

## 8 Martingale und Stoppzeiten

**Definition** Sei  $I \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- a) Eine Familie von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in I}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt **stochastischer Prozess** ( $I \subset \mathbb{R}$ )
- b) Eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ , mit  $\mathfrak{F}_t \subset \mathcal{A}$  und  $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ , für  $s \leq t$  heißt **Filtration**. Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in I}$  heißt  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**adaptiert**, falls  $X_t$   $\mathfrak{F}_t$ -messbar  $\forall t \in I$ .

**Bemerkung** Oft wird  $\mathfrak{F}_t := \sigma(\{X_s, s \leq t\})$  gewählt. Dann ist  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$  eine Filtration und  $X_t$  ist  $\mathfrak{F}_t$ -messbar.

**Definition** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , eine Filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$  und ein dazu adaptierter stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in I}$ . Ist  $E|X_t| < \infty \forall t \in I$ , so heißt  $(X_t)_{t \in I}$  ein  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Martingal**, falls  $E[X_t | \mathfrak{F}_s] = X_s \forall s, t \in I, s \leq t$ .

Ist  $X_s \leq E[X_t | \mathfrak{F}_s]$  bzw.  $X_s \geq E[X_t | \mathfrak{F}_s]$ , so nennt man  $(X_t)_{t \in I}$  ein  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Submartingal** bzw.  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Supermartingal**.

**Bemerkung** a) Beim Martingal gilt:  $EX_s = E[E[X_t | \mathfrak{F}_s]] = EX_t \forall t \in I$ , d.h. der Erwartungswert ist konstant (wachsend beim Submartingal, fallend beim Supermartingal).

- b) Ist  $I = \mathbb{N}$ , so genügt z.z.:

$$E[X_{t+1} | \mathfrak{F}_t] = X_t \forall t \in \mathbb{N}$$

- c) Ist  $(F_t)_{t \in I}$  die natürliche Filtration, so sagt man oft nur  $(X_t)_{t \in I}$  ist ein Martingal.

**Beispiel 8.1** Sei  $I = \mathbb{N}$ ,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mu$ . Sei  $S_n := \sum_{k=1}^n X_k \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\mathfrak{F}_n := \sigma(S_1, \dots, S_n)$ . Dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : E[S_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = E[S_n | \mathfrak{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = S_n + \mu$ .

Also:  $\mu = 0 \implies (S_n)$  ist Martingal  
 $\mu \leq 0 \implies (S_n)$  ist Supermartingal  
 $\mu \geq 0 \implies (S_n)$  ist Submartingal

**Beispiel 8.2** Sei  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$  eine Filtration und  $X$  eine Zufallsvariable mit  $E|X| < \infty$ . Sei  $X_t := E[X | \mathfrak{F}_t]$ . dann ist  $(X_t)_{t \in I}$   $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -adaptiert und  $\forall s, t \in I, s \leq t$ :

$$E[X_t | \mathfrak{F}_s] = E[E[X | \mathfrak{F}_t] | \mathfrak{F}_s] \stackrel{S.7.3a)}{=} E[X | \mathfrak{F}_s] = X_s$$

$\implies (X_t)_{t \in I}$  ist ein  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Martingal.

**Satz 8.1**

Ist  $(X_t)_{t \in I}$  ein  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Martingal und  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion mit  $E|\Phi(X_t)| < \infty \forall t \in I$ , so ist  $(\Phi(X_t))_{t \in I}$  ein  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Submartingal.

**Beweis** Sei  $s, t \in I, s \leq t : E[\Phi(X_t)|\mathfrak{F}_s] \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \Phi(\underbrace{E[X_t|\mathfrak{F}_s]}_{=X_s})$  ■

Im Folgenden:  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  und  $X^* := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

**Satz 8.2 (Submartingal-Ungleichung von Doob)**

Ist  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  ein  $(\mathfrak{F}_i)_{i=1, \dots, n}$ -Submartingal, so gilt  $\forall c > 0 :$

$$c \cdot P(X^* > c) \leq \int_{\{X^* > c\}} X_n dP \leq EX_n^+$$

**Beweis** Sei  $A := \{X^* > c\}, A_i := \{X_1 \leq c, \dots, X_{i-1} \leq c, X_i > c\}, i = 1, \dots, n$

$$\implies A = A_1 + \dots + A_n, A_i \in \mathfrak{F}_i \text{ und } X_i > c \text{ auf } A_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\implies \int_{A_i} X_n dP \stackrel{\text{bed. EW}}{=} \int_{A_i} E[X_n|\mathfrak{F}_i] dP \stackrel{\text{Sub-M.}}{\geq} \int_{A_i} X_i dP \geq cP(A_i), i = 1, \dots, n$$

