und Konfidenzbereichen, allerdings nur, wenn eine ganze Schar von Hypothesen

$H_{\vartheta_0} : \vartheta = \vartheta_0$  getestet wird.

Bei Beschränkung auf einen Test (was bei praktischer Testdurchführung immer der Fall ist) ist der Test „weniger“ informativ.

[Allerdings: Bei Tests wird in der Praxis p-Wert (siehe Beispiel nach 11.4) angegeben  $\Rightarrow$  andere Information als Konfidenzintervall].

- (ii) UMP(U)-Tests führen auf Konfidenzbereiche, die gewisse (komplizierte) Optimalitätseigenschaften haben.  
(Im Allgemeinen aber nicht kürzeste Konfidenzintervalle.)

### 13.4 Definition

Ist für jedes  $n$  die Abbildung  $C_n : \mathfrak{X}_n \rightarrow \mathbb{R}^s$  ein Konfidenzbereich für  $g(\vartheta)$ , basierend auf  $(X_1, \dots, X_n)$ , und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta}(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}_n : C_n(x_1, \dots, x_n) \ni g(\vartheta)\}) = 1 - \alpha$$

für alle  $\vartheta \in \Theta$ , so heißt die Folge  $(C_n)$  ein **asymptotischer Konfidenzbereich** für  $g(\vartheta)$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

### 13.5 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X, EX^2 < \infty, F(x) = P(X \leq x), \vartheta := F,$   
 $g(\vartheta) = \int x dF(x) = EX =: \mu$

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 := \text{Var}(X)$$

ZGWS:  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta} \left( \underbrace{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau } 1-\alpha} \right) = 1 - \alpha$$

### 13.6 Hilfssatz

$$Y \sim \mathcal{N}_k(0, \Sigma), \Sigma > 0 \implies Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

Beweis:

$$\Sigma^{-1/2} Y \sim \mathcal{N}_k(0, I_k) \implies \|\Sigma^{-1/2} Y\|^2 = Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

### 13.7 Asymptotische Konfidenzbereiche in parametrischen Modellen

Seien  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(\xi; \vartheta)$ ,  $\vartheta \in \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $f$  eine reguläre Dichte im  $\mathbb{R}^s$  bezüglich  $\mu$  ( $= \lambda^s$  oder Zählmaß).

Sei  $\hat{\vartheta}_n$  eine Schätzfolge für  $\vartheta$  mit der Eigenschaft

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta \quad (1)$$

wobei  $\Sigma(\vartheta) > 0$  und  $\Sigma(\cdot)$  stetig.

Aus (1) und Hilfssatz 13.6 folgt, dass

$$n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \chi_k^2, \quad \vartheta \in \Theta$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left( n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \chi_{k;1-\alpha}^2 \right) = 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Da die Menge

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^k : (\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \frac{\chi_{k;1-\alpha}^2}{n} \right\}$$

ein Ellipsoid in  $\mathbb{R}^k$  mit Zentrum  $\hat{\vartheta}_n$  ist, handelt es sich hier um einen elliptischen Konfidenzbereich für  $\vartheta$ .

Falls  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, so folgt aus (1), dass

$$\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta)) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\vartheta)),$$

wobei

$$\sigma^2(\vartheta) = g'(\vartheta)^T \Sigma(\vartheta) g(\vartheta).$$

Somit gilt

$$\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, 1).$$

Mit  $r_n = \sigma(\hat{\vartheta}_n) \cdot \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) / \sqrt{n}$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left( g(\hat{\vartheta}_n) - r_n \leq g(\vartheta) \leq g(\hat{\vartheta}_n) + r_n \right) = 1 - \alpha.$$

Man hat also einen asymptotischen Konfidenzbereich für  $g(\vartheta)$  konstruiert.

### 13.8 Beispiele

- a)  $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p)$ ,  $0 < p < 1$ ,  $\vartheta = p$ ,  $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$   
ZGWS:

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \underbrace{p(1-p)}_{=\Sigma(\vartheta)})$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(p) = \log \frac{p}{1-p}$  „logit“-Funktion

$$g'(p) = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(p) = g'(p)^2 \Sigma(p) = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \log \frac{p}{1-p}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{p(1-p)})$$

und

$$[\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}, \log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} + \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}]$$

ist asymptotisches  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\log \frac{p}{1-p}$ .

- b) Konfidenzintervall für „log odds ratio“  
 $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bin}(1, p)$ ,  $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Bin}(1, q)$

$$\Theta = \log \frac{\frac{p}{1-p}}{\frac{q}{1-q}}, \quad \Theta = 0 \Leftrightarrow p = q$$

siehe Übung

### 13.9 Beispiel

Sei  $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ ,  $X_i = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} \\ X_i^{(2)} \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

$\Sigma$  regulär,  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\bar{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n^{(1)} \\ \bar{X}_n^{(2)} \end{pmatrix}$  mit  $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$ ,

$k = 1, 2$

$\Sigma$  bekannt:  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$

$$\stackrel{13.6}{\Rightarrow} n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \sim \chi_2^2$$

$$\Rightarrow P_\mu(\underbrace{n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \leq \chi_{2;1-\alpha}^2}_{\text{elliptischer } (1-\alpha)\text{-Konfidenzbereich für } \mu}) = 1 - \alpha$$

$\Sigma$  unbekannt: Konsistenter Schätzer für  $\Sigma$  ist

$$\hat{\Sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)^T$$

$$\vartheta = (\mu, \Sigma), \quad \hat{\vartheta}_n = (\bar{X}_n, \hat{\Sigma}_n)$$

Für  $n > d(= 2)$ <sup>38</sup> ist  $\hat{\Sigma}_n$  nicht singulär mit Wahrscheinlichkeit 1.

$$\Rightarrow n(\bar{X}_n - \mu)^T \hat{\Sigma}_n^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \chi_2^2$$

Betrachte  $g(\vartheta) = \mu_1 - \mu_2$ .

$$g'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2(\vartheta) = (1, -1)\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}((\bar{X}_n^{(1)} - \bar{X}_n^{(2)}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

---

<sup>38</sup>d ist Dimension

