Probability Theory Solutions

Student

June 7, 2024

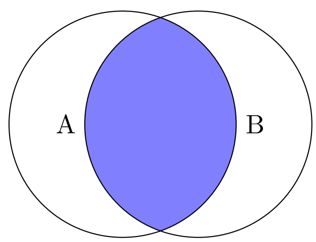
1.1 Nubrėžkite šiu ivykiu Veno diagramas:

(a) $A \cap B$

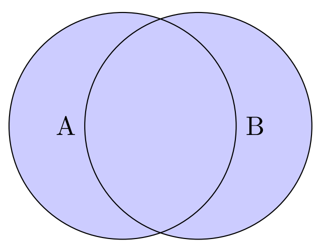
(b) $A \cup B$

Solution:

(a) $A \cap B$ - The intersection of events A and B.



(b) $A \cup B$ - The union of events A and B.



1.2 Given events A and B, express $A \cup B$ and $A \cap B$ using set notation.

Solution:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

1.3 Kada a) $A \cap B = A$; b) $A \cup B = A$?

Solution:

(a) $A \cap B = A$ when $A \subseteq B$. This means that event A is entirely contained within event B.

(b) $A \cup B = A$ when $B \subseteq A$. This means that event B is entirely contained within event A.

1.4 Ivykis A yra ivykio B dalis. Kam lygi ju a) sajunga; b) sankirta?

Solution:

(a) Sajunga $A \cup B = B$ since $A \subseteq B$.

(b) Sankirta $A \cap B = A$ since $A \subseteq B$.

1.5 Determine the complement of event A, denoted as A^C.

Solution:

$$A^C = \{x \mid x \notin A\}$$

1.6 Ar ivykiai A ir $A \cup B$ yra sutaikomi? Pagriskite savo išvada.

Solution:

Ivykiai A ir $A \cup B$ nėra sutaikomi, nes $\emptyset \neq A \cap (A \cup B) = A$. Kadangi A visada ivyksta kartu su $A \cup B$, jie negali būti nesutaikomi.

1.7 Užrašykite ivyki $A \setminus B$ dviem kitais būdais.

Solution:

$$A \setminus B = A \cap B^C = A \cap \neg B$$

1.8 Moneta metama tris kartus (i=1, 2, 3). Ivykis A_i – atvirto skaičius, ivykis B_i – atvirto herbas. Aprašykite ivyki C, kad atvirto ne mažiau kaip du herbai.

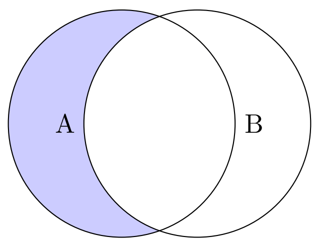
Solution:

Ivykis C apibūdinamas taip: ne mažiau kaip du herbai:

$$C = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3)$$

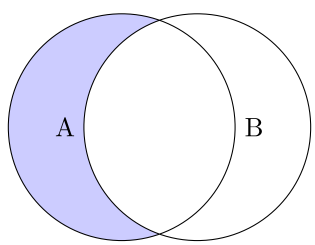
1.11 Describe event $A \backslash B$ graphically using a Venn diagram.

Solution:



1.13 For events A and B, show graphically that $A \cap B^C = A \setminus B$.

Solution:



$A \cap B^C = A \setminus B$

1.14 A, B, ir C yra ivykiai. Užrašykite tokius ivykius:

Solution:

(a) $A \cap B^C \cap C^C$

(b) $A \cap B \cap C^C$

(c) $A \cap B \cap C$

(d) $A \cup B \cup C$

(e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(f) $A^C \cap B^C \cap C^C$

(g) $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

(h) $(A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

2.1 Dėžėje yra 3 balti ir 7 juodi rutuliai. Atsitiktinai viena ištraukiame. Kokia tikimybė, kad jis bus baltas?

Solution:

$$
\begin{aligned}
P(\text{baltas}) &= \frac{\text{baltu rutuliu skaičius}}{\text{visu rutuliu skaičius}} \\
&= \frac{3}{3+7} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

Tikimybė, kad ištrauktas rutulys bus baltas, yra $\frac{3}{10}$ arba 0.3.