Summation über  $i = 1, \dots, n \implies 1.$  Ungleichung

2. Ungleichung:  $X_n \cdot \mathbf{1}_A \leq X_n^+$  ■

**Satz 8.3 ( $L^p$ -Ungleichung von Doob)**

Es sei  $p > 1$  und  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  ein nicht-negatives  $(\mathfrak{F}_i)_{i=1, \dots, n}$ -Submartingal mit der Eigenschaft  $\sup_{i=1, \dots, n} EX_i^p < \infty$ . Dann gilt:

$$E(X^*)^p \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p EX_n^p$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} E(X^*)^p &= E \int_0^{X^*} p \cdot y^{p-1} dy \\ &= E \int_0^\infty p \cdot y^{p-1} \mathbf{1}_{[X^* \geq y]} dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty p y^{p-1} \cdot P(X^* \geq y) dy \\ &\stackrel{\text{S.8.2}}{\leq} \int_0^\infty p \cdot y^{p-2} E[X_n \cdot \mathbf{1}_{[X^* \geq y]}] dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} E \left[ X_n \int_0^{X^*} p y^{p-2} dy \right] \\ &= \frac{p}{p-1} E[X_n (X^*)^{p-1}] \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \left( E((X^*)^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E(X^*)^p)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Teile Ungleichung durch  $(E(X^*)^p)^{1-\frac{1}{p}}$  (falls  $E(X^*)^p = 0$  ist Aussage richtig) und nehme  $p$ -te Potenz  $\implies$  Behauptung. ■

**Bemerkung** a) Ist  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , so lässt sich Satz 8.3 schreiben als  $\|X^*\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p$

b) Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in I}$  mit  $\sup_{t \in I} \|X_t\|_p < \infty$  heißt  $L^p$ -**beschränkt**.

c) Ist  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  ein Martingal, so ist  $(|X_i|)_{i=1, \dots, n}$  ein nicht negatives Submartingal (Satz 8.1)

**Beispiel 8.3** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein stochastischer Prozess. Interpretation von  $(X_n)$ :

$X_0 \equiv$  Anfangskapital des Spielers

$X_n - X_{n-1} \equiv$  Gewinn pro gesetzter Geldeinheit in der  $n$ -ten Runde

Wird immer eine Geldeinheit pro Runde gesetzt, so ist also  $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$  das Kapital des Spielers nach  $n$  Runden. Es sei

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

Das entspricht der Information nach  $n$  Runden.

$$\implies E[X_{n+1} - X_n | \mathfrak{F}_n] = E[X_{n+1} | \mathfrak{F}_n] - X_n$$

Das entspricht dem erwarteten Gewinn pro gesetzter Geldeinheit bei Kenntnis des bisherigen Spielverlaufs.

Offenbar gilt:	$X$ Martingal	$\iff$	Spiel fair
	$X$ Supermartingal	$\iff$	Spiel nachteilig
	$X$ Submartingal	$\iff$	Spiel vorteilhaft

#### Beispiel 8.4

$X_n - X_{n-1}$  sei der Gewinn pro gesetzter Geldeinheit (GE) in der  $n$ -ten Runde.

Jetzt: In Runde  $n$  werden  $c_n$  GE gesetzt mit  $c_n \mathfrak{F}_{n-1}$ -messbar.

$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1})$ , d.h.  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist vorhersagbar.

Kapital nach  $n$  Spielen:

$$X_0 + \sum_{k=1}^n c_k (X_k - X_{k-1})$$

#### Satz 8.4

Es seien  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersagbarer Prozess und  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Prozess mit  $E|c_n(X_n - X_{n-1})| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Wir setzen

$$Y_n := X_0 + \sum_{k=1}^n c_k (X_k - X_{k-1}), \quad Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann gilt:

a) Ist  $X$  ein Martingal, so auch  $Y$ .

- b) Ist  $X$  ein Sub- bzw. Supermartingal und  $c_n \geq 0 \quad \forall n$ , so ist auch  $Y$  ein Sub- bzw. Supermartingal.

