4 Nichtsinguläre Kurven

§18 Funktionenkörper in einer Variablen

Satz 7
Ist K/k Funktionenkörper in einer Variablen über k (das heißt endlich erzeugt, $\mathrm{trdeg}_k(K) = 1$), so gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte nichtsinguläre Kurve C mit $k(C) \cong K$.

Beweis Sei $C_K = \{R \subset K : R \text{ ist diskreter Bewertungsring, } k \subset R\}$
Ist C nichtsinguläre Kurve, so ist für jedes $x \in C$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,x}$ ein diskreter Bewertungsring in $k(C)$ mit $k \subset \mathcal{O}_{C,x}$
Die Eindeutigkeit wird aus Prop. 18.4 und Prop. 18.5 folgen. □

Bemerkung 4.18.1
Für $f \in K$ ist $P_F := \{R \in C_K : f \notin R\}$ endlich (Polstellenmenge von f).

Beweis Œ $f \in K \setminus k$ (sonst ist $P_f = \emptyset$).
Dann ist $g := \frac{1}{f}$ transzendent über k, also $K/k(g)$ endlich.
dann sei B der ganze Abschluss von $k[g]$ in K. B ist dann ein Dedekindring (Alg I, Satz ...) und somit endlich erzeugte, reduzierte k-Algebra.
$\Rightarrow$ es gibt eine affine Varietät V mit $k[V] \cong B$.
Für jedes $x \in V$ ist $\mathcal{O}_{V,x}$ ein diskreter Bewertungsring $\Rightarrow$ V ist nicht singulär.
Sei $R \in P_f$, also $f \notin R$. Dann ist $g \in R \overset{g \notin R}{\Rightarrow} g \in m_R \Rightarrow k[g] \subseteq R \Rightarrow B \subseteq R$. ($R$ ist normal).
$m := m_R \cap B$ ist maximales Ideal in $B \Rightarrow B_m$ ist diskreter Bewertungsring, $B_m \subseteq R$

<u>Beh.</u>: Dann ist $B_m = R$.
<u>Denn</u>: Andernfalls sei $a \in R \setminus B_m$.
Schreibe $a = u \cdot f^{-n}$ mit $u \in B_m^\times$, $n > 0$, $(f) = m$
Dann wäre $\frac{1}{a} = u^{-1} \cdot f^n \in m \Rightarrow a \in R^\times$
$f^n \in R^\times$, Widerspruch zu $f^n \in m_R$.

$\Rightarrow \exists x \in V$ mit $R = \mathcal{O}_{V,x}$, $g \in m_R$.
ist $g(x) = 0 \Rightarrow x \in V(g) \subset V$.
da $g \neq 0$, ist $V(g) \neq V$, also endlich. □

Bemerkung 4.18.2
Sei C eine irreduzible, nichtsinguläre Kurve über k, $K = k(C)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{O}_{C,x} \in C_K$ für jedes $x \in C$
(b) $\varphi : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C_K \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}_{C,x} \end{array}$ ist injektiv.
(c) $C_K \setminus \varphi(C)$ ist endlich.

Beweis c) Œ Sei C affin, dann ist $K = \mathrm{Quot}(k[C])$

Für $R \in C_k$ gilt: $R \in \varphi(C) \Leftrightarrow k[C] \subset R$ (denn das ist äquivalent zu $R = k[C]_m$ für ein maximales Ideal $m \subset k[C]$).

Seien $x_1, ..., x_r$ Erzeuger von $k[C]$ als k-Algebra, dann ist

$$\varphi(C) = \{R \in C_K : x_i \in R \text{ für } i = 1, ..., r\} = \bigcap_{i=1}^{r} \{R \in C_K : x_i \in R\}$$

Nach 18.1. ist $C_k \setminus U_i (= P_{x_i})$ endlich $\Rightarrow C_K \setminus \varphi(C)$ ist endlich. □

Bemerkung 4.18.3

C_K ist Varietät durch

(a) $U \subseteq C_K$ offen $\Leftrightarrow C_K \setminus U$ endlich (oder $U = \emptyset$)

(b) Für U sei $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_{C_K}(U) = \bigcap_{R \in U} R$

Beweis Sei C affine, nichtsinguläre Kurve mit $k(C) \cong K$. Dann ist nach 18.2 $\varphi(C)$ offen und dicht in C_K und $\varphi : C \to \varphi(C)$ ist Isomorphismus, denn $\mathcal{O}_{C_K, R_0} = R_0$ für jedes $R_0 \in C_K$.
Für $U \subset C_K$ offen mit $R_0 \in U$ ist $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$
$\Rightarrow \mathcal{O}_{C_K, R} = \lim_{R_0 \in U} \mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$.
Für $f \in R_0$ sei $U_f = C_K \setminus P_f \Rightarrow f \in \mathcal{O}(U_f)$
Für $U \subset C$ offen ist $\mathcal{O}_C(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C,x}$
Wir sind sicher: $\varphi : C \to \varphi(C)$ ist ein homöomorphismus.
Wir brauchen noch: Für jedes offene $U \subset C$ einen Isomorphismus von k-Algebren (verträglich mit "$\subseteq$"):

$$\begin{array}{lccc}
\alpha_U : & \mathcal{O}_{C_K}(\varphi(U)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(U) \\
& \| & & \| \\
& \bigcap_{R \in \varphi(U)} R & & \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C,x} \\
& \| & & \| \\
& \bigcap_{R \in \varphi(U)} \mathcal{O}_{C_K, R} & = & \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C_K, \varphi(x)}
\end{array}$$

