wobei jedes Drehgelenk durch den Drehwinkel ϑ_i eines Elementes

$$a_i(\vartheta_i) = \cos\frac{\vartheta_i}{2} + \sin\frac{\vartheta_i}{2} l_i$$

parametrisiert wird.

Beweisskizze
Angenommen die Achsen l_2, l_3 und l_4 seien parallel. Dann ist eine Ebene π orthogonal zu den Richtungsvektoren aller drei Geraden l_2, l_3 und l_4 und invariant unter a_2, a_3 und a_4, das heißt $\pi = a_2 a_3 a_4 \pi a_4^* a_3^* a_2^*$. Stellt man die direkte Kinematik um, so folgt $a_1^* k a_6^* a_5^* = a_2 a_3 a_4$, und mit der obigen Gleichung $\pi = a_1^* k a_6^* a_5^* \pi a_5 a_6 k^* a_1$. Es gilt also die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$k^* a_1 \pi a_1^* k = a_6^* \underbrace{a_5^* \pi a_5}_{=\pi'} a_6 \tag{1}$$

$$a_2 a_3 a_4 = a_1^* k a_6^* a_5^* = k' \tag{2}$$

Lösungen zu (2) lassen sich auf die klassische Art finden. Zu (1), der Schnittpunkt $l_6 \wedge (a_5^* \pi a_5)$ ist invariant unter der Drehung um l_6. Damit gilt

$$l_6 \wedge (k^* a_1 \pi a_1^* k) = l_6 \wedge (a_6^* a_5^* \pi a_5 a_6) = l_6 \wedge (a_5^* \pi a_5).$$

Dies liefert Lösungen für $\sin\vartheta_1$, $\cos\vartheta_1$, $\sin\vartheta_5$, $\cos\vartheta_5$, beziehungsweise für ϑ_1 und ϑ_5. Damit erhält man direkt eine Lösung für ϑ_6 durch (1). ($\square$)

Stichwortverzeichnis