2 Äußere Maße auf metrischen Räumen

2.1 Regularität und metrische äußere Maße

Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}$. Sei $\mathfrak{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra. Ist μ ein äußeres Maß auf X und sind alle offenen (alle abgeschlossenen) Mengen in $\mathcal{A}_\mu$, so gilt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$. Wir nennen μ Borel-regulär, wenn μ $\mathfrak{B}(X)$-regulär ist, das heißt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ und zu jedem $M \subset X$ existiert ein $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset B$ und $\mu(M) = \mu(B)$.

Lemma 2.1
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gelte $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$. Enthält $\mathcal{A}$ ferner alle offenen Mengen oder alle abgeschlossenen Mengen, so gilt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Beweis
Übungsblatt 2, Aufgabe 2 (a). ∎

Satz 2.2
Sei μ ein äußeres Maß auf dem metrischen Raum (X, d) mit $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ und $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann gilt:

(1) Ist μ Borel-regulär und $\mu(A) < \infty$, so existieren $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(X)$ mit $B_2 \subset A \subset B_1$ und $\mu(B_1 \setminus B_2) = 0$.

(2) Gilt $\mu(A) < \infty$ und ist $A \in \mathfrak{B}(X)$ oder μ Borel-regulär, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset A$ mit $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. In diesem Fall gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A,\ C \text{ abgeschlossen}\}.$$

(3) Gibt es eine abzählbare, offene Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von A mit $\mu(U_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ist $A \in \mathfrak{B}(X)$ oder μ Borel-regulär, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supset A$ mit $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. In diesem Fall gilt

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A,\ U \text{ offen}\}.$$

Beweis
Teil (1) und (2): Übungsblatt 2, Aufgabe 2. Zu (3):

Seien A und $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie vorausgesetzt. Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert nach (2) eine abgeschlossene Menge $C_i \subset U_i \setminus A$ mit $\mu((U_i \setminus A) \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Setze $U := \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i)$. Dann ist U offen und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap U_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i) = U$. Ferner ist

$$\mu(U \setminus A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i) \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((U_i \setminus C_i) \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((U_i \setminus A) \setminus C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definition
Seien X eine Menge, $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, μ ein äußeres Maß auf X und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$. Man nennt f μ-messbar, falls f μ-messbar bezüglich $\mathfrak{B}(Y)$ ist, das heißt $f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) \subset \mathcal{A}_\mu$.

Für einen metrischen Raum (X, d), für Mengen $A, B \subset X$ und $x \in X$ sei

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \qquad d(A, B) := \inf\{d(x, y), x \in A,\ y \in B\}.$$

Satz 2.3
Seien X eine Menge, (Y, d) ein metrischer Raum, μ ein äußeres Maß auf X sowie $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(1) f ist μ-messbar.

(2) Für jede Menge $M \subset X$ und alle Mengen $A, B \subset Y$ mit $d(A, B) > 0$ gilt

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)).$$

Beweis
(1) $\Longrightarrow$ (2): Sei f μ-messbar. Seien $M \subset X$, $A, B \subset Y$ mit $d(A, B) > 0$. Es gibt $U_A \supset A$, U_A offen mit $U_A \cap B = \emptyset$. Somit gilt $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U_A^c) = f^{-1}(U_A)^c$ und $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U_A)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(U_A) \in \mathcal{A}_\mu$. Es folgt

$$\mu(A) \geq \mu(M \cap f^{-1}(U_A)) + \mu(M \cap f^{-1}(U_A)^c) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Zeige $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_\mu$ für eine beliebige abgeschlossene Menge $C \subset Y$. Für $y \in Y$ sei $g(y) := d(y, C)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $C \neq \emptyset$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$d(\underbrace{\{g \leq a\}}_{=:A}, \underbrace{\{g \geq b\}}_{=:B}) \geq b - a > 0.$$

Für $M \subset X$ erhält man nun

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)) = \mu(M \cap \{g \circ f \leq a\}) + \mu(M \cap \{g \circ f \geq b\}).$$

Da $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ die Bedingung von Satz 1.8 erfüllt, folgt die Messbarkeit von $g \circ f$, das heißt insbesondere ist $\{g \circ f = 0\} \in \mathcal{A}_\mu$. Ferner ist

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : d(f(x), C) = 0\} = \{g \circ f = 0\} \in \mathcal{A}_\mu,$$

wobei die Abgeschlossenheit von C verwendet wurde. $\blacksquare$

Satz 2.4 (Kriterium von Carathéodory)
Für ein äußeres Maß μ auf (X, d) sind äquivalent:

(1) $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$.

(2) Für $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ gilt $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

Beweis
(1) $\implies$ (2): Ist $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$, so ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ μ-messbar. Für Mengen $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ folgt nun aus Satz 2.3, (1) $\implies$ (2), dass

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(\underbrace{(A \cup B) \cap \mathrm{id}_X^{-1}(A)}_{=A}) + \mu(\underbrace{(A \cup B) \cap \mathrm{id}_X^{-1}(B)}_{=B}) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) $\implies$ (1): Seien $M \subset X$, $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$. Dann ist auch $d(M \cap A, M \cap B) > 0$ und daher

$$\begin{aligned}
\mu(M) &\geq \mu(M \cap (A \cup B)) \\
&= \mu((M \cap A) \cup (M \cap B)) \\
&\geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap B) \\
&= \mu(M \cap \mathrm{id}_X^{-1}(A)) + \mu(M \cap \mathrm{id}_X^{-1}(B)).
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.3, (2) $\implies$ (1), ergibt dies die μ-Messbarkeit von id_X, das heißt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$. ∎

2.2 Vitali-Relationen

In dem metrischen Raum (X, d) sei

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X) := \{\mu : \mu \text{ ist ein Borel-reguläres Maß auf } X \text{ und} \\
\mu(A) < \infty \text{ für alle beschänkten Mengen } A \subset X\}.
\end{aligned}$$

Motivation: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für $x \in [a, b)$ sei

$$\bar{L}_f(x) := \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Mit λ wird das äußere Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, das heißt

$$\lambda(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : a_i < b_i, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]\}.$$

Behauptung: Für λ-fast-alle $x \in [a, b]$ ist $\bar{L}_f(x) < \infty$.

Zum Nachweis sei

$$\yen := \{[x, x+h] : x \in [a,b],\, 0 < h < b - x\}.$$

Für $t > 1$ sei

$$\yen_t := \{[x, x+h] \in \yen : f(x+h) - f(x) \geq t \cdot h\}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Menge

$$A := \{x \in [a,b) : \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty\}$$

Lebesguemaß Null hat.

Für $x \in A$, $t > 1$ gilt:

$$\inf\{h > 0 : [x, x+h] \in \yen_t\} = 0.$$

Falls es gelingt, eine disjunkte Folge $([x_i, x_i + h_i])_{i \in \mathbb{N}}$ in $\yen_t$ zu finden mit

$$\lambda(A \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i, x_i + h_i]}_{=:S}) = 0,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda(A) = \lambda(A \cap S) + \lambda(A \cap S^c) = \lambda(A \cap S) \\ \leq \lambda(S) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{t} \leq \frac{f(b) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$

Da $t > 1$ beliebig ist, folgt $\lambda(A) = 0$.

Wichtig war hierbei:

(1) Die betrachteten Intervalle sind beliebig kurz.

(2) Bis auf eine Nullmenge lässt sich eine abzählbare disjunkte Teilüberdeckung finden.

(3) Oft genügt es auch, den Grad der Mehrfachüberlappung beschränken zu können.

Definition
Sei μ ein äußeres Maß auf (X, d), $M \subset X$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Man nennt $\mathcal{A}$ eine (offene, abgeschlossene, Borelsche) μ-Überdeckung von M wenn $\mu(M \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = 0$ und $\mathcal{A}$ aus (offenen, abgeschlossenen, Borelschen) Mengen besteht.

Definition
Sei $\mu \in \mathbb{M}(X)$. Eine μ-Vitali-Relation V auf X ist eine Teilmenge des Mengensystems $\{(x, S) : x \in S, S \in \mathfrak{B}(X)\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (x, S) \in V\} = 0$ für alle $x \in X$.

(2) Für $Z \subset X$, $C \subset V$ mit $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (z, S) \in C\} = 0$ für alle $z \in Z$ enthält die Familie $C(Z) := \{S : (z, S) \in C$ für ein $z \in Z\}$ eine abzählbare disjunkte μ-Überdeckung von Z.

Im Folgenden werden Methoden und Kriterien zum Nachweis von Eigenschaft (2) vorgestellt und Vitali-Relationen bei der Differentation von Maßen verwendet.

Beispiel
Seien $X = \mathbb{R}$, $V \coloneqq \{(x, [x, x+h]) : [x, x+h] \in \yen\}$. Dann ist (1) erfüllt. Später wird (2) für $\mu = \lambda$ gezeigt, so dass V eine λ-Vitali-Relation ist. Wähle $Z = A$ wie oben, $C \coloneqq \{(x, [x, x+h]) : [x, x+h] \in \yen_t\}$. Dann ist die Voraussetzung für Z aus (2) erfüllt und es existiert eine abzählbare disjunkte λ-Überdeckung von Z, das heißt es existiert $([x_i, x_i + h_i])_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt mit $[x_i, x_i + h_i] \in \yen_t$ und $\lambda(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}[x_i, x_i + h_i]) = 0$.

Rahmensituationen, in denen (2) verifiziert werden kann:

(1) Der metrische Raum (X, d) ist allgemein, μ erfüllt eine diametrische Regularitätsbedingung.

(2) Der Raum (X, d) ist spezieller, geeignet ist etwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, μ ist ein beliebiges Radonmaß.

Satz 2.5
Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$, $1 < t < \infty$ und $\emptyset \notin \mathcal{S}$. Für $T \in \mathcal{S}$ sei $\mathcal{S}_T^t \coloneqq \{S \in \mathcal{S} : S \cap T \neq \emptyset, \operatorname{diam}(S) \leq t \cdot \operatorname{diam}(T)\}$. Dann existiert eine disjunkte Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ mit $\mathcal{S} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} \mathcal{S}_T^t$.

Beweis
Definiere

$$\Omega \coloneqq \{\mathcal{R} \subset \mathcal{S} : \mathcal{R} \text{ ist eine disjunkte Familie von Mengen, für alle } S \in \mathcal{S} \text{ gilt:}$$
$$S \cap \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R = \emptyset \text{ oder } S \in \mathcal{S}_R^t \text{ für ein } R \in \mathcal{R}\}.$$

Dann ist $(\Omega, \subset)$ eine geordnete Menge. Nach Voraussetzung gibt es ein $T \in \mathcal{S}$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < t \cdot \operatorname{diam}(T)$. Daher ist $\{T\} \in \Omega$.

