

# 17. Quadrierbare Mengen

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  heißt **quadrierbar** (qb) :  $\iff 1_A \in L(\mathbb{R}^n)$  (  $\iff 1 \in L(A)$  )

In diesem Fall heißt  $v_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx = \int_A 1 dx$  das  $n$ -dimensionale **Volumen** oder **Lebesguemaß** von  $A$ . **Beachte:**  $v_n(A) \in \mathbb{R}$

## Satz 17.1

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt. Ist  $A$  offen oder abgeschlossen, dann ist  $A$  quadrierbar.

## Beweis

16.11, 16.12

■

## Beispiele:

- (1)  $\emptyset$  ist quadrierbar und  $v_n(\emptyset) = 0$ .
- (2) Sei  $Q$  ein Quader im  $\mathbb{R}^n \implies 1_Q \in \mathcal{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n) \implies Q$  ist quadrierbar und  $n$ -dimensionale Volumen von oben gleich dem  $n$ -dimensionalen Volumen aus §15
- (3) Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  beschränkt und abgeschlossen,  $f \in C(D, \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $D$ .  
 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{17.1}$   $A$  ist quadrierbar (im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).  $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, y) \stackrel{16.3}{=} \int_D \left( \int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_D f(x) dx$
- (4)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  ( $r > 0$ ).  $A = \overline{U_r(0)}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{17.1}$   $A$  ist quadrierbar.  $v_2(A) = \int_A 1 dx$ . Für  $x \in [-r, r]$ :  $A_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}] \implies$   
 $v_n(A) = \int_{-r}^r \left( \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} 1 dy \right) dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{AI}}{=} \pi r^2$ .

## Satz 17.2

$A, B, A_1, \dots, A_m$  seien  $\subseteq \mathbb{R}^n$  und quadrierbar.

- (1)  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$  sind quadrierbar und  
 $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$ .
- (2) Aus  $A \subseteq B$  folgt  $v_n(A) \leq v_n(B)$ .
- (3)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  ist quadrierbar und  
 $v_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \leq v_n(A_1) + \dots + v_n(A_m)$

**Beweis**

- (1)  $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B \xrightarrow{16.5} 1_{A \cap B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cap B$  ist quadrierbar.  
 $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} \xrightarrow{16.5} 1_{A \cup B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$  ist quadrierbar.  $v_n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx - \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cap B} dx = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$ .  
 $1_{A \setminus B} = 1_A(1 - 1_B) \xrightarrow{16.5} 1_{A \setminus B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \setminus B$  ist quadrierbar.
- (2)  $A \subseteq B \implies 1_A \leq 1_B$  auf  $\mathbb{R}^n \implies v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx = v_n(B)$
- (3) folgt aus (1) mit Induktion ■

**Satz 17.3 (Prinzip von Cavalieri)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} = \{(x, z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$  beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Dann:

- (1)  $\forall z \in \mathbb{R}$  ist  $A_z$  beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im  $\mathbb{R}^n$ ).
- (2)  $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz$

**Beweis**

- (1) Übung

$$(2) v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, z) \xrightarrow{16.3} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( \int_{A_z} 1 dx \right)}_{=v_n(A_z)} dz.$$
■

**Beispiele:**

- (1)  $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\implies A$  ist quadrierbar. Für  $z \notin [0, 1] : A_z = \emptyset$ . Für  $z \in [0, 1] : A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\} \implies v_2(A_z) = \pi z^2 \implies v_3(A) = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$
- (2) Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $[a, b]$ . Graph von  $f$  rotiert um die  $x$ -Achse  $\longrightarrow$  Rotationskörper  $A$ .  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ .  $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$  für  $x \in [a, b]$ .  $v_2(A_x) = \pi f(x)^2$ .  $v_3(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ .

**Speziell:**  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  ( $r > 0$ ),  $x \in [-r, r]$ .

Rotationskörper  $A = \overline{U_r}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ .  $v_3(A) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Definition**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  heißt eine **Nullmenge** genau dann, wenn  $F$  quadrierbar und  $v_n(N) = 0$  ist.

**Satz 17.4**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  ist eine Nullmenge  $\iff \|1_N\|_1 = 0$ .

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:  $N$  Nullmenge  $\Rightarrow 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$ . 16.5  $\Rightarrow \|1_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} 1_N dx = v_n(N) = 0$ . „ $\Leftarrow$ “: Setze  $(\varphi_k) := (0, 0, 0, \dots)$ ;  $(\varphi_k)$  ist eine Folge in  $\mathcal{T}_n$ :  $\|1_N - \phi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = \|1_N\|_1 \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0 \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int 1_N dx = \lim \int \varphi_k dx = 0 \Rightarrow N$  ist quadrierbar und  $v_n(N) = 0$ . ■

### Satz 17.5

$N, N_1, N_2, \dots$  seien Nullmengen im  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Ist  $M \subseteq N \Rightarrow M$  ist eine Nullmenge.

