$\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$ glatt
$\psi \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$ glatt
$\varphi \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$ glatt
$\varphi_i^{\pm} \circ \varphi$ glatt
$\varphi_i^{\pm} \circ \psi$ glatt

b) asdf

Lösung 2

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

Behauptung: φ induziert eine C^∞-Struktur auf $\mathbb{R}$, die von der Standardstruktur abweicht.

Dazu müssen wir zeigen:

(i) $\{(\varphi, \mathbb{R})\}$ ist ein C^∞-Atlas

(ii) φ ist nicht verträglich mit $(\mathrm{id}, \mathbb{R})$

Beweis:

(i) φ ist Homöomorphismus, da φ und $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig sind. Offensichtlich überdeckt φ ganz $\mathbb{R}$. Der einzige Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ist glatt.

(ii) Betrachte

$$\mathrm{id}_\mathbb{R} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

$\mathrm{id}_\mathbb{R} \circ \varphi^{-1}$ ist in 0 nicht differenzierbar $\Rightarrow$ (ii) ✓

Behauptung: Die beiden C^∞ Strukturen sind diffeomorph

Beweis: Sei

$$f : \underset{\text{von id induziert}}{(\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})} \to \underset{\text{von } \varphi \text{ induziert}}{(\mathbb{R}, \tau)}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

Dann ist f bijektiv. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & (\mathbb{R}, \tau) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi \circ f \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R})^{-1}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\varphi \circ f \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R})^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

ist glatt. Betrachte nun f^{-1}: $\mathrm{id}_\mathbb{R} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$ ist glatt. Damit ist f ein Diffeomorphismus.

Lösung 3

$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, M_1, M_2 C^k-Mannigfaltigkeiten, $N_i \subseteq M_i$ Untermannigfaltigkeit, $f \in C^j(M_1, M_2)$ wobei $j \leq k$, $f(N_1) \subseteq N_2$.

Behauptung: $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

Beweis: Sei $p \in N_1$, sei (φ_1, U_1) eine an N_1 adaptierte Karte von M_1 um p, das heißt $p \in U_1$.

$$\varphi_1(U_1 \cap N_1) = \varphi_1(U_1) \cap \left(\mathbb{R}^{\dim N_1} \times \{0\}^{n - \dim N}\right)$$

Sei (φ_2, U_2) eine an N_2 adoptiere Karte von M_2 um $f(p)$. Dann erhalten wir Karten von N_i, indem wir die Projektion $\pi_i : \mathbb{R}^{\dim M_i} \to \mathbb{R}^{\dim N_i}, x \mapsto (x^1, \ldots, x^{\dim N_i})$ hinter die Karten φ_i schalten (das heißt betrachte $\pi_i \circ \varphi_i$).

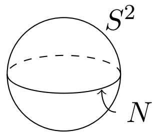
Es ist

$$(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f|_{N_1} \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} = \underbrace{\pi_2}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})}_{C^j} \circ C_1$$

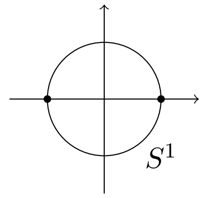
mit $C_1 : \mathbb{R}^{\dim N_1} \ni x \mapsto (x, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M_1}$. Also $(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \in C^j$ und damit $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

Lösung 4

a) $M = S^n$, $N = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in S^n \mid x^2 = \dots = x^n = 0\}$; Skizze für $n = 2$:



Behauptung: N ist eine Untermannigfaltigkeit von M.



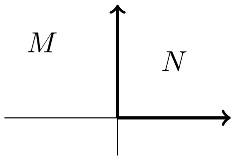
Beweis: Sei $\varphi : \overbrace{S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}}^{=:U} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \frac{1}{1-x^0}(x^1, \dots, x^n)$

Zu zeigen: $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1})$

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(N \setminus \{(1, \dots, 0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$$

Für $p \in N \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ ist φ also eine adoptierte Karte um p. Für $p = (1, 0, \dots, 0)$ ist analog ψ (aus 1 a)) eine adoptierte Karte.

b) $M = \mathbb{R}^2$, $N = \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \mid y \geq 0\}$; Skizze:



Behauptung: N ist keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$.

Beweis: Angenommen N wäre Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Da N homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, wäre es eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Damit existiert eine Karte (φ, U) von $\mathbb{R}^2$ um $(0, 0)$ mit $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Betrachte φ^{-1}, beziehungsweise $f(t) = \varphi^{-1}(t, 0)$. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(t_0) = (0, 0)$. Da $f(t) = N \cap U$ ist entweder $f(t) \in \{(0, y) \mid y \geq 0\}$ für $t > t_0$ und $f(t) \in \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ für $t < t_0$ oder umgekehrt. Dann ist $f'(t) \in \mathbb{R}\, e_2$ für $t > t_0$ und $f'(t) \in \mathbb{R}\, e_1$ für $t < t_0$ oder umgekehrt.

$\Rightarrow f'(0) \in \mathbb{R}\, e_1 \cap \mathbb{R}\, e_2 = \{(0, 0)\}$

Andererseits: $f'(0) = \underbrace{(D\varphi^{-1}|_{\varphi(0,0)})}_{\text{Isom., da } \varphi^{-1} \text{ Diffeom.}} \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$

Übung 2 vom 5. November 2012

Aufgabe 1

Es sei $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathrm{Bild}(\psi) \subset \mathbb{R}^2$, $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$. Dann ist die Inverse $\varphi = \psi^{-1}$ eine Karte von $\mathbb{R}^2$ mit Kartengebiet $\mathrm{Bild}(\psi)$ und Komponenten $r = \varphi^1$, $\vartheta = \varphi^2$.

Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ in kartesischen Koordinaten, d.h. bzgl der kanonischen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 2

a) Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i \qquad\qquad (p_1, p_2) \mapsto p_i$$

Submersionen sind.

b) Es sei

$$f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad t \mapsto \big(\sin(t), \sin(2t)\big).$$

Zeigen Sie, dass f eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist und skizzieren Sie Bild(f).

Aufgabe 3
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2$. Skizzieren Sie für $a = 0$, $a = 1$ und $a = -1$ die Niveaumengen

$$f^{-1}(c) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\Big\}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Welche Niveaumengen sind C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind, indem Sie sie als reguläre Urbilder darstellen und bestimmen Sie ihre Dimensionen.

Lösung 1
Es sei $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$, $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, die Inverse $\varphi = \psi^{-1}$ ist eine Karte von $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p &= \frac{\partial\left(\mathrm{id}^1 \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{\partial\left(\mathrm{id}^2 \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \\
&= \frac{\partial\left(\mathrm{id}^1 \circ \psi\right)}{\partial r}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{\partial\left(\mathrm{id}^2 \circ \psi\right)}{\partial r}(\varphi(r))^2 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \\
&= \cos(\vartheta(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \sin(\vartheta(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \\
&= \frac{1}{r(p)} \left(r(p)\cos(\vartheta(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + r(p)\sin(\vartheta(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right) \\
&= \frac{1}{r(p)} \left(\psi^1(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p + \psi^2(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right) \\
&= \frac{1}{\|p\|} \left(p^1 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + p^2 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right)
\end{aligned}$$

Als Vektorfeld:

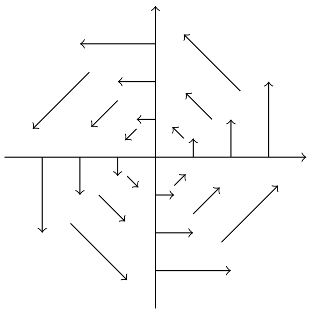
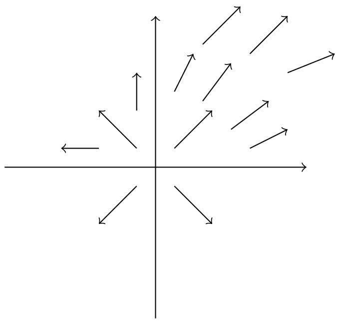
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\|(x, y)\|} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right|_p &= \frac{\partial\left(\mathrm{id}^1 \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial \vartheta}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{\partial\left(\mathrm{id}^2 \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial \vartheta}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \\
&= \ldots = -p_2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + p_1 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p
\end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Lösung 2

a) Zeige dass $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, $(p_1, p_2) \mapsto p_i$ eine Submersion ist.
Sei $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Seien φ_i Karten von M_i um p_i mit Kartengebieten U_i. Dann ist $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$ eine Karte von $M_1 \times M_2$ um (p_1, p_2). Es ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = \varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1}).$$

Für $(x_1, x_2) \in \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$ ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(x_1, x_2) = \varphi_i(\pi_i(\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2))) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(x_i)) = x_i.$$

Daraus folgt dass $\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}$ glatt ist. Der Rest des Beweises kann auf zwei Arten erfolgen.

Variante 1: Es folgt dass $\mathrm{D}(\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Dies ist die Darstellungsmatrix von π_{1*} bezüglich den Basen $\frac{\partial}{\partial \varphi_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_1^d}$ und $\frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^{\dim M_1 + \dim M_2}}$. Also ist π_{1*} surjektiv. Auch π_1 ist surjektiv, also ist π_1 eine Submersion. Der Beweis für π_2 folgt analog.

Variante 2: Sei $X = \sum_{j=0}^{\dim M_1} \xi^j \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_1^j}\right|_{p_1} \in \mathrm{T}_{p_1} M_1$. Setze

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{\dim M_1} \xi^j \left.\frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^j}\right|_p \in \mathrm{T}_p(M_1 \times M_2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_{1*_p}\tilde{X} &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \left(\sum_j \underbrace{\partial_j \left(\varphi^k \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}\right)}_{=\delta(k,j)} (\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2))\, \xi^j \right) \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_1^k}\right|_{p_1} \\ &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \xi^k \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_1^k}\right|_{p_1} = X \end{aligned}$$

Daraus folgt dass π_{1*} surjektiv ist.

b) Zeige dass $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$ eine injektive Immersion aber keine Einbettung ist.
f ist injektiv: Seien $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ mit $f(t_1) = f(t_2)$. Damit muss auch gelten dass $\sin(t_1) = \sin(t_2)$ und $\sin(2t_1) = \sin(2t_2)$. Aus diesen beiden Bedingungen folgt dass für t_1, t_2 gelten muss:

- $t_1 = t_2$ oder $\frac{\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{3\pi}{2}$
- $2t_1 = 2t_2$ oder $\frac{\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{3\pi}{2}$

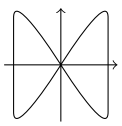
Aus den beiden Bedingungen folgt somit dass $t_1 = t_2$ gilt.

f ist eine Immersion: Es reicht zu zeigen, dass $f_{*t} = 0$ für alle t gilt. Es gilt $\mathrm{D}\, f(t) = (\cos(t), 2\cos(2t))$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\, f(t) = 0 &\Leftrightarrow \cos(t) = 0 \text{ und } \cos(2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}\right) \bigwedge \left(2t = \frac{\pi}{2} \vee 2t = \frac{3\pi}{2} \vee 2t = \frac{5\pi}{2} \vee 2t = \frac{7\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Das ist aber nicht möglich, also ist $\mathrm{D}\, f(t) \neq 0$. $\mathrm{D}\, f(t)$ ist die Darstellungsmatrix, also ist auch $f_{*_t} \neq 0$.

Skizze:



f ist keine Einbettung: Es gilt dass $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht in $(0, 2\pi)$ konvergiert, aber es ist $f\left(\frac{1}{k}\right) \to (0,0) = f(\pi) \in \operatorname{Bild} f$. Damit ist f kein Homöomorphismus auf das Bild.

Lösung 3

Es gilt $\mathrm{D}\, f(x,y,z) = 2(x,y,az)$, daraus folgt für $a = \pm 1$ dass $\mathrm{D}\, f(x,y,z) \neq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist, und für $a = 0$ ist $\mathrm{D}\, f(x,y,z) \neq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus$ z-Achse. Damit ist für $c > 0$ dann $f^{-1}(c)$ in der Menge der regulären Punkte von f enthalten.

Für $c = 0$: Wir betrachten nun drei Fälle

$a = 1$: Für $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ gilt $f^{-1}(c) = \{0\} = \mathbb{R}^3 \cap \{0\}^{3-0}$, also ist $f^{-1}(0)$ eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

$a = 0$: Definiere $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (z,x,y)$. Damit ist φ ein Diffeomorphismus, also eine globale Karte von $\mathbb{R}^3$ und es gilt:

$$\varphi(f^{-1}(0)) = \varphi(z\text{-Achse}) = \mathbb{R} \times \{0\}^2,$$

also ist $f^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

$a = -1$: $f^{-1}(0)$ ist keine Untermannigfaltigkeit. Angenommen es wäre eine, dann wäre $f^{-1}(0)$ zweidimensional:

$$\varphi : f^{-1}(0) \cap \{(x,y,z) \mid z > 1\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\overline{B_1(0)}}_{x^2+y^2=z^2>1} \qquad (x,y,z) \mapsto (x,y)$$

ist ein Homömorphismus. Da für $(x,y,0) \in f^{-1}(0)$ gilt $x^2 + y^2 = 0$, also $x = y = 0$, zerfällt $f^{-1}(0) \setminus \{(0,0,0)\}$ in zwei Zusammenhangskomponenten, was einen Widerspruch zur Zweidimensionalität von $f^{-1}(0)$ bildet. $\lightning$

Für $c < 0$: Wir betrachten nur noch zwei Fälle

$a = 1, 0$: Definitionssache, aber ja: Die Aussage über $\emptyset$ liefert dass es für alle p in der Untermannigfaltigkeit eine globale Karte gibt.

$a = -1$: Es gilt

$$f^{-1}(c) = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\} = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2 + y^2 + |c|\},$$

das heißt für $(x,y,z) \in f^{-1}(c)$ gilt $z \neq 0$, also $\{0\} \notin f^{-1}(c)$. Daraus folgt dass alle Punkte aus $f^{-1}(c)$ regulär sind.

Lösung 4

Zeige dass die Gruppen $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$ und $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = I_n\}$ glatte Untermannigfaltigkeiten des $R^{n\times n}$ sind.

Definiere $f = \det$, dann ist $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(1)$. Dann gilt

$A[k,j]$ bezeichnet die Matrix A bei der die k-te Zeile und die i-te Spalte weggelassen wurden

$$\frac{\partial(f)}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det A[k,j]a_{jk}\right) = (-1)^{i+j}\det A[i,j]$$

Es ist $\mathrm{D}\, f(A) = 0 \Leftrightarrow \forall i,j \det A[i,j] = 0 \Rightarrow \det A = 0$, damit ist 1 regulärer Wert. Also ist $\dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathbb{R} = n^2 - 1$.

Definiere nun $g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto AA^T$. Dann ist $\mathrm{O}(n) = g^{-1}(I_n)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\, g(A)(B) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(A+tB)\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(AA^T + tAB^T + tBA + t^2BB^T) = AB^T + BA^T\end{aligned}$$

Seien nun $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$. Es bleibt zu zeigen dass ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert sodass $\mathrm{D}\, g(A)(B) = C$. Es gilt:

$$\mathrm{D}\, g\,(A)\left(\frac{1}{2}CA\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{AA^T}_{=I}C^T + C\underbrace{AA^T}_{=I}\right) = C$$

Daraus folgt dass I ein regulärer Wert von g ist und $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $n^2 - \dim \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Übung 3 vom 12. November 2012

Aufgabe 1

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Die kanonische Projektion $\pi : \mathrm{T}M \to M$ ist ein Submersion.

b) Der Nullschnitt $\sigma : M \to \mathrm{T}M$, $p \mapsto 0 \in \mathrm{T}_pM$ ist eine Einbettung.

c) Ist N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $\Phi : M \to N$ glatt, so ist $\Phi_* : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ glatt.

