

## 4 Stetige Funktionen

Ab jetzt wird (fast) immer in  $\mathbb{R}$  gerechnet, insbesondere  $B(x, r) = (x - r, x + r)$ ,  $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$ . Stets sei  $D \neq \emptyset$ .

### 4.1 Grenzwerte stetiger Funktionen

**Definition 4.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge  $\overline{D} := \{x \in \mathbb{R} : \exists x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}) \text{ mit } x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty\}$  der *Abschluss* von  $D$ .  $D$  heißt *abgeschlossen* (abg.) falls  $D = \overline{D}$ .

*Bemerkung.* Es gilt  $D \subseteq \overline{D}$  (Betrachte für  $x \in D$  die Folge  $(x_n)_{n \geq 1} = (x)_{n \geq 1}$ )

**Beispiel.** Sei  $D = (0, 1]$ , dann ist  $\overline{D} = [0, 1]$

*Beweis.* Es gilt  $0 \in \overline{D}$ , da  $\frac{1}{n} \in D, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ n \in \mathbb{N} \implies [0, 1] \subseteq \overline{D}$ . Umgekehrt: Sei  $x_n \in (0, 1] = D$  mit  $x_n \rightarrow x$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ . Satz 2.9:  $0 \leq x \leq 1 \implies \overline{D} \subseteq [0, 1] \implies$  Beh.  $\square$

**Ebenso:**

a)  $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$

b) Abgeschlossene Intervalle im Sinne von Def. ?? sind abgeschlossen im Sinne von Def. 4.1, Bsp:  $\overline{[0, 1]} = [0, 1]$ .

**Definition 4.2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \overline{D}, y_0 \in \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  *konvergiert* gegen den *Grenzwert*  $y_0$ , wenn für *jede* Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty)$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow y_0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Man schreibt dann  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  oder  $f(x) \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Wenn man zusätzlich  $x_n < x_0$ , bzw.  $x_n > x_0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$  fordert, dann spricht man vom *links-*, bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* und schreibt  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , bzw.  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

**Beispiel 4.3.** a) Sei  $D = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3, x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $x_n \in \mathbb{R}, x_n \rightarrow x_0$ . Dann  $f(x_n) = x_n^2 + 3 \rightarrow x_0^2 + 3 \ (n \rightarrow \infty)$  nach Satz 2.7  $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 + 3$

b) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Setze

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases} \quad (\text{charakteristische Funktion})$$

*Behauptung.* Sei  $D = \mathbb{R}, f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ . Dann:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.

*Beweis.* Wähle  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Dann

$$f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei  $x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wenn  $x_n > 0$ , dann  $f(x_n) = 1$ . Wenn  $x_n < 0$ , dann  $f(x_n) = 0$   
 $\implies \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$   $\square$

- c) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D$ . Dann:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht, da  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , aber  $f(\frac{1}{n}) = n$  divergiert ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Satz 4.4** ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$   
b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)$  gilt:  $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$

*Beweis.* a) Es gelte 2). Sei  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $x_n \rightarrow x_0$  beliebig gegeben ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta_\varepsilon > 0$  aus 2). Dann  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . 2) liefert:  $|f(x_n) - y_0| \leq \varepsilon$  ( $\forall n \geq N_\varepsilon$ )  $\implies f(x_n) \rightarrow y_0, n \rightarrow \infty \implies 1)$

- b) Es gelte 1). Annahme: 2) sei falsch. Daraus folgt mit  $\delta = \frac{1}{n}$ :  $\exists \varepsilon_\delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$  mit  $|x_0 - x_n| \leq \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - y_0| > \varepsilon_0$ , d. h.  $x_n \rightarrow x_0$  (Satz 2.9) und  $f(x_n) \not\rightarrow y_0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\nRightarrow 2$   $\square$

