22. Euklidische Punkträume

Hier sei stets $K = \mathbb{R}$. Neu in diesem Paragraphen sind **Abstände** zwischen Punkten im affinen Raum.

22.1. Grundbegriffe

Definition: (a) $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit einem affinen Raum E über $\mathbb{R}$ und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem Richtungs-VRm $V = U_E$ von E heißt **euklidischer Raum**.

(b) Der **Abstand** von $P, Q \in E$ ist definiert als:

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| \left(= \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}\rangle}\right)$$

Beispiel: Der **euklidische Standardraum** $E = \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$d(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Bemerkung: Der Abstand d eines euklidischen Raums E definiert eine Metrik auf E (Positivdefinitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung).

Definition: (a) Ein Koordinatensystem $\mathcal{K} = (O, B)$ auf dem euklidischen Raum E heißt **cartesisch**, falls B Orthonormalbasis (bzgl $\langle\cdot,\cdot\rangle$) ist.

(b) Seien E, F euklidische Räume und $\varphi : E \to F$ eine beliebige Abbildung. φ heißt **längentreu**, falls gilt:

$$\forall P, Q \in E : d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$$

(c) φ heißt **isometrisch**, falls φ affin und längentreu ist.
φ heißt **Bewegung** von E, falls $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(E)$ und isometrisch ist. Ist ferner $\det(\Lambda_\varphi) = 1$, so heißt φ eine **eigentliche Bewegung**.

Bemerkung: Die Menge aller Bewegungen (schreibe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(E)$) ist eine Gruppe mit Untergruppe der Menge aller eigentlichen Bewegungen (schreibe $\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{dist}}(E)$).

Lemma:
Seien E, F euklidische Räume und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(E, F)$. Falls Λ_φ ein Morphismus von Skalarprodukträumen ist, so ist φ isometrisch.

Beweis: Sei $\Phi := \Lambda_\varphi$, dann gilt $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ und es folgt:

$$\begin{aligned} d(\varphi(P), \varphi(Q)) &= \|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}\| \\ &= \|\Phi(\overrightarrow{PQ})\| \\ &= \|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

■

Korollar:
Sei $\mathcal{K} = (O, B)$ cartesisches Koordinatensystem eines euklisischen Raums E. Dann ist die Koordinatendarstellung $D_\mathcal{K} : E \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer affiner Isomorphismus.
Daher genügt es meistens, den euklidischen Standardraum zu behandeln.

Beweis: Es ist $D_\mathcal{K}(P) = D_B(\overrightarrow{OP})$ mit B ONB. Daraus folgt:

$$D_B : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

d.h. D_B ist Isometrie von V in den $\mathbb{R}^n$. ■

Bemerkung: Im Standardraum gilt:

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, a) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A \in O_n\}$$

Definition: A, B affine Teilräume eines euklidischen Raumes E heißen **orthogonal**, falls $U_A \perp U_B$.

Aufgabe: Bestimme den **Abstand** zwischen zwei Teilräumen A, B. Dieser ist wie folgt definiert:

$$d(A, B) := \min\{d(P, Q) \mid P \in A, Q \in B\}$$

Methode: Lot fällen! (Dabei genügt es $E = \mathbb{R}^n$ zu betrachten.)

Definition: Eine Gerade G heißt **gemeinsames Lot** von A, B mit **Lotfußpunkten** P^+ und Q^+, falls gilt:

$$\begin{aligned} &G \perp A && G \perp B \\ &G \cap A = \{P^+\} && G \cap B = \{Q^+\} \end{aligned}$$

Satz 33:
Seien A, B affine Teilräume von $\mathbb{R}^n$ mit $A \neq \emptyset \neq B$. Aus $\dim(U_A + U_B) < n$ folgt, dass ein gemeinsames Lot G mit Lotfußpunkten P^+, Q^+ und $d(A, B) = d(P^+, Q^+)$ existiert.

Beweis: Falls G existiert, so gilt für alle $P \in A, Q \in B$:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \| \underbrace{\overrightarrow{PP^+}}_{=:x \in U_A} + \underbrace{\overrightarrow{P^+Q^+}}_{=:y \in U_G} + \underbrace{\overrightarrow{Q^+Q}}_{=:z \in U_B} \|$$

wobei nach Vorraussetzung $y \perp y$ und $y \perp z$, also auch $y \perp (x+z)$ ist. Nach Pythagoras gilt:

$$\|y + (x+z)\|^2 = \|y\|^2 + \|x+z\|^2 \geq \|y\|^2$$

Mit Wurzelziehen folgt daraus:

$$d(P,Q) \geq \|y\| = d(P^+, Q^+)$$

Also ist $d(P^+, Q^+) = d(A,B)$, falls G existiert.
Schreibe:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} \cdot x_i + x_0 \qquad\qquad B = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{R} \cdot y_j + y_0$$

Es gelten folgende notwendige Bedingungen für P^+, Q^+:

(1) $P^+ = \sum_i \lambda_i x_i + x_0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(2) $Q^+ = \sum_j \mu_i y_j + y_0$ mit $\mu_j \in \mathbb{R}$.

