

## § 7 Parameterintegrale

In diesem Paragraphen sei stets  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ .

### Satz 7.1

Sei  $U \in \mathfrak{B}_k$ ,  $t_0 \in U$  und es sei  $f: U \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit:

- (1) Für jedes  $t \in U$  ist  $x \mapsto f(t, x)$  messbar.
- (2) Es existiert eine Nullmenge  $N \subseteq X$  so, dass  $t \mapsto f(t, x)$  für jedes  $x \in X \setminus N$  stetig in  $t_0$  ist.
- (3) Es existiert eine integrierbare Funktion  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  und zu jedem  $t \in U$  existiert eine Nullmenge  $N_t \subseteq X$  so, dass für jedes  $t \in U$  und jedes  $x \in X \setminus N_t$  gilt:

$$|f(t, x)| \leq g(x)$$

Dann ist  $x \mapsto f(t, x)$  für jedes  $t \in U$  integrierbar. Ist  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t, x) dx,$$

so ist  $F$  stetig in  $t_0$ .

Also:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(t, x) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0) = \int_X f(t_0, x) dx = \int_X \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) dx$$

### Beweis

Aus (1) und (3) folgt, dass  $x \mapsto f(t, x)$  für jedes  $t \in U$  integrierbar ist (zur Übung). Sei  $(t_n)$  eine Folge in  $U$  mit  $t_n \rightarrow t_0$  und

$$g_n(x) := f(t_n, x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X)$$

Setze

$$\tilde{N} := N \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{t_n} \right)$$

Aus 5.1 folgt, dass  $\tilde{N}$  eine Nullmenge ist. Voraussetzung (2) liefert  $g_n(x) \rightarrow f(t_0, x)$  für jedes  $x \in X \setminus \tilde{N}$ , also gilt

$$g_n(x) \rightarrow f(t_0, x) \text{ fast überall auf } X$$

## 7. Parameterintegrale

Voraussetzung (3) liefert  $|g_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in X \setminus \tilde{N}$ . Aus 6.2 folgt

$$F(t_n) = \int_X f(t_n, x) dx = \int_X g_n dx \longrightarrow \int_X f(t_0, x) dx = F(t_0) \quad \blacksquare$$

### Bezeichnung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a := \inf I$  und  $b := \sup I$ , wobei  $a = -\infty$  oder  $b = +\infty$  zugelassen sind. Weiter sei  $f: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar (oder  $f$  ist messbar und  $\geq 0$ ) und

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{(a,b)} f|_{(a,b)}(x) dx$$

Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_{(a,b)} f(x) dx$$

Ist z.B.  $I = [a, b)$ , dann gilt, da  $\{a\}$  eine Nullmenge ist:

$$\int_I f dx = \int_{\{a\}} f dx + \int_{(a,b)} f dx = \int_{(a,b)} f dx$$

### Folgerung 7.2

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a = \inf I$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei integrierbar. Definiert man  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(t) := \int_a^t f(x) dx,$$

so ist  $F \in C(I)$ .

### Beweis

Für  $x, t \in I$  definiere  $h(t, x) := \mathbb{1}_{(a,t)} f(x)$ . Dann ist  $F(t) = \int_I h(t, x) dx$  und

$$|h(t, x)| = \mathbb{1}_{(a,t)} \cdot |f(x)| \leq |f(x)| \text{ für alle } t, x \in I$$

Aus 4.9 folgt, dass  $|f|$  integrierbar ist. Sei  $t_0 \in I$  und  $N := \{t_0\}$ , also eine Nullmenge. Dann ist  $t \mapsto h(t, x)$  für jedes  $x \in I \setminus N$  stetig in  $t_0$  (zur Übung). Die Behauptung folgt aus 7.1.  $\blacksquare$

### Satz 7.3

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $f: U \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Es sei  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  integrierbar und  $N \subseteq X$  sei eine Nullmenge. Weiter gelte:

- (1) für jedes  $t \in U$  sei  $x \mapsto f(t, x)$  integrierbar.
- (2) für jedes  $x \in X \setminus N$  sei  $t \mapsto f(t, x)$  partiell differenzierbar auf  $U$ .
- (3)  $\left| \frac{\partial f}{\partial t_j} \right| \leq g(x)$  für jedes  $x \in X \setminus N$ , jedes  $t \in U$  und jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$

Ist dann  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t, x) dx$$

so ist  $F$  auf  $U$  partiell differenzierbar und für jedes  $t \in U$  sowie jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t, x) dx$$

**Also:**  $\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t, x) dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t, x) dx.$

**Beweis**

Sei o.B.d.A.  $k = 1$ , also  $U \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $t_0 \in U$  und  $(h_n)$  eine Folge mit  $h_n \rightarrow 0$  und  $h_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$g_n(x) := \frac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N})$$

Aus Voraussetzung (2) folgt für jedes  $x \in X \setminus N$ :

$$g_n(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Nach dem Mittelwertsatz aus Analysis 1 existiert für jedes  $x \in X \setminus N$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $s_n = s_n(x)$  zwischen  $t_0$  und  $t_0 + h_n$  mit:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s_n, x) \right| \stackrel{(3)}{\leq} g(x)$$

Aus 6.2 folgt

$$\int_X g_n dx \longrightarrow \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx$$

Es ist nach Konstruktion gerade  $\int_X g_n dx = \frac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n}.$  ■

