§ 23.

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei A eine reelle konstante $n \times n$-Matrix. Wir betrachten das homogene System

$$y' = Ay \tag{H}$$

Ohne Beweise geben wir ein „Kochrezept" an, wie man zu einem Fundamentalsystem von (H) kommt.

Vorbereitungen:

(1) Es sei stets $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ das **charakteristische Polynom** von A (I = Einheitsmatrix).
Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert (EW) von A, dann ist $p(\lambda_0) = 0$. Die Koeffizienten von p sind reell, also ist $p(\overline{\lambda_0}) = 0$ und damit $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert von A.

(2) Für $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\text{Kern}(A - \lambda_0 I) \subseteq \text{Kern}((A - \lambda_0 I)^2) \subseteq \text{Kern}((A - \lambda_0 I)^3) \subseteq \dots$$

Kochrezept:

(1) Bestimme die **verschiedenen** Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) von A und deren Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$, also:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Ordne diese Eigenwerte wie folgt an: $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Aus der Liste $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r$ entferne jedes λ_j mit $\text{Im}(\lambda_j) < 0$. Es bleibt:

$$M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cup \{\lambda_j : m + 1 \leq j \leq r, \text{Im}(\lambda_j) > 0\}$$

(2) Zu $\lambda_j \in M$ bestimme eine Basis von $V_j := \text{Kern}((A - \lambda_j I)^{k_j})$ wie folgt: Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(A - \lambda_j I)$, ergänze diese Basis zu einer Basis von $\text{Kern}((A - \lambda_j I)^2)$, usw.

(3) Sei $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j.

$$y(x) := e^{\lambda_j x}\left(v + \frac{x}{1!}(A - \lambda_j I)v + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_j I)^2 v + \dots + \frac{x^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{k_j - 1} v\right)$$

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
Dann ist $y(x) \in \mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}$ und y ist eine Lösung von (H).
Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Zerlege y komponentenweise in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) := y^{(1)}(x) + iy^{(2)}(x)$$

mit $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x) \in \mathbb{R}^n$. Dann sind $y^{(1)}, y^{(2)}$ linear unabhängige Lösungen von (H).

(4) Führt man (3) für **jedes** $\lambda_j \in M$ und **jeden** Basisvektor von V_j durch, so erhält man ein Fundamentalsystem von (H).

Definition
[...] bezeichne die **lineare Hülle**.

Beispiele:

(1) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{$*$}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \qquad\qquad \lambda_2 = 1 - 2i$$
$$k_1 = 1 \qquad\qquad k_2 = 1$$

Also ist $M := \{\lambda_1\}$. Aus $\mathrm{Kern}(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei also:

$$y^{(1)}(x) := e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \qquad\qquad y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

Dann ist $y^{(1)}, y^{(2)}$ ein Fundamentalsystem von $(*)$.

(2) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{$*$}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad\qquad \lambda_2 = 1$$
$$k_1 = 1 \qquad\qquad k_2 = 2$$

Also ist $M := \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$: Aus $\operatorname{Kern}(A - 2I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ folgt:

$$y^{(1)}(x) := e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$: Aus $\operatorname{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{Kern}((A - I)^2)$ folgt:

$$y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{(3)}(x) := e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ ist ein Fundamentalsystem von $(*)$.

(3) Sei A wie in Beispiel (2). Löse das AWP

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ lautet:

$$y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow c_1 = -1 \qquad\qquad c_2 = 1 \qquad\qquad c_3 = 2$$

Lösung des AWPs:

$$y(x) = -e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme dazu zunächst die allgemeine Lösung von $y' = Ay$. Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1+\lambda)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \qquad \lambda_2 &= -1 \\ k_1 &= 1 & \qquad k_2 &= 1 \end{aligned}$$

Da $\operatorname{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ und $\operatorname{Kern}(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ ist, ist

$$y^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad y^{(2)}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Sei nun $Y(x) := \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$
Dann ist

$$\begin{aligned} y_s(x) &= Y(x) \int Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2} e^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung von $(*)$.

Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet also:

$$y(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2} e^x \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$