Behauptung: Jede linear geordnete Teilmenge $\Lambda \subset \Omega$ hat eine obere Schranke.

Nachweis: Die obere Schranke ist $\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R}$. Dies ist eine disjunkte Familie: Wenn $R, R' \in \bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R}$, so ist $R \in \mathcal{R}$, $R' \in \mathcal{R}'$ mit $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in \Lambda$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$, also $R, R' \in \mathcal{R}'$. Da aber $\mathcal{R}'$ eine disjunkte Familie ist, ist $R \cap R' = \emptyset$ oder $R = R'$. Sei $S \in \mathcal{S}$. Ist nun $S \cap (\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) \neq \emptyset$, so ist für ein $\mathcal{R}' \in \Lambda$ schon $S \cap \bigcup_{R\in\mathcal{R}'} R \neq \emptyset$. Wegen $\mathcal{R}' \in \Omega$ ist dann $S \in \mathcal{S}_{R'}^t$ für ein $R' \in \mathcal{R}'$ und damit auch $S \in \mathcal{S}_R^t$ für ein $R \in \bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \bigcup_{R\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_R^t$. Folglich ist $\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R} \in \Omega$.

Aufgrund des Zornschen Lemmas existiert ein maximales Element $\mathcal{T} \in \Omega$. Sei

$$\mathcal{K} \coloneqq \{S \in \mathcal{S} : S \cap \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T = \emptyset\}.$$

Angenommen, $K \neq \emptyset$. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{K}\} < t \cdot \operatorname{diam}(K)$. Es ist $\mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\}$ eine disjunkte Familie. Ist schließlich $S \in \mathcal{S}$ und $S \cap \bigcup\{T : T \in \mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\}\} \neq \emptyset$. Dann gilt $S \cap \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T \neq \emptyset$, und somit $S \in \mathcal{S}_T^t$ für ein $T \in \mathcal{T}$, oder $S \cap K \neq \emptyset$ und $S \in \mathcal{K}$, $\operatorname{diam}(S) < t \cdot \operatorname{diam}(K)$, so dass $S \in \mathcal{S}_K^t$. In jedem Fall ist $\mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\} \in \Omega$ im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{T}$.

Folglich ist $\mathcal{K} = \emptyset$. Für jedes $S \in \mathcal{S}$ existiert also ein $T \in \mathcal{T}$ mit $S \cap T \neq \emptyset$. Da $\mathcal{T} \in \Omega$, folgt $S \in \mathcal{S}_T^t$ für ein $T \in \mathcal{T}$, also ist $\mathcal{S} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{S}_T^t$. ■

Dieser Satz ist ein entscheidentes Hilfsmittel im Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.6
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ sowie $t > 1$ und $r > 0$. Sei $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Überdeckung von A mit

(1) $\sup\{\mathrm{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$,

(2) $\inf\{\mathrm{diam}(S) : S \in \mathcal{S}, x \in S\} = 0$ für alle $x \in A$,

(3) $\mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_B^t} S) < r \cdot \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{S}$.

Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset X$ eine abzählbare, disjunkte μ-Überdeckung $\mathcal{C}$ von $A \cap U$ mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ und $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset U$.

Beweis
Sei zunächst A beschränkt. Sei $U \subset X$ offen. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \cap U \neq \emptyset$ und U beschränkt. Wir betrachten $\mathcal{U} := \{S \in \mathcal{S} : \emptyset \neq S \subset U\}$. Nach Satz 2.5 existiert eine disjunkte Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{U} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{U}_C^t \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_C^t$. Wegen $\mu \in \mathbb{M}(X)$ ist $\mu(U) < \infty$ und wegen (3) ist $\mu(B) > 0$ für $B \in \mathcal{C}$. Da $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset \mathcal{U}$ und $\mathcal{C}$ disjunkt, folgt die Abzählbarkeit von $\mathcal{C}$.

Weiterhin gilt
$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \sum_{C \in \mathcal{C}} r \cdot \mu(C) \leq r \cdot \mu(U) < \infty.$$
Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ mit
$$\sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \varepsilon.$$

Sei nun $x \in A \cap U \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$. Da $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ abgeschlossen ist und nach (2) gibt es ein $S \in \mathcal{S}$ mit $S \cap \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = \emptyset$, $x \in S \subset U$. Insbesondere ist $S \in \mathcal{U} \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_C^t$. Dann gilt aber $S \in \bigcup_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mathcal{S}_C^t$. Nun kann man abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) &\leq \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{D}} D) \\
&\leq \mu(\bigcup_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') \\
&\leq \sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt $\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) = 0$.

Sei nun A beliebig. Wähle $a \in A$. Induktiv werden beschränkte Mengen $A_j \subset X$, offene Mengen $W_j \subset X$ und endliche disjunkte Folgen $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$ abgeschlossener Mengen konstruiert. Setze hierzu $W_0 := U$, $A_0 := \emptyset$, $\mathcal{C}_0 := \emptyset$ und falls W_{j-1}, A_{j-1} und $\mathcal{C}_{j-1}$ für $j > 0$ schon definiert sind, so sei $W_j := W_{j-1} \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{j-1}} C$, $A_j := \{x \in A : d(a,x) \leq j\}$. Da A_j beschränkt ist und $W_{j-1} \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{j-1}} C = W_j$ offen, gibt es eine endliche disjunkte Teilfamilie $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$ mit $\bigcup_{C \in \mathcal{C}_j} C \subset W_j$ und $\mu(W_j \cap A_j \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_j} C) < \frac{1}{2^j}$. Die Mengen $W_j = \mathcal{U} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \bigcup_{C \in \mathcal{C}_i} C$, $j \in \mathbb{N}$, sind absteigend, $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sind aufsteigend, $\mathcal{C} := \bigcup_{j \geq 1} \mathcal{C}_j$ ist nach Konstruktion eine abzählbare disjunkte Mengenfolge in $\mathcal{S}$. Ferner ist $U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset W_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ beliebig gibt also:

$$\begin{aligned}
\mu(U \cap A \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) &= \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} ((U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) \cap A_j)) \\
&= \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} ((U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) \cap A_j)) \\
&= \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} (W_{j+1} \cap A_j)) \\
&\leq \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} (W_j \cap A_j \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_j} C)) \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j}.
\end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt $\mu(U \cap A \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) = 0$. ■

Beispiel
Sei $V = \{(x, [x, x+h]) : x \in [a,b),\ 0 < h < b - x\}$. Dann gilt:

(1) $\inf\{\operatorname{diam}([x, x+h]) : 0 < h < b - x\} = 0$ für alle $x \in [a,b)$.

(2) Seien $Z \subset [a,b)$, $C \subset V$ mit $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (z,S) \in C\} = 0$ für alle $z \in Z$.

Betrachte $C(Z) := \{S : (z,S) \in C \text{ für ein } z \in Z\}$.

Wir werden Satz 2.6 verwenden und weisen die folgenden Voraussetzungen nach:

(i) $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in C(Z)\} \leq b - a < \infty$.

(ii) $\inf\{\operatorname{diam}(S) : S \in C(Z),\ x \in S\} = \inf\{\operatorname{diam}(S) : (z,S) \in C \text{ für ein } z \in Z, x \in S\} \leq \inf\{\operatorname{diam}(S) : (x,S) \in C\} = 0$ für alle $x \in Z$.

(iii) Sei $B := [x, x+h] \in C(Z) =: \mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Überdeckung von Z. Ferner: $[y, y+\bar{h}] \in \mathcal{S}_B^t$ impliziert $[y, y+\bar{h}] \cap [x, x+h] \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}([y, y+\bar{h}]) \leq t \cdot \operatorname{diam}([x, x+h])$, das heißt $\bar{h} \leq h$, also gilt $[y, y+\bar{h}] \subset [x - th, x + h + th]$ und damit $\lambda(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_B^t} S) \leq \lambda([x - th, (1+t)h]) = (1+2t)h = (1+2t)\lambda(B)$.

Nach Satz 2.6 existiert eine abzählbare disjunkte λ-Überdeckung von Z mit Mengen aus $\mathcal{S} = C(Z)$.

Somit ist V eine λ-Vitali-Relation.

Definition
Eine metrische abgeschlossene Kugel in (X, d) ist $\mathbb{B}(x, r) := \{z \in X : d(z, x) \leq r\}$ für $r > 0$.

Korollar 2.7
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $A \subset X$, $r > 0$, $t > 1$. Sei $\mathcal{S}$ eine Überdeckung von A durch abgeschlossene Kugeln mit

(1) $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$,

(2) $\inf\{\operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, s)) : y \in A, x \in \mathbb{B}(y, s) \in \mathcal{S}\} = 0$ für alle $x \in A$,

(3) für alle $x \in A$ und alle $\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}$ gilt: $\mu(\mathbb{B}(x, (1 + 2t)s)) < r \cdot \mu(\mathbb{B}(x, s))$.

Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset X$ eine abzählbare disjunkte μ-Überdeckung $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ von $U \cap A$, mit $C \subset U$ für alle $C \in \mathcal{C}$ (wobei alle $C \in \mathcal{C}$ ihren Mittelpunkt in A haben).

Beweis
Sei $\mathcal{S}' := \{\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S} : x \in A\}$. Dann ist $\mathcal{S}'$ eine abgeschlossene Überdeckung von A wegen (2). Bedingung (1) in Satz 2.6 folgt aus der Voraussetzung (1) hier, die Bedingung (2) in Satz 2.6 folgt aus der Voraussetzung (2) hier. Wir weisen die Bedingung (3) in Satz 2.6 nach. Hierzu sei $\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}'$, das heißt $x \in A$.

Behauptung:
$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}'^{t}_{\mathbb{B}(x,s)}} S \subset \mathbb{B}(x, (1 + 2t)s)$$

Nachweis: Sei $S = \mathbb{B}(y, \varrho) \in \mathcal{S}'^{t}_{\mathbb{B}(x,s)}$. Dann ist $\mathbb{B}(y, \varrho) \cap \mathbb{B}(x, s) \neq \emptyset$ und außerdem gilt $\operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, \varrho)) \leq t \cdot \operatorname{diam}(\mathbb{B}(x, s))$. Sei $\bar{z} \in \mathbb{B}(y, \varrho)$ und $z_0 \in \mathbb{B}(y, \varrho) \cap \mathbb{B}(x, s)$. Dann gilt
$$d(\bar{z}, x) \leq d(\bar{z}, z_0) + d(z_0, x) \leq \operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, \varrho)) + s \leq t \cdot 2s + s = (1 + 2t)s.$$

Hiermit:
$$\mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}'^{t}_{\mathbb{B}(x,s)}} S) \leq \mu(\mathbb{B}(x, (1 + 2t)s) < r \cdot \mu(\mathbb{B}(x, s)).$$

Die Aussage des Korollars folgt nun mit Satz 2.6. ■

Bemerkungen: (1) Die Bedingung (2) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\inf\{\operatorname{diam}(\mathbb{B}(s, x)) : \mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}\} = 0$ für alle $x \in A$. Falls jetzt μ eine diametrische Regularitätsbedingung erfüllt, dann ist $V := \{(x, \mathbb{B}(x, s)) : x \in X,\ s > 0\}$ eine μ-Vitali-Relation.

