练习1.6

(1) $(\lambda xy.x)(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

$= (\lambda x.\lambda y\ x)(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

$= \lambda x.xx$

(2) $(\lambda xy.x)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$

$= (\lambda xy.x)((\lambda x.xx)[\lambda x.xx/x])$

$= (\lambda xy.x)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$ 无法归约到范式

(3) $(\lambda x.x)(\lambda y.yyy)(\lambda xy.x)$

$= (\lambda y.yyy)(\lambda xy.x)$

$= (\lambda xy.x)(\lambda xy.x)(\lambda xy.x)$

$= (\lambda xy.x)$

(4) $(\lambda fx.fxx)(\lambda xy.y)y$

$= (\lambda xy.y)yy$

$= y$

练习1.18

1°: $n = Z$

$add\ n\ m = Z\ m\ (\lambda n'.S(add\ n'\ m))$

$= (\lambda z.\lambda s.z)\ m\ (\lambda n'.S(add\ n'\ m))$

$\longrightarrow_\beta (\lambda s.m)(\lambda n'.S(add\ n'\ m))$

$\longrightarrow_\beta m$

$2°$：$n \neq Z$ 时

根据递归定义

$\exists n', s.t., n = Sn'$

这里 n 对应自然数 n

n' 对应自然数 $n-1$

此时：

$$\begin{aligned}
\text{add } n\ m &= \text{Case}N\ n\ m\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m)) \\
&\rightarrow_\beta (S n')\ m\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m)) \\
&= ((\lambda n. \lambda z. \lambda s. Sn)\ n')\ m\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m)) \\
&\rightarrow_\beta (\lambda z. \lambda s. sn')\ m\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m)) \\
&\rightarrow_\beta (\lambda s. sn')\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m)) \\
&\rightarrow_\beta (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m))\ n' \\
&\rightarrow_\beta S(\text{add } n'\ m)
\end{aligned}$$

所以原等式成立

$\text{add} = \lambda n. \lambda m. \text{Case}N\ n\ m\ (\lambda n'. S(\text{add } n'\ m))\ n\ m$

$\text{add} = \underbrace{\lambda f. \lambda n. \lambda m. \text{Case}N\ n\ m\ (\lambda n' S(f\ n'\ m))\ n\ m}_{\text{令为 } F}\ \text{add}$

$\text{add} = F\ \text{add}$

add 是 F 的一个不动点

$\Theta \triangleq (\lambda x y. y(x x y))(\lambda x y. y(x x y))$

$\text{add} = \Theta F$