

27. Randwertprobleme (Einblick)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wir betrachten das **Randwertproblem** (RWP):

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y''(a) = \gamma_a, \beta_1 y(b) + \beta_2 y''(b) = \gamma_b \end{cases}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$.

Beispiel

Die Dgl $y'' = -\pi^2 y$ hat die allg. Lösung $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$

Die Dgl $y'' = -\pi^2 y + 1$ hat die allg. Lösung $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}$

$$\text{RWP (1)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 \sin(\pi 0) = c_1$$

$0 = y(1) = c_2 \sin(\pi) = 0$. D.h.: das RWP hat unendlich viele Lösungen: $y(x) = c \sin(\pi x)$ ($c \in \mathbb{R}$).

$$\text{RWP (2)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 \sin(\pi 0) + \frac{1}{\pi^2} = c_1 + \frac{1}{\pi^2} \implies c_1 = -\frac{1}{\pi^2}$$

$$0 = y(1) = -\frac{1}{\pi^2} \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}. \text{ D.h.: das RWP ist unlösbar.}$$

$$\text{RWP (3)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) \implies c_1 = 0 \implies y(x) = c_2 \sin(\pi x)$$

$$y'(x) = c_2 \pi \cos(\pi x) \xrightarrow{x=1} c_2 \pi \cos(\pi) = -c_2 \pi \implies c_2 = 0$$

$\implies y = 0$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des RWPs.

Beachte für später:

In Bsp(1) und (3): $f(x, y) = -\pi^2 y$

In Bsp(2): $f(x, y) = -\pi^2 y + 1$

In allen 3 Bsp'en: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = \underbrace{\pi^2}_L |y - \tilde{y}|$. ($\implies \exists$ kein $L \in [0, \pi^2)$: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq$

$L|y - \tilde{y}|$)

Definition: Die Funktion $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$G(x, t) := \begin{cases} t(x-1), & \text{falls } 0 \leq t \leq x. \\ x(t-1), & \text{falls } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

27. Randwertprobleme (Einblick)

Klar: $G \leq 0$; $G(0, t) = G(1, t) = 0 \forall t \in [0, 1]$. Übung: G ist stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

Hilfssatz 27.1

Gegeben: $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\phi(x) := \int_0^1 G(x, t)h(t)dt.$$

Dann: $\phi(0) = \phi(1) = 0$, $\phi \in C^2([0, 1])$ und $\phi'' = h$ auf $[0, 1]$.

Beweis

$$\phi(0) = \int_0^1 \underbrace{G(0, t)}_{=0} h(t)dt = 0; \phi(1) = \int_0^1 \underbrace{G(1, t)}_{=0} h(t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] : \phi(x) &= \int_0^x G(x, t)h(t)dt + \int_x^1 G(x, t)h(t)dt = \int_0^x (tx - t)h(t)dt + \int_x^1 (xt - x)h(t)dt \\ &= x \int_0^x th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_x^1 th(t)dt - x \int_x^1 h(t)dt \\ &= x \int_0^1 th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_1^x h(t)dt \\ &\implies \phi \text{ ist db auf } [0, 1] \text{ und } \phi'(x) = \int_0^1 th(t)dt - xh(x) + \int_1^x h(t)dt + xh(x) \\ &= \int_0^1 th(t)dt + \int_1^x h(t)dt. \implies \phi \text{ ist auf } [0, 1] \text{ 2 mal db und } \phi''(x) = h(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel

$$\int_0^1 G(x, t)dt = \underbrace{\int_0^1 G(x, t)1dt}_{=: \phi(x)} \xrightarrow{27.1} \phi''(x) = 1 = \phi'(x) = x + c_1$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

$$0 = \phi(0) = c_2$$

$$0 = \phi(1) = \frac{1}{2} + c_1 \implies c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \int_0^1 G(x, t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \quad \forall x \in [0, 1].$$

Definition

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Das RWP

$$(R) \begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

heisst **Dirichlet Randwert-Problem** und obige Funktion G heisst die zu (R) gehörende **Greensche Funktion**.

