3. Flächen im $\mathbb{R}^3$

Definition
Sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$, B sei beschränkt und abgeschlossen, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen, $B \subseteq D$ und es sei $\phi(u,v) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Die Einschränkung $\phi_{|B}$ von ϕ auf B heißt eine **Fläche**, $S := \phi(B)$ heißt **Flächenstück**, B heißt **Parameterbereich**.

$$\phi' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \end{matrix}}_{=:\phi_u} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{matrix}}_{=:\phi_v} \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin $(u_0, v_0) \in B$. Dann ist $N(u_0, v_0) := \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$ der **Normalenvektor** von ϕ in (u_0, v_0). $I(\phi) := \int_B ||N(u,v)|| d(u,v)$ wird als **Flächeninhalt** von ϕ bezeichnet.

Beispiele:

(1) $B := [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\phi(u,v) := (\cos(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \cos(v), \sin(v))$ $(D = \mathbb{R}^2)$
$S = \phi(B) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \partial U_1(0)$
$N(u,v) = \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) = \cos(v) \cdot \phi(u,v)$
$||N(u,v)|| = |\cos(v)| \cdot \underbrace{||\phi(u,v)||}_{=1} = |\cos(v)|$
$\implies I(\phi) = \int_B |\cos(v)| d(u,v) = 4\pi$
Beachte $\lambda_3(S) = 0!$ (siehe: Analysis II 17.6)

(2) **Explizite Parameterdarstellung**
B und D seien wie oben. Es sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\phi(u,v) := (u, v, f(u,v))$
Dann ist $S = \phi(B) =$ Graph von $f_{|B}$ und $\phi_u = (1, 0, f_u)$ $\phi_v = (0, 1, f_v)$ $\implies N(u,v) = \phi_u \times \phi_v = (-f_u, -f_v, 1) \implies I(\phi) = \int_B (f_u^2 + f_v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(u,v)$
Beachte wieder $\lambda_3(S) = 0!!$

(3) Sei $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 1\}$ und $f(u,v) := u^2 + v^2$, sowie $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v)) = (u, v, u^2 + v^2)$. $S = \phi(B)$ ist ein Paraboloid. Weiter ist $f_u = 2u$ und $f_v = 2v \implies I(\phi) = \int_B (4u^2 + 4v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(u,v)$.
Substitution mit $u = r \cdot \cos(\varphi)$, $v = r \cdot \sin(\varphi)$ und Fubini $\implies I(\phi) = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (4r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot r dr) d\varphi = 2\pi \int_0^1 (4r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot r dr = \frac{\pi}{6} \cdot ((\sqrt{5})^3 - 1)$