Aufgabe 2

Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$.

a) Zeigen Sie, dass die Lieklammer im Allgemeinen nicht $C^\infty(M)$-bilinear ist.

b) Zeigen Sie, dass XY mit $XY(p)(f) := X_p(Y(f))$ für $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$ im Allgemeinen kein Vektorfeld ist.

Es sei ferner (φ, U) eine Karte von M und $X|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, sowie $[X,Y]|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ die lokalen Darstellungen von X, Y und $[X,Y]$ bezüglich φ.

c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i} - \eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right).$$

Aufgabe 3

a) Es seien auf $\mathbb{R}^2$ die beiden Vektorfelder $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ und $Y = -2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial y}$ gegeben. Skizzieren Sie die Vektorfelder und bestimmen Sie die Flüsse von X und Y.

b) Auf dem Torus $\mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 = \{(e^{i\vartheta^1}, e^{i\vartheta^2}) \in \mathbb{C}^2 \mid \vartheta^1, \vartheta^2 \in \mathbb{R}\}$ betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld $X_k = \frac{\partial}{\partial\vartheta^1} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\vartheta^2}$. Bestimmen Sie die Integralkurve von X_k durch den Punkt $(1,1) \in \mathrm{T}^2$.

Lösung 1

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei desweiteren für alle drei Teilaufgaben $p \in M$, φ eine Karte um p mit Kartengebiet U und

$$\overline{\varphi} : \begin{cases} \mathrm{T}\,M|_U & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_i \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q & \mapsto & (\varphi(q), \xi) \end{cases}$$

eine Karte von $\mathrm{T}\,M$. Alle diese Karten bilden dann einen Atlas von $\mathrm{T}\,M$.

a) *Zeige:* $\pi : \mathrm{T}\,M \to M$, $\mathrm{T}_p\,M \ni x \mapsto p$ ist eine Submersion.

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \overline{\varphi}^{-1} \underbrace{(y, \xi)}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n} &= \varphi\left(\pi\left(\sum_i \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(y)}\right)\right) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

also ist π glatt. Desweiteren ist

$$\mathrm{D}(\varphi \circ \pi \circ \overline{\varphi}^{-1})|_{(y,\xi)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

surjektiv und damit auch $\pi_{*\overline{\varphi}^{-1}(y,\xi)}$. Offensichtlich ist π surjektiv und damit eine Submersion.

b) *Zeige:* $\sigma : M \to \mathrm{T}\,M$, $p \mapsto 0_{\mathrm{T}_p\,M}$ ist eine Einbettung.

Es gilt

$$\overline{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}(y) = \overline{\varphi}(0_{\mathrm{T}_{\varphi^{-1}(y)}\,M}) = (\varphi(\varphi^{-1}(y)), 0) = (y, 0)$$

Daraus folgt folgt dass $D(\overline{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1})|_y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$ injektiv ist und damit auch $\sigma_{*\varphi^{-1}(y)}$. σ ist injektiv und stetig, $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_m$, also ist $\sigma^{-1} = \pi|_{\mathrm{Bild}(\sigma)}$ stetig.

c) *Zeige:* Ist $\Phi : M \to N$ eine glatte Abbildung, so auch $\Phi_* : \mathrm{T}\,M \to \mathrm{T}\,N$.

Sei ψ eine Karte um $\Phi(p)$ und $\overline{\psi}$ die zugehörige Karte von $\mathrm{T}\,N$.

$$\begin{aligned} (\overline{\psi} \circ \Phi_* \circ \overline{\varphi}^{-1}) \underbrace{(y, \xi)}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n} &= (\overline{\psi} \circ \Phi_*)\left(\sum \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(y)}\right) \\ &= \overline{\psi}\left(\sum_i \left(\sum_j \left.\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi^{-1}(y)} \xi^j\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_{\Phi(\varphi^{-1}(y))}\right) \\ &= \left(\underbrace{(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})}_{\text{glatt}}(y), \underbrace{\left(\sum_j \underbrace{\left.\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi^{-1}(y)}}_{\text{glatt in } y} \overbrace{\xi^j}^{\substack{\text{glatt} \\ \text{in } \xi}}\right)_{i=1,\dots,n}}_{\text{glatt}}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt dass Φ_* glatt ist.

Lösung 2

a) *Zu zeigen:* $[\cdot,\cdot]$ ist im Allgemeinen nicht $C^\infty(M)$-bilinear.
$M=\mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial x}=X=Y$, $f=\mathrm{id}$ „$=x$“

$$[X,\underbrace{fY}_{=x\frac{\partial}{\partial x}}] \overset{\text{c)}}{=} \left(1\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1}-x\underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0}\right)\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}$$

$$f[X,Y] \overset{\text{c)}}{=} f\left(1\underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0}-1\underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0}\right)\frac{\partial}{\partial x}=0$$

b) *Zu zeigen:* für $X,Y\in\mathcal{V}(M)$ ist XY mit $(XY)|_p(f)=X_p(Y(f))$ im Allgemeinen keine Derivation.

$$\begin{aligned}(XY)_p(fg)&=X_p(Y(fg))\\&=X_p(q\mapsto Y_q(fg))\\&=X_p(q\mapsto f(q)Y_q(g)+g(q)Y_q(f))\\&=X_p(fY(g)+gY(f))\\&=X_p(fY(g))+X_p(gY(f))\\&=f(p)\cdot X_p(Y(g))+Y_p(g)\cdot X_p(f)+g(p)\cdot X_p(Y(f))+Y_p(f)X_p(g)\\&=f(p)\cdot(XY)|_p(g)+g(p)(XY)|_p(f)+\underbrace{Y_p(g)X_p(f)+Y_p(f)X_p(g)}_{\neq 0}\end{aligned}$$

$M=\mathbb{R}$, $X=Y=\frac{\partial}{\partial x}$, $f=g=\mathrm{id}\Rightarrow$ Leibnitz-Regel gilt nicht.

c) *Bemerkung:* Ist $X|_U=\sum_{i=1}^n\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ lokale Darstellung bezüglich φ von $X\in\mathcal{V}(M)$, so ist

$$\xi^i=X(\varphi^i)$$

Seien $X|_U=\sum_i\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U=\sum_i\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}[X,Y](x^j)&=(XY-YX)(x^j)\\&=X(Y(x^j))-Y(X(x^j))\\&=X\left(\sum_i\eta^i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}}\right)-Y\left(\sum_i\xi^i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}}\right)\\&=X(\eta^j)-Y(\xi^j)\\&=\sum_i\left(\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\eta^j)-\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^j)\right)\end{aligned}$$

Lösung 3

a) Es seien $X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}, Y=-2y\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial y}\in\mathcal{V}(\mathbb{R})$, bestimme γ_x^t und γ_y^t.
Für X: $t\mapsto\gamma_*^t(p)$ ist Integralkurve von X mit $\gamma_x^0(p)=p$. *Gesucht:* Kurve mit $\gamma(0)=p$, $\gamma_{*t}\frac{\partial}{\partial t}=X(\gamma(t))\Leftrightarrow\gamma_{*t}\frac{\partial}{\partial t}(x)=X(\gamma(t))(x)$ und $\gamma_{*t}\frac{\partial}{\partial t}(y)=X(\gamma(t))(y)\Leftrightarrow\gamma_1'(t)=-\gamma_2(t)$ und $\gamma_2'(t)=\gamma_1(t)$. Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}'(t)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\\gamma_2(t)\end{pmatrix}\quad\text{und }\gamma(0)=p$$

hat als Lösung $t \mapsto \exp(t \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) \cdot p$. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (\ldots)^k \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} & - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \\ - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right) \cdot p = \gamma_x^t(p)$

Für Y: $\gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t} = Y(\gamma(t)),\ \gamma(0) = p \overset{\text{analog}}{\Longleftrightarrow} \gamma'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix}\right) \gamma(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\underbrace{\gamma(t)}_{=\gamma_x^t(p)} = \exp(t \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix}\right)) \cdot p = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right) \cdot p$

b) asdf

Übung 4 vom 19. November 2012

Aufgabe 1

Es seien $X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass X und Y vollständig sind. Zeigen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $[X, Y] = 0$.

(ii) Die Flüsse von X und Y kommutieren, d.h. $\gamma_X^t \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Die Aussage gilt auch für nicht vollständige Vektorfelder für geeignete Zeiten s und t.

Aufgabe 2

Es sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von M und für alle $\alpha, \beta \in I$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ seien eine glatte Funktion $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ gegeben. Es gelte $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p)$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$ und $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Weiter sei

$$E := \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim,$$

wobei für $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ und $v, w \in \mathbb{R}^k$ gelte:

$$(p, v) \sim (q, w) \Leftrightarrow p = q \text{ und } v = g_{\alpha\beta}(q) w$$

Zeigen Sie, dass $\pi : E \to M, [p, v] \mapsto p$ ein Vektorbündel über M vom Rang k ist.

Aufgabe 3
Es seien E, E' Vektorbündel über M und $F : E \to E'$ ein Bündelmorphismus, der faserweise ein Isomorphismus ist, d.h für alle $p \in M$ ist $F_p : E_p \to E'_p$ ein Isomorphismus.
Zeigen Sie, dass F ein Bündelisomorphismus ist, es also einen zu F inversen Bündelmorphismus gibt.

Aufgabe 4
a) In einem Vektorbündel E vom Rang k über M gebe es k punktweise linear unabhängige Schnitte. Zeigen Sie, dass E trivial ist.
b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}\,\mathrm{S}^3$ trivial ist.

Hinweis: Unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ entspricht $\mathrm{T}_p\mathrm{S}^3 \subset \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^4$ dem orthogonalen Komplement $p^\perp$.

Lösung 1
(ii) ⇒ (i): Es ist $\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p) = \gamma_X^{-t} \circ \gamma_X^t \circ \gamma_Y^s(p) = \gamma_Y^s(p)$, und daraus folgt

$$\begin{aligned}
Y|_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\gamma_Y^s(p)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \Big((\gamma_x^{-t} \circ \gamma_Y^s)(\gamma_X^t(p))\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \Big(\gamma_x^{-t} \circ \Big(s \mapsto \gamma_Y^s(\gamma_x^t(p))\Big)\Big) \\
&= \gamma_{X*}^{-t} Y|_{\gamma_X^t}(p)
\end{aligned}$$

Es gilt $[X, Y]|_p = (\mathcal{L}_X\, Y)_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-t} Y)_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} Y_p = 0$.
(i) ⇒ (ii): betrachte $\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{s=0} (\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p))$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} \Big(\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Big(\gamma_{X*}^{-(t_0+t)} Y_{\gamma_X^{t_0+t}(p)}\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Big((\gamma_X^{-t_0} \circ \gamma_X^{-t})_* Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Big(\gamma_{X*}^{-t_0} \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}\Big) \\
&= \gamma_{X*}^{-t_0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Big(\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}\Big)\right) \\
&= \gamma_{X*}^{-t_0} \Big((\mathcal{L}_X\, Y)_{\gamma_X^{t_0}(p)}\Big) = \gamma_{X*}^{-t_0} \Big(\underbrace{[X, Y]_{\gamma_X^{t_0}(p)}}_{=0}\Big) = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt dass $t \mapsto \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}$ konstant ist, also ist

$$\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \underbrace{\gamma_X^{-0}}_{=\mathrm{id}_M} Y_{\gamma_X^0(p)} = Y_p$$

Sei $c(s) := \gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))$, dann folgt

$$\dot{c}(s) = \gamma_{X*}^{-t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\gamma_Y^s(q)\right) = \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_Y^s(q)} = Y_{\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))} = Y_{c(s)}$$

Daraus folgt dass c eine eindeutige Integralkurve zu Y durch $c(0) = \gamma_X^{-t}(q)$ ist. Damit folgt dann

$$\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q)) = \gamma_Y^s(\gamma_X^{-t}(q))$$

und damit

$$\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^{-t}$$

Lösung 2

Sei $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung vom M, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, $g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p)$ für alle $\in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Sei $E := \dot{\bigcup}_{\alpha \in I}(U_\alpha \times \mathbb{R}^k)_{/\sim}$, wobei für $(p,v)_\alpha \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $(q,w)_\beta \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$ gilt $(p,v)_\alpha \sim (q,w)_\beta \Leftrightarrow p = q$ und $v = g_{\alpha\beta}(p) \cdot w$.

Behauptung: $\pi : E \to M$, $[p,v] \mapsto p$ ist ein Vektorbündel.

„$\sim$" ist Äquivalenzrelation:
- $(p,v)_\alpha \sim (p,v)_\alpha$ gilt: $g_{\alpha\alpha}(p) = \mathrm{id}\, v$ $(g_{\alpha\alpha}(p) = \underbrace{g_{\alpha\alpha}(p)}_{\in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})} \cdot g_{\alpha\alpha}(p))$
- $(p,v)_\alpha \sim (q,w)_\beta \Rightarrow (q,w)_\beta \sim (p,v)_\alpha$ gilt: $p = q$, $v = g_{\alpha\beta}(p)w \Rightarrow w = (g_{\alpha\beta}(p))^{-1}v = g_{\beta\alpha}v$ $(g_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p))$
- Transitivität folgt aus $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$

***E_p* ist *k*-dimensionaler Vektorraum:**

$$[(p,v)_\alpha] + \lambda[(p,w)_\alpha] := [(p, v + \lambda w)_\alpha]$$

unabhängig von α:

$$\begin{aligned}
[(p,v)_\beta] + \lambda[(p,w)_\beta] &= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha] + \lambda[(p, g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\
&= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v + \lambda g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\
&= [(p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot (v + \lambda w))_\alpha] = [(p, v + \lambda w)_\beta]
\end{aligned}$$

k-dimensional: $q|_{\{p\}\times\mathbb{R}^k} : \{p\} \times \mathbb{R}^k \to E_p$ ist Vektorraum-Isomorphismus (wobei $q : \dot{\bigcup}_{\alpha\in I}(U_\alpha \times \mathbb{R}^k) \to E$)

Bündelkarten (glatt): $\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to E|_{U_\alpha}$, $(p,v) \mapsto [(p,v)_\alpha]$ ist Homöomorphismus, da $\sim|_{(U_\alpha\times\mathbb{R}^k)\times(U_\alpha\times\mathbb{R}^k)}$ die triviale Äquivalenzrelation ist.

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p,v) &= \Phi_\alpha([(p,v)_\beta]) \\
&= \Phi_\alpha([(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha]) \\
&= (p, g_{\alpha\beta}(p)v)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ ist glatt. $\Phi_\alpha|_{E_p}$ ist Vektorraum-Isomorphismus.

„normale" Karten: Sei φ Karte von M mit Kartengebiet $U \subset U_\alpha \rightsquigarrow \overline{\varphi}_\alpha : E|_U \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$, $e \mapsto (\varphi(\pi(e)), (\Phi_\alpha)^2(e))$.
Glatte Kartenwechsel ✓

***E* Hausdorffsch:** $[(p,v)_\alpha] \neq [(q,w)_\beta] \in E$

$p \neq q$: Die Urbilder in M trennender Umgebungen von p und q unter π trennen die Punkte in E.