In Satz 2.8 werden wir einen Überdeckungssatz formulieren, mit dessen Hilfe zum Beispiel für $X = \mathbb{R}^n$, $d = \|\cdot\|$, gezeigt werden kann dass V für jedes (!) Maß $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ eine μ-Vitali-Relation ist.

(2) Ist $\mu \in \mathbb{M}(X)$ und gibt es $0 < u < v$, $n \in \mathbb{N}$ mit
$$0 < u < \frac{\mu(\mathbb{B}(x, s))}{s^n} < v$$

für alle $a \in X$, $s > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{B}(x,(2t+1)s)) &\leq s^n \cdot v \cdot (2t+1)^n \\ &= s^n \cdot u \cdot \frac{v}{u} \cdot (2t+1)^n \\ &< \mu(\mathbb{B}(x,s)) \cdot \underbrace{\frac{v}{u} \cdot (2t+1)^n}_{=:r} \\ &= r \cdot \mu(\mathbb{B}(x,s)).\end{aligned}$$

Satz 2.8 (Besicovitch)
Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: Ist $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln mit positiven Radien in $\mathbb{R}^n$ und $\sup\{\operatorname{diam}(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$ und ist A die Menge der Mittelpunkte dieser Kugeln, dann gibt es $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}$ derart, dass $\mathcal{G}_i$ eine abzählbare disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}$ ist und

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

Beweis
Übung bzw. Literatur (Evans & Gariepy, Mattila, allgemeiner Federer) ∎

Korollar 2.9
Seien μ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Bälle mit positiven Radien in $\mathbb{R}^n$. Sei A die Menge der Mittelpunkte dieser Bälle. Sei $\mu(A) < \infty$ und $\inf\{r > 0 : \mathbb{B}(a,r) \in \mathcal{F}\} = 0$ für alle $a \in A$. Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, so dass $B \subset U$ für alle $B \in \mathcal{G}$ und $\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0$, das heißt, $\mathcal{G}$ ist eine μ-Überdeckung von $A \cap U$.

Beweis
Wähle $\theta \in (1 - \frac{1}{N_n}, 1)$.

Behauptung: Es gibt $M_1 \in \mathbb{N}$ und disjunkte Bälle $B_1, \dots, B_{M_1} \in \mathcal{F}$ mit $B_i \subset U$ und

$$\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \leq \theta \cdot \mu(A \cap U).$$

Nachweis: Sei $\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} : \operatorname{diam}(B) \leq 1,\, B \subset U\}$. Die Menge der Mittelpunkte von Bällen aus $\mathcal{F}_1$ ist gerade $A \cap U$. Wegen Satz 2.8 gibt es zu $\mathcal{F}_1$ Teilfamilien $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}_1$, wobei $\mathcal{G}_i$ abzählbar viele disjunkte Bälle enthält mit $A \cap U \subset A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B$. Hieraus folgt

$$\mu(A \cap U) \leq \mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B) \leq \sum_{i=1}^{N_n} \mu(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B).$$

Es gibt ein $i \in \{1, \dots, N_n\}$, so dass

$$\mu(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B) \geq \frac{1}{N_n} \mu(A \cap U).$$

Da μ Borel-regulär ist, gibt es $M_1 \in \mathbb{N}$ und $B_1, \dots, B_{M_n} \in \mathcal{G}_i$ mit

$$\mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \geq (1-\theta)\mu(A \cap B).$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \infty > \mu(A \cap U) &= \mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) + \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \\ &\geq (1-\theta)\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

Im Folgenden wenden wir die bewiesene Behauptung wiederholt an. Setze $U_2 \coloneqq U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$ sowie $\mathcal{F}_2 \coloneqq \{B \in \mathcal{F} : \operatorname{diam}(B) \leq 1,\, B \subset U_2\}$. Wie eben findet man $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq M_1$ und disjunkte abgeschlossene Bälle $B_{M_1+1}, \dots, B_{M_2} \in \mathcal{F}_2$ mit

$$\begin{aligned} \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i) &= \mu(A \cap U_2 \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i) \\ &\leq \theta\mu(A \cap U_2) \\ &= \theta\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \\ &\leq \theta^2 \mu(A \cap U). \end{aligned}$$

Man erhält so eine Folge disjunkter Bälle in $\mathcal{F}$, die in U enthalten ist, so dass

$$\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i) \leq \theta^k \cdot \underbrace{\mu(A \cap U)}_{<\infty} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$ ■

2.3 Differentiation von Maßen

Definition
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, V eine μ-Vitali-Relation auf X, $x \in X$. Seien $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Dann wird für jede Teilfamilie $C \subset V$ mit $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (x,S) \in C\} = 0$ erklärt:

$$C\text{-}\limsup_{x} f \coloneqq C\text{-}\limsup_{S \to x} f(S) \coloneqq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup\{f(S) : (x,S) \in C,\, S \in \mathcal{D},\, \operatorname{diam}(S) < \varepsilon\}$$

und

$$C\text{-}\liminf_{x} f := C\text{-}\liminf_{S\to x} f(S) := \liminf_{\varepsilon\searrow 0}\{f(S) : (x,S)\in C,\, S\in\mathcal{D},\, \operatorname{diam}(S)<\varepsilon\}.$$

Falls $C\text{-}\limsup_x f = C\text{-}\liminf_x f$ gilt, so wird erklärt:

$$C\text{-}\lim_{x} f := C\text{-}\lim_{S\to x} f(S) := C\text{-}\limsup_{x} f = C\text{-}\liminf_{x} f.$$

Insbesondere: Seien $\mu,\nu\in\mathbb{M}(X)$ und V eine μ-Vitali-Relation. Dann wird erklärt:

$$\mathbb{D}(\nu,\mu,V,x) := V\text{-}\lim_{x}\frac{\nu}{\mu},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Satz 2.10
Seien $\mu,\nu\in\mathbb{M}(X)$. Für $M\subset X$ sei

$$\nu_\mu(M) := \inf\{\nu(A) : A\in\mathfrak{B}(X),\, \mu(M\setminus A)=0\}.$$

Dann ist $\nu_\mu\in\mathbb{M}(X)$. Es gibt ein $B\in\mathfrak{B}(X)$ mit $\nu_\mu=\nu\lfloor B$ und $\mu(B^c)=0$. Ferner ist $\nu_\mu=\nu$ genau dann, wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.

Beweis
Sei $M\subset X$. Wir zeigen zunächst, dass es $A\in\mathfrak{B}(X)$ gibt mit $\mu(M\setminus A)=0$ und $\nu_\mu(M)=\nu(A)$. Hierzu sei $\nu_\mu(M)<\infty$ (sonst wähle $A=X$). Zu $k\in\mathbb{N}$ existiert $A_k\in\mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M\setminus A_k)=0$ und

$$0\le \nu(A_k)-\nu_\mu(M)\le\frac{1}{k}.$$

Setze $A:=\bigcap_{k=1}^\infty A_k\in\mathfrak{B}(X)$. Es gilt:

$$\mu(M\setminus A)=\mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty (M\setminus A_k)\Big)\le\sum_{k=1}^\infty \mu(M\setminus A_k)=0$$

und damit

$$\nu_\mu(M)\le\nu(A)\le\nu(A_k)\le\nu_\mu(M)+\frac{1}{k}\to\nu_\mu(M)$$

für $k\to\infty$.

Behauptung: ν_μ ist ein äußeres Maß.

Hierzu ist

$$0\le\nu_\mu(\emptyset)\le\nu(\emptyset)=0.$$

Seien $M, M_1, M_2, \ldots \subset X$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^\infty M_i$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ gibt es $A_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M_i \setminus A_i) = 0$ und $\nu_\mu(M_i) = \nu(A_i)$. Damit ist

$$\begin{aligned}\mu(M \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i) &\leq \mu((\bigcup_{i=1}^\infty M_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)) \\ &\leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty (M_i \setminus A_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \mu(M_i \setminus A_i) = 0.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\nu_\mu(M) \leq \nu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu_\mu(M_i).$$

Behauptung: $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$, $M \subset X$. Zu M existiert $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M \setminus C) = 0$ und $\nu_\mu(M) = \nu(C)$. Es gilt nun

$$\mu((M \cap A) \setminus (C \cap A)) = \mu((M \setminus C) \cap A) \leq \mu(M \setminus C) = 0$$

und ebenso

$$\mu((M \cap A^c) \setminus (C \cap A^c)) = \mu((M \setminus C) \cap A^c) \leq \mu(M \setminus C) = 0.$$

Daher ist

$$\nu_\mu(M) = \nu(C) = \nu(C \cap A) + \nu(C \cap A^c) \geq \nu_\mu(M \cap A) + \nu_\mu(M \cap A^c).$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$ beschänkt. Dann existiert ein $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $C \subset A$, $\mu(A \setminus C) = 0$ und $\nu_\mu(A) = \nu(C)$.

Behauptung: Für $M \subset A$ gilt $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C)$.

Fall 1: $M \subset A$, $M \in \mathfrak{B}(X)$. Es gilt

$$\mu(M \setminus \underbrace{(C \cap M)}_{\in \mathfrak{B}(X)}) = \mu((M \cap A) \setminus (C \cap M)) \leq \mu(A \setminus C) = 0$$

und ebenso

$$\mu((M^c \cap A) \setminus \underbrace{(C \cap M^c)}_{\in \mathfrak{B}(X)}) \leq \mu(A \setminus C) = 0.$$

Daher ist $\nu_\mu(M) \le \nu(M \cap C)$ und $\nu_\mu(M^c \cap A) \le \nu(M^c \cap C)$ und weiter

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A) &= \nu_\mu(M \cap A) + \nu_\mu(M^c \cap A) \\
&\ge \nu_\mu(A) \\
&= \nu(C) \\
&= \nu(C \cap M) + \nu(C \cap M^c) && \text{(wegen } M \in \mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\nu) \\
&\ge \nu(M \cap C) + \nu_\mu(M^c \cap A) \\
&\ge \nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A).
\end{aligned}$$

Es besteht also überall Gleichheit, insbesondere ist

$$\infty > \nu(M \cap C) + \nu(M^c \cap C) = \nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A).$$

Da der erste (bzw. zweite) Summand links größer gleich dem ersten (bzw. zweiten) Summand rechts ist, folgt insbesondere $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C)$.

