

b) RA :

Jedes $x \in U_1 + \dots + U_k$ hat eine eindeutige Darstellung $x = u_1 + \dots + u_k$ mit $u_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, k$.

Insbesondere sind also die Vektoren in $B_1 \cup \dots \cup B_k$ l.u.

$\Rightarrow \dim(U_1 + \dots + U_k) \geq \dim U_1 + \dots + \dim U_k \stackrel{a)}{\Rightarrow}$ Beh. LA :

Nach a) kann Gleichheit nur dann gelten, wenn $B_1 \cup \dots \cup B_k$ eine Basis von $U_1 + \dots + U_k$ ist und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist. Bezüglich der Basis ist jedes $x \in U_1 + \dots + U_k$ eindeutig als Linearkombination darstellbar. Also ist auch die Darstellung $x = u_1 + \dots + u_k$ mit $u_i \in U_i$ ($i = 1, \dots, k$) eindeutig.

c) $V = \mathbb{R}^2, U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], U_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ erfüllen alle Forderungen.

0.13 Übung 12, 31.01.2005

0.14 Übung 13, 07.02.2005

0.15 Übung 14, 14.02.2005

0.15.1 Aufgabe 3

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = x_2 + x_4 + x_1 - 2x_2 - 2x_4 - x_1 + x_2 + 2x_4 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

b)

(i) $1 - 1 + 0 - 0 = 0$

(ii) $0 + 1 - 1 + 0 = 0$

(iii) $0 - 0 + 1 - 1 = 0$

c)

(i) $\dim U = 3$

(ii) W ϕ -invariant bedeutet $\phi(W) \subseteq W$

$\Rightarrow \dim W = 1$

Wir suchen also $x \in V$ mit: $\phi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$

a) $\Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}_{=0} = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = a \underbrace{(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)}_{=0} \Rightarrow a = 1$