$p = q$: $v \neq g_{\alpha\beta}(p)w \rightsquigarrow$ trennen im $\mathbb{R}^k$ und über Φ_α zurückziehen.

abzählbare basis der Topologie (für $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ✓): Es gibt ein $I' \subseteq I$ mit I abzählbar und $M = \bigcup_{\alpha\in I'} U_\alpha$. Sei $\{V_j \mid j \in J'\}$ abzählbare Basis der Topologie von M. Dann ist mit $J = \{j \in J' \mid V_j \subset U_\alpha$ für ein $\alpha \in I\}$, $\{V_j \mid j \in J\}$ auch abzählbare Basis der Topologie von M, denn $U \underset{\text{offen}}{\subset} M \Rightarrow$

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap U) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J' \\ U_j \subset U_\alpha \cap U}} V_j \qquad\qquad (U_j \subset U_\alpha \cap U \Rightarrow j \in J) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J \\ V_j \subset U_\alpha \cap M}} V_j \end{aligned}$$

Für $j \in J$ sei $\alpha(j) \in I$, sodass $V_j \subset U_{\alpha(j)}$. Setze $I' := \{\alpha(j) \mid j \in J\}$.

$$\bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha = \bigcup_{j \in J} U_{\alpha(j)} \supseteq \bigcup_{j \in J} V_j = M$$

Lösung 3

Es seien E, E' Vektorbündel über M und $F : E \to E'$ sei ein Bündelmorphismus mit dem Isomorphismus $F_p : E_p \to E'_p$ für alle $p \in M$.

Behauptung: F ist ein Bündelisomorphismus

F ist surjektiv, denn für $e \in E'$ ist $F_{\pi'(e)} : E_{\pi'(e)} \to E'_{\pi'(e)}$ bereits ein Isomorphismus, also existiert ein Urbild $\tilde{e} \in E_{\pi'(e)} \subset E$ mit $F(\tilde{e}) = F_{\pi'(e)}(\tilde{e}) = e$. Dass F injektiv ist folgt analog, da $\pi' \circ F = \pi$.

Damit existiert ein $G : E' \to E$ mit $G \circ F = \mathrm{id}$, $F \circ G = \mathrm{id}$ und $\pi \circ G = \pi'$. Damit gilt auch

$$G(e') = (F_{\pi'(e)})^{-1}(e')$$

Es sei nun ein offenes $U \subseteq M$ mit den Trivialisierungen $E|_U$ und $E'|_U$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge] E|_U \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, bend right, "F"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, bend right, "\Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} = \tilde{F}"'] \\ E'|_U \arrow[r, "\Phi'", "\cong"'] \arrow[u, bend right, "G"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[u, bend right, "\tilde{G} = \Phi \circ G \circ \Phi'^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Da $\pi' \circ F = F$ ist, existiert eine Abbildung $f : U \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ sodass $\tilde{F}(p, v) = (p, f(p) \cdot v)$ ist. Daraus folgt dass $\tilde{G}(p, w) = (p, (f(p))^{-1} w)$ glatt ist, da $\cdot^{-1} : \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ glatt ist (denn $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A[i,j])_{i,j}^T$). Damit ist G glatt und somit auch ein Bündelmorphismus.

Lösung 4

(a) *Behauptung:* Es sei E ein Vektorbündel vom Rang k über M auf dem k punktweise linear unabhängige Schnitte existieren. Dann ist E trivial.

Es seien $\sigma_1, \dots, \sigma_k : M \to E$ Schnitte, die punktweise linear unabhängig sind. Dann hat E_p als Basis $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$. Definiere nun $F : E \to M \times \mathbb{R}^k$, $\sum_{i=k}^k a_i \sigma_i(p) \mapsto (p, a_1, \dots, a_k)$. Es gilt $\pi_1 \circ F = \pi$ und F_p ist ein Isomorphismus. F ist glatt, denn für eine Bündelkarte Φ ist $\tilde{\sigma}_i = \Phi^2 \circ \sigma_i$, das heißt $\Phi(\sigma(p)) = (p, \tilde{\sigma}(p))$. Mit $A(p) = (\tilde{\sigma}_1(p), \dots, \tilde{\sigma}_k(p))^{-1}$ gilt: Φ^2 ist die zweite Komponente

$$F \circ \Phi^{-1}(p, v) = (p, A(p) \cdot V)$$

Daher ist F glatt und mit Aufgabe 3 folgt, dass F ein Bündelmorphismus ist.

(b) *Zu zeigen:* $\mathrm{T}\, S^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$

Es gilt:

$$\mathrm{T}_p\, S^3 \cong p^\perp \ni \underbrace{\begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{=:\sigma_1(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_3 \\ -p_4 \\ -p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -p_4 \\ -p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3(p)}$$

Dadurch sehen wir dass $\sigma_i(p) \perp \sigma_j(p)$ für $i \neq j$, woraus folgt dass $\sigma_1, \ldots, \sigma_3$ punktweise linear unabhägige Schnitte sind. Mit (a) folgt dann die Behauptung.

Anmerkung Der Raum der Schnitte $\Gamma(M, E)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, also ist lineare Unabhängigkeit für Schnitte definiert. Linear unabhängige Schnitte sind im Allgemeinen *nicht* punktweise linear unabhängig. Betrachte beispielsweise

$$\pi_1 : \underset{\text{Mf.}}{\mathbb{R}} \times \underset{\text{VR}}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

Dann sind $\sigma_1(t) = (t, 1)$ und $\sigma_2(t) = (t, t)$ lineare unabhängig, aber in jedem Punkt linear abhängig.

Übung 5 vom 26. November 2012

Aufgabe 1

Beweisen Sie Proposition 5.4 der Vorlesung: Die (r, s)-Tensorfelder auf M entsprechen genau den $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}} \to C^\infty(M)$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie, welche der folgenden auf $\mathbb{R}^3$ definierten Differentialformen geschlossen und welche exakt sind:

a) $\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz$

b) $\omega_2 = y^2dx + x^3yzdy + x^2ydz$

c) $\omega_3 = xdx + x^2y^2dy + yzdz$

d) $\omega_4 = 2xy^2\, dx \wedge dy + z\, dy \wedge dz$

Aufgabe 3

Es sei $\vartheta : \mathrm{S}^1 \setminus \{1\} \to (0, 2\pi), e^{i\vartheta} \mapsto \vartheta$. Zeigen Sie, dass sich $d\vartheta$ auf ganz S^1 fortsetzen lässt.

Einschub Für ein Tensorprodukt $V \otimes W$ und ein Element $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$ gilt im Allgemeinen

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \neq v_3 \otimes w_3$$

Beispiel: $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$

Lösung 1

Wir zeigen dass die (r,s)-Tensorfelder den $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen entsprechen.

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M)\times\ldots\times\mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}}\times\underbrace{\mathcal{V}(M)\times\ldots\times\mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}$$

Zunächste zeigen wir die Behauptung punktweise. Sei dazu $p\in M$ und die Abbildung

$$F_p:\mathrm{T}_p\,M\otimes\ldots\otimes\mathrm{T}_p\,M\otimes\mathrm{T}_p^*\,M\otimes\ldots\otimes\mathrm{T}_p^*\,M\to\mathrm{Multilin}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}_p^*\,M\otimes\ldots\otimes\mathrm{T}_p\,M)$$

definiert durch

$$\begin{aligned}F_p(\sum_i a_i\overbrace{X_1^i}^{\in\mathrm{T}_p\,M}\otimes\ldots\otimes X_r^i\otimes\overbrace{\omega_1^i}^{\in\mathrm{T}_p^*\,M}\otimes\ldots\otimes\omega_s^i)(\eta_1,\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_s)&\\ :=\sum_i a_i\eta_1(X_1^i)\cdot\ldots\cdot\eta_n(X_r^i)\cdot\omega_1^i(Y_1)\cdot\ldots\cdot\omega_s^i(Y_s)&\end{aligned}$$

***F_p* ist wohldefiniert:** • $F_p(\ldots)$ ist $\mathbb{R}$-multilinear ✓

- Sei $Z_1,\ldots,Z_r$ Basis von $\mathrm{T}_p\,M$, $\mu_1,\ldots,\mu_s$ die dazu duale Basis von $\mathrm{T}_p^*\,M$. Damit ist $\{Z_{i_1}\otimes\ldots\otimes Z_{i_r}\otimes\mu_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mu_{j_s}\mid i_1,\ldots i_r,j_1,\ldots,j_s\in\{1,\ldots,n\}\}$ eine Basis von $\mathrm{T}_p\,M\otimes\ldots\otimes\mathrm{T}_p^*\,M$. Sei $X_k^i=\sum_\alpha\chi_{k,\alpha}^iZ_\alpha$, $\omega_l^i=\sum_\beta w_{l,\beta}^i\mu_\beta$, dann folgt

$$\begin{aligned}&\sum_i a_iX_1^i\otimes\ldots\otimes\omega_s^i\\ =&\sum_i a_i(\sum_{\alpha_1}\chi_{k,\alpha_1}^iZ_{\alpha_1})\otimes\ldots\otimes(\sum_{\beta_s}w_{s,\beta_s}^i\mu_{\beta_s})\\ =&\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_s}}\underbrace{\left(\sum_i a_i\chi_{1,\alpha_1}^i\cdot\ldots\cdot\chi_{r,\alpha_r}^i\cdot w_{1,\beta_1}^i\cdot\ldots w_{s,\beta_s}^i\right)}_{=A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s}}Z_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes Z_{\alpha_r}\otimes\mu_{\beta_1}\otimes\ldots\otimes\mu_{\beta_s}\end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned}F_p\left(\sum a_iX_1^i\otimes\ldots\right)&=\sum a_i\eta_1(X_1^i)\cdot\ldots\cdot\omega_s^i(Y_s)\\ &=\ldots\\ &=\sum_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}A_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}\eta_1(Z_{\alpha_1})\ldots\mu_{\beta_s}(Y_s)\\ &=F_p\left(\sum A_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}Z_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\mu_{\beta_s}\right)\end{aligned}$$

***F_p* ist $\mathbb{R}$-linear**

***F_p* ist surjektiv:** Sei $g:\mathrm{T}_p^*\,M\times\ldots\mathrm{T}_p\,M\to\mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung, dann ist g eindeutig bestimmt durch

$$\overset{\mathbb{R}\ni}{A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s}}=g(\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_r},\beta_1,\ldots,\beta_s),\text{ mit }\alpha_1,\ldots,\beta_s\in\{1,\ldots,n\}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}F_p\left(\sum A_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}Z_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\mu_{\beta_s}\right)(\mu_{\tilde\alpha_1},\ldots,Z_{\tilde\beta_s})&=\sum A_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}\underbrace{\mu_{\tilde\alpha_1}(Z_{\alpha_1})}_{\delta_{\tilde\alpha_1\alpha_1}}\ldots\underbrace{\mu_{\beta_s}(Z_{\tilde\beta_s})}_{\delta_{\beta_s\tilde\beta_s}}\\ &=A_{\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\beta_s}\\ &=g(\mu_{\tilde\alpha_1},\ldots,Z_{\tilde\beta_s})\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$g = F_p\left(\sum A_{\alpha_1,\dots,\beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes Z_{\beta_s}\right)$$

***F_p* ist injektiv:** Ist $0 = F_p(\sum A_{\alpha_1,\dots,\beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{\beta_s})$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= F_p()(\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, \mu_{\tilde{\alpha}_r}, Z_{\tilde{\beta}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) \\ &= A_{\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\beta}_s} \text{ für alle } \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\sum A_{\alpha_1,\dots,\beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{\beta_s} = 0$

Insgesamt folgt damit dass F_p ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Wir definieren nun

$$F : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathrm{Multilin}_{C^\infty(M)}(\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \ldots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \ldots \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}, C^\infty(M))$$

durch

$$F(S)(\overset{\in\mathcal{V}^*(M)\ni}{\omega_1, \dots, \omega_r}, \overset{\in\mathcal{V}(M)\ni}{X_1, \dots, X_s})(p) := F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_r|_p, X_1|_p, \dots, X_s|_p)$$

$F(S)(\omega_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$: lokale Koordinaten $\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x^i} x^i$, Koeffizienten von $\omega_1, \dots, X_s$ glatt $\Rightarrow F(S)(\omega_1, \dots, X_s)$ glatt

$F(S)$ ist $C^\infty(M)$-multilinear: Seien $f \in C^\infty(M)$ und $\tilde{\omega}_i \in \mathcal{V}^*(M)$, damit ist dann:

$$\begin{aligned} F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i + f\tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p + f(p)\tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &\quad + f(p)F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, X_s)(p) \\ &\quad + f(p)F(S)(\omega_1, \dots, \tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) \end{aligned}$$

F ist $C^\infty(M)$-linear ✓

F ist injektiv: $F(S) = 0$, also ist $F_p(S_p) = 0$ für alle $p \in M$. Da F_p injektiv ist, ist $S_p = 0$ für alle $p \in M$ und damit $S = 0$.

F ist surjektiv: Sei $g : \mathcal{V}^*(M) \times \ldots \mathcal{V}^*(M) \times \mathcal{V}(M) \times \ldots \times \mathcal{V}(M) \to C^\infty(M)$ eine $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung. Seien weiter $p \in M$, φ eine Karte um p und χ eine glatte cut-off Funktion mit $\operatorname{supp}\chi \subset$ Kartengebiet von φ und $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung V von p. Für $q \in V$ ist

supp „Träger“

$$\begin{aligned} g(\omega_1, \dots, X_s)(q) &= g(\chi\omega_1 + (1-\chi)\omega_1, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &\quad + \underbrace{(1-\chi)(q)}_{=0} g(\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= \ldots = g(\chi\omega_1, \dots, \chi X_s)(q) \qquad (*) \end{aligned}$$

Sei $S_p := \sum A_{\alpha_1,\dots,\beta_s}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{\beta_s}|_p$ mit

$$A_{\alpha_1,\dots,\beta_s}(p) = g(\chi \mathrm{d}x^{\alpha_1}, \dots, \chi\frac{\partial}{\partial x^{\beta_s}})$$

Bachrechnen ergibt dass andere Karten das gleiche S_p liefern. Daher ist S auf ganz M definiert. Wegen (*) und der lokalen Darstellung gilt $F(S) = g$.

Lösung 2

a) $\omega_1 = yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ ist geschlossen und exakt

$$\left(\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

$\mathrm{d}(xyz) = (yz)\mathrm{d}x + (xz)\mathrm{d}y + (xy)\mathrm{d}z \Rightarrow 0 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d}(xyz) = \mathrm{d}\omega_1$

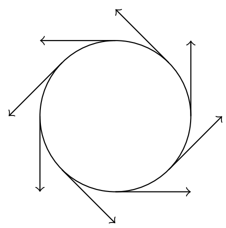
b) $\omega_2 = y^2\mathrm{d}x + x^3yz\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z$ ist weder geschlossen noch exakt.
$\mathrm{d}\omega_2 \neq 0$ (nachrechnen); angenommen $\exists \eta : \mathrm{d}\eta = \omega_2 \Rightarrow 0 = \mathrm{d}^2\eta = \mathrm{d}\omega_2 \neq 0 \lightning \Rightarrow \omega_2$ nicht exakt

c) $\mathrm{d}\omega_3 \neq 0$

d) ω_4 ist exakt

Lösung 3

Skizze:



Übung 6 vom 3. Dezember 2012

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Für je zwei Punkte in M existiert eine stückweise glatte Kurve, die diese verbindet.

b) Die Abstandsfunktion

$$d(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(c) \mid c : [0, 1] \to M \text{ ist stückweise glatt, } c(0) = p, c(1) = q\}$$

ist eine Metrik, welche die ursprüngliche Topologie erzeugt.