**Beweis**

$$E[Y_{n+1} - Y_n | \mathfrak{F}_n] = E[c_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathfrak{F}_n] \stackrel{c_{n+1}\mathfrak{F}_n\text{-m.b.}}{=} c_{n+1} \cdot E[X_{n+1} - X_n | \mathfrak{F}_n].$$

**Definition**

Eine Abbildung  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  heißt **Stoppzeit** bezüglich einer Filtration  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn

$$\{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

**Bemerkung**

- a) Stoppzeiten kann man analog für  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  definieren.  
b)  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  ist Stoppzeit  $\iff \{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ . (Übung)

**Beispiel 8.5**

- a)  $\tau \equiv n_0$  ist Stoppzeit, da  

$$\{\tau \leq n\} = \begin{cases} \Omega & n \geq n_0 \\ \emptyset & n < n_0 \end{cases} \in \mathfrak{F}_n$$
  
b) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein zu  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  adaptierter reellwertiger Prozess und  $A \in \mathfrak{B}$ . Sei  $\tau_A : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definiert durch

$$\tau_A(\omega) := \inf \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) \in A\} \quad (\inf \{\emptyset\} := \infty)$$

$\tau_A$  heißt **Eintrittszeit** in  $A$ .

$\tau_A$  ist Stoppzeit, da

$$\{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{\{X_i \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n.$$

**Lemma 8.1**

- a) Für eine Stoppzeit ist

$$\mathfrak{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\sigma$ -**Algebra der  $\tau$ -Vergangenheit**.

- b) Sind  $\tau_1, \tau_2$  Stoppzeiten mit  $\tau_1 \leq \tau_2$ , so gilt  $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$ .

c) Ist  $\tau$  eine Stoppzeit, so ist  $X_\tau^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$X_\tau^*(\omega) := \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{wenn } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \mathfrak{F}_\tau\text{-messbar}$$

### Beweis

a) Übung.

b) Sei  $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$  beliebig.  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\{\tau_2 \leq n\} \subset \{\tau_1 \leq n\} \implies A \cap \{\tau_2 \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \in \mathfrak{F}_n.$$

$\implies$  Beh.

c) zu zeigen:  $\{X_\tau^* \in A\} \in \mathfrak{F}_\tau \quad \forall A \in \mathfrak{B}$

zeige also:  $\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Es gilt:

$$\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \underbrace{\{X_k \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k,$$

$$\text{da } \{\tau = k\} = \underbrace{\{\tau \leq k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau \leq k-1\}^C}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k.$$

$\implies$  Beh. ■

### Bemerkung

a)  $\mathfrak{F}_\tau \equiv$  Information, die bis zur zufälligen Zeit  $\tau$  vorhanden ist.

b) Falls  $\tau$   $P$ -f.s. endlich, schreibt man  $X_\tau$  statt  $X_\tau^*$ .

c) Ist  $\tau$  eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein stochastischer Prozess, so ist  $X^\tau = (X_n^\tau)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $X_n^\tau := X_{\tau \wedge n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$  der **gestoppte Prozess**.

Da  $\tau \wedge n$  eine Stoppzeit ist, ist wegen Lemma 8.1c)  $X_{\tau \wedge n} \mathfrak{F}_{\tau \wedge n}$ -messbar und  $(X_n^\tau)$  ist  $(\mathfrak{F}_{\tau \wedge n})$ -adaptiert.

### Satz 8.5

Ist  $X$  ein (Sub-, Super-) Martingal und ist  $\tau$  eine Stoppzeit, so ist auch  $X^\tau$  ein (Sub-, Super-) Martingal.

### Beweis

Sei  $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}} \implies \{\tau \geq n\} = \{\tau \leq n-1\}^C \in \mathfrak{F}_{n-1}$ .

$\implies (c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist vorhersagbar. Da  $X_0 + \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1}) = X_{\tau \wedge n}$ , folgt die Behauptung mit Satz 8.4. ■

**Bemerkung**

Ist  $X$  ein Martingal, so auch  $X^\tau$  und damit gilt  $EX_{\tau \wedge n} = EX_0$ .

Betrachte Bsp 8.4 mit  $\tau := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_k \geq X_0 + c\}$  und  $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}}$ :

Solange  $c$  nicht erreicht ist, wird eine Geldeinheit gesetzt, danach aufgehört. Spielt man maximal  $n$ -mal, so ist  $X_{\tau \wedge n}$  das Kapital am Ende. Im Mittel kann man das Kapital bei einem fairen Spiel nicht erhöhen.

