

# 1 Maß-Integral und Erwartungswert

Stochastik I: Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bestehend aus:

- (i)  $\Omega \neq \emptyset$  bel. Menge, der Ergebnisraum
- (ii)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra, d.h.
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
  - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- (iii)  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h.
  - $P(\Omega) = 1$
  - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , paarweise disjunkt  $\implies P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$   
( $\sigma$ -Additivität)

Statt das Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  betrachten wir jetzt eine allgemeine Funktion  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ , die beliebige positive Werte annehmen kann.

## Definition

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  heißt **Maß** auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ , wenn  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  für alle paarweise disjunkten Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt **Maßraum**.

## Bemerkung

Da  $\mu(A) = \infty$  möglich, definieren wir:  $a + \infty = \infty \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

## Definition

Sei  $\mu$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

1.  $\mu$  heißt **endlich**, falls  $\mu(\Omega) < \infty$ ,
2.  $\mu$  heißt  **$\sigma$ -endlich**, falls  $\exists$  eine Folge  $(A_i), i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$  und  $\mu(A_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}$ .

## Beispiel 1.1

- a) Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $\omega \in \Omega$  fest.

$$\delta_{\omega}(A) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $A \in \mathcal{A}$  definiert ein Maß.

$\delta_{\omega}$  heißt **Einpunktmaß** oder **Dirac-Maß** im Punkt  $\omega$ . Da  $\delta_{\omega}(\Omega) = 1$  ist  $\delta_{\omega}$  sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

- b)  $\mu := \sum_{\omega \in \Omega} \delta_\omega$  ist das **abzählende Maß** auf  $\Omega$ .  
 (Falls  $|A| < \infty$  :  $\mu(A) = |A|$  Anzahl der Elemente in  $A$ .)  
 $\mu$  ist endlich  $\Leftrightarrow \Omega$  ist endlich,  
 $\mu$  ist  $\sigma$ -endlich  $\Leftrightarrow \Omega$  ist abzählbar.
- c) Sei  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  Borelsche  $\sigma$ -Algebra.

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\underbrace{\{(a, b], -\infty < a < b < \infty\}}_{=: \varepsilon \text{ Erzeuger}}) = \sigma(\varepsilon) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } \varepsilon \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Sei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Durch  $\lambda((a, b]) := b - a$  wird auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  ein Maß definiert, das sogenannte **Lebesgue-Maß**. Die Eindeutigkeit von  $\lambda$  folgt aus dem **Eindeutigkeitssatz für Maße**:

Sei  $\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon)$  und  $\varepsilon$  durchschnittsstabil (d.h.:  $A, B \in \varepsilon \implies A \cap B \in \varepsilon$ ). Weiter seien  $\mu_1, \mu_2$  Maße auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu_1(A) = \mu_2(A) \forall A \in \varepsilon$ .  $\exists$  eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \varepsilon$  mit  $A_n \uparrow \Omega$  und  $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < \infty \forall n$ , so gilt  $\mu_1 = \mu_2$ .

Eine nichttriviale Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass  $\lambda$  auf ganz  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  zu einem Maß fortgesetzt werden kann. (gezeigt von Carathéodory; s. z.B. Henze, Bauer)

Bei  $\Omega = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ , ist  $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subset \bar{\mathbb{R}} | B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{\infty, -\infty\} | B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$  eine  $\sigma$ -Algebra (analog  $\mathfrak{B}((-\infty, \infty))$  und  $\bar{\lambda}(B) = \lambda(B) \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  und  $\bar{\lambda}(\{\infty\}) = \bar{\lambda}(\{-\infty\}) = 0$

$\lambda$  ist nicht endlich, da  $\lambda((-\infty, a]) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda((a-n, a-n+1])}_{=1} = \infty$ , aber

$\sigma$ -endlich, da  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n] = \mathbb{R}$ ,  $\lambda((-n, n]) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .

- d) Seien  $\mu_n$  Maße,  $n \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n$$

wieder ein Maß.