Aufgabe 2

Es sei für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, y\rangle := -x^0y^0 + x^1y^1 + \cdots + x^ny^n,$$

sowie

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = -1, x^0 > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und $\langle\, .\,, .\rangle$ für alle $p \in \mathbb{H}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{T}_p\,\mathbb{H}^n \subset \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^{n+1}$ definiert und die Gesamtheit dieser Skalarprodukte eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{H}^n$ ist.
Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}^n, g)$ heißt *n-dimensionaler hyperbolischer Raum.*

Aufgabe 3

Es sei $s = (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung φ mit

$$\varphi(x) := s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s\rangle}, \quad x \in \mathbb{H}^n,$$

ist ein Diffeomorphismus von $\mathbb{H}^n$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| < 1\}$.

b) In der Karte φ hat die Riemannsche Metrik auf $\mathbb{H}^n$ die Form

$$\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} d\xi^i \otimes d\xi^i.$$

Lösung 1

a) asdf

b) asdf

Lösung 2

asdf

Lösung 3

a) asdf

b) asdf

Übung 7 vom 10. Dezember 2012

Aufgabe 1

Es sei S^2 versehen mit der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik. Weiter sei $c : [0,1] \to S^2$ eine kürzeste C^1-Kurve zwischen $c(0) = N = (0,0,1)$ und $c(1)$. Zeigen Sie, dass das Bild von c in einem Großkreis enthalten ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Parametrisierung $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\vartheta)\cos(\varphi), \cos(\vartheta)\sin(\varphi), \sin(\vartheta))$.

Aufgabe 2

Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ und ∇ der kanonische Zusammenhang auf dem Tangentialbündel des $\mathbb{R}^k$. Für ein Vektorfeld X auf M bezeichne $\tilde{X}$ eine beliebige Fortsetzung von X zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{R}^k$ und für $v \in \mathbb{R}^k \cong \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^k$ bezeichne v^{T_pM} die orthogonale Projektion von v auf den Tangentialraum von M an p.

Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M) \qquad (\nabla^M_X Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{\mathrm{T}_pM},$$

einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von M definiert.

Aufgabe 3

a) Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ ein Zusammenhang auf E. Weiter sei

$$\nabla^* : \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*), \quad (\nabla^*_X(s^*))_p(v) := X_p(s^*(\tilde{v})) - s^*_p((\nabla_X(\tilde{v}))_p)$$

für $X \in \mathcal{V}(M)$, $s^* \in \Gamma(E^*)$, $v \in E_p$ und $\tilde{v} \in \Gamma(E)$ eine Fortsetzung von v. Zeigen Sie, dass ∇^* ein Zusammenhang auf E^* ist.

b) Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel über M mit Zusammenhängen ∇^1 und ∇^2. Zeigen Sie, dass es auf $E_1 \otimes E_2$ genau einen Zusammenhang ∇ gibt, der

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1_X(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_X(s_2)$$

für $X \in \mathcal{V}(M)$ und $s_i \in \Gamma(E_i)$ erfüllt.

Lösung 1

$c : [0,1] \to (S^2, g_{\mathrm{std}})$ kürzeste C^1-Kurve zwischen $c(0) = N = (0,0,1)$ und $c(1)$.
Behauptung: Bild c ist im Groskreis enthalten.
Wähle ein geeignetes Intervall der Länge 2π, sodass

$$\begin{aligned} f: \quad I \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) &\to \qquad f\left(I \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ (\varphi, \vartheta) \qquad &\mapsto (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta) \end{aligned}$$

bijektiv ist und $c(1) \in U$ (falls $c(1) \neq N, S$). Daraus folgt dass f^{-1} eine Karte von S^2 ist. Sei nun ohne Einschränkung c in keiner Umgebung von 0 konstant. Weiter sei $\gamma := f^{-1} \circ c$ (eventuell nur in einer Umgebung von 0 ohne $\{0\}$ definiert). Es bleibt nun zu zeigen, dass γ_1 konstant ist.
Bestimme g_{ij} bezüglich f^{-1}. Es ist

$$\begin{aligned} \partial_1 f =& \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\cos\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0) \\ \partial_2 f =& \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = \cos^2\vartheta \\ g_{22} &= \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 1 \\ g_{12} &= \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0 = g_{21} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} L(c|_{(0,\varepsilon)}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g(\dot c, \dot c)} = \int_0^\varepsilon \sqrt{\underbrace{g_{11}(c(t))\dot\gamma_1(t)^2 + g_{22}(c(t))\dot\gamma_2(t)^2}_{=(\dot\gamma_1,\dot\gamma_2)\left(\begin{smallmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}\dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2\end{pmatrix}}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\underbrace{\cos^2(\gamma_2(t))}_{\geq 0}\dot\gamma_1(t)^2 + \dot\gamma_2(t)^2}\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^\varepsilon |\dot\gamma_2(t)|\,\mathrm{d}t = L(\tilde c) \end{aligned}$$

für $\tilde c(t) = f(\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(t))$. Dann ist c die Kürzeste. Daraus folgt $L(c|_{(0,\varepsilon]}) = L(\tilde c|_{(0,\varepsilon]}$ und somit ist für alle $t \in (0,\varepsilon]$ stets $\cos^2(\gamma_2(t))\dot\gamma_1(t) = 0$. Da $\cos^2(\gamma_2(t)) > 0$ muss $\dot\gamma_1(t) = 0$ gelten. Da sich c nicht aus Bild f heraus bewegt, auser eventuell für $c(1)$, ist $\dot\gamma_1(t) = 0$ für alle $t \in (0,1)$.

Lösung 2

Sei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ und die Abbildung $\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$ mit $(\nabla^M_X Y)_p := ((\nabla_{\tilde X}\tilde Y)_p)^{\mathrm{T}_p M}$, wobei $\tilde X, \tilde Y$ Fortsetzungen von X, Y sind. Wir haben zu zeigen:

(0) Unabhängigkeit von der Wahl der Fortsetzungen
(1.1) $\nabla^M_{X_1+X_2} Y = \nabla^M_{X_1} Y + \nabla^M_{X_2} Y$
(1.2) $\nabla^M_{fX} Y = f \nabla^M_X Y$
(2.1) $\nabla^M_X (Y_1 + \lambda Y_2) = \nabla^M_X Y_1 + \lambda \nabla^M_X Y_2$
(2.2) $\nabla^M_X (fY) = X(f) \cdot Y + f \nabla^M_X Y$
(3) $\nabla^M_X Y \in \mathcal{V}(M)$ (klar ist, dass auf $\mathrm{T}_p M$ projiziert wird)

Wir werden nun diese einzelnen Behauptungen beweisen, wobei der Beweis von (2.1) in (1.1) enthalten ist.

(0) Es sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$. Damit erhält man folgendes:

$$
\begin{aligned}
((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}))^{\mathrm{T}_p M} &= ((\mathrm{D}\,\tilde{Y})_p \tilde{X}_p)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= ((\mathrm{D}\,\tilde{Y})_p X_p)^{\mathrm{T}_p M} && \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{X} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\tilde{Y} \circ c(t) \right) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (Y \circ c(t)) \right)^{\mathrm{T}_p M} && \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{Y}
\end{aligned}
$$

(1.1) Wähle $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$, beziehungsweise $\tilde{Y}_1 + \lambda \tilde{Y}_2$, als Fortsetzung entsprechend der Regeln für ∇. Daraus folgen dann die Behauptungen.

(1.2) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(\nabla^M_{fX} Y)_p = \left((\nabla_{f\tilde{X}} \tilde{Y})_p \right)^{\mathrm{T}_p M} &= \Big((D\tilde{Y})_p \underbrace{(f\tilde{X})_p}_{=f(p)X_p} \Big)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left((\mathrm{D}\,\tilde{Y})_p (f(p) X_p) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= f(p) \left((\mathrm{D}\,\tilde{Y})_p X_p \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= f(p) \left(\nabla^M_X Y)_p \right)
\end{aligned}
$$

(2.2) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^M_X (fX) \right)_p &= \left((\mathrm{D}\,\widetilde{(fY)})_p \cdot X_p \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\widetilde{(fY)} \circ c \right)(t) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left((fY) \circ c \right)(t) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(f(c(t)) \cdot Y(c(t)) \right)(t) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(f(c(t)) \right) Y(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(Y(c(t)) \right) \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= \left(X_P(f) \cdot Y_p + f(p) (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= X_p(f) \cdot Y_p^{\mathrm{T}_p M} + f(p) \left((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p \right)^{\mathrm{T}_p M} \\
&= X_p(f) Y_p + f(p) (\nabla^M_X Y)_p
\end{aligned}
$$

(3) Es gilt $(\nabla^M_X Y)_p \in \mathrm{T}_p M$ (klar wegen Projektion) und hängt glatt von p ab. Sind $e_1, \dots, e_n$ um p, definiere glatte Vektorfelder, so dass für $q \in \mathrm{Umg}(p)$ $e_1|_q, \dots, e_n|_q$ (erhalte mit Gram-Schmitt (glatt!)) eine Orthonormalbasis ist, so ist (lokal):

$$\nabla^M_X Y = \sum_{i=1}^n \langle \mathrm{D}\,\tilde{Y} \cdot \tilde{X}, e_i \rangle \cdot e_i \Rightarrow \text{glatt}$$

(Erhalte $e_1, \dots, e_n$ aus beliebigen lokalen Basisvektoren durch Gram-Schmitt.)

Bemerkung • ∇^M ist der **Levi-Civita Zusammenhang** von (M, g) mit $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

• Die Projektion auf $\mathrm{T}_p M$ ist nötig, zum Beispiel $M = S^1$, $\tilde{X} = \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow X = Y = \tilde{X}|_{S^1} \in \mathcal{V}(S^1)$

$$\mathrm{D}\,\tilde{Y} \cdot \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \left(\mathrm{T}_{(X,Y)}\, S^1\right)^\perp$$

Lösung 3

a) Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ ein Zusammenhang auf E. Betrachte $(\nabla^*_X s^*)_p(v) := X_p(s^*\tilde{v}) - s^*_p((\nabla_X \tilde{v})_p)$ mit $X \in \mathcal{V}(M)$, $s^* \in \Gamma(E^*)$, $v \in E_p$, $\tilde{v} \in \Gamma(E)$ und $\tilde{v}_p = v$. Warum dieses ∇^* betrachten? Für $s^* \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ sei

$$\langle s^*, s \rangle := s^*(s) \in C^\infty(M)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X(\langle s^*, s \rangle) &= \langle \nabla^*_X s^*, s \rangle + \langle s^*, \nabla_X s \rangle \\ &= (\nabla^*_X s^*)(s) + s^*(\nabla_X s) \end{aligned}$$

Das führt zu

$$(\nabla^*_X s^*)(s) = X(s^*(s)) - s^*(\nabla_X s)$$

b) Seien E_1 und E_2 Vektorbündel mit Zusammenhängen ∇^1 und ∇^2. Wir haben zu zeigen, dass es genau einen Zusammenhang ∇ auf $E_1 \otimes E_2$ gibt mit $\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = (\nabla^1_X s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla^2_X s_2)$.

Eindeutigkeit: Seien $s \in \Gamma(E_1 \otimes E_2)$ und seien $e^1_1, \dots, e^1_m, e^2_1, \dots, e^2_n : U \to E_1$ beziehungsweise E_2 lokale Basisschnitte von E_1 und E_2. Daraus folgt $s|_U = \sum \sigma_{ij} e^1_i \otimes e^2_j$.

$$\begin{aligned} \nabla_x(s)|_U &= \nabla_X \left(\sum_{ij} \sigma_{ij} e^1_i \otimes e^2_j \right) \\ &= \sum_{ij} \left(X(\sigma_{ij}) \cdot e^1_i \otimes e^2_j + \sigma_{ij} \nabla_X (e^1_i \otimes e^2_j) \right) \\ &= \sum_{ij} \left(X(\sigma_{ij}) e^1_i \otimes e^2_j + \sigma_{ij} \big((\nabla^1_X e^1_i) \otimes e^2_j + e^1_i \otimes (\nabla^2_X e^2_j) \big) \right) \end{aligned}$$

Existenz: Zeige die Unabhängigkeit von der Wahl der e^k_i.

Übung 8 vom 17. Dezember 2012

Aufgabe 1
Es sei E ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ R(X,Y)S &= \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X,Y]} S \end{aligned}$$

eine $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung ist.

Aufgabe 2
Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und R der Krümmungstensor des Levi-Civita-Zusammenhanges auf M. Zeigen Sie, daß für alle $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$ gilt:
a) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
b) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$
c) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

Aufgabe 3
Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ bezeichne $P^c_{a,b} : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ den Paralleltransport entlang c bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhanges. Zeigen Sie, daß $P^c_{a,b}$ eine lineare Isometrie ist.

Bevor wir mit den Lösungen beginnen zeigen wir zunächst den folgenden Sachverhalt

Behauptung: Für eine glatte Kurve c und Vektorfelder X, Y längs c gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{c(t)}\left(X(t), Y(t)\right) = g_{c(t)}\left((\nabla_t X)(t), Y(t)\right) + g_{c(t)}\left(X(t), (\nabla_t Y)(t)\right)$$

Beweis: Mit dem Levi-Civita Zusammenhang gilt

$$\nabla_t (g \circ c) = \nabla_{c_* \frac{\partial}{\partial t}} g = 0.$$

Daraus folgt dann mit $g = \sum g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\nabla_t(g \circ c)\right)(X(t), Y(t)) \\
&= \left(\nabla_t\left((\sum g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j) \circ c\right)\right)(X(t), Y(t)) \\
&= \left(\sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_{ij} \circ c) \cdot \mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)} + \sum g_{ij} \circ c \cdot \underbrace{\nabla_t(\mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)})}_{\substack{=\nabla_t(\mathrm{d}x^i|_{c(t)}\otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)} \\ +\mathrm{d}x^i|_{c(t)}\otimes(\nabla_t(\mathrm{d}x^j|_{c(t)}))}}\right)(X(t), Y(t)) \\
&= \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_{ij} \circ c)\, \mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)}\, (X(t), Y(t)) \\
&\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left((\nabla_t \mathrm{d}x^i|_{c(t)})(X(t)) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(Y(t)) + \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot (\nabla_t(\mathrm{d}x^j|_{c(t)}))(Y(t))\right) \\
&= \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_{ij} \circ c) \cdot \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
&\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) - \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t))\right) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)} Y(t)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x^j|_{c(t)}(Y(t)) - \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t)))\right)\right) \\
&= \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((g_{ij} \circ c) \cdot \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(Y(t))\right) \\
&\quad - \sum (g_{ij} \circ c) \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t)) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
&\quad - \sum (g_{ij} \circ c) \mathrm{d}x^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum g_{ij}(c(t)) \cdot (\mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)})(X(t), Y(y))\right) \\
&\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot \mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) \\
&\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot \mathrm{d}x^i|_{c(t)} \otimes \mathrm{d}x^j|_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{c(t)}(X(t), Y(t))\right) - g_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) - g_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t))
\end{aligned}
$$

Wir verwenden dabei für ∇ das ∇^* aus Aufgabe 3 a) von Blatt 7.