**Beispiel 8.6 (Kartenspiel)**

Sei

- $S_0$  die Anzahl der schwarzen Karten und
- $R_0$  die Anzahl der roten Karten und
- $N := S_0 + R_0$  die Gesamtzahl an Karten.
- $(R_n, S_n)$  die Anzahl der roten / schwarzen Karten im Stapel, nachdem  $n$  Karten aufgedeckt wurden.
- $Z_n$  die Farbe der  $n$ -ten aufgedeckten Karte.
- $\mathfrak{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$  und
- $X_n := \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}$ .

Behauptung:  $(X_n)$  ist  $(\mathfrak{F}_n)$ -Martingal!

$$\begin{aligned}
 E[X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= E\left[\frac{S_{n+1} - R_{n+1}}{S_{n+1} + R_{n+1}} \mid Z_1, \dots, Z_n\right] \\
 &= \frac{S_n}{S_n + R_n} \left[\frac{S_n - 1 - R_n}{S_n - 1 + R_n}\right] + \frac{R_n}{S_n + R_n} \left[\frac{S_n - R_n + 1}{S_n + R_n - 1}\right] \\
 &= \frac{(R_n + S_n - 1)(S_n - R_n)}{(S_n + R_n)(S_n + R_n - 1)} \\
 &= \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}
 \end{aligned}$$

Sei  $\tau$  eine Stoppzeit ( $\leq N$ ). Erwarteter Gewinn:

$$\begin{aligned}
 &E[\mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{rot}]}] \\
 &= E\left[\sum_{k=1}^N (\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]} ) \mathbf{1}_{[\tau=k]}\right] \\
 &= \sum_{k=1}^N E\left[E[(\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]} ) \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mid \mathfrak{F}_k]\right] \\
 &= \sum_{k=1}^N E\left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \underbrace{E[\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]} \mid \mathfrak{F}_k]}_{= \frac{S_k - R_k}{S_k + R_k} = X_k}\right]
 \end{aligned}$$

$$= E[X_\tau] = EX_0 = \frac{S_0 - R_0}{S_0 + R_0}$$

$EX_\tau = EX_0$  gilt nur unter einer Bedingung, wie dieses Beispiel zeigt.

**Beispiel 8.7** Sei  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von u.i.v. ZVen mit

$$P(Y_n = -1) = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad X_0 \equiv 0$$

$Y_n$  = Ergebnis Münzwurf in Runde  $n$ .

Der Spieler setzt  $2^{n-1}$  GE in der  $n$ -ten Runde, bei Gewinn erhält er  $2^n$  GE, d.h.  $Y_n \cdot 2^{n-1}$  ist der Geldzu-/abgang in der  $n$ -ten Runde.

Kapital nach  $n$  Runden:

$$X_n := \sum_{i=1}^n 2^{i-1} Y_i$$

Sei  $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$  und  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = 1\}$  d.h. gestoppt wird, wenn erstmals  $Y_n = 1$  ( $\rightarrow$  Martingalstrategie).  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal (s. Bsp. 8.1).

Es gilt:

$$P(\tau > k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(\tau < \infty) = 1$$

und

$$X_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\tau=k} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} + 2^{k-1}\right)}_{=1} \mathbf{1}_{\tau=k} \equiv 1$$

Also ist hier  $EX_\tau = 1 \neq EX_0 = 0$ .

Vorsicht bei der Nachahmung!

Das benötigte Kapital beträgt  $-X_{\tau-1}$  GE und

$$\begin{aligned} E(-X_{\tau-1}) &= E\left(\sum_{k=1}^{\tau-1} 2^{k-1}\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \mathbf{1}_{[\tau > k]}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \underbrace{P(\tau > k)}_{=2^{-k}} = \infty \end{aligned}$$

### Satz 8.6 (Optional Stopping Theorem OST)

Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Supermartingal und  $\tau$  eine Stoppzeit. Jede der folgenden Bedingungen impliziert, dass  $E|X_\tau| < \infty$  und  $EX_\tau \leq EX_1$  gilt:

1.  $\tau$  ist f.s. beschränkt, also  $P(\tau < c) = 1$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ .

2.  $\tau$  ist f.s. endlich und  $X$  ist f.s. beschränkt, d.h.  $P(\tau < \infty) = 1$  und es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $P(|X_n| \leq c) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ .
3.  $E\tau < \infty$  und  $X$  hat f.s. beschränkte Zuwächse, d.h.  $\exists c \in \mathbb{R}$  mit  $P(|X_n - X_{n-1}| \leq c) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ .
4.  $P(\tau < \infty) = 1, E|X_\tau| < \infty$  und  $\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt und  $X$  ein Martingal, so gilt:  $EX_\tau = EX_1$ .

**Beweis** 1. Ist klar, da hier  $X_\tau = X_{\tau \wedge n}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  groß ( $n > c$ ). Die Behauptung folgt aus Satz 8.5.

2. Satz 8.5 und majorisierte Konvergenz.
3. Verwende  $|X_1| + c(\tau - 1)$  als integrierbare Majorante.
4. Wir zeigen die Aussage für  $X$  ist Martingal:

$$\begin{aligned}
 |EX_\tau - EX_{\tau \wedge n}| &= \left| \int X_\tau dP - \int_{\{\tau \leq n\}} X_\tau dP - \int_{\{\tau > n\}} X_n dP \right| \\
 &\leq \left| \int_{\{\tau > n\}} X_\tau dP \right| + \left| \int_{\{\tau > n\}} X_n dP \right| \\
 &\leq \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_\tau| dP}_{\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)} + \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP}_{\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Beispiel 8.8 (Ruinspiel, vgl. Stochastik I, Bsp 10.4)** Spieler I besitze  $n$  GE ( $n \in \mathbb{N}$ ), Spieler II  $N - n$  GE ( $N - n \in \mathbb{N}$ ). Pro Runde gewinnt Spieler I von Spieler II 1 GE mit W'keit  $p$  und verliert eine GE an Spieler II mit W'keit  $1 - p$ . Spielrunden sind unabhängig. Seien  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  u.i.v. ZV mit

$$P(Y_n = 1) = p, \ P(Y_n = -1) = 1 - p.$$

$X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$  ist dann der Gewinn (Verlust) von Spieler I nach  $n$  Runden.

Sei

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N - n \text{ oder } X_n = -n\}$$

$P(X_\tau = -n)$  = Ruinwahrscheinlichkeit von Spieler I.

Sei  $\mu = EY_1 = 2p - 1$ . Nach Beispiel 8.1  $\mu = 0 \Rightarrow (X_n)$  Martingal.  $\mu \leq 0 \Rightarrow (X_n)$

Supermartingal.  $\mu \geq 0 \Rightarrow (X_n)$  Submartingal.

**Behauptung:**  $\exists a > 0, 0 < \gamma < 1$ , sodass  $P(\tau > j) \leq a\gamma^j \ \forall j \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Sei  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 P(\tau > Nk) &\leq P((Y_1, \dots, Y_n) \neq (1, \dots, 1), \\
 &\quad (Y_{N+1}, \dots, Y_{2N}) \neq (1, \dots, 1), \dots, (Y_{(k-1)N+1}, \dots, Y_{kN}) \neq (1, \dots, 1)) \\
 &\stackrel{(Y_n) \text{ unabh.}}{=} \prod_{v=0}^{k-1} P((Y_{vN+1}, \dots, Y_{(v+1)N}) \neq (1, \dots, 1)) \\
 &= (1 - p^N)^k
 \end{aligned}$$



Für  $j > N$  gilt:

$$P(\tau > j) \leq P(\tau > \lfloor \frac{j}{N} \rfloor N) \leq (1 - p^N)^{\lfloor \frac{j}{N} \rfloor} \leq \underbrace{\left( (1 - p^N)^{\frac{1}{N}} \right)^j}_{=: \gamma^j} \underbrace{(1 - p^N)^{-1}}_{=: a}$$

■

Also folgt:  $P(\tau < \infty) = 1$ ,  $E\tau = \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau \geq j) < \infty$  und  $1 = P(\tau < \infty) = P(X_\tau = N - n) + P(X_\tau = -n)$ .

Sei nun  $M_n := \sum_{k=1}^n (Y_k - \underbrace{EY_k}_{=\mu})$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $M_0 = 0$  und  $\mathfrak{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ .

Dann ist  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein  $(\mathfrak{F}_n)$ -Martingal. Das OST ist anwendbar, da (iii) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= EM_\tau = P(X_\tau = N - n)(N - n - E\tau\mu) + P(X_\tau = -n)(-n - E\tau\mu) \\ &= P(X_\tau = N - n)(N - n) - P(X_\tau = -n)n - E\tau\mu. \end{aligned}$$

Fall 1:  $\mu = 0$  (d.h.  $p = \frac{1}{2}$ , faires Spiel)

$$\Rightarrow 0 = (1 - P(X_\tau = -n))(N - n) - P(X_\tau = -n)n \Rightarrow P(X_\tau = -n) = \frac{N - n}{N}$$

Fall 2:  $p \neq \frac{1}{2}$

Sei  $\Theta := \log(\frac{1-p}{p}) \neq 0$  und  $L_0 := 1$ ,  $L_n := \prod_{k=1}^n e^{\Theta Y_k} = e^{\Theta X_n}$ .  
 $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal, da

$$E[L_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] = \prod_{k=1}^n e^{\Theta Y_k} \cdot \underbrace{E[e^{\Theta Y_{n+1}}]}_{pe^{\Theta} + (1-p)e^{-\Theta} = 1} = L_n$$

Das Optional Stopping Theorem 8.6 ist anwendbar, da (iv) erfüllt  
 $E|L_\tau| = Ee^{\Theta X_\tau} \leq e^{|\Theta|N} < \infty$  und

$$\int_{\{\tau > n\}} |L_n| dP \leq e^{|\Theta|N} \underbrace{P(\tau > n)}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= EL_0 = EL_\tau = P(X_\tau = N - n)e^{\Theta(N-n)} + P(X_\tau = -n)e^{-\Theta n} \\ \Rightarrow 1 &= (1 - P(X_\tau = -n)) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-n} + P(X_\tau = -n) \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\ \Rightarrow P(X_\tau = -n) &= \frac{\phi^N - \phi^n}{\phi^N - 1}, \quad \phi = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

### Optimales Stoppen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X = (X_n)_{n=1, \dots, N}$  ein stochastischer Prozess adaptiert an eine Filtration  $(\mathfrak{F}_n)_{n=1, \dots, N}$ . Es sei  $E|X_k| < \infty \quad \forall k = 1, \dots, N$ . Betrachte das Optimierungsproblem

$$v := \sup_{\tau \text{ ist Stoppzeit } \leq N} \{EX_\tau\} = EX_{\tau_0}$$

$v$  = maximaler Wert,

$\tau_0$  = optimale Stoppzeit (falls existent). Wegen

$$E|X_\tau| = \sum_{n=1}^N E(|X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}) \leq \sum_{n=1}^N E|X_n| < \infty$$

nach Voraussetzung ist  $v < \infty$ . Ist  $(X_n)_{n=1,\dots,N}$  ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$  Supermartingal, so folgt mit Satz 8.6:  $EX_1 \geq EX_\tau \quad \forall$  Stoppzeiten  $\tau \leq N$ .

Also:  $\tau_0 \equiv 1$  ist optimal (sofort aufhören).

### Definition

Der Prozess  $Z = (Z_n)_{n=1,\dots,N}$  mit

$$Z_N := X_N, \quad Z_n := \max\{X_n, E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]\}, \quad n = N-1, \dots, 1$$

heißt **Snell-Einhüllende** von  $X$ .

**Satz 8.7** Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

- a)  $Z$  ist ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ -Supermartingal mit  $Z_n \geq X_n$  für  $n = 1, \dots, N$ .
- b)  $Z$  ist das kleinste  $(\mathfrak{F}_n)$ -Supermartingal, welches  $X$  dominiert, d.h. ist  $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$  ein weiteres  $(\mathfrak{F}_n)$ -Supermartingal mit  $Y_n \geq X_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  so gilt:  $Y_n \geq Z_n$  für  $n = 1, \dots, N$ .

### Beweis

- a) Aus der Definition:  $Z_n \geq X_n \quad \forall n$ ,  $Z_n \geq E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]$ , also  $(Z_n)$  Supermartingal.
- b) Rückwärtsinduktion:  
 $(n = N): Y_N \geq X_N = Z_N$   
 $(n \rightarrow n-1): Y_{n-1} \stackrel{Y \text{ Supermartingal}}{\geq} E[Y_n | \mathfrak{F}_{n-1}] \stackrel{\text{I.H.}}{\geq} E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}]$  und  $Y_{n-1} \geq X_{n-1}$   
 $\implies Y_{n-1} \geq \max\{X_{n-1}, E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}]\} = Z_{n-1}$  ■

### Satz 8.8

Mit den obigen Bezeichnungen und  $\tau_0 = \min\{n \in \{1, \dots, N\} \mid X_n = Z_n\}$  gilt:

