Kapitel 10

Erzeugende Funktionen

In diesem Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, also $p_X(k) = P(X = k)\,, k \in \mathbb{N}_0$

Definition 10.1
Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable mit Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die Funktion $g_X : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)s^k = Es^X$$

heißt ***erzeugende Funktion von X****.*

Bemerkung 10.1

a) $g_X(s)$ ist wohldefiniert für $|s| \leq 1$, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)|s|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$$

Insbesondere: $g_X(1) = 1$

b) $g_X^{(n)}(s)$ ist wohldefiniert für $s \in (-1, 1)$

c) Es gilt:

$$p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

Es sei $g_X(s^-) = \lim_{z\uparrow s} g_X(z)$ „linksseitiger Grenzwert“

Satz 10.1
Besitzt die $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X die erzeugende Funktion g_X, so gilt:

a) $EX = g'_X(1^-)$, *falls* EX *existiert*

b) $\mathrm{Var}(X) = g''_X(1^-) + g'_X(1^-) - (g'_X(1^-))^2$ *falls* $\mathrm{Var}(X)$ *existiert.*

Beweis

a)

$$g_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k \cdot s^{k-1} \overset{s \to 1}{\to} \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k = EX$$

b) ähnlich

Beispiel 10.1
Sei $X \sim B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

Es gilt:
$g_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (sp+1-p)^n$
$g_X'(s) = n(sp+1-p)^{n-1}p$
$g_X''(s) = n(n-1)(sp+1-p)^{n-2}p^2$

Also:
$EX = g_X'(1^-) = np$
$\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

Satz 10.2 (Eindeutigkeitssatz für erzeugende Funktionen)
Sind X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$, Zähldichten $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{p_Y(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und erzeugenden Funktionen $g_X(s)$, $g_Y(s)$, so gilt:

$$p_X(k) = p_Y(k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow g_X(s) - g_Y(s) \quad \forall\, s \in [-1,1]$$

Beweis
Identitätssatz für Potenzreihen.

Satz 10.3
Sind X und Y zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s) \cdot g_Y(s) \qquad \forall\, s \in [-1,1]$$

Beweis
Für $s \in [-1,1]$ gilt:

$$\begin{aligned}
g_{X+Y}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P(X+Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{s^k}^{=s^i s^{k-i}} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{P(X=i, Y=k-i)}_{\overset{X,Y \text{unabh.}}{=} P(X=i)\cdot P(Y=k-i)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} s^i P(X=i) s^{k-i} P(Y=k-i) \\
&= (\sum_{i=0}^{\infty} s^i P(X=i)) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} s^j P(Y=j)) \\
&= g_X(s) \cdot g_Y(s)
\end{aligned}$$

Beispiel 10.2
Es sei $X \sim B(n,p)$, $Y \sim B(m,p)$, X und Y unabhängig.
Mit Beispiel 10.1 gilt: $g_X(s) = (sp+1-p)^n$, $g_Y(s) = (sp+1-p)^m$

Also folgt mit Satz 10.3:

$$g_{X+Y}(s) = (sp+1-p)^{n+m} \Rightarrow X+Y \sim B(n+m,p)$$

Insbesondere ist $X = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim B(1,p)$

Beispiel 10.3 (Ruinspiel)

- Spieler I besitzt n Euro
- Spieler II besitzt $(N-n)$ Euro
- Pro Runde: Spieler I gewinnt von Spieler II einen Euro mit Wahrscheinlichkeit p, sonst verliert er einen Euro an Spieler II
- Die Runden sind unabhängig
- Gespielt wird bis ein Spieler pleite ist

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler I gewinnt? Sei dabei $N \in \mathbb{N}$ fest. Wir definieren die Ereignisse $A_n =$ Spieler I gewinnt bei Anfangskapital n und $B =$ Spieler I gewinnt die erste Runde. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A_n) = P(A_n|B) \cdot P(B) + P(A_n|B^c) \cdot P(B^c) \text{ für } 0 < n < N$$

Sei $p_n := P(A_n)$: $p_n = p_{n+1} \cdot p + p_{n-1} \cdot (1-p),\ 0 < n < N$ und $p_0 = 0$ und $p_N = 1$. Die ist eine sogenannte Differenzengleichung. Sei $\rho := \frac{1-p}{p}$ und $\rho \neq 1$ (d.h. $p \neq \frac{1}{2}$).

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1+\rho)p_n - \rho p_{n-1},\ n = 1,2,\dots \\ s^{n+1}p_{n+1} &= (1+\rho)s^{n+1}p_n - \rho s^{n+1}p_{n-1},\ n = 1,2,\dots \end{aligned}$$

Sei $\hat{g}(s) = \sum_{n=0}^\infty p_n s^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) - p_1 \cdot s &= (1+\rho)s\hat{g}(s) - \rho s^2 \hat{g}(s) \\ \Rightarrow \hat{g}(s) &= \frac{p_1 \cdot s}{1-(1+\rho)s+\rho s^2} = \frac{p_1}{\rho - 1}\left(\frac{1}{1-\rho s} - \frac{1}{1-s}\right) \\ &= \frac{p_1}{\rho-1}\left(\sum_{k=0}^\infty (\rho s)^k - \sum_{k=0}^\infty s^k\right) \\ \Rightarrow p_n &= \frac{p_1}{s-1}(\rho^n - 1) \end{aligned}$$

Randbedingung: $p_N = 1$ ergibt $p_1 = \frac{\rho-1}{\rho^N-1}$. Insgesamt:

$$p_n = \frac{\rho^n - 1}{\rho^N - 1},\ n = 0,1\dots$$

Bei $\rho = 1$:

$$p_n = \frac{n}{N},\ n = 1,2\dots$$