(3) $\forall i \in \{1, \dots, r\} \langle x_i, P^+ - Q^+ \rangle = 0$

(4) $\forall j \in \{1, \dots, s\} \langle y_j, P^+ - Q^+ \rangle = 0$

Daraus erhalten wir ein LGS für die unbestimmten λ_i, μ_j, dessen Lösung P^+ und Q^+ ergibt. Das LGS ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\exists P^+ - Q^+ : \sum_i \lambda_i x_i + x_0 - \sum_j \mu_j y_j + y_0 \in (U_A + U_B)^\perp$$

Wegen $\mathbb{R}^n = (U_A + U_B) \oplus (U_A + U_B)^\perp$ ist sicher $x_0 - y_0 \in \langle x_i, y_j \rangle + (U_A + U_B)^\perp$, also ist das LGS lösbar.
Nach Vorraussetzung existiert ein $z \neq 0$ mit $z \in (U_A + U_B)^\perp$
Nehme:

$$G := \begin{cases} [P^+, Q^+] & , P^+ \neq Q^+ \\ \mathbb{R} \cdot z + P^+ & , P^+ = Q^+ \end{cases}$$

■

Bemerkung: Sei $\{b_1, \dots, b_t\}$ ONB von $(U_A + U_B)^\perp$. Dann gilt mit $\beta_\tau = \langle x_0 - y_0, b_\tau \rangle$:

$$P^+ - Q^+ = \sum_{\tau=1}^{t} \beta_\tau \cdot b_\tau$$

Dann erhalten wir zwei Methoden zur Abstandsbestimmung:

(1) Löse das LGS in λ_i, μ_j!

(2) Bestimme eine ONB $\{b_1, \dots, b_t\}$ von $(U_A + U_B)\perp$, dann gilt:

$$d(A,B) \big(= \|P^+ - Q^+\|\big) = \sqrt{\sum_{\tau=1}^{t} \langle x_0 - y_0, b_\tau\rangle^2}$$

Diese Methode kommt **ohne** Berechnung von P^+, Q^+ aus.

22.2. Bewegungen im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe: Klasseneinteilung von $\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^2)$.

Methode: Die folgende Methode funktioniert analog zu der bei Affinitäten.
$\varphi = (A, a)$ (bzgl. Standardkoordinatensystem $\mathcal{K} = (O, B)$) wird in ein anderes Koordinatensystem $\mathcal{L} = (P, B)$ umgerechnet:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = \big((M^{-1}AM), M^{-1}((A-I)b + a)\big) =: (A', b')$$

wobei $(M, b) := D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id})$ mit $M = M_{SB}$ den Wechsel **cartesischer** Koordinatensysteme beschreibt, so dass (A', b') einfache Gestalt erhält ("Normalform").
A' hat folgende Form:
$A' = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (Drehung) oder $A' = C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung)

- Fall D_α mit $0 < \alpha < 2\pi$:
  Es gilt: $1 \notin \mathrm{Spec}(A) \implies \varphi$ hat genau einen Fixpunkt $P \iff (A-I)P + a = 0$ wobei $(A - I)$ invertierbar ist.

  Wähle Koordinatensystem $\mathcal{L} := (P, B) \rightarrow (A', b') = (D_\alpha, 0)$

- Fall $A' = I$:
  Sei $\varphi = (I, a)$ eine Translation, $a \neq 0$.
  Wähle $\mathcal{L} := (0, (b_1, b_2))$ mit $b_1 := \frac{a}{||a||}$. Dann gilt:

  $$M_{SB} = (b_1, b_2), \quad M_{SB}^{-1}(b_1, b_2) = (e_1, e_2)$$

  also $b' = M_{SB}^{-1}a = \lambda_{e_1}$.
  Dann ist $D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (I, \lambda_{e_1})$ mit $\lambda := ||a|| > 0$.

- Fall $A' = C$: analog

Satz 34:
Zu $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^2)$ existiert ein cartesisches Koordinatensystem $\mathcal{L}$ so, dass $D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi)$ eine der folgenden Normalformen hat:

(1) $(I, 0) = \mathrm{id}$

(2) (I, λ_{e_1}) Translation ($\lambda > 0$), keine Fixpunkte

(3) (D_α) Drehungen ($0 < \alpha < 2\pi$), genau ein Fixpunkt O.

(4) $(C, 0)$ Spiegelung an einer Achse, die Achse ist die Menge der Fixpunkte

(5) (C, λ_{e_1}) Gleitspiegelung, kein Fixpunkt, genau eine Fixgerade

Eigentliche Bewegungen sind die Identität, Translationen und Drehungen.

22.3. Geometrische Kennzeichnung von Bewegungen

Betrachte zunächst generell eine längentreue Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (nicht notwendig affin).

