Functies van meerdere veranderlijken

Opgeloste oefeningen over partiële afgeleiden en gradiënt, deel 1

Oefening 1

Bereken alle partiële afgeleiden van de gegeven functie in het punt (x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)

$$f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z,u,v) \rightarrow f(x,y,z,u,v)$$

met $f(x,y,z,u,v) = \dfrac{x^2+y^2}{u^2+v^2} \sin^3(u+z)$

Oplossing:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{u^2+v^2} \sin^3(u+z)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1,1,1) = \sin^3(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{u^2+v^2} \sin^3(u+z)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1,1,1) = \sin^3(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2+y^2}{u^2+v^2} 3\sin^2(u+z)\cos(u+z)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1,1,1) = 3\sin^2(2)\cos(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (x^2+y^2)(-1)(u^2+v^2)^{-2}$$

$$\cdot 2u \sin^3(u+z)$$

$$+ \frac{x^2+y^2}{u^2+v^2} 3\sin^2(u+z)\cos(u+z)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(1,1,1,1,1) = -\sin^3(2) + 3\sin^2(2)\cos(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = (x^2+y^2)(-1)(u^2+v^2)^{-2} \cdot 2v\sin^3(u+z)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1,1,1) = -\sin^3(2)}$$

Oefening 2

Bereken de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van de gegeven functie in het punt (x,y)=(1,1)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to f(x,y) = \sin^2(x^2+y^2)$$

Oplossing:

vergelijking raakvlak in (x_0, y_0)

$$z = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$

- hier is $(x_0,y_0) = (1,1)$
- partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x^2+y^2) \cdot \cos(x^2+y^2)\, 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)\,2y$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} &= 4\sin(2)\cos(2) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} &= 4\sin(2)\cos(2) \end{aligned}}$$

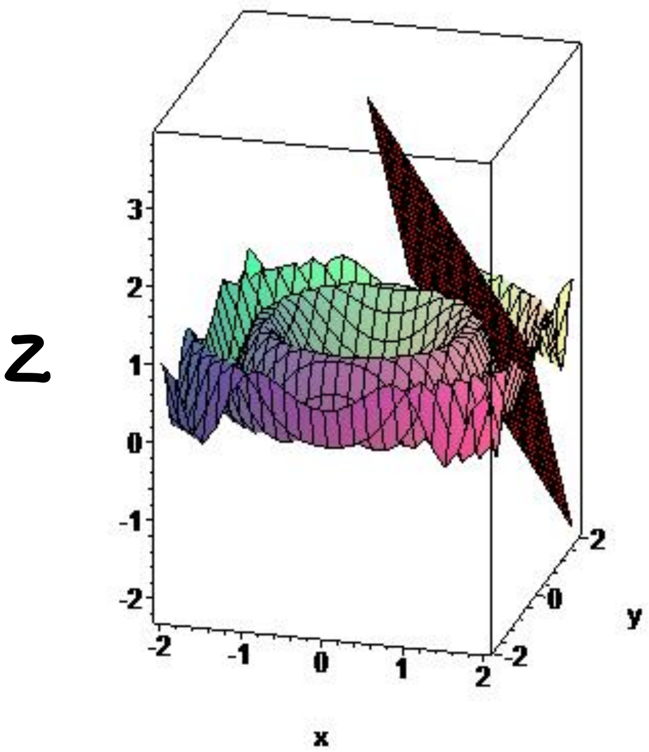
<u>vergelijking raakvlak:</u>

$$z = f(1,1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)}(x-1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)}(y-1)$$

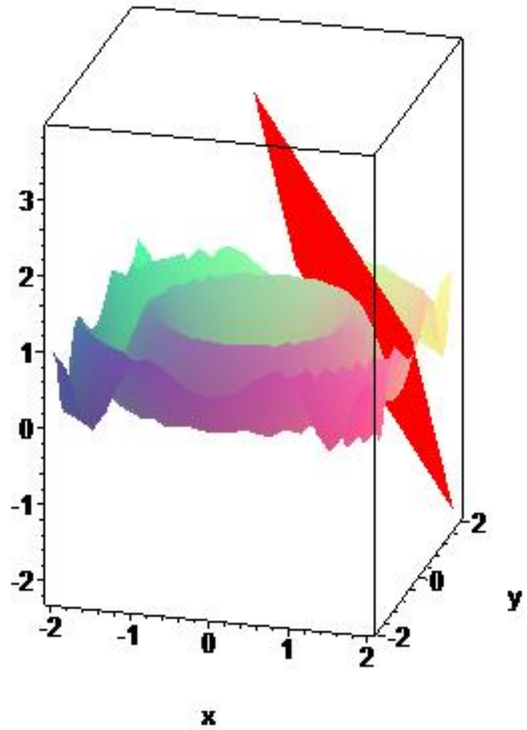
ofwel

$$z = \underbrace{\sin^2(2)}_{f(1,1)} + \underbrace{4\cos(2)\sin(2)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}(x-1) + \underbrace{4\cos(2)\sin(2)}_{\frac{\partial f}{\partial y}}(y-1)$$

