

18. Konvergenzsätze

Definition

Sei (f_k) eine Folge von Funktionen, $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$.

- (1) (f_k) heißt **L^1 -konvergent gegen f** : $\iff \|f - f_l\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2) (f_k) heißt eine **L^1 -Cauchyfolge** : $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$.

Ist (f_k) L^1 -konvergent gegen f , so ist (f_k) eine L^1 -Cauchyfolge: $\|f_l - f_k\|_1 = \|f_l - f + f - f_k\|_1 \geq \|f - f_l\|_1 + \|f - f_k\|_1$.

Satz 18.1 (Satz von Riesz-Fischer)

(f_k) sei eine L^1 -Cauchyfolge in $L(\mathbb{R}^n)$, also $f_k \in L(\mathbb{R}^n) \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in L(\mathbb{R}^n)$:

- (1) $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2) $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$
- (3) (f_k) enthält eine Teilfolge, die fast überall auf \mathbb{R}^n punktweise gegen f konvergiert.

(Ohne Beweis)

Satz 18.2 (Satz von Beppo Levi)

Sei (f_k) eine Folge in $L(\mathbb{R})$ mit $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ auf \mathbb{R}^n und $(\int f_k dx)$ beschränkt.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ sei definiert durch $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \quad (= \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx)$$

Beweis

Für $k \geq l$: $\|f_k - f_l\|_1 \stackrel{16.5}{=} \underbrace{\int f_k - f_l dx}_{\geq 0} = \int f_k dx - \int f_l dx = |\int f_k dx - \int f_l dx|$. $(\int f_k dx)$ ist

beschränkt und monoton, also konvergent $\implies (\int f_k dx)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R} \implies (f_k)$ ist eine L^1 -Cauchyfolge in $L(\mathbb{R}^n)$. 18.1 $\implies \exists g \in L(\mathbb{R}^n)$ mit: $\int g dx = \lim \int f_k dx$ und (f_k) enthält eine Teilfolge, die fast überall auf \mathbb{R}^n punktweise gegen g konvergiert $\implies f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \xrightarrow{17.7} f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \int g dx = \lim \int f_k dx$. ■

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, (A_k) sei eine Folge von Teilmengen von A . (A_k) ist eine **Ausschöpfung von**
A: $\iff A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$.

Satz 18.3

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, (A_k) sei eine Ausschöpfung von A und es sei $f \in L(A_k) \forall k \in \mathbb{N}$. $f \in L(A) \iff$
 $(\int_{A_k} |f| dx)$ ist beschränkt. In diesem Fall:

$$\int_A f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f dx$$

Beweis

„ \implies “: $A_k \subseteq A \implies |f|_{A_k} \leq |f|_A \implies \underbrace{\int |f|_{A_k} dx}_{= \int |f| dx} \leq \int |f|_A dx$.

„ \impliedby “: OBdA: $f \geq 0$ auf A ($f = f^+ - f^-$). Dann: $0 \leq f_{A_1} \leq f_{A_2} \leq f_{A_3} \leq \dots$. $|\int f_{A_k} dx| \leq \int |f|_{A_k} dx = \int_{A_k} |f| dx \implies (\int f_{A_k} dx)$ beschränkt. Es gilt: $f_{A_k}(x) \rightarrow f_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. 18.2 $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f_A dx = \lim \int f_{A_k} dx \implies f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_{A_k} f dx$. ■

Satz 18.4 (Uneigentliche Lebesgue- und Riemann-Integrale)

Es sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($a \in \mathbb{R}$) und es gelte $f \in R[a, t] \forall t > a$. Dann:

$f \in L([a, \infty)) \iff \int_a^{\infty} f dx$ ist **absolut** konvergent. In diesem Fall:

$$\underbrace{\int_{[a, \infty)} f dx}_{\text{L-Int.}} = \underbrace{\int_a^{\infty} f dx}_{\text{uneigentl. R-Int.}}$$

