Kapitel 16

Testtheorie

16.1 Einführung

$\{P_\theta | \theta \in \Theta\}$,
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist Realisierung von der Zufallsstichprobe $X = (X_1, \ldots, X_n)$ zur Verteilung P_θ.
$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$, θ ist nicht bekannt.
Wir müssen entscheiden, ob eher $\theta \in \Theta_0$ oder $\theta \in \Theta_1$.

D.h. wir wägen die Hypothese $H_0 : \theta \in \Theta_0$
gegen die Alternative $H_1 : \theta \in \Theta_1$
ab.

Falls $\Theta \subset \mathbb{R}$, können folgende typische Fragestellungen auftreten. (sei $\theta_0 \in \Theta$)

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

ein sogenannter **einseitiges Testproblem**.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

ein sogenanntes **zweiseitiges Testproblem**.

Beispiel 16.1

a) Einseitiger Test:
ISt der Schadstoffgehalt im Nahrungsmittel der $\nleq$ der zulässigen Grenze θ_0?

b) Zweiseitiger Test:
Hält die Abfüllanlage das Sollgewicht θ_0 ein?

Aufgabe:
Bestimme $R \subset \mathbb{R}^n = \chi^n$, so dass H_0 verworfen wird, falls die Stichprobe $x \in R$. R heißt **kritischer Bereich**.

Folgende Entscheidungen sin möglich:
$0 = H_0$ wird nicht verworfen.
$1 = H_0$ wird verworfen.

Definition 16.1
Gegeben sei ein Testproblem H_0 vs H_1.

a) *Sei $x \in \chi^n$ eine Stichprobe. Eine Funktion $\varphi : \chi^n \to \{0,1\}$ heißt* ***Test*** *oder* ***Testverfahren****. Es gilt: $R = \{x \in \chi^n | \varphi(x) = 1\}$*

b) *Einen* ***Fehler erster Art*** *macht man, wenn man zu Unrecht H_0 ablehnt. Einen* ***Fehler zweiter Art*** *macht man, wenn man zu Unrecht H_0 annimmt.*

c) *Sei φ ein Test. Die Funktion $\beta : \Theta \to [0,1]$ definiert durch:*

$$\beta(\theta) = P_\theta(X \in R) = P_\theta(\varphi(x) = 1)$$

heißt ***Gütefunktion****. Für $\theta \in \Theta_1$ heißt $\beta(\theta)$* ***Macht des Test****.*

Bemerkung 16.1

Entscheidung “wahr“	H_0	H_1
H_0	ok	Fehler 1.Art
H_1	Fehler 2.Art	ok

Definition 16.2
Gegeben sei ein Test.
Wir sagen, dass der Test ***Niveau (Signifikanzniveau)*** *α hat, falls $\forall\ \theta \in \Theta_0$ gilt: $\beta(\theta) \leq \alpha$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art ist maximal α.*

16.2 Tests unter Normalverteilungsannahme

Test auf den Mittelwert bei bekannter Varianz

$X = (X_1, ..., X_n), X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0$ sei bekannt, $\mu \in \Theta = \mathbb{R}$.

Testproblem:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 = 1000$$

mit $\mu_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x} \leq c \\ 0 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x}\, c \end{cases} , \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$c \in \mathbb{R}$ ist jetzt noch zu bestimmen und zwar so, dass der Test das Niceau α erhält.

Bestimmung der Gütefunktion:
betrachte $\sqrt{n}\ \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x \right) = \Phi(x), (\text{siehe Lemma 6.2}$$

$$\beta_c(\mu) = P_\mu(\overline{X} > c) = P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0} > \sqrt{n} \frac{c - \mu}{\sigma_0} \right) = 1 - \Phi \left(\sqrt{n} \frac{c - \mu}{\sigma_0} \right)$$

Einstellen des Testniveaus: $\beta_c(\mu) \leq \alpha \ \forall \ \mu \leq \mu_0$
Es gilt:

$$\begin{array}{rcll} \mu \mapsto \beta_c(\mu) & , & \text{wachsend} \quad \text{für festes} & c \in \mathbb{R} \\ c \mapsto \beta_c(\mu) & , & \text{fallend} \quad \text{für festes} & \mu \in \mathbb{R} \end{array}$$

deswegen genügt: $\beta_c(\mu_0) \leq \alpha$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi \underbrace{\left(\sqrt{n} \frac{c - \mu_0}{\sigma_0} \right)}_{=z_{1-\alpha}} \leq \alpha \Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha}\, \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$$

