

## 2. Riemann'sche Metriken

### 2.1. Definition einer Riemann'schen Metrik und Struktur

Eine Riemann'sche Metrik (oder Riemann'sche Struktur) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist dadurch gegeben, dass jedem Punkt  $p \in M$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv g_p(\cdot, \cdot)$  in  $T_p M$  zugeordnet wird.

Diese Zuordnung soll differenzierbar sein, das heißt für alle lokalen Koordinaten  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $q \mapsto (x^1(q), \dots, x^n(q))$  sind die Funktionen

$$U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{ij} : q \mapsto g_{ij}(q) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \right\rangle_q$$

$C^\infty$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Die  $(n \times n)$ -Matrix  $(g_{ij}(q))$  ist symmetrisch und positiv definit für alle  $q \in U$ .

Insbesondere gilt für  $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$  und  $w = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \in T_p M$ :

$$\langle v, w \rangle_q = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(q)$$

#### Definition

Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M, g)$  (oder  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ) bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Riemann'schen Struktur auf  $M$ .

**Bemerkung:** Ist  $g$  nicht positiv definit (d.h.  $g_p(v, v) \geq 0$  und  $g_p(v, v) = 0 \iff v = 0$ ), sondern nur semi-definit, so heißt  $g$  Pseudo-Riemann'sche Struktur. Zum Beispiel der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der Form  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  modelliert die Minkowski-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Mehr dazu etwa in B. O'Neill: Semi-Riemannian Geometry.

Der Isometrie-Begriff auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten: Ein Diffeomorphismus  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten heißt Isometrie falls für alle  $p \in M$  und alle  $v, w \in T_p M$  gilt:

$$\langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \rangle_{\Phi_p} = \langle v, w \rangle_p \quad (*)$$

Ein lokaler Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  ( $U \subset M$ ,  $V \subset N$ ) heißt lokale Isometrie falls  $(*)$  gilt für alle  $q \in U$  und alle  $v, w \in T_q M$ .

## 2.2. Beispiele und Konstruktionen

### 2.2.1. $n$ -dimensionaler Euklidischer Raum

$M = \mathbb{R}^n$  mit Atlas  $\{\text{id}\}$  ist eine Riemann'sche Struktur mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dabei ist  $g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , also ist  $(g_{ij}(p))$  die Einheitsmatrix.

### 2.2.2. $n$ -dimensionale hyperbolische Räume

$M = H^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ . Dies ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , also eine offene Untermannigfaltigkeit.

Die Riemann'sche Metrik ist dann

$$g_{ij}(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x^n)^2} & 1 \leq i = j \leq n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

und die Matrix

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x^n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

positiv definit und symmetrisch, also ist  $(H^n, g)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ist ein Modell für  $n$ -dimensionale hyperbolische Geometrien.

### 2.2.3. Konstruktion von neuen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten aus gegebenen

Sei  $\Phi : M^m \rightarrow N^{n=m+k}$  sei eine Immersion. Weiter sei auf  $N$  eine Riemann'sche Struktur  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  gegeben. Diese induziert eine Riemann'sche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $M$ :

Für  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$  setze:  $\langle u, v \rangle_p := \langle\langle d\Phi_p u, d\Phi_p v \rangle\rangle_{\Phi(p)}$

Zu zeigen ist:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ist symmetrisch, bilinear und positiv definit. Die Symmetrie und Bilinearität ist klar. Zu überprüfen: Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit? Es ist  $\langle u, u \rangle_p \geq 0$ . Ist  $0 = \langle u, u \rangle_p = \langle\langle d\Phi_p u, d\Phi_p u \rangle\rangle_{\Phi(p)}$ , so ist  $d\Phi_p u = 0 \xrightarrow{\Phi \text{ injektiv}} u = 0$

Die Abbildung  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$  heißt isometrische Immersion von  $M$  in  $N$ .

#### Beispiel

Flächen im  $\mathbb{R}^3$  mit Standardskalarprodukt, wobei  $\Phi = i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  die Inklusionsabbildung ist. Die so induzierte Riemann'sche Metrik auf  $F$  heißt die 1. Fundamentalform von  $F$ . Für  $u, v \in T_p F$  gilt dann:

$$\langle u, v \rangle := \langle di_p u, di_p v \rangle = \langle u, v \rangle$$

wobei das letzte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt ist.