Fall 2: $M \subset A$ beliebig. Dann existieren $D_1, D_2 \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset D_i$ und $\nu(M \cap S) = \nu(D_1 \cap S)$ und $\mu(M \cap S) = \mu(D_2 \cap S)$ für alle $S \in \mathfrak{B}(X)$, da $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu$ (vgl. Proposition 1.3 (b)). Setze $D := D_1 \cap D_2 \cap A \in \mathfrak{B}(X)$. Es gilt $M \subset D \subset A$. Ferner ist

$$\nu(M \cap S) \le \nu(D \cap S) \le \nu(D_1 \cap S) = \nu(M \cap S)$$

also $\nu(D \cap S) = \nu(M \cap S)$ und ebenso $\mu(D \cap S) = \mu(M \cap S)$. Insbesondere ist dann auch $\mu(M \setminus S) = \mu(D \setminus S)$. Wegen $D \in \mathfrak{B}(X)$, $D \subset A$ ist $\nu_\mu(D) = \nu(C \cap D)$ nach Fall 1. Zusammen erhält man

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) &= \inf\{\nu(S) : S \in \mathfrak{B}(X),\ \mu(M \setminus S) = 0\} \\
&= \inf\{\nu(S) : S \in \mathfrak{B}(X),\ \mu(D \setminus S) = 0\} \\
&= \nu_\mu(D) = \nu(C \cap D) = \nu(M \cap C).
\end{aligned}$$

Wir zerlegen nun X in der Form $X = \bigcup_{i \ge 1} A_i$ mit beschränkten disjunkten Borelmengen A_i. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert $C_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $C_i \subset A_i$, $\mu(A_i \setminus C_i) = 0$ und $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C_i)$ für alle $M \subset A_i$. Setze

$$B := \bigcup_{i \ge 1} C_i \in \mathfrak{B}(X).$$

Dann folgt

$$\mu(B^c) = \mu(X \setminus B) = \mu\Big(\big(\bigcup_{i \ge 1} A_i\big) \setminus \big(\bigcup_{i \ge 1} C_i\big)\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{i \ge 1} (A_i \setminus C_i)\Big) = 0.$$

Es folgt für $M \subset X$, wobei für die zweiten Gleichung $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu} \subset \mathcal{A}_{(\nu_\mu \lfloor M)}$ verwendet wird,

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) = (\nu_\mu \lfloor M)\Big(\bigcup_{i \ge 1} A_i\Big) &= \sum_{i \ge 1} (\nu_\mu \lfloor M)(A_i) \\
&= \sum_{i \ge 1} \nu_\mu(\underbrace{M \cap A_i}_{\subset A_i}) = \sum_{i \ge 1} \nu(\underbrace{M \cap A_i \cap C_i}_{= M \cap C_i}) \\
&= \sum_{i \ge 1} (\nu \lfloor M)(C_i) = (\nu \lfloor M)\Big(\bigcup_{i \ge 1} C_i\Big) = (\nu \lfloor M)(B) \\
&= \nu(M \cap B).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\nu_\mu = \nu\lfloor B$.

Zu $M \subset X$ existiert $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \cap B \subset C$ und $\nu(M \cap B) = \nu(C)$. Damit ist $M \subset B^c \cup C \in \mathfrak{B}(X)$ und

$$\nu_\mu(M) \leq \nu_\mu(B^c \cup C) = \nu(B \cap C) \leq \nu(C) = \nu(M \cap B) = \nu(M),$$

das heißt

$$\nu_\mu(M) = \nu_\mu(B^c \cup C).$$

Dies schließt den Nachweis ab, dass ν_μ Borel-regulär ist. Ist M beschränkt, so ist $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap B) < \infty$.

Ist jede μ-Nullmenge eine ν-Nullmenge, so ist $\nu(B^c) = 0$, also $\nu = \nu\lfloor B = \nu_\mu$. Ist schließlich $M \subset X$ und $\mu(M) = 0$, so ist $\nu_\mu(M) = \nu(\emptyset) = 0$. Aus $\nu_\mu = \nu$ folgt damit $\nu(M) = 0$, so dass jede μ-Nullmenge eine ν-Nullmenge. ∎

Bemerkung: Für $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ schreibt man $\nu \ll \mu$ und sagt ν ist absolut stetig bezüglich μ, falls für alle $M \subset X$ gilt:

$$\mu(M) = 0 \Rightarrow \nu(M) = 0.$$

Das Maß ν_μ ist absolut stetig bezüglich μ und $\nu_\mu = \nu\lfloor B$ mit $\mu(B^c) = 0$, $B \in \mathfrak{B}(X)$. Also ist

$$\nu = \nu_\mu + \underbrace{(\nu - \nu_\mu)}_{=:\nu_\mu^\perp}$$

wobei $\nu_\mu^\perp \in \mathbb{M}(X)$ wegen $\nu_\mu^\perp = \nu\lfloor B^c$, d.h. $\nu_\mu^\perp \perp \nu_\mu$. Letzteres bedeutet, dass es eine Menge $B \subset X$ gibt mit $\nu_\mu(B^c) = \nu_\mu^\perp(B) = 0$.

Lemma 2.11
Seien $\mu, \nu, \tau \in \mathbb{M}(X), V$ eine $\mu-$Vitali-Relation, $c \in (0, \infty)$ und

$$A \subset \{x \in X : V\text{-}\liminf_{S \searrow x} \frac{\nu(S)}{\tau(S)} < c\}.$$

Dann gilt:

$$\nu_\mu(A) \leq c \cdot \tau_\mu(A).$$

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Beweises von Satz 2.10 gibt es zu A ein $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(A \setminus B) = 0$ und $\tau_\mu(A) = \tau(B)$. Wegen Satz 2.2 gibt es zu B eine offene Menge $U \subset X$ mit $B \subset U$ und $\tau(U \setminus B) \leq \varepsilon$. Also ist $\mu(A \setminus U) \leq \mu(A \setminus B) = 0$ und

$$\tau(U) = \tau(U \cap B) + \tau(U \setminus B) \leq \tau(B) + \varepsilon = \tau_\mu(A) + \varepsilon.$$

Sei

$$C := \{(x, S) \in V : S \subset U, \frac{\nu(S)}{\tau(S)} < c\}.$$

Für $z \in A \cap U$ gilt: $V\text{-}\liminf \frac{\nu(S)}{\mu(S)} < c$, also $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (z, S) \in C\} = 0$ für alle $z \in A \cap U$.

Da V eine $\mu-$Vitali-Relation ist, enthält $C(A \cap U)$ eine abzählbare, disjunkte μ-Überdeckung $\mathcal{S}$ von $A \cap U$. Aus $\mu(A \setminus U) = 0$, $\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) = 0$, $\nu_\mu \ll \mu$ und $\nu_\mu \leq \nu$ folgt

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(A) &= \nu_\mu(A \cap U \cap \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) \\
&\leq \nu_\mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) \\
&\leq \nu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) \\
&\leq \sum_{S \in \mathcal{S}} \underbrace{\nu(S)}_{\leq c\tau(S)} \\
&\leq c \sum_{S \in \mathcal{S}} \tau(S) = c \cdot \tau(\underbrace{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S}_{\subset U}) \\
&\leq c \cdot \tau(U) \\
&\leq c \cdot (\tau_\mu(A) + \varepsilon) \\
&= c \cdot \tau_\mu(A) + c \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $c < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkungen: (1) Sind $\nu, \tau \ll \mu$, so gilt $\nu_\mu = \nu, \tau_\mu = \tau$ und in Lemma 2.11 lautet die Folgerung $\nu(A) \leq c \cdot \tau(A)$.

(2) Es gilt $\mu_\mu = \mu$.

Korollar 2.12
Seien $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$, V eine $\mu-$Vitali-Relation, $c > 0$. Seien ferner

$$A \subset \{x \in X : \liminf_{S \searrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} < c\} \quad \text{und} \quad B \subset \{x \in X : \limsup_{S \searrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} > c\}.$$

Dann gilt:

$$\nu_\mu(A) \leq c \cdot \mu(A), \quad \nu_\mu(B) \geq c \cdot \mu(B).$$

Beweis
Wegen Lemma 2.11 gilt $\nu_\mu(A) \leq c\mu_\mu(A) = c\mu(A)$. Ferner gilt:

$$V\text{-}\liminf_{S \searrow x} \frac{\mu(S)}{\nu(S)} = \frac{1}{V\text{-}\limsup_{S \searrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)}} < \frac{1}{c}$$

und damit aufgrund von Lemma 2.11 $\mu(B) = \mu_\mu(B) \leq \frac{1}{c}\nu_\mu(B)$, so dass $\nu_\mu(B) \geq c\mu(B)$. ■

Lemma 2.13
Seien $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ und V eine μ-Vitali-Relation. Dann ist $\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ und $0 \leq \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < \infty$ $\mu-$fast-überall in X.

Beweis
Seien

$$\begin{aligned} C &:= \{(x, S) \in V : \mu(S) = 0\}, \\ P &:= \{x \in X : \inf\{\operatorname{diam} S : (x, S) \in C\} = 0\}, \\ Q &:= \{x \in X : \limsup_x \frac{\nu}{\mu} = \infty\} \end{aligned}$$

und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei

$$R(a, b) := \{x \in X : V\text{-}\liminf_x \frac{\nu}{\mu} < a < b < V\text{-}\limsup_x \frac{\nu}{\mu}\}.$$

Da V eine μ-Vitali-Relation ist, enthält $C(P)$ eine abzählbare, disjunkte μ-Überdeckung $\mathcal{S}$ von P, so dass

$$0 \leq \mu(P) \leq \mu(P \cap \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) \leq \mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \underbrace{\mu(S)}_{=0} = 0,$$

das heißt $\mu(P) = 0$.

Seien nun $a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$ und $A \subset Q$, $B \subset R(a, b)$ beschränkt. Für ein beliebiges $c > 0$ gilt:

$$\infty > \nu_\mu(A) \geq c \cdot \mu(A),$$

also $\mu(A) = 0$. Ebenso gilt

$$b \cdot \mu(B) \leq \nu_\mu(B) \leq a \cdot \mu(B)$$

für $a < b$. Wegen $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B) = 0$.

