2 Der Integralsatz von Cauchy

2.1 Das komplexe Kurvenintegral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig (d.h. für alle $t \in [a,b]$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und diese sind bis auf endlich viele $t_k \in [a,b]$ $(k = 1,\dots,m)$ gleich.

$\rightsquigarrow$ f hat endlich viele (oder keine) Sprungstellen.

$\Longrightarrow$ $\operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ sind beschränkt und messbar.

$\Longrightarrow$ $\exists \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int f\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Setze $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Eigenschaften: Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen (vgl. Analysis 3):

(a) $\operatorname{Re}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\operatorname{Im}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\overline{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$
(folgt direkt aus der Definition)

(b) $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\|f\|_\infty$ (zum Beweis: setze $h = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f$)

(c) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Beweis. Für $\alpha = \gamma + \mathrm{i}\delta$, $g = 0$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (\gamma u(t) - \delta v(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b (\delta u(t) + \gamma v(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \gamma\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t - \delta\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\delta\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\gamma\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (\gamma + \mathrm{i}\delta)\int_a^b (u(t) + \mathrm{i}v(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

(d) Seien $f, f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $f_n \to f$ gleichmäßig $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* in $t_0 \in [a,b]$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ bei t_0 differenzierbar sind. Dann gilt $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$. Wenn f bei allen $t \in [a,b]$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, so schreiben wir $f \in C^1([a,b], \mathbb{C})$. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v'(t)\,\mathrm{d}t = u(t)\big|_a^b + \mathrm{i}v(t)\big|_a^b = f(b) - f(a). \tag{2.1}$$

Genauso zeigt man: Falls $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, so existiert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s = g(t) \tag{2.2}$$

für jedes $t \in [a,b]$.
Seien $f \in C^1([a,b], \mathbb{C})$ und $\phi \in C^1([\alpha, \beta])$ mit $\phi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

(Beweis wie im reellen Fall).

Beispiel 2.1. Es gilt $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt}\right)'\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt}\Big|_a^b = \frac{1}{z}\left(\mathrm{e}^{zb} - \mathrm{e}^{za}\right)$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.2. Sei $\gamma \in C([a,b], \mathbb{C})$. Dann heißt $\Gamma = \gamma([a,b])$ *stetige Kurve* oder *Weg* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ mit Parametrisierung γ. Die Kurve heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ und *einfach*, wenn γ auf $[a,b)$ injektiv ist. Die Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stückweise* C^1, wenn $\gamma \in C([a,b], \mathbb{C})$ und es Zahlen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gibt, sodass die Einschränkung γ_k von γ auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar für jedes $k = 1, \ldots, m$ ist. Wir setzen dann $\gamma'(t) = \gamma_k'(t)$ für $t \in [t_{k-1}, t_k)$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\gamma'(b) = \gamma_m'(b)$. Wenn zusätzlich jedes γ_k eine affine Funktion ist, so heißt Γ *Streckenzug*.

Im Folgenden bezeichnet Γ stets eine Kurve, die stückweise C^1 ist, und γ ist eine Parametrisierung (soweit nichts anderes gesagt wird).

Beispiel 2.3. (a) Die einfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c,r)$ hat z.B. die Parametrisierungen $\gamma = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma_1 = c + r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, \pi]$. Sie ist einfach und geschlossen.

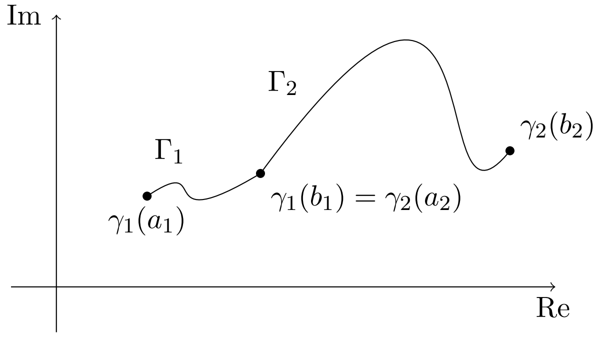
(b) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Die m-fach durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c,r)$ hat die Parametrisierung $\gamma = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 2\pi m]$. Sie ist geschlossen, aber nicht einfach.

(c) Die Strecke $\overrightarrow{wz}$ von w nach $z \neq w$ hat die Parametrisierung $\gamma(t) = w + t(z - w)$ mit $t \in [0,1]$. Sie ist einfach, aber nicht geschlossen.

(d) Seien Γ_1, Γ_2 stückweise C^1-Kurven mit Parametrisierungen $\gamma_j \in C([a_j, b_j], \mathbb{C})$ $(j = 1,2)$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Dann hat der Summenweg $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ die Parametrisierung

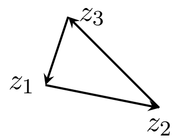
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma_1(a_1)$ nach $\gamma_2(b_2)$.

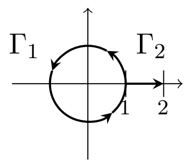


Beispiel:

- Dreiecksweg $\overrightarrow{z_1 z_2} + \overrightarrow{z_2 z_3} + \overrightarrow{z_3 z_1}$:



- Kreis mit Griff $\partial B(c, r) \cup [1, 2]$:



(e) Der Rückwärtsweg $-\Gamma$ wird durch $\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a)$ mit $t \in [a, b]$ parametrisiert. Dabei sind $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$ und $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$. Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma(b)$ nach $\gamma(a)$.

Definition 2.4. Seien Γ eine stückweise C^1-Kurve mit Parametrisierung $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann heißt

$$\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

komplexes Kurvenintegral.

Bemerkung 2.5. Aus den Eigenschaften des komplexen Integrals folgt sofort für $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma (\alpha f + \beta g)(z) \,\mathrm{d}z = \alpha \int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z + \beta \int_\Gamma g(z) \,\mathrm{d}z.$

(b) $\displaystyle\left|\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z\right| \le l(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$, wobei $\displaystyle l(\gamma) = \int_a^b \gamma'(t)) \,\mathrm{d}t$ die Kurvenlänge von Γ ist (vgl. Analysis 2/3).

(c) Sei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ wie in Bsp. 2.3(d). Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z) \,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z) \,\mathrm{d}z.$$

Speziell folgt mit den Bezeichnungen aus Def. 2.2

$$\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t.$$

(d) Für den Rückwärtsweg $-\Gamma$ aus Bsp. 2.3(e) gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\hat\gamma(t))\hat\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_a^b f(\gamma(b-t+a))\gamma'(b-t+a)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \quad (\text{Substituiere } s=b-t+a)\\ &= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(e) Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen ϕ von Γ. Das heißt: Wenn $\phi \in C([a,b])$ strikt wachsend und auf jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ aus Definition 2.2 stetig differenzierbar ist, dann ist $\tilde\gamma := \gamma\circ\phi^{-1}$ auf $[\alpha,\beta] := \phi([a,b])$ stückweise C^1, $\tilde\gamma([a,b]) = \gamma([a,b]) = \Gamma$ und es gilt:

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\tilde\gamma(s))\tilde\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^m \int_{\phi(t_{k-1})}^{\phi(t_k)} f(\gamma(\phi^{-1}(s)))\gamma'(\phi^{-1}(s))\,\mathrm{d}(\phi^{-1}(s))$$
$$\underset{t=\phi^{-1}(s)}{\overset{(2.2)}{=}} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(f) Seien $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $f = u + \mathrm{i}v$, $\alpha,\beta,u,v \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (u(\gamma(t)) + \mathrm{i}v(\gamma(t)))(\alpha'(t)+\mathrm{i}\beta'(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u\\ -v\end{pmatrix}\cdot \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{i}\int_\Gamma \begin{pmatrix} v\\ u\end{pmatrix}\cdot\mathrm{d}(x,y).\end{aligned}$$

Beispiel 2.6. (a) Sei $\Gamma = \partial B(c,r)$ m-fach durchlaufen, $c\in\mathbb{C}$, $r>0$. Für $k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ gilt mit $\gamma(t) = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t\in[0,2\pi m]$:

$$\int_\Gamma (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi m} (c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - c)^k (c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{k+1}\int_0^{2\pi m} \mathrm{e}^{(k+1)\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$$

Mit Beispiel 2.1 erhalten wir:

$$\int_\Gamma (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \frac{r^{k+1}}{k+1}(\mathrm{e}^{2\pi m(k+1)\mathrm{i}} - 1) = 0.$$

Nun sei $k=-1$. Dann gilt:

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \int_0^{2\pi m} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi m} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}m.$$

(b) Seien $\Gamma = \overrightarrow{0w}$ und $w\in\Sigma_\pi$. Mit $\gamma(t) = tw$, $t\in[0,1]$, gilt:

$$\int_\Gamma z^{\frac12}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \sqrt{t}w^{\frac12}w\,\mathrm{d}t = w^{\frac32}\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}w^{\frac32}.$$

Satz 2.7. *Seien Γ stückweise C^1, $f_n \in C(\Gamma,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.*

(a) *Wenn $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$, dann folgt*

$$\left|\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq l(\gamma)\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$.