□

<u>Beh.</u>: Für jedes $R \in L_K$ gibt es eine affine Kurve C_R mit $R \in \varphi(C_R)$, also mit $k[C_R] \subset R$.
<u>Denn</u>: Sei $g \in R \setminus k$, B der ganze Abschluss von $k[g]$ in K. Dann ist $B \subset R$ und $B = k[C_R]$ für eine nichtsinguläre, affine Kurve C_R (siehe 18.1).

Proposition 4.18.4

C_K ist projektiv.

Beweis Sei $C_K = \bigcup_{i=1}^r V_i$ mit affinen nichtsingulären Kurven V_i wie in **??**. Seien weiter $V_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}(k)$ und C_i der Zariski-Abschluss von V_i in $\mathbb{P}^{n_i}(k)$. C_i ist projektive Kurve (eventuell singulär). Nach Proposition 4.18.6 lässt sich die Einbettung $V_i \hookrightarrow C_i$ zu einem Morphismus $\varphi_i : C_K \longrightarrow C_i$.
Sei $\varphi : C_K \longrightarrow \prod_{i=1}^r C_i$ ist projektiv, $C := \overline{\varphi(C_K)}$ auch.
$\varphi : C_K \longrightarrow C$ ist dominant $\Rightarrow k(C) \subseteq K \Rightarrow k(C) \cong K$.

Behauptung
φ ist surjektiv.

Beweis Sei $x \in C$, R der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_{C,x}$ in K. R ist normal, also diskreter Bewertungsring

$$\Rightarrow R \in C_K \Rightarrow \mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \cong \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \Rightarrow x = \varphi(R)$$

Beweis (obiges "$\cong$") für i mit $R \in V_i$ ist $R \cong \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$. Die Projektion $pr_i : C \longrightarrow C_i$ ist dominant

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \text{ ist injektiv,}$$

also ein Isomorphismus, da $\mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$ ein diskreter Bewertungsring ist. (benutze: Ist R diskreter Bewertungsring, $K = \mathrm{Quot}(R)$, $S \subset K$ lokaler Ring mit $R \subseteq S$ und $m_S \cap R = m_R$, so ist $R = S$) □

Noch zu zeigen:

Bemerkung 4.18.5
Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ ein bijektiver Morphismus. Ist für jedes $x \in V$ der induzierte Homomorphismus $\mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ ein Isomorphismus, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis Œ V, W affin, sei $A := k[W], B := k[V]$
Die Voraussetzung ist äquivalent zu:
$\alpha : A \longrightarrow B$ ist ein k-Algebrenhomomorphismus, sodass $\alpha_m : A_m \longrightarrow B_{m'}$ für jedes maximale Ideal m von A ein Isomorphismus ist (wobei m' das, wegen der Bijektivität von φ, eindeutig bestimmte maximale Ideal von B mit $\alpha^{-1}(m') = m$).
Zu zeigen: α ist bijektiv
α ist injektiv, da φ surjektiv ist.
α ist surjektiv: Sei $x \in B$, $I_x := \{y \in A : y \cdot x \in A\}$
I_x ist Ideal in A.
Ist $I_x = A$, so ist $1 \in I_x$, also $x \in A$.
Ist $I_x \neq A$, so sei m maximales Ideal in A mit $I_x \subseteq m$

$$\begin{aligned}
&\overset{Vor.}{\Rightarrow} \exists a \in A, b \in A - m \text{ mit } \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \text{ in } A_m = B_{m'} \\
&\Rightarrow \exists t \in A - m \text{ mit } t \cdot (b \cdot x - a) = 0 \\
&\Rightarrow t \cdot bx = ta \in A \\
&\Rightarrow tb \in I_x \subseteq m \text{ Widerspruch! ,da } t \notin, b \notin m
\end{aligned}$$
□

Proposition 4.18.6
Sei C nichtsinguläre irreduzible Kurve, V projektive Varietät, $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen und $\varphi : U \longrightarrow V$ ein Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus $\bar{\varphi} : C \longrightarrow V$ mit $\bar{\varphi}|U = \varphi$