Analog kann man mit anderen Untermannigfaltigkeiten des  $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vorgehen. So kann man  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit der vom Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Riemann'schen Metrik versehen. Diese heißt sphärische Geometrie.

**Bemerkung:** Die klassischen Geometrien (euklidische, hyperbolische, sphärische) sind Spezialfälle der Riemann'schen Geometrien.

### 2.2.4. Riemann'sche Produkte

Seien  $(M_1, \langle \cdot, \cdot \rangle^{(1)})$ ,  $(M_2, \langle \cdot, \cdot \rangle^{(2)})$  zwei Riemann'sche Mannigfaltigkeiten.  $M_1 \times M_2$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter haben wir die zwei kanonischen Projektionen auf die Faktoren:

$$\begin{aligned} \pi_1 : M_1 \times M_2 &\rightarrow M_1 & \pi_2 : M_1 \times M_2 &\rightarrow M_2 \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 & (m_1, m_2) &\mapsto m_2 \end{aligned}$$

#### Definition (Riemann'sche Produktmetrik)

Riemann'sche Produktmetrik auf  $M_1 \times M_2$  ist für alle  $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$  und für alle  $(p, q) \in M_1 \times M_2$ :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{(p,q)} &:= \langle d\pi_{1(p,q)}u, d\pi_{1(p,q)}v \rangle^{(1)} \\ &\quad + \langle d\pi_{2(p,q)}u, d\pi_{2(p,q)}v \rangle^{(2)} \end{aligned}$$

(Kurz:  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle^{(1)} + \langle u_2, u_2 \rangle^{(2)} = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ )

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$  ist symmetrisch und positiv bilinear. Es ist auch positiv definit:

$$0 = \langle u, u \rangle \implies \left. \begin{aligned} d\pi_1 u &= 0 \\ d\pi_2 u &= 0 \end{aligned} \right\} \implies u = 0,$$

da  $u = d\pi_1 u \oplus d\pi_2 u$ .

#### Beispiele

(1)  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}^1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $(a_1, \dots, a_n) = a \in T_x \mathbb{R}^n$ ;  $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$

(2) Flacher Torus:

$T^2 := S^1 \times S^1$ , wobei jeder Faktor  $S^1$  mit der kanonischen Riemann'schen Metrik, induziert von  $\mathbb{R}^2$ , versehen ist. Wir betrachten lokale Koordinaten  $(s, t)$ . Dann:

$$T_{(s,t)}(S^1 \times S^1) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_s \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t$$

Sei nun  $u, v \in T_{(s,t)}(S^1 \times S^1)$  mit  $u = a \frac{\partial}{\partial s} + b \frac{\partial}{\partial t}$  und  $v = c \frac{\partial}{\partial s} + d \frac{\partial}{\partial t}$ . Das heißt:  $d\pi_1 u = a \frac{\partial}{\partial s}$  und  $d\pi_2 u = b \frac{\partial}{\partial t}$ . Ohne Einschränkung sei  $\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = 1$  und  $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$

Die Riemann'sche Produktmetrik auf  $T^2$  bezüglich lokalen Koordinaten  $(s, t)$ :

$$\begin{aligned} g_{11}(s, t) &= \left\langle d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right) \right\rangle + \left\langle d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle + \langle 0, 0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

## 2. Riemann'sche Metriken

Analog:  $g_{22}(s, t) = \dots = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1$

$$\begin{aligned} g_{12}(s, t) &= \left\langle d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} + 0 \right) \right\rangle + \left\langle d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + 0 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, 0 \right\rangle + \left\langle 0, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

also ist

$$(g_{ij}(s, t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das heißt:  $T^2$  mit Produktmetrik ist lokal isometrisch zur euklidischen Ebene.

☠  $T^2$  und  $\mathbb{R}^2$  sind nicht global isometrisch (sonst wären sie homöomorph, aber  $\mathbb{R}^2$  ist nicht kompakt, während  $T^2$  kompakt ist).

## 2.3. Existenz von Riemann'schen Metriken

### Satz 2.1 (Existenz der Riemann'schen Metrik)

Auf jeder  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemann'sche Metrik.

### Beweis

Wir gehen in zwei Schritten vor:

#### 1. Schritt (lokale Konstruktion für Kartengebiete)

Gegeben eine Karte  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \mapsto \varphi_\alpha(p) = (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$ . Wir benötigen  $\frac{n(n+1)}{2}$   $C^\infty$ -Funktionen  $g_{ij} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass die  $n \times n$ -Matrix  $(g_{ij}(q))$  positiv definit wird für alle  $q \in U_\alpha$ .

