

Kapitel 6

Einige Verteilungen

Im folgenden sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 6.1 Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen **diskret** falls es eine endliche oder abzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $P(X \in C) = 1$. O.B.d.A. sei $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ (x verschieden). Die Folge $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $p_X(k) = P(X = x_k)$ heißt **Zähldichte** (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X

Bemerkung 6.1

- a) Für eine Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ gilt $p_X(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1$
- b) Die Verteilung von X wird durch die Zähldichte bestimmt, denn $\forall B \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$P_X(B) = P_X(B \cap C) = P_X\left(\sum_{k|x_k \in B} \{x_k\}\right) = \sum_{k|x_k \in B} p_X(k)$$

6.1 Wichtige diskrete Verteilungen

6.1.1 Binomialverteilungen

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt**, mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ (kurz $X \sim B(n, p)$) falls $p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \dots, n$

Beispiel 6.1 Eine Münze wird n -mal geworfen

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{K, Z\}, i = 1, \dots, n\} = \{K, Z\}^n$$

Es sei $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ mit $X(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{\{\omega_i = K\}}$ die Anzahl der Kopf-Würfe in der Folge. Weiter seien die Ereignisse $A_i = \{\omega | \omega_i = K\} = \{\text{i-ter Wurf}\}$

Kopf}, $i = 1, \dots, n$ unabhängig und $P(A_i) = p, i = 1, \dots, n$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= P\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c\right) \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} A_j^c) \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \underbrace{P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})}_{=p^k} \cdot \underbrace{\prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} P(A_j^c)}_{=(1-p)^{n-k}} \\
 &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist hier

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

hier fehlt ein Bild

Es gilt $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-), x \in \mathbb{R}$

6.1.2 Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthält r rote und s schwarze Kugeln, $r + s = n$. Es werden m Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. $X(\omega)$ sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Dann gilt:

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

X nimmt die Werte $k = \max\{0, m - s\}, \dots, \min\{r, m\}$ an und X heißt **hypergeometrisch verteilt** mit Parameter $r, n, m \in \mathbb{N}$

6.1.3 Geometrische Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **geometrisch verteilt** mit Parameter $p \in (0, 1)$, falls

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Beispiel 6.2 Wir würfeln bis erstmals eine 6 fällt. $X(\omega)$ sei die Anzahl der benötigten Würfe. Dann gilt:

$$P(X = k) = P(\text{Wurf 1 bis } k-1 \text{ keine 6, dann 6}) = \frac{5^{k-1} \cdot 1}{6^k} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

6.1.4 Poisson-Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **Poisson-verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ wenn:
 $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

Die Poisson-Verteilung kann man auffassen als Approximation der Binomialverteilung bei großem n und kleinem p . Es gilt:

Satz 6.1 Sei $\lambda > 0$ und $p_n := \frac{\lambda}{n} < 1$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)! n^k}}_{\rightarrow 1} \cdot \overbrace{\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}}^{\rightarrow e^{-\lambda}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wichtiges Beispiel:

Eine Versicherung hat ein Portfolio von n Risiken (n groß). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Risiko in einem bestimmten Zeitraum einen Schaden liefert sei $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Dann ist $X = \text{Anzahl der Risiken, die einen Schaden liefern} \sim B(n, p_n)$, also X in etwa Poisson-verteilt.

6.1.5 Diskrete Gleichverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}$, falls:
 $P(X = x_i) = \frac{1}{m}$ für $i = 1, \dots, m$

6.2 Wichtige stetige Verteilungen

Definition 6.2 Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. ihre Verteilung heißen **absolutstetig**, falls die Verteilungsfunktion F_X von X die folgende Darstellung besitzt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

wobei $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ die **Dichte** von X ist.

Bemerkung 6.2

- a) Jede integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = 1 \quad \text{definiert durch} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

ist eine Verteilungsfunktion.

- b) Die Dichte ist das stetige Analogon zur Zähldichte. Es gilt:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f_X(y) dy \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

da P_X eine Verteilung ist (nachrechnen!) und auf $\{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}$ mit F_X übereinstimmt.

f_X kann aber Werte größer als 1 annehmen.

- c) Bei einer absolutstetigen Zufallsvariable gilt $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und $F_X(x)$ ist stetig. Ist $f_X(x)$ stetig, so ist F_X differenzierbar und es gilt:
 $F'_X(x) = f_X(x)$. Im Allgemeinen ist F_X aber nicht differenzierbar.

6.2.1 Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf dem Intervall (a, b) , $a < b$ (Schreibweise: $X \sim U(a, b)$ bzw. $\text{Unif}(a, b)$), falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a < x < b \\ 1, & \text{falls } x \geq b \end{cases}$$

6.2.2 Exponentialverteilt

Eine Zufallsvariable X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ ($X \sim \exp(\lambda)$), falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung wird oft zur Beschreibung von Lebens- oder Zeitdauern verwendet und besitzt die Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“, d.h. für zwei Zeitpunkte $0 < s < t$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(X \geq t | X \geq s) &= \frac{P(X \geq t, X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq t)}{P(X \geq s)} \\
&= \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_X(s)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)} = P(X \geq t - s)
\end{aligned}$$

6.2.3 Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) falls die Dichte von X gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad , x \in \mathbb{R} \\
&=: \varphi_{\mu, \sigma^2}(x)
\end{aligned}$$

Ist $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ so nennt man X **standard normalverteilt**. Die Verteilungsfunktion wird hier häufig mit Φ bezeichnet, also:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy$$

Lemma 6.2 *Es gilt:*

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$
- b) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), a \neq 0, b \in \mathbb{R} \rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Beweis a) ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konstante und wird hier weggelassen; Trick: wir quadrieren)

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} d\varphi = 2\pi
\end{aligned}$$

b) es gilt $\varphi_{0,1}(x) = \varphi_{0,1}(-x)$

c) sei $Y = aX + b$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P\left(X \leq \frac{y - b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x' - b - a\mu)^2}{a^2\sigma^2}\right) \frac{1}{a} dx' \\
&\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