Beweis $C - U$ ist endlich, also Œ $C - U = \{x\}$, Œ $V = \mathbb{P}^n(k)$ und $\varphi(U) \not\subset V(X_i), i = 1, \ldots, n$
Sei $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ \varphi$ für $i \neq j$. h_{ij} ist regulär auf $\varphi^{-1}(D(X_i))$ ($\neq \emptyset$, da $\varphi(U) \not\subset V(X_j)$)
$\Rightarrow h_{ij} \in k(C) =: K$
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_{C,x}$ diskreter Bewertungsring in K. Sei $v_x : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ die zugehörige Bewertung. Seien weiter $v_i := v_x(h_{i,0}), i = 1, \ldots, n$ und $r_k := \min\{v_t, i = 1, \ldots, n\}$.
Für $i \neq k$ ist dann

$$\begin{aligned} v_x(h_{ik}) &= v_x\left(\frac{X_i X_0}{X_0 X_k} \circ \varphi\right) \\ &= v_x\left(\left(\frac{X_i}{X_0} \circ \varphi\right) \cdot \left(\frac{X_0}{X_k} \circ \varphi\right)\right) \\ &= v_x(h_{i,0}) - v_x(h_{k,0}) \\ &= r_i - r_k > 0 \end{aligned}$$

$\exists$ Umgebung $\bar{U}$ von x mit $h_{ik} \in \mathcal{O}_C(\bar{U}), i = 1, \ldots, n\ , i \neq k$. Für $y \in U$ sei

$$\tilde{\varphi}(y) := \begin{cases} (h_{0k}(y) : \cdots : h_{nk}(y)) & k = 0 \text{ oder } r_k \leq 0 \\ (1 : h_{1,k}(y) \cdot h_{k,0}(y) : \cdots : h_{m,k}(y) \cdot h_{k,0}(y)) & k \neq \ \text{ und } r_k > 0 \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ ist Morphismus $\bar{U} \longrightarrow V$
(mit Bild in $D(X_k)$ beziehungsweise $D(X_0)$. Für $y \neq x$ ist $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$). □

§19 Divisoren

Definition 4.19.1
Sei C eine nichtsinguläre, irreduzible Kurve.

(a) Ein ***Divisor*** auf C ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad P_i \in C$$

$$\mathrm{Div}(C) := \{D = \sum n_i P_i : \ D \text{ ist Divisor auf } C\}$$

ist eine freie abelsche Gruppe, genannt ***Divisorengruppe*** von C.

(b) Für $D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$ heißt $\deg(D) := \sum_{i=1}^{n} n_i$ der ***Grad*** von D.

(c) D heißt ***effektiv***, wenn alle $n_i \geq 0$ sind.

Definition + Bemerkung 4.19.2
Sei C wie in 19.1, $f \in k(C)^\times$.

(a) Für $P \in C$ heißt $\mathrm{ord}_P(f) := v_P(f)$ die ***Ordnung*** von f in P (dabei sei v_P die zu P gehörige diskrete Bewertung von $k(C)$).

(b) $\mathrm{div}(f) := \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P$ heißt ***Divisor*** von f.

(c) $D \in \mathrm{Div}(C)$ heißt ***Hauptdivisor***, wenn ein $f \in k(C)^\times$ existiert mit $D = \mathrm{div}(f)$.

(d) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe $\mathrm{Div}_H(C)$ von $\mathrm{Div}(C)$.

(e) $\mathrm{Cl}(C) := {}^{\mathrm{Div}(C)}\!\big/_{\mathrm{Div}_H(C)}$ heißt ***Divisorenklassengruppe*** von C.

(f) Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(C)$ heißen ***linear äquivalent***, wenn $D - D'$ Hauptdivisor ist.
Schreibweisen: $D \equiv D', \quad D \sim D'$

Beweis

b) Zu zeigen: $\{P \in C : \mathrm{ord}_P(f) \neq 0\}$ ist endlich.
$\{P \in C : \mathrm{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V(\frac{1}{f})$ und $f \neq 0$.
d) $\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g) = \mathrm{div}(f \cdot g); \quad -\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(\frac{1}{f}); \quad 0 = \mathrm{div}(1)$ □

Beispiele 4.19.3

(a) $C = \mathbb{P}^1(k)$
Dann gilt $D \in \mathrm{Div}(C)$ ist Hauptdivisor $\Leftrightarrow \deg(D) = 0$
denn "$\Rightarrow$" Sei $f = \frac{\Pi_{i=1}^n (X-a_i)}{\Pi_{j=1}^m (X-b_j)} \in k(C)^\times$ mit $a_i, b_j \in k, \quad a_i \neq b_j$ für alle i, j
$\Rightarrow \mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j + (m-n) \cdot \infty$
$\Rightarrow \deg(\mathrm{div}(f)) = 0$
"$\Leftarrow$" Für Null- und Polstellen, die nicht im Punkt ∞ liegen, schreibe f wie oben, mit den entsprechenden Linearfakoren für die Nullstellen im Zähler, bzw. für die Polstellen im Nenner, jeweils mit Vielfachheiten.

