18. Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 18.1 (Zwischenwertsatz)
Sei $a < b$ und $f \in C[a,b] := C([a,b])$, weiter sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$

Beweis
O.B.d.A: $f(a) < y_0 < f(b)$, $M := \{x \in [a,b] : f(x) \leq y_0\}$. $M \neq \emptyset$, denn $a \in M$. $M \subseteq [a,b] \implies$ M ist beschränkt. $x_0 := \sup M$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M $\implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in M : x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0 \implies x_n \to x_0$. $x_n \in [a,b] \implies x_0 \in [a,b]$, f stetig in $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{\leq y_0} \to f(x_0) \implies f(x_0) \leq y_0$. Es ist $x_0 < b$ (anderenfalls: $f(x_0) \leq y_0 < f(b) = f(x_0)$ Widerspruch!) $z_n := x_0 + \frac{1}{n}$; $z_n \in [a,b]$ ffa $n \in \mathbb{N}$; $z_n \to x_0$; f stetig in $x_0 \implies f(z_n) \to f(x_0)$. $z_n \notin M \implies f(z_n) > y_0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim f(z_n) \geq y_0 \implies f(x_0) \geq y_0$ ■

Satz 18.2 (Nullstellensatz von Bolzano)
Sei $f \in C[a,b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann existiert ein $x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$. Beweis folgt aus 18.1 und $y_0 = 0$

Anwendung 18.3
Sei $E(x) := e^x (x \in \mathbb{R})$. Behauptung: $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Beweis
13.3 $\implies e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies E(\mathbb{R}) \subseteq (0,\infty)$. Sei $y_0 \in (0,\infty)$ z.z: $\exists\, x_0 \in \mathbb{R} : e^{x_0} = y_0$. 16.3 $\implies e^x \to \infty (x \to \infty) \implies \exists\, b \in \mathbb{R} : y_0 < e^b$. 16.3 $\implies e^x \to 0 (x \to -\infty) \implies \exists\, a \in \mathbb{R} : e^a < y_0 \implies e^a < y_0 < e^b \xRightarrow{\text{e streng wachsend}} a < b$. 18.1 $\implies \exists x_0 \in [a,b] : e^{x_0} = y_0$. ■

Definition
$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen** $:\iff$ für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt: $\lim x_n \in A$
$B \subseteq \mathbb{R}$ heißt **offen** $:\iff \forall\, x \in B\ \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq B$.

Beispiele:

(1) $[a,b]$ ist abgeschlossen, aber nicht offen. (a,b) ist offen, aber nicht abgeschlossen.

(2) $(a,b]$ und $[a,b)$ sind weder abgeschlossen, noch offen

(3) $\mathbb{R}$ ist offen, abgeschlossen. $\emptyset$ ist offen, abgeschlossen

Hilfssatz

(1) $A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $\iff$ jeder Häufungspunkt von A gehört zu A

(2) $B \subseteq \mathbb{R}$ ist offen $\iff$ $\mathbb{R} \setminus B$ ist abgeschlossen

(3) $D \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossesn u. beschränkt $\iff$ jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim x_{n_k} \in D$. In diesem Fall existiert $\max D$ und $\min D$.

Beweis

(1) Übung

(2) „ $\Longrightarrow$ “: Sei (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R} \setminus B$ und $x_0 := \lim x_n$.Annahme: $x_0 \in B$. B offen $\Longrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq B$. $x_n \to x_0 \Longrightarrow x_n \in U_\delta(x_0) \subseteq B$ ffa $n \in \mathbb{N}$, Widerspruch! „$\Leftarrow$ “: Sei $x \in B$. Annahme: $U_\delta(x) \nsubseteq B \forall \delta > 0$. $\Longrightarrow U_{\frac{1}{n}}(x) \nsubseteq B \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}$ mit: $x_n \in \mathbb{R} \setminus B \Longrightarrow (x_n)$ ist eine Folge in $\mathbb{R} \setminus B : x_n \to x$. $\mathbb{R} \setminus B$ abgeschlossen $\Longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus B$, Widerspruch!

(3) „ $\Longrightarrow$ “: Sei (x_n) Folge in D. D beschränkt $\Longrightarrow (x_n)$ beschränkt. 8.2 $\Longrightarrow (x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). D abgeschlossen $\Longrightarrow \lim x_{n_k} \in D$. „$\Leftarrow$ “: Übung. Sei D beschränkt und abgeschlossen. Sei $s := \sup D$. z.z.: $s \in D$ (analog zeigt man $\inf D \in D$). $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von s. $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists\ x_n \in D$ mit $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \Longrightarrow x_n \to s$. D abgeschlossen $\Longrightarrow s \in D$ ∎

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** $:\iff f(D)$ ist beschränkt ($\iff \exists\ c \geq 0 : |f(x)| \leq c\ \forall x \in D$).

Satz 18.4 (Eigenschaften von Bildmengen stetiger Funktionen)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, sei D beschränkt, abgeschlossen und $f \in C(D)$. Dann ist $f(D)$ beschränkt und abgeschlossen. Insbesondere ist f beschränkt und $\exists\ x_1, x_2 \in D : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in D$.

