3. Folgen, Abzählbarkeit

Definition (Eigenschaften von Funktionen)
Seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ heißt Bildmenge von f.
f heißt **surjektiv** $:\iff f(A) = B$
f heißt **injektiv** $:\iff$ aus $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = f(x_2)$ folgt stets $x_1 = x_2$
f heißt **bijektiv** $:\iff f$ ist injektiv und surjektiv

Definition (Folgen)
Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to B$ heißt eine *Folge in* B. Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist das n-te Folgenglied. (a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \ldots)$ statt a. Ist $B = \mathbb{R}$, so heißt (a_n) eine *reelle Folge*.

Beispiele:
(1) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

(2) $a_{2n} := 0$, $a_{2n-1} := 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

Definition (Endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar)
Sei B eine nichtleere Menge.

(1) B heißt **endlich** $:\iff \exists n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to B$, also $B = \{f(1), \ldots, f(n)\}$.

(2) B heißt **unendlich** $:\iff B$ ist nicht endlich.

(3) B heißt **abzählbar** $:\iff \exists (a_n) \in B : B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ($\iff \exists a : \mathbb{N} \to B$ mit a surjektiv).
„Die Elemente von B können mit natürlichen Zahlen durchnummeriert werden.“
Beachte: Endliche Mengen sind abzählbar!

(4) B heißt **überabzählbar** $:\iff B$ ist nicht abzählbar.

Beispiele:
(1) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$

(2) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mit $a_1 := 0, a_{2n} := n, a_{2n+1} := -n$

(3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} := \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.
Beweis: Sei $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n, m) := n + \frac{1}{2}(n + m - 1)(n + m - 2)$. g ist bijektiv (*Übung!*), dann ist $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ebenfalls bijektiv.

(4) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar
Beweis: $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ mit $f(n, m) := \frac{n}{m}$, f ist surjektiv. $b_n := f(g^{-1}(n))$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann: $\mathbb{Q}^+ = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. $a_1 := 0, a_{2n} := b_n, a_{2n+1} := -b_n \implies \mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

(5) Sei B die Menge der Folgen in $\{0,1\}$. Also $(a_n) \in B \iff a_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}$. B ist überabzählbar.
Beweis: Annahme: B ist abzählbar, also $B = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ mit $f_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \ldots)$ und $a_{jk} \in \{0,1\}$. Setze $a_n := \begin{cases} 1, \text{ falls } a_{nn} = 0 \\ 0, \text{ falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$. Es ist $(a_n) \in B$.
$\exists m \in \mathbb{N} : (a_n) = f_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots) \implies a_n = a_{mn}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_m = a_{mm}$, Widerspruch!

Satz

(1) Sei $\emptyset \neq B \subseteq A$ und A sei abzählbar. Dann ist B abzählbar.

(2) Seien $B_1, B_2, B_3, \ldots$ abzählbar viele Mengen und jedes B_j sei abzählbar. $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ ist abzählbar.

Beweis

(1) $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, sei $b \in B$ fest gewählt.

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \in B \\ b & \text{falls } a_n \notin B \end{cases}$$

Also $C := \{b_1, b_2, \ldots\} \subseteq B$. $\forall x \in B \implies x \in A \implies \exists m \in \mathbb{N} : x = a_m \implies a_m \in B \implies b_m = a_m \implies x = b_m \implies x \in C \implies B \subseteq C \implies B = C$.

(2) *Siehe Übungsblatt 2* ■