**Satz 4.5.** Es seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z_0$ . Dann gelten:

- a)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = y_0 + z_0$   
b)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = y_0z_0$   
c)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |y_0|$   
d) Sei zusätzlich  $y_0 \neq 0$ . Dann  $\exists r > 0$ , sodass  $|f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2} > 0$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| \leq r$ . Ferner  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y_0}$   
e) Sei zusätzlich  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D$ . Dann gilt  $x_0 \leq z_0$ . (Entsprechendes gilt für  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm}$ )

*Beweis.* c) Sei  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) beliebig gewählt.  $\xrightarrow{\text{n. V.}}$   
 $f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.11} |f(x_n)| \rightarrow |y_0|$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Behauptung

- d) Wähle  $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$ . Nach Teil 3 und Satz 4.4  $\exists r = \delta_\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $x \in D \cap \overline{B}(x_0, r)$  gilt  $\frac{|y_0|}{2} \geq ||f(x)| - |y_0|| \geq |y_0| - |f(x)| \iff |f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2}$ . Sei nun  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) mit  $x_n \in D \cap \overline{B}(x_0, r) \xrightarrow{\text{n.V.}} f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.7} \frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{y_0}$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Behauptung
- a), b), e) gehen genauso mit Satz 2.7 und Satz 2.9.  $\square$

## Uneigentliche Grenzwerte

**Definition.** Erweiterte Zahlengerade  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  (man schreibt oft  $\infty$  statt  $+\infty$ ). Ordnung:  $-\infty < x < +\infty$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ),  $|\pm\infty| := +\infty$

**Definition 4.6.** Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ( $-\infty$ ) für  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , falls:

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: x_n \geq K \quad (x_n \leq -K)$$

Damit  $n^2 \rightarrow \infty$ ,  $-n^3 \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). *Beachte:*  $((-1)^n)$  divergiert nach wie vor.

*Bemerkung 4.7.* a) Wenn  $x_n \rightarrow \infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$ , dann  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). (Beachte, nach Def. 4.6 gilt:  $x_n \neq 0$ ,  $n \geq N_1$ )

b) Wenn  $x_n \rightarrow 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$ , dann geht  $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$

c) Wenn  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n < 0$  ( $\forall n \geq n_0$ ), dann  $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$

*Beweis.* a) Sei  $x_n \rightarrow +\infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nach Def. 4.6 gilt

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: |x_n| \geq K \iff 0 < \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{K} =: \varepsilon,$$

d. h.  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

b), c) zeigt man ähnlich.  $\square$

In Anbetracht von 4.7.1) schreibt man

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

(damit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  auch in Bem. 4.7.1) Wenn  $(x_n)$  nach oben (nach unten) unbeschränkt ist (wobei  $x_n \in \mathbb{R}$ ) dann setzt man  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \infty$   $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := -\infty$ . Mit identischem Beweis gelten dann Wurzel- und Quotientenkriterium ohne die jeweilige Beschränktheitsvoraussetzung. Ferner liefert (4.1) und Bem. 4.7 in Thm. 3.28

$$\varrho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Gilt auch wenn  $\sqrt[k]{|a_k|}$  unbeschränkt ( $\varrho = \frac{1}{\infty} = 0$ ) oder wenn  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 0^+$  ( $k \rightarrow \infty$ ) („ $\varrho = \frac{1}{0^+} = +\infty$ “). Weiter schreibt man  $\sup D = +\infty$  wenn  $D \subseteq \mathbb{R}$  nach oben unbeschränkt ist, sowie  $\inf D = -\infty$ , wenn  $D$  nach unten unbeschränkt ist.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Dann definiert man  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$  wie in Def. 4.2, d. h. für alle  $x_n \rightarrow x_0$  muss  $f(x_n) \rightarrow y_0$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  gelten. Dabei ist  $+\infty \in \overline{D}$  wenn  $\sup D = \infty$  und  $-\infty \in \overline{D}$ , wenn  $\inf D = -\infty$ .

