§ 12 Vorbereitungen für die Integralsätze

Definition
Seien $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

das **Kreuzprodukt** von a mit b. Mit $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ gilt formal:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel
Sei $a = (1, 1, 2), b = (1, 1, 0)$, dann gilt:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2e_1 - (-2)e_2 + (1 - 1)e_3 = (-2, 2, 0)$$

Regeln zum Kreuzprodukt:

(1) $b \times a = -a \times b$

(2) $a \times a = 0$

(3) $(\alpha a) \times (\beta b) = \alpha\beta(a \times b)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(4) $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$

Definition
Sei $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \in C(D, \mathbb{R})$$

die **Divergenz** von f.

Definition
Sei $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$, D offen und $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Dann heißt:

$$\operatorname{rot} F := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \in C(D, \mathbb{R}^3)$$

die **Rotation** von F. Dabei gilt formal:

$$\operatorname{rot} F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (P, Q, R)$$

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Ist γ in $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $\gamma'(t_0) \neq 0$, so heißt $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ **Tangentialvektor** von γ in t_0.