19. Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition
Zwei Gebiete G_1, $G_2 \subseteq \mathbb{C}$ heissen **konform äquivalent** $(G_1 \sim G_2) :\iff \exists f \in H(G_1)$: $f(G_1) = G_2$, f ist auf G_1 injektiv.

„$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in $\mathbb{C}$.

Satz 19.1 (Riemannscher Abbildungssatz)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.
Dann: $G \sim \mathbb{D} \iff G \neq \mathbb{C}$ und G ist ein Elementargebiet.

Beweis
„$\implies$":
10.2 (Satz von Liouville) $\implies G \neq \mathbb{C}$
11.13 $\implies G$ ist ein Elemenetargebiet.
"$\Longleftarrow$": nach 19.5.

Definition
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G hat die Eigenschaft (W) $:\iff \forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset\ \exists g \in H(G)$: $g^2 = f$ auf G.

Beachte: Elementargebiete haben die Eigenschaft (W) (siehe 11.4)

Lemma 19.2
G_1, $G_2 \subseteq \mathbb{C}$ seien Gebiete, es gelte $G_1 \sim G_2$ und G_1 habe die Eigenschaft (W). Dann: G_2 hat die Eigenschaft (W).

Beweis
Übung. ■

Lemma 19.3
$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit der Eigenschaft (W) und es sei $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert ein Gebiet G^*:

$$0 \in G^* \subseteq \mathbb{D} \text{ und } G \sim G^* \ (G^* \text{ hat also die Eigenschaft (W)})$$

Beweis
$G \neq \mathbb{C} \implies \exists c \in \mathbb{C} : c \notin G$. Dann: $f(z) = z - c$ hat keine Nullstelle in G. ($f \in H(G)$)
(W) $\implies \exists g \in H(G)$: $g^2 = f$ auf G. Für z_1, $z_2 \in G$:
$(+)$ aus $g(z_1) = \pm g(z_2)$ folgt $f(z_1) = f(z_2)$, also $z_1 = z_2$.
Insbesondere: g ist injektiv auf G. $G_1 := g(G)$. Also $G_1 \sim G$.
Sei $a \in G_1$. $\exists r > 0 : U_r(a) \in G_1$.

Sei $\omega \in G_1$.
Annahme: $-\omega \in G_1$.
$\exists z_1, z_2 \in G : g(z_1) = \omega = -g(z_2)$. $(+) \implies z_1 = z_2 \implies \omega = 0 \implies g(z_1)^2 = 0 \implies f(z_1) = 0$. Widerspruch.
Also: $-\omega \notin G_1$

Insbesondere: $0 \notin G_1, -a \notin G_1$.
Definiere $\varphi \in H(G_1)$ durch $\varphi(w) = \frac{1}{w+a}$. (Wohl definiert und holomorph)
Übung: φ injektiv.
$G_2 := \varphi(G_1) \implies G_2 \sim G_1$, also: $G \sim G_2$.
Sei $\nu \in G_2 \implies \exists \omega \in G_1$: $\nu = \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega+a}$.

Annahme: $|\omega + a| < r$. Dann: $|-\omega - a| < r \implies -\omega \in U_r(a) \subseteq G_1$. Widerspruch.
Also: $|\omega + a| \geq r$.

$\implies |r| \leq \frac{1}{r}$. G_2 also beschränkt.
Mit einer Abbildung $z \mapsto z + \alpha$: (Translation)
$\exists$ Gebiet G_3: $G_2 \sim G_3$, $0 \in G_3$, G_3 beschränkt. Somit: $G \sim G_3$.
Mit einer geeigneten Abbildung $z \mapsto \delta z$ ($\delta > 0$): $\exists$ Gebiet G^*: $G^* \sim G_3, 0 \in G^*, G^* \subseteq \mathbb{D}$.
Somit $G \sim G^*$. ∎

Lemma 19.4
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und es sei $G \neq \mathbb{D}$.
Dann existiert $\varphi \in H(G)$: $\varphi(0) = 0$, φ ist auf G injektiv. $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}$[1] und $|\varphi'(0)| > 1$.