- a)  $\tau_0$  ist eine Stoppzeit.
- b)  $(Z_n^{\tau_0})_{n=1,\dots,N}$  ist ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ -Martingal.
- c)  $EX_{\tau_0} = \sup_{\tau \text{ Stoppzeit}} \{EX_\tau\}$

### Beweis

a) Wegen  $Z_N = X_N$  ist  $\tau_0 \leq N$ . Es gilt:

$$\{\tau_0 \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{\{Z_i = X_i\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n$$

b) Es gilt:

$$\underbrace{Z_{n+1}^{\tau_0}}_{=Z_{(n+1) \wedge \tau_0}} - \underbrace{Z_n^{\tau_0}}_{=Z_n \wedge \tau_0} = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} (Z_{n+1} - E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]) \quad (*)$$

da

Fall 1:  $\tau_0 \geq n+1$

linke Seite =  $Z_{n+1} - Z_n$ ,

rechte Seite =  $Z_{n+1} - \underbrace{E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]}_{=Z_n}$ , da  $X_n < Z_n$  auf  $\{\tau_0 \geq n+1\}$ . (stimmt)

Fall 2:  $\tau_0 \leq n$

$0 = 0$  (stimmt)

Wende nun  $E[\cdot | \mathfrak{F}_n]$  auf (\*) an:

Da  $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{\tau_0 \leq n\}^C \in \mathfrak{F}_n$  folgt

$$E[Z_{n+1}^{\tau_0} - Z_n^{\tau_0} | \mathfrak{F}_n] = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} E[Z_{n+1} - E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n] | \mathfrak{F}_n] = 0$$

$\implies (Z_n^{\tau_0})$  ist  $(\mathfrak{F}_n)$ -Martingal.

c) Wegen b) und Satz 8.6:

$$EZ_1 = EZ_1^{\tau_0} = EZ_N^{\tau_0} = EZ_{\tau_0} = EX_{\tau_0}$$

Für eine beliebige Stoppzeit  $\tau$  gilt:

$EZ_1 \geq EZ_\tau$ , da  $Z$  Supermartingal. Und weiterhin:

$$EX_{\tau_0} = EZ_1 \geq EZ_1 \geq EZ_\tau \geq EX_\tau \implies \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

**Beispiel 8.9 (Das Sekretärinnenproblem)**  $N$  Bewerber(innen) um eine Stelle stellen sich nacheinander vor. Nach jedem Interview muss entschieden werden, ob die Person die Stelle bekommt.

Annahme: Die Bewerber lassen sie linear anordnen und erscheinen in beliebiger Reihenfolge. ( $N!$  mögliche Reihenfolgen)

Welche Strategie maximiert die Wahrscheinlichkeit, dass die beste Person die Stelle bekommt?

- $A_n$  = absoluter Rang des  $n$ -ten Kandidaten unter allen  $N$ .
- $R_n$  = dessen relativer Rang unter den ersten  $N$ .  $R_n = \{1 \leq m \leq n \mid A_m \leq A_n\}$ .

Es gibt eine Bijektion zwischen den  $A$ -Werten und den  $R$ -Werten. Somit gilt  $\forall r_1, \dots, r_N$ ,  $1 \leq r_i \leq i$ ,  $1 \leq i \leq N$ :

$$P(R_1 = r_1, \dots, R_N = r_N) = \frac{1}{N!}$$

Bestimme Randverteilungen:

$$P(R_n = l) = \frac{1}{n} \quad \text{für } l = 1, \dots, n \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

und  $R_1, \dots, R_N$  unabhängig. Sei nun

$$\bar{X}_n := \begin{cases} 1, & A_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathfrak{F}_n = \sigma(R_1, \dots, R_n)$$

und  $X_n = E[\bar{X}_n | \mathfrak{F}_n]$ .  $(X_n)$  ist  $(\mathfrak{F}_n)$ -adaptiert.  $P(\bar{X}_\tau = 1) \rightarrow \max$ .

