Lokale en gebonden extrema van functies van meerdere veranderlijken

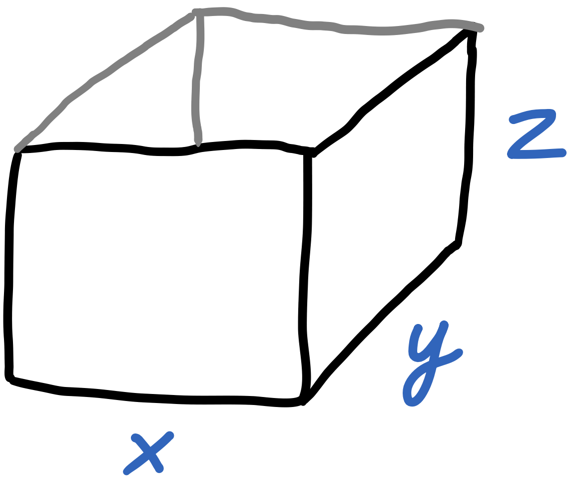
Oefeningen

Oefening 1 (oefening 9 p. 4-17)

Een open balkvormig kartonnen doosje wordt aan de ribben versterkt met plakband. Men beschikt over 96cm plakband. Bepaal de afmetingen van het doosje met het grootst mogelijke volume.

Los dit vraagstukje met de hand op! Het rekenwerk is niet lastig.

bovenkant open!



alle ribben samen → 96 cm

$$V = f(x,y,z) = xyz$$

voorwaarde :

$$g(x,y,z) = 2x + 2y + 4z - 96 = 0$$

Hulpfunctie van Lagrange:

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(2x+2y+4z-96)$$

<u>Stelsel:</u>

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = yz - 2\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz - 2\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = yx - 4\lambda = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -(2x+2y+4z-96) = 0 \quad (4)$$

uit (1), (2) en (3) $\downarrow$

$$\lambda = \underbrace{\frac{yz}{2} = \frac{xz}{2}}_{\boxed{x=y}} = \frac{yx}{4}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x}$$

↳ in (4)

$$4x + 4\,\frac{1}{2}x - 96 = 0$$

$$6x = 96 \rightarrow x = \frac{96}{6} \rightarrow \boxed{x = 16}$$

dus:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 16\,\text{cm} \\ y &= 16\,\text{cm} \\ z &= 8\,\text{cm} \end{aligned}}$$

Oefening 2 (oefening 11 p. 4-17)

Bepaal de minimale en maximale waarde van de functie $f(x, y, z) = xy + 2z$ op de snijkromme van het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$ en het boloppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ en bereken de coördinaten waarin deze extreme waarden worden bereikt.

Tip:

- Stel het stelsel van vergelijkingen met de hand op.
- Maak een Jupyter Notebook om het stelsel van vergelijkingen op te lossen en om na te gaan welke oplossingen met een gebonden maximum en/of minimum overeenkomen. Maak gebruik van het commando “solve” (zie handleiding).

Oplossing:

1) Opstellen stelsel:

$f(x,y,z) = xy + 2z$

voorwaarden:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-24=0 \end{cases}$$

functies: $\begin{cases} g(x,y,z) = x+y+z \\ h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-24 \end{cases}$

hulpfunctie van Lagrange:

$$\underbrace{\Phi(x,y,z,\lambda,\mu)}_{\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}} = \underbrace{xy+2z}_{f(x,y,z)} - \lambda\underbrace{(x+y+z)}_{g(x,y,z)} - \mu\underbrace{(x^2+y^2+z^2-24)}_{h(x,y,z)}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \lambda - 2\mu x = 0 \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x - \lambda - 2\mu y = 0 \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2 - \lambda - 2\mu z = 0 \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -(x+y+z) = 0 \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mu} = -(x^2+y^2+z^2-24) = 0
\end{cases}
$$

↳ stelsel oplossen met Jupyter

- gevonden maximum:

$$f(x,y,z) = 12 \text{ in } \begin{aligned} x_0 &= -2 \\ y_0 &= -2 \\ z_0 &= 4 \end{aligned}$$

- gevonden minimum:

$$f(x,y,z) = -13 \text{ in } \begin{aligned} x_1 &= \frac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ y_1 &= \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \\ z_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{en } f(x,y,z) = -13 \text{ in } \begin{aligned} x_2 &= \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \\ y_2 &= \frac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ z_2 &= -1 \end{aligned}}$$