# 16. Metriken, Normen und Skalarprodukte

**Definition:** Metriken abstrahieren Abstände. Sei $X$ eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine **Metrik** oder ein **Abstand** auf $X$, falls gilt:

(a) $d$ ist **smmetrisch**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) = d(y, x)$$

(b) $d$ ist **positivdefintit**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } (d(x, y) = 0) \implies (x = y)$$

(c) Für alle $x, y, z \in X$ gilt die **Dreicksungleichung**:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

**Beispiel:** (1) Die **diskrete Metrik** $d_0$ auf $X$:

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x \neq y) \\ 0 & , (x = y) \end{cases}$$

(2) $X = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ mit Betrag $|\cdot|$ hat die Metrik:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Auf Vektorräumen über $K = \mathbb{R}$ entstehen natürliche Metriken aus sogenannten Normen.
Im Folgenden schreibe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VRm. Eine Abbildung:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

heißt eine **Norm**, falls für $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) Die Abbildung ist **positivdefinit**, d.h.:

$$\|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$$

(b) Die Abbildung ist **homogen**, d.h.:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(c) Es gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ist dies erfüllt, so ist $(V, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum**.

**Beispiel:** (1) Der Raum $V = \mathbb{K}$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und den Normen:

$$\text{(a) } \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\text{(b) } \|x\|_{\max} := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

$$\text{(c) } \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) Der Raum der beschränkten Abbildungen $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$ mit einer beliebigen Menge $M$ und der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{m \in M} |f(m)|$$

(3) Der Raum $V = C[a, b]$ der stetigen Abbildungen nach $\mathbb{K}$ mit der Norm:

$$\|f_1\| := \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

**Bemerkung:** (1) Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ besitzt die Metrik:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

(2) In der Linearen Algebra tauchen hauptsächlich Normen auf, die mit **Skalarprodukten** definiert werden.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VRm. Für $\alpha \in \mathbb{K}$ sei $\overline{\alpha}$ die komplexe Konjugierte.

(a) Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **Sesquilinearform** („sesqui“ bedeutet $1\frac{1}{2}$), falls

$$s(\alpha x + y, z) = \alpha \cdot s(x, z) + s(y, z)$$

gilt, also $s(\cdot, z)$ linear ist und außerdem noch gilt:

$$s(x, \alpha y + z) = \overline{\alpha} \cdot s(x, y) + s(x, z)$$

(b) Ist $s$ **schiefsymmetrisch**, d.h. es gilt:

$$s(y, x) = \overline{s(x, y)}$$

so heißt es **hermitesche Form** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. **symmetrische Bilinearform** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(c) Eine schiefsymmetrische Sesquilinearform heißt **Skalarprodukt** auf $V$, falls $s$ positivdefinit ist.

**Bemerkung:** Ist $\dim V = n < \infty$ mit einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, so ist eine Sesquilinearform $s$ bestimmt durch die Werte $s(b_i, b_j) \in \mathbb{K}$, also durch die **Darstellungsmatrix**

$$D_{BB}(s) := (s(b_i, bj)) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Jede beliebige Matrix $D = (d_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definiert ein $s := s_B^D$ mit:

$$s(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \cdot d_{ij}$$

**Definition:** $D$ heißt **hermitesch** (bzw. **positivdefinit**), wenn das zugehörige $s$ diese Eigenschaft hat.
Also gilt etwa:

$$\begin{aligned} & A = (a_{ij}) \text{ hermitesch} \\ \iff & \forall i, j = 1, \ldots, n : a_{ij} = \overline{a_{ji}} \\ \iff & A = \overline{A}^T \end{aligned}$$

**Beispiel:** Das **Standardskalarprodukt** auf $V = \mathbb{K}^n$

$$D = I \implies s(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

ist hermitesch und positivdefinit.

**Satz 11 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung):**
Ist $V$ VRm mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so gilt für alle $x, y \in V$:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

**Beweis:** Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \alpha \langle x, \alpha x + \beta y \rangle + \beta \langle y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + \alpha\beta(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + \beta^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Sei nun:

$$F := \langle x, x \rangle \qquad 2G := \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \qquad H := \langle y, y \rangle$$

**Annahme:** $G^2 > FH$
Dann hat $P(X) := FX^2 + 2GX + H \in \mathbb{R}[X]$ zwei verschiedene Nullstellen und es

existiert ein $\xi \in \mathbb{R} : P(\xi) < 0$. Dies stellt einen Widerspruch zu obiger Überlegung da (mit $\alpha = \xi$ und $\beta = 1$). Also gilt:

$$G^2 \leq FH$$

**Fall 1:** $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$
Dann gilt $G = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ und mit $G^2 \leq FH$ folgt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.
**Fall 2:** $\langle x, y\rangle \notin \mathbb{R}$
Ersetze $y$ durch $\zeta y$ mit $\zeta \in \mathbb{C}^\times, |\zeta| = 1$. Wähle $\zeta := \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle x, \zeta y\rangle &= \overline{\zeta}\langle x, y\rangle \\
&= \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{|\langle x, y\rangle|} \cdot \langle x, y\rangle \\
&= \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{|\langle x, y\rangle|} \\
&= |\langle x, y\rangle| \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nach Fall 1 folgt daraus:

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &= |\langle x, \zeta y\rangle|^2 \\
&\leq \langle x, x\rangle \cdot \langle \zeta y, \zeta y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle \cdot \zeta\overline{\zeta} \cdot \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung:** Im Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \overline{\eta_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2)$$

**Satz 12:**
Jeder VRm $V$ mit einem Skalarprodukt ist normiert durch die Norm:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

**Beweis:** (1) Es ist klar, das $\|x\| \in \mathbb{R}$ und $\|x\| \geq 0$ ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\|x\| = 0 &\implies \langle x, x\rangle = 0 \\
&\implies x = 0
\end{aligned}$$

(2) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2\|x\| \cdot \|y\| \\
\iff &\langle x, x\rangle\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle 2\|x\| \cdot \|y\| + \langle y, y\rangle \\
\iff &\langle x + y, x + y\rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\iff &\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

(3) Es gilt:

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = |\alpha|^2 \cdot \|x\|^2 \qquad \blacksquare$$

**Bemerkung:** (1) Mit Hilfe der Norm lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(2) Damit eine Norm von einem Skalarprodukt stammt, ist offenbar notwendig, dass sie die **Parallelogrammgleichung** erfüllt:

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Denn falls die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ kommt, gilt:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

Tatsächlich kommt eine Norm genau dann von einem Skalarprodukt, wenn sie die Parallelogrammgleichung erfüllt. Dies wird jedoch ohne Beweis angegeben.