(b) $C = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ (Homogenisierung von $y^2 = x^3 - x$)
$C = V(y^2 - x^3 + x) \cup \{(0:1:0)\}$ Sei $f = y = \frac{Y}{Z} \in k(C)^\times$. Gesucht: $\mathrm{div}(f)$
Auf $U_0 = D(Z)$ ist y regulär und hat 3 Nullstellen, nämlich $P_{-1} = (-1, 0), \quad P_0 = (0, 0)$ und $P_1 = (1, 0)$.
$\underline{P_0}$: $\quad m_{P_0}$ wird erzeugt von x und y.
Es ist $y^2 = x(\underbrace{x^2 - 1}_{\in \mathcal{O}_{C,P_0}^\times}) \Rightarrow y$ erzeugt m_{P_0} (mit x dagegen lässt sich nur y^2 erzeugen).
Mit $y = x(x-1)(x+1)$ und dem gleichen Argument zeigt man das gleiche für P_{-1} und P_1
$\Rightarrow P_0, P_{-1}, P_1$ haben alle Ordnung 1.
$\underline{P_\infty = (0:1:0)}$:
m_{P_∞} wird erzeugt von $\frac{X}{Y}$ und $\frac{Z}{Y}$ mit der Gleichung

$$\frac{Z}{X} = \left(\frac{X}{Y}\right)^3 - \frac{X}{Y}\left(\frac{Z}{Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{Y}\right)^3 = \frac{Z}{Y}\left(\underbrace{1 + \frac{X}{Y}\frac{Z}{Y}}_{\mathcal{O}_{C,P_\infty}^\times}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{X}{Y} \text{ erzeugt } m_{P_\infty}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(\frac{Y}{Z}\right) = -3$$

Insgesamt folgt: $\mathrm{div}(f) = P_{-1} + P_0 + P_1 - 3P_\infty$

Definition + Bemerkung 4.19.4
Seien C, C' nichtsinguläre Kurven, $f : C \to C'$ ein nichtkonstanter Morphismus.

(a) Sei $Q \in C'$ und $t \in m_Q$ Erzeuger.
Für $P \in f^{-1}(Q)$ heißt $e_P(f) := \mathrm{ord}_P(t \circ f)$ ***Verzweigungsordnung*** von f in P.

(b) $e_P(f)$ hängt nicht von der Wahl von t ab.

(c) Für $Q \in C'$ sei
$$f^*Q := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$
$$\text{und } f^* : \mathrm{Div}(C') \to \mathrm{Div}(C)$$
der induzierte Gruppenhomomorphismus.

(d) $f^*(\mathrm{Div}_H(C')) \subseteq \mathrm{Div}_H(C)$

Beweis d.) Sei $D = \mathrm{div}(g \circ f) \in \mathrm{Div}_H C'$.
Es gilt $f^*D = \mathrm{div}(g \circ f)$, denn:
Für $P \in C$ ist $\mathrm{ord}_P(g \circ f) = N$, falls $g \circ f = t_P^N \cdot u$ für eine Einheit $u \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und einen Erzeuger t_P von m_P. Der Koeffizient von P in f^*D ist
$$\underbrace{\mathrm{ord}_{f(P)}(g)}_{=:n} \cdot \underbrace{v_P(t_Q \circ f)}_{=:m}$$
mit $Q := f(P)$. Also:
$$\begin{aligned} &g = t_Q^n \cdot u_1, t_Q \circ f = t_P^m \cdot u_2 \\ \Rightarrow &g \circ f = (t_Q^n \circ f)^n \cdot (u_1 \circ f) = t^{m \cdot n} \cdot \underbrace{u_2^n(u_1 \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C,P}^\times} \\ \Rightarrow &\mathrm{ord}_P(g \circ f) = n \cdot m \end{aligned}$$
□

Definition + Proposition 4.19.5
Sei $f : C \longrightarrow C'$ ein nichkonstanter Morphismus irreduzibler, nichtsingulärer, projektiver Kurven.

(a) $\deg(f) := [k(C) : k(C')]$ heißt ***Grad*** von f (dabei wird $k(C')$ als Teilkörper von $k(C)$ über den von f induzierten Homomorphismus aufgefasst).

(b) Für $Q \in C'$ ist $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) = \deg(f)$

Beweis b.) Sei $f^{-1}(Q) = \{P1, \ldots, P_r\}, t = t_Q$ ein Erzeuger von m_Q
$$\Rightarrow e_{P_i}(f) = \mathrm{ord}_{P_i}(t \circ f) = \mathrm{ord}_{P_i}(t) = \dim_k \left(\mathcal{O}_{C,P_i}/(t)\right) (*)$$
wobei $(t) = \left(t_{P_i}^{e_{P_i}(f)}\right)$.
Œ C' affin, C affin (die P_i müssen in C sein)
Sei $R = k[C'], S = k[C]$. Dann ist S der ganze Abschluss von R in $k(C)$. Sei $U = R - m_Q$, also $R_U = \mathcal{O}_{C',Q}, S' := S_U$ ist ganz über R_U.
Behauptung: S' ist freier R_U-Modul vom Rang $n := (f)$.
"Beweis": S' ist endlich erzeugter R_U-Modul: vergleich Algebra II, Dedekindringe.