Beweis

Sei (t_k) eine Folge in $[a, \infty)$ mit: $a < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ und $t_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). $A_k := [a, t_k]$ ($k \in \mathbb{N}$), $A := [a, \infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$: $I_k := \int_a^{t_k} f dx$, $J_k := \int_a^{t_k} |f| dx$ (R-Integrale). 16.9 $\implies f, |f| \in L([a, t_k])$ und $I_k = \int_{A_k} f dx$, $J_k = \int_{A_k} |f| dx$. $f \in L(A) \xLeftrightarrow{18.3} (\int |f| dx)$ ist beschränkt $\iff (J_k)$ ist beschränkt $\xLeftrightarrow{J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots} (J_k)$ konvergent $\iff \int_a^{\infty} |f| dx$ konv. In diesem Fall: $\int_A f dx \stackrel{16.3}{=} \lim \int_{A_k} f dx = \lim I_k = \int_a^{\infty} f dx$. ■

Beispiele:

(1) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$; Analysis 1 $\implies \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ abs. konv. $\xrightarrow{18.4} f \in L([0, 1])$. Analysis 1
 $\implies \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ div. $\xrightarrow{18.4} f^2 \notin L([0, 1])$.

$$(2) f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Analysis 1 $\implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ konv., aber nicht abs. konv. 18.4 $\implies f \notin L([0, \infty))$, aber $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert im uneigentlichen R-Sinne.

Satz 18.5

$(A_k), (B_k)$ seien Folgen qber Mengen im \mathbb{R}^n .

(1) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Dann gilt: A ist qb $\iff (v_n(A_k))$ ist beschränkt ($\iff (v_n(A_k))$ konvergiert).

I. d. Fall: $v_n(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k)$.

(2) Für $j \neq k$ sei $B_j \cap B_k$ jeweils eine Nullmenge und $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. B ist qb $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ konvergiert.

I. d. Fall: $v_n(B) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$.

Beweis

(1) Folgt aus 18.3 mit $f \equiv 1$

(2) $\tilde{A}_k := B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann: $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \dots$ und $B = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}_k$. 17.2 $\implies \tilde{A}_k$ ist qb und $v_n(\tilde{A}_k) = v_n(B_1) + \dots + v_n(B_k)$. B ist qb $\stackrel{(1)}{\iff} (v_n(\tilde{A}_k))$ konvergiert $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ konvergiert.

I. d. Fall: $v_n(B) \stackrel{(1)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(\tilde{A}_k) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$. ■

Satz 18.6 (Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (f_k) eine Folge in $L(A)$ und (f_k) konv. fast überall auf A punktweise gegen $f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$

(1) Ist $F \in L(A)$ und gilt $|f_k| \leq F$ auf $A \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$.

(2) Ist A qb und ex. ein $M \geq 0$ mit $(f_k) \leq M$ auf $A \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$.

Beweis

(1) O.B.d.A: $A = \mathbb{R}^n$ (Übergang $f \rightarrow f_A$). \exists Nullmenge N mit $F(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ (17.8) und $f_k(x) \rightarrow f(x) \ (k \rightarrow \infty) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Dann: $f_k(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N \ \forall k \in \mathbb{N}$. Wegen 17.7 ändern wir ab: $f(x) := f_k(x) := F(x) := 0 \ \forall x \in N \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann: $f_k(x) \rightarrow f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Für $k, \nu \in \mathbb{N} : g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\}; \ g_{k,\nu}(x) := \max\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_{k+\nu}(x)\}$. Dann: $|g_k|, |g_{k,\nu}| \leq F$ auf \mathbb{R}^n . 16.6 $\implies g_{k,\nu} \in L(\mathbb{R}^n)$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ (fest). $g_{k,1} \leq g_{k,2} \leq g_{k,3} \leq \dots$ auf \mathbb{R}^n , $|\int g_{k,\nu} dx| \leq \int |g_{k,\nu}| dx \leq \int F dx \implies (\int g_{k,\nu} dx)_{\nu=1}^{\infty}$ ist beschränkt. Es gilt: $g_{k,\nu}(x) \rightarrow g_k(x)$ ($\nu \rightarrow \infty$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 18.2 $\implies g_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Es ist: $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$ auf \mathbb{R}^n ; wie oben: $(\int g_k dx)$ beschränkt. Weiter gilt: $g_k(x) \rightarrow f(x)$ ($k \rightarrow \infty$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

18.2 $\implies f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int g_k dx$. $h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Analog: $h_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int h_k dx$. Es ist: $h_k \leq f_k \leq g_k$ auf $\mathbb{R}^n \implies \int h_k dx \leq \int f_k dx \leq \int g_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int f dx = \lim \int f_k dx$.