Lösung 1

Es sei E ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇ und sei die Abbildung $R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definiert durch $R(X,Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X,y]} S$. Wir wollen zeigen dass R eine $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung ist.

- Sei $g \in C^\infty(M)$:

$$
\begin{aligned}
[fX, Y](g) &= f \cdot X(Y(g)) - Y(f \cdot X(g)) \\
&= f \cdot X(Y(g)) - f \cdot Y(X(g)) - Y(f) \cdot X(g) \\
&= f \cdot [X,Y](g) - Y(f) \cdot X(g) \\
&= (f \cdot [X,Y] - Y(f) \cdot X)(g)
\end{aligned}
$$

- Additivität: ✓
-

$$
\begin{aligned}
R(fX, Y)S &= \nabla_{fX} \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_{fX} S - \nabla_{[fX,Y]} S \\
&= f \nabla_X \nabla_Y S - Y(f) \cdot \nabla_X S - f \cdot \nabla_Y \nabla_X S - f \nabla_{[X,Y]} S + Y(f) \nabla_X S \\
&= f(\nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X,Y]} S) = f \cdot R(X,Y)S
\end{aligned}
$$

- In zweiter Komponente: ✓ $(R(X,Y)S = -R(Y,X)S)$
-

$$\begin{aligned}
D(X,Y)(f\cdot S) &= \nabla_X \underbrace{\nabla_Y(f\cdot S)}_{=Y(f)\cdot S + f\cdot\nabla_Y S} - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X(f\cdot S)}_{=X(f)\cdot S+f\cdot\nabla_X S} - \underbrace{\nabla_{[X,Y]}(f\cdot S)}_{\substack{=[X,Y](f)\cdot S\\ +f\cdot\nabla_{[X,Y]}S}}\\
&= X(Y(f))\cdot S + Y(f)\nabla_X S + X(f)\cdot\nabla_Y S + f\cdot\nabla_X\nabla_Y\cdot S\\
&\quad - (Y(X(f))\cdot S + X(f)\nabla_Y S + Y(f)\cdot\nabla_X S + f\cdot\nabla_Y\nabla_X\cdot S)\\
&\quad - X(Y(f)) + Y(X(f)) - f\nabla_{[X,Y]}S\\
&= f\cdot R(X,Y)S
\end{aligned}$$

Lösung 2

Aufgrund des Levi-Civita Zusammenhangs gilt $\nabla = \nabla^{2c}$.

a) *Behauptung:* $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
Aufgrund der $C^\infty(M)$-multilinearität genügt es die Behauptung für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ zu zeigen. Daraus folgt $[X,Y] = [X,Z] = [Y,Z] = 0$.

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y\\
&= \nabla_X(\underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{\substack{=[Y,Z](\text{da } \nabla \text{ torsionslos})\\ =0}}) + \nabla_Y(\underbrace{\nabla_Z X - \nabla_X Z}_{=[Z,X]=0}) + \nabla_Z(\underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X}_{=[X,Y]=0}) = 0
\end{aligned}$$

b) Im Folgenden setzen wir $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$, zu beweisen ist dann dass $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$.
Es genügt zu zeigen dass $R(X,Y,U,U) = 0$ für alle X,Y ist, da $R(X,Y,Z+W,Z+W) = R(X,Y,Z,Z) + R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) + R(X,Y,W,W)$ ist.
Wir können annehmen, dass $[X,Y] = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
R(X,Y,U,U) &= g(\nabla_X\nabla_Y U - \nabla_Y\nabla_X U, U)\\
&= g(\nabla_X\nabla_Y U, U) - g(\nabla_Y\nabla_X U, U)\\
&= X(\underbrace{g(\nabla_Y U, U)}_{\substack{=\frac{1}{2}(g(\nabla_Y U,U)+g(U,\nabla_Y U))\\ =\frac{1}{2}Y(g(U,U))}}) - g(\nabla_Y U, \nabla_X U) - Y(\underbrace{g(\nabla_X U, U)}_{=\frac{1}{2}X(g(U,U))}) + g(\nabla_X U, \nabla_Y U)\\
&= \frac{1}{2}\Big(X(Y(g(U,U))) - Y(X(g(U,U)))\Big) = \frac{1}{2}[X,Y](g(U,U)) = 0
\end{aligned}$$

c) *behauptung:* $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$
Nach a) gilt:

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0 \tag{I}$$
$$R(Y,Z,W,X) + R(Z,W,Y,X) + R(W,Y,Z,X) = 0 \tag{II}$$
$$R(Z,W,X,Y) + R(W,X,Z,Y) + R(X,Z,W,Y) = 0 \tag{III}$$
$$R(W,X,Y,Z) + R(X,Y,W,Z) + R(Y,W,X,Z) = 0 \tag{IV}$$

Addiert man die Gleichungen zu (I) - (III) + (II) - (IV) bleibt übrig:

$$2R(X,Y,Z,W) - 2R(Z,W,X,Y) = 0$$

Lösung 3

Behauptung: Für den Levi-Civita Zusammenhang ist die Parallelverschiebung eine Isometrie.

Es sei $c : I \to M$ und $X_{c(0)}, Y_{c(0)} \in \mathrm{T}_{c(0)} M$ mit $X(t) = P^c_{0,t} X_{c(0)}$ und $Y(t) = P^c_{0,t} Y_{c(0)}$. Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\left(X(t), Y(t)\right) = g\,(\underbrace{\nabla_t X(t)}_{=0}, Y(t)) + g\,(X(t), \underbrace{\nabla_t Y(t)}_{=0}) = 0$$

und damit gilt dann

$$g\left(P^c_{0,t} X_{c(0)}, P^c_{0,t} Y_{c(0)}\right) = g\left(X_{c(0)}, Y_{c(0)}\right)$$

Übung 9 vom 7. Januar 2012

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Berechnen Sie $g_{ij}(p)$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p)$ und $\Gamma^k_{ij}(p)$ in Riemannschen Normalkoordinaten um p.

Hinweis: Welche Form haben die Geodätischen durch p in dieser Karte?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ und $\mathbb{H}^n$ (siehe Blatt 6 Aufgaben 2 und 3).

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der n-Sphäre vom Radius $r > 0$, also von S^n mit der von $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ induzierten Riemannschen Metrik.

Hinweis: Benutzen Sie, dass der Levi-Civita Zusammenhang auf S^n durch $(\nabla_X Y)_p = ((\mathrm{D}Y)_p \cdot X_p)^{\mathrm{T}_p S^n}$ gegeben ist.

Lösung 1

Nach der Vorlesung gibt es einen Diffeomorphismus

$$\exp_p : \underbrace{U(0)}_{\subset \mathrm{T}_p M} \to \underbrace{U(p)}_{\subset M}$$

Seien $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{T}_p M$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_p M$ und sei $\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) := \exp_p(x_1 e_1, \ldots, x_n e_n)$ definiert.

Behauptung:

(i) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}(g_{ij})(p) = 0$

(iii) $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$

Beweis:

(i)

$$g_p\Bigg(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p}_{\substack{=\exp_{p*}(e_i)\\ \equiv \mathrm{id}}}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p}_{=\exp_{p*}(e_j)}\Bigg) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$ ist die Geodätische die in p in Richtung v startet.

Beweis: Es sei c_v die Geodätische mit $c_v(0) = p$, $\dot{c}_v(0) = v$, sowie $c_{\lambda v}$ die Gedätische mit $c_{\lambda v}(0) = p$, $\dot{c}_{\lambda v}(0) = \lambda v$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiere nun $\gamma(t) := c_v(\lambda t)$. Dann ist $\gamma(t) = c_{\lambda v}(t)$, denn:

- $\gamma(0) = c_v(0) = p$
- $\dot{\gamma}(0) = \lambda \cdot \dot{c}_v(0) = \lambda v$
- $\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)$
  $= \lambda^2 \left(\ddot{c}_v^k(\lambda t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(c_v(\lambda t))\dot{c}_v^i(\lambda t)\dot{c}_v^j(\lambda t)\right)$
  $= 0$

Betrachte also

$$c_v(t) = c_v(t \cdot 1) = c_{tv}(1) = \exp_p(t \cdot v)$$

Die Geodätischen durch p werden also von den Normalkoordinaten auf die Ursprungsgeraden abgebildet. Setze $\gamma(t) = t \cdot e_{i_0}$, dann ist $\exp_p \circ \gamma$ eine Geodätische und damit gilt für alle k:

$$0 = \ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \delta_{ii_0}\delta_{ji_0} = \Gamma_{i_0 i_0}^k \circ \gamma$$

Beweis:

(iii) Nun sei $i_0 \neq j_0$ und $\tilde{\gamma}(t) = t(e_{i_0} + e_{j_0})$, damit ist $\exp_p \circ \tilde{\gamma}$ eine Geodätische und für alle k gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\tilde{\gamma}}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\tilde{\gamma}}^i \dot{\tilde{\gamma}}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k (\delta_{ii_0} + \delta i j_0)(\delta_{ji_0} + \delta_{jj_0}) \\ &= \left(\Gamma_{i_0 i_0}^k + \Gamma_{j_0 j_0}^k + \Gamma_{i_0 j_0}^k + \Gamma_{j_0 i_0}^k\right) \circ \gamma \end{aligned}$$

In 0 gilt $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$, also $\Gamma_{ij}^k(\gamma(0)) = 0$. Daraus folgt dann:

$$0 = \Gamma_{i_0 j_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) + \Gamma_{j_0 i_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) = 2\Gamma_{i_0 j_0}^2(p)$$

Damit folgt schließlich $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle i, j, k.

(ii)

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_p &= \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_{\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p} \frac{\partial}{\partial x^i}, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) + g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \nabla_{\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) \\ &= g\left(\sum_l \Gamma_{ki}^l(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) + g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \sum_l \underbrace{\Gamma_{kj}^l(p)}_{=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lösung 2

a) *Behauptung:* $\sec(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \equiv 0$
Es gilt $\nabla_X Y = \mathrm{D}\, Y \cdot X$ und, wegen Torsionsfreiheit, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{D}\, Y \cdot X - \mathrm{D}\, X \cdot Y$. Nun gilt

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Bevor wir fortfahren benötigen wir noch eine Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{D}(\mathrm{D}\,Z\cdot Y)\cdot X-\mathrm{D}(\mathrm{D}\,Z\cdot X)\cdot Y)_i\\
&=\sum_l(\mathrm{D}(\mathrm{D}\,Z\cdot Y))_{il}\cdot X_l-\sum_l(\mathrm{D}(\mathrm{D}\,Z\cdot X))_{il}\cdot Y_l\\
&=\sum_l\partial_l\left((\mathrm{D}\,Z\cdot Y)_i\right)\cdot X_l-\sum_l\partial_l(\mathrm{D}\,Z\cdot X)_i\cdot Y_l\\
&=\sum_l\partial_l\left(\sum_m\underbrace{(\mathrm{D}\,Z)_{im}}_{=\partial_m Z_i}\cdot Y_m\right)\cdot X_l-\sum_l\partial_l\left(\sum_m(\mathrm{D}\,Z)_{im}\cdot X_m\right)\cdot Y_l\\
&=\sum_{lm}\left(\partial_l(\partial_m Z_i\cdot Y_m)\cdot X_l-\partial_l(\partial_m Z_i\cdot X_m)\cdot Y_l\right)\\
&=\sum_{lm}(\partial_l\partial_m Z_iY_mX_l+\partial_mZ_i\partial_lY_mX_l-\underbrace{\partial_l\partial_mZ_i}_{=\partial_m\partial_lZ_i}X_mY_l+\partial_mZ_i\partial_lX_mY_l)\\
&=\sum_m\partial_mZ_i\cdot(\mathrm{D}\,Y\cdot X)_m-\sum_m\partial_mZ_i(\mathrm{D}\,X\cdot Y)_m\\
&=(\mathrm{D}\,Z\cdot(\mathrm{D}\,Y\cdot X)-\mathrm{D}\,Z\cdot\mathrm{D}\,X\cdot Y)_i\\
&=(\mathrm{D}\,Z\cdot(\mathrm{D}\,Y\cdot X-\mathrm{D}\,X\cdot Y))_i
\end{aligned}
$$

Mit dieser Nebenrechnung folgern wir schlieślich $R(X,Y)Z=0$ und daraus folgt letztendlich

$$\sec(\operatorname{span}\{X,Y\})=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2}=0$$

b) Wir berechnen die Komponenten $R_{ijkl}=R(\frac{\partial}{\partial\xi^i},\frac{\partial}{\partial\xi^j},\frac{\partial}{\partial\xi^k},\frac{\partial}{\partial\xi^l})=g(R(\frac{\partial}{\partial\xi^i},\frac{\partial}{\partial\xi^j})\frac{\partial}{\partial\xi^k},\frac{\partial}{\partial\xi^l})$ in der Karte φ aus Aufgabe 6.3. In dieser Karte gilt $g=\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\sum\limits_i d\xi^i\otimes d\xi^i$, also $g_{ij}=\delta_{ij}\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}$.
Für die Ableitungen der Metrik gilt dann:

$$g_{ij,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial\xi^k}=16\delta_{ij}\frac{\xi^k}{(1-\|\xi\|^2)^3}.$$

Die Koeffizienten der zu (g_{ij}) inversen Matrix sind $g^{kl}=\delta_{kl}\frac{(1-\|\xi\|^2)^2}{4}$. Damit gilt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_l g^{kl}(g_{jl,i}-g_{ij,l}+g_{li,j})=\frac{2}{1-\|\xi\|^2}(\delta_{jk}\xi^i-\delta_{ij}\xi^k+\delta_{ki}\xi^j).$$

Für die Ableitungen gilt also:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi^l}(\Gamma^k_{ij})&=\frac{\partial}{\partial\xi^l}\left(\frac{2}{1-\|\xi\|^2}\right)(\delta_{jk}\xi^i-\delta_{ij}\xi^k+\delta_{ki}\xi^j)+\frac{2}{1-\|\xi\|^2}\frac{\partial}{\partial\xi^l}(\delta_{jk}\xi^i-\delta_{ij}\xi^k+\delta_{ki}\xi^j)\\
&=\frac{4\xi^l}{(1-\|\xi\|^2)^2}(\delta_{jk}\xi^i-\delta_{ij}\xi^k+\delta_{ki}\xi^j)+\frac{2}{1-\|\xi\|^2}(\delta_{jk}\delta_{li}-\delta_{ij}\delta_{lk}+\delta_{ki}\delta_{lj}).
\end{aligned}
$$