Mit dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe folgt die Behauptung "frei".
Weiter ist

$$S' \bigoplus_{\mathcal{O}_{C',Q}} k(C') = k(C) \Rightarrow \mathrm{Rg}(S') = [k(C) : k(C')] = n$$

Die maximalen Ideale $m_1, \ldots, m_r$ von S' entsprechen $P_1, \ldots, P_r$, genauer: $S'_{m_i} = \mathcal{O}_{C,P_i}$
Es ist $S'/t \cdot S'$ n-dimensionaler Vektorraum über $R_U/(t) = k$.
Weiter gilt:

$$tS' = \left(\bigcup_{i=1}^{r} tS'_{m_i} \right) \cap S'$$

Mit dem chinesischen Restsatz folgt:

$$S'/tS' = \bigoplus_{i=1}^{r} S'/(tS\_m_i' \cap S') \cong \bigoplus_{i=1}^{r} S'_{m_i}/tS'_{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{C,P_i}/(t)$$

und $\dim(\mathcal{O}_{C,P_i}/(t)) = e_{P_i}(f)$ □

Satz 8
Jeder Hauptdivisor auf einer irreduziblen, nichtsingulären Kurve hat Grad 0.

Beweis (Beweisidee)
$f \in k(C) \setminus k$ kann aufgefasst werden als rationale Abbildung $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Nach Prop. 18.5 ist f sogar ein Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1(k)$. Der Satz folgt dann aus:
Beh 1: "$\mathrm{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$"
Beh 2: $\deg(f^*D) = \deg(f) \cdot \deg(D)$ für jeden Divisor D.

Beweis (von Beh 1) Seien $(x_0 : x_1)$ homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}^1(k)$. Dann ist $\mathrm{div}(\frac{X_1}{X_0}) = (1:0) - (0:1)$ und

$$f^*((1:0) - (0:1)) \overset{4.19.4d.)}{=} \mathrm{div}\left(\frac{X_1}{X_0} \circ f\right) = \mathrm{div}(f)$$ □

Beweis (von Beh 2) folgt aus Proposition 4.19.5 b.) □

§20 Das Geschlecht einer Kurve

Sei C eine nichtsinguläre, projektive Kurve über k.

Definition + Bemerkung 4.20.1
Sei $D = \sum n_P P$ ein Divisor auf C.

(a) $L(D) := \{f \in k(C) : D + \mathrm{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ heißt ***Riemann-Roch-Raum*** zu $D, L(D)$ ist k-Vektorraum.

(b) $L(0) = k$

(c) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $L(D) = 0$

(d) Für $l(D) := \dim L(D)$ gilt:

$$l(D) = l(D'),\ \text{falls } D \equiv D'$$

Beweis (a) $f \in L(D) \Leftrightarrow$ für jedes $P \in C$ ist $\text{ord}_P(f) \geq -n_P$
$\text{ord}_P(f+g) \geq \min(\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g))$

(d) Sei $D' = D + \text{div}(g)$. Dann ist $L(D') \longrightarrow L(D),\ f \mapsto fg$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen, denn

$$\begin{aligned} &D' + \text{div}(f) \geq 0 \Leftrightarrow D + \text{div}(g) + \text{div}(f) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &D + \text{div}(fg) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Satz + Definition 9 (Riemann)

(a) Für jeden Divisor $D \in \text{Div}(C)$ mit $\deg D \geq -1$ ist $l(D) \leq \deg D + 1$.

(b) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, sodass für alle $D \in \text{Div}(C)$ gilt

$$l(D) \geq \deg D + 1 - \gamma$$

(c) Das kleinste $\gamma \in \mathbb{N}$, für das (b) erfüllt ist, heißt ***Geschlecht*** von C, Schreibweise: $g = g(C)$.

Bemerkung 4.20.2

(a) Sind C und C' isomorph, so ist $g(C) = g(C')$.

(b) $g(\mathbb{P}^1(k)) = 0$

Beweis (a) $\surd$

(b) Zu zeigen: für jeden Divisor D vom Grad ≥ 0 auf $\mathbb{P}^1(k)$ ist $l(D) = \deg D + 1$.
Schreibe: $D = D' + D_0$ mit $D' \geq 0$ und $\deg(D_0) = 0$. Nach Beispiel 4.19.3 ist D_0 Hauptdivisor.
$\Rightarrow l(D') = l(D)$. Also Œ $D \geq 0$,

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i \text{ mit } n_i \geq 1.$$

$\Rightarrow L(D) = \{f \in k(X) : \text{ord}_{P_i}(f) \geq -n_i, i = 1, \ldots, r \text{ und } f \text{ regulär auf } \mathbb{P}^1(k) \setminus \{P_1, \ldots, P_r\}\}$

Also ist

$$\begin{aligned} 1, &\frac{1}{X - P_1}, \ldots, \frac{1}{(X-P_1)^{n_1}}, \\ &\frac{1}{X - P_2}, \ldots, \frac{1}{(X-P_2)^{n_2}}, \\ &\vdots \\ &\frac{1}{X - P_r}, \ldots, \frac{1}{(X-P_r)^{n_r}} \end{aligned}$$

eine Basis von $L(D)$. □

Beweis (von Satz 9) (a) Induktion über $d = \deg(D)$

$d = 0$: Ist $f \in L(D), f \neq 0$, so ist $D + \operatorname{div}(f) \geq 0$. Da $\deg(D + \operatorname{div}(f)) = 0$, folgt $D + \operatorname{div}(f) = 0$

$$\Rightarrow D = -\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(\frac{1}{f})$$
$$\Rightarrow L(D) = f \cdot k \Rightarrow l(D) \leq 1$$