2.2 Yra 52 kortu kaladė. Atsitiktinai traukiame viena korta. Kokia tikimybė, kad: a) tai ne tūzas; b) ištrauktos kortos vertė bus žemesnė už septynake?

Solution:

(a) Tikimybė, kad tai ne tūzas:

$$P(\text{ne tūzas}) = 1 - P(\text{tūzas}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

(b) Kortos vertės, kurios yra žemesnės už septynake: 2, 3, 4, 5, 6 (po 4 kiekvienos rūšies):

$$P(\text{žemesnė už septynake}) = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$$

Solution:

Tegul N yra bendras metimu skaičius. Kadangi 60

$$0.4N = 12$$

$$N = \frac{12}{0.4} = 30$$

Taigi, žaidėjas metė kamuoli 30 kartu.

2.4 Two events A and B are independent. Express this condition in terms of probabilities.

Solution:

Events A and B are independent if and only if:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2.6 Metami 3 lošimo kauliukai. Kurio ivykio tikimybė didesnė: atvirtusiu akučiu suma lygi 9 ar atvirtusiu akučiu suma lygi 10?

Solution:

Galimi deriniai, kai suma yra 9:

$$(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$$

Galimi deriniai, kai suma yra 10:

$$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

Skaičius deriniu kiekvienu atveju yra 6. Kadangi abu ivykiai turi vienoda deriniu skaičiu, ju tikimybės yra vienodos.

2.7 In a group of 100 people, 60 like apples, 40 like bananas, and 20 like both. What is the probability that a randomly chosen person likes at least one of the two fruits?

Solution:

Using the principle of inclusion-exclusion, the number of people who like at least one of the fruits is:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 60 + 40 - 20 = 80$$

The probability that a randomly chosen person likes at least one of the fruits is:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{100} = \frac{80}{100} = 0.8$$

2.8 In a lottery, a ticket has a probability of $\frac{1}{1000}$ to win. What is the probability of not winning?

Solution:

The probability of not winning is the complement of winning:

$$P(\text{not winning}) = 1 - P(\text{winning}) = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

2.9 Du draugai susitarė susitikti tarp 12.00 val. ir 13.00 val. ir laukti vienas kito ne ilgiau 15 min ir ne vėliau 13.00 val. Kokia tikimybė, kad susitikimas ivyks?

Solution:

Laikas, kuri draugas gali atvykti, yra nuo 0 iki 60 minučiu. Tegul X ir Y yra ju atvykimo laikai. Norėdami susitikti, atvykimo laikas turi skirtis ne daugiau kaip 15 minučiu:

$$|X - Y| \leq 15$$

Plotas kvadrate 60×60 yra 3600 kvadratinės minutės. Plotis susitikimo salygos (trikampis su dviem simetriškais trikampiais) yra:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 2025$$

Tikimybė:

$$P(\text{susitikimas}) = \frac{2025}{3600} = \frac{9}{16}$$

2.10 A box contains 5 red, 3 green, and 2 blue balls. If one ball is drawn at random, what is the probability that it is either red or blue?

Solution:

The total number of balls is:

$$5 + 3 + 2 = 10$$

The number of red or blue balls is:

$$5 + 2 = 7$$

The probability of drawing a red or blue ball is:

$$P(\text{red or blue}) = \frac{7}{10}$$

2.11 Atkarpoje atsitiktinai pažymimas taškas. Kokia tikimybė, kad jo atstumas iki atkarpos vidurio bus didesnis už trečdali atkarpos ilgio?

Solution:

Tegul atkarpos ilgis yra l. Atstumas nuo vidurio, didesnis už $\frac{l}{3}$, reiškia, kad taškas yra už intervalo $\left(\frac{l}{3}, \frac{2l}{3}\right)$.

Atstumas mažesnis nei $\frac{l}{3}$ yra du intervalai: $\left[0, \frac{l}{3}\right]$ ir $\left[\frac{2l}{3}, l\right]$. Bendras ilgis:

$$\frac{l}{3} + \frac{l}{3} = \frac{2l}{3}$$

Tikimybė:

$$P = \frac{\frac{2l}{3}}{l} = \frac{2}{3}$$

2.16 Atkarpa padalinta i 5 lygias dalis. Joje atsitiktinai padedama 10 tašku. Kokia tikimybė, kad i pirma atkarpos dali pateko 2 taškai, i antra – 3 taškai, i ketvirta – 4 taškai, i penkta – 1 taškas?