(b) *Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist die Abbildung*

$$z \mapsto \int_\Gamma h(z,w)\,\mathrm{d}w$$

von D nach $\mathbb{C}$ stetig.

(c) *Wenn $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ gleichmäßig in $z \in \Gamma$ konvergiert, dann gilt:*

$$\int_\Gamma \sum_{n=1}^\infty f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^\infty \int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

(d) *Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$, sodass für jedes $w \in \Gamma$ die Abbildung $z \mapsto h(z,w)$ von D nach $\mathbb{C}$ differenzierbar ist und $\frac{\partial}{\partial z}h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann existiert*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_\Gamma h(z,w)\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial z}h(z,w)\,\mathrm{d}w.$$

Beweis. (a) $\left|\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right|$

$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f - f_n\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \|f - f_n\|_\infty l(\gamma) \to 0$$

für $n \to \infty$.

(b) Seien $z_n, z_0 \in D$ mit $z_n \to z_0$. Sei $r > 0$, so dass $B = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $z_n \in B$. Da $(z,w) \mapsto h(z,w)$ auf der kompakten Menge $B \times \Gamma$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert $f_n(w) = h(z_n, w)$ gleichmäßig in $w \in \Gamma$ gegen $f(w) := h(z_0, w)$ für $n \to \infty$. Mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) mit $\sum_{k=1}^\infty f_k$ statt f_n.

(d) Seien $z_0 \in D$, $r > 0$, $z_n \in B := \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ mit $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $w \in \Gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h(z_n,w) - h(z_0,w)}{z_n - z_0}\right| &\overset{(2.1)}{=} \left|\frac{1}{z_n - z_0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(z_0 + t(z_n - z_0), w)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\overset{\text{KR}}{=} \left|\frac{1}{z_n - z_0}\int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)(z_0 + t(z_n - z_0), w) \cdot (z_n - z_0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{|z_n - z_0|}\int_0^1 \left|\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)(z_0 + t(z_n - z_0), w)\right| \cdot |z_n - z_0|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left|\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)(z_0 + t(z_n - z_0), w)\right|\,\mathrm{d}t \leq \max_{z\in B, w\in\Gamma}\left|\frac{\partial h}{\partial z}(z,w)\right| =: c_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Weiter ist für eine Parametrisierung $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ von Γ:

$$\frac{1}{z_n - z_0}\left(\int_\Gamma h(z_n, w)\,\mathrm{d}w - \int_\Gamma h(z_0, w)\,\mathrm{d}w\right) = \int_\Gamma \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0}\,\mathrm{d}w$$

$$= \int_0^1 \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gilt für $t \in [0,1]$:

$$\left|\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \cdot \gamma'(t)\right| \le c_1 \cdot \|\gamma'\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

und die Funktion $c_1\|\gamma'\|\mathbb{1}_{[0,1]}$ ist auf $[0,1]$ integrierbar. Außerdem gilt:

$$\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \to \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))$$

für $n \to \infty$.

Majorisierte Konvergenz liefert die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n - z}\left(\int_\Gamma h(z_n, w)\,\mathrm{d}w - \int_\Gamma h(z_0, w)\,\mathrm{d}w\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_\Gamma h(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_\Gamma h(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0) &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z - z_0}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial z}(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0).\end{aligned}$$

□

Erinnerung: Sei X ein Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn aus $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \varnothing$, $M \cap O_2 \neq \varnothing$ für alle offenen Teilmenge $O_1, O_2 \subseteq X$ stets folgt, dass

$$M \cap O_1 \cap O_2 \neq \varnothing.$$

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

Bemerkung. Aus Analysis 2 wissen wir: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend. Alle zusammenhängenden Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend. Also sind stetige Kurven in X zusammenhängend. (Dabei definieren wir stetige Kurven und Streckenzüge im normierten Vektorraum genau wie in $\mathbb{C}$, vgl. Def. 2.2.)

Satz 2.8. *Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$. Dann gelten:*

(a) *Für alle $x, y \in M$ gebe es eine stetige Kurve in M von x nach y. Dann ist M zusammenhängend.*

(b) *Wenn $M = D$ offen und zusammenhängend ist, dann gibt es für alle $x, y \in D$ einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y.*

Beweis. (a) Seien $O_1, O_2 \subseteq X$ offen mit $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \varnothing$, $M \cap 0_2 \neq \varnothing$. Annahme: $M \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Wähle ein $x \in M \cap O_1$, $y \in M \cap O_2$. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve $\Gamma \subseteq M$ von x nach y. Damit gilt $\Gamma \subseteq M \subseteq O_1 \cup O_2$, $x \in \Gamma \cap O_1$, also ist $\Gamma \cap O_1 \neq \varnothing$. Ebenso ist $\Gamma \cap O_2 \neq \varnothing$. Ferner ist $\Gamma \cap O_1 \cap O_2 \subseteq M \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies \Gamma$ ist unzusammenhängend: Widerspruch zur obigen Bemerkung. Also ist M zusammenhängend.

(b) Sei D offen und zusammenhängend und $x \in D$ beliebig. Setze

$$D(x) := O_1 := \{y \in D \mid \exists \text{ Streckenzug } \Gamma(y) \subseteq D \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Dann ist $x \in O_1 \subseteq D$.

- Sei $y \in O_1$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y,r) \subseteq D$ (da D offen). Sei $z \in B(y,r)$. Dann ist $\overrightarrow{yz} \subseteq B(y,r) \subseteq D$. Somit ist $\Gamma(y) + \overrightarrow{yz} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach z $\implies z \in O_1 \implies B(y,r) \subseteq O_1 \implies O_1$ ist offen in D.
- Seien $y_n \in O_1$ mit $y_n \to y \in D$ $(n \to \infty)$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y,r) \subseteq D$. Wähle (großes) N mit $y_N \in B(y,r) \subseteq O_1$. Dann ist $\Gamma(y_N) + \overrightarrow{y_N y} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach $y \implies y \in O_1 \implies O_1$ ist in D abeschlossen. Also ist $D \setminus O_1 =: O_2$ in D offen, also auch in X offen (da D offen).

Annahme: $O_2 \neq \varnothing \iff O_1 \neq D$. Dann: $D = O_1 \dot\cup O_2$, $D \cap O_1 \neq \varnothing$, $D \cap O_2 = O_2 \neq \varnothing$, $D \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies D$ ist unzusammenhängend Widerspruch zur Voraussetzung. $\implies O_2 = \varnothing \implies O_1 = D(x) = D$. □

Bemerkung 2.9. Sei X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ offen, $x, y \in D$. Die Menge $D(x)$ aus dem Beweis von Satz 2.8(b) ist in D offen und abgeschlossen (gleicher Beweis, auch wenn D nicht zusammenhängend). Satz 2.8(a) angewendet auf $D(x)$ liefert, dass $D(x)$ zusammenhängend ist. Ferner gilt entweder

(a) $D(x) = D(y) \iff$ es existiert ein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y

oder

(b) $D(x) \cap D(y) = \varnothing \iff$ es existiert kein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y.

Dann heißen $D(x)$ mit $x \in D$ *Zusammenhangskomponenten* von D. Diese sind also entweder gleich oder disjunkt.

