

## 10. Implizit definierte Funktionen

**Beispiele:**

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 - 1. f(x, y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Sei  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $y_0 \stackrel{(<)}{>} 0$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  und genau eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x_0) = y_0$  und  $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$ , nämlich

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (-\sqrt{\dots})$$

**Sprechweisen:** „ $g$  ist implizit durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$  definiert“ oder „die Gleichung  $f(x, y) = 0$  kann in der Form  $y = g(x)$  aufgelöst werden“

$$(2) f(x, y, z) = y + z + \log(x + z). \text{ Wir werden sehen: } \exists \text{ Umgebung } U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ von } (0, 1) \text{ und genau eine Funktion } g : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(0, -1) = 1 \text{ und } f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U.$$

**Der allgemeine Fall:** Es seien  $p, n \in \mathbb{N}$ ,  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $D$  offen,  $f = (f_1, \dots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ . Punkte in  $D$  (bzw.  $\mathbb{R}^{n+p}$ ) bezeichnen wir mit  $(x, y)$ , wobei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ , also  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ . Damit:

$$f' = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y} \text{ (} p \times p \text{)-Matrix}} \right); \text{ also } f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

### Satz 10.1 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Sei  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und genau eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit:

$$(1) (x, g(x)) \in D \forall x \in U$$

$$(2) g(x_0) = y_0$$

$$(3) f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$$

$$(4) g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$$

$$(5) \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \forall x \in U$$

$$(6) g'(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \forall x \in U$$

**Beweis**

Definition:  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  durch  $F(x, y) := (x, f(x, y))$ . Dann:  $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+p})$  und

$$F'(x, y) = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & & & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & & \end{array} \right)$$

Dann:

(I)  $\det F'(x, y) \stackrel{\text{LA}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ), insbesondere:  $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ . Es ist  $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ . 9.3  $\implies \exists$  eine offene Umgebung  $\mathbb{U}$  von  $(x_0, y_0)$  mit:  $\mathbb{U} \subseteq D, f(\mathbb{U}) = \vartheta$ .  $F$  ist auf  $\mathbb{U}$  injektiv,  $F^{-1} : \vartheta \rightarrow \mathbb{U}$  ist stetig differenzierbar und

(II)  $\det F'(x, y) \stackrel{\text{(I)}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{U}$

**Bezeichnungen:** Sei  $(s, t) \in \vartheta$  ( $s \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^p$ ),  $F^{-1}(s, t) =: (u(s, t), v(s, t))$ , also  $u : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $v : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig differenzierbar. Dann:  $(s, t) = F(F^{-1}(s, t)) = (u(s, t), f(u(s, t), v(s, t))) \implies u(s, t) = s \implies F^{-1}(s, t) = (s, v(s, t))$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{U} : f(x, y) = 0 \iff F(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) \iff y = v(x, 0)$ , insbesondere:  $y_0 = v(x_0, 0)$ .  $U := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \vartheta\}$ . Es gilt:  $x_0 \in U$ . Übung:  $U$  ist eine offene Umgebung von  $x_0$ .

**Definition:**  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  durch  $g(x) := v(x, 0)$ , für  $x \in U$  gilt:  $(x, 0) \in \vartheta \implies F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) = (x, g(x)) \in \mathbb{U}$ . Dann gelten: (1), (2), (3) und (4). (5) folgt aus (II).

Zu (6): Definition für  $x \in U : \psi(x) := (x, g(x)), \psi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$ ,

$$\psi'(x) = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & g'(x) & & \end{array} \right)$$

(3)  $\implies 0 = f(\psi(x)) \forall x \in U$ . 5.4  $\implies 0 = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right) \cdot \psi'(x) \stackrel{\text{LA}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) \forall x \in U$ . (5)  $\implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$  invertierbar, Multiplikation von links mit  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1}$  liefert (6). ■

**Beispiel**

$f(x, y, z) = y + z + \log(x + z)$ . Zeige:  $\exists$  offene Umgebung  $U$  von  $(0, 1)$  und genau eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0, -1) = 1$  und  $f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U$ . Berechne  $g'$  an der Stelle  $(0, -1)$ .

$f(0, -1, 1) = 0, f_z = 1 + \frac{1}{x+z}; f_z(0, -1, 1) = 2 \neq 0$ . Die Behauptung folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen. Also:  $0 = y + g(x, y) + \log(x + g(x, y)) \forall (x, y) \in U$ .

Differentiation nach  $x$ :  $0 = g_x(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}(1 + g_x(x, y)) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, -1)} 0 = g_x(0, -1) + \frac{1}{1}(g_x(0, -1) + 1) \implies g_x(0, -1) = -\frac{1}{2}$ .

Differentiation nach  $y$ :  $0 = 1 + g_y(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}g_y(x, y) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, -1)} g_y(0, -1) = -\frac{1}{2}$ . Also:  $g'(0, -1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .