21. Parameterabhängige Integrale

Satz 21.1
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m, A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Es sei $f : A \times B \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

(1) Für jedes (feste) $x \in A$ sei $y \mapsto f(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B.

(2) Für jedes (feste) $y \in B$ sei $x \mapsto f(x, y)$ stetig auf A.

(3) $\exists \phi \in L(B) : |f(x, y)| \leq \phi(y) \ \forall (x, y) \in A \times B$.

$F : A \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \displaystyle\int_B f(x, y) \mathrm{d}y$. Dann: $F \in C(A, \mathbb{R})$.

Beweis
Sei $x_0 \in A$. Sei (x_k) eine Folge in A mit $x_k \to x_0$. zu zeigen: $F(x_k) \to F(x_0)$.
Definiere $g, f_1, f_2, \ldots : B \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := f(x_0, y), \ f_k(y) := f(x_k, y)$. Vor.(1) $\implies f_k \in L(B) \ \forall k \in \mathbb{N}$. Vor.(2) $\implies f_k(y) \to g(y) \ \forall y \in B$. Vor.(3) $\implies |f_k(y)| \leq \phi(y) \ \forall y \in B$.

$$18.6 \implies \underbrace{\int_B g(y) \mathrm{d}y}_{=F(x_0)} = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\int_B f_k(y) \mathrm{d}y}_{=F(x_k)}$$

■

Satz 21.2 (Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mit:

(1) Für jedes (feste) $x \in A$ sei $y \mapsto f(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B.

(2) Für jedes (feste) $y \in B$ sei $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar auf A.

(3) $\exists \phi \in L(B) : |f_{x_j}(x, y)| \leq \phi(y) \ \forall (x, y) \in A \times B, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

F sei wie in 21.1. Dann ist $F \in C^1(A, \mathbb{R})$, für jedes (feste) $x \in A$ ist $y \mapsto f_{x_j}(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B und $F_{x_j}(x) = \displaystyle\int_B f_{x_j}(x, y) \mathrm{d}y \ \forall x \in A \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis
Sei $x_0 \in A, j \in \{1, \ldots, n\}$. A offen $\implies \exists \delta > 0 : x_0 + te_j \in A$ für $|t| < \delta$. Sei (t_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und $0 < |t_k| < \delta \ \forall k$.

$$g(y) := f_{x_j}(x_0, y),\ f_k(y) := \frac{f(x_0 + t_k e_j, y) - f(x_0, y)}{t_k}\ (k \in \mathbb{N}, y \in B)$$

Vor.(1) $\Longrightarrow$ $f_k \in L(B)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Vor.(2) $\Longrightarrow$ $f_k(y) \to g(y)\ \forall y \in B$. Vor.(3) $\Longrightarrow$ $|f_k(y)| \overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{|f_{x_j}(x_0 + \xi_k e_j, y)|}_{\leq \phi(y)\ \forall y \in B}$, ξ_k zwischen 0 und t_k. 18.6 $\Longrightarrow$ $g \in L(B)$ und

$$\underbrace{\int_B g(y) dy}_{=\int_B f_{x_j}(x_0, y)\mathrm{d}y} = \lim_{k\to\infty} \int_B f_k(y)\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \frac{F(x_0 + t_k e_j) - F(x_0)}{t_k}$$

■

Satz 21.3
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $[a,b] \times [c,d] \subseteq D$ und $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig differenzierbar. Es sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\alpha(x) := \displaystyle\int_c^{\varphi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$. Dann ist α auf $[a,b]$ differenzierbar und

$$\alpha'(x) = \int_c^{\varphi(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ \forall x \in [c,b]$$

Beweis
$\beta(x,z) := \int_c^z f(x,y)\mathrm{d}y$. Dann: $\alpha(x) = \beta(x, \varphi(x))$ ($z \in [c,d]$). Analysis 1 $\Longrightarrow$ β ist partiell differenzierbar nach z und $\beta_z(x,z) = f(x,z)$. 21.2 $\Longrightarrow$ β ist partiell differenzierbar nach x und $\beta_x(x,z) = \int_c^z f_x(x,y)\mathrm{d}y$. β_x, β_z sind stetig. 5.2 $\Longrightarrow$ β ist differenzierbar $\overset{5.4}{\Longrightarrow}$ α ist differenzierbar und

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \beta_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \beta_z(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \int_c^{\varphi(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x).\end{aligned}$$