**Beispiel.** Mit Bem. 4.7 folgt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  und  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

## 4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition 4.8.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Dann heißt  $f$  *stetig in  $x_0$* , falls  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d. h. für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $f$  heißt *stetig (auf  $D$ )*, wenn  $f$  für alle  $x_0 \in D$  stetig ist. Man schreibt:  $C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$ .

**Beispiel 4.9** (vgl. 4.3). a) Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  (fest gegeben). Dann sind die Funktionen  $f(x) = c$ ,  $g(x) = x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) stetig auf  $\mathbb{R}$ .

b) Sei  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $x_0, x_n \in D$ . Übung: Wenn  $x_n \rightarrow x_0$ , dann  $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{x_0}$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also ist  $f(x) = \sqrt{x}$  stetig auf  $\mathbb{R}_+$

c) Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ .  $\implies f$  ist stetig für  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber unstetig für  $x_0 = 0$ ,  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D$  stetig auf  $D$

e) Sei  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \dots \implies f$  unstetig in  $x_0 = 0$ , da  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

**Definition.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann definiere man die Funktion  $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$  punktweise durch  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  ( $x \in D$ ). Analog definiere man die Funktionen  $\alpha f$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$  und  $\frac{1}{f}$  (soweit  $f(x) \neq 0$ ). Ferner sei  $f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : f(x) = y\}$  und  $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definiert man die *Komposition*  $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ ,  $x \in D$ .

**Satz 4.10.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sowie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$  und  $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $f(x_0)$ . Dann sind die Funktionen  $f + g$ ,  $fg$  (speziell  $\alpha g$ ),  $|f|$ ,  $h \circ f$  stetig bei  $x_0$ . Wenn  $f(x_0) \neq 0$ , dann existiert nach Satz 4.5 ein  $\delta > 0$  mit  $f(x) \neq 0$  für  $x \in \overline{B}(x_0, \delta) \cap D := \tilde{D}$ . Ferner ist  $\frac{1}{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . (Also:  $C(D)$  ist ein Vektorraum).

*Beweis (beispielhaft)..* Sei  $x_n \in D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann  $f(x_n) \in f(D)$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (da  $f$  stetig in  $x_0$ ). Also:  $h(f(x_n)) \rightarrow h(f(x_0))$ , da  $h$  stetig in  $f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Somit ist  $h \circ f$  stetig in  $x_0$ . Der Rest folgt analog mit Satz 4.5.  $\square$

**Beispiel 4.11** (Satz 4.10 liefert:). a) Polynome sind auf  $\mathbb{R}$  stetig, da sie aus  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$  zusammengesetzt sind.

b) Rationale Funktionen  $f = \frac{p}{q}$  sind auf  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$  stetig, als Quotient der Polynome  $p, q$ .

c)  $f(x) = \sqrt{1+3|x|}$  ist stetig auf  $D = \mathbb{R}$ , da  $f = w \cdot g$  mit  $w(y) = \sqrt{y}$  und  $g(x) = 1 + 3|x|$ ,  $g = 1 + 3|p_1|$ .

**Theorem 4.12.** Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\varrho > 0$ . Dann ist  $f : B(0, \varrho) = (-\varrho, \varrho) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad (x_0 \in B(0, \varrho))$$

**Beispiel.** Stetig auf  $\mathbb{R}$  sind  $\sin, \cos, \exp$  sowie  $f(x) = \exp(1+2x^2)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), da  $f = \exp p$ ,  $p(x) = 1 + 2x^2$  (Hier sei vorübergehend  $B(0, \infty) = \mathbb{R}$ ).

