16. Die Umlaufzahl

Hilfssatz:
Sei σ eine Menge von zsh. Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\bigcap_{A\in\sigma} A \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{A\in\sigma} A$ zsh.

Beweis
Fast wörtlich wie Hilfssatz 3 in §9. ■

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $C \subseteq D$ heißt eine (Zusammenhang-)**Komponente** von $D :\Leftrightarrow C$ ist zsh. und aus $C \subseteq C_1 \subseteq D$. C_1 zsh. folgt stets $C = C_1$.

Beispiel
$D = U_1(0) \cup U_1(3)$ Dann nennt man $U_1(0)$ und $U_1(3)$ die Komponenten von D.

Satz 16.1
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

(1) Ist $C \subseteq D$ eine Komponente von D, so ist C ein Gebiet.

(2) Sind C_1, C_2 Komponenten von D, so gilt: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oder $C_1 = C_2$.

(3) Ist $z_0 \in D$, so existiert genau eine Komponente C von $D : z_0 \in C$.

(4) $\mathbb{C}\backslash K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.

Beweis

(1) Sei $z_0 \in C$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$. $C_1 := C \cup U_\delta(z_0) \subseteq D$. Klar: $C \subseteq C_1$. HS $\Rightarrow C_1$ zsh. C Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow U_\delta(z_0) \subseteq C \Rightarrow C$ offen $\Rightarrow C$ Gebiet.

(2) Sei $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. $C := C_1 \cup C_2$. HS $\Rightarrow C$ zsh. Klar: $C_1 \subseteq C \subseteq D$.
C_1 Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1 \subseteq D$.
C_2 Komponente von $D \Rightarrow C_1 = C_2$.

(3) $\sigma := \{A \subseteq D : A \text{ ist zsh.}, z_0 \in A\}$. $z_0 \in \bigcap_{A\in\sigma} A \overset{\text{HS}}{\Rightarrow} C := \bigcup_{A\in\sigma} A$ zsh. Sei $C \subseteq C_1 \subseteq D$ und C_1 zsh. Dann: $C_1 \in \sigma \Rightarrow C_1 \subseteq C \Rightarrow C_1 = C$.

(4) Übung. ■

Definition
Sei γ ein stückweise glatter und geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und es sei $z \notin \operatorname{Tr}(\gamma)$. $n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z}$ heißt die **Umlaufzahl** von γ bezüglich z. $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$.

Satz 16.2
Sei γ wie oben und $D := \mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma)$.

(1) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}\ \forall z \in D$.

(2) Ist C eine Komponente von D, so ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf C konstant.

(3) Ist C die unbeschränkte Komponente von D, so gilt: $n(\gamma, z) = 0\ \forall z \in C$.

Beispiele:

(1) Sei $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{ikt}$ $(t \in [0, 2\pi]).C_1 = U_r(z_0); C_2 = \mathbb{C}\backslash\overline{U_r(z_0)}$ und die Komponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma)$. Sei $z \in C_2$. 16.2(3) $\Rightarrow n(\gamma, z) = 0$. Sei $z \in C_1 . n(\gamma, z) \overset{16.2(2)}{=} n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{ikt}} ikre^{ikt} dt = k$.

(2) Sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & , -2 \le t \le 2 \\ 2e^{i(t-2)} & , 2 < t \le 2 + \pi \end{cases}$$

Berechne $n(\gamma, i)$. Sei γ_1 wie im Bild[1] und $\gamma_0(t) := 2e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-i}}_{=n(\gamma,i)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-i}}_{\overset{16.2(3)}{=} 0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{dw}{w-i} \overset{Bsp.1}{=} 1 \Rightarrow n(\gamma, i) = 1.$$

Beweis

(1) O.B.d.A γ glatt. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $z \in D$ und $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$
$\overset{8.2}{\Rightarrow}$ h ist auf $[a, b]$ differenzierbar und $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$.
Sei $H(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z))$. Nachrechnen: $H' = 0$ auf $[a, b]$. Also existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $H(t) = c\ \forall t \in [a, b]$.
$\overset{t=a}{\Rightarrow} c = e^{-h(a)}(\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z$
$\Rightarrow e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}\ \forall t \in [a, b]$
$\overset{t=b}{\Rightarrow} e^{h(b)} = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} \overset{\gamma \text{ geschlossen}}{=} 1$
$\overset{6.3}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : h(b) = 2k\pi \mathrm{i}$
$\Rightarrow 2k\pi\mathrm{i} = \mathrm{h(b)} = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} \mathrm{ds} = \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = 2\pi\mathrm{i}\ n(\gamma, z) \Rightarrow k = n(\gamma, z)$

(2) Definiere $f : C \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \overset{9.5}{\Rightarrow} f \in H(C)$. C ist ein Gebiet. $\overset{11.5}{\Rightarrow} f(C)$ ist ein Gebiet oder f ist auf C konstant. $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(C) \subseteq \mathbb{Z}$. Also ist f auf C konstant.

(3) Sei f wie im Beweis von (2). Wähle $R > 0$, so daß $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq U_R(0)$. $\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = c$ $\forall z \in C$. Sei $z \in C$, so daß $|z| > 2R$ (geht, da C unbeschränkt).
Für $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ gilt: $|w - z| \ge |z| - |w| > |z| - R > R > 0$.

[1] γ_1 läuft von $(2, 0)$ aus nach $(-2, 0)$ und dann den Halbkreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 0)$ wieder zurück nach $(2, 0)$

Damit: $|c| = |f(z)| = \frac{1}{2\pi}|\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z}| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)}$.

Also: $|c| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)}$ $\forall z \in C$ mit $|z| > 2R$. C unbeschränkt $\overset{R\to\infty}{\Rightarrow}$ Behauptung. ■