Im Folgenden sei $X := C([0, 1], \mathbb{R})$ und der Operator $T : X \rightarrow X$ definiert durch

$$(T_y)(x) := \int_0^1 G(x, t)f(t, y(t))dt \quad (y \in X, x \in [0, 1])$$

Aus 27.1: $(T_y)(0) = (T_y)(1) = 0$, $T_y \in C^2[0, 1]$ und $(T_y)''(x) = f(x, y(x)) \quad \forall y \in X \quad \forall x \in [0, 1]$.

Satz 27.2

Sei $y \in X$.

$$y \text{ löst (R) auf } [0, 1] \iff T_y = y$$

Beweis

" \implies ":

$$\forall x \in I : y''(x) = f(x, y(x)) \stackrel{\text{s.o.}}{=} (T_y)''(x); \Psi(x) := y(x) - (T_y)(x)$$

$$\implies \Psi'' = 0 \text{ auf } [0, 1] \implies \Psi'(x) = c_1 \implies \Psi(x) = c_1 x + c_2$$

$$\Psi(0) = y(0) - (T_y)(0) = 0 \implies c_2 = 0.$$

$$\Psi(1) = y(1) - (T_y)(1) = 0 \implies c_1 = 0.$$

" \Leftarrow ":

$$\text{Sei } y = T_y \stackrel{27.1}{\implies} y \in C^2([0, 1]) \text{ und } y''(x) = (T_y)''(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$y(0) = (T_y)(0) \stackrel{\text{s.o.}}{=} 0$$

$$y(1) = (T_y)(1) \stackrel{\text{s.o.}}{=} 0. \quad \blacksquare$$

Vorbetrachtung:

Sei $0 < c < \pi$, $\phi(x) := \cos c(x - \frac{1}{2})$ ($x \in [0, 1]$).

$$\phi \in C([0, 1], \mathbb{R}). \quad x \in [0, 1] \implies c(x - \frac{1}{2}) \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}] \subsetneq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\implies \phi(x) > \frac{c}{2} > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Satz 27.3 (Satz von Lettenmeyer)

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Es sei $L \geq 0$ und es gelte:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Ist $L < \pi^2$, so hat (R) auf $[0, 1]$ genau eine Lösung.

Bemerkung:

(1) Die Beispiele am Anfang des Paragraphen zeigen, dass die Schranke π^2 optimal ist.

(2) Allgemein kann man das RWP

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

(mit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig) betrachten. Dann ist π^2 durch $\frac{\pi^2}{(a-b)^2}$ zu ersetzen.

Beweis

Sei $c := (\frac{c+\pi^2}{2})^{\frac{1}{2}}$. Dann: $L < c^2 < \pi^2$, $q = \frac{L}{c^2}$, also $q < 1$.

Sei ϕ wie in der Vorbetrachtung. Wir versehen nun X mit folgender Norm:

$$\|u\| := \max\left\{\frac{u(x)}{\phi(x)} : 0 \leq x \leq 1\right\} \quad (u \in X) \quad \textbf{gewichtete Max-Norm}$$

Bekannt: $(X, \|\cdot\|)$ ist ein BR (Par. 13). Wir werden zeigen:

$$\|T_u - T_v\| \leq q\|u - v\| \quad \forall u, v \in X.$$

Aus 11.2 folgt dann: T hat genau einen Fixpunkt. Aus 27.2 folgt dann die Behauptung.

$$\begin{aligned} \text{Seien } u, v \in X \text{ und } x \in [0, 1]. \quad |(T_u)(x) - (T_v)(x)| &= \left| \int_0^1 G(x, t)(f(t, u(t)) - f(t, v(t)))dt \right| \leq \\ &\int_0^1 |G(x, t)|L|u(t) - v(t)|dt \\ &= L \int_0^1 |G(x, t)| \underbrace{\frac{|u(t) - v(t)|}{\phi(t)}}_{\leq \|u-v\|} \phi(t)dt \leq L\|u - v\| \int_0^1 |G(x, t)|\phi(t)dt \end{aligned}$$

