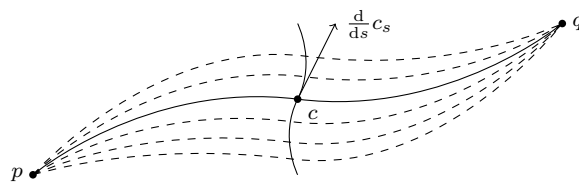


# Kapitel 9.

## Jacobifelder

Für  $p, q \in M$  sei  $\Omega_{pq}$  der Raum aller glatten Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$ .



**Definition 9.1** Eine (*glatte*) **Variation** einer glatten Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  ist eine glatte Abbildung

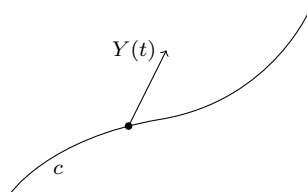
$$h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M \quad h_s(t) = h(s, t)$$

mit  $h_0 = c$ . Gilt  $h(\cdot, a) \equiv c(a)$  und  $h(\cdot, b) \equiv c(b)$ , so heißt  $h$  eine **Variation mit festen Endpunkten** oder **eigentliche Variation**. Man schreibt  $c_s$  für eine Variation  $h$  von  $c$ .

Ist  $c_s$  eine glatte Variation von  $c$ , so ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_s(t) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) = h_{*(0,t)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld entlang  $c$ . Ist  $c_s$  eigentlich, so gilt  $Y(a) = 0 \in T_{c(a)} M$  und  $Y(b) = 0 \in T_{c(b)} M$ .



Tatsächlich ist jedes Vektorfeld ein solches Variationsfeld einer Variation von  $c$ : Ist  $Y$  ein Vektorfeld entlang  $c$ , so definiert  $h(s, t) = \exp_{c(t)}(sY(t))$  eine Variation von  $c$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) &= \exp_{c(t)*0}(Y(t)) \\ &= \text{id}_{T_{c(t)} M}(Y(t)) = Y(t). \end{aligned}$$

Falls  $Y$  in den Endpunkten von  $c$  verschwindet, so ist die so definierte Variation eigentlich. Bestimme  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$  und  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \langle \nabla_s \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{dt} c_s, \dot{c}(s) \right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \dot{c}_s \right\rangle' - \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \nabla_t \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{1}{2\|c_s\|} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\ &= \frac{\langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle}{\|\dot{c}\|} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \frac{1}{2} \|\dot{c}_s\|^2 = \langle Y, \dot{c} \rangle|_a^b - \int_a^b \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle$$

Betrachte  $E : \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $c \in \Omega_{pq}$  genau dann eine Geodätische, wenn  $c$  ein kritischer Punkt von  $E$  ist, das heißt  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = 0$  für jede eigentliche Variation von  $c$ . Ist  $c$  ein kritischer Punkt von  $E$ , so sei  $c_s$  die von  $Y = f \nabla_t \dot{c}$  mit  $f(0) = 0 = f(1)$  erzeugte Variation. Dann ist  $c_s$  eigentlich und es gilt

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = - \int_a^b f \|\nabla_t \dot{c}\|^2$$

also  $\nabla_t \dot{c} = 0$ . Ist  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$$

Eine Kurve  $c \in \Omega_{pq}$  ist genau dann ein kritischer Punkt von  $\mathcal{L}$ , wenn  $c$  eine umparametrisierte Geodätische ist.

## 1. Ausblick: Hesse & Morse - Theorie

Sei  $f \in C^\infty(M)$ , sei nach Konvention  $\nabla_X f = X(f) = df(X)$ , und  $\nabla f = df \in \Omega^1(M) = \Gamma(TM^*)$ . Für die Hessesche  $H_f = \nabla^2 f$  gilt nach Proposition 7.3:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= (\nabla_X df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \quad (= \nabla_{X,Y}^2 \text{ in Kapitel 7}) \\ &= [X, Y]f + Y(Xf) - \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f}_{[X,Y] \text{ Torsionsfreiheit}} - (\nabla_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (\nabla_Y X)(f) = \nabla^2 f(Y, X) = H_f(Y, X) \end{aligned}$$

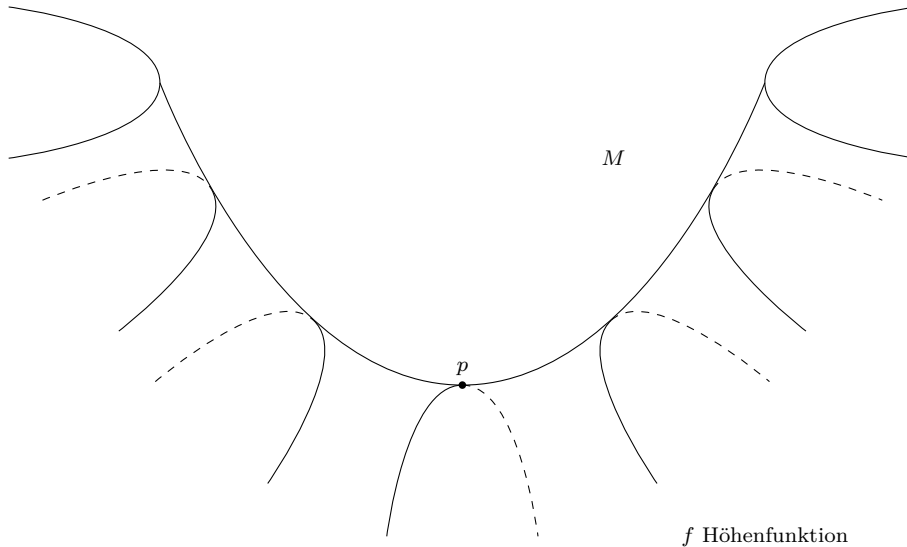
Die Hessesche ist also eine symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform  $H_f : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . Sie ist im Allgemeinen *nicht*  $C^\infty(M)$ -bilinear. Ist  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$ , das heißt  $df|_p = 0$ , dann hängt  $H_f|_p$  nur von  $\xi = X_p$  und  $\eta = Y_p$  ab: Ist  $\tilde{X}$  ein Vektorfeld mit  $\tilde{X}_p = \xi = X_p$ , so gilt:

$$\begin{aligned} H_f|_p(\tilde{X}, Y) &= \tilde{X}_p(Yf) - \underbrace{df|_p(\nabla_{\tilde{X}} Y)}_{=0} = \tilde{X}_p(Yf) = \xi(Yf) \\ &= X_p(Yf) = \dots = H_f|_p(X, Y) \end{aligned}$$

$H_f|_p$  ist eine Bilinearform auf  $T_p M$ . Insbesondere hängt  $H_f|_p$  nur von der differenzierbaren Struktur von  $M$  und *nicht* von der Riemannschen Struktur ab. Ist  $H_f$  nicht ausgeartet, so heißt die Anzahl der negativen Eigenwerte der **Index** von  $f$  in  $p$ . Ist  $v \in T_p M$  der Eigenvektor zu einem negativen Eigenwert  $k$  und  $\gamma$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dann gilt

$$0 > \lambda \|v\|^2 = H_f|_p(v, v) = v((f \circ \gamma)') = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

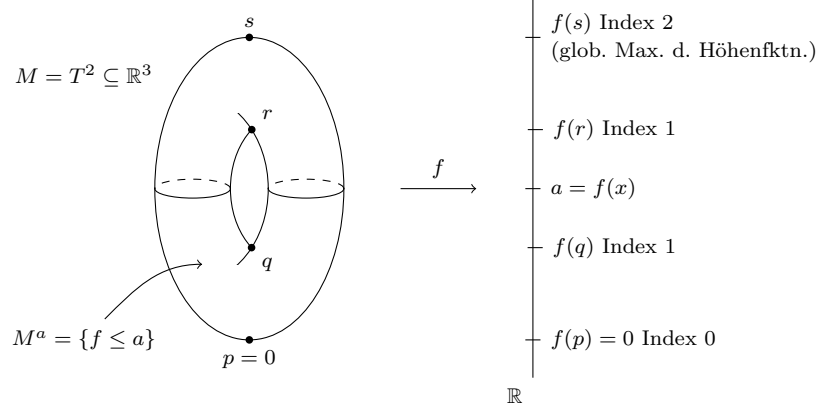
Entlang der Kurve  $\gamma$  nimmt  $f$  also ein striktes Maximum an.



Tatsächlich ist jeder nicht ausgeartete kritische Punkt von solcher Gestalt.

**Morse-Lemma** Es sei  $p \in M$  ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von  $f \in C^\infty(M)$  mit Index  $\alpha$ . Dann existiert eine Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$  und  $f = f(p) - (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2 - \dots - (\varphi^\alpha)^2 + (\varphi^{\alpha+1})^2 + \dots + (\varphi^m)^2$ .

**Morse-Theorie**



Die Topologien von  $M^a$  und  $M^b$  sind identisch, wenn zwischen  $a$  und  $b$  keine kritischen Werte auftreten. „Rekonstruktion“: Klebe sukzessive für die nicht ausgearteten kritischen Punkte  $p$  Zellen der Dimension  $\text{Ind}_f(p)$ , das heißt  $\mathbb{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^{\text{Ind}_f(p)}$ .

Auf jeder glatten Mannigfaltigkeit existiert eine sogenannte **Morse-Funktion**, das heißt eine Funktion mit isolierten kritischen Punkten, die alle nicht entartet sind und für die  $f^{-1}([a, b])$  kompakt ist. Ist  $f(p) = a$  ein kritischer Wert, so unterscheiden sich  $M^{a-\varepsilon}$  und  $M^{a+\varepsilon}$  durch das Ankleben einer  $\text{Ind}_f(p)$ -Zelle.

Weitere Informationen zu diesem Thema lassen sich im Buch „Morse Theory“ von J. Milnor [6] finden.

## 2. Zweite Ableitung des Energiefunktional (in kritischen Punkten)

Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische,  $c_s$  eine Variation von  $c$  und  $Y(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s(t)$ . Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{L}} \|\dot{c}_s\|^2 \\
 \frac{d}{ds} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \langle \nabla_s \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\
 \frac{d^2}{ds^2} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \nabla_s \dot{c}_s \right\rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\| \nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right\|^2 \\
 \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s &= \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s + R \left( \underbrace{\frac{d}{ds} c_s, \frac{d}{dt} c_s}_{s=0: Y(t)} \right) \frac{d}{ds} c_s
 \end{aligned}$$

Zur Übersichtlichkeit setzen wir nun  $\nabla_t Y =: Y'$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \left\langle \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + \langle R(Y, \dot{c}) Y, \dot{c} \rangle + \|\nabla_t Y\|^2 \\
 &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle' - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle + \|Y'\|^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} E(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left( \frac{1}{2\|\dot{c}_s\|} \frac{d}{ds} \|\dot{c}_s\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) - \frac{1}{4} \int_0^{\mathcal{L}} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Bezeichnet  $Y^\perp = Y - \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}$  den Normalenanteil von  $Y$  bezüglich  $\dot{c}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} Y^{\perp'} &= Y' - \langle \nabla_t \dot{c}, Y \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y \rangle \nabla_t \dot{c} \\ &= Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} = (Y')^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Y'^\perp\| - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle &= \langle Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c}, Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &\quad + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c} \rangle \\ &\quad + \langle R(\langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}, \dot{c}) \dot{c}, Y - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle \\ &= \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'^\perp\|^2 - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle$$

**Erinnerung** Für eine glatte Funktion  $f$  auf  $M$  gilt in kritischen Punkten  $p$ :

$$H_f(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

mit  $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ . Diese Eigenschaft verwenden wir in der folgenden Definition als Ausgangspunkt.