Solution:

Tikimybė, kad taškai pasiskirstys būtent taip, yra:

$$P = \frac{10!}{2!3!0!4!1!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{10!}{2!3!4!1!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

Apskaičiuojame faktorius:

$$P = \frac{3628800}{2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 1} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{3628800}{288} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 12600 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 12600 \cdot \frac{1}{9765625} \approx 0.00129$$

Tikimybė yra 0.00129 arba 0.129

2.17 Dėžėje yra 10 iš eilės (nuo 1 iki 10) sunumeruotu rutuliu. Atsitiktinai viena ištraukiame. Kokia tikimybė, kad jo numeris dalijasi iš dvieju arba triju?

Solution:

The numbers that are divisible by 2 are: 2, 4, 6, 8, 10 (5 numbers). The numbers that are divisible by 3 are: 3, 6, 9 (3 numbers). The number divisible by both 2 and 3 is: 6 (1 number).

Using the principle of inclusion and exclusion:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\text{divisible by 2 or 3}) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

The probability is $\frac{7}{10}$ or 0.7.

2.21 Sandėlyje yra 20 pirmos rūšies detaliu, 6 – antros ir 4 – trečios rūšies. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos dvi detalės yra skirtingu rūšiu?

Solution:

Total number of details: $20 + 6 + 4 = 30$

Number of ways to choose 2 details: $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$

Number of ways to choose 2 details of the same type:

$$\binom{20}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 190 + 15 + 6 = 211$$

Number of ways to choose 2 details of different types:

$$435 - 211 = 224$$

Probability:

$$P(\text{different types}) = \frac{224}{435} \approx 0.515$$

2.26 Berniukas žaidžia su penkiomis raidyno raidėmis: E, I, N, R, S. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai dėdamas jas i eile, jis sudės žodi NERIS?

Solution:

Total permutations of 5 letters:

$$5! = 120$$

There is only 1 permutation that forms the word "NERIS".
Probability:

$$P(\text{NERIS}) = \frac{1}{120} \approx 0.0083$$

2.33 Iš n turimu raktu spynai tinka tik vienas. Kokia tikimybė rasti tinkama rakta a) pirmuoju; b) antruoju; c) trečiuoju bandymu (karta pabandžius netinkamas raktas atgal negražinamas)?

Solution:

a) Pirmuoju bandymu:

$$P(\text{first try}) = \frac{1}{n}$$

b) Antruoju bandymu:

$$P(\text{second try}) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

c) Trečiuoju bandymu:

$$P(\text{third try}) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

2.40 Metama moneta ir kauliukas. Kokia tikimybė, kad atvirs herbas ir lyginis akučiu skaičius?

Solution:

Probability of flipping a head:

$$P(\text{head}) = \frac{1}{2}$$

Probability of rolling an even number (2, 4, 6):

$$P(\text{even}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Combined probability:

$$P(\text{head and even}) = P(\text{head}) \times P(\text{even}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2.53 Kokia tikimybė, kad iš kaladės ištraukus 5 kortas bus bent vienas tūzas?

Solution:

Probability of not drawing an ace in one draw:

$$P(\text{not ace}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

Probability of not drawing an ace in 5 draws:

$$P(\text{no aces in 5 draws}) = \left(\frac{12}{13}\right)^5$$

Probability of drawing at least one ace:

$$P(\text{at least one ace}) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^5 \approx 1 - 0.618 \approx 0.382$$

2.58 Kokia tikimybė, kad išmesti du kauliukai parodys vienoda skaičiu akiu?

Solution:

There are 6 possible pairs (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6). Total possible outcomes when two dice are thrown: $6 \times 6 = 36$.

Probability:

$$P(\text{equal eyes}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2.61 Mieste yra 1000 automobiliu. 50 iš ju turi defekta A, 30 – defekta B, ir 10 – abu defektus. Atsitiktinai paimtas automobilis turi viena iš šiu defektu. Kokia tikimybė, kad jis turi defekta A?

