20. Gleichmäßige Stetigkeit

Vereinbarung: In diesem Paragraphen seien stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Erinnerung: Sei $f \in C(D), x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. 17.1 $\implies \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ mit: $(*)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ Im allgemeinen hängt δ von ε und x_0 ab.

Definition
f heißt auf D **gleichmäßig stetig** $:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (**)\ |f(x) - f(z)| < \varepsilon\ \forall x, z \in D$ mit $|x - z| < \delta$.

Beachte: Ist f gleichmäßig stetig auf $D \implies f \in C(D)$; Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

Beispiel
$D = [0, \infty), f(x) := x^2$. Klar: $f \in C(D)$. Annahme: f ist auf D gleichmäßig stetig. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0 : |x^2 - z^2| < 1\ \forall x, z \in D$ mit $|x - z| < \delta$. Sei $x \in D$. $z := x + \frac{\delta}{2} \implies |x - z| = \frac{\delta}{2} \implies |x^2 - z^2| = |x + z||x - z| = (2x + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2} = x\delta + \frac{\delta^2}{4} < 1 \implies x\delta < 1 \implies \delta < \frac{1}{x}$. Also: $\delta < \frac{1}{x}\ \forall x > 0 \xRightarrow{x \to \infty} \delta \leq 0$, Widerspruch!

Definition
f heißt auf D **Lipschitz stetig** $:\iff \exists L \geq 0 : \underbrace{|f(x) - f(z)| \leq L|x - z|}_{(***)}\ \forall x, z \in D$

Satz 20.1 (Stetigkeitsstätze)
(1) Ist f auf D Lipschitz stetig $\implies f$ ist auf D gleichmäßig stetig

(2) Ist D beschränkt und abgeschlossen und $f \in C(D) \implies f$ ist auf D gleichmäßig stetig (**Satz von Heine**).

Beweis
(1) Sei $L \geq 0$ und es gelte $(* * *)$. O.B.d.A.: L 0. Sei $\varepsilon > 0$. $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Seien $x, z \in D$ und $|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| \leq L|x - z| < L\delta = \varepsilon$

(2) Annahme: f ist auf D nicht gleichmäßig stetig $\implies \exists \varepsilon > 0 : (**)$ ist für kein $\delta > 0$ richtig. $\implies \forall \delta > 0\ \exists x = x(\delta), z = z(\delta) \in D : |x - z| < \delta$ aber $|f(x) - f(z)| \geq \varepsilon$. $\implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, z_n : |x_n - z_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$. D beschränkt $\implies (x_n)$ beschränkt $\overset{8.2}{\implies} (x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}), x_0 := \lim x_{n_k}$. D abgeschlossen $\implies x_0 \in D$. $|x_{n_k} - z_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k}\ \forall k \in \mathbb{N} \implies z_{n_k} - x_{n_k} \to 0 (k \to \infty) \implies z_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} \to x_0$. f stetig $\implies |f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$ ∎

Beispiel
$D = [0,1], f(x) := \sqrt{x}$. Satz $\implies$ f ist auf D gleichmäßig stetig. Annahme: $\exists L > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{z}| \leq L|x-z| \ \forall x, z \in [0,1] \implies \sqrt{x} \leq Lx \ \forall x \in [0,1] \implies 1 \leq L\sqrt{x} \ \forall x \in (0,1] \xRightarrow{x \to 0} 1 \leq 0$, Widerspruch!