**Definition 9.2** Es sei  $Y$  ein Vektorfeld entlang einer nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Kurve  $c$  und  $c_s$  die von  $Y$  erzeugte Variation. Die durch

$$\mathcal{I}(Y, Y) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s)$$

auf dem Vektorraum der Vektorfelder entlang  $c$  definierte symmetrische Bilinearform heißt die **Indexform** von  $c$ .

Sind  $X, Y$  Vektorfelder entlang  $c$ , welche in den Endpunkten verschwinden, so gilt

$$\mathcal{I}(X, Y) = - \int_0^{\mathcal{L}} \langle X'' + R(X, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

denn bezeichnet  $c_s$  die von  $Y$  erzeugte eigentliche Variation, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y', Y \rangle' - \langle Y'', Y \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \langle Y', Y \rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'', Y \rangle + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle. \end{aligned}$$

Die Indexform um eine Geodätische  $c$  ist genau dann ausgeartet, wenn ein in den Endpunkten verschwindendes Vektorfeld entlang  $c$  existiert mit

$$Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c} \equiv 0. \quad (9.1)$$

**Definition 9.3** Ein Vektorfeld entlang einer Geodätischen  $c$  heißt **Jacobifeld**, wenn es die obige Differentialgleichung (9.1) erfüllt.

**Lemma 9.4** Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $p = c(0)$ . Dann existiert für alle  $v, w \in T_p M$  genau ein Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = v$ ,  $\mathcal{J}'(0) = w$ .

**Beweis** Es sei  $e_1, \dots, e_m \in T_p M$  eine Orthonormalbasis des Tangentialraums in  $p$  und es bezeichnen  $E_1, \dots, E_m$  die entlang  $c$  parallelen Vektorfelder mit  $E_i(0) = e_i$ . Dann ist jedes Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$  von der Form  $Y = \sum_i \eta^i E_i$  und es gilt:

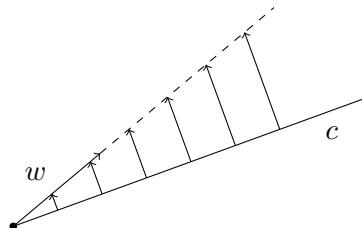
$$Y' = \sum_i (\dot{\eta}^i E_i + \eta^i \nabla_t E_i) = \sum_i \dot{\eta}^i E_i$$

sowie  $Y'' = \sum \ddot{\eta}^i E_i$ . Setzt man  $R(E_j, \dot{c}) \dot{c} = \sum_i \varrho_j^i E_i$ , so ist (9.1) zum System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{\eta}^i + \sum_j \eta^j \varrho_j^i = 0.$$

Existenz und Eindeutigkeit folgen mit der Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.  $\square$

**Beispiel (Jacobifelder des  $\mathbb{R}^n$ )** Die Geodätischen des  $\mathbb{R}^n$  sind genau die Geraden. Ein Vektorfeld  $Y$  entlang einer Geraden ist genau dann ein Jacobifeld, wenn  $Y'' = 0$  gilt; jedes solche ist der Form  $Y(t) = v + tw$ .



Sind die Startwerte eines Jacobifeldes tangential an  $c$ , etwa  $\mathcal{J}(0) = \lambda \dot{c}(0)$  und  $\mathcal{J}'(0) = \mu \dot{c}(0)$ , so gilt

$$\mathcal{J}(t) = (\lambda + t\mu)\dot{c}(t),$$

denn

$$\begin{aligned}\mathcal{J}''(t) &= \nabla_t(\mu \dot{c}(t) + (\lambda + t\mu) \underbrace{\nabla_t \dot{c}(t)}_{=0}) = \mu \nabla_t \dot{c} = 0, \\ R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}|_t &= (\lambda + t\mu)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0.\end{aligned}$$

Zu  $c$  tangentiale Jacobifelder tragen keine geometrischen Informationen; vgl. zweite Ableitung des Längenfunktional. Gilt für die Startwerte eines Jacobifeldes  $\mathcal{J}(0)$  und  $\mathcal{J}'(0) = \dot{c}(0)^\perp$

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle + \langle \mathcal{J}', \nabla_t \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also  $\mathcal{J}'(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle Zeiten  $t$  und  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$ , somit  $\mathcal{J}(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t$ .

Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Jacobifelder entlang einer Geodätischen  $c$  hat die Dimension  $2\dim(M)$  und die zu  $c$  normalen Jacobifelder bilden einen Vektorraum der Dimension  $2\dim(M) - 2$ .

**Satz 9.5** *Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische und  $c_s$  eine Variation von  $c$ , so dass alle Kurven  $c_s$  Geodätische sind. Dann ist das zugehörige Variationsfeld ein Jacobifeld entlang  $c$ . Jedes Jacobifeld ist von dieser Gestalt.*

**Beweis** Es sei  $c_s$  eine Variation von  $c$  und alle  $c_s$  seien Geodätische. Dann gilt:

$$\begin{aligned}Y'' &= \nabla_t \left( \nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla_t \left( \nabla_s \frac{d}{dt} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \underbrace{\nabla_s \nabla_t \frac{d}{dt} c_s}_{=0} + R \left( \underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}}, \underbrace{\frac{d}{ds} c_s}_{=Y} \right) \underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}} \Big|_{s=0} \\ &= -R(Y, \dot{c})\dot{c}\end{aligned}$$

Es sei umgekehrt  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld entlang  $c$ ,  $\gamma$  die durch  $\gamma(0) = c(0)$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{J}(0)$  definierte Geodätische, sowie  $V$  und  $W$  die entlang  $\gamma$  parallelen Vektorfelder mit  $V(0) = \dot{c}(0)$  und  $W(0) = \mathcal{J}'(0)$ . Dann ist

$$c_s(t) = \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$$

eine Variation von  $c$  und alle Kurven  $c_s$  sind Geodätische. Das zugehörige Variationsfeld  $Y = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_s$  ist nach dem oben Bewiesenen ein Jacobifeld. Es gilt

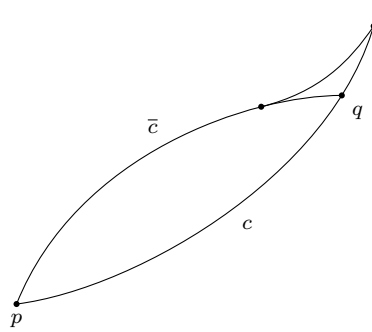
$$Y(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma(s) = \mathcal{J}(0).$$

und

$$\begin{aligned}
 Y'(0) &= \nabla_t \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_s \Big|_{t=0} \\
 &= \nabla_s \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) \Big|_{s=0} \\
 &= \nabla_s (V(s) + sW(s)) \Big|_{s=0} \\
 &= V'(0) + W(0) + 0W'(0) \\
 &= W(0) = \mathcal{J}'(0)
 \end{aligned}$$

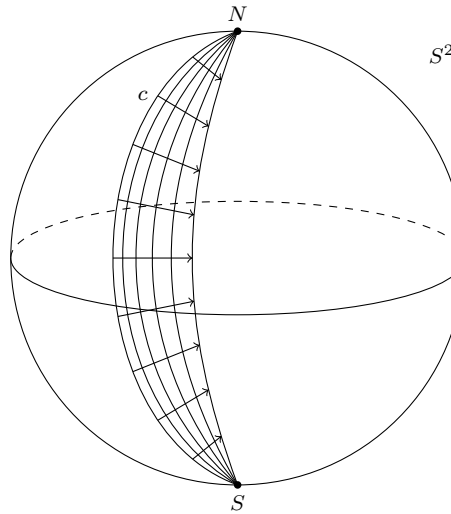
Nach Lemma 9.4 stimmen  $\mathcal{J}$  und  $Y$  überein. □

**Erinnerung (Korollar 8.12 (iii))** Die zusammengesetzte Kurve oben ist kürzer als die durchgezogene Kurve unten.



**Definition 9.6** Ein Punkt  $p \in M$  heißt zu  $q$  **konjugiert**, wenn  $q$  ein singulärer Wert von  $\exp_p$  ist.  $p$  heißt **konjugiert zu  $q$  entlang der Geodätischen  $c$** , wenn  $\exp_{p*\dot{c}(0)}$  singulär ist, das heißt  $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$ .

**Proposition 9.7** Ein Punkt  $p$  ist genau dann konjugiert zu  $q$  entlang einer Geodätischen  $c$ , wenn es ein nichttriviales Jacobifeld entlang  $c$  gibt, welches in den Endpunkten verschwindet.





**Beweis** Nach Satz 9.5 ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  von der Gestalt  $\mathcal{J}(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(t(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)))$ , oder allgemein  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$ . Es gilt dann

$$\mathcal{J}(1) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)) = \exp_{p*\dot{c}(0)}(\mathcal{J}'(0))$$

Damit existiert genau dann ein nichttriviales Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$ ,  $\mathcal{J}(1) = 0$ , wenn  $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$ .  $\square$

**Bemerkung** 1) Der Raum der nichttrivialen Jacobifelder mit verschwindenden Endpunkten entlang  $c$  hat genau die Dimension  $\dim \text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)}$ .

2) Ist  $p$  konjugiert zu  $q$ , so ist  $q$  konjugiert zu  $p$ .

3) Für jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(1)$  gilt  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$ , denn

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also ist  $\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle'$  konstant. Ferner gilt  $\langle \mathcal{J}(0), \dot{c}(0) \rangle = 0 = \langle \mathcal{J}(1), \dot{c}(1) \rangle$ , also ist  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle \equiv 0$ .

4) Sind  $p$  und  $q$  nicht entlang  $c$  zueinander konjugiert, dann ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  eindeutig durch  $\mathcal{J}(0)$  und  $\mathcal{J}(1)$  bestimmt, denn sind  $\mathcal{J}$  und  $\tilde{\mathcal{J}}$  Jacobifelder mit identischen Randwerten, so ist  $\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}}$  ein Jacobifeld welches in den Endpunkten verschwindet.

5) Zwei Punkte sind genau dann konjugiert entlang der Geodätischen  $c$ , wenn eine eigentliche geodätische Variation von  $c$  existiert.

**Satz 9.8** Es seien  $p, q \in M$  und sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische von  $p$  nach  $q$ .

(i) Ist entlang  $c$  kein Punkt zu  $p$  konjugiert, dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $c$  in  $\Omega_{pq}$ , so dass  $\mathcal{L}(\tilde{c}) > \mathcal{L}(c)$  und  $E(\tilde{c}) \geq E(c)$  für alle  $\tilde{c} \in U$  gelten.