Es folgt $\mu(Q) = \mu(R(a, b)) = 0$ und damit die Behauptung. ■

Lemma 2.14
Sei $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$, V eine μ-Vitali-Relation. Dann ist $\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot)$ eine μ-messbare Funktion.

Beweis
Seien $a < b$,

$$M_1 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < a\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) > b\}.$$

Seien weiter $A_i \subset M_i$ beschränkt $(i = 1, 2)$. Es existieren $B_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A_i \subset B_i$, so dass für alle $C \in \mathfrak{B}(X)$ gilt

$$\mu(A_i \cap C) = \mu(B_i \cap C) \quad \text{und} \quad \nu_\mu(A_i \cap C) = \nu_\mu(B_i \cap C). \tag{$*$}$$

Wegen $a < b$ gilt mit Korollar 2.12 und $(*)$

$$\begin{aligned} a \cdot \mu(B_1 \cap B_2) &= a \cdot \mu(A_1 \cap B_2) \\ &\geq \nu_\mu(A_1 \cap B_2) \\ &= \nu_\mu(B_1 \cap B_2) \\ &= \nu_\mu(B_1 \cap A_2) \\ &\geq b \cdot \mu(B_1 \cap A_2) \\ &= b \cdot \underbrace{\mu(B_1 \cap B_2)}_{<\infty} \end{aligned}$$

und damit $\mu(B_1 \cap B_2) = 0$.

Nun folgt:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(\underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{\supset A_1} \cap B_1) + \mu(\underbrace{(A_1 \cup A_2) \cap B_1^c}_{=A_2 \cap B_1^c}) \\ &\geq \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap B_1^c) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap B_1^c \cap B_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(\underbrace{A_2}_{\subset B_2} \cap B_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2). \end{aligned}$$

Sei $T \subset X$ beliebig, $y \in X$. Für $i = 1, 2$ setze

$$A_{i,n} := M_i \cap T \cap B(y, n).$$

Es ist $A_{i,n} \subset M_i$, $A_{i,n} \nearrow M_i \cap T$ und $A_{1,n} \cup A_{2,n} \subset T$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \mu(T) &\geq \lim_{n\to\infty} \mu(A_{1,n} \cup A_{2,n}) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mu(A_{1,n}) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_{2,n}) \\ &= \mu(M_1 \cap T) + \mu(M_2 \cap T). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.8. ∎

Satz 2.15
Seien $\nu, \mu \in \mathbb{M}(X)$ und V eine μ-Vitali-Relation. Dann gilt $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ und für $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist

$$\nu_\mu(A) = \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx).$$

Beweis
Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$ beschränkt. Dann gibt es eine Borelmenge $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$, also $\mu(B \setminus A) = 0$. Dann ist auch $\nu_\mu(B \setminus A) = 0$, das heißt $B \setminus A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ und folglich $A = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$, da $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ (vgl. Satz 2.10). Wegen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit beschränkten $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ folgt allgemein $A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$, das heißt $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei nun $Z_0 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) = 0\}$, $Z_\infty := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) = \infty\}$. Da aufgrund von Lemma 2.13 $\mu(Z_\infty) = 0$ ist, ist $\nu_\mu(Z_\infty) = 0$ und daher ist

$$\nu_\mu(Z_\infty) = 0 = \int_{Z_\infty} \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx).$$

Ferner ist $Z_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ mit Z_n beschränkt. Aus Korollar 2.12 erhält man für $\varepsilon > 0$ die Abschätzung $\nu_\mu(Z_n) \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\mu(Z_n)}_{<\infty}$, das heißt $\nu_\mu(Z_n) = 0$, also auch $\nu_\mu(Z_0) = 0$. Daher ist

$$\nu_\mu(Z_0) = 0 = \int_{Z_0} \underbrace{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)}_{=0} \mu(dx).$$

Sei schließlich $t \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{Z}$ und $P_n^t := \{t^n \leq \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < t^{n+1}\}$. Man erhält

$$A \setminus (Z_0 \cup Z_\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(P_n^t \cap A)}_{\in \mathcal{A}_\mu}$$

mit disjunkter Vereinigung und daher

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n^t \cap A).$$

Andererseits ist wegen $\mu(Z_\infty) = 0$

$$\begin{aligned}
t^{-1} \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-1} \int_{P_n^t \cap A} \underbrace{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)}_{<t^{n+1}} \mu(dx) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \cdot \mu(P_n^t \cap A) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n^t \cap A) = \nu_\mu(A) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n+1} \cdot \mu(P_n^t \cap A) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t \int_{P_n^t \cap A} \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx) \\
&= t \cdot \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

Da $t > 1$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Satz 2.16
Sind $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ und V_1, V_2 zwei beliebige μ-Vitali-Relationen auf X, dann gilt

$$\mathbb{D}(\nu, \mu, V_1, \cdot) = \mathbb{D}(\nu, \mu, V_2, \cdot)$$

μ-fast-überall.

Beweis
Sei $y \in X$ fest. Für $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, sei

$$A_{ij}^n := \{x \in \mathbb{B}(y, n) : \mathbb{D}(\nu, \mu, V_i, x) \geq \mathbb{D}(\nu, \mu, V_j, x) + \frac{1}{n}\}.$$

Hiermit ist

$$\frac{1}{n} \cdot \mu(A_{ij}^n) \leq \int_{A_{ij}^n} (\mathbb{D}(\nu, \mu, V_i, x) - \mathbb{D}(\nu, \mu, V_j, x))\mu(dx) = \nu_\mu(A_{ij}^n) - \nu_\mu(A_{ij}^n) = 0.$$

Dies zeigt $\mu(A_{ij}^n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\mu(\mathbb{D}(\nu, \mu, V_1, \cdot) \neq \mathbb{D}(\nu, \mu, V_2, \cdot)) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{12}^n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{21}^n) = 0.$$

■

Satz 2.17 (Lebesguescher Dichtesatz)
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, V eine μ-Vitali-Relationen auf X , $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sei μ-messbar und $\int_A |f| d\mu < \infty$ für jede beschränkte Menge $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann gilt:

$$V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{1}{\mu(S)} \cdot \int_S f d\mu = f(x)$$

für μ-fast-alle $x \in X$.

Beweis
Sei zunächst $f \geq 0$. Sei $A \subset X$, $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $\bar{\nu}(A) := \int_A f d\mu$. Dann ist $\bar{\nu}$ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_\mu$. Setze

$$\nu(M) := \inf\{\bar{\nu}(A) : A \in \mathcal{A}_\mu,\, M \subset A\}.$$

Dann ist ν ein $\mathcal{A}_\mu$-reguläres äußeres Maß (vgl. Satz 1.4). Ferner ist $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\nu$. Ist $M \subset X$, so gibt es ein $A \in \mathcal{A}_\mu$ mit $M \subset A$ und $\nu(M) = \nu(A)$. Zu $A \in \mathcal{A}_\mu$ existiert $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$ (vgl. Satz 2.2 (3)). Daraus folgt

$$\nu(M) = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B \setminus A} f d\mu = \int_B f d\mu = \nu(B),$$

da $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset A \subset B$. Also ist $\nu \in \mathbb{M}(X)$, denn für ein beschränktes $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist $\nu(A) = \int_A f d\mu < \infty$ nach Voraussetzung.

Offenbar ist $\nu \ll \mu$ und daher $\nu_\mu = \nu$. Wegen $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist aufgrund von Satz 2.15

$$\int_A f d\mu = \nu(A) = \nu_\mu(A) = \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx)$$

für alle $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dies zeigt $f = \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot)$ μ-fast-überall, das heißt, für μ-fast-alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x) = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu,$$

wobei $S \in \mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ benutzt wurde.

Für die allgemeine Aussage wird die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ verwendet. ∎

Definition
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, V eine μ-Vitali-Relation, $M \subset X$ und $x \in x$. Dann nennt man

$$V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\mu(M \cap S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{(\mu\lfloor M)(S)}{\mu(S)}$$

die (μ, V)-Dichte von M in x, falls der Limes existiert.

Satz 2.18
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, V eine μ-Vitali-Relation, $M \subset X$. Dann existiert die (μ, V)-Dichte von M für μ-fast-alle $x \in X$. Setze

$$P := \{x \in X : V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\mu(S \cap M)}{\mu(S)} = 1\} \quad \text{und} \quad Q := \{x \in X : V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\mu(S \cap M)}{\mu(S)} = 0\}.$$

Dann gilt $P, Q \in \mathcal{A}_\mu$ und $\mu(M \cap P^c) = \mu(Q \cap M) = 0$.

Ferner sind äquivalent:

(1) $M \in \mathcal{A}_\mu$,

(2) $\mu(P \cap M^c) = 0$,

(3) $\mu(M^c \cap Q^c) = 0$.

Beweis
Zu $M \subset X$ existiert $A \in \mathcal{A}_\mu$ mit $M \subset A$ und $\mu(M \cap B) = \mu(A \cap B)$ für alle $B \in \mathcal{A}_\mu$ (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 1). Es gilt $\mu\lfloor A \in \mathbb{M}(X)$ und daher ist $\{\mathbb{D}(\mu\lfloor A, \mu, V, \cdot) = 1\} \in \mathcal{A}_\mu$. Ferner existiert wegen $S \in \mathfrak{B}(X)$ der Limes

$$\mathbb{D}(\mu\lfloor A, \mu, V, x) = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{(\mu\lfloor A)(S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\mu(M \cap S)}{\mu(S)}$$

für μ-fast-alle $x \in X$. Dies zeigt insbesondere $P, Q \in \mathcal{A}_\mu$.

Für μ-fast-alle $x \in X$ gilt wegen Satz 2.17

$$\mathbb{1}_A(x) = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S \mathbb{1}_A(x)\mu(dx) = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\mu(A \cap S)}{\mu(S)} = \mathbb{D}(\mu\lfloor A, \mu, V, x).$$

Sei nun $x \notin P$. Dann ist $x \notin A$ für μ-fast-alle $x \in X$, das heißt $\mu(A \setminus P) = 0$. In analoger Weise sieht man $\mu(P \setminus A) = 0$ ein. Wegen $M \subset A$ ist $\mu(M \setminus P) \leq \mu(A \setminus P) = 0$. Hieraus folgt $\mu(M \cap P^c) = 0$ und damit $M \setminus P \in \mathcal{A}_\mu$.

Ist $M \in \mathcal{A}_\mu$, so wähle $A = M$, das heißt $\mu(P \setminus M) = 0$.

