Tweevoudige integralen, deel 1

Oefeningen op dubbelintegralen in cartesische coördinaten

Oefening 1

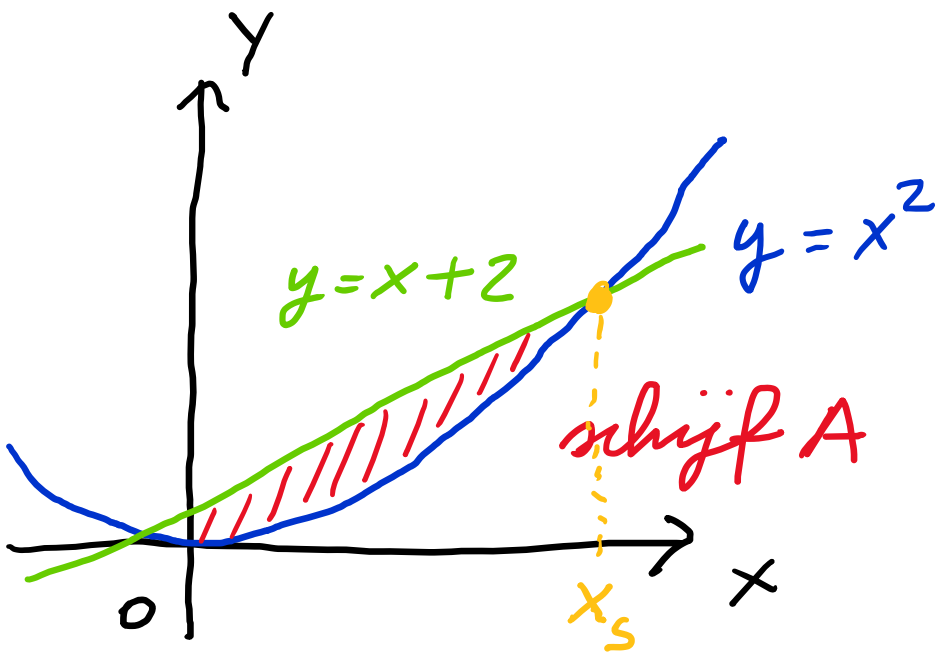
Bereken het massamiddelpunt van de homogene vlakke schijf begrensd door de y-as, de parabool $y = x^2$ en de rechte $y = x + 2$

1. Doe deze berekening met de hand
2. Doe de berekening opnieuw met Jupyter

Tip: maak eerst een schets!

Oplossing:

- schets:



de schijf is homogeen dus σ is constant

- massamiddelpunt vlakke figuur:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \iint_A x \sigma \, dA$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \iint_A y \sigma \, dA$$

$$M = \iint_A \sigma \, dA$$

- het gebied is enkelvoudig
  ↳ kies hier voor eerst integreren naar y

- grenzen: $y : \boxed{\begin{cases} y_1(x) = x^2 \\ y_2(x) = x + 2 \end{cases}}$

  $x : \begin{cases} \boxed{x_1 = 0} \\ x_2 \rightarrow \text{snijpunt } x_s \end{cases}$

x_s bepalen: $\quad y_1(x) = y_2(x)$

$$\Leftrightarrow x^2 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2)$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} \rightarrow \cancel{x_1 = -1}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} \rightarrow x_2 = 2$$

$$\boxed{x_s = 2}$$

- massa berekenen:

$$M = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} \sigma \, dy \right) dx \quad (\sigma \text{ is constant!})$$

$$M = \sigma \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \right) dx$$

$$M = \sigma \int_0^2 (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$M = \sigma \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$M = \sigma \left[2 + 4 - \frac{8}{3} \right]$$

$$\boxed{M = \frac{10}{3} \sigma}$$

- coördinaten massamiddelpunt:

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} x \, dy \right) dx$$

(want σ is constant)

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^2 \left[x(x+2) - x^3 \right] dx$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3)\,dx$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \left[\frac{8}{3} + 4 - 4 \right]$$

$$x_{cm} = \frac{8}{3} \frac{\sigma}{M} \quad \text{maar } M = \frac{10}{3}\sigma$$

dus: $\boxed{x_{cm} = \frac{4}{5} = 0{,}8}$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} y\,dy \right) dx$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+2} dx$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\int_0^2 \left[(x+2)^2 - x^4\right] dx$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2 + 4 + 4x - x^4)\, dx$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + 4x + 2x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5}\right]}_{\frac{92}{15}}$$

$$y_{CM} = \frac{92}{15}\frac{\sigma}{M} \quad \text{maar} \quad M = \frac{10}{3}\sigma$$

dus: $y_{CM} = \frac{92}{50} \rightarrow \boxed{y_{CM} = \frac{46}{25}}$ $\boxed{\approx 1{,}84}$

Oefening 2

Maak voor deze oefening gebruik van Jupyter!
Beschouw de functie $f(x, y) = x(\sin(y+1))^2 + 2\pi$

1. Teken de grafiek van deze functie voor de x en y waarden tussen 0 en 10
2. Integreer de functie over het (x,y)-gebied ingesloten tussen:
    a. De y-as
    b. De kromme beschreven door $h(x) = \frac{x^2}{10}$
    c. De kromme beschreven door $g(x) = 8\left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2$

    met $x \geq 0$
    Maak zeker grafieken van deze functies (op één figuur) zodat je een duidelijk beeld hebt van het integratiegebied.

Oplossing: zie notebook.