(2)  $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$  ist eine Nullmenge.

### Beweis

(1)  $1_M \leq 1_N \stackrel{16.1}{\Rightarrow} \|1_M\|_1 \leq \|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \Rightarrow \|1_M\|_1 = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$

(2)  $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ;  $1_A \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{N_k} \stackrel{16.1}{\Rightarrow} \|1_A\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

### Beispiele:

(1) Sei  $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $N := \{x_0\} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}$ .  $N$  ist ein Quader, also quadrierbar,  $v_n(N) = 0$ ,  $N$  ist eine Nullmenge.

(2) Beispiel (1) und 17.5(2) liefern: Jede abzählbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Nullmenge

(3) Ist  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $Q$  ist eine Nullmenge  $\iff a_j = b_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

### Satz 17.6

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei beschränkt und abgeschlossen, es sei  $f \in C(D, \mathbb{R})$  und  $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist  $G_f$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Beweis

$G_f$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\stackrel{17.1}{\Rightarrow} G_f$  ist qb.  $v_{n+1}(G_f) = \int_{G_f} 1 d(x, y) \stackrel{16.13}{=} \int_D \left( \int_{f(x)}^{f(x)} 1 dy \right) dx = 0$ . ■

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und (E) eine Eigenschaft, welche die Elemente von  $A$  betrifft. (E) gilt **fast überall** (**f.ü.**) auf  $A : \iff \exists$  Nullmenge  $N \subseteq A$  mit: (E) gilt für alle  $x \in A \setminus N$ .

### Beispiel

$f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei eine Funktion.  $f = 0$  f.ü. auf  $A \iff \exists$  Nullmenge  $N \subseteq A : f(x) = 0 \forall x \in A \setminus N$ .

**Satz 17.7**

- (1)  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  seien Funktionen mit  $f = g$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n) \iff g \in L(\mathbb{R}^n)$ . I. d. Fall:  $\int f dx = \int g dx$ .
- (2) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in L(A) \cap L(B)$  und  $A \cap B$  sei eine Nullmenge. Dann:  $f \in L(A \cup B)$  und  $\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$ .

**Beweis**

- (1)  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ . Sei  $f \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists$  Folge  $(\varphi_k)$  von Treppenfunktionen mit:  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  und  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$ .

$$f_k := 1_N \ (k \in N), \ h := \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \ \|h\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \|h\|_1 = 0.$$

$$\text{Es ist } |g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h \text{ auf } \mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \implies \|g - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \implies g \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int g dx = \lim \int \varphi_k dx = \int f dx.$$

- (2) Wegen (1) o.B.d.A:  $f = 0$  auf  $A \cap B$ . Dann:  $f_{A \cup B} = f_A + f_B \stackrel{16.5}{\in} L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A \cup B)$  und  $\int_{A \cup B} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_B dx = \int_A f dx + \int_B f dx$ . ■

**Satz 17.8**

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei eine Funktion.

- (1) Ist  $\|f\|_1 < \infty$  und  $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \implies N$  ist eine Nullmenge. Dies ist z.B. der Fall, wenn  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  (16.5:  $\|f\|_1 = \int |f| dx$ )
- (2)  $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis**

- (1) Sei  $\varepsilon > 0 : 1_N \leq \varepsilon |f|$  auf  $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_N\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_1 \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\implies} \|1_N\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} \text{Beh.}$

- (2) „ $\implies$ “: Für  $k \in \mathbb{N} : N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ . Dann:  $1_{N_k} \leq k|f|$  auf  $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} N_k$  ist eine Nullmenge  $\stackrel{17.5}{\implies} N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$  ist eine Nullmenge. Es ist  $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \implies f = 0$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ .

$$\text{„}\Leftarrow\text{“: } |f| = 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}^n \stackrel{17.7}{\implies} |f| \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int |f| dx = \int 0 dx = 0. \text{ 16.5 } \implies \|f\|_1 = \int |f| dx = 0. \quad \blacksquare$$

**Definition**

Seien  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  abgeschlossene Quader im  $\mathbb{R}^n$  und  $A := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ . Dann heißt  $A$  eine **Figur**.

**Satz 17.9**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ex. Figuren  $A_1, A_2, \dots$  mit  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  und  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Ist  $U$  qb  $\implies v_n(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k) = \sup\{v_n(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$ .