Lemma:
Zu $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \neq Q \in \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Punkt $R \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} d(P,R) &= |\lambda| \cdot d(P,Q) \\ d(Q,R) &= |1-\lambda| \cdot d(P,Q) \end{aligned}$$

nämlich $R := \lambda y + P$ für $y := \overrightarrow{PQ}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} d(P,R) &= ||\lambda y|| = |\lambda| ||y|| = |\lambda| \cdot d(P,Q) \\ d(Q,R) &= ||y + P - (\lambda y + P)|| = |1-\lambda| ||y|| = |1-\lambda| \cdot d(P,Q) \end{aligned}$$

Sei S ein weiterer Punkt mit $d(P,S) = d(P,R)$, $d(Q,S) = d(Q,R)$. Etwa $S = x + R$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P = 0$ (nach Koordinatenwechsel), also

$$Q = y,\ R = \lambda y,\ S = x + \lambda y$$

$\Longrightarrow$ $||R|| = d(0,R) = d(0,S) = ||S||$, also

$$\langle \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \implies \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = 0$$

und

$$||Q - R|| = ||Q - S|| \implies ||y - \lambda y|| = ||y - \lambda y - x|| \overset{\text{analog}}{\implies} \langle x, x \rangle + (2\lambda - 2)\langle x, y \rangle = 0$$

Insgesamt: $\langle x, y \rangle = 0$, $\langle x, x \rangle = 0$, also $x = 0$, d.h. $R = S$. ∎

Korollar:
Ist $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu, so gilt für alle P, $Q \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P) = \lambda\overrightarrow{\Psi(P)\Psi(Q)} + \Psi(P)$$

Insbesondere ist Ψ geradentreu für $n = m$.

Beweis: Klar für $P = Q$.
Sei nun $y := \overrightarrow{PQ} \neq 0$, $R := \lambda y + P$. Da Ψ längentreu, folgt nach Lemma

$$\begin{aligned} d(\Psi(P), \Psi(R)) &= |\lambda| \cdot d(\Psi(P), \Psi(Q)) \\ d(\Psi(Q), \Psi(R)) &= |1 - \lambda| d(\Psi(P), \Psi(Q)) \end{aligned}$$

Lemma anwenden auf die Bildpunkte $P' := \Psi(P)$, $Q' := \Psi(Q)$, $R' := \Psi(R)$ liefert $R' = \lambda\overrightarrow{P'Q'} + P'$. ■

Korollar:
$\Psi(\mathbb{R}^n)$ ist affiner Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Nach dem vorhergehenden Korollar gilt für beliebige Punkte P', $Q' \in \Psi(\mathbb{R}^n)$, dass die Verbindungsgerade $[P', Q'] \subseteq \Psi(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Teilraumkriterium folgt die Behauptung. ■

Korollar:
Sei $n = m$, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu, $B = b_1, \ldots, b_n$ Orthonormalbasis und $\Psi(0) = 0$. Dann ist auch $\Psi(B)$ eine Orthonormalbasis.

Beweis: $n = 1$: Klar.
Sei $n > 1$. Betrachte Abstände $d(\mathbb{R} \cdot b_i, b_j)$ für $i \neq j$.
$\implies 0 = \Psi(0) \in \Psi(\mathbb{R} \cdot b_i) = [0, \Psi(b_i)]$ hat minimalen Abstand von $\Psi(b_j)$.
Lotgerade $G = [0, \Psi(b_j)] \perp [0, \Psi(b_i)]$, also $\Psi(b_i) \perp \Psi(b_j)$
Ferner ist: $||\Psi(b_i|| = d(0, \Psi(b_i)) = d(0, b_i) = ||b_i|| = 1$. Also ist $\Psi(B)$ eine Orthonormalbasis. ■

Korollar:
$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu $\implies$ Ψ ist bijektiv.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\Psi(0) = 0$, also $\Psi(\mathbb{R}^n)$ Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ mit einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \implies \Psi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
Injektiv: $\Psi(P) = \Psi(Q)$

$$\implies 0 = d(\Psi(P), \Psi(Q)) = d(P, Q) \quad \implies P = Q$$

■

Satz 35:
Jede längentreue Abbildung $\Psi : E \to E$ eines euklidischen Raumes E ist eine Bewegung (also $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(E)$).

Beweis: Die Wahl eines cartesischen Koordinatensystems erlaubt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E = \mathbb{R}^n$ zu nehmen.
Wechsel zu $\Psi' := (x \mapsto \Psi(x) - \Psi(0))$ ergibt $\Psi'(0) = 0$.

Beachte: Ψ ist affin (bzw. längentreu) genau dann, wenn Ψ' affin (bzw. längentreu) ist.

Also sei ohne Einschränkung $\Psi(0) = 0$. Restbehauptung: Ψ ist eine lineare Abbildung.
$n = 1$: Klar.
$n > 1$: Ψ ist geradentreu nach dem ersten Korollar, also $\mathbb{Q}$-linear (nach 21.4), insbesondere additiv.

$$\lambda \in \mathbb{R}: \ \Psi(\lambda x) = \lambda \cdot \overrightarrow{\Psi(0)\Psi(x)} + \underbrace{\Psi(0)}_{=0} = \lambda \Psi(x)$$

■