**Konvention:**  $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, a > 0, 0 \cdot \infty = 0$

Spezialfall:  $\mu_n = \delta_{\omega_n} (\omega_n \in \Omega), b \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{\omega_n}$$

ist dann ein diskretes, auf  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  konzentriertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

- e) Sei  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wachsend und rechtsseitig stetig (Eine Funktion mit diesen Eigenschaften heißt **maßdefinierende Funktion**. Gilt zusätzlich  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$ , dann ist  $G$  eine Verteilungsfunktion.)

$$\mu_G((a, b]) := G(b) - G(a)$$

für  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  definiert  $\mu_G$  ein Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ , das sogenannte **Lebesgue-Stieltjes-Maß** zu  $G$ . (Fortsetzungsproblem analog zu c) )

Ist  $G$  eine Verteilungsfunktion mit  $G(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$  mit

$$f \geq 0 : \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1,$$

so ist  $\mu_G((a, b]) = \int_a^b f(y)dy$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte  $f$ .

### Bemerkung

Viele der in Stochastik I für Wahrscheinlichkeitsmaße besprochene Eigenschaften gelten auch für allgemeine Maße  $\mu$ , z.B.  $\mu$  ist stetig von unten, d.h.

$$\underbrace{A_n \uparrow}_{A_n \subset A_{n+1}} \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Bei der Stetigkeit von oben brauchen wir eine Zusatzbedingung:

$$\underbrace{A_n \downarrow}_{A_n \supset A_{n+1}} \text{ mit } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A, \underline{\mu(A_n) < \infty} \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

### Beispiel

Lebesgue-Maß:  $A_n = (-\infty, -n] \downarrow, \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n], \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((-\infty, -n]) = \infty \neq 0 = \lambda(\emptyset)$

### Definition

Seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  zwei meßbare Räume. Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  heißt  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -**messbar**, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}, \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

$f$  mit dieser Eigenschaft heißt **Zufallsgröße**. Ist  $\Omega' = \mathbb{R}$ , dann **Zufallsvariable**.

Im Folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Ziel ist es, möglichst vielen Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein Integral bezüglich  $\mu$  zuzuordnen. Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten:

- 1.) Sei  $\mathcal{E} := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}, f(\Omega) \text{ endlich}\}$  die Menge der **Elementarfunktionen** auf  $\Omega$ .

Ist  $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \alpha_j \geq 0$ , so gilt:

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$$

mit  $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$  und  $\Omega = \sum_{j=1}^n A_j$ . Eine Darstellung von  $f$  mit dieser Eigenschaft heißt „Normaldarstellung“ von  $f$ .

Normaldarstellung ist nicht eindeutig.

### Definition

Ist  $f$  eine Elementarfunktion mit Normaldarstellung  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ , so heißt  $\int f d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$  das  **$\mu$ -Integral** von  $f$ . Schreibweise  $\int f d\mu = \mu(f)$ .

**Lemma 1.1 (Unabhängigkeit des Integrals von der Normaldarstellung)**

Für zwei Normaldarstellungen

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$$

einer Funktion  $f \in \mathcal{E}$  gilt:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

**Beweis**

$$\text{Voraussetzung} \implies \Omega = \sum_{j=1}^n A_j = \sum_{i=1}^m B_i$$

$$\begin{aligned} \implies \mu(A_j) &\stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) \\ \mu(B_i) &= \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i) \end{aligned}$$

$$\mu(A_j \cap B_i) \neq 0 \implies A_j \cap B_i \neq \emptyset \implies \alpha_j = \beta_i$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \underbrace{\alpha_j}_{\beta_i} \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.2 (Eigenschaften des  $\mu$ -Integrals)**

- a)  $\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$  für  $A \in \mathcal{A}$
- b)  $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$  für  $f \in \mathcal{E}, \alpha \geq 0$
- c)  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$  für  $f, g \in \mathcal{E}$
- d)  $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$  für  $f, g \in \mathcal{E}$

**Beweis**

a), b) klar

c) Sei  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ ,  $g = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
 g &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{B_i \cap A_j} \\
 \text{also } f + g &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_j + \beta_i) \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
 \Rightarrow \mu(f + g) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i)}_{=\mu(B_i)} \\
 &= \mu(f) + \mu(g)
 \end{aligned}$$

d) folgt mit gleicher Darstellung wie in c) ■

### Bemerkung

- a) Ist  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{E}$ , aber nicht notwendig eine Normaldarstellung, so folgt aus Lemma 1.2 c)  $\int f d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$
- b) Ist  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Zufallsvariable mit endlich vielen Werten  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , so gilt:

$$\begin{aligned}
 \int X dP &= \sum_{j=1}^n x_j P(X^{-1}(\{x_j\})) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j P^X(\{x_j\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A_j &= X^{-1}(\{x_j\})) \\
 \text{Also: } \int X dP &= EX
 \end{aligned}$$

- 2.) Sei  $\mathcal{E}^+ := \{f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$ . Wichtig: Elemente von  $\mathcal{E}^+$  kann man beliebig gut durch Elemente aus  $\mathcal{E}$  approximieren.