Ist dagegen $\mu(P \setminus M) = 0$, so ist $P \setminus M \in \mathcal{A}_\mu$ und $M = (M \setminus P) \cup (M \cap P) = (M \setminus P) \cup (P \setminus (P \setminus M)) \in \mathcal{A}_\mu$.

Die Argumentation für Q verläuft analog. ∎

2.4 Hausdorffmaße und Hausdorffdimension

Definition
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren für $\delta > 0$ und $M \subset X$

$$\Omega_\delta(M) \coloneqq \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : A_i \subset X, \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i\},$$

$$\tilde{\Omega}_\delta(M) \coloneqq \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : X \supset A_i \text{ offen}, \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i\}$$

und

$$\bar{\Omega}_\delta(M) \coloneqq \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : X \supset A_i \text{ abgeschlossen}, \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i\},$$

wobei $\operatorname{diam}(\emptyset) \coloneqq 0$.

Lemma 2.19
Sei $s \in [0, \infty)$. Für $\delta > 0$ und $M \subset X$ sei

$$\mu_\delta^s(M) \coloneqq \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \Omega_\delta(M)\},$$

$$\tilde{\mu}_\delta^s(M) \coloneqq \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \tilde{\Omega}_\delta(M)\}$$

und

$$\bar{\mu}_\delta^s(M) \coloneqq \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \bar{\Omega}_\delta(M)\}.$$

Dann gilt:

(1) μ_δ^s, $\tilde{\mu}_\delta^s$, $\bar{\mu}_\delta^s$ sind äußere Maße auf X,

(2) $\tilde{\mu}_\varepsilon^s(M) \leq \bar{\mu}_\delta^s(M) = \mu_\delta^s(M) \leq \tilde{\mu}_\delta^s(M)$ für alle $0 < \delta < \varepsilon$.

Beweis: Übung.

Satz 2.20
Sei $s \in [0, \infty)$. Für $M \subset X$ wird durch

$$\mu^s(M) := \sup\{\mu^s_\delta(M) : \delta > 0\}$$

ein Borel-reguläres, äußeres Maß auf X erklärt, das s-dimensionale Hausdorffmaß auf (X, d). Es gilt:

(1) $\mu^s(M) = \sup\{\bar{\mu}^s_\delta(M) : \delta > 0\} = \sup\{\tilde{\mu}^s_\delta(M) : \delta > 0\}$.

(2) $\mu^s(M) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu^s_\delta(M) = \lim_{\delta \searrow 0} \bar{\mu}^s_\delta(M) = \lim_{\delta \searrow 0} \tilde{\mu}^s_\delta(M)$.

Beweis
Die Aussagen (1), (2) sind klar. Ebenso ist offenbar $\mu^s(\emptyset) = 0$. Sei $A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i,\ A, A_i \subset X$. Dann ist für $\delta > 0$:

$$\mu^s_\delta(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^s_\delta(A_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^s(A_i).$$

Hieraus folgt aber

$$\mu^s(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^s(A_i).$$

Wir zeigen $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^s}$ mit Hilfe von Satz 2.4. Hierzu seien $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ und o.B.d.A. sei $\mu(A \cup B) < \infty$. Wir setzen $\delta := \frac{1}{2} d(A, B) > 0$. Sei $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Es folgt

$$\underbrace{\{M_i : M_i \cap A \neq \emptyset\}}_{\in \Omega_\delta(A)} \cap \underbrace{\{M_i : M_i \cap B \neq \emptyset\}}_{\in \Omega_\delta(B)} = \emptyset,$$

und daher

$$\sum_{i \geq 1} (\operatorname{diam}(M_i))^s \geq \sum_{\substack{i \geq 1 \\ M_i \cap A \neq \emptyset}} (\operatorname{diam}(M_i))^s + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ M_i \cap B \neq \emptyset}} (\operatorname{diam}(A_i))^s \geq \mu^s_\delta(A) + \mu^s_\delta(B).$$

Das zeigt

$$\mu^s(A \cup B) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu^s_\delta(A \cup B) \geq \lim_{\delta \searrow 0} \mu^s_\delta(A) + \lim_{\delta \searrow 0} \mu^s_\delta(B) = \mu^s(A) + \mu^s(B).$$

Sei jetzt $M \subset X$ und o.B.d.A. $\mu^s(M) < \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mathcal{C}^n \in \tilde{\Omega}_{\frac{1}{n}}(M)$ mit

$$\sum_{C \in \mathcal{C}^n} (\operatorname{diam}(C))^s \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}.$$

Setze

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in \mathcal{C}^n} C.$$

Dann ist $M \subset B \in \mathfrak{B}(X)$ und

$$\tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(B) \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}\Big(\bigcup_{C \in \mathcal{C}^n} C\Big) \leq \sum_{C \in \mathcal{C}^n} (\operatorname{diam}(C))^s \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt erhält man

$$\mu^s(M) \le \mu^s(B) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(B) \le \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + 0 = \mu^s(M),$$

d.h. $\mu^s(M) = \mu^s(B)$, was die Borel-Regularität ergibt. ∎

Proposition 2.21
Zu $M \subset X$ gibt es genau ein $s \in [0, \infty]$ mit

$$\mu^p(M) = \begin{cases} 0, & p > s, \\ \infty, & p < s. \end{cases}$$

Man nennt diese Zahl s die Hausdorffdimension von M, $\dim_H(M)$. Also:

$$\dim_H(M) \coloneqq \inf\{p \ge 0 : \mu^p(M) = 0\}.$$

Beweis
Seien $p, q \in [0, \infty)$ mit $p < q$. Sei $\mu^p(M) < \infty$. Dann existiert zu $\delta > 0$ eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$ mit $\sum_{i\ge1} (\operatorname{diam}(A_i))^p \le \mu^p_\delta(M) + 1 \le \mu^p(M) + 1$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mu^q_\delta(M) &\le \sum_{i\ge1} (\operatorname{diam}(A_i))^q \\ &= \sum_{i\ge1} (\operatorname{diam}(A_i))^p \cdot (\underbrace{\operatorname{diam}(A_i)}_{\le\delta})^{q-p} \\ &\le (\sum_{i\ge1} (\operatorname{diam}(A_i))^p) \cdot \delta^{q-p} \\ &\le \delta^{q-p} \cdot (\underbrace{\mu^p(M) + 1}_{<\infty}), \end{aligned}$$

und damit

$$0 \le \mu^p(M) = \lim_{\delta\searrow0} \mu^q_\delta(M) \le \lim_{\delta\searrow0} (\delta^{q-p}) \cdot (\mu^p(M) + 1) = 0.$$

Sei nun $s \coloneqq \inf\{p \ge 0 : \mu^p(M) = 0\}$. Ist $p > s$, so gibt es ein $q \in (s, p)$ mit $\mu^q(M) = 0$ und daher $\mu^p(M) = 0$.

Sei jetzt $p < s$. Wäre $\mu^p(M) < \infty$, so würde $\mu^q(M) = 0$ für alle $q > p$ gelten, im Widerspruch zur Definition von s. Also ist $\mu^p(M) = \infty$ für $p < s$. ∎

Beispiel

$$\mu^0(M) = \begin{cases} \#M, & M \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{sonst}. \end{cases}$$

und $\dim_H(M) = 0$ für $\#M < \infty$.

Definition
Seien (X,d) und $(\bar{X},\bar{d})$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to \bar{X}$ heißt Isometrie, falls $\bar{d}(f(x),f(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in X$.

Zu $f : X \to \bar{X}$ wird

$$\operatorname{Lip}(f) := \sup\left\{\frac{\bar{d}(f(x),f(y))}{d(x,y)} : x,y \in X, x \neq y\right\}$$

erklärt. Ist $\operatorname{Lip}(f) < \infty$, so nennt man f eine Lipschitzfunktion und $\operatorname{Lip}(f)$ die Lipschitz-Konstante von f.

Lemma 2.22
Ist $f : (X,d) \to (\bar{X},\bar{d})$ eine Lipschitzfunktion, so gilt $\bar{\mu}^s(f(M)) \leq \operatorname{Lip}(f)^s \cdot \mu^s(M)$ und $\dim_H(f(M)) \leq \dim_H(M)$.

Beweis
Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Dann gilt $f(M) \subset \bigcup_{i\geq 1} f(A_i)$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(f(A_i)) &= \sup\{\bar{d}(f(x),f(y)) : x,y \in A_i\}\\ &\leq \sup\{\operatorname{Lip}(f)\cdot d(x,y) : x,y \in A_i\}\\ &= \operatorname{Lip}(f)\cdot\operatorname{diam}(A_i) \leq \operatorname{Lip}(f)\cdot\delta,\end{aligned}$$

d.h. $(f(A_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M))$ und

$$\mu^s_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M)) \leq \sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(f(A_i)))^s \leq \operatorname{Lip}(f)^s \cdot \sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^s.$$

Dies zeigt

$$\mu^s_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M)) \leq \operatorname{Lip}(f)^s \cdot \mu^s_\delta(M).$$

Aus $\delta \searrow 0$ folgt die Behauptung. ∎

Sei nun $K(X) := \{f : X \to X : \operatorname{Lip}(f) < 1\}$. Für $m \geq 2$ induziert $\Psi := (\psi_1,\ldots,\psi_m) \in K(X)^m$ eine Abbildung

$$\Psi^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad M \mapsto \bigcup_{i=1}^m \psi_i(M).$$

Man erklärt $\Psi^{*k} := \underbrace{\Psi^* \circ \cdots \circ \Psi^*}_{k \text{ mal}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $M \subset M' \Rightarrow \Psi^{*k}(M) \subset \Psi^{*k}(M')$.

Ist $A_i \subset X,\ i \in \mathbb{N}$, so sei

$$\limsup_{i\to\infty} A_i := \{x \in X : x \text{ liegt in unendlich vielen } A_i\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\geq n} A_i.$$

Lemma 2.23
Seien $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in K(X)^m$ und $\emptyset \neq C \subset X$ kompakt mit $\Psi^*(C) \subset C$. Dann gilt für eine beliebige beschränkte Menge $M \subset X$ die Inklusion

$$\limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(M) \subset C.$$

Beweis
Sei $M \subset X$ beschränkt. Sei $y \in \limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(M)$, d.h. $y \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \Psi^{*k}(M)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein $k \geq n$ mit $y \in \Psi^{*k}(M)$, d.h. $\exists y_k \in M$ und $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $y = \psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(y_k)$.

