# 3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In diesem Paragraphen seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset \neq E$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionen Re $f$, Im $f$, $|f| : D \to \mathbb{R}$ sind definiert durch:

$$(\text{Re } f)(z) := \text{Re } f(z),\ (\text{Im } f)(z) := \text{Im } f(z),\ |f|(z) := |f(z)|.$$

**Definition**
Sei $z_0$ ein HP von D und $a \in \mathbb{C}$.
$\lim_{z \to z_0} f(z) = a :\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - a| < \varepsilon\ \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$
In diesem Fall schreibt man $f(z) \to a\ (z \to z_0)$
$\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert $:\iff \exists a \in \mathbb{C} : \lim_{z \to z_0} f(z) = a$. Es gelten die üblichen Rechenregeln.

**Definition**

(1) Sei $z_0 \in D$. $f$ heißt **stetig** in $z_0 :\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$

(2) $f$ heißt stetig auf D $:\iff$ $f$ ist in jedem $z \in D$ stetig. In diesem Fall schreiben wir $f \in C(D)$.

**Beispiel**

(1) $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(a_0, ..., a_n \in \mathbb{C})$. Klar: $p \in C(\mathbb{C})$ (Linearkombination stetiger Funktionen).

(2) $f(z) = \begin{cases} \frac{\text{Re } z}{z} & , \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } z = 0. \end{cases}$
Klar: $f \in C(\mathbb{C} \backslash \{0\})$. Für $z \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist $f(z) = 1 \not\to f(0) = 0$ $(z \to 0)$. $f$ ist in $z_0 = 0$ nicht stetig.

(3) $f(z) = \begin{cases} \frac{(\text{Re } z)^2}{z} & , \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } z = 0. \end{cases}$
Für $z \neq 0 : |f(z)| = \frac{|\text{Re} z|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} \leq |z| \Rightarrow f$ ist in $z_0 = 0$ stetig. Insgesamt: $f \in C(\mathbb{C})$.

**Beispiel**
$D = \mathbb{C} \backslash \{0\}$; für $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in D$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sei $f(z) := \varphi = Arg\ z$. Behauptung: Ist $z_0 \in \mathbb{R}$ und $z_0 < 0 \Rightarrow f$ ist in $z_0$ nicht stetig. Denn:
Sei $z_n := |z_0|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i\sin(\pi - \frac{1}{n}))$, $w_n := |z_0|(\cos(-\pi + \frac{1}{n}) + i\sin(-\pi + \frac{1}{n})) \Rightarrow z_n \to -|z_0| = z_0, w_n \to -|z_0| = z_0$ und $f(z_n) = Arg\ z_n = \pi - \frac{1}{n} \to \pi, f(w_n) = Arg\ w_n = -\pi + \frac{1}{n} \to -\pi$

Wie im $\mathbb{R}^n$ beweist man die folgenden Sätze 3.1,3.2 und 3.3

**Satz 3.1**
Sei $z_0 \in D$.

(1) $f$ ist stetig in $z_0 \Leftrightarrow$Re$f$ und Im$f$ sind stetig in $z_0 \Leftrightarrow$ für jede Folge $(z_n)$ in $D$ mit $z_n \to z_0 : f(z_n) \to f(z_0)$.

(2) Ist $z_0$ ein HP von $D$, so gilt: f ist in $z_0$ stetig $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

(3) Sei $g : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und $f$ und $g$ seien stetig in $z_0$. Dann sind $f+g, fg, |f|$ stetig in $z_0$; ist $f(z) \neq 0 \, \forall z \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$ ist stetig in $z_0$.

**Satz 3.2**
Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, g : E \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $f(D) \subseteq E$. Ist $f$ stetig in $z_0$ und $g$ stetig in $f(z_0)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0$.

**Satz 3.3**
$D$ sei **kompakt** und $f \in C(D)$

(1) $f(D)$ ist kompakt

(2) $\exists \max |f|(D), \exists \min |f|(D)$

**Definition**
Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \, (a < b)$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt ein **Weg** (in $\mathbb{C}$). $\gamma(a)$ heißt **Anfangspunkt** von $\gamma$, $\gamma(b)$ heißt **Endpunkt** von $\gamma$. $\gamma([a,b])$ heißt der **Träger** von $\gamma$. 3.3 $\Rightarrow \gamma([a,b])$ ist kompakt. ("**Rektifizierbarkeit**" und "**Länge**"von $\gamma$: siehe Analysis II)

**Beispiele:**

(1) Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}; \gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0,1]. S[z_0, z_1] := \gamma([0,1])$ heißt die **Verbindungsstrecke** von $z_0$ und $z_1$.

(2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0; \gamma(t) := z_0 + r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi]. \gamma(0) = z_0 + r = \gamma(2\pi), \gamma([0,2\pi]) = \partial \overline{U_r(z_0)}$

Für den Rest des §en sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

**Definition**
$M$ heißt **konvex** :$\Leftrightarrow$ aus $z_0, z_1 \in M$ folgt stets: $S[z_0, z_1] \subseteq M$.

**Definition**

(1) Eine Funktion $\varphi : M \to \mathbb{C}$ heißt auf $M$ **lokalkonstant** :$\Leftrightarrow \forall a \in M \, \exists \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$ ist auf $U_\delta(a) \cap M$ konstant. Beachte: i.d.Fall: $\varphi \in C(M)$.