### Satz 1.1

Zu jedem  $f \in \mathcal{E}^+$  gibt es eine wachsende Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{E}$  mit  $u_n \uparrow f$ , d.h.  $u_n \leq u_{n+1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$  (jeweils punktweise).

**Beweis**

Sei  $\alpha_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  gegeben durch:

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{j}{2^n}, & \text{falls } \frac{j}{2^n} \leq x < \frac{j+1}{2^n}, j = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \\ n, & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

(Hier fehlt ein Bild)

$\alpha_n$  ist  $\mathfrak{B}$ -messbar.  $\alpha_n \uparrow$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $u_n := \alpha_n \circ f$ . Dann gilt  $u_n \in \mathcal{E}$  und  $u_n \uparrow f$ . ■

**Bemerkung**

Ist  $f$  beschränkt, so konvergiert die Folge  $(u_n)$  gleichmäßig gegen  $f$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - u_n(\omega)| = 0$ .

**Definition**

Sei  $f \in \mathcal{E}^+$  und  $(u_n)$  eine wachsende Folge aus  $\mathcal{E}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$ . Dann heißt

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu$$

das  $\mu$ -Integral von  $f$ . Wir zeigen, dass  $\int f d\mu$  wohldefiniert ist.

**Lemma 1.3**

Sind  $(u_n)$  und  $(v_n)$  wachsende Folgen aus  $\mathcal{E}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ , so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu$$

**Beweis**

Wir zeigen zunächst:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq v$  mit  $v \in \mathcal{E} \implies \mu(v) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n)$

Denn: Sei  $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$  ( $\alpha_j \geq 0, A_j \in \mathcal{A}$ ) und  $0 < c < 1$  beliebig. Sei  $B_n := \{\omega | u_n(\omega) \geq cv(\omega)\} \in \mathcal{A}$ . Da  $u_n \geq cv \mathbf{1}_{B_n}$  folgt:

$$\mu(u_n) \geq c\mu(v \mathbf{1}_{B_n}) \quad (*)$$

Nach Voraussetzung:  $v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, u_n \uparrow \implies B_n \uparrow \Omega, A_j \cap B_n \uparrow A_j$

$$\begin{aligned} \implies \mu(v) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v \mathbf{1}_{B_n}) \end{aligned}$$

Nehme  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  in  $(*)$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n) \geq c\mu(v)$ . Da  $c < 1$  beliebig war, folgt die Behauptung.

Jetzt zur eigentlichen Aussage: Es gilt:  $v_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, u_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \xrightarrow{\text{Hilfsaussage}} \mu(v_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n), \mu(u_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v_n), \forall k \in \mathbb{N}$ .

$\lim_{k \rightarrow \infty}$  bei beiden Ungleichungen  $\implies$  Behauptung. ■

**Bemerkung**

- a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich
  - b) Die Eigenschaften von Lemma 1.2 gelten weiter.
- 3.)  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar (ohne Vorzeichenbeschränkung).  $f^+ := \max\{0, f\}$ ,  $f^- := -\min\{0, f\}$ ,  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$

**Definition**

Eine  $\mathcal{A}$ -messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt  $\mu$ -integrierbar, falls  $\int f^+ d\mu < \infty$ ,  $\int f^- d\mu < \infty$ . In diesem Fall heißt  $\int f d\mu = \mu(f) = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$  das  **$\mu$ -Integral von  $f$** .

Schreibweise:  $\int f d\mu = \int f(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} f d\mu$ ;  $\int_A f d\mu := \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$

**Bemerkung** a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich

- b) Falls mindestens einer der Werte  $\int f^+ d\mu$ ,  $\int f^- d\mu$  endlich ist, so heißt  $f$  **quasi-integrierbar**.
- c) Ist  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable, so gilt:  $EX$  existiert  $\iff X$  ist  $P$ -integrierbar. In diesem Fall:  $EX = \int X dP$
- d) Offenbar gilt:  $f$  ist integrierbar  $\iff |f|$  ist integrierbar

**Satz 1.2 (Eigenschaften des  $\mu$ -Integrals)**

Es seien  $f, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- a)  $cf$  und  $f + g$  sind  $\mu$ -integrierbar und

$$\begin{aligned} \int cf d\mu &= c \int f d\mu \\ \int (f + g) d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

- b)  $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$

- c)  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

**Beweis** a)  $\alpha$  Sei  $c \geq 0$  (analog  $c \leq 0$ ):  $(cf)^+ = cf^+$ ,  $(cf)^- = cf^-$

Also ist  $cf$  integrierbar:  $\xrightarrow{\text{Satz 1.1}} \exists u_n^+ \uparrow f^+, u_n^+ \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \int cf^+ d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int cu_n^+ d\mu \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n^+ d\mu \\ &= c \int f^+ d\mu \end{aligned}$$

Analog  $f^-$ .

