Aus der NF lesen wir ab:

$$\{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\} \text{ ist Basis von Kern}\phi \Rightarrow \dim \text{Kern}\phi = 2$$

$$\text{Teil a)} \Rightarrow \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\} \text{ ist Basis von Bild } \phi \Rightarrow \dim \text{Bild } \phi = 3$$

0.11.2 Aufgabe 2

a) Nach Tutorium: Die Spalten von $A \cdot B$ sind genau $[a_1, ..., a_n] \Rightarrow Rg(AB) \leq Rg(A)$.
Andererseits: $B \cdot x = 0 \Rightarrow A \cdot B \cdot x = 0 \Rightarrow p - Rg(A \cdot B) \geq p - RgB \Leftrightarrow RgA \cdot RgB \leq RgB$.

b) Sei $B = (b_1|...|b_n)$ und U der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$.
$A \cdot B = 0 \Rightarrow b_1, ..., b_n$ sind Lösungen von $A \cdot x = 0 \Rightarrow b_1, ..., b_n \in U \Rightarrow \dim [b_1, ..., b_n] = RgB \leq \dim U$.
Die Dimension des Lösungsraums erfüllt $\dim U = n - Rg(A) \Rightarrow Rg(B) \leq n - Rg(A) \Rightarrow Beh.$

0.12 Übung 11, 17.01.2005

0.12.1 Aufgabe 1

a) Seien

$$\begin{array}{ll} & \{x_1, ..., x_r\} \text{ eine Basis von } U_1 \cap U_2 \\ & \{x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_k\} \text{ eine Basis von } u_2 \\ & \{x_1, ..., x_r, x'_{r+1}, ..., x'_k\} \text{ eine Basis von } U_2 \\ \text{also} & \{x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_k, x'_{r+1}, ..., x'_k\} \text{ eine Basis von } U_1 + U_2 \end{array}$$

Dann ist durch

$$\{x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_k, x'_{r+1} + x_{r+1}, ..., x'_k + x_k\}$$

und

$$\{x_1, ..., x_r, x'_{r+1}, ..., x'_k, x_{r+1} + x'_{r+1}, ..., x_k + x'_k\}$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ gegeben.

Dann gilt: $U_1 \oplus \tilde{W}. = U_1 + U_2 = U_2 \oplus \tilde{W}$.
Nun ergänzen wir eine der Basen von $U_1 + U_2$ durch Hinzufügen von $y_1, ..., y_2$ zu einer Basis von V und setzen

$$W := [x_{r+1} + x'_{r+1}, ..., x_k + x'_k]$$

Dann erfüllt W die Behauptung.

b) Gilt $\dim U_1 \leq \dim U_2$, so ex. ein Vektorraum U mit der Eigenschaft $\dim(U_1 \oplus U) = \dim U_2$.
Nach a) ex. nun ein UVR W_2 mit $V = (U_1 \oplus U) \oplus W_2 = U_2 \oplus W_2$.
Setzen wir nun $W_1 := U \oplus W_2$ so folgt die Beh.

0.12.2 Aufgabe 2

Zunächst bestimmen wir vereinfachte Baesn von U_1 und U_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von U_1 und $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von U_2.

Schreiben wir die Basisvektoren in die Spalten einer Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Spalten sind l.u., d.h.

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

ist eine Basis von $U_1 + U_2$ und $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Aus der dritten Zeile lesen wir ab:

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Also ist $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

0.12.3 Aufgabe 3

a) Ist dim $U_1 = \infty$ für ein $i = \{1, ..., k\}$, so steht auf der rechten Seite unendlich und die Gleichung gilt..
Andernfalls betrachten wir Basen B_i von U_i für $i = 1, .., k$. Der Vektor $x \in U_1 + ... + U_k$ lässt sich als Linearkombination von Vektorn aus $B_1 \cup ... \cup B_k$ schreiben, also ist $B_1 \cup ... \cup B_k$ ein Erzeugendensystem.
$\Rightarrow \dim(U_1 + ... + U_k) \leq |B_1 \cup ... \cup B_k| \leq |B_1| + ... + |B_k| = \dim\, U_1 + ... + \dim\, U_k$.

Für $i = 1, ..., k$ sein B_i eine Basis von U_i.