Numerieke Modellering en Benadering: Practicum 1

Jona Beysens & Arnout Devos

17 mei 2014

Opgave 1

Opgave 2

Opgave 3

Opgave 4

Opgave 5

Opgave 6

De opbouw van het algoritme is als volgt:

Eerst wordt het aantal rijen N gezocht van de matrix x om vervolgens de N-punts FFT uit te voeren.Vervolgens worden de coëfficiënten $X_{K+1}, \ldots, X_{\frac{N}{2}}$ gelijk aan nul gesteld. In diezelfde operatie worden ook meteen de corresponderende X_{N-k} coëfficiënten gelijk aan nul gesteld vanwege de symmetrie. Om de oorspronkelijke functie te kunnen evalueren in een aantal punten $M \geq N$, worden de volgende relaties gebruikt:

$$\begin{cases} Y_k = \frac{M}{N} X_k & k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ Y_k = \frac{M}{N} \frac{X_k}{2} & k = \frac{N}{2} \\ Y_k = 0 & k = \frac{N}{2} + 1, \ldots, \frac{M}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Tenslotte kan via de M-punts inverse FFT de benadering voor het oorspronkelijke signaal gevonden worden.

De Matlab-code bevindt zich in bijlage 1.

Opgave 7

Wanneer alleen de K eerste X_k coëfficiënten behouden worden, worden de hogere frequenties uit het signaal weggehaald. Dit komt overeen met een laagdoorlaatfiltering van het signaal. Er gaat enkel informatie verloren als er wel degelijk frequenties aanwezig zijn in het oorspronkelijke signaal die coëfficiënten $X_{K+1}, \ldots, X_{\frac{N}{2}}$ verschillend van nul veroorzaken.

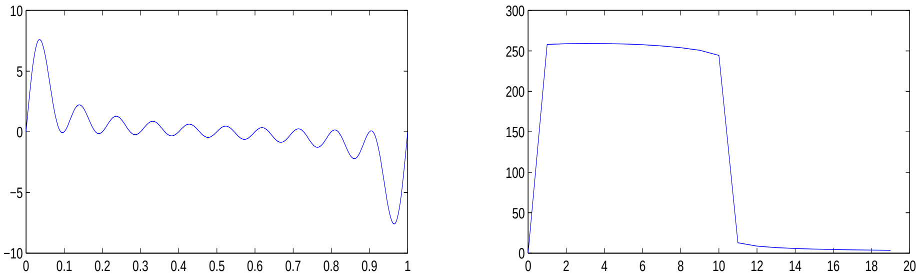
Als voorbeeld beschouwen we een signaal in functie van de tijdsparameter t samengesteld uit 10 verschillende frequenties

$$c = \sum_{k=1}^{10} \sin 2\pi k t \tag{2}$$

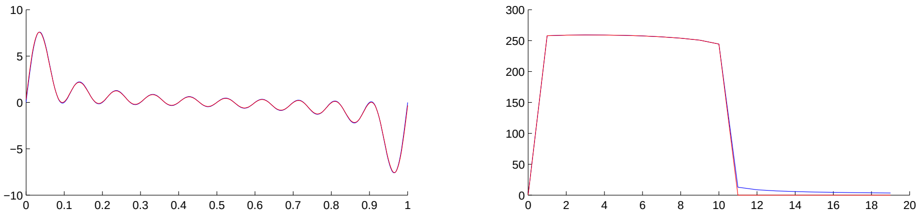
Wanneer dit signaal in 512 punten gesampled wordt en er daarna de FFT van genomen wordt, bekomt men figuur 1a. Hetzelfde resultaat wordt bekomen door $K = 256$ te nemen. Noteer dat de FFT er voor zorgt dat er ook schijnbaar frequenties aanwezig zijn bij $11, 12, \ldots$. De waarden verschillend van nul bij deze frequenties ontstaan door de keuze van het venster en worden in de verdere behandeling verwaarloosd.

Als $K = 10$ wordt genomen, worden er geen nuttige frequenties verwijderd uit het signaal en bijgevolg is het benaderende signaal exact gelijk aan het oorspronkelijke signaal zoals te zien is in 1b.

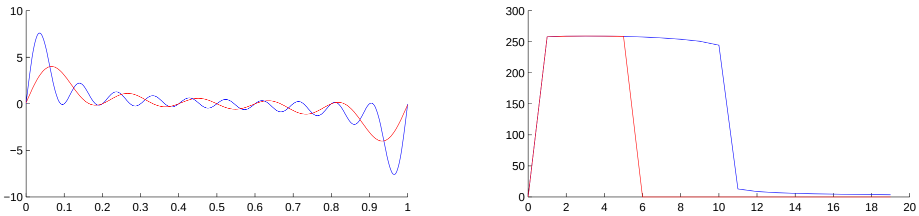
De laagdoorlaatfiltering wordt pas echt duidelijk wanneer $K = 5$ wordt gesteld. Als gevolg van deze keuze van K verdwijnt de helft van de frequenties in de benadering zoals te zien in de rechterfiguur van 1c. Aangezien de hogere frequenties eenvoudigweg op nul gezet worden, verdwijnt ook de energie die in deze frequenties vervat zit wat resulteert in een signaal met een minder grote amplitude. Ook in de linkerfiguur van 1c is te zien dat er een veel *geleidelijker* verloop is van de veelterm.



(a) Oorspronkelijke functie met $K = 256$



(b) Benaderende functie met $K = 10$



(c) Benaderende functie met $K = 5$

Figuur 1: Illustratie van de invloed van de parameter K op de benadering (rood) van een periodieke functie (blauw) met aan de linkerkant de veelterm en aan de rechterkant de FFT van deze veelterm weergegeven over een nuttig domein. ($M = N = 512$)

.

Bijlage 1

```
function y = periotrig(x,K,M)
%periotrig Functie voor het evalueren van periodieke interpolerende en
%   benaderende trigonometrische veeltermen
Y    = fft(x);
%t    = 0:1/M:(M-1);
[N d]    = size(x);

% Coefficienten verwijderen aan de hand van K
% Y_k = 0 for k = K+1,...,N/2 if K < N/2
Y(K+2:N-K)=0;

% Y_k = X_k*M/N for k = 0,...,N/2-1
Y(1:N/2,:) = Y(1:N/2,:)*M/N;
% Y_k = X_k*M/(N*2) for k = N/2
Y(N/2+1,:)=Y(N/2+1,:)*M/(N*2);
% Y_k = 0 for k = N/2+1,... ,M/2
Y(N/2+2:M/2+1,:)=0;
% Alleen de nodige coefficienten overhouden
Y = Y(1:M/2+1,:);

% Steunen op de symmetrie
%Y(M/2+1:M-1,:) = conj(Y(M/2:2,:));

for k = M/2+1:M-1
    Y = [Y; conj(Y(M-k+1,:))];
end
y = ifft(Y,M);
end
```