β)  $|f + g| \leq |f| + |g| \implies f + g$   $\mu$ -integrierbar.

Sei zunächst  $f, g \in \mathcal{E}^+ \xrightarrow{\text{Satz 1.1}} \exists u_n \uparrow f, v_n \uparrow g, u_n, v_n \in \mathcal{E} \implies u_n + v_n \uparrow f + g, u_n + v_n \in \mathcal{E}$

Mit Lemma 1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (u_n + v_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int u_n d\mu + \int v_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

Sei jetzt  $f, g$  beliebig

$$\begin{aligned} (f + g)^+ - (f + g)^- &= f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies (f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \xrightarrow{\text{s.o.}} \int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \\ &= \int (f + g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \\ \implies \int (f + g) d\mu &= \int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

b) vergleiche Übung

c)  $f \leq |f|, -f \leq |f| \xrightarrow{\text{b) mit } g = |f|} \text{Behauptung}$  ■

**Bemerkung** Ist  $\mu = \lambda$  das Lebesgue-Maß, so heißt  $\int f d\mu = \int f d\lambda$  Lebesgue-Integral.

**Beispiel 1.2** a) Sei  $\delta_\omega$  das Dirac-Maß,  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist  $\delta_\omega$ -integrierbar falls  $f(\omega) < \infty$  und dann gilt

$$\int f d\delta_\omega = f(\omega)$$

Denn: Sei  $f \in \mathcal{E} \implies f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \implies \int f d\delta_\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_\omega(A_j) = \alpha_k \cdot 1 = f(\omega)$

$f \in \mathcal{E}^+ : u_n \uparrow f, \int u_n d\delta_\omega = u_n(\omega) \uparrow f(\omega)$

$f$  allgemein  $\implies f = f^+ - f^-$

b) Sei  $(\mu_n)$  eine Folge von Maßen und  $\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_n$ . Für  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} &\iff \sum_{n=1}^\infty \int |f| d\mu_n < \infty \\ \int f d\mu &= \sum_{n=1}^\infty \int f d\mu_n \text{ (vergleiche Übung)} \end{aligned}$$

Spezialfall:  $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ,  $\mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_n$  (Zählmaß auf  $\mathbb{N}$ )

$f$  ist  $\mu$ -integrierbar  $\iff \sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$ , dann  $\int f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$ .

Summation ist ein Spezialfall von Integration. Sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ ,  $\mathcal{A} =$



$\mathcal{P}(\Omega) \cdot \mu = P := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{\omega_n}$  mit  $p_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$  (Wahrscheinlichkeitsmaß).

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable:

$$EX \text{ existiert} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |X(\omega_n)| p_n < \infty \iff X \text{ ist } P\text{-integrierbar}$$

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P(\{\omega_n\}) = \int X dP$$

- c) Sei  $\Omega = [a, b]$  und  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[a,b]} = \{A \cap [a, b] \mid A \in \mathfrak{B}\}$  (Spur von  $\mathfrak{B}$  auf  $[a, b]$ )  
 $\mu(A) := \lambda(A) \forall A \in \mathcal{A}$ . Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $f$  Riemann-integrierbar, so ist  $f$  auch  $\mu$ -integrierbar und es gilt:

$$\int f d\mu = \int f(x) dx$$

(Hier fehlt ein Bild zur Veranschaulichung)

Das Lebesgue-Integral ist eine Erweiterung des Riemann-Integrals:

Sei  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ .  $f$  ist nicht Riemann-integrierbar. Da  $f \in \mathcal{E}$  gilt:

$$\int f d\lambda = 0 \cdot \lambda(\mathbb{Q}^c \cap [0, 1]) + 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen:

- (i)  $\lambda(\{a\}) = 0$ , da  $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{n})$
- (ii)  $\lambda(\sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$

Vorsicht bei uneigentlichen Riemann-Integralen!  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  ist Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