Beweis.
- $\exists\, w \in D(x) \cap D(y) \implies$ es gibt einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y über w. Dies liefert „$\Rightarrow$“ in a), „$\Leftarrow$“ in b)
- Es gebe einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y. Dann gibt es für alle $z \in D(x)$ eine Streckenzug in D von y nach z über $x \implies z \in D(y)$. Dies liefert schon „$\Rightarrow$“ in b). Somit: $D(x) \subseteq D(y)$. Genauso zeigt man $D(y) \subseteq D(x)$. Dies liefert „$\Leftarrow$“ in a). □

Satz 2.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Wähle $z_0 \in D$ fest.

(a) Sei $z \in D$ mit $\overrightarrow{z_0 z} \subseteq D$ und $z \neq z_0$. Dann:

$$0 = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f'(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f'(\underbrace{z_0 + t(z - z_0)}_{=\gamma(t)})(z - z_0)\,\mathrm{d}t = (f(z) - f(z_0))(z - z_0),$$

also ist $f(z) = f(z_0)$.

(b) Sei nun $w \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von z_0 nach w. Aus endlicher Anwendung von (a) folgt $f(w) = f(z_0)$. □

Bemerkung. Dieser Satz ist falsch für unzusammenhängendes D.

Definition 2.11. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Eine Funktion $F \in H(D)$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f auf D.

Beispiel. Polynome, exp, sin, cos haben Stammfunktionen auf $\mathbb{C}$. $f(z) = \frac{1}{z}$ hat die Stammfunktion log auf Σ_π.

Bemerkung 2.12. Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Gebiet D. Dann sind alle anderen Stammfunktionen von f auf D von der Form $F + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, denn: Sei $F_1 \in H(D)$ eine weitere Stammfunktion. Dann: $(F - F_1)' = f - f = 0$. Also ist $F - F_1$ konstant nach Satz 2.8. $\Longrightarrow$ es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F + c$.

Satz 2.13 (vgl. Satz 3.12 Analysis 2)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt eine Stammfunktion F.*

(b) *Für alle Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$, die beide von einem beliebigen $z \in D$ zu einem beliebigen $w \in D$ laufen, gilt*
$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) *Für alle geschlossenen Kurven $\Gamma \subseteq D$ gilt*
$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

In diesem Fall folgt für jede Kurve $\Gamma \subseteq D$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, dass
$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. a) ⇒ c): Sei $\Gamma \subseteq D$ eine Kurve von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dann:
$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2.1)}{=}$$
$$\sum_{k=1}^{m} \big(F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k+1}))\big) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Also gilt die letzte Behauptung im Falle der Existenz einer Stammfunktion. Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, folgt hiermit c) aus a).

c) ⇒ b): Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$ wie in b). Dann ist $\Gamma := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$ eine geschlossene Kurve von $\gamma_1(a)$ nach $\gamma_1(a)$ (über $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$) und es gilt
$$0 \overset{\text{c)}}{=} \int_{\Gamma} f\,\mathrm{d}z \overset{\text{Bem. 2.5}}{=} \int_{\Gamma_1} f\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f\,\mathrm{d}z.$$

Daraus folgt b).

b) $\Rightarrow$ a): Sei $z_0 \in D$ fest, $z \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma(z) \subseteq D$ von z_0 nach z. Setze

$$F(z) = \int\limits_{\Gamma(z)} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Wähle $r > 0$ mit $B(z,r) \subseteq D$. Sei $0 < |h| < r$. Dann sind $-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)$ und $\overrightarrow{z(z+h)}$ Kurven in D von z nach $z+h$. Damit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) &\overset{\text{Bem. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \int\limits_{-\Gamma(z)+\Gamma(z+h)} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &\overset{\text{b)}}{=} \frac{1}{h} \int\limits_{\overrightarrow{z(z+h)}} f(w)\,\mathrm{d}w \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z) \quad (h \to 0) \quad \text{(nach Satz 2.7).}\end{aligned}$$ □

Beispiel 2.14. (a) Sei Γ ein Weg von z_1 nach z_2. Dann gilt

$$\int_\Gamma \cos z\,\mathrm{d}z = \sin z_2 - \sin z_1.$$

(b) Sei $\varepsilon \in (0,\pi)$ und Γ_ε eine Kurve in Σ_π von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)}$ nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)} - \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)} = \mathrm{i}(\pi-\varepsilon) - \mathrm{i}(-\pi+\varepsilon) = 2\mathrm{i}(\pi-\varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \neq 0,$$

obwohl $\mathbb{D}$ eine geschlossene Kurve ist. Also besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.15. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}$$

Windungszahl (oder *Index*) von Γ bei z.

Bemerkung. Da $\Gamma \subseteq B(0,r)$ für ein $r > 0$ ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Satz 2.16. *Seien $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann gelten:*

(*a*) $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(*b*) $z \mapsto n(\Gamma, z)$ *ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von D.*

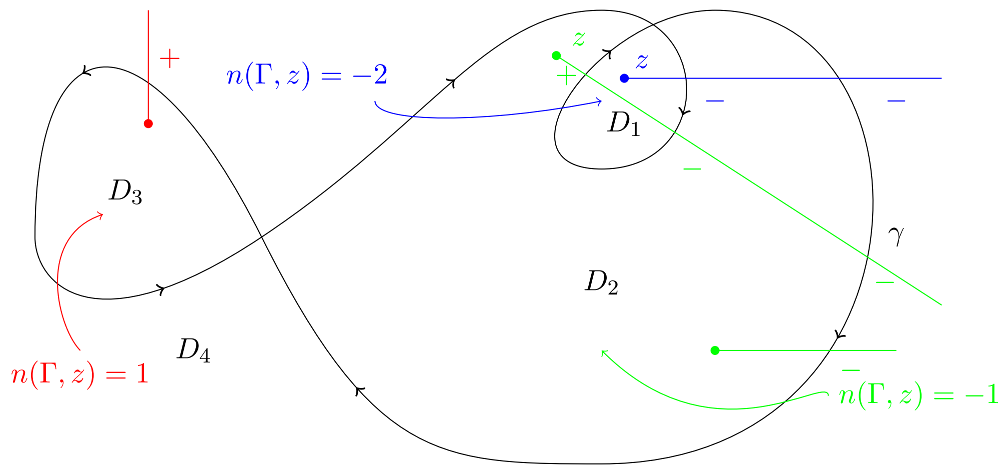
(*c*) *Es gilt $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von D.*

(*d*) $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$

(*e*) *Seien Γ_1, Γ_2 geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dann gilt*

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z).$$

Bild:



D_k sind Zusammenhangskomponenten von $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Beweis. d), e) folgen aus Bem. 2.5.

b) folgt aus a), *denn*: $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig auf D nach Satz 2.7. Nach Ana II ist dann $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend für jede Zusammenhangskomponente $D(z)$ von $D \ni z$ (vgl. Bem. 2.9).

Da $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{Z}$ (nach a)), enthält $n(\Gamma, D(z))$ genau einen Punkt.

c) $|n(\Gamma, z)| \leq \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi} \max\limits_{w \in \Gamma} \dfrac{1}{|w - z|} \to 0$, $|z| \to \infty$. Mit b) folgt daraus c).

a) Seien t_k $(k = 0, \dots, m)$ wie in Def. 2.2, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Setze

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad a = t_0 \leq t \leq t_m = b.$$

Beachte:

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z} \overset{(1.10)}{\iff} 1 = \exp(2\pi\mathrm{i} \cdot n(\Gamma, z)) \overset{\text{Def.}}{=} \exp \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \varphi(b).$$

Es gelten: $\varphi(a) = 1$, $\varphi \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$ und $\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$. $\quad (*)$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \overset{(*)}{=} \frac{\varphi\gamma' - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

für $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 0, \dots, m$.

$$\overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} \frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \qquad (**)$$

$$\begin{aligned}
\implies \varphi(b) &= \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \underset{k=m-1}{\overset{(**)}{=}} \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\
&= \dots = \underbrace{\varphi(a)}_{=1} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1,
\end{aligned}$$

da $\gamma(a) = \gamma(b)$, da Γ geschlossen. $\square$

Beispiel 2.17. Sei $\Gamma = \partial B(c,r)$ m-fach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann:

(a) $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \notin \overline{B}(c,r)$ (Satz 2.16(c)).

(b) $n(\Gamma, z) \overset{2.16(c)}{=} n(\Gamma, c) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_0^{2\pi m} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\underbrace{c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}_{=\gamma(t)} - c} \,\mathrm{d}t = m$, für alle $z \in B(c,r)$.

