

24. Projektive Geometrie

24.1. Projektive Räume

Zweck: Störende Ausnahmefälle der affinen Geometrie beseitigen durch geschickte Erweiterung affiner Räume zu sogenannten projektiven Räumen, wo die Ausnahmen nicht mehr auftreten.

Sei K ein beliebiger Körper, V ein K -Vektorraum.

Definition: Die Menge der eindimensionalen Teilräume von V

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(V) := \{Kx \mid x \in V \setminus \{0\}\}$$

heißt **projektiver Raum**.

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ heißt **projektiver Teilraum** von $\mathbb{P}(V)$, falls ein Untervektorraum $U_x \leq V$ existiert mit

$$X = \mathbb{P}(U_x) := \{Kx \mid x \in U_x \setminus \{0\}\}$$

$\dim(\mathbb{P}) := \dim(U) - 1$ heißt **Dimension** von \mathbb{P} .

$$X \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \\ \text{Ebene} \end{array} \right\} \text{ falls } \dim X = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right. .$$

$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ heißt der **projektive Standardraum**.

Bemerkung: Die leere Menge \emptyset ist ein projektiver Raum mit $U_\emptyset = \{0\}$, also $\dim \emptyset = -1$.

Lemma:

Ist I eine beliebige Indexmenge und $\forall i \in I : X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume. Dann ist

$$X := \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$$

ein projektiver Teilraum.

Insbesondere existiert für jede beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ die **projektive Hülle**

$$[M] := \bigcap_{X \text{ proj. TR}; M \subseteq X} X$$

Speziell:

- (1) $X, Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume

$$[X \cup Y] = \mathbb{P}(U_x + U_y)$$

- (2) Für $M = \{P_1, \dots, P_r\}$ setze

$$[M] := [P_1, \dots, P_r]$$

Beweis: Sei $X_i = \mathbb{P}(U_i)$ zu Teilvektorräumen $U_i \leq V$. Damit:

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{i \in I} \{Kx \mid x \in U_i \setminus \{0\}\} \\ &= \left\{ Kx \mid x \in \bigcap_{i \in I} U_i, x \neq 0 \right\} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

■

Definition: Ein projektiver Teilraum $H \subsetneq \mathbb{P}(V)$ heißt **(proj.) Hyperebene**, falls ein Punkt $p = Kx \in \mathbb{P}(V)$ existiert mit

$$[H \cup \{p\}] = \mathbb{P}(V)$$

Bemerkung: Falls $n = \dim \mathbb{P}(V) < \infty$ ist, so gilt für projektive Teilräume $H \subseteq \mathbb{P}(V)$:

$$H \text{ Hyperebene} \iff \dim H = n - 1$$

Satz 40:

Ist $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$, so gilt:

- (1) Für projektive Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{P}$ ist

$$\dim X + \dim Y = \dim[X \cup Y] + \dim X \cap Y$$

- (2) Für jede Hyperebene H und jeden projektiven Teilraum $X \not\subseteq H$ ist

$$\dim(X \cap H) = \dim X - 1$$

Insbesondere besitzen zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$ genau einen Schnittpunkt.

Beweis: (1)

$$\begin{aligned}\dim X + \dim Y &\stackrel{\text{Def.}}{=} \dim U_x - 1 + \dim U_y - 1 \\ &= \dim(U_x + U_y) + \dim(U_x \cap U_y) - 2 \\ &= \dim[X \cup Y] + \dim(X \cap Y)\end{aligned}$$

(2) $X \subseteq H$ impliziert $[X \cup H] = \mathbb{P}(V)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\dim[X \cup H] &= \dim \mathbb{P}(V) = \dim H + 1 \\ \dim X \cap H &\stackrel{(1)}{=} \dim H + \dim X - \dim[X \cup H] = \dim X - 1\end{aligned}\quad \blacksquare$$

24.2. projektive Koordinaten

Definition: Die Punkte $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\dim[p_0, p_1, \dots, p_k] = k$$

Lemma:

Für $p_\varkappa = K \cdot v_\varkappa$ ($v_\varkappa \in V$) gilt:

$$p_0, p_1, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0 + \dots + Kv_k) = k + 1 \text{ linear unabhängig}$$

Beweis:

$$p_0, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0, \dots, Kv_k) = k + 1\quad \blacksquare$$

Definition: Sei $\dim \mathbb{P} = n < \infty$ und seien $p_0, \dots, p_k, e \in \mathbb{P}$.

