2 Übung vom 05.05.

1. Aufgabe

i) neue Zielfunktion: $-x_1 + x_2 + 2x_3 = \max$
ii) Nebenbedingungen: Einführen von Schlupfvariablen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + y_1 &= 1, \quad y_1 \geq 0 \\ x_1 - x_3 + y_2 &= 1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

iii) Vorzeichenbedingung:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^+ - x_2^-, \qquad x_2^+ \geq 0,\ x_2^- \geq 0 \\ x_3 &= x_3^+ - x_3^-, \qquad x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2^+ - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- &= \max \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Aufgabe

Die Nebenbedingung $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 1 - x_1 + 2x_2$ ermöglicht es, x_3 zu ersetzen.

Als Zielfunktion ergibt sich dadurch $-x_1 + (4-\beta)x_2 - 2 + 2x_1 - 4x_2$.
Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn wir den konstanten Term streichen.

Als neues LP erhalten wir dann (...):

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) = -x_1 + \beta x_2 &= \max \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 5 && (1) \\ -x_1 &\leq 2 && (2) \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 && (3) \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 && (4) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$[p = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \end{pmatrix}]$

`Beachte:` Das (LP) wurde direkt in Standardform übergeführt! Die vierte Nebenbedingung ergibt sich aus der alten vierten Nebenbedingung.

Wir bestimmen wieder die notwendigen Geradengeichungen:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3} && (1) \\ x_1 &= -2 && (2) \\ x_2 &= x_1 + 1 && (3) \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} && (4) \end{aligned}$$

Um eine Lösung zu finden, müssen wir die Gerade

$$\{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \cdot \rangle = \alpha\}$$

in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ \beta \end{pmatrix}$ auf den zulässigen Bereich verschieben.

`Anmerkung:` Hätten wir das (LP) nicht umgeformt und in der alten Form stehen lassen, so wäre der Normalenvektor -p und wir hätten zum minimieren in die Gegenrichtung (also wieder p) verschieben müssen.

1. Fall: $\beta < 0$

$\Rightarrow$ Lösung unseres Problems ist der Punkt (0,0).

$\Rightarrow$ Lösung des ursprünglichen (LP) ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Fall: $\beta = 0$

$\Rightarrow$ Lösung ist die Menge $\{(1-\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha \in [0,1]\}$.

$\Rightarrow$ Lösung des ursprünglichen (LP) ist $\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : \ \alpha \in [0,1]\}$

3. Fall: $0 < \beta < 1$

$\Rightarrow$ Die Lösung ist (0,1).

$\Rightarrow$ Die Lösung des ursprünglichen Problems ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Fall: $\beta = 1$

$\Rightarrow$ Die Lösung ist die Menge $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Die Lösung des ursprünglichen Problems ist $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha \geq 0\}$

5. Fall: $\beta > 1$

$\Rightarrow$ keine Lösung

(...)

Hier ohne Schaubilder!

3. Aufgabe

$A = \{x^1, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq n + 2$

Gesucht: $A_1, A_2 \subset A$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cup A_2 = A$ und conv $A_1 \cap$ conv $A_2 \neq \varnothing$

Beweis:

Wir betrachten das homogene LGS $(*)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_k x^k &= 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k &= 0 \end{aligned}$$

in $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (d.h. $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sind die Unbekannten).

Das homogene LGS besteht aus n+1 Gleichungen und $k \geq n + 2$ Unbekannten. Also existiert eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene Lösung) $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$.

Wir setzen $I_+ := \{i \in \{1, \ldots, k\} : \ \alpha_i^* \geq 0\}$, $I_- := \{i \in \{1, \ldots, k\} : \ \alpha_i^* < 0\}$.
Dann gilt: $I_+ \cap I_- = \varnothing$, $I_+ \cup I_- = \{1, \ldots, k\}$, $I_+ \neq \varnothing \neq I_-$.

Weiter definieren wir $A_+ := \{x^i : \ i \in I_+\}$, $A_- := \{x^i : \ i \in I_-\}$.
Es gilt: $A_+ \cap A_- = \varnothing$, $A_+ \cup A_- = A$

Da $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ Lösung des LGS $(*)$ ist, gilt:

$$\sum_{i \in I_+} \alpha_i^* x^i = \sum_{i \in I_-} -\alpha_i^* x^i$$

$$\alpha^* := \sum_{i \in I_+} \alpha_i^* = -\sum_{i \in I_-} \alpha_i^*$$

Insbesondere gilt: $\alpha^* > 0$.
Division durch α^* liefert:

$$\underbrace{\sum_{i\in I_+} \frac{\alpha_i^*}{\alpha^*} x^i}_{\in \text{conv } A_+} = \underbrace{\sum_{i\in I_-} \frac{-\alpha_i^*}{\alpha^*} x^i}_{\in \text{conv } A_-}$$

Also gilt: conv $A_+ \cap$ conv $A_- \neq \varnothing$

4. Aufgabe

Sei $x \in \text{conv } M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a^i$ mit $a^i \in M, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ und $k \in \mathbb{N}$.
Wir nehmen an, k ist minimal. (Insbesondere $\alpha_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$.)

Wir zeigen, dass $a^1, \dots, a^k$ affin unabhängig sind.

1. Fall: $\dim \text{aff } \{a^1, \dots, a^k\} = n$
zu zeigen: $k \leq n + 1$
Annahme: $k \geq n + 2$
Aufgabe 3 $\Rightarrow \exists$ Indexmengen I_1, I_2 nichtleer, disjunkt und $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, k\}$ und Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$ mit

$$\sum_{i\in I_1} \beta_i = 1 = \sum_{i\in I_2} \beta_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i\in I_1} \beta_i a^i = \sum_{i\in I_2} \beta_i \alpha^i =: y$$

Für $\gamma > 0$ beliebig gilt nun:

$$x = x + \gamma y - \gamma y = \sum_{i\in I_1} (\alpha_i + \gamma\beta_i) a^i + \sum_{i\in I_2} (\alpha_i - \gamma\beta_i) a^i$$

Es gilt:

$$\sum_{i\in I_1} (\alpha_i + \gamma\beta_i) + \sum_{i\in I_2} (\alpha_i - \gamma\beta_i) = 1 + \gamma - \gamma = 1$$

Wir setzen $\gamma = \frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}}$ mit $\frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} = \min_{i\in I_2} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$.
Dann gilt: $\alpha_i - \gamma\beta_i \geq 0$ für alle $i \in I_2$ und $\alpha_{i_0} - \gamma\beta_{i_0} = 0$.

Also ist x Konvexkombination von (k-1) Punkten. **Widerspruch zur Voraussetzung!**
Also gilt $k \leq n + 1$.

2. Fall: $\dim \text{aff } \{a^1, \dots, a^k\} < n$
Betrachte die Menge $\widetilde{M} = M \cap \text{aff } \{a^1, \dots, a^k\}$ und wende Fall 1 auf $\widetilde{M}$ und aff $\{a^1, \dots, a^k\}$ an.