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_\tau = 1) &= \sum_{n=1}^N P(\bar{X}_n = 1, \tau = n) = \sum_{n=1}^N E \mathbf{1}_{[\tau=n, \bar{X}_n=1]} \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{\{\tau=n\}} \bar{X}_n dP = \sum_{n=1}^N \int_{\{\tau=n\}} \underbrace{E[\bar{X}_n | \mathfrak{F}_n]}_{=X_n} dP \\ &= EX_\tau \end{aligned}$$

Also maximiere  $EX_\tau$  mit Satz 8.8.

$$\begin{aligned} P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, A_n = 1) &= P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\ &= \frac{1}{N!} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (N-1) = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_n = 1 \mid R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1) &= \frac{P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, A_n = 1)}{P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1)} \\ &= \frac{\frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n}{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n = E[\mathbf{1}_{\{1\}}(A_n) | \mathfrak{F}_n] = \begin{cases} \frac{n}{N}, & \text{falls } R_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (*)$$

**Behauptung:**  $\exists (c_n)_{n=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}$ ,  $c_n \downarrow$ ,  $c_N = \frac{1}{N}$  und  $E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}] \equiv c_n$  für  $n = 1, \dots, N$ , wobei  $Z$  die Snell-Einhüllende von  $X$  ist.

**Beweis:** Rückwärtsinduktion:

$n = N$ :

$$\begin{aligned} E[Z_N | \mathfrak{F}_{N-1}] &= E[X_N | \mathfrak{F}_{N-1}] \stackrel{A_N = R_N}{=} E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_N) | \mathfrak{F}_{N-1}] \\ &\stackrel{R_N, \mathfrak{F}_N \text{ unabh.}}{=} P(R_N = 1) = \frac{1}{N} = c_N. \end{aligned}$$

$n+1 \rightsquigarrow n$ :

$$\begin{aligned}
E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}] &= E[\max\{X_n, E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]\} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\stackrel{(*)}{=} E[\max\{\frac{n}{N} \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}(R_n), c_{n+1}\} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&= E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_n) \cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - \mathbf{1}_{\{1\}}(R_n))c_{n+1} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\stackrel{R_n, \mathfrak{F}_{n-1} \text{ unabh.}}{=} P(R_n = 1) \cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - P(R_n = 1)) \cdot c_{n+1} \\
&= \frac{1}{n} \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - \frac{1}{n})c_{n+1} \\
&\Rightarrow c_n = c_{n+1} + \underbrace{\max\{\frac{1}{N}, \frac{c_{n+1}}{n}\} - \frac{c_{n+1}}{n}}_{\geq 0} \Rightarrow c_n \geq c_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\tau^* := \inf\{n \mid Z_n = X_n\}$$

Stoppregel nach Satz 8.8:  $\tau^* = \min\{n \mid X_n = Z_n\}$ .

- gestoppt wird vor  $N$  nur, wenn  $R_n = 1$ .
- die Werte  $X_n \neq 0$  sind wachsend.
- die Werte  $E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = c_{n+1}$  fallend.

$$\begin{aligned}
\tau^* &= \min\{1 \leq n \leq N-1 \mid R_n = 1, \frac{n}{N} \geq c_{n+1}\} \wedge N \\
&= \min\{n \geq k_n \mid R_n = 1\} \wedge N.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt noch  $k_N$ .

Sei  $\tau_k := \inf\{n \geq k \mid R_n = 1\} \wedge N$ . Bestimme  $EX_{\tau_k}$ .

$k_N$  ist dann der  $k$ -Wert, bei dem  $EX_{\tau_k}$  maximal ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
EX_{\tau_k} &= \sum_{l=k}^N E[X_l \cdot \mathbf{1}_{\{l\}}(\tau_k)] \\
&= \sum_{l=k}^N \frac{l}{N} \underbrace{P(R_m > 1 \text{ für } m = k, \dots, l-1, R_l = 1)}_{=P(\tau_k=l)} \\
&= \sum_{l=k}^N \frac{l}{N} \underbrace{\left( \prod_{m=k}^{l-1} \frac{m-1}{m} \right)}_{=P(R_m > 1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{l}}_{=P(R_l=1)} \\
&\stackrel{\text{Teleskop. Prod.}}{=} \frac{k-1}{N} \sum_{l=k}^N \frac{1}{l-1}
\end{aligned}$$

$\Phi(k) := \frac{k-1}{N} \sum_{l=k}^N \frac{1}{l-1}$  wird maximal in  $k_N := \inf\{k \mid \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{N-1} \leq 1\}$ .

Beachte:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_N}{N} \stackrel{!}{=} \frac{1}{e}$ .

Bei einem großen Bewerberkreis wird man etwa 37 Prozent der Bewerber passieren lassen und dann den ersten nehmen, der besser als alle vorangegangenen ist.