*Beweis des Theorems..* Sei  $x_0, x_n \in (-\varrho, \varrho)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Setze  $d := \varrho - |x_0| > 0 \implies \exists x_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \leq \frac{d}{2} \ (\forall n \geq n_0)$

$$\implies |x_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0| \leq \dots + |x_0| = \varrho - \frac{d}{2} < \varrho \quad (n \geq n_0) \quad (*)$$

Setze  $r = \varrho - \dots$ . Dann (nach Thm. 3.28)  $\exists \dots$  Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, fest gegeben. Dann  $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} |a_j| r^j \leq \varepsilon \quad (**)$$

Setze  $p_\varepsilon(x) = \dots$  □

**Satz 4.13.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Dann sind äquivalent:

a)  $f$  ist stetig in  $x_0$

b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

c)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)) : \dots$

*Beweis.* ... □

**Definition 4.14.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  heißt *gleichmäßig stetig* (glm stetig), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

(Im Gegensatz zu 4.132 hängt  $\delta_\varepsilon$  nicht von  $x_0$  ab).

**Beispiel 4.15.** a) Sei  $D = (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Sei  $\varepsilon_0 = 1$ , sei  $\delta > 0$  beliebig. Wähle  $x \in (0, 1]$  mit  $x \leq 2\delta$ ,  $y = \frac{x}{2} \implies |x - y| = \frac{x}{2} \leq \delta$ . ...

b) Sei  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Sei  $\varepsilon_0 = 1$ , sei  $\delta > 0$  beliebig. Wähle  $x = \delta + \frac{1}{\delta}$ ,  $y = \frac{1}{\delta} \implies |x - y| = \delta$ , aber  $|f(x) - f(y)| \dots > 1 = \varepsilon_0 \implies f$  nicht glm stetig, obwohl  $f$  stetig.

### 4.3 Hauptsätze über stetige Funktionen

**Theorem 4.16.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann:  $f$  ist glm. stetig. (Beispiel:  $D = [a, b]$ )

*Beweis.* Annahme:  $f$  sei nicht glm. stetig. (4.2) (mit  $\delta = \frac{1}{n}$ ) liefert:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 \quad (*)$$

$D$  beschränkt, Thm. 2.21 (=BW)  $\implies \exists$  TF  $x_{n_k} \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $y_{n_{k_l}} \rightarrow y$  ( $l \rightarrow \infty$ )  
 $\implies x, y \in \overline{D} \stackrel{\text{n.V.}}{=} D$ . Ferner:

$$|x - y| \leq |x - y_{n_{k_l}}| + \underbrace{|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}|}_{\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n_{k_l}}} + |y_{n_{k_l}} - y| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

$\stackrel{1.20.3}{\implies} x = y$ .  $f$  stetig:  $f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}}) \rightarrow f(x) - f(y) = f(x) - f(x) = 0$  ( $l \rightarrow \infty$ )  $\nmid$   
 (\*)  $\square$

**Definition 4.17.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  nicht abgeschlossen.  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ . Die Funktion  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$  (definiert auf  $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$ ) heißt *stetige Fortsetzung* von  $f$  in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

**Beispiel 4.18.** a) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ,  $x \in D$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$

$$\implies \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, \text{ also } \tilde{f}(x) = x+1, x \in \tilde{D} = \mathbb{R}.$$

Da  $\tilde{f}$  stetig auf  $\mathbb{R}$ , ist  $f$  in 1 stetig fortsetzbar. (Wenn man  $y_0 = 3$  setzen würde, wäre  $\tilde{f}$  keine stetige Fortsetzung).

b) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nicht stetig fortsetzbar sind  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ , da jeweils  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht existiert. (siehe Bsp. 4.3)

**Satz 4.19.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann:

- a) Wenn  $f$  auf  $D$  gleichmäßig stetig ist, dann hat  $f$  in  $x_0$  eine stetige Fortsetzung.
- b) Wenn  $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$  abgeschlossen und beschränkt ist und  $f$  in  $x_0$  stetig fortsetzbar ist, dann ist  $f$  mit  $D$  gleichmäßig stetig.

*Beweis.* b) Thm. 4.16:  $\tilde{f}$  ist gleichmäßig stetig auf  $\tilde{D}$ .  $\implies f$  gleichmäßig stetig auf  $D$ .

a) Sei  $f$  gleichmäßig stetig.