**Beweis**

Für  $a \in \mathbb{Q}^n$  und  $r \in \mathbb{Q}^+$  sei  $W_r(a)$  wie im Beweis von 16.10.

$\mathcal{Q} := \{W_r(a) : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, W_r(a) \subseteq U\}$ ,  $U$  offen  $\implies \mathcal{Q} \neq \emptyset$ .

Es ist  $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ ,  $A_k := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).  $(A_k)$  leistet das Verlangte.

Sei  $U$  qb.  $\varphi_k := 1_{A_k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\implies \varphi_k \in \mathcal{T}_n$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi_k(x) \rightarrow 1_U(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq 1_U$  auf  $\mathbb{R}^n \implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int 1_U dx = v_n(U)$ . 16.7  $\implies \lim \underbrace{\int \varphi_k dx}_{v_n(A_k)} = \int 1_U dx = v_n(U)$ . ■

**Satz 17.10**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ex. Quader  $Q_1, Q_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$  mit:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset \ (j \neq k)$$

Ist  $U$  qb  $\implies v_n(U) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k)$ .

**Beweis**

In der gr. Übung. ■

**Satz 17.11**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  ist eine Nullmenge  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$  Quader  $Q_1, Q_2, \dots$  im  $\mathbb{R}^n$  mit: (\*)  $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon$ .

**Beweis**

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Seien  $Q_1, Q_2, \dots$  wie in (\*). Dann:  $1_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$  auf  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{16.1} \|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{Q_k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon \implies \|1_N\|_1 = 0 \xrightarrow{17.4} N$  ist eine Nullmenge.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Es genügt z.z.:  $\exists$  offene Menge  $U$  mit:  $N \subseteq U$ ,  $U$  ist qb und  $v_n(U) < \varepsilon$  (wegen 17.10).

$\|2 \cdot 1_N\|_1 = 2\|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \exists \Phi \in \mathcal{H}(2 \cdot 1_N) : I(\Phi) < \varepsilon$ . Sei  $\Phi = \sum_k c_k 1_{R_k}$ , wobei  $c_k \geq 0$ ,  $R_k$  offene Quader. O.B.d.A:  $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{R_k}$ .

## 17. Quadrierbare Mengen

$\varphi_m := \sum_{k=1}^m c_k 1_{R_k} \in \mathcal{T}_n$ ;  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \Phi$ ;  $\varphi_m(x) \rightarrow \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^m c_k v_n(R_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(R_k) = I(\Phi) < \varepsilon$ .

16.7  $\implies \Phi \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int \Phi dx = \lim \int \varphi_m dx = I(\Phi) < \varepsilon$ .

$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > 1\}$ .  $x \in N \implies \Phi(x) \geq 2 \cdot 1_N(x) = 2 \implies x \in U$ . Also:  $N \subseteq U$ .  $U$  offen,  $U$  qb,  $v_n(U) < \varepsilon$ . ■

### Folgerung 17.12

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $U$  ist offen,  $U$  ist quadrierbar,  $N \subseteq U$  und  $v_n(U) < \varepsilon$ .

### Beweis

Beweis von 17.11 ■

### Satz 17.13

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und fast überall stetig auf  $A$ . Dann:  $f \in L(A)$ .

### Beweis

$\exists \gamma \geq 0 : |f| \leq \gamma$  auf  $A$ .  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq A$ :  $f$  ist stetig auf  $A \setminus N$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . 17.12  $\implies \exists$  offene und quadrierbare Menge  $U$  mit  $N \subseteq U, v_n(U) < \varepsilon$ .  $A \setminus U \subseteq A \setminus N$ ,  $f$  stetig auf  $A \setminus U$ ,  $A \setminus U$  ist beschränkt und abgeschlossen. 16.12  $\implies f \in L(A \setminus U) \implies f_{A \setminus U} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists \varphi \in \mathcal{T}_n : \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$ . Es ist  $|f_A - f_{A \setminus U}| \leq \gamma \cdot 1_U$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\xrightarrow{16.1} \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 \leq \gamma \|1_U\|_1 \xrightarrow{16.5} \gamma \int 1_U dx = \gamma v_n(U) < \gamma \varepsilon$ . Dann:

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi\|_1 &= \|f_A - f_{A \setminus U} + f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 + \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \gamma \varepsilon + \varepsilon \\ &= (\gamma + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

D.h:  $\forall k \in \mathbb{N} \exists \varphi_k \in \mathcal{T}_n : \|f_A - \varphi_k\|_1 < \frac{\gamma+1}{k} \implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$ . ■