Das $n+2$ -Tupel $(e; p_0, \dots, p_n)$ heißt ein **Koordinatensystem** von \mathbb{P} , wenn je $n+1$ Punkte hiervon linear unabhängig sind.

Beachte: Ein Koordinatensystem legt eine (bijektive) **Koordinatenabbildung**

$$D: \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(K^{n+1})$$

fest wie folgt:

(1) Jede Wahl von Erzeugern v'_\varkappa der p_\varkappa ergibt eine Basis $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ von V .

Insbesondere hat jedes $v \in V$ mit $e = Kv$ die Darstellung

$$v = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{x'_\nu v'_\nu}_{=: v_\nu}$$

mit $x'_\nu \neq 0 \forall \nu$ (wegen der Voraussetzung über lineare Unabhängigkeit). Dabei sind die v_ν unabhängig von der Wahl der v'_ν .

(2) Zu festem v existiert also eine eindeutig bestimmte Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v = \sum_{\nu=0}^n v_\nu$. Zu einem beliebigen anderen $v' = \lambda \cdot v \in K \cdot v$ gehört die Basis $\{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$.

(3) Für einen beliebigen Punkt $p = K \cdot w$ mit Basisdarstellung

$$w = \sum_{\nu=0}^n x_\nu v_\nu$$

setze $D(p) := K \cdot (x_0, \dots, x_n) =: (x_0 : \dots : x_n)$.

Das ist wohldefiniert, da für $w' = \lambda \cdot w$ mit $\lambda \neq 0$ gilt:

$$w' = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{\lambda x_\nu}_{=: x'_\nu} v_\nu$$

Daher:

$$K(x'_0, \dots, x'_n) = K(x_0, \dots, x_n)$$

$D(p)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von v .

$(x_0 : \dots : x_n)$ heißen **homogene Koordinaten** von \mathbb{P} .

(4) Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} D(p_\nu) &= (0 : \dots : \overset{\nu}{1} : 0 : \dots : 0) \\ D(e) &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

24.3. Projektivitäten

Vorbemerkung: Jede injektive lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ von K -Vektorräumen definiert eine Abbildung der zugehörigen projektiven Räume.

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W), p = K \cdot v \mapsto \tilde{\phi}(p) := \phi(Kv) = K\phi(v)$$

Definition: Eine Permutation φ von \mathbb{P} heißt **Projektivität**, wenn ein Vektorraumautomorphismus $\phi \in \text{Aut}(V)$ existiert mit $\tilde{\phi} = \varphi$.

Lemma:

Für $\phi_1, \phi_2 \in \text{Aut}(V)$ gilt:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 \iff \exists c \in K, c \neq 0 : \phi_1 = c \cdot \phi_2$$

Beweis: \implies : klar

\Leftarrow : Für alle x gilt: $\phi_1(Kx) = \phi_2(Kx)$, d.h. es existiert ein $c_x \in K$ mit $\phi_1(x) = c_x \cdot \phi_2(x)$.

Für x, y linear unabhängig setze $z := x + y$.

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= c_z \cdot \phi_2(z) = c_z (\phi_2(x) + \phi_2(y)) \\ \phi_1(z) &= \phi_1(x) + \phi_1(y) = c_x \phi_2(x) + c_y \phi_2(y)\end{aligned}$$

Da x, y linear unabhängig und ϕ_i Automorphismus folgt: $\phi_2(x), \phi_2(y)$ linear unabhängig.

Koeffizientenvergleich liefert $c_x = c_z = c_y$. Damit sind alle c_x gleich $=: c$. ■

- Bemerkung:** (1) Die Projektivitäten von \mathbb{P} bilden eine Gruppe, wobei $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2 = \phi_1 \circ \phi_2$ und $\tilde{\phi}_1^{-1} = \phi_1^{-1}$ ist.
- (2) Jede Projektivität bildet einen projektiven Teilraum auf einen projektiven Teilraum gleicher Dimension ab.