(ii) Falls ein  $t_0 \in (0, 1)$  existiert, so dass  $p = c(0)$  zu  $c(t_0)$  entlang  $c$  konjugiert ist, so existiert eine eigentliche Variation  $c_s$  von  $c$  mit  $\mathcal{L}(c_s) < \mathcal{L}(c)$  und  $E(c_s) < E(c)$  für hinreichend kleine  $s$ .

**Lemma 9.9 (globales Gauß Lemma)** Es seien  $v, w \in T_p M$  und  $c(t) = \exp_p(t \cdot v)$ . Dann gilt

$$\langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Inbesondere ist jede Geodätische in  $p$  orthogonal zu der Abstandssphäre

$$S_r(p) = \{q \mid d(p, q) = r\}.$$

**Beweis**  $Y$  sei das durch die Startwerte  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = \frac{w}{t}$  bestimmte Jacobifeld entlang  $c$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) & \gamma(0) &= p, \dot{\gamma}(0) = Y(0) = 0 \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p\left(t\left(v + s\frac{w}{t}\right)\right) & V(s) &= V(0) = \dot{c}(0) = v \\ &= \exp_{p*tv}(w) & W(s) &= \dots = \frac{w}{t} \end{aligned}$$

Es sei  $\frac{w}{t} = \lambda v + u$  mit  $u \perp v$ . Der zu  $c$  tangential Anteil von  $Y$  ist dann

$$Y^T(s) = \lambda s \dot{c}(s),$$

denn  $Y^{T''} = 0$  und  $R(Y^T, \dot{c})\dot{c} = \lambda s R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$ . Also gilt  $Y(t) = \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t)$ , wobei  $Y^\perp$  der zu  $c$  orthogonale Anteil von  $Y$  ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{d}{dt} \exp_p(tv)}_{=c}, Y(t) \right\rangle \\ &= \langle \dot{c}(t), \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t) \rangle \\ &= \lambda t \|\dot{c}(t)\|^2 = \lambda t \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, t(\lambda v + w) \rangle = t\lambda \|v\|^2 \quad \square$$

**Lemma 9.10** *Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $v = \dot{c}(0) \in T_p M$  und  $\psi$  (stückweise) glatte Kurve in  $T_p M$  mit  $\psi(0) = 0$  und  $\psi(1) = v$ , dann gilt*

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \mathcal{L}(c),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\psi$  eine monotone Reparametrisierung von  $t \mapsto tv$  ist.

**Beweis** Es seien  $\varrho$  und  $\vartheta$  glatt, so dass  $\psi = \varrho\vartheta$  mit  $\|\vartheta\| \equiv 1$  (Polarkoordinaten).

$$\begin{aligned} \|(\exp_p \circ \psi)'\|^2 &= \|\exp_{p*\varrho\vartheta}(\varrho'\vartheta + \varrho\vartheta')\|^2 \\ &= \varrho'^2 \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta) \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta \rangle = 1} \\ &\quad + 2\varrho\varrho' \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = \frac{1}{2}\|\vartheta\|^{2'} = 0} \\ &\quad + \varrho^2 \langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta'), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle \\ &= \varrho'^2 + \varrho^2 \|\exp_{p*\psi}(\vartheta')\|^2 \end{aligned}$$

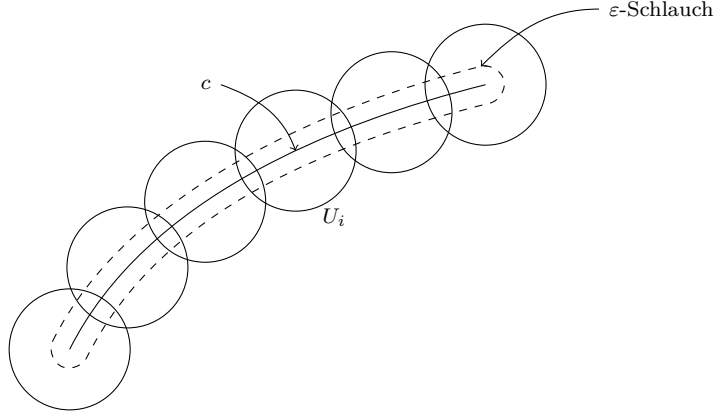
Damit folgt

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \int_0^1 |\varrho'| \geq |\varrho(1) - \varrho(0)| = \|v\| = \mathcal{L}(c)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vartheta$  konstant und  $\varrho$  monoton ist.  $\square$

**Beweis (von Satz 9.8)** (i) Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische, seien  $p = c(0)$  und  $q = c(1)$  und es existieren keine zu  $p$  konjugierten Punkte entlang  $c$ . Es bezeichne  $\varphi: [0, 1] \rightarrow T_p M$  mit  $\varphi(t) = tv$ . Für jedes  $t \in [0, 1]$  ist nach Voraussetzung  $\exp_{p*\varphi(t)}$  regulär, also eine lokaler Diffeomorphismus. Es sei  $\{W_i\}$  eine endliche offene Überdeckung von  $\varphi([0, 1])$ , so dass  $\exp_p|_{W_i}: W_i \rightarrow \exp_p(W_i) = U_i$  ein Diffeomorphismus ist.

*Ziel:* Lifte Variationen von  $M$  nach  $T_p M$ .



Es sei  $t_i$  eine Partition von  $[0, 1]$ , so dass  $\varphi([t_{i-1}, t_i]) \subseteq W_i$ . Ist  $c_s$  eine Variation von  $c$ , so kann  $\varepsilon > 0$  so gewählt werden, dass

$$c_s: [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i = \exp_p(W_i)$$

gilt. Dies definiert eine Variation  $\psi_s$  von  $\varphi$  wie folgt: Ist  $\psi_s$  bis  $t_{i-1}$  definiert und gilt  $\psi_s(t_{i-1}) \in W_i$ , so setzt man  $\psi_s(t) = \exp_p|_{W_i}^{-1}(c_s(t))$ . Nach Lemma 9.10 gilt also

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi_s) = \mathcal{L}(c_s) \geq \mathcal{L}(c)$$

für alle  $s$ . Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt dann:

$$E(c_s) \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c_s)^2 \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c)^2 = E(c)$$

(ii) Es sei  $c(t_0)$  entlang  $c$  zu  $p = c(0)$  konjugiert.

**Behauptung:** Dann existiert ein zu  $c$  orthogonales Vektorfeld  $Y$  entlang der Geodätischen  $c$  mit  $Y(0) = 0$ ,  $Y(1) = 0$  und  $\mathcal{I}(Y, Y) = 0$ .

Dann gilt für die zugehörige eigentliche Variation  $c_s$  von  $c$ :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \lambda \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(c_s) = 0$$

und, da  $Y$  normal ist,

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(c_s) = \mathcal{I}(Y, Y) < 0$$

Somit ist  $c$  lokales Maximum.

**Beweis der Behauptung:** Es existiert ein nichttriviales (zu  $c$  orthogonales) Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c|_{[0, t_0]}$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J}(t_0) = 0$ . *Erinnerung:* Ist  $c \in \Omega_{pq}$  eine Geodätische und  $t_0 \in (0, 1)$ , so dass  $c(t_0)$  zu  $p = c(0)$  entlang  $c$  konjugiert ist, so existiert ein Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{I}(Y, Y) < 0$ .

*Beweis der Existenz von  $Y$ :* Da  $c(t_0)$  zu  $p$  entlang  $c$  konjugiert ist, existiert ein nichttriviales Jacobifeld  $J$  entlang  $c|_{[0, t_0]}$  mit  $J(0) = 0$ ,  $J(t_0) = 0$ .

Es sei  $X$  das entlang  $c$  parallele Vektorfeld mit  $X(t_0) = -J'(t_0)$  (nach Lemma 9.4 ist  $J'(t_0) \neq 0$ ) und  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$  und  $\alpha(t_0) = 1$ . Für  $z = \alpha \cdot X$  und  $\eta > 0$  sei

$$Y(t) = \begin{cases} J(t) + \eta \cdot Z(t) & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ \eta \cdot Z(t) & \text{für } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

$Y$  ist nun stückweise glatt, die Variationsformeln für  $\mathcal{L}$  und  $E$ , beziehungsweise die Indexform lassen sich aber ganz analog für stückweise glatte Vektorfelder beziehungsweise Variationen formalisieren. Es gilt, da  $Y$  orthogonal zu  $c$  ist, für die zu  $Y$  gehörigen Variationen  $c_s$ :

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) \\ &= \int_0^1 \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ &\quad + 2\eta \int_0^{t_0} \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \\ &\quad + \eta^2 \int_0^1 \langle Z', Z' \rangle - \langle R(Z, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

und mit

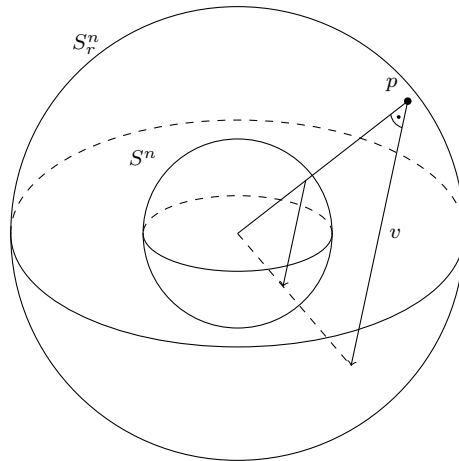
$$\begin{aligned} \langle J', J \rangle' &= \langle J', J' \rangle + \langle J'', J \rangle \\ &= \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ \langle J', Z \rangle' &= \langle J', Z' \rangle + \langle J'', Z \rangle \\ &= \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \langle J', J \rangle \Big|_0^{t_0} + 2\eta \langle J', Z \rangle \Big|_0^{t_0} + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= 0 + 2\eta (\langle J'(t_0), Z(t_0) \rangle - \langle J'(0), Z(0) \rangle) + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= -2\eta \|J'(t_0)\|^2 + \eta^2 J(Z, Z) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines  $\eta > 0$  ist damit  $\mathcal{J}(Y, Y) < 0$ . □

Betrachte die Sphäre vom Radius  $r > 0$ ,  $S_r^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ :



Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist  $S_r^n$  diffeomorph zur Standardsphäre  $S^n = S_1^n$ , vermöge der Abbildung  $p \mapsto \frac{1}{r}p$ . Bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ , die von  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf  $S_r^n$  induzierte Riemannsche Metrik, so sind  $(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$  und  $(S^n, r^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  isometrisch. Es folgt

also  $\text{diam}(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r) = \pi r = r \text{diam}(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ . Für die Schnittkrümmung einer von  $v, w \in T_p M$  aufgespannte Ebene

$$\begin{aligned} \sec_p^{S_r^n}(\{v, w\}) &= \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle_r}{\|v\|_r^2 \|w\|_r^2 - \langle v, w \rangle_r} = \frac{r^2 \langle R(v, w)w, v \rangle_1}{r^4 (\|v\|_1^2 \|w\|_1^2 - \langle v, w \rangle_1)} \\ &= \frac{1}{r^2} \sec_p^{S^n}(\{v, w\}) = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Ricci-Krümmung:

$$\begin{aligned} \text{ric}_p^{S_r^n}(v, v) &= \sum_i \left\langle R\left(e_i, \frac{v}{\|v\|_1}\right) \frac{v}{\|v\|_1}, e_i \right\rangle \\ &= \|v\|_1^2 \sum_{i \geq 2} \sec_p^{S_r^n}(\{v, e_i\}) = \|v\|_1^2 \frac{1}{r^2} (n-1) \\ &= (n-1) \frac{1}{r^2} \langle v, v \rangle_1. \end{aligned}$$

wobei  $\{\frac{v}{\|v\|_1}, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis ist.