Bemerkung 2.18. Sei Γ ein geschlossener Weg und L ein Halbstrahl der Form $w = z + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ($\forall t \geq 0$), für feste $c \in \mathbb{C}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, der Γ endlich oft in $\gamma(\tau_1), \ldots, \gamma(\tau_n)$ schneidet.

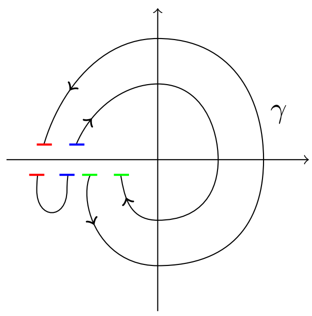
Zähle Berührpunkte τ_j nicht (Γ bleibt auf gleicher Seite von L), zähle die anderen τ_j mit „+1“ falls Γ den Strahl mit wachsendem Argument schneidet und mit „−1“ falls mit fallendem Argument. Dabei sei $z \notin \Gamma$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ die Summe der so mit ± 1 gewichteten echten Schnittpunkte (wobei „fallen“ und „wachsen“ bzgl. L gemeint ist).

Beweis. Nach Verschieben, Drehen und Umparametrisieren (falls nötig) von Γ können wir annehmen, dass $z = 0 \notin \Gamma$, $L = \mathbb{R}_-$, $\tau_j \neq a, b$ ($\forall j = 1, \ldots, n$) gilt. Weiter sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{C})$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass alle $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \subseteq (a,b)$ disjunkt sind, $j = 1, \ldots, n$. Sei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{n} (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon), \quad \Gamma_\varepsilon = \gamma([a,b] \setminus I_\varepsilon),$$

also die disjunkte Vereinigung aller Teilkurven von Γ, die alle in Σ_π liegen.

Bild:



Damit:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{[a,b]\setminus I_\varepsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{[a,b]\setminus I_\varepsilon} (\log \gamma(t))' \,\mathrm{d}t$$

(beachte $\gamma(t) \in \Sigma_\pi$ für $t \in [a,b] \setminus I_\varepsilon$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big(\log \gamma(b) - \log \gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log \gamma(\tau_n - \varepsilon) \\ &\qquad - \log \gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) + \cdots + \log \gamma(\tau_1 - \varepsilon) - \log \underbrace{\gamma(a)}_{=\gamma(b)}\Big) \\ &\overset{(1.11)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n} \Big[\underbrace{\ln|\gamma(\tau_j - \varepsilon)| - \ln|\gamma(\tau_j + \varepsilon)|}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0.} + \mathrm{i}\big(\arg \gamma(\tau_j - \varepsilon) - \arg \gamma(\tau_j + \varepsilon)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im} n(\Gamma, 0) \to \begin{cases} \pm\pi - (\pm\pi) = 0 & \text{— Berührpunkt,} \\ +\pi - (-\pi) = 2\pi & \text{— arg wächst,} \\ -\pi - \pi = -2\pi & \text{— arg fällt.} \end{cases} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$$\implies n(\Gamma, 0) = \frac{2\pi i}{2\pi i} \left| \#\text{Schnittstellen mit wachsendem Arg.} - \#\text{Schnittstellen mit fallendem Arg.} \right|$$

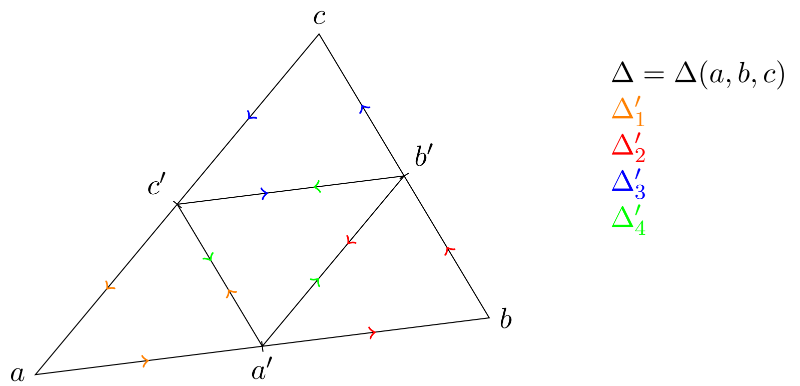
(Falls γ stückweise C^1: füge $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ (siehe Def. 2.2) zu I_ε hinzu). □

2.2 Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete

Satz 2.19 (Lemma von Goursat). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w_0 \in \mathbb{C}$, $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$. Sei $\Delta \subseteq D$ eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Dann:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. (1) *Sei $w_0 \notin \Delta$.* Dann gibt es ein offenes $U \subseteq D$ mit $\Delta \subseteq U$, $f \in H(U)$.



Seitenhalbierung liefert Δ_1' mit Kante $\overrightarrow{a'c'}$ und Ecke a, Δ_2' mit Kante $\overrightarrow{b'a'}$ und Ecke b, Δ_3' mit Kante $\overrightarrow{c'b'}$ und Ecke c, sowie das innere $\Delta_4' = \Delta(a', b', c')$, dessen Rand wir entgegengesetzt mit $\overrightarrow{a'b'} + \overrightarrow{b'c'} + \overrightarrow{c'a'}$ parametrisieren können. Damit:

$$J = \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{\int_{\partial\Delta_k'} f \, \mathrm{d}\tau}_{=:J_k'}$$

Die Integrale über innere Kanten treten doppelt mit verschiedenen Vorzeichen auf, kürzen sich also.

Sei J_1 dasjenige der $J_1', \ldots, J_4'$ mit größtem Betrag und sei Δ_1 das zugehörige Dreieck. Damit:

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J|, \quad l(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta).$$

Iteriere dies. Erhalte Dreiecke Δ_n und

$$J_n = \int\limits_{\partial\Delta_n} f \,\mathrm{d}z \quad \text{mit} \quad l(\partial\Delta_n) = 2^{-n} l(\partial\Delta), \quad |J_n| \geq 4^{-n} |J| . \tag{$*$}$$

Wenn $z, w \in \Delta_n$, dann

$$|z - w| \leq l(\partial\Delta_n) = 2^{-n} l(\partial\Delta). \tag{$**$}$$

Da $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ $(\forall n)$ ist die Folge der Mittelpunkte z_n der Δ_n eine Cauchyfolge (wegen $(**)$).

$$\implies \exists\, z_0 := \lim_{n\to\infty} z_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n.$$

Wenn $\hat{z_0} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, dann:

$$|z_0 - \hat{z_0}| \overset{(**)}{\leq} 2^{-n} l(\partial\Delta) \quad (\forall n)$$

Für $n \to \infty$ folgt $z_0 = \hat{z_0}$, also $\{z_0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq U$.

Setze $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$. Da f bei z_0 differenzierbar ist (wegen $f \in H(U)$), folgt $g(z) \to 0$ für $z \to z_0$ $(z \in \Delta)$.

Ferner: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$. Mit $\int_{\partial\Delta_n} \cdots \,\mathrm{d}z$ folgt:

$$J_n = \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ nach } 2.13} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ nach Satz } 2.13} + \int\limits_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}
\implies 4^{-n} |J| &\overset{(*)}{\leq} |J_n| = \left| \int\limits_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \right| \leq \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,|z - z_0| l(\partial\Delta_n) \\
&\overset{(*),(**)}{\leq} \left(2^{-n} l(\partial\Delta_n)\right)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| \\
&\implies |J| \leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $J = 0$, also die Behauptung im Fall $w_0 \notin \Delta$.

(2) Sei $w_0 \in \Delta$.

