

7. Wichtige Beispiele

Satz 7.1 (Konvergenzsatz für Wurzeln)

Sei (a_n) eine konvergente Folge, $a_n \geq 0$. Es sei $a := \lim a_n$ ($\xrightarrow{6.2} a \geq 0$) und $p \geq 2$. Dann:
 $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$.

Beweis

Fall 1: $a = 0$ Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \rightarrow 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon^p \forall n > n_0 \xrightarrow{5.1} \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0$
 $\implies |\sqrt[p]{a_n} - 0| = \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0 \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0$

Fall 2: $a > 0$ $|a_n - a| = |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \stackrel{4.2}{=} |x - y| \cdot |x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1}|$
 $\geq |x - y| \cdot \underbrace{y^p - 1}_{=:c} = |x - y| \cdot c = |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \cdot c \implies |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \underbrace{\frac{1}{c}|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a} \blacksquare$

Beispiel 7.2

Sei $x \in \mathbb{N}$ und $a_n := x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Fall 1: $x = 0 \implies (a_n)$ ist konvergent und $a_n \rightarrow 0$

Fall 2: $x = 1 \implies (a_n)$ ist konvergent und $a_n \rightarrow 1$

Fall 3: $x = -1 \implies (a_n)$ ist divergent.

Fall 4: $|x| > 1$: $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \implies |a_n| = |x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \implies a_n$ ist nicht beschränkt. 6.1(2) $\implies (a_n)$ ist divergent.

Fall 5: $0 < |x| < 1$: Dann $\frac{1}{|x|} > 1 \implies \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta \implies \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{|x^n|} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \implies |a_n| \leq \frac{1}{n\eta} \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow 0$

Beispiel 7.3

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$

$$\S 4 \implies s_n = \begin{cases} n + 1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

7.2 $\implies (s_n)$ ist konvergent $\iff |x| < 1$. In diesem Fall: $s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$ ($n \rightarrow \infty$)

Satz 7.4 (Satz über $\sqrt[n]{n}$)Es gilt: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$)**Beweis**

$$a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \implies a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Zu zeigen ist: } a_n \rightarrow 0. \text{ Für } n \geq 2: \sqrt[n]{n} = 1 + a_n \implies n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \quad \forall n \geq 2 \implies \underbrace{0}_{\rightarrow 0} < a_n < \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\rightarrow 0} \implies a_n \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Beispiel 7.5 (Konvergenz von Wurzeln)Sei $c > 0$. Dann: $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).**Beweis**

$$\text{Fall 1: } c \geq 1 \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \geq c \implies 1 \leq c \leq n \quad \forall n \geq m \implies \sqrt[n]{n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{7.4} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1$$

$$\text{Fall 2: } c < 1 \implies \frac{1}{c} > 1 \xrightarrow{\text{Fall 1}} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}_{=\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} \rightarrow 1 \xrightarrow{6.2(\text{vii})} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1 \quad \blacksquare$$

Satz 7.6 (Satz und Definition von e)

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}); \quad b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

 (a_n) und (b_n) sind konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.**Definition:** $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt eulersche Zahl. ($2 < e < 3$, $e \approx 2,718$)**Beweis**In der großen Übung wurde gezeigt: $a \leq a_n < a_{n+1} < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. 6.3 $\implies (a_n)$ ist konvergent, $a := \lim a_n$. $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n \implies (b_n)$ ist monoton wachsend.

$$b_n = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{< \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< \frac{1}{2^3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}}_{< \frac{1}{2^{n-1}}} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

 $\implies (b_n)$ ist nach oben beschränkt. 6.3 $\implies (b_n)$ ist konvergent, $b := \lim b_n$

Zu zeigen: $a = b$.

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(a + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \quad (*) \\
 &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n
 \end{aligned}$$

Also: $a_n < b_n \quad \forall n \geq 2 \implies a \leq b$.

Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (fest) und $n > j$. Aus (*) folgt:

$$\begin{aligned}
 a_n &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} = c_n^{(j)} \\
 \implies c_n^{(j)} &\rightarrow 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty) \\
 \implies a_n &\geq c_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \geq b_j.
 \end{aligned}$$

Also: $b_j \leq a \quad \forall j \geq 2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} b \leq a$. ■