Beweis
$G \neq \mathbb{D} \implies \exists a \in \mathbb{D} : a \notin G$. $f(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.
$f \in H(G)$, 12.4 $\implies f \in Aut(\mathbb{D})$. $a \notin G$. $f(a) = 0$ (einzige Nullstelle). f hat in G keine Nullstelle.
(W) $\implies \exists g \in H(G)$: $g^2 = f$ auf G.$|g|^2 = |f| \overset{12.4}{<} 1$, also $|g| < 1$ auf G. D.h.: $g(G) \subseteq \mathbb{D}$. Dann: $c = g(0) \in \mathbb{D}$. $h(z) := \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$, $\varphi := h \circ g$. Klar: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = h(g(0)) = h(c) = 0$, φ ist injektiv auf G, $\varphi(G) = h(\underbrace{g(G)}_{\subseteq \mathbb{D}}) \subseteq h(\mathbb{D}) \overset{=}{12.4}\ \mathbb{D}$. Nachrechnen: $|\varphi'(0)| = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$. ∎

Lemma 19.5
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und $\mathcal{F} := \{\varphi \in H(G)\colon \varphi(0) = 0,\ \varphi$ ist injektiv auf G und $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}\}$.
Weiter sei $\Psi \in \mathcal{F}$ und es gelte (*) $|\varphi'(0)| \le |\Psi'(0)|\ \forall \varphi \in \mathcal{F}$. Dann: $\varphi(G) = \mathbb{D}$. Insbesondere $G \sim \mathbb{D}$.

Beweis
$\widetilde{G} := \Psi(G)$. 19.2 $\implies$ $\widetilde{G}$ hat die Eigenschaft (W). Weiter: $0 = \Psi(0) \in \widetilde{G} \subseteq \mathbb{D}$.

Annahme: $Gs \neq \mathbb{D}$. Wende 19.4 auf Gs an: $\exists \widetilde{\varphi} \in H(\widetilde{G})$: $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, $\widetilde{\varphi}$ ist injektiv, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$ und $|\widetilde{\varphi}'(0)| > 1$. $\varphi := \widetilde{\varphi} \circ \Psi$. Dann: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = \widetilde{\varphi}(\Psi(0)) = \widetilde{\varphi}(0) = 0$. φ ist auf G injektiv, $\varphi(G) = \widetilde{\varphi}(\Psi(G)) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$. Also $\varphi \in \mathcal{F}$. Aber:
$|\varphi'(0)| = |\widetilde{\varphi}'(\Psi(0)\Psi'(0)| = \underbrace{|\widetilde{\varphi}'(0)|}_{>1}\underbrace{|\Psi'(0)|}_{\overset{11.11}{\neq} 0} > |\Psi'(0)|$, Widerspruch zu (*). ■

Beweis
Beweis „$\Longleftarrow$" von 19.1:
Sei G ein Elementargebiet und $G \neq \mathbb{C}$. 11.4 $\implies$ G hat die Eigenschaft (W).
ObdA: $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ (wg 19.3). Sei $\mathcal{F}$ wie in 19.5. $\phi_0(z) := z$. Dann: $\phi_0 \in \mathcal{F}$. Wegen 19.5 genügt es zu zeigen:

$$\exists \Psi \in \mathcal{F} : |\varphi(0)| \le |\Psi(0)|\ \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

$s :=$. $\exists$ Folge (φ_n) in $\mathcal{F}$: $|\varphi_n'(0)| \to s$. $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\implies$ $|\varphi_n(z)| \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in G$. Satz von Montel $\implies$ (φ_n) enthält eine auf G lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.
ObdA: (φ_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig. $\Psi(z) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z)$ $(z \in G)$. 10.5 $\implies$ $\Psi \in H(G)$ und $\varphi_n'(0) \to \Psi'(0)$. Also: $|\Psi'(0)| = s$. $\Psi(0) = \lim \varphi_n(0) = 0$. Es ist $|\varphi'(0)| = 1 \le |\Psi'(0)|$. Insbesondere ist Ψ auf G nicht konstant. φ_n injektiv $\forall n \in \mathbb{N} \overset{17.6}{\implies} \Psi$ it injektiv. $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N} \implies |\Psi(z)| \le 1 \forall z \in G$ Annahme: $\exists z_0 \in G$: $|\Psi(z0)| = 1$. 11.6 $\implies$ Ψ konstant. Widerspruch! Also $\Psi(G) \subseteq \mathbb{D}$
Fazit: $\Psi \in \mathcal{F}$ und $|\varphi'(0)| \le |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$. ■

Satz 19.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, I)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

$$G \text{ ist Elementargebiet} \iff G \text{ hat die Eigenschaft (W)}$$

Beweis
„$\implies$": 11.4.
„$\Longleftarrow$":
Fall 1: $G = \mathbb{C}$. $\checkmark$
Fall 2: $G \neq \mathbb{C}$. Im Beweisteil „$\Longleftarrow$" von 19.1 wurde nur die Eigenschaft (W) benutzt. Also $G \sim \mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ ist ein Elementargebiet $\overset{11.13}{\implies}$ G ist ein Elementargebiet. ■