Eine Möglichkeit: Wähle Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ , das heißt  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  und setze für alle  $u, v \in T_q M$ ,  $q \in U_\alpha$ :

$$g_\alpha(u, v) := \langle d\varphi_\alpha|_q(u), d\varphi_\alpha|_q(v) \rangle_{\varphi_\alpha(q)},$$

das heißt  $\varphi_\alpha$  wird zu einer lokalen Isometrie gemacht.

Weil  $d\varphi_\alpha|_q \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q \right) = e_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt, ist

$$g_{ij}^{(\alpha)}(q) = g_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \right) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

#### 2. Schritt (Globale Konstruktion)

Wir nehmen ein Hilfsmittel aus der Differential-Topologie:

**Satz 2.2 („Zerlegung der Eins“)**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (insbesondere Hausdorff'sch und es existiert eine abzählbare Basis) und  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine (offene) Überdeckung von  $M$  von Karten.

Dann existiert eine lokal endliche Überdeckung  $(V_k)_{k \in I}$  und  $C^\infty$ -Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (1) Jedes  $V_k$  liegt in einem  $U_{\alpha=\alpha(k)}$ .
- (2)  $f_k \geq 0$  auf  $\bar{V}_k$  und  $f_k = 0$  auf dem Komplement von  $\bar{V}_k$ . (Das heißt: Der Träger von  $f_k$  ist eine Teilmenge von  $\bar{V}_k$ )
- (3)  $(\sum_{k \in I} f_k) = 1$  für alle  $p \in M$ . Diese Summe ist immer endlich, da die Überdeckung lokal endlich ist.

Lokal Endlich: Für jeden Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U = U(p)$  mit  $U \cap V_k \neq \emptyset$  für nur endlich viele  $k \in I$

**Beweis (von Satz 2.2)**

siehe zum Beispiel: Gromoll-Klingenberg-Meyer, „Riemann'sche Geometrie im Großen“. ■

Für die Konstruktion einer Riemann'schen Metrik auf  $M$  „verschmiert“ oder „glättet“ man jetzt alle im ersten Schritt konstruierten lokalen Riemann'schen Metriken  $g_k : g_\alpha|_{V_k}$  wie folgt:

Sei  $p \in M$  beliebig und  $u, v \in T_p M$ . Setze

$$\langle u, v \rangle_p := \sum_{k \in I} f_k(p) \cdot g_k(p)(u, v)$$

Diese Summe ist endlich, da  $f_k(p) \neq 0$  nur für endlich viele  $k$ .

Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ein Skalarprodukt auf  $T_p M$ ?

- Symmetrie und Bilinearität sind klar.
- Positivität:

$$\langle u, u \rangle_p = \sum_{k \in I} \underbrace{f_k(p)}_{\geq 0} \underbrace{g_k(u, u)}_{\geq 0} \geq 0.$$

- Definitheit: Sei  $\langle u, u \rangle_p = 0$ , dann ist für jedes  $k$   $f_k(p)g_k(u, u) = 0$ . Wegen Punkt (3) von Satz 2.2 existiert mindestens ein  $k_0 \in I$ , so dass  $f_{k_0}(p) > 0$ . Daher ist  $g_{k_0}(u, u) = 0$ , woraus  $u = 0$  folgt, da  $g_{k_0}$  positiv definit ist. ■

**Bemerkung (Riemannsche Metrik ist nicht eindeutig):** Im  $\mathbb{R}^n$  ist durch jede positiv definite Bilinearform ein Skalarprodukt und damit eine Riemannsche Metrik gegeben.

## 2.4. Anwendung: Länge von Kurven

Sei  $c : I \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist die Länge von  $c$

$$L(c) := \int_I \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle} dt = \int_I \|c'(t)\| dt$$

(Ein Spezialfall sind  $C^\infty$ -Kurven in  $\mathbb{R}^n$  versehen mit Standardskalarprodukt)

Die Länge ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve und invariant unter Isometrien  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ , also  $L(\Phi \circ c) = L(c)$ , da  $L(\Phi \circ c) = \int_I \|(\Phi \circ c)'\|_2 dt = \int_I \|d\Phi_{c(t)}c'(t)\|_2 dt \stackrel{\Phi \text{ iso.}}{=} \int_I \|c'\|_1 dt = L(c)$ .