(2) folgt aus (1): $A \text{ qb} \implies 1 \in L(A) \implies M \in L(A)$, $F := M$. ■

Beispiel

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [1, k] \rightarrow \mathbb{R}$ def. durch

$$f_k(x) := \frac{k^3 \sin(\frac{x}{k})}{(1+kx^2)^2}$$

Bestimme: $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f_k(x) dx$.

$$g_k(x) := \begin{cases} f_k(x), & x \in [1, k] \\ 0, & x > k \end{cases} \quad (x \in [1, \infty))$$

Sei $x \in [1, \infty) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [1, k] \forall k \geq k_0$. Für $k \geq k_0 : g_k(x) = f_k(x) = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{k^2 x^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} =: f(x)$.

$$|g_k(x)| = \underbrace{\left| \frac{\sin \frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2}}_{\leq \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{x^2} = f(x). \quad f_k \in R[1, k] \xrightarrow{16.9} f_k \in L([1, k]) \xrightarrow{17.7} g_k \in L([1, \infty))$$

$$\text{und } \int_{[1, \infty)} f dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad 18.6 \implies \underbrace{\int_{[1, \infty)} g_k dx}_{\int_1^k f_k dx} \rightarrow \int_{[1, \infty)} f dx = 1.$$

Erinnerung: (Ana I, 23.5): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ db und $f' \in R[a, b]$. Dann: $\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$.

Satz 18.7

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei db auf $[a, b]$ und f' sei auf $[a, b]$ beschränkt. Dann: $f' \in L([a, b])$ und $\int_{[a, b]} f' dx = f(b) - f(a)$.

Beweis

$M := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$. $f_k(x) := \begin{cases} \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}}, & x \in [a, b-\frac{1}{k}] \\ 0, & x \in (b-\frac{1}{k}, b] \end{cases}$. Ana I $\implies f_k \in R[a, b] \xrightarrow{16.9} f \in L([a, b]) : |f(x+\frac{1}{k})-f(x)| \stackrel{\text{MWS}}{=} |f'(\xi)|\frac{1}{k} \leq M\frac{1}{k} \quad (x \in [a, b-\frac{1}{k}]) \implies$

$|f_k(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. Sei $x \in [a, b) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [a, b - \frac{1}{k}] \forall k \geq k_0$. Für $k \geq k_0$:
 $f_k(x) = \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(x)$. Also: $f_k(x) \rightarrow g(x) := \begin{cases} f'(x), & x \in [a, b) \\ 0, & x = b \end{cases} \forall x \in [a, b]$.

18.6 $\implies g \in L([a, b]) \xrightarrow{17.7} f' \in L([a, b])$ und $\int_{[a, b]} f' dx = \int_{[a, b]} g dx \stackrel{18.6}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_k dx \stackrel{16.9}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k dx$.

$f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Ana I}} f$ besitzt auf $[a, b]$ eine Stammfunktion F . $\int_a^b f_k(x) dx = k \int_a^{b - \frac{1}{k}} (f(x + \frac{1}{k}) - f(x)) dx = k \int_1^{b - \frac{1}{k}} f(x + \frac{1}{k}) dx - k \int_a^{b - \frac{1}{k}} f(x) dx \stackrel{z := x + \frac{1}{k}}{=} \int_{a + \frac{1}{k}}^b f(z) dz - k \int_a^{b - \frac{1}{k}} f(x) dx = k(F(b) - F(a + \frac{1}{k})) - k(F(b - \frac{1}{k}) - F(a)) = \frac{F(b) - F(b - \frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} - \frac{F(a + \frac{1}{k}) - F(a)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a). \blacksquare$