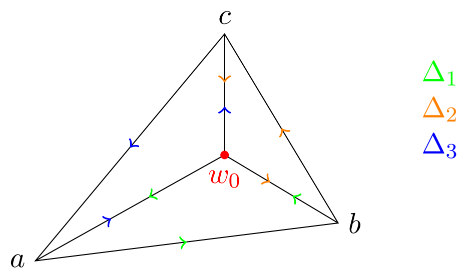
(a) Sei w_0 eine Ecke von Δ. Sei $\varepsilon > 0$. Zerlege Δ wie in (1) per Seitenhalbierung. Wähle dabei stets das Teildreieck mit Ecke w_0. Erhalte Dreiecke $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_m^*$ mit disjunktem Inneren, sodass $w_0 \in \Delta_1^*$, $l(\partial\Delta_1^*) \leq \varepsilon$, $w_0 \notin \Delta_k^*$ für $k \geq 2$. Wie in (1) erhalten wir

$$\left| \int\limits_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\partial\Delta_k^*} f\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int\limits_{\partial\Delta_1^*} f\,\mathrm{d}z \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sup_{z\in\Delta} |f(z)|}_{<\infty} .$$

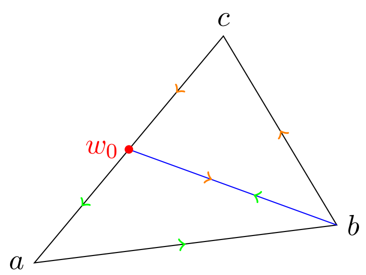
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$.

(b) Sei $w_0 \in \Delta \setminus \partial\Delta$. Zerlege Δ in $\Delta_1 = \Delta(a,b,w_0)$, $\Delta_2 = \Delta(b,c,w_o)$ und $\Delta_3 = \Delta(c,a,w_0)$. Damit erhalten wir nach (a)

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial\Delta_k} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

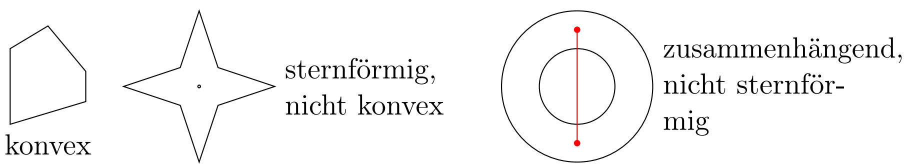


(c) Sei $w_0 \in \partial\Delta$, w_0 keine Ecke. Wie in (b) zerlegen wir Δ in zwei Teildreiecke:

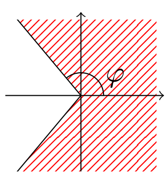


Daraus erhalten wir wieder $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0.$ □

Definition 2.20. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Die Menge M heißt *konvex*, wenn für alle $w, z \in M$ auch $\overrightarrow{wz}$ in M liegt. Die Menge M heißt *sternförmig* mit Zentrum $z_0 \in M$, wenn für alle $w \in M$ auch $\overrightarrow{z_0 w}$ in M liegt.



Klar ist: M konvex $\implies M$ sternförmig und M sternförmig $\implies M$ zusammenhängend (nach Satz 2.8).



Sektoren Σ_π sind sternförmig (mit Zentrum 1) und d ist konvex $\iff \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Theorem 2.21 (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Bemerkung. Nach Satz 2.13 ist die Aussage von Theorem 2.21 äquivalent zu: Jedes $f \in H(D)$ besitzt auf D eine Stammfunktion, wenn D sternförmig ist.

Beweis. Sei z_0 das Zentrum von D. Setze für alle $z \in D$

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w)\,\mathrm{d}w = -\int_{\overrightarrow{z z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Sei $r > 0$ mit $B(z,r) \subseteq D$, $z \in D$ fest, sowie $0 < |h| < r$. Dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) &= \frac{1}{h}\Bigg(\int_{\overrightarrow{z_0(z+h)}} f\,\mathrm{d}w + \int_{\overrightarrow{z z_0}} f\,\mathrm{d}w + \int_{\overrightarrow{(z+h)z}} f\,\mathrm{d}w\Bigg) + \frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f\,\mathrm{d}w \\ &= \underbrace{\frac{1}{h}\int_{\partial\Delta(z_0,z+h,z)} f\,\mathrm{d}w}_{=0\ (\text{Satz } 2.19)} + \underbrace{\frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t}_{\to f(z),\ h\to 0 \text{ nach } (2.7)}.\end{aligned}$$

Also ist $F'(z) = f(z)$. □

Beispiel 2.22. (a) $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = 0$, denn $f(z) = \frac{1}{z+2}$ liegt in $H(D)$ für

$$D = \{C \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}\}.$$

Beachte: D ist sternförmig und offen, $\partial\mathbb{D} \subseteq D$.

(b) Cauchy ist im Allgemeinen falsch für Gebiete mit Löchern, z.B. $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: D$. Siehe Bsp. 2.14: $f(z) = \frac{1}{z}$, $f \in H(D)$, $\Gamma = \partial\mathbb{D}$. Dann

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

Bemerkung. Theorem 2.21 gilt auch, wenn $f \in C(D,\mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ für ein $w_0 \in D$. Denn Satz 2.19 wurde für solche f bewiesen.

Theorem 2.23 (Cauchys Integralformel für sternförmige Gebiete)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$, $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in D \setminus \Gamma. \tag{CIF}$$

Speziell mit $\Gamma = \partial B(z,r) \subseteq D$ für $B(z,r) \subseteq D$ und $z \in B(z,r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Beweis. Sei $z \in D \setminus \Gamma$ fest. Setze $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$.
Dann ist $g \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{z\})$. Die Bemerkung nach Bsp. 2.22 liefert dann

$$0 = \int_\Gamma g(w)\,\mathrm{d}w \overset{z \notin \Gamma}{=} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}}_{=2\pi\mathrm{i}n(\Gamma,z)}.$$

Daraus folgt (CIF) und der Spezialfall (2.4). Mit $c = z$ und der Parametrisierung $\gamma(t) = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ folgt aus (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t,$$

also (2.5). □

Beispiel. Es gilt $\displaystyle\int\limits_{\partial B(2,1)} \frac{\sqrt{w}}{w - \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Wähle hier $D = B(2, \frac{3}{2})$, $f(w) = \sqrt{w}$. Dann ist D konvex, $f \in H(D)$, $\partial B(2,1) \subseteq D$.

Definition 2.24. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn es für jedes $z \in D$ eine $r(z) > 0$ gibt, sodass $B(z, r(z)) \subseteq D$ und f auf $B(z, r(z))$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z und Koeffizienten $a_n(z)$ besitzt.
Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt *ganz*.

Theorem 2.25 (Entwicklungssatz)**.** *Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch auf D.*
Sei ferner $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$. Dann gelten die Cauchyformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \tag{2.6}$$

und die Cauchy-Abschätzungen

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|. \tag{2.7}$$

Sei $R(z_0) = \sup\{s > 0 \mid B(z_0, s) \subseteq D\}$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{2.8}$$

für alle $z \in B(z_0, r)$ mit $0 < r < R(z_0)$. Die Reihe in (2.8) konvergiert absolut und gleichmäßig für $z \in B(z_0, r')$ mit $0 < r' < r < R(z_0)$. Wenn f ganz ist, dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$), sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Beweis. Seien $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $w \in \Gamma := \partial B(z_0, r)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$.
Dann existiert

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w-z} = n! \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

und

$$(w,z) \mapsto \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w-z}$$

ist stetig für $w \in T$, $z \in B(z_0, r)$. Somit folgt aus der (CIF) und Satz 2.7(d) (mit „$D = B(z_0, r)$“), dass f auf D beliebig oft differenzierbar ist und (2.6) gilt. Da $l(\Gamma) = 2\pi r$ und $(w - z_0)^{-n-1} = r^{-n-1}$, folgt (2.7) aus (2.6) (mit $z = z_0$).

Seien nun $0 < r' < r$, $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \le \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Damit:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n . \tag{$*$}$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $w \in \Gamma$ und $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$f(z) \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w \underset{\text{Satz 2.7(c)}}{\overset{(*)}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w}_{\overset{(2.6)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)} .$$

Damit folgt (2.8). Wenn $D = \mathbb{C}$, wähle $z = 0$, r beliebig groß und erhalte so letzte Bedingung. □

Beispiel 2.26. (a) Das Theorem ist falsch im Reellen, Beispiel aus Analysis 1:

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \implies f$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (mit $f'(0) = 0$) *aber* f' ist unbeschränkt für $x \to 0_+$, also unstetig und $\nexists f''$.

(2) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \rightsquigarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$ aber $f^{(n)}(0) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, als Taylorreihe von f in 0 ist konstant 0, also ungleich f.

