

## 0.0 Übung 0, 01.11.2004

### 0.0.1 Aufgabe 2

- a) Über allen Gipfeln ist Ruh  
Über einem Gipfel ist keine Ruh
- b) Es gibt einen Hund der Möhren frisst  
Alle Hunde fressen keine Möhren
- c) Es gibt einen Topf auf den alle Deckel passen  
Für alle Töpfe gibt es einen Deckel der nicht passt
- d)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z} : [y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : \neg[y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)]$
- Es gilt:  $\neg[A \wedge B] \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$   
 $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : [y > x \vee (\exists z \in \mathbb{Z} : z > y)]$

### 0.0.2 Aufgabe 3

$a, b \in \mathbb{N}$   
 $a \mid b \in \mathbb{N} : \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b$   
 $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \Leftrightarrow 1$  und  $p$  sind die einzigen Teiler von  $p$

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl  $n \neq 1$  gibt es eindeutig bestimmte Primzahlen  $p_1, \dots, p_k$  und  $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$ , so dass  $n = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k}$ .

- a) Die Anzahl aller Primzahlen ist unendlich  
Widerspruchsbew.: Ann.: Es gibt nur endl. viele Primzahlen

$$\left. \begin{array}{l} n := p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1 \\ \text{Satz} \Rightarrow p_l \cdot m = n \end{array} \right\} p_l \cdot m = p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1 \Rightarrow p_l \cdot (m - p_1 \cdot \dots \cdot p_l \cdot \dots \cdot p_k) = 1$$

Es gibt also doch unendlich viele Primzahlen

- b) Widerspruchsbew.: Ann.:  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , d.h.  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wir dürfen annehmen, dass es keine Primzahl gibt, die sowohl  $m$  als auch  $n$  teilt.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{m}{n} &\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2 \\ &\Rightarrow 2\tilde{m} = m \Rightarrow 2n^2 = 4\tilde{m}^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot \tilde{m}^2 \Rightarrow 2 \mid n \end{aligned}$$

Also  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

### 0.0.3 Aufgabe 5

$$\text{z.Z.: } A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

**Beweis:**