Solution:

Using the principle of inclusion-exclusion:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{50}{1000} + \frac{30}{1000} - \frac{10}{1000} = \frac{70}{1000} = 0.07$$

The probability that a car has defect A given it has one of the defects:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{50}{1000}}{0.07} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

2.75 Iš 5 raidžiu B, A, L, I, S kiek skirtingu žodžiu galima sudaryti, jei a) galima kartoti raides; b) negalima kartoti raidžiu?

Solution:

a) With repetition:

$$5^5 = 3125$$

b) Without repetition:

$$5! = 120$$

2.79 Iš kaladės traukiamos 3 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp ju bus bent vienas tūzas?

Solution:

Probability of not drawing an ace in one draw:

$$P(\text{not ace}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

Probability of not drawing an ace in 3 draws:

$$P(\text{no aces in 3 draws}) = \left(\frac{12}{13}\right)^3 \approx 0.787$$

Probability of drawing at least one ace:

$$P(\text{at least one ace}) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^3 \approx 1 - 0.787 \approx 0.213$$

2.81 Atsitiktinai traukiant 2 kortas iš 52 kortu kaladės, koks tikimybės, kad abi kortos bus tos pačios spalvos?

Solution:

Number of ways to choose 2 cards of the same color:

$$\binom{26}{2} + \binom{26}{2} = 325 + 325 = 650$$

Total ways to choose 2 cards:

$$\binom{52}{2} = 1326$$

Probability:

$$P(\text{same color}) = \frac{650}{1326} \approx 0.49$$

2.85 Kokia tikimybė, kad išmesti trys kauliukai parodys lygu skaičiu akiu?

Solution:

Total possible outcomes when three dice are thrown: $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Number of favorable outcomes (only 6 possible, one for each number):

$$6$$

Probability:

$$P(\text{all equal}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

2.111 Iš kaladės ištraukiamos 4 kortos. Kokia tikimybė, kad jos bus visos skirtingos spalvos?

Solution:

Number of ways to choose 4 cards with different colors:

$$\frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}$$

Probability:

$$P(\text{different colors}) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{28561}{270725} \approx 0.105$$

2.113 Iš dėžės su 8 rutuliais traukiame po viena. Kokia tikimybė, kad ištrauksime juos šia tvarka: 1, 2, 3, ..., 8?

Solution:

Total permutations of 8 balls:

$$8!$$

There is only 1 permutation that follows the sequence 1, 2, 3, ..., 8.
Probability:

$$P(\text{specific sequence}) = \frac{1}{8!} \approx 2.48 \times 10^{-5}$$

2.116 Atsitiktinai metant dvi monetas, koks tikimybės, kad jos atvirs skirtingomis pusėmis?

Solution:

Total possible outcomes: (HH, HT, TH, TT):

$$4$$

Favorable outcomes: (HT, TH):

$$2$$

Probability:

$$P(\text{different sides}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2.129 Iš 10 rutuliu dėžės traukiame 3. Kokia tikimybė, kad visi bus tos pačios spalvos?

Solution:

Probability of drawing 3 balls of the same color:

$$P(\text{same color}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} + \frac{10}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Nd 2.19 Dvi dėžės su kamuoliukais: pirmoje dėžėje 5 baltieji ir 3 juodieji kamuoliukai, antroje dėžėje 4 baltieji ir 6 juodieji kamuoliukai. Iš kiekvienos dėžės paimamas vienas kamuoliukas. Kokia tikimybė, kad ištraukti kamuoliukai bus skirtingu spalvu?

Solution:

Probability of drawing white from the first box and black from the second:

$$P(\mathrm{W1} \cap \mathrm{B2}) = \frac{5}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Probability of drawing black from the first box and white from the second:

$$P(\mathrm{B1} \cap \mathrm{W2}) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{10} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Combined probability:

$$P(\text{different colors}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{20} = \frac{15}{40} + \frac{6}{40} = \frac{21}{40} = 0.525$$

2.23 Iš kortu kaladės traukiamos 2 kortos. Kokia tikimybė, kad jos bus vienodos rūšies?

Solution:

Number of ways to choose 2 cards of the same suit:

$$\binom{13}{2} \times 4 = 78 \times 4 = 312$$

Total ways to choose 2 cards:

$$\binom{52}{2} = 1326$$

Probability:

$$P(\text{same suit}) = \frac{312}{1326} \approx 0.235$$

2.27 Dvieju vaiku šeimoje atsitiktinai paimtas vienas vaikas yra berniukas. Kokia tikimybė, kad kitas vaikas yra mergaitė?