Nun können wir die Koeffizienten des Krümmungstensors berechnen. Es gilt :

$$
\begin{aligned}
R(\frac{\partial}{\partial\xi^i},\frac{\partial}{\partial\xi^j})\frac{\partial}{\partial\xi^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^j}}\frac{\partial}{\partial\xi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^i}}\frac{\partial}{\partial\xi^k} - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial\xi^i},\frac{\partial}{\partial\xi^j}]=0}\frac{\partial}{\partial\xi^k} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^i}}\Big(\sum_l \Gamma^l_{jk}\frac{\partial}{\partial\xi^l}\Big) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^j}}\Big(\sum_l \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial\xi^l}\Big) \\
&= \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\Gamma^l_{jk})\frac{\partial}{\partial\xi^l} + \Gamma^l_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^i}}\frac{\partial}{\partial\xi^l} - \frac{\partial}{\partial\xi^j}(\Gamma^l_{ik})\frac{\partial}{\partial\xi^l} - \Gamma^l_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\xi^j}}\frac{\partial}{\partial\xi^l}\right) \\
&= \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\Gamma^l_{jk})\frac{\partial}{\partial\xi^l} - \frac{\partial}{\partial\xi^j}(\Gamma^l_{ik})\frac{\partial}{\partial\xi^l}\right) + \sum_{l,m}\left(\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\frac{\partial}{\partial\xi^m} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}\right) \\
&= \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\Gamma^l_{jk}) - \frac{\partial}{\partial\xi^j}(\Gamma^l_{ik}) + \sum_\alpha\Big(\Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^l_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^l_{j\alpha}\Big)\right)\frac{\partial}{\partial\xi^l} =: \sum_l R_{ijk}{}^l\,\frac{\partial}{\partial\xi^l}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
R_{ijk}{}^l = \tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\Big(&\xi^i(\delta_{kl}\xi^j - \delta_{jk}\xi^l + \delta_{lj}\xi^k) - \xi^j(\delta_{kl}\xi^i - \delta_{ik}\xi^l + \delta_{li}\xi^k) \\
&+ \tfrac{1-\|\xi\|^2}{2}\big((\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ik}) - (\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{li}\delta_{jk})\big) \\
&+ \sum_\alpha\big((\delta_{k\alpha}\xi^j - \delta_{jk}\xi^\alpha + \delta_{\alpha j}\xi^k)(\delta_{\alpha l}\xi^i - \delta_{i\alpha}\xi^l + \delta_{li}\xi^\alpha) \\
&\quad - (\delta_{k\alpha}\xi^i - \delta_{ik}\xi^\alpha + \delta_{\alpha i}\xi^k)(\delta_{\alpha l}\xi^j - \delta_{j\alpha}\xi^l + \delta_{lj}\xi^\alpha)\big)\Big) \\
= \tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\Big(&-\delta_{jk}\xi^i\xi^l + \delta_{lj}\xi^i\xi^k + \delta_{ik}\xi^j\xi^l - \delta_{li}\xi^j\xi^k \\
&+ \tfrac{1-\|\xi\|^2}{2}\big(-\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ik} + \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big) \\
&+ \sum_\alpha\big((\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l}\xi^i\xi^j - \delta_{k\alpha}\delta_{i\alpha}\xi^j\xi^l + \delta_{k\alpha}\delta_{li}\xi^j\xi^\alpha \\
&\quad - \delta_{jk}\delta_{\alpha l}\xi^i\xi^\alpha + \delta_{jk}\delta_{i\alpha}\xi^l\xi^\alpha - \delta_{jk}\delta_{li}(\xi^\alpha)^2 \\
&\quad + \delta_{\alpha j}\delta_{\alpha l}\xi^i\xi^k - \delta_{\alpha j}\delta_{i\alpha}\xi^k\xi^l + \delta_{\alpha j}\delta_{li}\xi^k\xi^\alpha) \\
&- (\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l}\xi^i\xi^j - \delta_{k\alpha}\delta_{j\alpha}\xi^i\xi^l + \delta_{k\alpha}\delta_{lj}\xi^i\xi^\alpha \\
&\quad - \delta_{ik}\delta_{\alpha l}\xi^j\xi^\alpha + \delta_{ik}\delta_{j\alpha}\xi^l\xi^\alpha - \delta_{ik}\delta_{lj}(\xi^\alpha)^2 \\
&\quad + \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha l}\xi^j\xi^k - \delta_{\alpha i}\delta_{j\alpha}\xi^k\xi^l + \delta_{\alpha i}\delta_{lj}\xi^k\xi^\alpha))\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\Big(-\delta_{jk}\xi^i\xi^l + \delta_{lj}\xi^i\xi^k + \delta_{ik}\xi^j\xi^l - \delta_{li}\xi^j\xi^k + (1-\|\xi\|^2)\big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big) \\
&\qquad + \sum_\alpha\big((\delta_{kl}\xi^i\xi^j - \delta_{ik}\xi^j\xi^l + \delta_{li}\xi^j\xi^k - \delta_{jk}\xi^i\xi^l + \delta_{jk}\xi^l\xi^i - \delta_{jk}\delta_{li}\|\xi\|^2 + \delta_{jl}\xi^i\xi^k - \delta_{ij}\xi^k\xi^l + \\
&\qquad\quad - (\delta_{kl}\xi^i\xi^j - \delta_{jk}\xi^i\xi^l + \delta_{lj}\xi^i\xi^k - \delta_{ik}\xi^j\xi^l + \delta_{ik}\xi^l\xi^j - \delta_{ik}\delta_{lj}\|\xi\|^2 + \delta_{il}\xi^j\xi^k - \delta_{ij}\xi^k\xi^l + \\
&= \tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\Big((1-\|\xi\|^2)\big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big) + \|\xi\|^2\big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big) \\
&= \tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big)
\end{aligned}
$$

Und somit

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} = g(\sum_m R_{ijk}{}^m\frac{\partial}{\partial\xi^m},\frac{\partial}{\partial\xi^l}) &= \sum_m R_{ijk}{}^m g(\frac{\partial}{\partial\xi^m},\frac{\partial}{\partial\xi^l}) \\
&= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}R_{ijk}{}^l = \frac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4}\big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}\big).
\end{aligned}
$$

Für linear unabhängige $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$, $Y = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \in \mathrm{T}_p \mathbb{H}^n$ gilt dann

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Y,X) &= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k \; R(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k \; \tfrac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}) \\
&= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i \; \left(\tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 \; \left(\tfrac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i g(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}) g(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}) - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 \; g(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}) g(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}) \\
&= \Big(\sum_i g(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, Y_i \frac{\partial}{\partial \xi^i})\Big)\Big(\sum_j g(X_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j})\Big) \\
&\quad - \Big(\sum_i g(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i})\Big)\Big(\sum_j g(Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j})\Big) \\
&= g(X,Y)^2 - \|X\|^2\|Y\|^2 = -(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sec(\operatorname{span}\{X,Y\}) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} = -1.$$

Lösung 3

Sei $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$, *Behauptung:* $\sec_{S^n(r)} \equiv \frac{1}{r^2}$
Sei $\nabla = \nabla S^n(r)$ der Levi-Civita Zusammenhang von $(S^n(r), g_{\mathrm{ind}})$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)_p &= \left((\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p\right) \mathrm{T}_p\, S^n(r) \\
&= (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p - \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p)\rangle \cdot N(p)
\end{aligned}$$

wobei $N(p) = \frac{1}{r} \cdot p$ das Normaleneinheitsvektorfeld an $S^n(r)$ ist. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p)\rangle &= \underbrace{X_p(\overbrace{\langle Y, N\rangle}^{\equiv 0})}_{=0} - \langle Y_p, (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N)_p\rangle \\
&= -\langle Y_p, \underbrace{(\mathrm{D}\, N)_p}_{\frac{1}{r}\cdot \mathrm{id}} \cdot X_p\rangle \\
&= -\frac{1}{r}\langle Y_p, X_p\rangle
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann $\nabla_X Y = \nabla_X^{R^{n+1}} Y + \frac{1}{r}\langle X, Y\rangle N$. Als nächstes betrachten wir nun:

$$
\begin{aligned}
R^{S^n(r)}(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}}(\nabla_Y Z) + \frac{1}{r}\langle X, \nabla_Y Z\rangle \cdot N \\
&\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}}(\nabla_X Z) - \frac{1}{r}\langle Y, \nabla_X Z\rangle \cdot N \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}^{\mathbb{R}^{n+1}} Z - \frac{1}{r}\langle [X,Y], Z\rangle \cdot N \\
&= \overbrace{R^{\mathbb{R}^{n+1}}(X,Y)Z}^{=0} + \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}}(\frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle \cdot N) + \frac{1}{r}\langle X, \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle \cdot \overset{\perp X}{N}\rangle N \\
&\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}}(\frac{1}{r}\langle X, Y\rangle N) - \frac{1}{r}\langle Y, \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle \cdot \overset{\perp Y}{N}\rangle \cdot N \\
&\quad - \frac{1}{r}\langle \underbrace{[X,Y]}_{=\mathrm{D}\,Y\cdot X - \mathrm{D}\,X\cdot Y} Z\rangle \cdot N \\
&= X(\frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle)N + \frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N + \frac{1}{r}\langle X, \mathrm{D}\,Z \cdot Y\rangle \cdot N \\
&\quad - Y(\frac{1}{r}\langle X, Z\rangle)\cdot N - \frac{1}{r}\langle X, Z\rangle \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} N - \frac{1}{r}\langle Y, \mathrm{D}\,Z \cdot X\rangle \cdot N - \frac{1}{r}\langle \mathrm{D}\,Y \cdot X \\
&\quad - \mathrm{D}\,X \cdot Y, Z\rangle \cdot N \\
&= \frac{1}{r}(\langle \mathrm{D}\,Y \cdot X, Z\rangle + \langle Y, \mathrm{D}\,Z \cdot X\rangle)\cdot N + \frac{1}{r}\langle Y, Z\rangle \overbrace{\mathrm{D}\,N}^{=\frac{1}{r}\cdot \mathrm{id}} \cdot X + \langle X, \mathrm{D}\,Z \cdot Y\rangle \cdot N \\
&\quad - \frac{1}{r}(\langle \mathrm{D}\,X \cdot Y, Z\rangle + \langle X, \mathrm{D}\,Z \cdot Y\rangle)\cdot N - \frac{1}{r^2}\langle X Z\rangle \cdot Y + \langle Y, \mathrm{D}\,Z \cdot X\rangle \cdot N \\
&\quad - \frac{1}{r}\langle \mathrm{D}\,Y \cdot X - \mathrm{D}\,X \cdot Y, Z\rangle \cdot N \\
&= \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z\rangle \cdot X - \langle X, Z\rangle \cdot Y)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt dann

$$\langle \mathrm{D}(X,Y)Y, X\rangle = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Y, \rangle\langle X, X\rangle - \langle X, Y\rangle^2)$$

und damit folgt dann schließlich

$$\sec_{S^n(r)}(\{X,Y\}) = \frac{1}{r^2}$$

Übung 10 vom 14. Januar 2012

Übungsblatt 10 enthielt keine Aufgaben, deshalb befassen wir uns hier mit den Geodätischen von $\mathbb{H}^2$. Wir betrachten zunächst die folgenden drei bisherigen Modelle

Hyperboloid: $\{x \in \mathbb{R}^{2+1} \mid \overbrace{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}^{=\langle x,x\rangle} = -1, x_0 > 0\}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathrm{T}_p\mathbb{H}^2\times\mathrm{T}_p\mathbb{H}^2}$ ist das Skalarprodukt.

Poincare Kreisscheibenmodell: $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \|\xi\| < 1\}$, $g_D = \frac{4}{(1-\|\xi\|)^2}\sum \mathrm{d}\xi^i \otimes \mathrm{d}\xi^i$

Poincare obere Halbebene Modell: $H := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$, $g_H = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)$

Isometrie zwischen *D* und *H*: Betrachte D als Teilmenge von $\mathbb{C}$ mittels $\psi : H \to D$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

$$|\psi(z)|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{z\overline{z} + i\,\overbrace{(z-\overline{z})}^{=2i\operatorname{Im}(z)} + 1}{z\overline{z} - i(z-\overline{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1} \overset{\operatorname{Im}(z)>0}{<} 1$$

Definiere weiter $\varphi : D \to H$ mit $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \mapsto -i\frac{\xi+1}{\xi-1}$. Dann folgt

$$\operatorname{Im}(\varphi(\xi)) = \frac{\overbrace{1-|\xi|^2}^{>0}}{\underbrace{|\xi|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi) + 1}_{\geq(\operatorname{Re}(\xi)-1)^2>0}} > 0$$

Durch Nachrechnen ergibt sich $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Da φ und ψ holomorph sind, folgt dass sie auf C^∞ glatt sind. Wir zeigen schlieślich dass ψ eine Isometrie ist. Dazu fassen wir ψ als reelle Funktion auf:

$$\psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Da ψ holomorph ist erfüllt ψ auch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

Es sei $p = (x,y) \in H$ und sei ye_1, ye_2 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_p H$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_2)) &= y^2 g_D\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\
&= \frac{4y^2}{(1-\|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) \\
&= 0 \\
g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_1)) &= \frac{4y^2}{(1-\|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2\right) \\
&= \ldots = 1 \\
g_D(\psi_{*p}(ye_2), \psi_{*p}(ye_2)) &= \ldots = 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt dass ψ_* eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet und daher ist ψ eine Isometrie.

Isometrien von *H* Zu $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc > 0$ betrachte

$$h(z) = \frac{az+b}{bz+d} \qquad\qquad \text{((spezielle) Möbiustransformation)}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(h(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{acz\overline{z} + bd + adz + bc\overline{z}}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0 \qquad\qquad \text{(für } z \in H\text{)}
\end{aligned}$$

Es gilt somit $h : H \to H$, sowie

$$h^{-1}(z) = \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{dz-b}{-cz+a} \qquad \text{(nachrechnen)}$$

Daraus folgt dass h ein Diffeomorphismus ist. Für $v \in \mathrm{T}_z\, H$ und $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} h_{*z}V = Dh|_z V &= \begin{pmatrix} v_i \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial y} \\ v_2 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial y} \end{pmatrix} \underset{\text{DGL}}{\overset{\text{C-R}}{=}} \begin{pmatrix} v_1\lambda - v_2\mu \\ v_2\mu + v_2\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \tfrac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} &=: \lambda \\ \tfrac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} &=: \mu \end{aligned} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $v, w \in \mathrm{T}_z\, H$ gilt:

$$\begin{aligned} g_H(v,w) &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2}(v_1w_1 + v_2w_2) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} \operatorname{Re}(\underbrace{(v_1 + iv_2)}_{=:\tilde{v}} \underbrace{\overline{(w_1 + iw_2)}}_{=:\overline{\tilde{w}}}) \end{aligned}$$

Es ist

$$h'(x) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} g_H|_{h(z)}(h_{*z}v, h_{*z}w) &= \frac{1}{(\operatorname{Im}(h(z)))^2} \cdot \operatorname{Re}(h'(z)\tilde{v}\overline{h'(z)\tilde{w}}) \\ &= \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot \operatorname{Re}(\tilde{v}\overline{\tilde{w}}) = \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot g_h|_z(v,w) \end{aligned}$$

Wobei $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \operatorname{Im}(z) = |h'(z)| \cdot \operatorname{Im}(z)$ gilt, daraus folgt dass h eine Isometrie ist.

Beispiel (1) Für $w \in H$ ist

$$h_w(z) = \frac{\operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)}{0 \cdot z + 1} = \operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)$$

eine Isometrie von H, da $\operatorname{Im}(w) > 0$ und $h_w(i) = \operatorname{Im}(w)i + \operatorname{Re}(w) = w$. Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen durch i zu betrachten.

