

# 13. Wegintegrale

## Definition

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein *rektifizierbarer* Weg,  $\Gamma := \Gamma_\gamma$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei *stetig*. Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $\gamma_j \in BV[a, b]$  (12.1).  $f_j \circ \gamma$  ist *stetig*. Ana I, 26.6  $\implies f_j \circ \gamma \in R_{\gamma_j}[a, b]$ .

$$\int_{\gamma} f_j(x) dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \cdot dx &:= \int_{\gamma} f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n := \int_{\gamma} f_1(x) dx_1 + \dots + \int_{\gamma} f_n(x) dx_n \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t)) d\gamma_1(t) + \dots + \int_a^b f_n(\gamma(t)) d\gamma_n(t). \end{aligned}$$

**Wegintegral** von  $f$  längs  $\gamma$ .

Aus Ana I, 26.3 folgt:

### Satz 13.1 (Berechnung des Wegintegrals)

$\gamma, \Gamma$  und  $f$  seien wie oben.  $\gamma$  sei stetig differenzierbar. Dann:

$$\int_{\gamma} f_j(x) dx_j = \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \quad (j = 1, \dots, n)$$

und

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

## Beispiel

$f(x, y, z) := (z, y, x)$ ,  $\gamma(t) = (t, t^2, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t)$ ,  $\gamma'(t) = (1, 2t, 3)$ ,  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$ .

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}.$$

### Satz 13.2 (Rechnen mit Wegintegralen)

$\gamma, \Gamma, f$  seien wie oben,  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig,  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei rektifizierbar und  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ .

- $$(1) \int_{\gamma} (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_{\gamma} f(x) \cdot dx + \eta \int_{\gamma} g(x) \cdot dx$$
- $$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$$
- $$(3) \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$$
- $$(4) \left| \int_{\gamma} f(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$$
- $$(5) \text{ Ist } \hat{\gamma} \sim \gamma \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

**Beweis**

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für  $\gamma$  stetig differenzierbar.  $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(b + a - t)) \cdot \gamma'(b + a - t)(-1) dt = (\text{subst. } \tau = b + a - t, d\tau = -dt) \\ &= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

(4) Übung

(5) Sei  $\hat{\gamma} = \gamma \circ h$ ,  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig und streng wachsend.  $h(\alpha) = a$ ,  $h(\beta) = b$ . Nur für  $\gamma$  und  $h$  stetig db. Dann ist  $\hat{\gamma}$  stetig db.

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t) dt = (\text{subst. } \tau = h(t), d\tau = h'(t) dt) = \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definition**

$\gamma, \Gamma$  seien wie immer in diesem Paragraphen.  $s$  sei die zu  $\gamma$  gehörende Weglängenfunktion und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. 12.4  $\implies s$  ist wachsend  $\xrightarrow{\text{Ana I}} s \in BV[a, b]$ ;  $g \circ \gamma$  stetig  $\xrightarrow{\text{Ana I, 26.6}} g \circ \gamma \in R_s[a, b]$ .

$$\int_{\gamma} g(x) ds := \int_a^b g(\gamma(t)) ds(t)$$

**Integral bzgl. der Weglänge.****Satz 13.3 (Rechnen mit Integralen bzgl. der Weglänge)**Seien  $\gamma, g$  wie oben.

$$(1) \int_{\gamma^-} g(x) ds = \int_{\gamma} g(x) ds$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x) ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x) ds.$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ stetig db} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_a^b g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

### Beispiel

$$g(x, y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2}, \quad \gamma(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

$$g(\gamma(t)) = (1 + t^2 + 3t^2)^{1/2} = (1 + 4t^2)^{1/2}, \quad \gamma'(t) = (1, 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = (1 + 4t^2)^{1/2} \implies \int_{\gamma} g(x, y) ds = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3}$$

**Gegeben:**  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  rektifizierbare Wege,  $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \dots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$ .  $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m}$ .

$\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma \text{ ist ein rektifizierbarer Weg im } \mathbb{R}^n \text{ mit: } \Gamma_{\gamma} = \Gamma, L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m) \text{ und } \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \dots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx \text{ f\"ur jedes stetige } f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ .

Ist  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ , so sagt man  $\gamma$  entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ .

### Satz 13.4 (Stetige Differenzierbarkeit der Aneinanderhängung)

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$  seien wie oben. Dann:  $\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq \emptyset$ .

Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ .

### Beweis

O.B.d.A:  $m = 2$ .

Def.  $h : [b_1, c] \rightarrow [a_2, b_2]$  linear wie folgt:  $h(x) = px + q$ ,  $h(b_1) = a_2$ ,  $h(c) = b_2$ .  $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$ .  
Dann:  $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$ .  $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$ . 12.2, 12.7, 13.2  $\implies \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ . ■

### Beispiel

In allen Beispielen sei  $f(x, y) = (y, x - y)$  und  $t \in [0, 1]$ .

$$(1) \gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_2(t) = (1, t).$$

Sei  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0, 0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1, 1)$ . Nachrechnen:  
 $\int_{\gamma_1} f(x, y) \cdot d(x, y) = 0$ ,  $\int_{\gamma_2} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$ . Also:  $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

$$(2) \gamma_1(t) = (0, t), \gamma_2(t) = (t, 1).$$

Sei  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ , Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0, 0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1, 1)$ . Nachrechnen:  
 $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

### 13. Wegintegrale

- (3)  $\gamma(t) = (t, t^3)$ . Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0,0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1,1)$ . Nachrechnen:  
 $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$