**Satz 9.11 (Bonnet-Myers)** *Es sei  $(M, g)$  eine vollständige  $m$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit*

$$\text{ric}_p \geq (m-1) \frac{1}{r^2} g$$

*für ein  $r > 0$ . Dann gilt*

$$\text{diam}(M, g) \leq \pi r = r \text{diam}(S^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_1).$$

*Insbesondere ist  $M$  kompakt.*

**Beweis** Es sei  $l < \text{diam}(M, g)$ . Dann existieren  $p, q \in M$  mit  $(p, q) = l$  und nach dem Satz von Hopf-Rinow eine minimale Geodätische  $c: [0, l] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ . Für jedes Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$ , welches in den Endpunkten verschwindet, ist  $J(Y, Y) \geq 0$ . Es sei  $\dot{c}(0) = e_1, \dots, e_m \in T_p M$  eine Orthonormalbasis und  $E_i$  die entlang  $c$  parallelen Vektorfelder mit  $E_i(0) = e_i$  für  $i \leq m$ . Für

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \\ 0 \leq J(Y_i, Y_i) &= - \int_0^l \langle Y_i'' + R(Y_i, \dot{c})\dot{c}, Y_i \rangle \\ &= - \int_0^l \left\langle -\frac{\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) + \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) R(E_i, \dot{c})\dot{c}, \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \right\rangle \\ &= \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \langle R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_i(t) \rangle \right). \end{aligned}$$

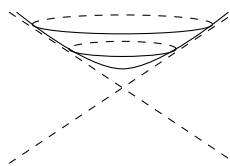
Es folgt

$$0 \leq \sum_{i \geq 2} J(Y_i, Y_i) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \underbrace{\left( (m-1) \frac{\pi^2}{l^2} - \text{ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \right)}_{\leq (m-1) \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$$

und somit  $\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \geq 0$ , also  $l \leq \pi r$ . □

**Bemerkung** (1) Die Existenz einer uniformen positiven Krümmungsschranke ist entprechend

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$$



Dies ist nicht  $\mathbb{H}^2$

Es gilt:

$$\sec_x(M, g) = \frac{1}{\|x\|^4}$$

also  $\sec > 0$ , aber  $\sec_x \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} 0$  und  $M$  ist nicht kompakt.

- (2) Die Durchmesserschranke im Satz von Bonnet-Myers ist scharf in dem Sinne, dass falls  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (m - 1)\frac{1}{r^2}$  ist und  $\text{diam}(M, g) = \pi r$  gilt, so folgt  $(M, g)$  ist isometrisch zu  $S_r^m$ . (Cheng, 1975 [3])

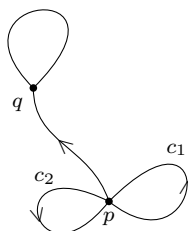
### 3. Exkurs: Überlagerungen, Fundamentalgruppe und Gruppenwirkungen

**Erinnerung** Zwei Wege, stetige Abbildungen,  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow M$  heißen **homotop**, wenn eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

existiert mit  $H(0, \cdot) = c_0$  und  $H(1, \cdot) = c_1$ . Gilt  $H(\cdot, 0) \equiv c_0(0) = c_1(0) = p$  und  $H(\cdot, 1) \equiv c_0(1) = c_1(1) = q$ , so heißt  $H$  eigentlich.

**Bemerkung** Sind zwei glatte Wege homotop, so kann eine glatte Homotopie gewählt werden. Die **Fundamentalgruppe**  $\pi_1(M, p)$  ist die Menge der Homotopieklassen von Wegen  $c \in \Omega_{pq}$  bezüglich eigentlicher Homotopien mit der durch die Verkettung von Wegen induzierten Gruppenstruktur.



Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit sind  $\pi_1(M, p)$  und  $\pi_1(M, q)$  isomorph, schreibe  $\pi_1(M)$ . Eine Mannigfaltigkeit heißt **einfach zusammenhängend**, falls  $M$  zusammenhängend ist und  $\pi_1(M) = 0$  gilt.

Eine glatte Abbildung  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  heißt **Überlagerung**, wenn für alle  $p \in M$  eine Umgebung  $U$  existiert, so dass  $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup} U_i$  eine disjunkte Vereinigung offener Mengen  $U_i$  ist und für alle  $U_i : \pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist. Sind  $M$  und  $\tilde{M}$  Riemannsch, so heißt eine Überlagerung  $\pi$  **Riemannsche Überlagerung**, falls  $\pi$  eine lokale Isometrie ist.

**Proposition 9.12** *Es seien  $M$  und  $\tilde{M}$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten,  $\tilde{M}$  vollständig und  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine lokale Isometrie. Dann ist  $\pi$  eine Riemannsche Überlagerung.*

**Beweis** Für  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  seien  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ ,  $\tilde{v} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(v) \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  und  $\tilde{c}$  die Geodätische von  $\tilde{M}$  mit  $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ ,  $\dot{\tilde{c}}(0) = \tilde{v}$ . Dann existiert  $\tilde{c}$  für alle Zeiten. Da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist, ist  $c = \pi \circ \tilde{c}$  eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Geodätische von  $M$  mit  $c(0) = \pi(\tilde{p}) = p$  und  $\dot{c}(0) = \pi_{*\tilde{p}}(\dot{\tilde{c}}(0)) = v$ . Nach dem Satz 8.11 von Hopf-Rinow ist  $M$  damit vollständig. Es sei  $p = \pi(\tilde{p})$  und sei  $q \in M$ . Dann existiert eine Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ . Es sei  $\tilde{c}$  die Geodätische in  $\tilde{M}$  mit  $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$  und  $\dot{\tilde{c}} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(\dot{c}(0))$ . Dann gilt  $\pi \circ \tilde{c} = c$  und  $\pi(\tilde{c}(1)) = c(1) = q$ . Damit ist  $\pi$  surjektiv. Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}_\varepsilon(0_{\tilde{p}}) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} & \mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}) \\
 \pi_{*\tilde{p}} \downarrow & \# & \downarrow \pi \\
 T_p M \supseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0_p) & \xrightarrow{\exp_p} & \mathbb{B}_\varepsilon(p) \subseteq M
 \end{array}
 \quad \tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$$

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist  $\exp$  ein Diffeomorphismus und das folgende Diagramm kommutiert. Damit ist  $\pi|_{\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p})}$  ein Diffeomorphismus. Wären für  $\tilde{p}_1$  und  $\tilde{p}_2$  die  $\varepsilon$ -Bälle nicht disjunkt und es existiere eine nichttriviale Geodätische der Länge  $< 2\varepsilon$  von  $\tilde{p}_1$  nach  $\tilde{p}_2$  und damit eine Geodätische von  $p$  nach  $p$  der Länge  $< 2\varepsilon$ , also in  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ . Also sind  $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_1)$  und  $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_2)$  für  $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$  disjunkt.  $\square$

**Proposition 9.13** *Es seien  $\tilde{M}$  und  $M$  zusammenhängenden Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine Riemannsche Überlagerung. Dann ist  $\tilde{M}$  genau dann vollständig, wenn  $M$  vollständig ist.*

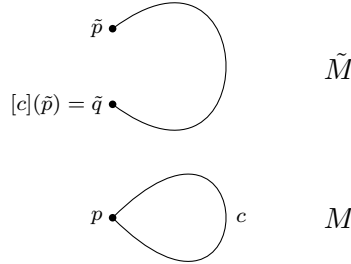
**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Folgt nach Proposition 9.12

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $M$  vollständig und  $\tilde{p}_i$  eine Cauchy-Folge in  $\tilde{M}$ . Dann ist  $p_i = \pi(\tilde{p}_i)$  auch eine Cauchy-Folge, denn  $\pi$  ist 1-Lipschitz, konvergiert also gegen  $p \in M$ . Dann liegen fast alle  $p_i$  in einer Umgebung  $U$ , so dass  $\pi|_{U_k} : U_k \rightarrow U$  eine Isometrie ist. Sei  $U_k$  so, dass fast alle  $\tilde{p}_i$  in  $U_k$  liegen. Dann konvergiert  $\tilde{p}_i$  gegen  $\tilde{p} \in U_i$ , mit  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ .  $\square$

Für jede zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  existiert eine bis auf Isometrie eindeutige einfach zusammenhängende Riemannsche Überlagerung  $\tilde{M}$ . Betrachte die topologisch universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  von  $M$ . Zieht man die differenzierbare und geometrische Struktur von  $M$  auf  $\tilde{M}$  zurück, so wird  $\tilde{M}$  zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung zu einer Riemannschen Überlagerung,

*Problem:* Es ist nicht klar, warum  $\tilde{M}$  eine abzählbare Basis der Topologie hat. Es gibt dabei zwei Auswege, zum Einen kann man zeigen dass  $\pi_1(M)$  abzählbar ist (Diplomarbeit von M. Herrmann), die andere Möglichkeit ist in „Foundations of Differential Geometry“, Band I, Appendix 2 [4] beschrieben.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen:



Jede Decktransformation ist glatt, also ein Diffeomorphismus, und sogar eine Isometrie, da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist. Jedes Element von  $\pi_1(M)$  induziert eine Isometrie von  $\tilde{M}$ .