(b) Sei $f(z) = (1+z)^\alpha$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, $z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$) $\rightsquigarrow f$ ist holomorph auf D. Aus Theorem 2.25 folgt: f hat Potenzreihe in $z_0 = 0$. Diese ist gleich der Binomialreihe aus Analysis 1. Nach Theorem 2.25 ist der Konvergenzradius $\rho \ge 1$. *Falls* $\rho < 1$ hätten alle Ableitungen von f eine stetige Fortsetzung auf $\partial B(0,1)$. Das widerspricht der Definition von $f \implies \rho = 1$.

Korollar 2.27. *Gegeben sei eine Borelmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $h\colon D \times X \to \mathbb{C}$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, mit:*

(a) $\forall z \in D$ ist $x \mapsto h(z,x)$ integrierbar auf X.

(b) $\forall x \in X$ ist $z \mapsto h(z,x)$ holomorph auf D.

(c) Es existiert ein integrierbares $g\colon X \to \mathbb{R}_+$ mit $|h(z,x)| \le g(x)$ $(\forall z \in D,\ x \in X)$.

Dann ist

$$z \mapsto H(z) := \int_X h(z,x) \,\mathrm{d}x$$

holomorph auf D und es gilt:

$$H^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z,x) \,\mathrm{d}x \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Sei $z_0 \in D$, $r > 0$ fest (aber beliebig) mit $B(z_0, r) \subseteq D$. Sei $z \in B(z_0, r) \Longrightarrow \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. (2.7) für z und $k \in \mathbb{N}$ liefert

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|w-z|=r} |h(w, x)| \overset{\text{n.V.}}{\leq} \frac{h!}{r^k} g(x) \quad (\text{für jedes feste } x \in X.) \tag{$*$}$$

Seien nun $z_n \to z_0$, mit $z_n \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Dann:

$$\begin{aligned} D_n &:= \frac{1}{z_n - z_0}\Big(H(z_n) - H(z_0)\Big) = \int_X \frac{1}{z_n - z_0}\Big(h(z_n, x) - h(z_0, x)\Big) \, \mathrm{d}x \\ &\overset{(2.1)}{=} \int_X \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} h\right) \Big(z_0 + t(z_n - z_0), x\Big)}_{=:\varphi_n(t,x)} \cdot (z_n - z_0) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(Vergleiche hierzu das Vorgehen im Beweis zu Satz 2.7(d)).

Es gilt: $\varphi_n(t, x) \to \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig in $t \in [0, 1]$, für jedes feste $x \in X$, da

$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$$

stetig ist nach Theorem 2.25. Also:

$$\int_0^1 \varphi_n(t, x) \, \mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \quad (n \to \infty, \; x \in X).$$

Ferner:

$$\left| \int_0^1 \varphi_n(t, x) \, \mathrm{d}t \right| \underset{(k=1)}{\overset{*}{\leq}} \frac{1}{r} g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \; x \in X),$$

wobei $g(x)$ integrierbar ist. Majorisierte Konvergenz liefert:

$$D_n \longrightarrow \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \, \mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

$\Longrightarrow$ H ist bei z_0 differenzierbar $\Longrightarrow$ $H \in H(D)$. Ferner:

$$H'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z, x) \, \mathrm{d}x \quad (\forall z \in D).$$

Beachte: $\frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$ ist in x messbar, also liefern Theorem 2.25 und $(*)$ eine iterative Formel für $H^{(k)}$. □

Beispiel 2.28 (Laplacetransformation)**.** Sei $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar, so dass für gewisse $w \in \mathbb{R}$, $c > 0$ gilt:

$$|f(t)| \leq c\mathrm{e}^{wt} \quad (\forall t \geq 0).$$

Dann:

$$\exists \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > w$ und ist dort holomorph mit

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^n f(t) \, \mathrm{d}t \quad (\forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > w, \; n \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Setze
$$h(\lambda, t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \quad \text{für } t \geq 0,\ \operatorname{Re}\lambda > w.$$

Klar: h ist in λ holomorph ($\forall t \geq 0$).

Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig, $\operatorname{Re}\lambda \geq w + \varepsilon > w$. Dann:

$$|h(\lambda, t)| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda t} |f(t)| \leq \mathrm{e}^{-wt}\mathrm{e}^{-\varepsilon t} |f(t)| \overset{\text{n.V.}}{\leq} c\mathrm{e}^{-\varepsilon t} =: g(t),$$

wobei $g(t)$ integrierbar und unabhängig von λ ist.

Korollar 2.27 liefert Holomorphie von $\hat{f}(\lambda)$ für $\operatorname{Re}\lambda \geq w + \varepsilon$, folglich die Holomorphie für $\operatorname{Re}\lambda > w$, da $\varepsilon > 0$ beliebig. Weiter gilt:

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re}\lambda > w).$$ □

Korollar 2.29 (Morera). *Sei $f \in C(D, \mathbb{C})$ so dass*

$$\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subseteq D$. Dann: $f \in H(D)$.

Beweis. Sei $z \in D$. Wähle $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$. Nach dem Beweis von Theorem 2.21 impliziert die Vorraussetzung, dass f auf $B(z, r)$ (sternförmig) eine Stammfunktion $F \in H(B(z, r))$ besitzt. Nach Theorem 2.25 ist $F \in C^2$ und somit ist $f = F'$ differenzierbar auf $B(z, r)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Theorem 2.30 (Liouville). *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei f eine beschränkte ganze Funktion und $z \in \mathbb{C}$. (2.7) mit $n = 1$ liefert:

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r}\|f\|_\infty,$$

wobei hier $r > 0$ beliebig ist, da $f \in H(\mathbb{C})$. Mit $r \to \infty$ folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 2.10 ist f konstant. □

Korollar 2.31 (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ (mit $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$) hat genau n (eventuell mehrfach gezählte) Nullstellen.*

Beweis. Sei $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass p konstant ist. Setze dazu $f = \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$. Wähle $r > 0$, sodass

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq r.$$

Sei $|z| \geq r$. Dann gilt

$$|p(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - \Big(|a_{n-1}|\,|z|^{n-1} + \cdots + |a_0|\Big) = |a_n|\,|z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n}\right) \geq \frac{1}{2}\,|a_n|\,r^n.$$

Also ist $f(z) \leq \frac{2}{|a_n| r^n}$, wenn $|z| \geq r$. Ferner ist f auf $\overline{B}(0,r)$ beschränkt als stetige Funktion auf einer kompakten Menge. Damit ist f beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$. Mit Liouville (Theorem 2.30) folgt, dass f und damit auch p konstant ist.

Damit hat jedes nichtkonstante Polynom, d.h. jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mindestens eine Nullstelle. Mit Polynomdivision folgt induktiv die Behauptung. □

Definition 2.32. Sei $U \subseteq \mathbb{K}^l$ offen (wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, f_n \colon U \to \mathbb{K}^k$ Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass $f_n \to f$ für $n \to \infty$ *kompakt konvergiert* (oder „*gleichmäßig auf kompakten Mengen*“), wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ gilt:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Bemerkung 2.33. (a) Sei $f_n \to f$ (kompakt) und f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Analysis 2 ist dann f stetig auf K für jedes kompakte K, z.B. $K = \overline{B}(x,r) \subseteq U$. Also ist $f \in C(U, \mathbb{K}^k)$. Im Reellen folgt aber selbst aus $f_n \in C^\infty$ nicht, dass $f \in C^1$. Gegenbeispiel aus Analysis 2: $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ für $x \in (-1,1)$. Hier ist $f_n \in C^\infty((-1,1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf $(-1,1)$ mit $f(x) = |x|$. Aber f ist bei 0 nicht differenzierbar.

(b) Die Partialsummen einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ konvergieren kompakt auf $B(z_0, \rho)$ gegen f. Im Allgemeinen haben wir aber keine gleichmäßige Konvergenz auf $B(z_0, \rho)$.