Beweis

Annahme: f ist nicht beschränkt. Dann: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n \in D : |f(x_n)| > n$. HS(3) $\Longrightarrow (x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$. f stetig $\Longrightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0) \Longrightarrow (f(x_{n_k}))$ ist beschränkt, aber: $|f(x_{n_k})| > n_k\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, Widerspruch! Sei (y_n) eine konvergente Folge in $f(D)$ und $y_0 := \lim y_n$. z.z.: $y_0 \in f(D)$. $\exists$ Folge (x_n) mit $f(x_n) = y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. HS(e) $\Longrightarrow (x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$. f stetig $\Longrightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \to f(x_0)$. Aber auch: $y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(D)$ ∎

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (*fallend*) $\Longrightarrow f$ ist auf I injektiv. $\Longrightarrow \exists f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$. f^{-1} ist streng monoton wachsend (*fallend*). Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x\ \forall x \in I$, $f(f^{-1}(y)) = y\ \forall y \in f(I)$ Übung: Sei M $\subseteq \mathbb{R}$. M ist ein Intervall $:\iff$ aus $a, b \in M$ und $a \leq b$ folgt stets $[a, b] \subseteq M$.

Satz 18.5 (Bildintervalle und Umkehrbarkeit stetiger, montoner Funktionen)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I)$.

(1) $f(I)$ ist ein Intervall

(2) Ist f streng monoton wachsend (*fallend*) $\implies f^{-1} \in C(f(I))$

Beweis

(1) Übung (mit obiger Übung und 18.1)

(2) O.B.d.A: $I = [a, b]$. $\alpha := f(a), \beta := f(b) \underset{\text{f wachsend}}{\overset{(1)}{\implies}} f(I) = [a, b]$. Sei $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Sei (y_n) eine Folge in $f(I)$ und $y_n \to y_0$. z.z.: $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$. $x_n := f^{-1}(yn), x_0 := f^{-1}(y_0) \implies x_0 \in I$, $x_n \in I \forall n \in \mathbb{N}$. d.h. (x_n) ist beschränkt. z.z: $x_n \to x_0$. 8.2 $\implies \mathscr{H}(x_n) \neq \emptyset$. Sei $\alpha \in \mathscr{H}(x_n)$. $\exists$ eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} \to \alpha$. I ist abgeschlossen $\implies \alpha \in I$. f stetig $\implies \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \to f(\alpha)$. Aber auch: $y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \implies f(\alpha) = f(x_0) \xrightarrow{f \text{injektiv}} \alpha = x_0$. d.h. $\mathscr{H}(x_n) = \{x_0\}$. Aus 9.3 folgt: $x_n \to x_0$ ■

Satz 18.6 (Der Logarithmus)
Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = e^x$. Bekannt: $f \in C(\mathbb{R})$, f ist streng monoton wachsend und $f(I) = f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Also existiert $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$\log x := \ln x := f^{-1}(x) \ (x \in (0, \infty)) \ \textit{Logarithmus}$$

Eigenschaften

(1) $\log 1 = 0, \log e = 1$

(2) $\log e^x = x \ \forall x \in \mathbb{R}, e^{logx} = x \ \forall x \in (0, \infty)$

(3) $x \mapsto \log x$ ist stetig auf $(0, \infty)$ und streng monoton wachsend

(4) $\log(xy) = \log x + \log y$; $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \ \forall x, y > 0$

(5) $\log x \to \infty \ (x \to \infty)$; $\log x \to -\infty \ (x \to 0^+)$

(6) $\log(a^r) = r \log a \ \forall a > 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$ d.h.
$a^r = e^{r \log a} \ \forall a > 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$

Beweis

(1) klar (2) klar (3) 18.5

(4) $e^{\log xy} = xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \implies \log(xy) = log(x) + \log(y)$

(5) folgt aus 16.3

(6) Sei $a > 0$. $n, m \in \mathbb{N}$. $\log(a^n) \overset{4}{=} n \log a$. $\log(a^{-n}) = \log\left(\frac{1}{a^n}\right) \overset{4}{=} \log 1 - \log a^n = -n \log a$
$\log a = \log\left((a^{\frac{1}{n}})^n\right) = n \log a^{\frac{1}{n}} \implies \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$
$\log\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \log\left((a^{\frac{1}{n}})^m\right) = m \log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n} \log a$ ■

Definition (Die allgemeine Potenz)
Sei $a > 0$. Motiviert durch 18.6(6): $a^x = e^{x \log a}$ $(x \in \mathbb{R})$

Eigenschaften

(1) $x \to a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig

(2) $a^{x+y} = a^x a^y$; $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(3) $\log(a^x) = x \cdot \log a$

Beweis

(1) Klar

(2) $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x a^y$

(3) $\log(a^x) = \log\left(e^{x \cdot \log a}\right) = x \cdot \log a$ ■

In der Übung: $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + \dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$