## 4. Wirkung diskreter Gruppen

Es seien  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $X$  eine Menge. Eine **Wirkung** von  $\Gamma$  auf  $X$ , geschrieben  $\Gamma \curvearrowright X$ , ist ein Gruppenhomomorphismus  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Sym}(X)$ , schreibe  $\varrho(\gamma)(x) = \gamma.x$ , und insbesondere gilt  $\gamma.(\delta.x) = (\gamma\delta).x$  und  $1_\Gamma.x = x$ . Ist  $\Gamma \curvearrowright X$  eine Wirkung, so bezeichnet  $\Gamma.x = \{\gamma.x \mid \gamma \in \Gamma\}$  die **Bahn** oder den **Orbit** von  $x$  und  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.x = x\}$  die **Isotropieuntergruppe** von  $\Gamma$  in  $x$ . Jede Wirkung induziert eine Äquivalenzklassenrelation auf  $X$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma.x = y \Leftrightarrow y \in \Gamma.x$$

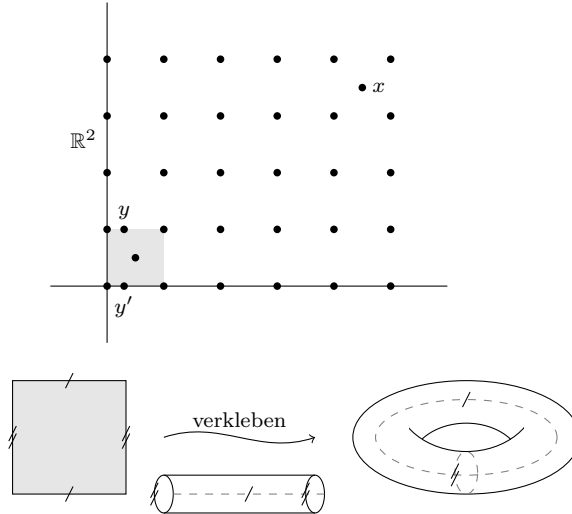
Die Äquivalenzklasse  $[x]_\sim$  ist also genau die Bahn durch  $x$ . Der Quotient  $X/\Gamma = x/\sim = \bigcup \Gamma.x$  heißt **Bahnenraum** der Wirkung, die Abbildung  $X \rightarrow X/\Gamma, x \mapsto [x]_\sim$  die **kanonische Projektion**. Eine Wirkung heißt **frei**, wenn für alle  $x \in X$   $\Gamma_x = \{1_\Gamma\}$  gilt. Es sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine glatte oder isometrische Wirkung, das heißt  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$  oder  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Iso}(M)$ . Eine solche Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich**, wenn für jedes Kompaktum  $K \subseteq M$  mit  $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.K \cap K \neq \emptyset\} < \infty$ ; in diesem Fall ist  $M/\Gamma$  hausdorffsch. Ist diese Wirkung zudem frei, so ist der Bahnenraum  $M/\Gamma$  in natürlicher Weise eine (Riemannsche) Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  eine Riemannsche Überlagerung.

**Beispiel 9.14** (1) Ist  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine universelle Riemannsche Überlagerung, so ist  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  frei und eigentlich diskontinuierlich und isometrisch, der Quotient  $\tilde{M}/\pi_1(M)$  ist isometrisch zu  $M$ .

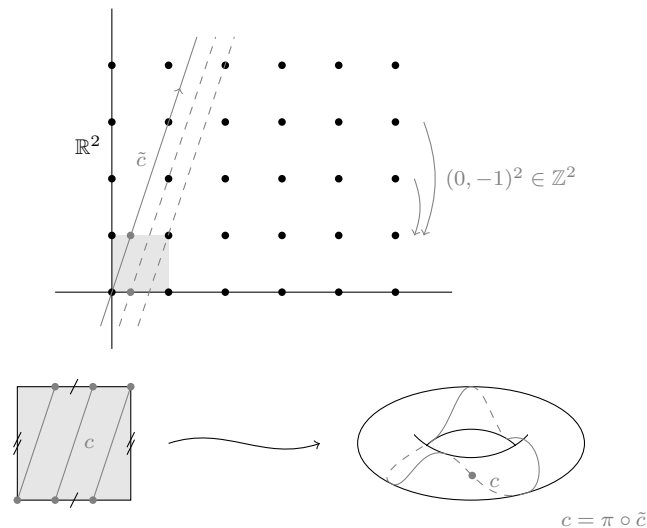


- (2) Betrachte die Wirkung  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  durch Translationen  $(a, b) \cdot (x, y) = (x + a, y + b)$ . Die Wirkung von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist isometrisch, frei und eigentlich diskontinuierlich.

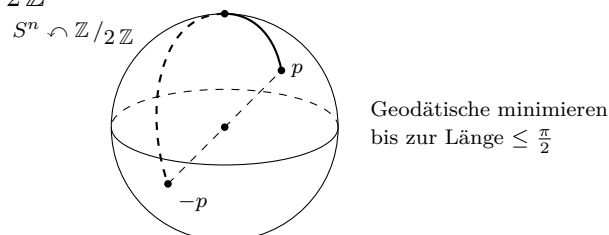
**Beweis** Der Quotient  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  ist diffeomorph zum Torus  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Die glatte Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ ,  $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$  faktorisiert über die Wirkung und induziert einen Diffeomorphismus.



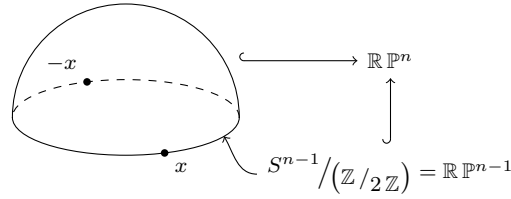
Die durch die Wirkung auf  $T^2$  induzierte Metrik ist flach, in dem Sinne dass die Krümmung konstant Null ist. Die Geodätischen des flachen Torus sind genau die Bilder von Geodätischen des  $\mathbb{R}^2$ , also von Geraden, unter der kanonischen Projektion.



- (3) Der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum  $\mathbb{RP}^n$ : betrachte  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ ,  $\gamma \cdot p = -p$ ,  $\gamma \neq 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .



$$\mathbb{R}P^n = S/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



Es sei  $(M, g)$  vollständig und  $\text{ric}_{(M, g)} \geq (n-1)\frac{1}{r^2}g$  für ein  $r > 0$ . Dann erfüllt auch  $\tilde{M}$  diese Voraussetzungen; insbesondere ist  $\tilde{M}$  (ebenfalls) kompakt. Da  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, gilt

$$\#\pi(M) = \#\{\gamma \in \pi_1(M) \mid \gamma \cdot \tilde{M} \cap \tilde{M} \neq \emptyset\} < \infty$$

**Korollar (zum Satz von Bonnet-Myers)** Unter den Voraussetzungen des Satzes hat  $M$  eine endliche Fundamentalgruppe.

**Satz 9.15 (Hadamard-Cartan)** *Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{sec}_{(M, g)} \leq 0$ . Dann ist für alle  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{sec} \leq 0$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m$ .*

**Beweis** Es sei  $c$  eine Geodätische und  $Y$  ein Jacobifeld entlang  $c$  mit  $Y(0) = 0$ . Dann gilt für  $f(t) = \|Y(t)\|^2$ :

$$f'(0) = 2\langle Y'(0), Y(0) \rangle = 0$$

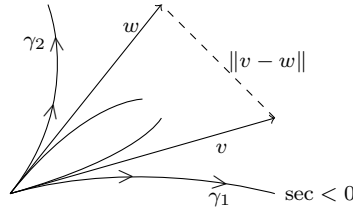
und

$$\begin{aligned} f'' &= 2(\langle Y'', Y \rangle + \langle Y', Y' \rangle) \\ &= 2(\|Y'\|^2 - \underbrace{\langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle}_{=\lambda \text{sec}(\dot{c}, Y) \leq 0}) \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $f$  nichtnegativ und konvex. Wäre  $Y$  ein nichttriviales Jacobifeld, welches in Punkten 0 und  $t_0$  verschwindet, so folgte aus  $f(0) = 0$  und  $f(t_0) = 0$ , dass  $f$ , und damit  $Y$  verschwindet. Somit existieren auf  $M$  keine zueinander konjugierten Punkte. Die Exponentialabbildung ist also ein lokaler Diffeomorphismus. Die Metrik  $\tilde{g} = \exp_{p*}(g)$  auf  $T_p M$  ist nach dem Gauß-Lemma und dem Satz von Hopf-Rinow vollständig. Nach Proposition 9.12 ist damit  $\exp_p(T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine Riemannsche Überlagerung.  $\square$

**Erinnerung (Blatt 12, Aufgabe 2)** Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  Geodätische mit  $\gamma_i(0) = p$ ,  $v = \dot{\gamma}_1(0)$ ,  $w = \dot{\gamma}_2(0)$  und  $\mathcal{L}(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= t\|v - w\| \left( 1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) \\ \left( 1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) &\begin{cases} > 1 & \text{für } \text{sec} < 0 \\ = 1 & \text{für } \text{sec} = 0 \\ < 1 & \text{für } \text{sec} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

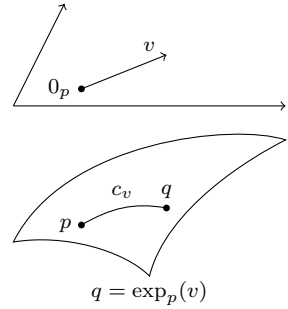


**Ziel:** Wir suchen ein globales Analogum.

## 5. Krümmungsschranken und Trigonometrie

Es bezeichne  $d_p$  die Abstandsfunktion  $d_p(q) = d(p, q)$ . Diese ist, in einer punktierten Umgebung von  $p$ , glatt und es gilt  $d_p(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|$ . Es folgt dann

$$\begin{aligned} X(d_p)(q) &= \frac{d}{dt} \|\exp_p^{-1}(\exp_p(tX))\| \\ &= \frac{1}{\|\underbrace{\exp_p^{-1}(q)}_{=v}\|} \langle \exp_{p*}^{-1}(X), v \rangle \\ &\stackrel{\text{G.L.}}{=} \frac{1}{\|v\|} \langle X, \underbrace{\exp_{p*v}(v)}_{\dot{c}_v(1)} \rangle \quad (\text{nach Gauß-Lemma}) \end{aligned}$$



Für eine glatte Funktion  $f$  heißt das durch  $X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle$  definierte Vektorfeld der **Gradient** von  $f$ . Es ist  $X(f) = df(X)$  und  $\langle \text{grad } f, \cdot \rangle = df$ . Für den Gradienten von  $d_p$  gilt nach der obigen Rechnung:

$$\text{grad } d_p = \frac{\exp_{p*v}(v)}{\|v\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(0)\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(1)\|},$$

also  $\|\text{grad } d_p\| \equiv 1$ . Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  offen in  $M$ , heißt **lokale Abstandsfunktion**, wenn  $\|\text{grad } f\| \equiv 1$  gilt. Für  $p \in U$  sei  $c_p$  die Integralkurve von  $\text{grad } f$  mit  $c_p(f(p)) = p$ . Ist  $c$  eine (stückweise) glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ , so gilt

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| \stackrel{C.S.}{\geq} \left| \int_0^1 \langle \text{grad } f, \dot{c} \rangle \right| = |f(q) - f(p)|$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $c$  eine monotone Reparametrisierung von  $c_p$  ist. Damit ist  $c_p$  eine (minimale) Geodätische, welche die Niveaumengen von  $f$  durchläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle \end{aligned}$$

und mit  $\|\text{grad } f\| \equiv 1$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} X \|\text{grad } f\|^2 \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \\ &= H_f(X, \text{grad } f). \end{aligned}$$

Für ein  $r \in \mathbb{R}$  sei  $M_r = f^{-1}(r)$  eine Niveaufäche von  $f$ . Ist  $X$  tangential zu  $M_r$ , das heißt existiert eine Integralkurve  $\gamma$  von  $X$  in  $M_r$ , dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\gamma(t))) = X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle,$$

also ist  $\text{grad } f$  orthogonal zu  $M_r$ . Für zu  $M_r$  tangentialen Vektorfelder  $X$  und  $Y$  gilt dann