Solution:

Possible combinations:

$$BB, BG, GB, GG$$

Given that one child is a boy, we have:

$$BB, BG, GB$$

Probability that the other child is a girl:

$$P(\text{girl}) = \frac{2}{3}$$

2.32 Iš kaladės traukiamos 4 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp ju bus bent vienas tūzas?

Solution:

Probability of not drawing an ace in one draw:

$$P(\text{not ace}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

Probability of not drawing an ace in 4 draws:

$$P(\text{no aces in 4 draws}) = \left(\frac{12}{13}\right)^4 \approx 0.751$$

Probability of drawing at least one ace:

$$P(\text{at least one ace}) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^4 \approx 1 - 0.751 \approx 0.249$$

2.44 Atsitiktinai metant keturias monetas, koks tikimybės, kad iškris bent trys herbai?

Solution:

Number of ways to get exactly 3 heads:

$$\binom{4}{3} = 4$$

Number of ways to get exactly 4 heads:

$$\binom{4}{4} = 1$$

Total favorable outcomes:

$$4 + 1 = 5$$

Total possible outcomes:

$$2^4 = 16$$

Probability:

$$P(\text{at least 3 heads}) = \frac{5}{16} \approx 0.3125$$

2.57 Atsitiktinai metant keturis kauliukus, koks tikimybės, kad iškris lyginis skaičius akiu?

Solution:

Total possible outcomes: $6^4 = 1296$.

Number of favorable outcomes (even number of spots):

$$3^4 = 81$$

Probability:

$$P(\text{even spots}) = \frac{81}{1296} = \frac{1}{16}$$

2.60 Iš 8 kaladės kortu traukiamos 2 kortos. Kokia tikimybė, kad jos bus skirtingu spalvu?

Solution:

Number of ways to choose 2 cards of different colors:

$$4 \times 4 = 16$$

Total ways to choose 2 cards:

$$\binom{8}{2} = 28$$

Probability:

$$P(\text{different colors}) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

2.87 Atsitiktinai metant penkias monetas, koks tikimybės, kad iškris bent trys herbai?

Solution:

Number of ways to get exactly 3 heads:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Number of ways to get exactly 4 heads:

$$\binom{5}{4} = 5$$

Number of ways to get exactly 5 heads:

$$\binom{5}{5} = 1$$

Total favorable outcomes:

$$10 + 5 + 1 = 16$$

Total possible outcomes:

$$2^5 = 32$$

Probability:

$$P(\text{at least 3 heads}) = \frac{16}{32} = 0.5$$

2.114 Iš 12 rutuliu dėžės traukiami 3. Kokia tikimybė, kad visi bus skirtingu spalvu?

Solution:

Number of ways to choose 3 balls of different colors:

$$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{\binom{12}{3}}$$

Probability:

$$P(\text{different colors}) = \frac{64}{220} = \frac{16}{55} \approx 0.291$$

2.120 Iš kaladės traukiamos 2 kortos. Kokia tikimybė, kad jos bus tos pačios spalvos?

Solution:

Number of ways to choose 2 cards of the same color:

$$\binom{26}{2} + \binom{26}{2} = 325 + 325 = 650$$

Total ways to choose 2 cards:

$$\binom{52}{2} = 1326$$

Probability:

$$P(\text{same color}) = \frac{650}{1326} \approx 0.49$$

2.124 Atsitiktinai metant tris monetas, koks tikimybės, kad iškris bent du herbai?

Solution:

Number of ways to get exactly 2 heads:

$$\binom{3}{2} = 3$$

Number of ways to get exactly 3 heads:

$$\binom{3}{3} = 1$$

Total favorable outcomes:

$$3 + 1 = 4$$

Total possible outcomes:

$$2^3 = 8$$

Probability:

$$P(\text{at least 2 heads}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$