Sei $z \in C$ beliebig. Dann gilt $\psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z) \in C$ sowie

$$\begin{aligned}
d(y, C) &\leq d(y, \psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z)) \\
&\leq \mathrm{Lip}(\psi_{i_k}) \cdot d(\psi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(y_k), \psi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z)) \\
&\leq \mathrm{Lip}(y_{i_k}) \cdots \mathrm{Lip}(y_{i_1}) \cdot d(y_k, z) \\
&\leq \underbrace{\max\{\mathrm{Lip}(\psi_i) : 1 \leq i \leq m\}}_{=:r<1}{}^k \cdot d(y_k, z) \\
&\leq r^k \cdot \underbrace{\mathrm{diam}(M \cup C)}_{<\infty}.
\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ (und damit $k \to \infty$) folgt $d(y, C) = 0$, d.h. $y \in C$, da C abgeschlossen ist. ■

Satz 2.24
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in K(X)^m$. Dann gibt es genau eine kompakte Menge $\emptyset \neq E \subset X$ mit $\Psi^*(E) = E$. Ist $s \in [0, \infty)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^m \mathrm{Lip}(\psi_i)^s = 1$, so gilt $\mu^s(E) < \infty$ und daher $\dim_H(E) \leq s$.

Beweis
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat jedes ψ_i einen Fixpunkt $x_i \in X$, das heißt $\psi_i(x_i) = x_i$. Setze $F := \{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ und

$$E := \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)}.$$

Zunächst ist $\Psi^{*k}(F) \subset \Psi^{*(k+1)}(F)$ für $k \in \mathbb{N}$, da

$$\psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_k}(x_j) = \psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_k} \circ \psi_j(x_j) \in \Psi^{*(k+1)}(F).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\Psi^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)) &= \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i(\Psi^{*k}(F)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^*(\Psi^{*k}(F)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*(k+1)}(F) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F).
\end{aligned}$$

Es folgt für $\Psi^*(E)$ wegen der Stetigkeit der ψ_i:

$$\begin{aligned}
\Psi^*(E) = \Psi^* \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)} \right) &\\
&= \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)} \right) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\psi_i \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F) \right)} \\
&\subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \Psi^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F) \right)} \\
&= \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)} = E.
\end{aligned}$$

Wir zeigen als nächstes, dass E totalbeschränkt ist. Sei hierzu

$$r := \max\{\mathrm{Lip}(\psi_i) : i \in \{1, \dots, m\}\} < 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{\mathrm{diam}(\Psi^*(F))}_{<\infty} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} r^i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $x \in E$. Nach Definition von E gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \geq k+1$, und ein $y \in \Psi^{*p}(F)$ mit $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gibt es Indizes $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $y = \psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_1}(x_j)$. Wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
d(x, \Psi^{*k}(F)) &\leq d(x,y) + d(y, \Psi^{*k}(F)) \\
&\leq d(x,y) + \sum_{l=1}^{p-k} d(\psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_l}, \psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_{l+1}}(x_j)) \\
&\leq d(x,y) + \sum_{l=1}^{p-k} r^{p-l} \underbrace{d(\psi_{i_l}(x_j), x_j)}_{\leq \operatorname{diam}(\Psi^*(F))} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass E total beschränkt ist. Als abgeschlossene Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist E selbst vollständig, und somit ist E sogar kompakt.

Hiermit zeigen wir nun $E \subset \Psi^*(E)$. Sei $z \in E$. Es existieren dann $z_i \in \bigcup_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(F)$ mit $z_i \to z$. Hierbei ist $z_i = \psi_{l(i)}(y)$ mit $y_i \in \bigcup_{k=0}^\infty \Psi^{*k}(F) = \bigcup_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(F) \subset E$ und $l(i) \in \{1, \dots, m\}$. Es existiert eine Teilfolge von $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Folge selbst, mit $y_i \to y \in E$. Ferner gibt es ein $l \in \{1, \dots, m\}$ mit $l(i) = l$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt: $z \leftarrow z_i = \psi_l(y_i) \to \psi_l(y)$. Daher ist $z = \psi_l(y) \in \Psi^*(E)$, das heißt $E \subset \Psi^*(E)$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\emptyset \neq \tilde{E} \subset X$ kompakt und $\Psi^*(\tilde{E}) = \tilde{E}$. Aus Lemma 2.23 folgt:

$$E = \limsup_{k \to \infty} \Psi^{*k}(E) \subset \tilde{E} = \limsup_{k \to \infty} \Psi^{*k}(\tilde{E}) \subset E,$$

das heißt $E = \tilde{E}$.

Zur Hausdorffdimension: Ist $\delta > 0$, so existiert zunächst $k \in \mathbb{N}$ mit $r^k \cdot \operatorname{diam}(E) < \delta$. Wegen $\Psi^{*k}(E) = E$ folgt $\{\psi_{i_k} \circ \dots \circ \psi_{i_1}(E) : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}\} \in \Omega_\delta(E)$ und damit

$$\begin{aligned}
\mu_\delta^s(E) &\leq \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^m \operatorname{diam}(\psi_{i_k} \circ \dots \circ \psi_{i_1}(E))^s \\
&\leq \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^m \operatorname{Lip}(\psi_{i_k})^s \cdots \operatorname{Lip}(\psi_{i_1})^s (\operatorname{diam}(E))^s \\
&= (\operatorname{diam}(E))^s \cdot (\underbrace{\operatorname{Lip}(\psi_1)^s + \dots + \operatorname{Lip}(\psi_m)^s}_{=1})^k = \operatorname{diam}(E)^s.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\mu^s(E) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu_\delta^s(E) \leq (\operatorname{diam}(E))^s < \infty.$$

■

Zusatz: Sei $\emptyset \neq C \subset X$ kompakt mit $\Psi^*(C) \subset C$. Dann ist $E := \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(C)$.

In der Tat ist $E = \limsup_{k \to \infty} \Psi^{*k}(E) \subset C$ nach Lemma 2.23, $\Psi^{*k}(E) = E$, $\Psi^{*(k+1)}(C) \subset \Psi^{*k}(C)$ und damit, wiederum mit Lemma 2.23,

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(E) \subset \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(C) = \limsup_{k \to \infty} \Psi^{*k}(C) \subset E.$$

Satz 2.25 (Hutchinson, 1981)
Für $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in K(\mathbb{R}^n)^m$ seien die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) Für $i = 1, \dots, m$ gibt es $r_i \in (0,1)$ mit $|\psi_i(x) - \psi_i(y)| = r_i|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Es gibt eine beschränkte, offene Menge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass $\psi_1(U), \dots, \psi_m(U)$ paarweise disjunkt sind und $\Psi^*(U) \subset U$.

Dann gilt für die durch $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$ festgelegte Zahl $s > 0$ und das Ψ^*-invariante Kompaktum $E \subset \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $0 < \mu^s(E) < \infty$, das heißt insbesondere $\dim_H(E) = s$. Man nennt s die Ähnlichkeitsdimension von R.

Beweis
Übung. ■

Konstruktion von Mengen mit Hausdorffdimension $s \in [0, n]$. Für $r \in (0, \frac{1}{2}]$ und für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top \in \{0,1\}^n$ sei $\psi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\psi_\alpha(x) := r \cdot x + \sum_{k=1}^n (1 - r)\alpha_k e_k,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Nun sei $\Psi = (\psi_\alpha : \alpha \in \{0,1\}^n)$. Setze $U := (0,1)^n$. Für $x \in U$ ist

$$0 < (\psi_\alpha(x))_k = r \cdot x_k + (1 - r)\alpha_k < r + (1 - r) = 1,$$

das heißt $\Psi(x) \in U$.

Seien $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$, $\alpha \neq \beta$. Dann gibt es $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $|\alpha_k - \beta_k| = 1$. Seien $x, y \in U$. Wegen $0 < r \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} |(\psi_\alpha(x))_k - (\psi_\beta(y))_k| &= |r x_k + (1 - r)\alpha_k - r y_k - (1 - r)\beta_k| \\ &\geq |(1 - r)(\alpha_k - \beta_k)| - |r(x_k - y_k)| \\ &> (1 - r) - r \geq 0, \end{aligned}$$

das heißt $(\psi_\alpha(x))_k \neq (\psi_\beta(x))_k$. Ferner gilt $|\psi_\alpha(x) - \psi_\beta(x)| = r|x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nach Satz 2.25 erhält man für die Ψ^*-invariante Menge E die Abschätzungen $0 < \mu^s(E) < \infty$.

Genauer: Wegen $r_1 = \ldots = r_{2^n} = r \in (0, \frac{1}{2}]$ ist $1 = \sum_{i=1}^{2^n} r_i^s = 2^n \cdot r^s$ und damit

$$s = -\frac{n \ln 2}{\ln r}.$$

Beispiele

(1) Für $n = 1$, $r = \frac{1}{3}$ ist $\dim_H(E^1_{\frac{1}{3}}) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

(2) Für $n = 2$, $r = \frac{1}{4}$ ist $\dim_H(E^2_{\frac{1}{4}}) = 1$.

2.5 Hausdorffmaße auf euklidischen Räumen

Definition
Das n-dimensionale äußere Lebesguemaß λ^n auf $\mathbb{R}^n$ ist erklärt durch

$$\lambda^n(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)}) : -\infty < a_i^{(j)} < b_i^{(j)} < \infty :$$

$$i \in \mathbb{N}\,, j = 1, \dots, n,\ M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}) \times \cdots \times (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})\}.$$

Bei der Definition kann man sich auf Überdeckungsmengen mit Durchmesser kleiner ε für jedes $\varepsilon > 0$ beschränken oder halboffene bzw. abgeschlossene Intervalle verwenden. Wie beim Hausdorffmaß zeigt man dann, dass λ^n Borel-regulär ist. Ferner ist λ^n das einzige Borel-reguläre und translationsinvariante äußere Maß auf $\mathbb{R}^n$, das $[0,1]^n$ den Wert 1 zuordnet. Außerdem gilt

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \otimes \cdots \otimes \lambda^1}_{n\text{-mal}},$$

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

und

$$\lambda^n(r \cdot M) = r^n \cdot \lambda^n(M)$$

für $r \geq 0$, $M \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 2.26 (Brunn-Minkowski-Ungleichung)
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nicht leere Mengen. Dann gilt

$$\lambda^n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}},$$

wobei $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

Beispiel
Sei $B = sA$, $s > 0$.

$$\lambda^n(A+sA)^{\frac{1}{n}} = \lambda^n((1+s)A)^{\frac{1}{n}} = (1+s)\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + (s^n\lambda^n(A))^{\frac{1}{n}} = \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(sA)^{\frac{1}{n}} = \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis
Seien zunächst $A = I_1 \times \cdots \times I_n$, $B = J_1 \times \cdots \times J_n$ mit beschränken Intervallen $I_j, J_j \subset \mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren. Dann gilt $A + B = (I_1 + J_1) \times \cdots \times (I_n + J_n)$. Wir setzen $\lambda := \lambda^1$,

$u_k = \frac{\lambda(I_k)}{\lambda(I_k+J_k)}$ und $v_k = \frac{\lambda(J_k)}{\lambda(I_k+J_k)}$ für $k = 1, \dots, n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(A+B)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{(\prod_{k=1}^n \lambda(I_k))^{\frac{1}{n}} + (\prod_{k=1}^n \lambda(J_k))^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n \lambda(I_k+J_k)^{\frac{1}{n}}} \\
&= \prod_{k=1}^n u_k^{\frac{1}{n}} + \prod_{k=1}^n v_k^{\frac{1}{n}} \\
&= e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln u_k} + e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln v_k} \\
&\leq e^{\ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} u_k)} + e^{\ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} v_k)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{(u_k + v_k)}_{=1} = 1.
\end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass ln konkav und die Exponentialfunktion monoton wachsend ist.