Beweis. Sei $K \subseteq B(z_0, \rho)$ kompakt. Nach Satz vom Maximum existiert ein $z_1 \in K$ mit

$$|z_0 - z_1| = \max_{z \in K} |z_0 - z| =: r < \rho,$$

da $z_1 \in K \subseteq B(z_0, \rho)$. Also gilt $K \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq B(z_0, \rho)$. Ferner:

$$\max_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |a_n| \, |z - z_0|^n \leq |a_n| \, r^n =: b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{b_n} = r \, \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium gilt dann $\sum_{n=0}^\infty b_n < \infty$. Satz 1.13 (Weierstraß) aus Analysis 2 impliziert, dass die Potenzreihe gleichmäßig und absolut auf $\overline{B}(z_0, r)$ konvergiert, und somit auf K. □

Theorem 2.34 (Konvergenzsatz von Weierstraß)**.** *Seien $f_n \in H(D)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ (kompakt) für ein $f \in C(D, \mathbb{C})$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $f \in H(D)$ und $f_n^{(j)}$ konvergiert kompakt gegen $f^{(j)}$ für $n \to \infty$ und jedes $j \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt $f_n \to f$ (gleichmäßig) auf $\partial\Delta \subseteq D$ $(n \to \infty)$. Damit:

$$0 \overset{2.19}{=} \int_{\partial\Delta} f_n \, \mathrm{d}z \xrightarrow{2.7} \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z \ (n \to \infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Nach Morera (Kor. 2.29) gilt dann $f \in H(D)$.

Sei $r > 0$, $z_0 \in D$ mit $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$. Sei $z \in \overline{B}(z_0, r)$. Dann gilt $\overline{B}(z, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 2r)$. Da $f - f_n \in H(D)$, folgt mit (2.7), dass

$$\begin{aligned}
\max_{z\in\overline{B}(z_0,r)} \left| f^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z) \right| &\le \max_{z\in\overline{B}(z_0,r)} \max_{|w-z|=r} \frac{j!}{r^j} |f(w) - f_n(w)| \\
&\le \frac{j!}{r^j} \max_{|w-z|\le 2r} |f(w) - f_n(w)| \\
&\longrightarrow 0 \ (n \to \infty) \text{ nach Voraussetzung,} \qquad (*)
\end{aligned}$$

also $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ auf $\overline{B}(z_0, r)$ $(n \to \infty,\ j \in \mathbb{N})$.

Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann gibt es für jedes $z_0 \in K$ ein $r(z_0) > 0$ mit $B(z_0, 2r(z_0)) \subseteq D$, da D offen. Klar:

$$K \subseteq \bigcup_{z_0\in K} B(z_0, r(z_0)).$$

Da K kompakt ist, existieren endlich viele $z_1, \ldots, z_m \in K$ und $r_1, \ldots, r_m > 0$ mit $B(z_k, 2r_k) \subseteq D$ $(k = 1, \ldots, m)$ und $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \cdots \cup B(z_m, r_m)$. $(*)$ angewandt auf $\overline{B}(z_k, r_k)$ liefert die Behauptung. □

2.3 Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen

Theorem 2.35 (Identitätssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$f = 0$ auf D.*

(b) *Es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *$N = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt $z_0 \in N$, d.h. es gibt eine Folge $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $z_n \to z_0$ und $z_n \in N$.*

Somit sind zwei Funktionen $g, h \in H(D)$ schon gleich, sobald $g(z_n) = h(z_n)$ auf einer Folge $z_n \to z_0$ mit $z_n, z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ $(n \in \mathbb{N})$ oder sobald für ein $z_0 \in D$ gilt: $g^{(m)}(z_0) = h^{(m)}(z_0)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Der Satz ist falsch, wenn D nicht zusammenhängend ist.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt mit $f = g - h$ aus „(c)⇒(a)“ bzw. „(b)⇒(a)“.

a) ⇒ c): klar.

c) ⇒ b): Seien $z_n, z_0 \in D$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$. Dann ist $f(z_0) = 0$.

Annahme: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Theorem 2.25 liefert ein $r > 0$ mit

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=:a_n}(z - z_0)^k \qquad (\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D),$$

wobei $a_m \neq 0$. Damit:

$$g(z) := (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} \overset{l=k-m}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+m}(z - z_0)^l \quad (z \in B(z_0, r)).$$

Also ist $g \in H(B(z_0, r))$ und $g(z_0) = a_m \neq 0$. Aber $g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_0) = 0$, wobei $z_n \neq z_0$, $z_n, z_0 \in B(z_0, r)$ und $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$. Widerspruch zu c). $\Longrightarrow$ b) gilt.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $D_1 := \{z \in D \mid f^{(m)}(z) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\}$. Nach Vorraussetzung ist $D_1 \neq \varnothing$.

D_1 offen in D: Sei $z \in D_1$. Nach Theorem 2.25 hat f auf einer Kugel $B(z, r)$ eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

wegen $z \in D_1$. Daraus folgt $f = 0$ auf $B(z, r)$, also $B(z, r) \subseteq D_1$, also ist D_1 offen.

$D_2 := \{D \backslash D_1\}$ offen: Sei $w \in D_2$. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(l)}(w) \neq 0$. Nach Theorem 2.25 ist $f^{(l)}$ stetig. Also gibt es ein $r_1 > 0$ mit $B(w, r_1) \subseteq D$ und $f^{(l)}(z) \neq 0$ für alle $z \in B(w, r_1)$. Also gilt $B(w, r_1) \subseteq D_2$, folglich ist D_2 offen.

Annahme: $D_2 \neq \varnothing$. Dann ist $D = D_1 \dot\cup D_2$, D_1, D_2 offen, nichtleer. Widerspruch zu D zusammenhängend.

$$\Longrightarrow \ D_2 = \varnothing \ \Longrightarrow \ D_1 = D \ \Longrightarrow \ \text{(a)}.$$ □

Bemerkung. Bei (c) muss $z_0 \in D$ vorrausgesetzt werden, *Beispiel:*

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

aber $f \neq 0$.

Korollar 2.36 (Nullstellensatz). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, $f \neq 0$ und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in D$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, sowie eine Funktion $g \in H(B(z_0, r))$, sodass*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) \neq 0$$

und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$. (Dabei heißt $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle z_0 von f.)

Beweis. Die Behauptung über die Ableitung folgt aus Theorem 2.35. Die Existenz von g folgt aus dem Beweis von Theorem 2.35 „(c) $\Longrightarrow$ (b)". □

Bemerkung. Im reellen müssen so ein $m \in \mathbb{N}$ und ein g nicht existieren, *Beispiel:*

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$, aber $f \notin C^2$ und

$$|x|^{-k} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & k \geq 2, \\ 0, & k = 0, 1, \end{cases}, \quad (x \to \infty).$$

Hier ist „$m = \frac{3}{2}$".

Korollar 2.37. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, f nicht konstant und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $N_c = \{z \in D\colon f(z) = c\}$ diskret, d.h.: Für alle $z \in N_c$ gibt es ein $r(z) > 0$, sodass $B(z, r(z)) \cap N_c = \{z\}$.*

Beweis. Wenn N_c nicht diskret ist, dann existiert ein $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = c$ und $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_n) = c$ und $z_n \longrightarrow z_0$ $(n \to \infty)$. Dann liefert Theorem 2.35 „(c) $\Longrightarrow$ (a)“ für $h = f - c$ die Behauptung, da f nicht konstant ist, also $h \neq 0$ ist. □

Korollar 2.38 (Holomorphe Fortsetzung)**.**

Beispiel 2.39.

Lemma 2.40.

Theorem 2.41 (Gebietstreue)**.**

Beweis. Sei $U \subseteq D$ offen, $z_0 \in U$ fest, aber beliebig. Nach Korollar 2.37 (mit „$c = f(z_0)$“) existiert ein $r > 0$ mit $f(z) \neq f(z_0)$ für alle $z \in \overline{B}(z_0, r) =: B \subseteq U$ mit $z \neq z_0$. Da ∂B kompakt, folgt

$$\exists \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| =: \delta > 0.$$

Sei nun $w \in B(f(z_0), \delta)$ beliebig, aber fest. Dann ist zu zeigen: $w \in f(U)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists z_1 \in U : f(z_1) = 2.$$

Für $z \in \partial B$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta \\ \Longrightarrow \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| \geq \delta. \end{aligned}$$

Lemma 2.40 für $g := f - w$ liefert $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq U$ mit $g(z_1) = 0 \iff f(z_1) = w$. Also ist $f(U)$ offen. Wenn U zusammenhängend ist, dann ist $f(U)$ nach Theorem 1.68 (Ana 2) zusammenhängend. □

Bemerkung. Seien X, Y normierte Vektorräume und $D \subseteq X$. Eine Abbildung $f\colon D \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede in D offene Teilmenge $U \subseteq D$ die Bildmenge $f(U)$ in Y offen ist. Theorem 2.41 zeigt also die Offenheit aller nichtkonstanten, holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$.

