15. meromorphe Funktionen, Moebiustransformationen

Definition
Es sei ∞ irgendein Element $\notin \mathbb{C}$. $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt die **Vollebene**. ∞ heißt "**der Punkt** ∞". Wir definieren:

$$z + \infty := \infty + z := \infty - z := z - \infty := \infty \ \forall z \in \mathbb{C};$$
$$\infty z := z\infty := \infty \ \forall z \in \mathbb{C}\{0\}; \ \tfrac{z}{\infty} := 0 (z \in \mathbb{C}), \ \tfrac{z}{0} := \infty \ (z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\})$$

$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ heißt **Riemannsche Zahlenkugel**. $N := (0, 0, 1)$ wird als **Nordpol** bezeichnet .

Definition
$\sigma : S \to \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$\sigma(N) := \infty$$
$$\sigma(x_1, x_2, x_3) := \tfrac{x_1}{1-x_3} + i\tfrac{x_2}{1-x_3} \text{ für } (x_1, x_2, x_3) \in S\backslash\{N\} \quad .$$

σ heißt **stereographische Projektion**. Anschaulich (nachrechnen!): Ist $P \in S\backslash\{N\}$, so trifft die Gerade durch N und P die komplexe Ebene im Punkt $\sigma(P)$.

Satz 15.1
σ ist injektiv auf S und $\sigma(S) = \hat{\mathbb{C}}$. $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S$ ist gegeben durch
$\sigma^{-1}(\infty) = N$, $\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z, |z|^2)$, falls $z \in \mathbb{C}$.

Satz 15.2 (Der chordale Abstand)
Seien $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. $d(z, w) := ||\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)||$ heißt der **chordale Abstand** von z und w (wobei $||\cdot|| =$ eukl. Norm im $\mathbb{R}^3$).
Für $z, w, u \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, w) \geq 0$; $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$; $d(z, w) = d(w, z)$; $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$ ($\triangle-$Ungl.)
$(\hat{\mathbb{C}}, d)$ ist also ein metrischer Raum.
Für $z, w \in \mathbb{C} : d(z, \infty) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$; $d(z, w) = |z - w|(1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

Beweis
Übung! ∎

Definition
Sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}$ und $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}.(z_n)$ **konvergiert in** $\hat{\mathbb{C}}$ gegen $z_0 :\Leftrightarrow d(z_n, z_0) \to 0 (n \to \infty)$

Aus 15.2 folgt:

Satz 15.3
Sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}, z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$

(1) $d(z_n, z_0) \to 0 \Leftrightarrow |z_n - z_0| \to 0$

(2) $d(z_n, \infty) \to 0 \Leftrightarrow |z_n| \to \infty$

Ersetzt man $|z-w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$ durch $d(z, w)$ $(z, w \in \hat{\mathbb{C}})$, so lassen sich die topologischen Begriffe der §en 2,3 auch in $\hat{\mathbb{C}}$ definieren.

Beispiele:

(1) Sei $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Eine Funktion $f : A \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt stetig in $z_0 \in A :\Leftrightarrow$ für jede Folge (z_n) in A mit $d(z_n, z_0) \to 0$ gilt: $d(f(z_n), f(z_0)) \to 0$.

(2) $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen $:\Leftrightarrow \ \forall a \in A \ \exists \delta = \delta(a) > 0 : \{z \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, a) < \delta\} \subseteq A$.

Konvention
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $z_0 \in D.f \in H(D\backslash\{z_0\})$ und z_0 sei ein Pol von f. Wegen 13.5 und 15.3 setzt man $f(z_0) := \infty$. Dann ist f auf ganz D definiert, also $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ und in jedem $z \in D$ stetig.

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ und $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}.f$ heißt auf D **meromorph** $:\Leftrightarrow$

(i) $P(f)$ ist in D diskret

(ii) $f_{|D\backslash P(f)} \in H(D\backslash P(f))$

(iii) jedes $z_0 \in P(f)$ ist ein Pol von f.

$$M(D) := \{f : D \to \hat{\mathbb{C}} : f \text{ ist auf } D \text{ meromorph }\}$$

Beispiele:

(1) $P(f) = \emptyset$ zugelassen. Dann: $H(D) \subseteq M(D)$.

(2) Seien $f, g \in H(D), g \neq 0$ auf D. Dann $\frac{f}{g} \in M(D).P(\frac{f}{g}) \subseteq Z(g)$.

(3) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}, P(f) = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$.0 ist kein Pol von f, 0 ist HP der Pole $\frac{1}{k\pi}$. Also: $f \notin M(\mathbb{C})$, aber $f \in M(\mathbb{C}\backslash\{0\})$.

Moebiustransformationen:
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und es gelte $ad - bc \neq 0$. Eine Abbildung der Form $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ heißt eine **Moebiustransformation** (MB) $(z \in \hat{\mathbb{C}})$. Also: $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \Phi_T$ heißt die zu T gehörende **Koeffizientenmatrix**.

Bemerkungen:

(1) Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ sichert, dass T nicht konstant ist.

(2) Sei $c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. $T(\infty) = \infty, T_{|\mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$.

(3) $c \neq 0$. $T(\infty) = \frac{a}{c}; T(-\frac{d}{c}) = \infty$. $-\frac{d}{c}$ ist ein Pol der Ordnung 1 von T; $T \in M(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}$:=Menge aller Moebiustransformationen.

Satz 15.4
Seien $T, S \in \mathcal{M}$.

(1) $T(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}; T$ ist stetig und injektiv auf $\hat{\mathbb{C}}$; $T^{-1} \in \mathcal{M}$; $T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$

(2) $T \circ S \in \mathcal{M}$. $\Phi_{T \circ S} = \Phi_T \cdot \Phi_S$

$\mathcal{M}$ ist also eine Gruppe.

