4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem §en sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition

(1) f heißt in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar** (komplex differenzierbar) $:\iff$ es ex. $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} (= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h})$. I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die Ableitung von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

(2) f heißt auf D **holomorph** (analytisch) $:\iff$ f ist zu jedem $z \in D$ differenzierbar.

(3) $H(D) := \{g : D \to \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$.

Beispiele:

(1) $D = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, f(z) := z^n$.
Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man: $f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = nz^{n-1} \forall z \in \mathbb{C}$.

(2) $D = \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
$Q(h) := \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0}+\overline{h}-\overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$; z.B. ist $Q(h) = 1$, falls $h \in \mathbb{R}$ und $Q(h) = -1$, falls $h \in i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$. Also ex. $\lim_{h\to 0} Q(h)$ **nicht**. f ist also in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Sei $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Fasst man D als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf, und schreibt man $z = (x, y)$ statt $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, so ist $f = (u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine vektorwertige Funktion.
$f(z) = u(z) + iv(z) = \big(u(z), v(z)\big) = \big(u(x, y), v(x, y)\big) = f(x, y)$.

Erinnerung (Ana II): f heißt im $(x_0, y_0) \in D$ reell differenzierbar $:\iff$ es ex. relle 2×2-Matrix A:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

Beispiel

$D = \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$, reelle Auffassung: $f(x, y) = (x, -y)$.f ist in **jedem** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, aber in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 4.1
Sei $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$; Sei $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \in D$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$.
f ist in z_0 komplex differenzierbar. $:\iff$ f ist in (x_0, y_0) reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD):

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

> Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

Beweis
Sei $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ und $s = h + ik \in \mathbb{C}\backslash\{0\}(\alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R})$
f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0) = a \iff \lim_{s\to 0} \frac{f(z_0+s)-f(z_0)-as}{|s|} = 0$

$$\overset{\text{Zerlegen}}{\iff} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Bigg(\underbrace{\frac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} + i \underbrace{\frac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) - \beta h - \alpha k}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \Bigg) = 0$$

$\iff \varphi_1(h,k) \to 0, \varphi_2(h,k) \to 0((h,k) \to (0,0))$
$\iff u$ und v sind in (x_0, y_0) reell differenzierbar, $u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta)$ und $v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$
$\iff f$ ist in (x_0, y_0) reell differenzierbar und es gelten die CRD. Ist f in z_0 komplex differenzierbar $\implies f'(z_0) = a = \alpha + i\beta = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ ■

Folgerung 4.2
Es sei $f \in H(D)$

(1) f ist auf D lokal konstant $\iff f' = 0$ auf D.

(2) Ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so ist f auf D lokal konstant.

(3) Ist $f(D) \subseteq i\mathbb{R}$, so ist f auf D lokal konstant.

(4) Ist D ein **Gebiet** so gilt:

   (i) f ist auf D konstant $\iff f' = 0$ auf D.

   (ii) ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ oder $\subseteq i\mathbb{R}$, so ist f auf D konstant.

Beweis
$u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$.

(1) " $\implies$ " klar!
" $\Leftarrow$ " 4.1 $\implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ auf D. Ana II $\implies u, v$ sind auf D lokal konstant.

(2) $f(D) \subseteq \mathbb{R} \implies v = 0$ auf $D \implies v_x = v_y = 0$ auf $D \overset{\text{CRD}}{\implies} u_x = u_y = 0$ auf D. Weiter wie bei (1).

(3) Sei $f(D) \subseteq i\mathbb{R}, g := if \implies g \in H(D), g(D) \subseteq \mathbb{R} \overset{(2)}{\implies} g$ ist auf D lokal konstant. $\implies f$ ist auf D lokal konstant.

(4) folgt aus (1),(2),(3) und 3.4 ■

Satz 4.3
Sei $z_0 \in D$ und f in z_0 komplex differenzierbar.

(1) f ist in z_0 stetig.

(2) Sei $g : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und g sei komplex differenzierbar in z_0

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

(ii) fg ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so ex. ein $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$,
$\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$\frac{f}{g}'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(3) **Kettenregel**: Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, E$ offen, $f(D) \subseteq E$ und $h : E \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0)$. Dann ist $h \circ f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Definition
Sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. f heißt in z_0 **zweimal komplex differenzierbar** $:\Longleftrightarrow$ f' ist in z_0 komplex differenzierbar. I.d. Fall: $f''(z_0) := (f')'(z_0)$ (2. Ableitung von f in z_0). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von f in z_0, bzw. auf D. Übliche Bezeichnungen: $f'', f''', f^{(4)}, \ldots, f^{(0)} := f$