Satz 41:

Zu verschiedenen Koordinatensystemen $(e; p_0, \dots, p_n)$ und $(e'; p'_0, \dots, p'_n)$ von \mathbb{P} existiert genau eine Projektivität φ , die sie ineinander überführt, d.h.

$$\begin{aligned}\varphi(p_\nu) &= p'_\nu \\ \varphi(e) &= e'\end{aligned}$$

Beweis: Übung. ■

24.4. Der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, fixiere eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}$ und $a = Ky \in \mathbb{P} \setminus H$. Also $\mathbb{P} = [H, a]$ und $V = U_H \oplus Ky$.

Vorbemerkung: Jedes $p \in \mathbb{P} \setminus H$ ist von der Form $p = K(u_p + y)$ mit $u_p \in U_H$ eindeutig.

Für $p = Kx \in \mathbb{P}$ gilt:

$$p \in H \iff p = Kx \leq U_H$$

Also gilt: $p \in \mathbb{P} \setminus H \iff p = Kx \not\leq U_H$.

Wegen direkter Summe ist x eindeutig zerlegbar:

$$\begin{aligned}x &= u'_p + \lambda y \quad (u'_p \in U_H) \\ x \notin U_H &\iff \lambda \neq 0 \implies Kx = K(\underbrace{\lambda^{-1}u'_p}_{=: u_p} + y)\end{aligned}$$

Satz 42:

Die Menge $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus H$ ist ein affiner Raum mit U_H als Translationsvektorraum bezüglich der Operation

$$(u, p) \mapsto K(u + u_p + y)$$

wobei $p = K(u_p + y)$ gilt, mit eindeutig bestimmtem $u_p \in U_H$.

Dabei ist die Translation $\overrightarrow{pq} = u_q - u_p$.

Beachte:

$$\dim \mathbb{A} = \dim U_H = \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$$

Definition: Die Punkte von \mathbb{A} heißen **eigentliche Punkte**, die von H **uneigentlich**.

Umgekehrt lässt sich jeder affine Raum \mathbb{A} erweitern zu einem projektiven Raum durch disjunkte Vereinigung mit einer projektiven Hyperebene H gleicher Dimension:

ohne Einschränkung sei $\mathbb{A} = K^n$. Zum Beispiel haben wir die injektive Abbildung

$$j_1 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$H := \mathbb{P}(\underbrace{0 \times K^n}_{\leq K^{n+1}}).$$

Für eigentliche Punkte $p = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$, d.h. $p \notin H$, gilt: $y_0 \neq 0$, also $p = \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \dots : \frac{y_n}{y_0}\right)$, d.h. p hat die affinen Koordinaten $\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}\right)$ in \mathbb{A} .

$$\text{Es gilt: } j_1(\mathbb{A}) \cup H = \mathbb{P}(K^{n+1})$$

Ferner gilt mit den den Einbettungen

$$j_\nu : K^n \rightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_{\nu-1} : 1 : x_{\nu+1} : \dots : x_n)$$

folgende Gleichheit:

$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = \bigcup_{\nu=1}^{n+1} j_\nu(\mathbb{A})$$

Aber: nicht disjunkt.

Beispiel: (1) Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Es gibt zwei Modelle:

$$\{\mathbb{R} \cdot x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \longleftrightarrow \{G \subseteq \mathbb{R}^2 \mid G \text{ affine Gerade mit } 0 \in G\}$$

Dies ist das sogenannten **Büschelmodell** von \mathbb{P}^1 .

Fixiere g (die Hyperebene besteht hier aus einem Punkt)

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{g\} \xleftrightarrow[\text{bijekt.}]{\quad} g' \quad (\text{affine Gerade } \neq g, g' \parallel g)$$

eigentliche Punkte $g_a \mapsto g_a \cap g'$

g ist der einzige uneigentliche Punkt; das entspricht anschaulich einem unendlich fernen Punkt F auf g' . Sprich: **Fernpunkt**.