(2) Für $\theta \in \mathbb{R}$ ist

$$h_\theta = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$$

Eine Isometrie von H mit

$$h_\theta(i) = i\frac{\cos(\theta) - \frac{1}{i}\sin(\theta)}{\sin(\theta)i + \cos(\theta)} = i$$

und

$$h'_\theta(i) = \frac{1}{(\sin(\theta)i + \cos(\theta))^2} = e^{-2i\theta}$$

Für $v \in \mathrm{T}_i\, H$ mit $\|v\| = 1$ können wir also $\theta \in \mathbb{R}$ wählen mit $h_{\theta *} e_2 = v$. Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen γ mit $\gamma(0) = i$ und $\dot\gamma(0) = e_2$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} g_{ij,1} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0 \\ g_{ij,2} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} = \delta_{ij} \cdot \frac{-2}{y^3} \\ g_{kl} &= y^2 \cdot \delta_{kl} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl}(g_{jl,i} - g_{ij,l} + g_{il,j}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \qquad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

alle Anderen sind „$= 0$“. Die geodätische Differentialgleichung lautet $\ddot\gamma^k + \sum_{ij}(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \cdot \dot\gamma^i \cdot \dot\gamma^j = 0$. Daraus folgt

$$\ddot\gamma^1 - \frac{2}{\gamma^2}\dot\gamma^1 \cdot \dot\gamma^2 = 0 \qquad \ddot\gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2}((\dot\gamma^2)^2 - (\dot\gamma^1)^2) = 0$$

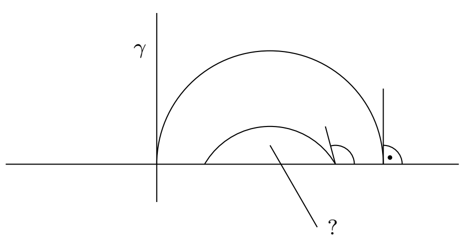
Ansatz: $\gamma^1 \equiv 0$ (erfüllt die erste Gleichung) $\rightsquigarrow \ddot\gamma^2 = \frac{1}{\gamma^2}(\dot\gamma^2)^2$
Lösung: $\gamma^2(t) = e^t$
Damit ist $\gamma(t) = ie^t$ die Geodätische durch i mit der Startrichtung e_2. Die anderen Geodätischen, die in i starten sind von der Form

$$h_\theta(\gamma(t)) = \frac{\cos(\theta)ie^t - \sin(\theta)}{\sin(\theta)ie^t + \cos(\theta)}$$

Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab. Damit ist $\gamma_\theta = h_\theta \circ \gamma$ eine Gerade oder ein Kreis.

$$\gamma_\theta(t) \to \begin{cases} -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \text{für } t \to -\infty \\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \text{für } t \to \infty \end{cases}$$

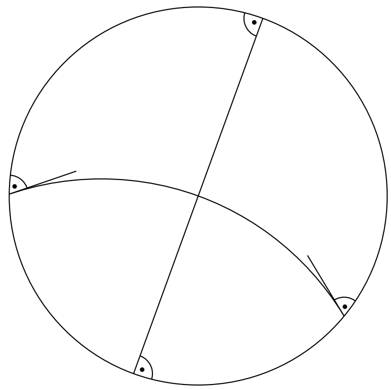
Für $\sin\theta, \cos\theta \neq 0$ ergibt sich:



Es ist

$$\frac{\dot{\gamma}_\theta(t)}{|\dot{\gamma}_\theta(t)|} = \ldots = \frac{i\cos\theta + e^t \sin\theta}{\cos\theta + ie^t \sin\theta} \to \begin{cases} i & \text{für } t \to -\infty \\ -i & \text{für } t \to \infty \end{cases}$$

Also schneidet der Kreis die $\mathbb{R}$-Achse im rechten Winkel und damit liegt der Mittelpunkt in $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$. Wegen $h_w(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ gilt das Gleiche für alle Geodätischen.



Übung 11 vom 21. Januar 2012

Aufgabe 1
Es sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und

$$C_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases} \qquad S_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}\sinh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Für alle t und jede Ebene $P \leq \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, M$ mit $\dot{\gamma}(t) \in P$ gelte $\sec(P) = \kappa$.
Zeigen Sie, dass jedes orthogonale Jacobivektorveld J längs γ die Form

$$J(t) = C_\kappa(t)A(t) + S_\kappa(t)B(t)$$

mit parallelen Vektorfeldern A, B längs γ hat.

Aufgabe 2
Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und $p \in M$. Zeigen Sie, dass es genau dann zu p konjugierte Punkte gibt, wenn $\kappa > 0$ gilt.

Lösung 1
Erinnerung: Definition von Jacobifeldern

$$\ddot{\mathcal{J}}(t) + (R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma})(t) = 0 \qquad \text{(Jacobi-Gleichung)}$$

(Vektorfelder von Variationen durch Geodätische)

$$\begin{aligned}
\langle \ddot{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \rangle &= -R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathcal{J}) \\
&= -\sec(\{\mathcal{J}, \dot{\gamma}\}) \cdot (\| \mathcal{J} \|^2 \underbrace{\overset{2}{\|\dot{\gamma}\|}}_{=0} - \langle \mathcal{J}, j \rangle^2) \\
&= -\kappa \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle
\end{aligned}$$

Wir möchten nun zeigen dass $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$ gilt. Es sei $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \dot{\gamma}(t)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_{\gamma(t)} M$. Daraus folgt $0 = R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_n)$ und $0 = \langle \mathcal{J}, e_n \rangle$. Für $i < n$ gilt:

$$R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) = \kappa \cdot (\| \mathcal{J} + e_i\|^2 \cdot \underbrace{\|\gamma\|^2}_{=1} - \underbrace{\langle \mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma} \rangle^2}_{=0}) = \kappa \cdot \| \mathcal{J} + e_i\|^2$$

und

$$\begin{aligned}
R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) &= R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J}) + R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) \\
&= \kappa \cdot (\| \mathcal{J} \|^2 + \|e_i\|^2) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) = \frac{1}{2}\kappa(\| \mathcal{J} + e_i\|^2 - \| \mathcal{J} \|^2 - \|e_i\|^2) = \kappa \langle \mathcal{J}, e_i \rangle$$

und damit gilt $R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa \cdot \mathcal{J}$ und damit wird die Jacobi-Gleichung zu $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$. Setze $A(0) = \mathcal{J}(0)$ und $B(0) = \dot{\mathcal{J}}(0)$ parallel fort zu $A(t)$ und $B(t)$ und definiere $\tilde{\mathcal{J}}(t) = C_\kappa(t) \cdot A(t) + S_\kappa(t) \cdot B(t)$. Betrachte nun: $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} \mathrel{\hat{=}} \nabla_t$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathcal{J}} &= C'_\kappa A + C_\kappa \underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} A}_{=0} + S'_\kappa B + S_\kappa \underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} B}_{=0} = C'_\kappa A + S'_\kappa B \\
\ddot{\tilde{\mathcal{J}}} &= C''_\kappa A + S''_\kappa B
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$C''_\kappa = -\kappa C_\kappa \qquad S''_\kappa = -\kappa S_\kappa$$

Daraus folgt $\ddot{\tilde{\mathcal{J}}} = -\kappa \tilde{\mathcal{J}}$ und damit $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$ (eindeutige Lösung zu gegebenen $\mathcal{J}(0)$, $\dot{\mathcal{J}}(0)$). Der Beweis zeigt, dass parallele $A, B \perp \dot{\gamma}$ ein Jacobifeld definieren.

Lösung 2

***k* > 0:** Sei $v \in \mathrm{T}_p M$ mit $\|v\| = 1$ und $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Da M vollständig ist, ist γ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es sei $B(0) \in v^\perp$ und B die parallele Fortsetzung längs γ. Setze $\mathcal{J}(t) = S_\kappa(t) \cdot B(t)$. Daraus folg dass $\mathcal{J}$ ein Jacobifeld ist mit $\mathcal{J}(0) = \underbrace{S_\kappa(0)}_{=0} B(0) = 0$

und

$$\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = \frac{1}{\kappa} \sin(\pi) \cdot B\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = 0$$

Daraus folgt dass p und $\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$ konjugiert sind.

$k \leq 0$: Angenommen p und q sind konjugiert längs γ (mit $\|\dot{\gamma}\| = 1$). Es sei $\gamma(0) = p$ und $\gamma(t_0) = q$ mit $t_0 \geq 0$. Dann gibt es ein Jacobifeld $\mathcal{J} \neq 0$ längs γ mit $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(t_0)$ und damit ist $\mathcal{J}$ orthogonal. Nach Aufgabe 1 gilt $\mathcal{J} = C_\kappa \cdot A + S_\kappa \cdot B$. Es gilt:

$$0 = \mathcal{J}(0) = C_\kappa(0) \cdot A(0) + S_\kappa(0) \cdot B(0) = A(0)$$

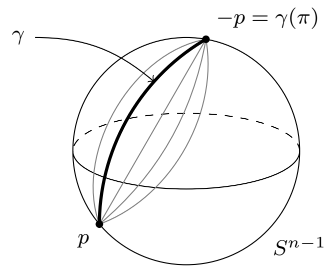
Da A parallel ist gilt $A \equiv 0$ und daraus folgt

$$0 = \mathcal{J}(t_0) = \underbrace{S_\kappa(t_0)}_{= \begin{cases} t_0 & \text{falls } k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh\left(\sqrt{|\kappa|} t_0\right) & \text{falls } k<0 \end{cases}} \cdot B(t_0) > 0$$

Daraus folt $B(t_0) = 0$ und, da B parallel ist, $B \equiv 0$. Also ist $\mathcal{J} \equiv 0$, was einen Widerspruch darstellt. $\lightning$

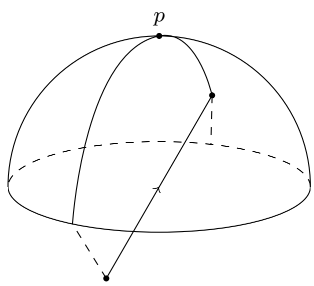
Bemerkung Der Beweis von Aufgabe 2 zeigt: Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\sec \equiv \kappa > 0$ hat Durchmesser $\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \operatorname{diam}(S^n(\sqrt{\kappa}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{\kappa}\})$

Beispiel (1) $S^n, \sec \equiv 1$; p und $-p$ sind konjugiert:



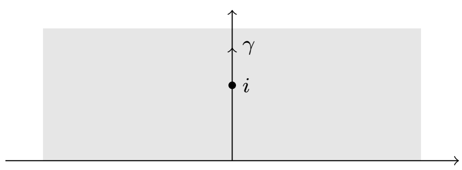
und p ist zudem zu sich selbst konjugiert ($\mathcal{J}(2\pi) = 0$), und dies sind alle zu p konjugierten Punkte.

(2) $\underline{\mathbb{RP}^n} = {S^n}/{q \sim (-q)}$ mit der von S^n induzierten Metrik $\rightsquigarrow [p] = [-p]$. Daraus folgt dass $[p]$ der einzige zu p konjugierte Punkt ist.



(3) $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ parallele Vektorfelder = konstante Vektorfelder. Damit haben die Jacobifelder die Form $\mathcal{J}(t) = A + tB$. (mit $A, B \in \mathbb{R}^n$)

(4) $\mathbb{H}^2$



$$\gamma(t) = ie^t \text{ Geodätische (letzte Übung)}$$
$$\dot\gamma(t) = e^t \frac{\partial}{\partial y} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sei A eine paralleles Vektorfeld längs γ. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \nabla_t A = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla_t \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \end{pmatrix} \\
&= A_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_{\dot\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_{\dot\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \nabla_{\dot\gamma} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} + e^t A_1 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{21}^1(\gamma(t))}^{=-\frac{1}{\gamma^2(t)}=\frac{-1}{e^t}} \\ \underbrace{\Gamma_{21}^2(\gamma(t))}_{=0} \end{pmatrix} + e^t A_2 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{22}^1(\gamma(t))}^{=0} \\ \underbrace{\Gamma_{22}^2(\gamma(t))}_{=\frac{1}{e^t}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' + A_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $A_1(t) = A_1(0) \cdot e^t$ und $A_2(t) = A_2(0) \cdot e^{-t}$.

Übung 12 vom 28. Januar 2012

Aufgabe 1

Es sei $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, $\|v\| = 1$ und $w \in \mathrm{T}_p M$ mit $\|w\| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$. Es sei J das durch

$$J(t) = (\exp_p)_{*tv} tw \in \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

gegebene Jacobivektorfeld längs γ und $\sigma = \operatorname{span}\{v, w\}$. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von $|J(t)|$ gegeben ist durch

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6} \sec(\sigma) t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \to 0.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Entwicklung von $|J(t)|^2$ und zeigen Sie hierfür die Identität $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$.

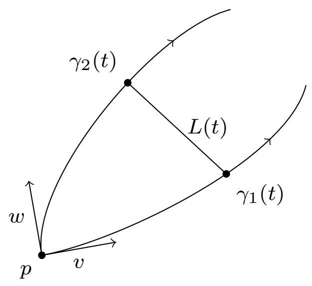
Aufgabe 2

Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,a] \to M$ zwei Geodätische mit $\gamma_1(0) = \gamma_2 = (0) =: p$, deren Ableitungen $v := \dot\gamma_1(0)$ und $w := \dot\gamma_2(0)$ normiert und linear unabhängig seien. Weiter sei $L(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.
Zeigen Sie, dass

$$L(t) = t\|v - w\| - \frac{1}{12} \sec(\operatorname{span}\{v, w\}) \|v - w\| (1 + \langle v, w \rangle) t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \to 0$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Variation $(t, s) \mapsto \exp(s \exp^{-1}_{\gamma_1(t)}(\gamma_2(t)))$.
Skizze:



Lösung 1
Offensichtlich gilt $\mathcal{J}(0) = 0$. Außerdem gilt nach der Kettenregel für die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\exp_p(t(v + sw))) = (\exp_p)_{*tv}(tw) = \mathcal{J}(t)$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}'(0) &= \nabla_t(\exp_{p*tv}(tw))|_0 = \nabla_t(t \cdot \exp_{p*tv}(w))|_0 \\
&= \exp_{p*tv}(w) + t \cdot \nabla_t(\exp_{p*tv}(w))|_0 \\
&= w
\end{aligned}$$

Ferner gilt $|\mathcal{J}(t)|^2 = \langle \mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t)\rangle$. Wir betrachten nun die Ableitungen davon:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}, \mathcal{J}\rangle'(0) &= 2\langle \mathcal{J}', \mathcal{J}\rangle(0) = 0 \\
\langle \mathcal{J}, \mathcal{J}\rangle''(0) &= 2\left(\langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}\rangle + \langle \mathcal{J}', \mathcal{J}'\rangle\right)(0) \\
&= 2\|w\|^2 = 2 \\
\langle \mathcal{J}, \mathcal{J}\rangle'''(0) &= 2\left(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}\rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}'\rangle + 2\langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}'\rangle\right)(0) \\
&= 6\langle \mathcal{J}''(0), \mathcal{J}'(0)\rangle = -6\langle R(\dot\gamma(0), \underbrace{\mathcal{J}(0)}_{=0})\dot\gamma(0), \mathcal{J}'(0)\rangle = 0 \\
\mathcal{J}'''(0) &= \nabla_t(\mathcal{J}''(t))|_0 = \nabla_t(-R(\mathcal{J}, \dot\gamma)\dot\gamma)|_0 \\
&= \nabla_{\dot\gamma}(-R(\mathcal{J}, \dot\gamma)\dot\gamma) \overset{\text{Hinweis}}{=} -R(\mathcal{J}', \dot\gamma)\dot\gamma|_0 \\
&= -R(w, v)v \\
\langle \mathcal{J}, \mathcal{J}\rangle^{(4)}(0) &= 2\Big(\langle \mathcal{J}^{(4)}, \mathcal{J}\rangle + \langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}'\rangle + 3\left(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}'\rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}''\rangle\right)\Big)(0) \\
&= 8\langle \mathcal{J}'''(0), \mathcal{J}'(0)\rangle = -8\langle R(w, v)v, w\rangle \\
&= -8\sec(\sigma)
\end{aligned}$$

Beweis des Hinweises Für alle Vektorfelder W längs γ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_t(R(\dot\gamma, \mathcal{J})\dot\gamma), w\rangle(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\langle R(\dot\gamma, \mathcal{J})\dot\gamma, w\rangle) - \langle \underbrace{R(\dot\gamma, \mathcal{J})\dot\gamma}_{=0 \text{ in } 0}, \nabla_t w\rangle(0) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\langle R(\dot\gamma, w)\dot\gamma, \overbrace{\mathcal{J}}^{=0 \text{ in } 0}\rangle) \\
&= \langle \nabla_t(R(\dot\gamma, w)\dot\gamma), \mathcal{J}\rangle(0) + \langle R(\dot\gamma, w)\dot\gamma, \mathcal{J}'\rangle(0) \\
&= \langle R(\dot\gamma, \mathcal{J}')\dot\gamma, w\rangle(0)
\end{aligned}$$

□

Aus den Ableitungen folgt nun

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{J}(t)|^2 &= 0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot t^2 + 0\cdot t^3 + \frac{1}{4}\cdot(-8)\cdot \sec(\sigma)\cdot t^4 + o(t^4)\\
&= t^2 - \frac{1}{3}\sec(\sigma)t^4 + o(t^4)
\end{aligned}
$$

Es sei nun

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{J}(t)| &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3)\\
|\mathcal{J}(t)|^2 &= a_0^2 + 2a_0a_1 t + (2a_0a_2 + a_1^2)t^2 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)t^3 + (2a_3a_1 + a_2^2)t^4 + o(t^4)
\end{aligned}
$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$
a_0 = 0, \qquad a_1^2 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{1}{6}\sec(\sigma)
$$

und es gilt $a_1 = 1$ denn $|\mathcal{J}(t)| \geq 0$.