- a) Sei  $x_n \in D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $\delta_\varepsilon$  aus (4.2). Dann:  
 $\exists N_\varepsilon : |x_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_\varepsilon) \implies |x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon) \xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon)$ . Thm. 2.26  
 $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =: y_0$
- b) Sei  $\tilde{x}_n$  in  $D$  eine weitere Folge mit  $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ . Dann  $\exists \tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  mit  $|\tilde{x}_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |x_n - \tilde{x}_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - \tilde{x}_n| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon)$   
 $\xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |f(\tilde{x}_n) - y_0| \leq |f(\tilde{x}_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - y_0| \stackrel{1)}{\leq} \varepsilon + \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_m)| \stackrel{1)}{\leq} 2\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies f(\tilde{x}_n) \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

□

**Theorem 4.20** (Satz vom Maximum). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann  $\exists x_\pm \in D$  mit  $f(x_+) = \max_{x \in D} f(x)$ ,  $f(x_-) = \min_{x \in D} f(x)$ . Insbesondere ist  $f$  beschränkt, d. h.  $|f(x)| \leq M \quad (:= \max\{f(x_+), f(x_-)\})$ ,  $\forall x \in D$ .

*Beweis.* a) ...

b) ...

□

**Korollar 4.21.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$ . Dann:  $f(x) \geq f(x_-) > 0 \quad (\forall x \in D)$ , (wobei  $x_- \in D$  aus Thm. 4.20).

**Beispiel.** Wenn  $D$  nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, dann sind Thm. und Kor. im Allgemeinen falsch.

a)  $D = (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $g(x) = x$ .  $\implies f, g$  stetig und unbeschränkt.

b)  $D = [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \geq 1$ . Aber  $\inf_{x \in D} f(x) = 0$ .

**Frage.** Wie sieht Bild von  $f$  aus?  $f(D)$  kann Lücken haben, wenn:

**Theorem 4.22** (Zwischenwertsatz/ZWS). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann:  $f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$ . Also:  $\forall y_0 \in [\min f, \max f] \exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

*Beweis.* ...

□

**Korollar 4.23** (Nullstellensatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ . Dann  $\exists x_* \in [a, b] : f(x_*) = 0$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung  $f(x) \leq 0 \leq f(b)$ ,  $f(b) \leq 0 \leq f(a) \implies 0 \in f([a, b])$ . ZWS  $\implies$  Beh. □

**Korollar 4.24.** Sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall (Intervallsatz).

*Beweis.* Annahme:  $f(I)$  sei kein Intervall  $\implies \exists a, b \in I$  mit  $y := f(a) < f(b) =: z$  und  $u \in (y, z)$  mit  $u \notin f(I)$ . Sei etwa  $a < b$ . ZWS  $\implies f([a, b])$  Intervall,  $y, z \in f([a, b]) \implies u \in f([a, b]) \implies \text{Z}$   $\square$

**Beispiel 4.25.** a)  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x^k$  ( $k \in \mathbb{N}$  fest). Dann  $f$  stetig,  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \geq 0$  ( $\forall x \geq 0$ ),  $f(n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Kor. 4.24:  $f(\mathbb{R}_+) = \text{Intervall} \implies f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

b) Suche  $x_0 \geq 0$ :  $\exp(-x_0) = x_0 \iff f(x_0) = \exp(-x_0) - x_0 = 0$ . Hier  $f$  stetig:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ . 4.23  $\implies \exists x_0 : f(x_0) = 0$ .

**Definition 4.26.**

**Beispiel.** a) ...

b) ...

*Bemerkung 4.27.*

*Beweis.*  $\square$

**Theorem 4.28.**

*Beweis.*  $\square$

**Beispiel 4.29.**

## 4.4 Exponentialfunktion und ihre Verwandtschaft

...

**Definition 4.30.**

**Definition 4.31.**

*Bemerkung 4.32.* ...

a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

f) ...



## Trigonometrische Funktionen

...

Satz 4.33.

Definition.

...

Definition 4.34.

Definition 4.35.

Beispiel 4.36.