Wir erhalten das **Punktmodell** von $\mathbb{P}^1 : g' \dot{\cup} \{F\}$.

Ein einheitliches Modell liefert der Einheitskreis um $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$

$$S := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - (0, 1)\| = 1\}$$

$$\begin{aligned} \{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} &\xleftrightarrow{\text{bij.}} S \\ \mathbb{R}x &\mapsto \mathbb{R}x \cap S \rightsquigarrow \{s_x\} \quad (s_x \neq (0, 0)) \end{aligned}$$

- (2) Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
Bündelmodell:

$$\{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{\text{affine Gerade } g \leq \mathbb{R}^3, 0 \in g\}$$

Fixiere die affine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $0 \notin E$ und eine dazu parallele E' mit $0 \in E'$.

Dabei entsteht eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \setminus \{g' \subseteq E'\} &\longleftrightarrow E \\ g &\mapsto g \cap E \\ A &\mapsto g = 0A \end{aligned}$$

Jedem $g' \in E'$ ordnet man genau einen **Fixpunkt** $F_{g'} \in \mathbb{P}^2$ zu.

$\{g' \in E'\}$ ist projektive Gerade. $f := \{F_{g'} \mid g' \subseteq E'\}$ heißt **Ferngerade**.

$E \dot{\cup} f$ ist das Punktmodell des \mathbb{P}^2 .

Analog lassen sich generell Bündel- und Punktmodell des \mathbb{P}^n mittels \mathbb{A}^{n+1} beschreiben.

Stichwortverzeichnis

- Abbildung
 - affine, 71
 - kanonische, 23
 - orthogonale, 51
 - unitäre, 51
- Abbildungseigenschaft
 - universelle (UAE), 21
- Abstand, 25, 37, 85
- Adjungierte, 41
- adjungierter Homomorphismus, 41
- affin
 - Abbildung, 71
 - Automorphismus, 72
 - Gruppe, 72
 - Hülle, 65
 - Koordinatensystem, 71
 - Raum, 61
 - Standardraum, 62
 - Teilraum, 62
- Affinität, 72, 100–102
- allgemeine Lage, 66
- Approximation, 102
- ausgeartete Paarung, 17
- Automorphismengruppe, 51
- Automorphismus, 51
 - affiner, 72
- Büschelmodell, 112
- Basiswechsel
 - unitärer, 56
- Bewegung, 85, 89
- bilineare Fortsetzung, 18
- Bilinearform, 17
 - symmetrische, 26
- Blockdiagonalmatrix, 13
- cartesisches Koordinatensystem, 85
- Chauchy-Schwarzsche Ungleichung, 27
- Darstellungsmatrix, 27
- Diagonalmatrix, 7
 - Block-, 13
- Dimension, 107
- diskrete Metrik, 25
- Drehachse, 59
 - verallgemeinerte, 59
- Drehebene, 59
- Drehkästchennormalform, 58
- Drehung, 59, 88
- Dreiecksungleichung, 25
- E. Schmidt
 - Orthogonalisierungsverfahren, 32
- Ebene, 62
 - projektive, 108
- Einheitskreis, 113
- Endomorphismus
 - nilpotenter, 11
 - normaler, 41
 - Normalform, 7
 - selbstadjungierter, 47
- euklidischer Raum, 85
- Fern-
 - Gerade, 113
 - Punkt, 113
- Fix-
 - Gerade, 81
 - Punkt, 79, 81, 113
 - Raum, 79
 - Richtung, 79
- Form
 - hermitesche, 26
- Fortsetzung
 - bilineare, 18
- Fourierformel, 21
- Fundamentalmatrix, 18
- gemeinsames Lot, 86
- Gerade, 62
- Geradentreue, 81
- Gram-Schmidt, 32
- Gruppe
 - affine, 72