Lösung 2

Sei $\sigma = \operatorname{span}\{v, w\}$ und $V(t,s) := \exp_{\gamma_1(t)}(s\cdot \exp^{-1}_{\gamma_1(t)}(\gamma_2(t))$. Wir definieren desweiteren

$$
T(t,s) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(t,s)) \qquad S(t,s) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(V(t,s))
$$

Die Abbildung $c_t := s \mapsto V(t,s)$ ist eine Geodätische von $\gamma_1(t)$ nach $\gamma_2(t)$ und daraus folg dann $S(t,s) = \dot{c}_t$. Desweiteren ist $t \mapsto c_t$ eine Variation durch Geodätische und damit $s \mapsto T(t,s)$ ein Jacobifeld längs c_t. Es gilt

$$
c_t(0) = \gamma_1(t) \qquad c_t(1) = \gamma_2(t)
$$

und daraus folgt $L(c_t) = \|S(t,0)\|$. Für genügend kleines t gilt dann:

$$
L(t) = L(c_t) = \|S(t,0)\|
$$

Es gilt:

- $\nabla_s\nabla_s T = -R(T,S)S$ (T Jacobifeld längs c_t)
- $\nabla_s S = 0$ (c_t Geodätische, $\dot{c}_t = S(t,\cdot)$)
- $\nabla_t S = \nabla_s T$

Ferner gilt $L^2(t) = \langle S(t,0), S(t,0)\rangle$ für kleines t und daraus folgt dann

$$
(L^2)'(0) = 2\langle \nabla_t S, S\rangle((0,0))
$$

mit $S(0,0) = \dot{c}_0(0) = 0$ und $c_0 \equiv p$. Damit folgt also:

$$
(L^2)'' = 2(\langle \nabla_t\nabla_t S, S\rangle + \langle \nabla_t S, \nabla_t S\rangle)(0,0) = 2\langle \nabla_s T, \nabla_s T\rangle(0,0)
$$

Wir wissen bereits dass $T(0,0) = \dot{\gamma}_1(0) = v$, $T(0,1) = w$ und $c_0 \equiv p$, also $\nabla_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$. Es gilt

$$
\nabla_s\nabla_s T(0,s) = -R(T(0,s), \underbrace{S(0,s)}_{=0})\underbrace{S(0,s)}_{=0} = 0
$$

Damit ist $T(0,\cdot)$ linear, also $T(0,s) = v + S(w-v)$ und damit $\nabla_s T(0,s) = w - v$. Daraus folgt dann $(L^2)'' = 2\cdot\|w-v\|^2$. Wir möchten nun dass folgendes gilt:

$$
(L^2)'''(0) = 6(\langle \nabla_t\nabla_t S, \nabla_t S\rangle(0,0)) \stackrel{!}{=} 0
$$

Dazu zeigen wir zunächst die folgenden drei Gleichungen:

(1) $\nabla_t T(0,s) = 0$
(2) $\nabla_s \nabla_t T(0,s) = 0$
(3) $\nabla_t \nabla_t S(0,s) = 0$
Dass (2) aus (1) folgt ist klar. Dass (3) aus (2) folgt zeigt Folgendes (in $(0,s)$):

$$\nabla_t \nabla_t S = \nabla_t \nabla_s T = \underbrace{\nabla_s \nabla_t T}_{=0} + \underbrace{R(T,S)T}_{=0}$$

Um (1) zu zeigen gilt $(\nabla_t T)(0,0) = (\nabla_t T)(0,1)$ und dann bleibt noch zu zeigen, dass $(\nabla_t T)(0,s)$ linear ist. Mit (3) folgt dann schlieslich $(L^2)'''(0) = 0$. Für die vierte Ableitung gilt dann

$$(L^2)^{(4)}(0) \underset{\substack{S(0,s)=0 \\ (\nabla_t \nabla_t S(0,0)=0)}}{=} \ldots = 8\langle \nabla_t \nabla_t \nabla_t S, \nabla_t S\rangle(0,0)$$

Es gilt:

$$\nabla_t \nabla_t \nabla_t S = \nabla_t(\nabla_t \nabla_s T) = \nabla_t(R(T,S)T + \nabla_s \nabla_t T) \overset{\text{Hinweis}}{\underset{\text{A 1}}{=}} R(T, \nabla_t S)T + \nabla_t \nabla_s \nabla_t T$$

In $(0,0)$ gilt:

$$R(T, \underbrace{\nabla_t S}_{=\nabla_s T})T(0,0) = R(\underbrace{\dot\gamma_1(0)}_{=v}, w - v)\underbrace{\dot\gamma_1(0)}_{=v}$$

Damit folgt dann insgesamt:

$$\begin{aligned}
(L^2)^{(4)}(0) &= 8\langle R(v, w-v)v, \overbrace{\nabla_t S(0,0)}^{=w-v}\rangle + 8\underbrace{\langle \nabla_t \nabla_s \nabla_t T, \nabla_t S\rangle}_{=\ldots=0}(0,0) \\
&= 8\langle R(v,w-v)v, w-v\rangle \\
&= 8\langle R(v,w)v, w\rangle \\
&= -8\langle R(v,w)w, v\rangle \\
&= -8\sec(\sigma)(\underbrace{\|v\|^2\|w\|^2}_{=1} - \langle v,w\rangle^2)
\end{aligned}$$

Übung 13 vom 4. Februar 2012

Aufgabe 1
Es seien $2 \leq p \in \mathbb{N}$ und $1 \leq q_1, \ldots, q_k < p$ zu p teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln $E_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$ durch

$$z.(z_1, \ldots, z_k) := (z^{q_1} z_1, \ldots z^{q_k} z_k)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathrm{S}^{2k-1} = \{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1\}$ operiert.
Die Quotientenmannigfaltigkeit $L(p, q_1, \ldots, q_k) = \mathrm{S}^{2k-1}/E_p$ nach dieser Wirkung wird *Linsenraum* vom Typ $(p, q_1, \ldots, q_k)$ genannt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass es auf T^n keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.

Aufgabe 3
Es seien M, M_1, M_2 zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi_i : M \to M_i$ Riemannsche universelle Überlagerungen mit Decktransformationsgruppen Γ_i $(i = 1, 2)$. Zeigen Sie, dass M_1 und M_2 genau dann isometrisch sind, wenn es eine Isometrie $\hat{\varphi} : M \to M$ gibt, so dass $\Gamma_1 = \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1}$.

Lösung 1
Operation: Für alle $z \in E_p$ ist $S^{2k-1} \to S^{2k-1}$, $x \mapsto z.x$ stetig und für alle $z, \tilde{z} \in E_p$ und alle $x \in S^{2k-1}$ gilt $z.(\tilde{z}.x) = (z \cdot \tilde{z}).x$.

Die Operation ist frei: Es ist zu zeigen dass für alle $x \in S^{2k-1}$ gilt $(E_p)_x = \{1\}$, beziehungsweise für alle $z \in E_p \setminus \{1\}$ und alle $x \in S^{2k-1}$ gilt $z.x \neq x$, beziehungsweise dass für alle $z \in E_p$ gilt dass wenn es ein $x \in S^{2k-1}$ mit $z.x$ gibt $z = 1$ gelten muss. Es seien E_p und $(z_1, \ldots, z_k) \in S^{2k-1}$ mit

$$(z_1, \ldots, z_k) = z.(z_1, \ldots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \ldots, z^{q_k} z_k)$$

Da $(z_1, \ldots, z_k) \in S^{2k-1}$ ist, existiert ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $z_j \neq 0$, und daraus folgt $z^{q_j} = 1$. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $1 = aq_j + bp$. Es gilt dann

$$1 = 1^a \cdot 1^b = (z^{q_j})^a (z^p)^b = z^{aq_j + bp} = z^1 = z$$

Die Operation ist eigentlich kontinuierlich Die Gruppe ist endlich und alle endlichen Gruppen operieren eigentlich diskontinuierlich, dann bleibt zu zeigen dass für alle $K \in S^{2k-1}$ die Menge $\{z \in E_p \mid z.K \cap K \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Der Quotient $L(p, q_1, \ldots, q_k)$ nach dieser Operation ist also eine Mannigfaltigkeit. Für $z = e^{2\pi i \frac{l}{p}}$ ist die induzierte Abbildung eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi l}{p} q_j$ in der x_{2j-1}-x_{2j}-Ebene. Damit ist die Operation bezüglich der Standardmetrik isometrisch und daraus folgt dass $L(p, q_1, \ldots, q_k)$ eine sec > 0-Metrik besitzt. Im Fall $p = 2$ gilt $q_1 = \ldots = q_k = 1$ und es ist $L(2, 1, \ldots, 1) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{2k-1}$. Laut Vorlesung gilt: Für $k \geq 2$ ist $S^{2k-1} \to L(p, q_1, \ldots q_k)$ die universelle Überlagerung. Dann sind die Einheitswurzeln gerade die Decktransformationsgruppe, also folgt

$$\pi_1(L(p, q_1, \ldots, q_k)) \cong E_p \cong \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$$

Korollar Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.

Beweis Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt:

(1) $G \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$

(2) (M, g_M) und (N, g_N) haben die Schnittkrümmung sec ≥ 0 und damit hat $(M \times N, g_M \oplus g_N)$ auch sec ≥ 0 (wobei $(g_M \oplus g_N)(X_M + X_N, Y_M + Y_N) = g_M(X_M + Y_M) + g_N(X_N, Y_N))$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\pi_1(T^n \times L(p_1, 1, \ldots, 1) \times \ldots \times L(p_n, 1, \ldots, 1)) \\
&\cong \pi_1(T^n) \oplus \pi_1(L(p_1, 1, \ldots, 1)) \oplus \ldots \oplus \pi_1(L(p_1, 1, \ldots, 1)) \\
&\cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \cong G
\end{aligned}$$

□

Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q_1, \dots, q_k)$ und $L(p, q_1', \dots, q_k')$ sind:

- homotopieäquivalent genau dann wenn $q_1 \cdot \ldots \cdot q_k \equiv \pm l^k q_1' \ldots q_k' (\operatorname{mod} p)$ für ein $l \in \mathbb{Z}_p$ [7]
- homöomorph genau dann wenn es ein $l \in \mathbb{Z}_p$ und ein $\sigma \in S_k$ gibt sodass für alle i gilt $q_i \equiv \pm l q' \sigma(i) (\operatorname{mod} p)$ [2]

Also handelt es sich um homotopieäquivalente, aber nicht homöomorphe Mannigfaltigkeiten.

Lösung 2

Nach dem Korollar von Bonnet-Myers ist die Fundamentalgruppe eine vollständige Mannigfaltigkeit mit $\operatorname{ric} \geq (n-1)\kappa > 0$ endlich. $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ nicht.

Lösung 3

Wir kürzen mit (*) die rechte Seite der Behauptung ab, also

$$\text{Es gibt eine Isometrie } \hat{\varphi} : M \to M, \text{ sodass } \Gamma_1 = \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1} \tag{*}$$

„⇐“: Es sei $\hat{\varphi} : M \to M$ eine Isometrie mit (*). Definiere die Abbildung

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright ?"] & M \arrow[d, "\pi_1"] \\ M_2 \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & M_1 \end{tikzcd}$$

$$\varphi : M_2 \to M_1 \qquad \underset{}{\overset{\text{Bahn}}{\varphi(\Gamma_2 x)}} = \Gamma_1 \hat{\varphi}(x)$$

Behauptung: φ ist wohldefiniert

Beweis: Es ist zu zeigen dass für alle $\gamma_2 \in \Gamma_2$ es ein $\gamma_1 \in \Gamma_1$ gibt mit $\hat{\varphi}(\gamma_2 x) = \gamma_1 \hat{\varphi}(x)$. Für $\gamma_2 \in \Gamma_2$ ist $\hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} =: \gamma_1 \in \Gamma_1$. Dann folgt $\gamma_1(\hat{\varphi}(x)) = \hat{\varphi}(\gamma_2(x))$.
Die gleiche Konstruktion für $\hat{\varphi}^{-1}$ liefert φ^{-1}. Da π_i ein lokaler Diffeomorphismus ist folgt dass φ und φ^{-1} glatt sind. Da φ und π_i lokale Isometrien sind und π_2 surjektiv ist, ist φ eine lokale Isometrie, und weil φ ein Diffeomorphismus ist folgt dass φ eine Isometrie ist.

„⇒“: Es sei $\varphi : M_1 \to M_2$ eine Isometrie. Dann ist $\varphi \circ \pi_2$ eine lokale Isometrie, da φ ein Diffeomorphismus ist und π_2 eine Überlagerung, und damit ist $\varphi \circ \pi_2$ eine Riemannsche Überlagerung. Aus $\pi_1(M) = \{0\}$ folgt dass $\varphi \circ \pi_1$ die universelle Überlagerung ist; diese ist nach der Vorlesung bis auf Isomorphie eindeutig. Das bedeutet es existiert eine Isometrie $\hat{\varphi} : M \to M$ mit $\pi_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi \circ \pi_2$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\pi_2"'] & M \arrow[d, "\pi_1"] \\ M_2 \arrow[r, "\varphi"'] & M_1 \end{tikzcd}$$

Behauptung: $\Gamma_1 = \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1}$

Beweis: „⊆“:

$$\pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \varphi \circ \pi_2 \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \overset{\gamma_1 \in \Gamma_2}{=} \varphi \circ \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1$$

„⊇“:

$$\pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \hat{\varphi} = \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \hat{\varphi} = \pi_2$$

Daraus folgt

$$\gamma_2 = \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} \in \Gamma_2 \qquad \gamma_1 = \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \in \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1}$$

Stichwortverzeichnis