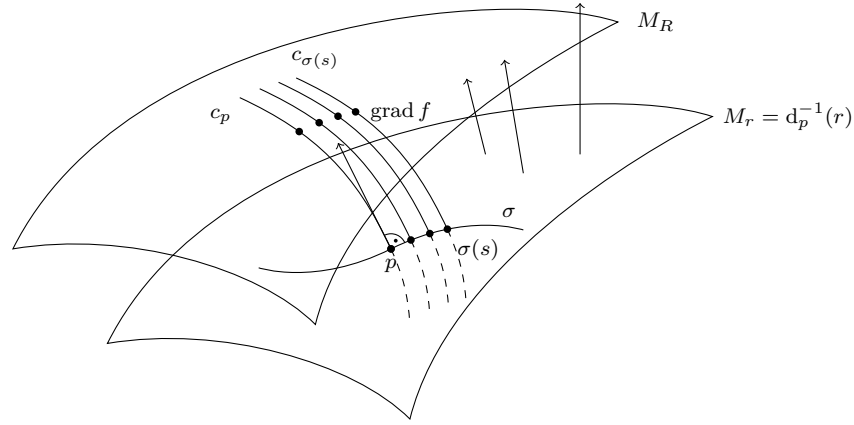
$$0 = X \langle \text{grad } f, Y \rangle = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$$

also  $H_f(X, Y) = -\langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$ . Für  $p \in U$  wird durch  $X \mapsto \nabla_X \text{grad } f$  ein linearer Endomorphismus  $A_p : \text{grad } f^\perp \rightarrow \text{grad } f^\perp$  definiert. Es bezeichne

$$A_t = A_{c_p(t)} : \dot{c}_p(t)^\perp \rightarrow \dot{c}_p(t)^\perp$$

$\text{grad } f|_{c_p(t)}$

eine Einschränkung auf  $c_p$ . Es sei  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_r$  eine glatte Kurve mit  $\sigma(0) = p$ .



Dann ist  $(t, s) \mapsto c_{\sigma(s)}(t)$  glatt und für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  ist dann  $c_{\sigma(s)}$  eine Geodätische durch  $\sigma(s)$ ; also ist  $c_s = c_{\sigma(s)}$  eine geodätische Variation von  $c_0 = c_p$ . Es bezeichne  $\mathcal{J}$  das zugehörige Jacobifeld entlang  $c_p$  mit  $\mathcal{J}'(t) = A_t \cdot \mathcal{J}(p)$ .

Sei  $f = d_p$  die Abstandsfunktion zu  $p \in M$  und  $c$  eine Geodätische von  $p$  nach  $q = c(r)$  (nicht konjugiert zu  $c$ ), das heißt  $q \in M_r = d_p^{-1}(r)$ . Dann ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$  von obiger Gestalt:  $\mathcal{J}$  wird von einer geodätischen Variation  $c_s$  erzeugt. Jede Geodätische  $t \mapsto c_s(t)$  ist minimierend, also

- $c_s(r) \in M_r = d_p^{-1}(r)$
- $d_p(c_s(t)) = t \Rightarrow c_s$  ist eine Integralkurve von  $\text{grad } d_p$

Für  $\sigma(s) = c_s(r)$  stimmt dann  $\mathcal{J}$  mit obiger Konstruktion überein.

$$A' \mathcal{J} = (A \mathcal{J})' - A \mathcal{J}' = \mathcal{J}'' - A^2 \mathcal{J} = -R(\mathcal{J}, \dot{c}) \dot{c} - A^2 \mathcal{J}$$

Setzt man  $R_t = R(\cdot, \dot{c}) \dot{c}$ , so gilt

$$A'_t + A_t^2 + R_t = 0,$$

die sogenannte **Riccatigleichung**. Ist  $E$  ein entlang  $c$  paralleles Vektorfeld mit  $\|E\| = 1$  und  $E \perp \dot{c}$ , so gilt

$$\langle AE, E \rangle' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c}) \dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle = -\sec(E, \dot{c}) - \|AE\|^2$$

Ist die Krümmung von  $(M, g)$  nach unten beschränkt,  $\sec_{(M, g)} \geq \kappa$ , so folgt die sogenannte **Riccatiungleichung**:

$$\langle AE, E \rangle' = -\sec(E, i) - \|AE\|^2 \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2$$

Setzt man  $a = \langle AE, E \rangle$ , so gilt

$$a' \leq -\kappa - a^2$$

## 6. Räume konstanter Krümmung

Es bezeichne  $M_\kappa^n$  den endlich zusammenhängenden  $n$ -dimensionalen Raum mit konstanter Krümmung  $\kappa$ , also für  $\kappa = -1$  den hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^n$ , für  $\kappa = 0$  die Ebene  $\mathbb{R}^n$  und die Sphäre  $S^n$  im Falle  $\kappa = 1$ . Dann ist ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen  $c$  in  $M_\kappa^n$  eine Linearkombination von Jacobifeldern  $j \cdot E$ , wobei  $E$  ein entlang  $c$  paralleles Einheitsfeld ist und  $j$  eine Lösung der eindimensionalen Jacobigleichung

$$j'' + \kappa j = 0$$

Es bezeichnen  $\text{sn}_\kappa$  und  $\text{cs}_\kappa$  die Lösungen mit  $\text{sn}_\kappa(0) = 0$ ,  $\text{sn}'_\kappa(0) = 1$  und  $\text{cs}_\kappa(0) = 1$ ,  $\text{cs}'_\kappa(0) = 0$ , das heißt

$$\text{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ 1/\sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

$$\text{cs}_\kappa(t) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

Dabei gilt  $\text{sn}'_\kappa = \text{cs}_\kappa$  und  $\text{cs}'_\kappa = -\kappa \text{sn}_\kappa$ . Setzt man  $\text{ct}_\kappa(t) = \frac{\text{cs}_\kappa(t)}{\text{sn}_\kappa(t)}$  ( $= (\ln \text{sn}_\kappa)'$ ), so gilt  $\text{ct}'_\kappa = -\kappa - \text{ct}_\kappa^2$ . Allgemeiner gilt für eine Lösung  $j$  von  $j'' + \kappa j = 0$  und  $b = (\ln j)'$

$$b' = \left( \frac{j'}{j} \right)' = \frac{j''j - j'^2}{j^2} = \frac{-\kappa j^2 - j'^2}{j^2} = -\kappa - b^2$$

das heißt  $b$  löst die eindimensionale Riccatiungleichung. Es sei  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen  $c$  in  $M_\kappa^n$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$ . Dann ist  $\mathcal{J} = \text{sn}_\kappa Y$ , wobei  $Y$  ein zu  $c$  orthogonales und entlang  $c$  paralleles Vektorfeld ist.

$$AY = A \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J} = \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J}' = \frac{\text{sn}'_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \frac{\text{cs}_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \text{ct}_\kappa Y.$$

*Ziel:* Wir suchen eine Abschätzung für Eigenwerte, beziehungsweise Operatornorm von  $A_t$  und für das Wachstum von Jacobifeldern bei unteren Krümmungsschranken.

**Lemma 9.16** *Es seien  $a, b: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt für ein Intervall  $\mathcal{I}$ , sowie*

- $a' \leq -\kappa - a^2$
- $b' = -\kappa - b^2$

- $a(t_0) \leq b(t_0)$  für ein  $t_0 \in \mathcal{I}$ .

Dann gilt:

- (i)  $a(t) \leq b(t)$  für alle  $t \geq t_0$
- (ii) Gilt  $a(t_0) = b(t_0)$  und  $a(t_1) = b(t_1)$  für  $t_1 > t_0$ , so folgt  $a|_{[t_0, t_1]} = b|_{[t_0, t_1]}$ .
- (iii) Gilt  $\mathcal{I} = (0, t_1]$  und  $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \infty$ , so folgt  $a \leq \text{ct}_\kappa$  und falls  $a(t_0) = \text{ct}_\kappa(t_0)$ , so gilt  $a = \text{ct}_\kappa$  auf  $\mathcal{I}$ .

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned} \left( (b-a)e^{\int b+a} \right)' &= ((b' - a') + (b-a)(b+a)) e^{\int b+a} \\ &= \underbrace{(b' + b^2)}_{=-\kappa} - \underbrace{(a' + a^2)}_{\leq -\kappa} e^{\int b+a} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $(b-a)e^{\int b+a}$  monoton wachsend, das heißt  $b-a \geq 0$  und es gilt (i). (ii) folgt sofort aus der Monotonie. Gilt  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$ , so existiert ein  $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a(t) = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)(t)$  und  $\varphi(0) = 0$ . Nun gilt  $a' = \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)$ , also

$$\begin{aligned} 0 &= -\kappa + \kappa = (\text{ct}'_\kappa + \text{ct}_\kappa^2) \circ \varphi - (a' + a^2) \\ &= \text{ct}'_\kappa \circ \varphi + (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 - \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi) - (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 \\ &= (1 - \varphi') \underbrace{(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

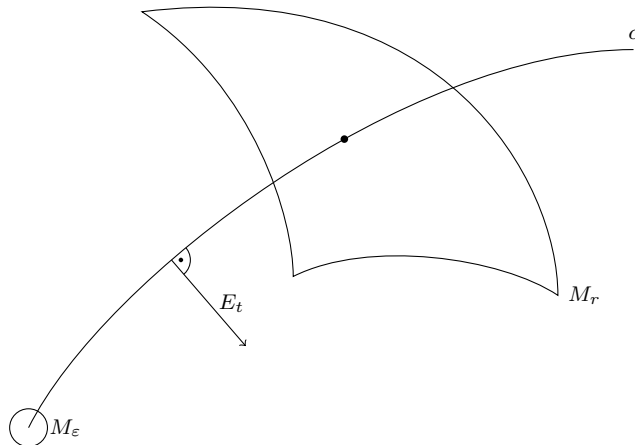
und es folgt  $\varphi' \geq 1$ . Da  $\varphi(0) = 0$ , folgt  $\varphi(t) \geq t$ . Da  $\text{ct}_\kappa$  monoton fallend ist, gilt

$$a = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi) \leq \text{ct}_\kappa.$$

Die Gleichheit wird wie oben gezeigt. □

Es gelte  $\sec_{(M,g)} \geq \kappa$  und es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $c(0) = p$ . Wie oben bezeichne  $A_t$  das symmetrische Endomorphismenfeld  $A_t: \dot{c}(t)^\perp \rightarrow \dot{c}(t)^\perp$ ,  $X \mapsto \nabla_X \text{grad } p$ . Für ein entlang  $c$  paralleles Vektorfeld  $E$  mit  $\|E\| = 1$  und  $E \perp \dot{c}$  sei  $a = \langle AE, E \rangle$ . Dann gilt:

$$a' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c})\dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2 = -\kappa - a^2.$$