27. Randwertprobleme (Einblick)

$$G \leq 0 \quad L \|u - v\| \underbrace{\left(- \int_0^1 G(x, y) \phi(t) dt \right)}_{=: g(x)}$$

$$27.1 \implies g(0) = g(1) = 0, g \in C^2([0, 1]) \text{ und } g'' = \phi. \text{ Dann: } g'(x) = \frac{1}{c} \sin c(x - \frac{1}{2}) + c_1$$

$$\implies g(x) = -\frac{1}{c^2} \cos c(x - \frac{1}{2}) + c_1 x + c_2 = -\frac{1}{c^2} \phi(x) + c_1 x + c_2.$$

$$0 = g(0) = -\frac{1}{c^2} \phi(0) + c_2 \implies c_2 = \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2} \quad 0 = g(1) = -\frac{1}{c^2} \phi(1) + \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2} \implies c_1 = 0$$

$$\implies g(x) = -\frac{1}{c^2} \phi(x) + \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2}$$

$$\implies |(T_u)(x) - (T_v)(x)| \leq L \|u - v\| \frac{1}{c^2} (\phi(x) - \cos \frac{c}{2}) = \frac{L}{c^2} \|u - v\| (\phi(x) - \cos \frac{c}{2}) \implies \underbrace{|(T_u)(x) - (T_v)(x)|}_{= \phi(x)} \leq$$

$$\frac{L}{c^2} \|u - v\| (1 - \frac{\cos \frac{c}{2}}{\phi(x)}) \leq \frac{L}{c^2} \|u - v\| = q \|u - v\|$$

$$\implies \|T_u - T_v\| \leq q \|u - v\|. \quad \blacksquare$$

Satz 27.4 (Satz von Scorza-Dragoni)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $D := I \times \mathbb{R}$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$ sei auf D beschränkt.

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf I .

Beispiel

$$I = [0, \pi], \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq -1 \\ -y, & |y| \leq 1 \\ -1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$ und $y_\alpha(x) := \alpha \sin x$, $|y_\alpha| \leq 1$, $y_\alpha''(x) = -\alpha \sin x = -y_\alpha(x) = f(x, y_\alpha(x))$, $y_\alpha(0) = y_\alpha(\pi) = 0$. Das heißt: Ein Randwertproblem wie in 27.4 muß *nicht* eindeutig lösbar sein.

Beweis

Wir führen den Beweis nur unter der zusätzlichen Voraussetzung:

$$\exists L \geq 0 : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$$

Sei $M \geq 0$ so, dass $|f| \leq M$ auf D .

Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = 0, y'(a) = s \end{cases}$$

18.3 \implies obiges Anfangswertproblem hat genau eine Lösung y_s auf I . §18 und 25.2 $\implies |y_{s_1}(x) - y_{s_2}(x)| \leq c|s_1 - s_2| \forall x \in I, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

$h(s) := y_s(b)$ ($s \in \mathbb{R}$), damit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist $s_0 \in \mathbb{R}$ und $h(s_0) = 0$, so ist $y := y_{s_0}$ eine Lösung des Randwertproblems.

$$\begin{aligned} \forall x \in I : y'_s(x) - s &= y'_s(x) - y'_s(a) = \int_a^x y''_s(t) dt = \int_a^x f(t, y_s(t)) dt \\ \implies y'_s(x) &= s + \int_a^x f(t, y_s(t)) dt \\ \implies y_s(b) &= y_s(b) - y_s(a) \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} y'_s(\xi)(b-a) \\ &= \left(s + \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt \right) (b-a) \\ &= s(b-a) + \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt (b-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |h(s) - s(b-a)| &= \left| \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt (b-a) \right| \leq M(\xi-a) \leq M(b-a) =: c \\ \implies -c &\leq h(s) - s(b-a) \leq c \forall s \in \mathbb{R} \\ \implies s(b-a) - c &\leq h(s) \leq c + s(b-a) \forall s \in \mathbb{R} \\ \implies h(s) &\rightarrow \infty \ (s \rightarrow \infty) \text{ und } h(s) \rightarrow -\infty \ (s \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

Der Zwischenwertsatz liefert nun: $\exists s_0 \in \mathbb{R} : h(s_0) = 0$ ■

Satz 27.5

Sei $A > 0$, $0 < B < \pi^2$, $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gelte

$$|f(x, y)| \leq A + B|y| \quad \forall x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}$$

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf $[0, 1]$

Bemerkung: Die Schranke π^2 ist optimal:

$$\begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ist unlösbar!

