# Practicum NMB : Eigenwaardenproblemen

Jona Beysens & Arnout Devos

vrijdag 25 april 2014

## Opgave 1

Kies $Q^{(0)} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ met orthonormale kolommen.
**for** $k = 1, 2, ...$ **do**
  $AZ = Q^{(k-1)}$
  $Q^{(k)}R^{(k)} = Z$
  $A^{(k)} = {Q^{(k)}}^T AQ^{(k)}$
**end for**
$x = diag(A^{(k)})$

Dit algoritme is de gelijktijdige inverse iteratie voor het berekenen van de d kleinste eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren van de matrix $A$. Het is een aangepaste versie van de gelijktijdige iteratie waarbij gebruik gemaakt wordt van de inverse van $A$. De inverse wordt echter nooit expliciet berekend maar er wordt telkens een stelsel opgelost naar $Z$. De eigenwaarden van $A^{-1}$ zijn de inversen van de eigenwaarden van $A$ en de eigenvector horende bij $\lambda_i$ is dezelfde als die horende bij $\frac{1}{\lambda_i}$:

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

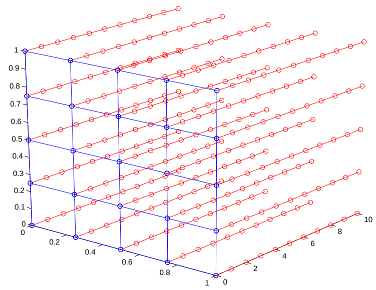
$$A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \tag{2}$$

$$\frac{1}{\lambda} = A^{-1}x \tag{3}$$

De eigenvectoren horende bij de kleinste eigenwaarden van $A$ komen nu in de eerste kolommen van $Q$ te staan. Daardoor zal $A^{(k)}$ convergeren naar een diagonaalmatrix waarvan de eerste diagonaalelementen de kleinste eigenwaarden van $A$ zijn.

## Opgave 2

a) Als $\mu$ een eigenwaarde van $A$ goed benadert, worden de grootste eigenwaarde van $(A - \mu I)^{-1}$ en het conditiegetal van $(A - \mu I)$ zeer groot. Daardoor zal bij het aanleggen van een perturbatie op de matrix $(A - \mu I)$ de oplossing $\hat{y}$ van het stelsel sterk afwijken van het originele probleem. Maar omdat de grootste eigenwaarde zo dominant is, ligt de oplossing van het geperturbeerd probleem $\hat{y}$ bijna in dezelfde richting als $y$. De grootte van $\hat{y}$ verschilt echter sterk van deze van $y$. Door te normaliseren verschillen $\hat{y}$ en $y$ enkel nog in richting. Dit verschil is miniem.



Figuur 1: Een figuurtje.

b) Om het residu van $Ax - \rho x$ te minimaliseren lossen we het kleinste kwadratenprobleem op:

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} \|Ax - \rho x\|_2 \Leftrightarrow x^T(Ax - x\rho) = 0 \quad (4)$$

$$x^T Ax = x^T \rho x \quad (5)$$

$$\rho = \frac{x^T Ax}{x^T x} \quad (6)$$

Deze oplossing voor $\rho$ komt overeen met het Ragleigh quotiënt $r(x)$.

# Opgave 3

a) **TODO**

b) Om, gegeven een symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, de eigenwaarde te berekenen die het dichtst bij een getal $\alpha$ gelegen is, kunnen we gebruik maken van *inverse iteratie*. De convergentie is lineair en zal veel sneller gebeuren naarmate $\alpha$ dichter bij de gewilde eigenwaarde gelegen is. De rekenkost is $\mathcal{O}(m^3)$ doordat er een stelsel moet worden opgelost bij het inverteren van de matrix $A - \alpha I$.

De oplossing van opgave 2. Zie figuur 1.

# Opgave 4

@@@AFBEELDING + beschrijving vorm@@@
Indien de matrix niet gereduceerd zou worden naar Hessenberg vorm, moet in elke iteratie van het QR algoritme de factorisatie berekend worden van een volle matrix. Dit vergt $\mathcal{O}(m^3)$ flops. De convergentie naar machinenauwkeurigheid $\epsilon_{mach}$ gebeurt meestal in $\mathcal{O}(m)$ stappen wat het totale vereiste werk op $\mathcal{O}(m^4)$ flops brengt. Het rekenwerk van de QR factorisatie van een matrix in Hessenbergvorm bedraagt $\mathcal{O}(m^2)$ flops. Hierdoor komt het totale werk op $\mathcal{O}(m^3)$ flops. Aangezien de Hessenbergvorm van de matrix *mat1.txt* een tridiagonale vorm heeft zal er zelfs nog minder werk nodig zijn. Het rekenwerk voor een QR factorisatie van een tridiagonale matrix is immers $\mathcal{O}(m)$ flops waarmee het totale rekenwerk op $\mathcal{O}(m^2)$ flops komt.

| getal | cijfer | c | c |
|---|---|---|---|
| een | 1 | 1 | 1 |
| tien | 10 | 10 | 10 |
| honderd | 100 | 100 | 100 |

Tabel 1: Een tabel