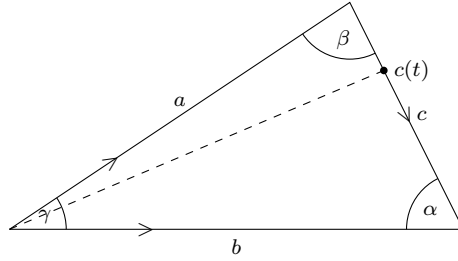
An jeder Stelle, solange kein konjugierter Punkt vorliegt, kann  $E$  als normiertes Jacobifeld  $\frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}(t)$  realisiert werden, wobei  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$ .

$$a = \left\langle A \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}, \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|} \right\rangle = \frac{\langle \mathcal{J}', \mathcal{J} \rangle}{\langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle} = \left( \ln \overbrace{\|\mathcal{J}\|}^{\rightarrow 0}_{\rightarrow \infty} \right)' \rightarrow \infty$$

Mit  $a \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$  und Lemma 9.16 folgt  $a \leq ct_\kappa$  (bis zum ersten konjugierten Punkt). Insbesondere folgt

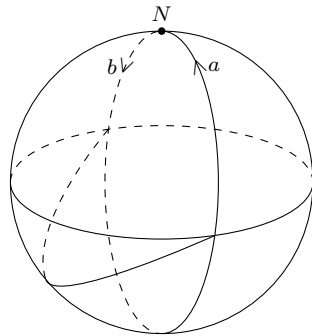
$$\|A\| = \sup_{\|E\|=1} \langle AE, E \rangle \leq ct_\kappa.$$

**Definition** Ein (**geodätisches**) **Dreieck**  $\Delta(a, b, c)$  in  $M$  besteht aus drei geodätischen Segmenten  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $a(0) = b(0)$ ,  $a(1) = c(0)$  und  $c(1) = b(1)$ . Es bezeichnen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die inneren Winkel in  $\Delta$ . Ferner sei  $|a| = \mathcal{L}(a)$  die Länge von  $a$  (analog für  $b$  und  $c$ ).



Ein Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^2$ , der einfach zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit  $\sec \equiv \kappa$ , ist ein Dreieck  $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  mit  $|\bar{a}| = |a|$ ,  $|\bar{b}| = |b|$  und  $|\bar{c}| = |c|$ . Es existiert ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Vergleichsdreieck, wenn gilt:

- (i)  $|a| + |b| \geq |c|$ ,  $|b| + |c| \geq |a|$ ,  $|c| + |a| \geq |b|$
- (ii)  $U(\Delta(a, b, c)) = |a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  (für  $\kappa > 0$ )

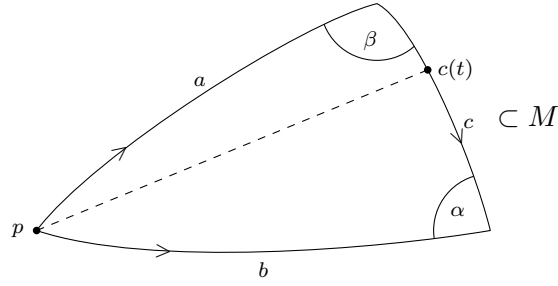


mehrere Möglichkeiten  
für  $c$  in diesem Beispiel

**Satz 9.17 (Alexandrov-Toponogov)** Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche  $m$ -Mannigfaltigkeit mit  $\sec_{(M, g)} \geq \kappa$  und im Falle  $\kappa > 0$  gelte  $M \not\cong S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$ . Ist dann  $\Delta(a, b, c)$  ein geodätisches Dreieck mit  $|c| \leq |a| + |b|$ , sowie, im Falle  $\kappa > 0$ ,  $|c| < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  und  $a$  und  $b$  seien minimierende Geodätische. Dann gilt für das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  in  $M_\kappa^2$ :  $\bar{d}_{\bar{p}} \leq d_p$

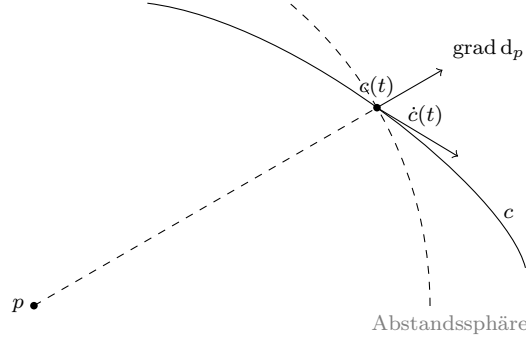
- (i)  $d(\bar{p}, \bar{c}(t)) \leq d(p, c(t))$

(ii)  $\bar{\alpha} \leq \alpha$  und  $\bar{\beta} \leq \beta$ .



**Bemerkung** Das Ausschlussen von  $S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$  ist nach dem Satz von Cheng[3] keine Einschränkung.

Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert und  $p = a(0) = b(0)$ . Es existiere zu jedem  $c(t)$  eine eindeutige Geodätische von  $p$ . Dann ist insbesondere  $d_p$  um  $c(t)$  glatt. Die Abstandsfunktion wird nun so modifiziert, dass in der Abschätzung nicht zwischen dem zu  $\text{grad } d_p$  kollinearen Anteil und dem zur Abstandssphäre tangentialen Teil unterschieden werden muss.



**Karchers Trick** Es sei

$$m_\kappa(r) = \int_0^r \text{sn}_\kappa = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}(1 - \text{cs}_\kappa(r)) & \kappa \neq 0 \\ \frac{1}{2}r^2 & \kappa = 0 \end{cases},$$

dann ist  $m_\kappa(0) = 0$ ,  $m'_\kappa = \text{sn}_\kappa$ , also  $m_\kappa$  streng monoton auf  $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}]$ , und es gilt  $\text{cs}_\kappa + \kappa m_\kappa \equiv 1$ . Es sei  $r(t) = d(p, c(t))$  und  $e = m_\kappa \circ r$ . Dann ist

$$\begin{aligned} r' &= \frac{d}{dt}(d_p \circ c) = \dot{c}(d_p) = \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle, \\ r'' &= \langle \nabla_{\dot{c}} \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle = H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \end{aligned}$$

Zerlegt man  $\dot{c}$  orthogonal in  $\dot{c} = v + w$  mit  $w \perp \text{grad } d_p$ , so folgt aus  $H_{d_p}(\text{grad } d_p, \cdot) \equiv 0$  gerade

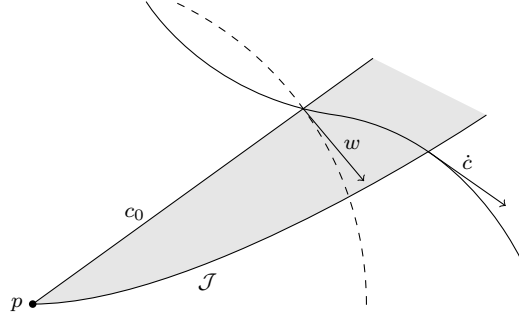
$$H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) = H_{d_p}(w, w) = \|w\|^2 \left\langle A \frac{w}{\|w\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq (\text{ct}_\kappa) \|w\|^2.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} e'' &= (m''_\kappa \circ r)r'^2 + (m'_\kappa \circ r)r'' = (\text{cs}_\kappa \circ r) \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \\ &\leq (\text{cs}_\kappa \circ r) \|v\|^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) (\text{ct}_\kappa \circ r) \|w\|^2 = (\text{cs}_\kappa \circ r) (\|v\|^2 + \|w\|^2) = (\text{cs}_\kappa \circ r) \\ &= 1 - \kappa(m_\kappa \circ r) = 1 - \kappa e, \end{aligned}$$

also  $e'' + \kappa e \leq 1$ .





Im Fall konstanter Krümmung gilt für eine analog definierte modifizierte Abstandsfunktion

$$\bar{e} = (m_\kappa \circ \bar{r}), \quad \bar{e}'' + \kappa \bar{e} \equiv 1.$$

Ist wie oben  $\dot{\bar{c}} = \bar{v} + \bar{w}$  (mit  $w, \bar{w} \neq 0$ ), so existiert ein Jacobifeld entlang der Geodätischen von  $p$  nach  $c(t)$  von der Form  $J = \text{sn}_\kappa E$ , wobei  $E$  die parallele Fortsetzung von  $\bar{w}$  ist, und es gilt  $J(d_{\bar{p}}(\bar{c}(t))) = w$ . Damit folgt

$$H_{d_{\bar{p}}}(\dot{\bar{c}}, \dot{\bar{c}})|_r = \langle AJ, J \rangle|_r = \langle J', J \rangle|_r = \text{cs}_\kappa(r) \langle E, w \rangle = \text{ct}_\kappa \|w\|^2$$

und in der obigen Abschätzung gilt die Gleichheit.

#### Beweisskizze (zum Satz von Alexandrov-Toponogov 9.17)

- (i) *Annahme:* Es gelte  $|a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Der Fall  $|a| + |b| = |c|$  ist trivialerweise korrekt. Es gelte also  $|a| + |b| > |c|$ , dann ist jedenfalls  $p \notin c$ . Es seien  $r = d_p \circ c$  und  $e = m_\kappa \circ r$  wie oben, sowie  $\bar{r}$  und  $\bar{c}$  für das Vergleichsdreieck. Betrachte  $f = e - \bar{e}$ .

**Fall 1:** Zu jedem  $c(t)$  existiert eine eindeutige minimierende Geodätische, damit ist  $r$  und damit auch  $f$  differenzierbar. Es gilt

$$f'' = e'' - \bar{e}'' \leq 1 - \kappa e - (1 - \kappa \bar{e}) = -\kappa f.$$

Angenommen es gäbe ein  $s \in (0, l)$ ,  $l = |c|$  mit  $f(s) < 0$ . Weiter sei  $\varepsilon > 0$  so, dass gilt

$$l + \varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa + \varepsilon}}.$$

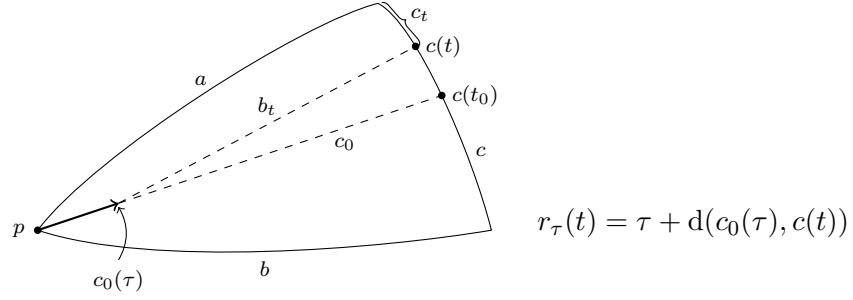
Es sei  $g(t) = \text{sn}_{\kappa+\varepsilon}(t+\varepsilon)$  die, auf  $[0, l]$  positive, Lösung von  $g'' + (\kappa + \varepsilon)g = 0$ . Betrachte  $h = \frac{f}{g}$ . Dann gilt  $h(s) < 0$  und  $h(0) = 0 = h(l)$  und somit nimmt  $h$  ein negatives Minimum, etwa  $t_0$ , an.