(2) $M$ heißt **zusammenhängend** (zsh) :$\Leftrightarrow$ jede auf $M$ lokalkonstante Funktion ist auf $M$ konstant.

(3) $M$ heißt **wegzusammenhängend** (wegzsh) :$\Leftrightarrow$ zu je zwei Punkten $z, w \in M$ existiert ein Weg $\gamma[a,b] \to \mathbb{C} : \gamma([a,b]) \subseteq M, \gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.

(4) $M$ heißt ein **Gebiet** $:\Leftrightarrow M$ ist offen und wegzsh.

**Bemerkung:**

(1) Mengen die offen und konvex sind, sind Gebiete.

(2) wegzsh $\Rightarrow$ zsh ("$\Leftarrow$" ist i.a. falsch)

**Satz 3.4**
$M$ sei offen, dann sind äquivalent:

(1) $M$ ist ein Gebiet

(2) $M$ ist wegzsh

(3) $M$ ist zsh

(4) Aus $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen folgt stets: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

**Beweis**
(1) $\Leftrightarrow$ (2): klar,(2) $\Leftrightarrow$ (3): ohne Beweis.
(3) $\Rightarrow$ (4): Sei $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen. Annahme: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Definiere $\varphi : M \to \mathbb{C}$ durch $\varphi(z) := \begin{cases} 1, z \in A \\ 0, z \in B \end{cases}$.
Sei $z_0 \in M$. 1. Fall (2. Fall) : $z_0 \in A(B), A(B)$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A(B) \Rightarrow \varphi$ ist auf $U_\delta(z_0)$ konstant. $\varphi$ ist also auf $M$ lokalkonstant. Vor $\Rightarrow \varphi$ ist auf $M$ konstant $\Rightarrow 1 = 0$, Wid!
(4) $\Rightarrow$ (3): Sei $\varphi : M \to \mathbb{C}$ lokalkonstant. Annahme: $\varphi$ ist nicht konstant auf $M$. $\exists z_0, w_0 \in M : \varphi(z_0) \neq \varphi(w_0). A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}; z_0 \in A$, also $A \neq \emptyset. B := M \backslash A, w_0 \in B$, also $B \neq \emptyset$. Klar: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$.
Sei $z_1 \in A. \varphi$ ist lokalkonstant $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq M$ und $\varphi$ ist auf $U_\delta(z_1)$ konstant. Sei $z \in U_\delta(z_1). \varphi(z) = \varphi(z_1) \overset{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0) \Rightarrow z \in A$. Also: $U_\delta(z_1) \subseteq A. A$ ist also offen. Ähnlich: $B$ ist offen. Fazit: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Wid zur Vor. ∎

**Folgerung 3.5**
Sei $A \subseteq \mathbb{C}, A$ sei offen und abgeschlossen. Dann: $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$.

**Beweis**
$B := \mathbb{C} \backslash A$; dann $A, B$ offen, $A \cap B = \emptyset$ und $\mathbb{C} = A \cup B. \mathbb{C}$ ist ein Gebiet $\overset{3.4}{\Rightarrow} A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$. ∎

**Satz 3.6**
Sei $M$ zsh und $g \in C(M)$. Dann ist $g(M)$ zsh.

**Beweis**
Sei $\varphi : g(M) \to \mathbb{C}$ auf $g(M)$ lokalkonstant. Zu zeigen: $\varphi$ ist auf $g(M)$ konstant. $\psi := \varphi \circ g : M \to \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in M \Rightarrow g(z_0) \in g(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{C} : (*)\, \varphi(w) = c\ \forall w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M). g$

stetig in $z_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \,\forall z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Sei $z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Dann: $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M) \overset{(*)}{\Rightarrow} \varphi(g(z)) = c \Rightarrow \psi(z) = c$. Also ist $\psi$ auf $M$ lokalkonstant. $M$ zsh $\Rightarrow \psi(z) = c \,\forall z \in M$. Sei $w \in g(M) \Rightarrow \exists z \in M : w = g(z) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(g(z)) = \psi(z) = c$. $\varphi$ ist also auf $g(M)$ konstant. ∎

**Beispiele:**

(1) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist zsh.

(2) Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, so ist $\gamma([a, b])$ zsh.

**Beweis**

(2) folgt aus (1) und 3.6

(1) Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ lokalkonstant. Also: $\forall t \in [a, b] \,\exists \delta(t) > 0 : \varphi$ ist auf $U_{\delta(t)}(t) \cap [a, b]$ konstant. $[a, b] \subseteq \cup_{t \in [a,b]} U_{\delta(t)}(t) \overset{2.3}{\Rightarrow} \exists t_1, \ldots, t_n \in [a, b] : [a, b] \subseteq \cup_{j=1}^{n} U_{\delta(t_j)}(t_j)$. $\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} : \varphi(t) = c_j \,\forall t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a, b] \Rightarrow \varphi([a, b]) = \{c_1, \ldots, c_n\}$. O.B.d.A: $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Annahme: $c_1 \neq c_2$ etwa $c_1 < c_2$. $\varphi \in C[a, b]$. ZWS $\Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq \varphi([a, b])$ Wid! Also: $c_1 = c_2$. Analog: $c_2 = c_3 = \cdots = c_n$. $\varphi$ ist also konstant. ∎