$d \geq 1$: Sei $D = \sum_{P \in C}$ und $f_1, \dots, f_{d+2} \in L(D)$.
Zu zeigen: die f_i sind linear abhängig. Sei dazu $P \in C$. Sortiere die f_i so, dass

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_P(f_i) = -n_P \text{ für } i = 1, \dots, k \text{ und} \\ &\operatorname{ord}_P(f_i) > -n_P \text{ für } i = k+1, \dots, d+2 \text{ (für ein } k \geq 0) \\ \Rightarrow &f_i \in L(D - P) \text{ für } i = k+1, \dots, d+2 \end{aligned}$$

Ist $k = 0$ oder $k = 1$, so sind $f_2, \dots, f_{d+2} \in L(D - P)$ nach Induktionsvoraussetzung linear abhängig. Sei also $k \geq 2$.
Sei $g_i := u_i(P) \cdot f_1 - u_1(P) \cdot f_i = t^{-n_P} \underbrace{(u_i(P) \cdot u_1 - u_1(P) \cdot u_i)}_{\in m_P}$
("=", wegen $f_i = t^{-n_P} \cdot u_i$ für $u_i \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und einen Erzeuger $t = t_P$ von m_P)

$$\begin{aligned} \Rightarrow &g_i \in L(D - P), i = 2, \dots, k \\ \Rightarrow &g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} \text{ sind linear abhängig} \\ \Rightarrow &f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} \text{ sind linear abhängig} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung 1:** Für jeden Divisor $D \in \operatorname{Div}(C)$ und jedes $P \in C$ gilt

$$l(D + P) \leq l(D) + 1$$

denn: Sei $f_1, \dots, f_n$ eine Basis von $L(D+P)$. Wie oben sei $f_1, \dots, f_k \notin L(D), f_{k+1}, \dots, f_n \in L(D)$. Definiere $g_i, i = 2, \dots, k$ wie oben (ist $k \leq 1$, so ist $l(D) \geq n - 1$).

$$\begin{aligned} &g_2, \dots, g_k \text{ linear unabhängig} \\ \Rightarrow &g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_n \text{ linear abhängig} \\ \Rightarrow &l(D) \geq n - 1 \end{aligned}$$

Für $D \in \operatorname{Div}(C)$ sei $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$. Dann ist zu zeigen

$$\exists \gamma \in \mathbb{N}\ \forall D \in \operatorname{Div}(C) : s(D) \leq \gamma$$

Es gilt
(i) $s(D) = s(D')$ für $D \equiv D'$ (4.20.1 (d))
(ii) $s(D') \leq s(D)$, falls $D' \leq D$ (Behauptung 1)
Wähle nun $f \in k(C) - k$ fest. Sei

$$N := f^*(0) = \sum_{\substack{P \in C \\ f(P) = 0}} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P$$

der Nullstellendivisor von f. $\deg(N) = \deg(f) =: n$.
Behauptung 2: Zu jedem Divisor $D \in \mathrm{Div}(C)$ gibt es einen linear äquivalenten Divisor D' mit $D' \leq m \cdot N$ für ein $m \geq 1$.
Behauptung 3: Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $l(m \cdot N) \geq m \cdot n + 1 - \gamma$ für alle $m \geq 1$.
Dann ist für $D \in \mathrm{Div}(C)$ und D' wie in Behauptung 2

$$\begin{aligned} s(D) &\overset{\text{(i)}}{=} s(D') \overset{\text{(ii)}}{\leq} s(m \cdot N) = m \cdot n + 1 - l(m \cdot N) \\ &\overset{\text{Beh. 3}}{\leq} m \cdot n + 1 - (m \cdot n + 1) + \gamma = \gamma \end{aligned}$$ □

Beweis (von Behauptung 2) Sei $D = \sum n_P \cdot P$
Gesucht: $h \in k(C)$ mit

$$n_P + \mathrm{ord}_P\, h \leq \begin{cases} m \cdot \mathrm{ord}_P(f) & : \quad \mathrm{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \quad \mathrm{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$$

Seien $P_1, \ldots, P_r$ die Punkte in C, für die $n_i := n_{P_i} > 0$ ist, aber $\mathrm{ord}_{P_i}(f) \leq 0$.
Sei $h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f(P_i)} \in k(C)^\times, i = 1, \ldots, r$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_{P_i}(h_i) \geq 1, i = 1, \ldots, r$$

$\mathrm{ord}_P(h_i) \geq 0$ für alle $P \neq P_i$ mit $\mathrm{ord}_P(f) \leq 0$

$$\Rightarrow h := \prod_{i=1}^{r} h_i^{n_i} \text{ hat die gewünschte Eigenschaft}$$ □

