§ 19.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, s : I \to \mathbb{R}$ **stetig**. Weiter sei $J \subseteq I$ ein Teilintervall von I.

Definition
Die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{$*$}$$

heißt **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Sie heißt **homogen**, falls $s \equiv 0$, anderenfalls heißt sie **inhomogen**. s heißt **Störfunktion**.

Wir betrachten zunächst die zu $(*)$ gehörende **homogene Gleichung**:

$$y' = a(x)y \tag{H}$$

Aus Ana I 23.14 folgt, dass a auf I eine Stammfunktion A besitzt.

Satz 19.1 (Lösung einer homogenen linearen Dgl 1. Ordnung)
Sei $y : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. y ist genau dann eine Lsg von (H), wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}$$

Beweis
„$\Longleftarrow$" Es existiere ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) = ce^{A(x)}$ für $x \in J$. Dann gilt:

$$\forall x \in J : y'(x) = c \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) = a(x) \cdot c \cdot e^{A(x)} = a(x)y(x)$$

„$\Longrightarrow$" Sei $g(x) := \frac{y(x)}{e^{A(x)}}$. Nachrechnen: $\forall x \in J : g'(x) = 0$
Aus Ana I folgt, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in J$ gilt $g(x) = c$. ∎

Satz 19.2 (Eindeutige Lösung eines Anfangswertproblems)
Sei $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung.

Beweis
Sei $c \in \mathbb{R}, y(x) = c \cdot e^{A(x)}$ für alle $x \in I$. Dann folgt aus 19.1, dass y eine Lösung von (H) ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} & y_0 = y(x_0) \\ \iff & y_0 = c \cdot e^{A(x_0)} \\ \iff & c = y_0 \cdot e^{-A(x_0)} \end{aligned}$$

■

Beispiel
Sei das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = \sin(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = \sin(x)y$ ist für $c \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = c \cdot e^{-\cos(x)}$$

Außerdem gilt:

$$1 = y(0) = c \cdot e^{-\cos(0)} = \frac{c}{e}$$

Also folgt $c = e$ und damit ist die Lösung des AwP $y(x) = e^{1-\cos(x)}$.

Nun betrachten wir die **inhomogene Gleichung**

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{IH}$$

Für eine spezielle Lösung y_s von (IH) macht man den Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$ mit einer (unbekannten) db Funktion c. Dies heißt **Variation der Konstanten**.
Mit diesem Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x) \\ &\overset{!}{=} a(x)y_s(x) + s(x) \\ &= a(x)c(x) \cdot e^{A(x)} + s(x) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass gilt:

$$\begin{aligned} & c'(x) \cdot e^{A(x)} = s(x) \\ \iff & c'(x) = s(x) \cdot e^{-A(x)} \\ \iff & c(x) = \int s(x) \cdot e^{-A(x)} \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ist also c eine Stammfunktion von $s \cdot e^{-A}$, so ist $y_s(x) \coloneqq c(x) \cdot e^{A(x)}$ eine Lösung von (IH). Insbesondere besitzt (IH) auf I Lösungen.

Beispiel
Sei folgende inhomogene Gleichung gegeben:

$$y' = \sin(x)y + \sin(x) \tag{$*$}$$

Der Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ für eine spezielle Lösung von $(*)$ liefert wie oben:

$$c(x) = \int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} \,\mathrm{d}x = -e^{\cos(x)}$$

Dann ist $y_s(x) = -e^{\cos(x)} \cdot e^{-\cos(x)} = -1$.

Definition
Definiere die Lösungsmengen:

$$L_H \coloneqq \{y : I \to \mathbb{R} : y \text{ ist eine Lösung von (H)}\}$$
$$L_{IH} \coloneqq \{y : I \to \mathbb{R} : y \text{ ist eine Lösung von (IH)}\}$$

16.1 $\implies L_H = \{c \cdot e^A : c \in \mathbb{R}\}$. Bekannt: $L_{IH} \neq \emptyset$.

Satz 19.3 (Lösungen)
Sei $y_s \in L_{IH}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.

(1) $y \in L_{IH} \iff \exists y_h \in L_H : y = y_h + y_s$

(2) Das AwP:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat auf I genau eine Lösung

Beweis
Leichte Übung! ■

Beispiele:
(1) ($I = \mathbb{R}$) Bestimme die allg. Lösung von

$$y' = 2xy + x \tag{$*$}$$

1. Bestimme die allg. Lösung der Gleichung $y' = 2xy$: $y(x) = ce^{x^2} (c \in \mathbb{R})$.
2. Bestimme eine spezielle Lösung von $(*)$: $y_s(x) = ce^{x^2}$ mit $c(x) = \int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$
Also: $y_s(x) = -\frac{1}{2}$
3. Die Allgemeine Lösung von $(*)$ lautet:

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2} \quad (c \in \mathbb{R})$$

(2) Löse das AwP:

$$\begin{cases} y' = 2xy + x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl: $y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

$$-1 = y(1) = ce - \frac{1}{2} \implies c = -\frac{1}{2e}$$

Lösung des AwPs: $y(x) = -\frac{1}{2e}e^{x^2} - \frac{1}{2}$.