

Tweevoudige integralen, deel 2

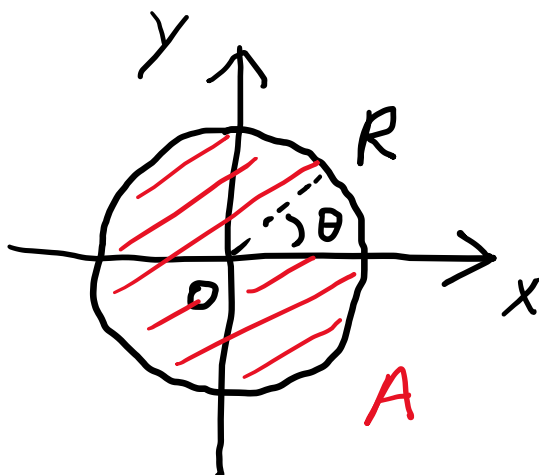
Oefeningen op dubbelintegralen in poolcoördinaten

Oefening 1

Bereken de oppervlakte van een cirkel met straal R (Bewijs de formule voor de oppervlakte van een cirkel).

Doe dit met de hand!

oplossing:



oppervlakte berekenen

$$A = \iint_A 1 dA$$

in poolcoördinaten: Jacobiaan

$$J = r$$

$$dA = r dr d\theta$$

$$\text{grenzen: } r : 0 \rightarrow R$$

$$\theta : 0 \rightarrow 2\pi$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r \, dr \right) d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta$$

$$A = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \rightarrow \boxed{A = \pi R^2}$$

Oefening 2

Beschouw een elliptische schijf waarvan de rand beschreven wordt door de vergelijking

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

met $a = 1$ en $b = 2$.

In deze schijf is centraal een cirkelvormige opening gemaakt met straal $R = \frac{1}{2}$.

Deel 1:

Bereken de oppervlakte van de schijf!

- Maak zeker een meetkundig correcte figuur.
- Doe de berekening in poolcoördinaten:
 - Beschrijf de grenzen met behulp van poolcoördinaten
 - Vergeet de Jacobiaan niet...

Opmerking: deze stap voor stap tips krijg je alleen bij deze eerste oefening van deze soort!

Gebruik Jupyter!

Deel 2:

Stel nu dat op de schijf een elektrische lading aanwezig is met oppervlakteladingsdichtheid

$$\sigma(r, \theta) = \frac{1}{100} (\cos(\theta))^2$$

Bereken de totale hoeveelheid elektrische lading q op de schijf.

Gebruik Jupyter!

Oplossing: zie notebook.