- algebraische, 105
- orthogonale, 51
- unitäre, 51
- Hülle
 - affine, 65
 - projektive, 107
- Halb-
 - Achse, 99
 - Achsenlänge, 99
- Haupt-
 - Achse, 99
 - Achsentransformation, 99
 - Raum, 7
- hermitesche Form, 26
- Hermitezität, 27
- Homogenität, 25
- Hyperebene, 59, 62, 100, 103, 108
 - Durchschnitt, 103
 - projektive, 108
- Hyperfläche, 99, 100
- Invariante
 - affine, 102
- Isometrie, 51, 85
- Isomorphismus
 - affiner Räume, 72
- Iwasawa-Zerlegung, 36
- Jacobi-Matrix, 99, 103
- Jordan-
 - Block, 15
 - Kästchen, 13, 14
 - Normalform, 13–15
- Komplement
 - orthogonales, 36, 38
- Koordinaten
 - homogene, 110
 - projektive, 109
- Koordinaten-
 - Abbildung, 109
 - Darstellung, 71
 - System, 109
 - Vektor, 71
- Koordinatensystem
 - affines, 71
 - cartesisches, 85
- Kurve, 100
- Längentreue, 52, 85
- Lage
 - allgemeine, 66
- linear
 - Abbildung, 41
 - Varietät, 62
- Lorenzgruppe, 51
- Lot, 37
 - gemeinsames, 86
- Lotfußpunkt, 37, 86
- Matrix
 - hermitesche, 47
 - Jacobi-, 103
- Matrizengruppe
 - algebraische, 105
- Metrik, 25
 - diskrete, 25
- Minimalpolynom, 8
- Mittelpunkt, 97
- Morphismus, 51
 - affiner Räume, 71
- Multi-
 - Index, 93
 - Linearität, 21
- Näherung, 102
- Nilpotenz, 11
- Norm, 25
- normaler Endomorphismus, 41
- Normalform, 55, 88
 - Jordansche, 13, 14
- normierter Raum, 25
- orthogonal, 31
 - Abbildung, 51
 - Gruppe, 51
 - Teilräume, 86
- Orthogonal-
 - Basis (OGB), 20
 - Raum, 38
 - System, 31
- Orthonormalbasis (ONB), 20
- Paarung, 17
 - ausgeartete, 17
- Parallelität, 67
- Parallelogrammgleichung, 29
- Partition, 13
- Polynom
 - charakteristisches, 8
- Positivdefinitheit, 25, 27

- Projektion
 - orthogonale, 36, 37
- Projektivität, 110
- Punkt, 61
 - eigentlicher, 112
 - regulärer, 102, 103
 - singulärer, 102
 - unabhängiger, 109
 - uneigentlicher, 112
- Punktmodell, 113
- Pythagoras
 - Satz von, 36
- Quadrik, 93
 - Mittelpunkt der, 97
 - oskulierend, 102
 - Schmiege-, 102
- Raum
 - affin, 111
 - affiner, 61
 - euklidischer, 85
 - normierter, 25
 - projektiv, 111
 - projektiver, 107
- Regularität, 100
- Richtungsvektorraum, 61
- Schiefsymmetrie, 26
- Schnittpunkt, 108
- Sesquilinearform, 26
- Singularität, 100, 101
- Skalarprodukt, 26
- Spektral-
 - Radius, 47
 - Satz, 43
- Spektrum, 43
- Spiegelung, 59, 88
- Standardraum
 - affiner, 62
 - projektiver, 107
- Standardskalarprodukt, 27
- Streckung, 80
- Summenzerlegung, 13
- symmetrisch
 - Bilinearform, 26
 - Paarung, 20
- Tangente, 99, 103
- Tangentialraum, 99, 100, 102, 103
- Taylorentwicklung, 100
- Teilraum
 - affiner, 62
 - projektiver, 107
- Torus, 102
- Torusfläche, 102
- Trägheitssatz von Sylvester, 96
- Translation, 61, 80, 88
- Translationsvektor, 61
- Transversalität, 103
- unitär
 - Abbildung, 51
 - Basiswechsel, 56
 - Gruppe, 51
- universell
 - Abbildungseigenschaft (UAE), 21
- Untervektorraum, 7
 - invarianter, 7
- Ursprung, 71
- Varietät
 - lineare, 62
- Vektorraumpaarung, 17
- Verbindungsgerade, 62
- Winkel, 31
- Winkeltreue, 52