Definition 16.3
Gegeben sei ein Testproblem zum Niveau und D_α eine Menge von Tests zum Niveau α.
*$\varphi^* \in D_\alpha$ heißt **gleichmäßig bester Test** in D_α, falls*

$$\forall\, \theta \in \Theta_1 : \beta^*(\theta) = P_\theta(\varphi^*(x) = 1) = \max_{\varphi \in D_\alpha} P_\theta(\varphi(x) = 1)$$

Zurück zum Beispiel:
sei D_α die Menge aller Tests der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x} \leq c \\ 1 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x}\, c \end{cases} \quad \text{und } c \geq c^*$$

I.A. findet man keinen gleichmäßig besten Test.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x} \leq c^* \\ 1 & , \quad \text{falls} \quad \overline{x}\, c^* \end{cases}$$

ist gleichmäßig bester Test in D_α, denn:

$$\beta_c^*(\mu_0) = \alpha\beta_{c^*+h}(\mu) = \beta_c^*(\mu - h) \leq \beta_c^*(\mu) \;\forall\; \mu \in \mathbb{R}, h \geq 0$$

Bemerkung 16.2 (Wahl der Nullhypothese)
Wird H_0 verworfen, so hat man eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ für die Alternative. Möchte man sich zum Beispiel für $\theta < \theta_0$ entscheiden, sollte man die Nullhypothese $H_0 : \theta \geq \theta_0$ wählen.

Definition 16.4
Seien $X_0, X_1, \ldots, X_r$ unabhängig und identisch verteilte ZV mit $X_i \sim N(0,1), r \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Verteilung von

a)

$$\sum_{i=1}^{r} X_i^2$$

*eine χ^2-**Verteilung** mit r Freiheitsgraden (Schreibweise: χ_r^2)*

b)

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i^2}}$$

*eine **t-Verteilung** mit r Freiheitsgraden (Schreibweise: t_r)*

Satz 16.1
Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe zur $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung. Dann gilt:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \text{ und } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ unabhängig und}$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ und} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$$

Beweis Es sei $Y_i := \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ $i = 1, \ldots, n$
Vor. $\Rightarrow Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $Y_i \sim N(0,1)$
Sei $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

$$f_y(y_1, \ldots, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

Sei jetzt $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix (d.h. $A^{-1} = A^T$) mit

$$a_{nj} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ , } j = 1, \ldots, n$$

Sei $Z := A \cdot Y$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$

$$\begin{aligned}
P(Z \in \underbrace{(a,b]}_{=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n]}) &= P(Y \in A^{-1}(a,b]) \\
&= \int_{A^{-1}(a,b]} f_y(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \\
&\overset{\text{Substitutionsregel}}{=} \int_{(a,b]} f_y(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \cdots dz_n \\
&= P(Y \in (a,b]) \text{ (wegen } \|y\|^2 = \|Ay\|^2, detA = 1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Z \overset{\text{d}}{=} Y$ und $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängig.

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i = \sqrt{n} \cdot \overline{Y} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu)$$

$$\begin{aligned}
(n-1)S^2(x) &= \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sigma^2(n-1)S^2(Y) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{i=i}^n (Y_i^2 - 2Y_i\overline{Y} + \overline{Y}^2) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\overline{Y}^2 \right) \\
&= \sigma^2(\underbrace{\|Y\|^2}_{=\|Z\|^2} - Z_n^2) = \sigma^2(Z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2)
\end{aligned}$$

$\overline{X}$ und $S^2(X)$ sind unbhängig, da $\overline{X}$ nur von Z_n und $S^2(x)$ nur von $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ abhängt. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ klar und $\frac{(n-1)S^(X)}{\sigma^2} = (n-1)S^2(Y) = Z_1^2 + \cdot + Z_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2$ nach Definition der χ^2-Verteilun. ∎