Beweis
Übung! ∎

spezielle Moebiustransformationen:
$T(z) := az$ (Drehstreckung)
$T(z) := z + a$ (Translation)
$T(z) := \frac{1}{z}$ (Inversion)

Satz 15.5
$T \in \mathcal{M}$ lässt sich darstellen als Hintereinandersausführung von Drehstreckung, Translation und Inversion.

Beweis
Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Fall 1: $c = 0$. Dann $d \neq 0$ und $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Setze $T_1 = \frac{a}{d}z$ und $T_2 = z + \frac{b}{d} \Rightarrow T = T_2 \circ T_1$.

Fall 2: $c \neq 0$. $T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c2}}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z+\gamma}$. $T_1(z) := z + \gamma$; $T_2(z) := \frac{1}{z}$; $T_3(z) := \beta z$; $T_4(z) := z + \alpha \Rightarrow T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. ∎

Satz 15.6
Sei $T \in \mathcal{M}$. Dann hat T einen oder zwei Fixpunkte oder es ist $T(z) = z$.

Beweis
Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Fall 1: $T(\infty) = \infty$. Dann ist $c = 0, d \neq 0$. $\Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$. Sei z_1 ein Fixpunkt von $T, z_1 \neq \infty$. Also $z_1 = \alpha z_1 + \beta \Leftrightarrow (1-\alpha)z_1 = \beta$.

Fall 1.1: $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow T(z) = z$.

Fall 1.2: $\alpha \neq 1 \Rightarrow z_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Fall 2: $T(\infty) \neq \infty$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. $T(z_0) = z_0 \Leftrightarrow az_0 + b = z_0(cz_0 + d)$ quadratische Gleichung $\Rightarrow$ ein oder zwei Lösungen. ■

Definition
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & \text{, falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & \text{, falls } z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & \text{, falls } z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & \text{, falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

das **Doppelverhältnis** von z, z_1, z_2, z_3.

Satz 15.7
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ wie oben.

(1) Sind $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$ und gilt $T_1(z_j) = T_2(z_j)$ $(j = 1, 2, 3) \Rightarrow T_1 = T_2$.

(2) Es ist $T(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ $(z \in \hat{\mathbb{C}})$ eine Moebiustransformation. T ist die einzige Moebiustransformation mit $T(z_1) = 0;\ T(z_2) = 1\ ; T(z_3) = \infty$.

(3) Sind $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so existiert genau ein $S \in \mathcal{M} : S(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$

(4) $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ $\forall S \in \mathcal{M}$ (Invarianz des Doppelverhältnisses)

Beweis

(1) $T := T_2^{-1} \circ T_1$. 15.4 $\Rightarrow T \in \mathcal{M}$. $T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(T_2(z_j)) = z_j$ $(j = 1, 2, 3)$. 15.6 $\Rightarrow T(z) = z$ $\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow T_1 = T_2$.

(2) Klar: $T \in \mathcal{M}$. Nachrechnen: $T(z_1) = 0;\ T(z_2) = 1;\ T(z_3) = \infty$. Eindeutigkeit folgt aus (1).

(3) Eindeutigkeit: (1). Existenz: $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3);\ T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. $S := T_2^{-1} \circ T_1$. $S(z_1) = T_2^{-1}(T_1(z_1)) \overset{(2)}{=} T_2^{-1}(0) \overset{(1)}{=} w_1$. Analog: $S(z_2) = w_2;\ S(z_3) = w_3$.

(4) Übung. ■

Kreisgleichung:
Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0. |z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \bar{z_0}z - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$, wobei $\alpha = -z_0 \in \mathbb{C}. \beta = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ und $|\alpha|^2 - \beta = |z_0|^2 - |z_0|^2 + r^2 > 0$, also $\beta < |\alpha|$.

Geradengleichung:
$mx + ny + d = 0$ $(m, n, d, x, y \in \mathbb{R})$. $x =$Rez, $y =$Imz; $\alpha = \frac{m}{2} + i\frac{n}{2} \in \mathbb{C}$, $\beta := d \in \mathbb{R}. mx + ny + d = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$.

Fazit:
Sind $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$

- Die Gleichung eines Kreises, falls $\varepsilon = 1$ und $\beta < |\alpha|^2$
- Die Gleichung einer Geraden, falls $\varepsilon = 0$.

Satz 15.8
Sei $T \in \mathcal{M}$. T bildet eine Gerade (einen Kreis) auf eine Gerade oder einen Kreis ab.

Beweis
Die Behauptung ist klar für Drehstreckungen und Translationen. Wegen 15.5 genügt es die Behauptung für Inversionen $(T(z) = \frac{1}{z})$ zu zeigen. Sei $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$. die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises und $w = \frac{1}{z}$. Dann: $\varepsilon\frac{1}{|w|^2} + \bar{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\bar{w}} + \beta = 0 \Rightarrow \varepsilon + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + \beta|w|^2 = 0$.

Fall 1: $\beta = 0 \rightarrow$ Gerade.

Fall 2: $\beta \neq 0$. Dann: $\frac{\varepsilon}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\bar{w} + \frac{\alpha}{\beta}w + |w|^2 = 0 \rightarrow$ Kreis. ■

Beispiel
Bestimme ein $T \in \mathcal{M}$ mit: $T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}. z_1 = 1$; $z_2 = i$; $z_3 = -1. T(z) := DV(z, 1, i, -1) = -i\frac{z-1}{z+1}$. 15.7 $\Rightarrow T(1) = 0$; $T(i) = 1$; $T(-1) = \infty$. 15.8 $\Rightarrow T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.