Beweis (von Behauptung 3) Sei $g_1, ..., g_n$ eine Basis von $k(C)$ über $k(f) = k(\frac{1}{f})$.
Dabei können die g_i so gewählt werden, dass sie ganz über $k[\frac{1}{f}]$ sind.
$\Rightarrow$ Jede Polstelle von g_i ist auch Polstelle von $\frac{1}{f}$, also Nullstelle von f.
$\Rightarrow \mathrm{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0$ für ein geeignet großes $\gamma_0 \in \mathbb{N}$ $(i = 1, ..., n) \Rightarrow g_i \in L(\gamma_0 N)$

Sei $m \geq 1$
Beh.: $\frac{g_i}{f^\nu} \in L((m + \gamma_0)N), \quad i = 1, ..., n; \ \nu = 0, ..., m$
Denn:
$\mathrm{div}(\frac{g}{f^\nu}) + (m+\gamma_0)N = \mathrm{div}(g_i) - \nu\,\mathrm{div}(f) + mN + \gamma_0 N \geq (m-\nu)N \geq 0,$ da $\mathrm{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0$ (s.o.)

Die $\frac{g_i}{f^\nu}$ sind k-linear unabhängig.
$\Rightarrow l((m + \gamma_0)N) \geq m(n + 1)$
$\overset{Bew.1+Ind.}{\Rightarrow} l(mN) \geq n(m + 1) - \gamma_0 n = mn - \underbrace{n(\gamma_0 - 1)}_{:=\gamma-1}$
(Denn: Kommt ein Punkt hinzu, so vergrößert sich die Dimension um 0 oder 1.) □

Folgerung 4.20.3
Sei C eine nichtsinguläre, projektive Kurve, $g = g(C)$. Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $D \in \mathrm{Div}(C)$ mit $\deg(D) \geq d_0$ gilt:

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g$$

Beweis Nach Satz 8 gibt es ein D_0 mit $l(D_0) = \deg(D_0) + 1 - g$.
Sei $d_0 = \deg(D_0) + g$ und sei $D \in \mathrm{Div}(C)$ mit $\deg(D) \geq d_0$
$\Rightarrow l(D - D_0) \geq \deg(D) - \deg(D_0) + 1 - g \geq 1$
Also gibt es ein $f \in L(D - D_0), f \neq 0$
$\Rightarrow D' := D + \mathrm{div}(f) \geq D_0$
$s(D) = s(D') \geq s(D_0) = g, \quad (s(D) = \deg(D) + 1 - l(D))$
mit Satz 8: $s(D) \leq g \ \ \forall D \Rightarrow s(D) = g$ □

Proposition 4.20.4
Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Grad $d \geq 1$ (d.h. $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom F vom Grad d). Dann ist

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Also: $d = 1, 2 \Rightarrow g = 0; d = 3 \Rightarrow g = 1; d = 4 \Rightarrow g = 3; d = 5 \Rightarrow g = 6$ ...
Es esistieren somit keine nichtsingulären Kurven vom Geschlecht 2,4,5,... in $\mathbb{P}^2(k)$

Beispiele 4.20.5
$V(X_0^d + X_1^d + X_2^d)$ ist nichtsingulär ($d \geq 1$, $\mathrm{char}(k) \nmid d$) ("Fermat-Kurve")

Beweis Beh. 1: Es gibt eine Gerade $L \subset \mathbb{P}^2(k)$ mit $\sharp(C \cap L) = d$.
Denn: Ausnahme bilden nur die Tangenten. Deren Menge ist aber ein Zariski-abgeschlossener Unterraum der Menge der Geraden.

Sei $L = V(F_1)$ wie in Beh. 1, $L \cap C = \{P_1, ..., P_d\}$
Œ $\quad P_i \in D(X_0), \quad i = 1, ..., d$

Beh.: Für $D = \sum_{i=1}^d P_i$, $m \geq 1$ und $g \in L(mD)$ gibt es ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, X_1, X_2]$ mit $g = \frac{H}{F_1^m}$
Denn: Sei

$$f_1 = \frac{F_1}{X_0} \in k(C)$$

Dann ist $\mathrm{div}(f_1^m g) = mD - mD' + \mathrm{div}(g)$ mit einem effektiven Divisor D' mit Träger in $V(X_0)$
$\Rightarrow f_1^m g$ ist ein Polynom in $\frac{X_1}{X_0}$ und $\frac{X_2}{X_0}$ vom Grad m.
Die Homogenisierung H von $f_1^m g$ erfüllt $g = \frac{H}{F_1^m}$

Also:

$$\begin{aligned}
L(mD) &= k[X_0, X_1, X_2]_m \big/ F \cdot k[X_0, X_1, X_2]_{m-d} \\
\Rightarrow l(mD) &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\
&= \frac{1}{2}[d(m-d+2) + d(m+1)] \\
&= md - \frac{1}{2}(d^2 - 3d) \\
&= md + 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)
\end{aligned}$$
□

§21 Der Satz von Riemann-Roch

Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve über k, k algebraisch abgeschlossen.