Es gilt also  $h(t_0) < 0$ ,  $h'(t_0) = 0$  und  $h''(t_0) \geq 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} f'' + \kappa f &= g''h + 2g'h' + gh'' + \kappa gh = -(\kappa + \varepsilon)gh + 2g'h' + gh'' + \kappa gh \\ \text{in } t_0: &\quad \underbrace{-\varepsilon gh}_{>0} + \underbrace{2g'h'}_{=0} + \underbrace{gh''}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu  $f'' + \kappa f \leq 0$ .

**Fall 1 gilt nicht:** Es gibt nun keine eindeutige Geodätische und für den Umfang gilt  $\|a\| + \|b\| + \|c\| \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$

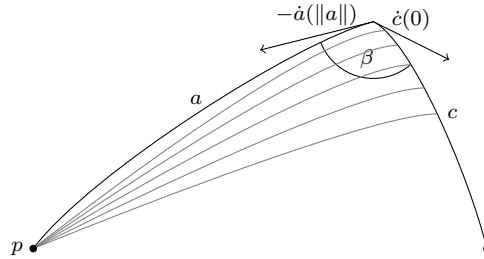


Es sei  $t_0 = \sup\{t \mid \text{Umfang } \Delta(a, b_t, c_t) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\}$ . Für  $t \rightarrow t_0$  konvergiert  $\Delta(a, b_t, c_t)$  gegen ein Dreieck mit Umfang  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , das heißt das Vergleichsdreieck konvergiert gegen einen Großkreis. Insbesondere folgt mit dem ersten Teil aus (i):

$$\max_{s \in [0, t]} d(p, c(s)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Damit existiert ein  $q \in M$  mit  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , im Widerspruch zur Voraussetzung  $M \not\cong S_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^n$  (siehe Cheng [3]).

(ii) Variationsfeld:



Es sei  $c_s$  die minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $p$  nach  $c(s)$  und  $Y$  das von  $c_s$  erzeugte Variationsfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\cos \beta &= \langle \dot{c}(0), \dot{a}(|a|) \rangle = \langle Y(|a|), \dot{a}(|a|) \rangle = \int_0^{|a|} \langle Y, \dot{a} \rangle' = \mathcal{L}'(c_s) \stackrel{(i)}{\geq} \mathcal{L}'(\bar{c}_s) \\ &= \dots = -\cos \bar{\beta} \end{aligned}$$

Also insgesamt:  $\bar{\beta} \leq \beta$ .

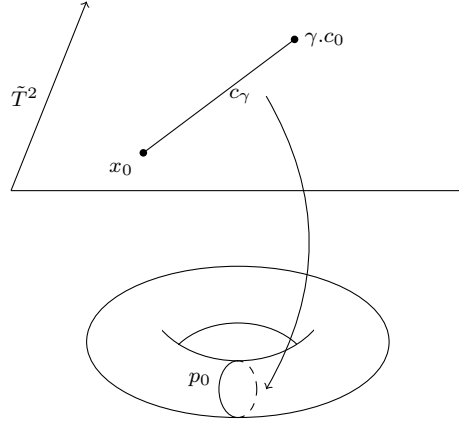
(□)

## 7. Anwendung

**Satz 9.18 (Gromov)** Es existieren Konstanten  $c(n), c(n, \lambda, D)$ , so dass gilt:

- (i) Hat  $M^n$  die Schnittkrümmung  $\text{sec} \geq 0$ , so lässt sich  $\pi_1(M^n)$  mit  $\leq c(n)$  Elementen erzeugen.
- (ii) Hat  $M^n$  die Schnittkrümmung  $\text{sec} \geq -\lambda^2$  und  $\text{diam}(M) \leq D$ , so lässt sich  $\pi_1(M)$  mit  $\leq c(n, \lambda, D)$  Elementen erzeugen.

**Beweisskizze** Es sei  $\Gamma = \pi_1(M, p_0) \curvearrowright \tilde{M}$  und sei  $x_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ .



Für  $\gamma \in \Gamma$  sei  $|\gamma| = d(x_0, \gamma.x_0)$ . Ist dann  $c_\gamma$  minimal von  $x_0$  nach  $\gamma.x_0$ , so ist eine Projektion  $\bar{c}_\gamma = \pi \circ c_\gamma$  eine Schleife in  $\gamma$ . Ferner gilt  $\#\{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \leq r\} < \infty$ , denn andernfalls gäbe es eine (nichtkonstante) Folge  $\gamma_i \in \Gamma$  mit  $|\gamma_i| \leq r$ , das heißt  $\gamma_i.x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$ , also ohne Einschränkung  $\gamma_i.x_0 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$  und  $q = \pi(y)$ . Dann gälte

$$\pi^{-1}(B_\delta(q)) = \dot{\bigcup}_i B_\delta = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma.B_\delta(y) \quad \nexists$$

Wähle  $\gamma_1 \in \Gamma$  mit  $|\gamma_1| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{1_p\}\}$ . Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  gewählt mit  $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_k|$ , so bezeichne  $G_k = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ . Ist  $G_k \neq \Gamma$ , so sei  $\gamma_{k+1} \in \Gamma$  mit  $|\gamma_{k+1}| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus G_k\}$ .

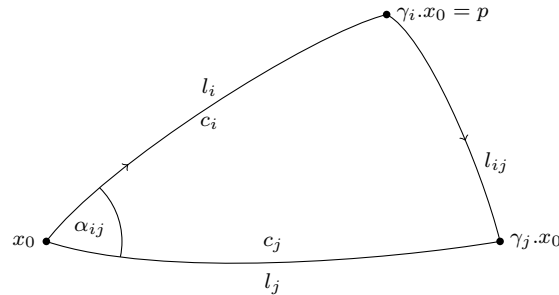
Es bezeichne  $l_i = |\gamma_i|$ ,  $l_{ij} = d(\gamma_i.x_0, \gamma_j.x_0) = d(x_0, \gamma_i^{-1}\gamma_j.x_0) = |\gamma_i^{-1}\gamma_j|$ . Dann gilt für  $i < j$ :

$$l_i \leq l_j \leq l_{ij}.$$

Wäre  $l_{ij} < l_j = |\gamma_j|$ , so gälte für  $\tilde{\gamma}_j = \gamma_i^{-1}\gamma_j$ :

$$|\tilde{\gamma}_j| < |\gamma_j| \text{ und } \langle \gamma_1, \dots, \gamma_j \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \tilde{\gamma}_j \rangle$$

im Widerspruch zur Wahl von  $\gamma_j$ .

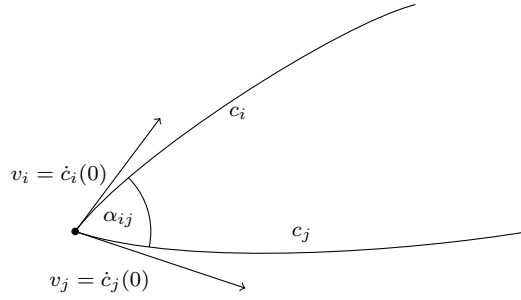


Nach Topogonov folgt  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ij} \leq \alpha_{ij}$ .

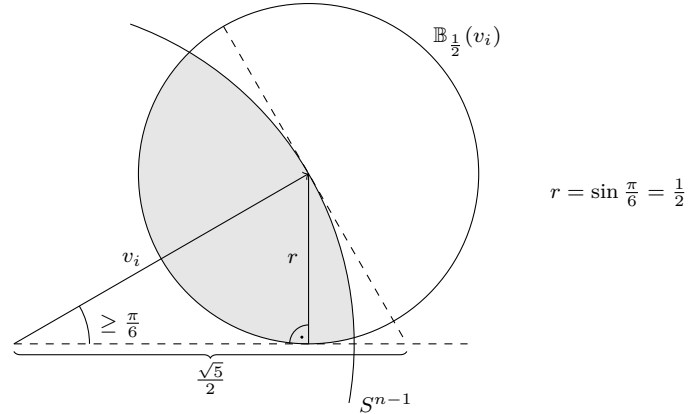
(i) Von nun an sei  $\sec \geq 0$ .

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_{ij}^2}{2l_i l_j} \leq \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_j^2}{2l_i^2} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

Daraus folgt  $\alpha_{ij} \geq \bar{\alpha}_{ij} \geq \frac{\pi}{3}$



$\{v_i\} \subseteq \underbrace{\overline{B}_1(0)}_{\text{kompakt}} \subseteq T_{x_0}\tilde{M}$  und  $\#\{v_i\} = \#\{\gamma_i\}$  endlich.



$r = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , also sind die Bälle  $B_{\frac{1}{2}}(v_i)$  disjunkt. Betrachte das Volumen der „unteren Hälfte“, diese liegt in  $B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)$ . Damit gilt

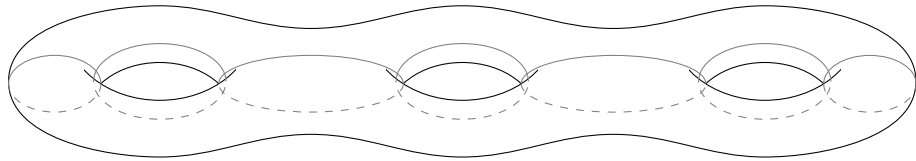
$$\frac{\kappa}{2} \text{vol}(B_{\frac{1}{2}}(0)) \leq \text{vol } B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0),$$

also

$$\kappa \leq 2 \frac{\text{vol}\left(B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)\right)}{\text{vol}\left(B_{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)} = 2\sqrt{5}^n (= c(n))$$

(ii) Fall:  $\kappa \geq -\lambda^2$ .

Gibt es eine Durchmesserschranke?



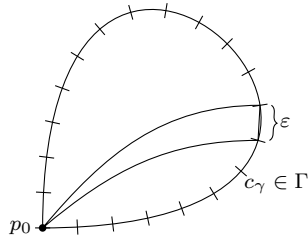
$\pi_1(\sum g)$  wird erzeugt von  $2g$  Elementen und es gilt

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{\cosh(\lambda l_i)^2 + \cosh(\lambda l_j)^2 - \cosh(\lambda l_{ij})^2}{\sinh(\lambda l_i) \sinh(\lambda l_j)}$$

$\bar{\alpha}_{ij}$  fällt monoton in  $l_i$ , also wächst  $\cos \bar{\alpha}_{ij}$  monoton in  $l_i$  und es lässt sich folge Abschätzung verwenden:

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} \leq \dots \leq \frac{\cosh(\lambda l_j)}{\cosh(\lambda l_j) + 1} \leq \frac{\cosh(2\lambda D + 1)}{\cosh(2\lambda D + 1) + 1}$$

Jedes  $\gamma \in \pi_1(M)$  ist Produkt von Klassen von Schleifen der Länge  $\leq 2D + \varepsilon$ .



Damit funktioniert der Rest des Beweises ähnlich wie oben.

(□)