Theorem 2.42 (Maximumsprinzip)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ nicht konstant.*

(*a*) *Dann hat die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ kein lokales Maximum auf D.*

(*b*) *Wenn ferner $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$ und D beschränkt ist, dann gilt:*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Beweis. (a) Annahme: $\exists\, z_0 \in D$, $r > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $(\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D)$.

Wähle $w_n \in \mathbb{C}$ mit $|w_n| > |f(z_0)|$ mit $w_n \to f(z_0)$ $(n \to \infty)$. Nach Theorem 2.41 ist $f(B(z_0, r))$ offen, also

$$\exists\, \delta > 0 : B(f(z_0), \delta) \subseteq f(B(z_0, r)). \tag{$*$}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $w_n \in B(f(z_0), \delta)$. Dann folgt mit $(*)$:

$$\exists\, z \in B(z_0, r) \text{ mit } f(z) = w_n \implies |f(z)| = |w_n| > |f(z_0)| \quad \text{Widerspruch}$$

(b) Nach Vorraussetzung gibt es $z_1 \in \overline{D}$ mit

$$|f(z_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Nach (a) gilt $z_1 \in \partial D$. □

Bemerkung. Theorem 2.42(b) ist im allgemeinen falsch für unbeschränkte Gebiete. *Beispiel*:

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \in \partial D$,

$$\left| f\left(x \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\exp(\mathrm{e}^x \underbrace{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}_{=\pm\mathrm{i}})\right| = 1.$$

Aber $\exp(\exp(x))$ ist unbeschränkt!

Beispiel 2.43 (Potenzreihenentwicklung für gewöhnliche Differentialgleichungen)**.** (allgemeines in Walter: Gewöhnliche DGL) Wir haben Lösungen von

$$\begin{cases} u''(x) + b(x)u'(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Frage: Hat u eine Potenzreihe? Einfache Antwort mittels Holomorphie!

Voraussetzung: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in D$, a, $b \in H(D)$ und $R > 0$ mit $\overline{B}(0, R) \subseteq D$. Setze

$$M := \max_{|z| \le R} \{|a(z)|, |b(z)|\}. \tag{$**$}$$

Seien u_0, $u_1 \in \mathbb{C}$ gegeben, löse:

$$\begin{cases} u''(z) + b(z)u'(z) + a(z)u(z) = 0, & z \in D, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Sei $f \in H(B(0, R))$, $r \le R$. Setze

$$\int_0^z f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\overrightarrow{DZ}} f(w)\,\mathrm{d}w, \quad |z| < r.$$

Dann

$$\exists \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_0^z f(w)\,\mathrm{d}w = \lim_{\substack{h\to 0 \\ (h\neq 0,\, |z+h|<r)}} \frac{1}{h} \left(\int_0^{z+h} f\,\mathrm{d}w - \int_0^z f\,\mathrm{d}w \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f\,\mathrm{d}w \underset{\substack{\text{vgl. Bew.} \\ \text{von 2.13}}}{=} f(z).$$

Damit und mit Satz 2.13 folgt:

$$(2.9) \iff \begin{cases} u(z) = u_0 + \int_0^z u'(w)\,\mathrm{d}w \\ u'(z) = u_1 - \int_0^z \big(a(w)u(w) + b(w)u'(w)\big)\,\mathrm{d}w. \end{cases}$$

Mit „$v = u'$“ definiere

$$\Big(T(u,v)\Big)(z) = \Big(u_0 + \int_0^z v(w)\,\mathrm{d}w,\ u_1 - \int_0^z (au+bv)\,\mathrm{d}w\Big)$$

für $r < \min\{R, 1, \frac{1}{2M}\}$, $z \in B(0,r)$, $(u,v) \in H(B(0,R))^2 \cap C(\overline{B}(0,R))^2 =: E$.

Setze $q = \min\{r, 2m\} < 1$. Dann: $T(u,v) \in E$ und E ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|(u,v)\|_\infty = \max_{|z|\le r}\{|u(z)|\,,\,|v(z)|\}.$$

Beh.: $(E, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Beweis. Sei (u_n, v_n) eine Cauchyfolge in E. $\implies$ (u_n), (v_n) sind Cauchyfolgen in $C(\overline{B}(0,r))$ bezüglich der Supremumsnorm. Dies ist ein Banachraum (Ana 2).

$$\implies \exists\, u, v \in C(\overline{B}(0,r)) \text{ mit } u_n \to u,\ v_n \to v \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}(0,r).$$

Aus Theorem 2.34 folgt: $u, v \in H(B(0,r))$. Beachte:

$$\|(u_n, v_n) - (u,v)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

Seien (u,v), $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$. Dann:

$$\begin{aligned}
\|T(u,v) - T(\tilde{u},\tilde{v})\|_\infty &= \max_{|z|\le r}\Bigg\{\left|\int_0^z \big(v(w) - \tilde{v}(w)\big)\,\mathrm{d}w\right|, \\
&\qquad \left|\int_0^z \Big(a(w)(u(w)-\tilde{u}(w)) + b(w)(v(w)-\tilde{v}(w))\Big)\,\mathrm{d}w\right|\Bigg\} \\
&\overset{(**)}{\le} \max_{|w|\le|z|\le r}\{\underbrace{|z|}_{\le r}\,|v(w)-\tilde{v}(w)|\,,\, \underbrace{|z|}_{\le r}(M\,|u(w)-\tilde{u}(w)| + M\,|v(w)-\tilde{v}(w)|)\} \\
&\le r\underbrace{\max\{r, 2M\}}_{=q<1}\|(u,\tilde{u}) - (v,\tilde{v})\|_\infty
\end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz: $\exists!\,(u,v) = T(u,v) \implies u$ löst (2.9) auf $B(0,r)$.

Aus Theorem 2.25 folgt $\exists\, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n, & \forall z \in B(0,r) \\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Ein Beispiel zur Berechnung von c_n: **Hermitesche DGL:**

Gegeben: $\lambda \in \mathbb{R}$, u_0, $u_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Hier ist $a(z) = \lambda$, $b(z) = -2z$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann folgt nach Satz 1.3

$$-2zu'(z) = -2z\sum_{n=1}^\infty nc_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^\infty(-2nc_n)z^n,$$

$$u'' = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)c_n z^{n-2} \overset{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^\infty (k+2)(k+1)c_{k+2}z^k$$

für ein $z \in B(0,r)$, r aus (2.10). Dann folgt aus (2.11)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n\big]z^n = 0, \quad c_0 = u_0,\ c_1 = u_1.$$

$$\xRightarrow{2.35} \begin{cases}(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, & n \in \mathbb{N}_0,\\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1.\end{cases} \implies c_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n$$

$$\implies c_k = \begin{cases}\frac{1}{k!}(2(k-2)-\lambda)(2(k-4)-\lambda)\cdots(-\lambda)c_0, & k \text{ gerade},\\ \frac{1}{k!}(2(k-2)-\lambda)\cdots(2-\lambda)c_1), & k \text{ ungerade}.\end{cases}$$

Zwei linear unabhängige Lösungen erhält man durch:

1) $c_0 = u_0 = 1$, $c_1 = u_1 = 0$; Lösung:

$$v_{1,\lambda}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{4-\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)}{6!}x^6 - \dots$$

2) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$; Lösung:

$$v_{2,\lambda}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \dots$$

Wenn $\lambda = 2m$, $m \in \mathbb{N}_0$: Abbruch der Rekusion wenn

Fall 1: m gerade, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$,

Fall 2: m ungerade, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

$$\begin{aligned}\lambda = 0,\ m = 0&:\ u_0(x) = 1\\ \lambda = 2,\ m = 1&:\ u_1(x) = x\\ \lambda = 4,\ m = 2&:\ u_2(x) = 1 - 2x^2\\ \lambda = 6,\ m = 3&:\ u_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3\end{aligned}$$

Diese Lösungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,|u_n(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \tag{+}$$

Man kann zeigen, dass alle anderen Lösungen von (2.11) (+) verletzen.