Erinnerung / Definition + Bemerkung 4.21.1
$\Omega_C := \Omega_{k(C)/k}$ sei der $k(C)$-Vektorraum der k-Differentiale von $k(C)$. Die Elemente von $\Omega_{k(C)/k}$ heißen ***rationale Differentiale*** oder ***meromorphe Differentiale*** auf C. Es gilt: $\dim_{k(C)} \Omega_C = 1$

Beweis

- Ist $C = \mathbb{P}^1(k)$, so ist $k(C) = k(X)$ und $\Omega_C = k(C) \cdot dX$.
- Im Allgemeinen ist $k(C) = k(x, y)$ für geeignete x, y.
  x und y sind algebraisch abgängig, das heißt es gibt $F \in k[X, Y]$ mit $F(x, y) = 0 \Rightarrow dF(x, y) = 0$. Es gibt also lineare Gleichungen zwischen dx und dy. $\square$

Definition + Bemerkung 4.21.2
Sei $\omega \in \Omega_C, \omega \neq 0$

(a) Für $P \in C$ sei t_P ein Erzeuger von m_P und $\omega = f dt_P$ (für ein $f \in k(C)$). Dann ist $\operatorname{ord}_P \omega := \operatorname{ord}_P(f)$ unabhängig von der Wahl des Erzeugers t_P.

(b) $\operatorname{div}(\omega) := \sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(\omega) \cdot P$ ist Divisor auf C.

(c) $K \in \operatorname{Div} C$ heißt ***kanonisch***, wenn es ein $\omega \in \Omega_C$ gibt mit $K = \operatorname{div}(\omega)$.

(d) Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.

Beweis (a) Übung!

(b) Sei $P \in C, t_P$ Erzeuger von m_P

$$U = C - \{\tilde{P} \in C : t_P \notin \mathcal{O}_{\tilde{P}}\}$$

ist offen in C. Für $Q \in U$ ist $t_Q := t_P - t_P(Q) \in m_Q$ und $d(t_Q) = d(t_P)$. Die Teilmenge

$$U' = \{Q \in U : t_Q \notin m_a^2\}$$

ist offen (!). Für $Q \in U'$ ist $\operatorname{ord}_Q(\omega) = \operatorname{ord}_P(f)$.
$\Rightarrow \operatorname{ord}_Q(\omega) \neq 0$ für nur endlich viele $Q \in U'$. $\square$

Beispiele
$C = \mathbb{P}^1(k), \omega = dz$
In $a \in C$ ist $z - a$ ein Erzeuger von m_a
$\Rightarrow \operatorname{ord}_a \omega = 0$, da $\omega = dz = 1 \cdot d(z - a)$
In ∞ ist $\frac{1}{z}$ Erzeuger von m_∞.

$$dz = -z^2 d(\frac{1}{z}), \operatorname{ord}_\infty(z^2) = -2 \Rightarrow \operatorname{div}(\omega) = -2 \cdot \infty$$

Satz 10 (Riemann-Roch)
Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve über k, K ein kanonischer Divisor auf C. Dann gilt für jeden Divisor $D \in \operatorname{Div}(C)$:

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

Beweis für den Fall $C \subset \mathbb{P}^2(k)$.
Behauptung: Für jeden Divisor D mit $l(D) > 0$ und jedes $P \in C$ gilt:
Ist $l(K-D-P) \neq l(K-D)$, so ist $l(D+P) = l(D)$.

Proposition 4.21.3
Sei $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ nichsinguläre projektive Kurve vom Grad $d \geq 3$ und $L \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine Geradee mit $L \cap C = \{P_1, \dots, P_d\}$. Dann ist

$$K = \sum_{i=1}^{d} (d-3) P_i$$

ein kanonischer Divisor.
Probe:

$$\begin{aligned} \deg K + 2 &= d(d-3) + 2 = d^2 - 3d + 2 = 2g \\ g &= \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2) \end{aligned}$$

Beweis Œ $L = V(X_0)$. Sei $X = \frac{X_1}{X_0}, Y = \frac{X_2}{X_0}$ (als Elemente von $k(C)$)
Behauptung:

$$\operatorname{div}(dx) = \sum_{i=1}^{d} (d-3) P_i + \operatorname{div}(f_y)$$

wobei f_y die Klasse in $k(C)$ von $\frac{1}{X_0^{d-1}} \cdot \frac{\partial F}{\partial X_2}$ ist. Dann ist

$$\operatorname{div}(f_y) = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot P - \sum_{i=1}^{d} (d-1) \cdot P_i$$

Zu zeigen ist also:

$$\operatorname{div} dx = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} P - 2 \cdot \sum_{i=1}^{d} P_i$$ □

Folgerung 4.21.4
$D = 0 : 1 - l(K) = 1 - g$

(a) $l(K) = g$
(b) $\deg(K) = 2g - 2, g - 1 = \deg K + 1 - g; D = K$
(c) für $\deg D \geq 2y - 1$ ist $l(D) = \deg D + 1 - g$