Korollar 16.2 *Unter der Voraussetzung von Satz 16.1 gilt:*

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(\overline{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

Beweis Weil $\overline{X}$ und $S^2(X)$ unabhängig sind, sind auch die Zufallsvariablen

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right) \text{ und } \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \frac{(n-1)S^2(X)}{\sigma^2}} \text{ unabhängig.}$$

Also gilt:

$$\frac{\sqrt{n}(X-\mu)}{S(X)} = \frac{\overbrace{\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\underbrace{\frac{(n-1)S^2(X)}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2_{n-1}}}} \sim t_{n-1}$$

16.3 Test auf den Mittelwert bei unbekannter Varianz

$P_{\mu,\sigma^2} = N(\mu,\sigma^2)$, $\theta = (\mu,\sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. σ^2 ist hier nicht bekannt!
Einseitiges Testproblem: $H_0 : \mu \le \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein festes $\mu_0 \in \mathbb{R}$
Sei $X = (X_1,\dots,X_n)$ eine Zufallsstichprobe zu P_{μ,σ^2}. Dann gilt: $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$
Als Test verwenden wir:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \overline{x} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \overbrace{t_{n-1}(1-\alpha)}^{(1-\alpha)\text{-Quantil der } t_{n-1}\text{-Verteilung}} S(x)+\mu_0 \\ 0, & \text{falls } \overline{x} > \cdots \end{cases}$$

Der Test φ hält das Niveau α ein: Sei $\mu \le \mu_0$

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\mu) &= P_{\mu,\sigma^2}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu_0}{S(X)} > t_{n-1}(\alpha-1)\right)\\ &\le P_{\mu,\sigma^2}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{S(X)} > t_{n-1}(\alpha-1)\right)\\ &= 1-P_{\mu,\sigma^2}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{S(X)} \le t_{n-1}(\alpha-1)\right) = 1-(1-\alpha) = \alpha\end{aligned}$$

Zweiseitiges Testproblem: $H_0 : \mu = \mu_0 \quad$ vs $\quad H_1 : \mu \ne \mu_0$
Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1,\dots,x_n)\begin{cases} 0, & \text{falls } \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)}\right| \le t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ 1, & \text{falls } \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)}\right| > t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \end{cases} \text{hat Niveau}\,\alpha$$

■

Beispiel 16.2 (Zweiseitiger t-Test) *Dieses Beispiel wurde nur in der Hannoverschen Vorlesung gezeigt.*
Einer früheren Untersuchung zur Folge sind Jungen einer bestimmten Altersgruppe im Mittel $\sigma_0 = 150cm$ groß. Ein Hersteller für Kinderbekleidung möchte feststellen, ob sich seit der letzten Untersuchung eine Veränderung ergeben hat. Dazu wird die Größe von $n = 49$ zufällig ausgesuchten Jungen des entsprechenden Alters gemessen: Es ergibt sich: $\overline{X} = 147$ und $S^2 = \frac{1}{(49-1)}\sum_{i=1}^{49}(X_i-\overline{X})^2 = 36$.
Als Niveau wird $\alpha = 0.05$ gewählt.
Annahme: Körpergröße normalverteilt $N(\theta,\sigma^2)$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \ne \theta_0$$

$$\sqrt{n}\,|\frac{\overline{X}-\theta_0}{S}| = |\frac{147-150}{6}| \cdot 7 = 3,5$$

Aus Tabelle: $t_{48}(1-\frac{\alpha}{2}) = t_{48}(0.975) \approx 2.01$
Ablehnung von H_0 ist auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ gesichert.
Bemerkung:
Die angegebenen t-Tests sind unverfälscht und trennscharf in Menge der unverfälschten Tests.

16.4 Test auf die Varianz

$P_{\mu,\sigma^2} = N(\mu,\sigma^2)$, $\theta = (\mu,\sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. wie gehabt.
Testproblem: $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
Nach Satz 16.1 gilt:

$$P_{\mu,\sigma^2}(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0} \leq x) = F_{\chi^2_{n-1}}(x)$$

Als Test verwenden wir:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} \leq \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, & \text{falls } \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Berechnung des Testniveaus: Sei $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right) \leq P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right) = 1-(1-\alpha) = \alpha$$