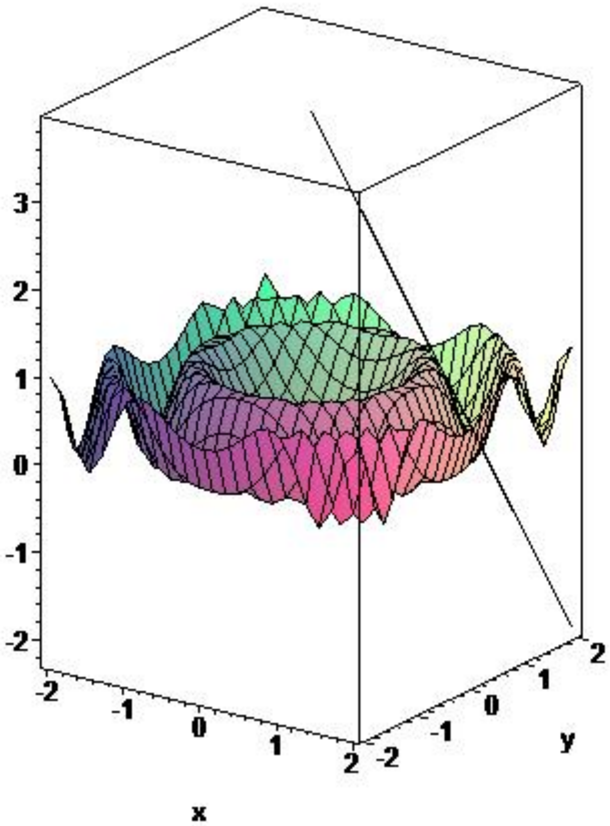
Grafiek van de functie met raakvlak in (1,1)



z



z



evenwicht
waarden

Oefening 3

De grafiek van de functie $z = f(x, y) = 10 - (x^2 + 2y^2)$ is het oppervlak Σ. Het vlak α wordt beschreven door de vergelijking $2x + y + z - 1 = 0$. Stel de vergelijking op van het raakvlak aan Σ dat evenwijdig is met het gegeven vlak α.

Oplossing:

In de x-richting en in de y-richting is de helling van het raakvlak aan Σ dezelfde als de helling van α

Dus: stel α: $z = g(x, y) = 1 - 2x - y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -2 \\ -4y = -1 \end{cases}$$

dus: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ coördinaten van het raakpunt aan Σ

$z_0 = f(x_0, y_0) \rightarrow$ 3de coördinaat raakpunt Σ

$$z_0 = 10\left(1^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \rightarrow z_0 = \frac{71}{8}$$

- theorie vergelijking raakvlak aan de grafiek in (x_0, y_0, z_0)

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y - y_0)$$

dus: $z = \frac{71}{8} + (-2)(x-1) + (-1)\left(y - \frac{1}{4}\right)$

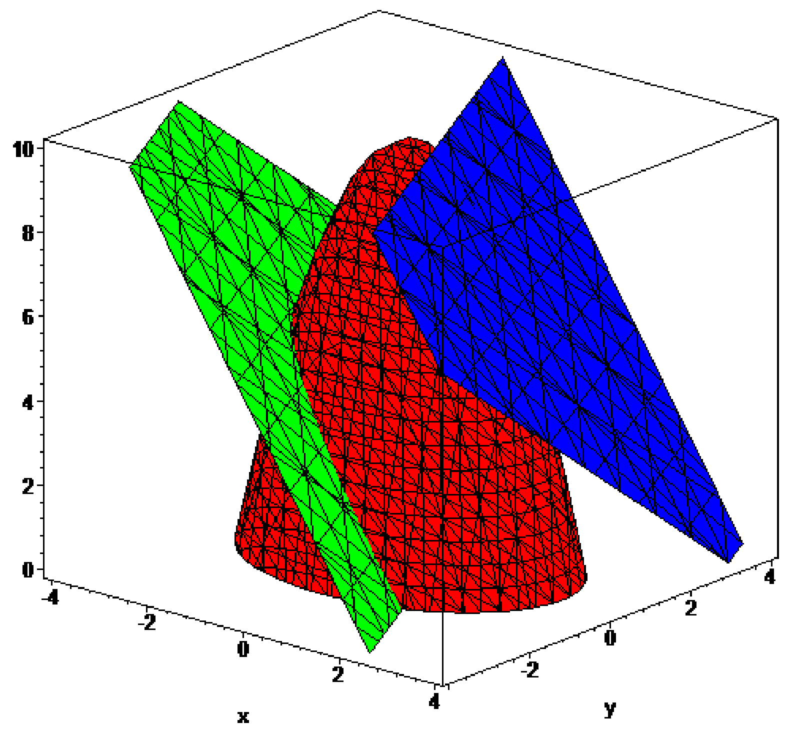
ofwel: $z = \frac{71}{8} - 2(x-1) - \left(y - \frac{1}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{71}{8} + 2 + \frac{1}{4} - 2x - y$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z = \frac{89}{8} - 2x - y}$$

vergelijking van het raakvlak aan Σ dat $\parallel$ is met het gegeven vlak α

Gegeven vlak en raakvlak aan de grafiek.



Zijaanzicht van gegeven vlak en raakvlak aan de grafiek.