Functies van meerdere veranderlijken

Opgeloste oefeningen over partiële afgeleiden en gradiënt, deel 2

Oefening 4

Maak alle 3D grafieken die horen bij oefeningen 2 en 3 met behulp van Sympy. Dus voor oefening 1 de grafiek van f(x,y) met het berekende raakvlak, op één figuur. Voor oefening 3 de grafiek van f(x,y), het gegeven vlak en het berekende raakvlak, op één figuur.

Voor deze oefening kan je starten van de gegeven notebooks maar hou er rekening mee dat je bvb. op een examen die notebooks niet bij je hebt. De pdf-bestanden van de handleiding heb je wel altijd tot je beschikking.

Oplossing zie notebooks.

Oefening 5

Bereken de gevraagde partiële afgeleiden van hogere orde van de gegeven functie in het punt (x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y,z,u,v) \to f(x,y,z,u,v)$$

$$\text{met } f(x,y,z,u,v) = \frac{x^2+y^2}{u^2+v^2}\sin^3(u+z)$$

a) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

b) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

c) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

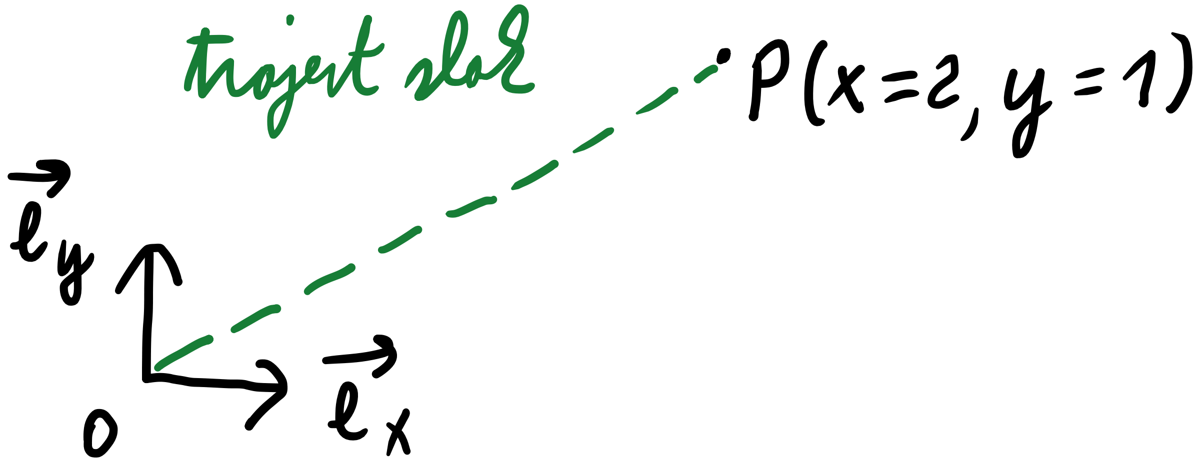
d) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

e) $\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

f) $\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}\right)_{(1,1,1,1,1)}$

Oefening 6

De temperatuur in een kamer wordt beschreven met de functie $T(x,y,t) = \frac{100(1+e^{-t})}{5+x^2+y^2}$ waarbij de oorsprong gekozen is op de plaats waar het verwarmingstoestel zich bevindt (T in °C, x en y in meter, t in minuten).



a) Men plaatst in het punt P een thermokoppel. Wat is het tempo van de temperatuursverandering gemeten door dit thermokoppel op t=0?

b) Een slak kruipt met een snelheid met grootte $|\vec{v}|$ =2m/min naar de oorsprong toe volgens de groene streepjeslijn. Op t=0 passeert de slak in punt P. Bereken het tempo van de temperatuursverandering gemeten door een thermokoppel dat op het slakkenhuis is bevestigd op t=0.

Doe deze berekeningen met de hand en met Maple.

Oefening 7

Ergens in een weiland laat een koe een stevige koeienvlaai achter. We kiezen de oorsprong van ons coördinatenstelsel waar de koeienvlaai ligt. De geurstoffen van de koeienvlaai verspreiden zich in de lucht en na een tijdje is de concentratie van de geurstoffen op grondniveau gegeven door $C(x,y) = \frac{100}{5+(\frac{x}{3})^4+y^2}$ (niet sferisch door de wind). De éénheden zijn hier minder belangrijk maar de concentratie wordt bvb. uitgedrukt in mg/cm^3 en x=1 komt bvb. overeen met 100 meter.

Een mestkever bevindt zich in het weiland op coördinaten (x=1,9; y=1,0) en loopt steeds in de richting waarin C(x,y) het sterkst toeneemt (chemotaxis).

- Teken de functie C(x,y) als 3d-plot en als contourplot (met 50 niveaukrommen).
- Bereken het traject y(x) dat de mestkever loopt en teken dit traject op de contourplot.

Doe het reken- en tekenwerk met Sympy maar reken erop dat je toch nog een paar kladbladen zal nodig hebben…

Oplossing zie notebooks