Seien nun $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ endliche Familien von paarweise disjunkten Elementen aus

$$\{[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n) : -\infty < a_i < b_i < \infty \; \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Sei $A \coloneqq \bigcup_{P \in \mathcal{G}} P$, $B \coloneqq \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$. Durch vollständige Induktion über $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F}$ wird nun gezeigt, dass die Brunn-Minkowski-Ungleichung für solche Mengen A, B gilt. Der Induktionsanfang ist bereits oben gegeben.

Die Brunn-Minkowski-Ungleichung gelte für $\#\mathcal{G} \geq 1$, $\#\mathcal{F} \geq 1$ mit $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F} \leq p$ für ein $p \geq 2$. Sei nun $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F} \leq p + 1$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\#\mathcal{G} > 1$). Wähle ein $i \in \{1, \dots, m\}$ und $a \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$A_1 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i < a\}, \qquad A_2 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i \geq a\}$$

jeweils mindestens ein Element aus $\mathcal{G}$ enthalten. Wähle dann $b \in \mathbb{R}$ derart, dass für

$$B_1 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i < b\}, \qquad B_2 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i \geq b\}$$

gilt:

$$\frac{\lambda^n(B_i)}{\lambda^n(B)} = \frac{\lambda^n(A_i)}{\lambda^n(A)}$$

für $i = 1, 2$.

Sei $\mathcal{G}_i \coloneqq \{P \cap A_i : P \in \mathcal{G},\, P \cap A_i \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_i \coloneqq \{Q \cap B_i : Q \in \mathcal{F},\, Q \cap B_i \neq \emptyset\}$ für $i = 1, 2$. Dann ist $A_i = \bigcup_{P \in \mathcal{G}_i} P$, $B_i = \bigcup_{G \in \mathcal{F}_i} Q$, $\#\mathcal{G}_i < \#\mathcal{G}$ und $\#\mathcal{F}_i \leq \#\mathcal{F}$ für $i = 1, 2$. Folglich gilt die Induktionsannahme für (A_i, B_i), $i = 1, 2$. Die Mengen $A_1 + B_1$ und $A_2 + B_2$ werden durch die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a + b\}$ getrennt. Also ist wegen

$$A + B = (A_1 \cup A_2) + (B_1 \cup B_2) \supset (A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2)$$

und der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\lambda^n(A+B) &\geq \lambda^n(A_1+B_1)+\lambda^n(A_2+B_2) \\
&\geq \left(\lambda^n(A_1)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B_1)^{\frac{1}{n}}\right)^n+\left(\lambda^n(A_2)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B_2)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(\left(\frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(B)}\lambda^n(B_1)\right)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B_1)^{\frac{1}{n}}\right)^n+\left(\left(\frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(B)}\lambda^n(B_2)\right)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B_2)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \lambda^n(B_1)\left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}+1\right)^n+\lambda^n(B_2)\left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}+1\right)^n \\
&= \underbrace{(\lambda^n(B_1)+\lambda^n(B_2))}_{=\lambda^n(B)}\cdot\left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}\right)^n \\
&= \left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}+\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n,
\end{aligned}$$

d.h. die behauptete Ungleichung im betrachteten Fall.

Seien schließlich A, B nichtleer und kompakt. Setze für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_p &:= \{[0,2^{-p}]^n + 2^{-p}\cdot z : z \in \mathbb{Z}^n\}, \\
A_p &:= \bigcup_{\substack{C\in\mathcal{C}_p \\ C\cap A\neq\emptyset}} C, \\
B_p &:= \bigcup_{\substack{C\in\mathcal{C}_p \\ C\cap B\neq\emptyset}} C.
\end{aligned}$$

Dann gilt $A_p \searrow A$, $B_p \searrow B$ für $p \to \infty$. Außerdem ist $A+B$ kompakt und $A_p+B_p \searrow A+B$. Es folgt

$$\lambda^n(A+B) = \lim_{p\to\infty}\lambda^n(A_p+B_p) \geq \lim_{p\to\infty}\left(\lambda^n(A_p)^{\frac{1}{n}}+\lambda_n(B_p)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}+\lambda_n(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Für beliebige beschränkte Mengen folgt die Behauptung nun aus der inneren Regularität des Lebesguemaßes (vgl. Satz 2.2), die allgemeine Aussage erhält man mit Hilfe von Proposition 1.3 a). ■

Satz 2.27 (Isodiametrische Ungleichung)
Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^n(A) \leq \frac{\lambda^n(B(0,1))}{2^n}\cdot \operatorname{diam}(A)^n.$$

Beweis
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit A beschränkt und kompakt, da $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$ und $\lambda^n(A) \leq \lambda^n(\bar{A})$. Setze $A - A := A + (-A) = \{x - y : x, y \in A\}$. Aus Satz 2.26 folgt

$$\lambda^n(\frac{1}{2}(A-A)) = \frac{1}{2^n}\lambda^n(A + (-A)) \geq \frac{1}{2^n}\left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \underbrace{\lambda^n(-A)}_{=\lambda^n(A)}{}^{\frac{1}{n}}\right)^n = \lambda^n(A).$$

Ist $z \in \frac{1}{2}(A - A)$, also $z = \frac{1}{2}(x - y)$ mit $x, y \in A$, so ist $|z| = \frac{1}{2}|x - y| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A)$. Folglich ist $\frac{1}{2}(A - A) \subset B(0, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A))$, also

$$\lambda^n(A) \leq \lambda^n(\frac{1}{2}(A-A)) \leq \lambda^n(B(0, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A))) \leq \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(A)^n \cdot \lambda^n(B(0,1)).$$ ■

Bemerkung:
- Ein alternativer Beweis der vorangehenden beiden Ungleichungen kann mit Hilfe von Steinersymmetrisierung erfolgen.
- In den obigen beiden Ungleichungen ist es natürlich, nach dem Gleichheitsfall zu fragen. Die Schwierigkeit bei der Beantwortung der Frage hängt dann wesentlich von der betrachteten Mengenklasse ab.

Definition
Für $\delta > 0, p > 0$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathscr{H}^p_\delta := \inf\left\{\sum_{A\in\mathcal{A}} \alpha(p)2^{-p}\operatorname{diam}(A)^p : \mathcal{A} \in \Omega_\delta(M)\right\}$$

und

$$\mathscr{H}^p(M) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} \mathscr{H}^p_\varepsilon(M).$$

Notation: Für $p > 0$ sei

$$\alpha(p) := \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)}.$$

Für $p \in \mathbb{N}$ ist dann $\alpha(p) = \lambda^p(B^p(0,1))$ mit $B^p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$.

Lemma 2.28
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt: $\mathscr{H}^n \ll \lambda^n$.

Beweis
Ein allgemeines Argument folgt aus Übungsblatt 6, Nr. 1.

Die überdeckenden Mengen $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ bei der Definition des Maßes λ^n können so gewählt werden, dass $\operatorname{diam}(A) < \delta$ für ein vorgegebenes $\delta > 0$ und

$$|a_i - b_i| \leq 2\min\{|b_j - a_j| : 1 \leq j \leq n\} = 2|b_{i_0} - a_{i_0}|,\ i_0 \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.1}$$

Dann gilt:

$$\lambda^n(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq (b_{i_0} - a_{i_0})^n$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(A)^n &= \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right)^{\frac{n}{2}}\\ &\leq 2^n \sqrt{n}^n |b_{i_0} - a_{i_0}|^n\\ &\leq 2^n n^{\frac{n}{2}} \lambda^n(A).\end{aligned}$$

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(M) = 0$. Sei $\delta > 0$ fest. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, wie oben beschrieben, d.h. $\operatorname{diam}(A_i) < \delta$ und mit (2.1), $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) < \varepsilon$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^n \leq 2^n \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \varepsilon$$

also

$$\mathscr{H}_\delta^n(M) \leq \alpha(n) \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ist $\mathscr{H}_\delta^n(M) = 0$. Folglich ist auch $\mathscr{H}^n(M) = 0$. ∎

Satz 2.29
In $\mathbb{R}^n$ gilt: $\mathscr{H}^n = \lambda^n = \mathscr{H}_\delta^n$ für $\delta > 0$.

Beweis
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge U mit $M \subseteq U$ und $\lambda^n(U) \leq \lambda^n(M) + \varepsilon$ (vgl. Satz 2.2 c)).

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit Radius kleiner als $\frac{\delta}{2}$. Wegen Korollar 2.9 und Übung Nr. 1 auf Blatt 4 gibt es eine abzählbare Folge $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$ paarweise disjunkter Kugeln in U mit $\lambda^n(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$. Mit Lemma 2.28 folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\delta^n(M) &\leq \underbrace{\mathscr{H}_\delta^n(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)}_{=0} + \mathscr{H}_\delta^n(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\\ &\leq \sum_{i\geq 1} \underbrace{\alpha(n) \cdot 2^{-n} \operatorname{diam}(B_i)^n}_{=\lambda^n(B_i)}\\ &= \lambda^n(\bigcup_{i\geq 1} B_i)\\ &\leq \lambda^n(U)\\ &\leq \lambda^n(M) + \varepsilon\end{aligned}$$

folglich also

$$\mathscr{H}_\delta^n(M) \leq \mathscr{H}^n(M) \leq \lambda^n(M).$$

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Dann ist mit Satz 2.27

$$\lambda^n(M) \leq \lambda^n(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda^n(A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \alpha(n) \cdot 2^{-n} \operatorname{diam}(A_i)^n.$$

Wir erhalten

$$\lambda^n(M) \leq \mathscr{H}_\delta^n(M) \leq \mathscr{H}^n(M) \leq \lambda^n(M),$$

das heißt die Behauptung. ■