

Practicum NMB : Eigenwaardenproblemen

Jona Beysens & Arnout Devos

vrijdag 25 april 2014

Opgave 1

Kies $Q^{(0)} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ met orthonormale kolommen.

for $k = 1, 2, \dots$ **do**

$$AZ = Q^{(k-1)}$$

$$Q^{(k)} R^{(k)} = Z$$

$$A^{(k)} = Q^{(k)T} A Q^{(k)}$$

end for

$$x = \text{diag}(A^{(k)})$$

Dit algoritme is de gelijktijdige inverse iteratie voor het berekenen van de kleinste eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren van de matrix A . Het is een aangepaste versie van de gelijktijdige iteratie waarbij gebruik gemaakt wordt van de inverse van A . De inverse wordt echter nooit expliciet berekend maar er wordt telkens een stelsel opgelost naar Z . De eigenwaarden van A^{-1} zijn de inversen van de eigenwaarden van A en de eigenvector horende bij λ_i is dezelfde als die horende bij $\frac{1}{\lambda_i}$:

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

$$A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \tag{2}$$

$$\frac{1}{\lambda} = A^{-1}x \tag{3}$$

De eigenvectoren horende bij de kleinste eigenwaarden van A komen nu in de eerste kolommen van Q te staan. Daardoor zal $A^{(k)}$ convergeren naar een diagonaalmatrix waarvan de eerste diagonaalelementen de kleinste eigenwaarden van A zijn.

Opgave 2

- a) Als μ een eigenwaarde van A goed benadert, worden de grootste eigenwaarde van $(A - \mu I)^{-1}$ en het conditiegetal van $(A - \mu I)$ zeer groot. Daardoor zal bij het aanleggen van een perturbatie op de matrix $(A - \mu I)$ de oplossing \hat{y} van het stelsel sterk afwijken van het originele probleem. Maar omdat de grootste eigenwaarde zo dominant is, ligt de oplossing van het geperturbeerd probleem \hat{y} bijna in dezelfde richting als y . De grootte van \hat{y} verschilt echter sterk van deze van y . Door te normaliseren verschillen \hat{y} en y enkel nog in richting. Dit verschil is miniem.

- b) Om het residu van $Ax - \rho x$ te minimaliseren lossen we het kleinste kwadratenprobleem op:

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} \|Ax - \rho x\|_2 \Leftrightarrow x^T (Ax - \rho x) = 0 \quad (4)$$

$$x^T Ax = x^T \rho x \quad (5)$$

$$\rho = \frac{x^T Ax}{x^T x} \quad (6)$$

Deze oplossing voor ρ komt overeen met het Ragleigh quotiënt $r(x)$.

Opgave 3

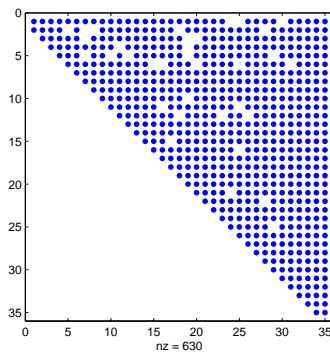
a) **TODO**

- b) **TODO** Arnout oplossing: Om, gegeven een symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, de eigenwaarde te berekenen die het dichtst bij een getal α gelegen is, kunnen we gebruik maken van *inverse iteratie*. De convergentie is lineair en zal veel sneller gebeuren naarmate α dichterbij de gewilde eigenwaarde gelegen is. De rekenkost is $\mathcal{O}(m^3)$ doordat er een stelsel moet worden opgelost bij het inverteren van de matrix $A - \alpha I$.

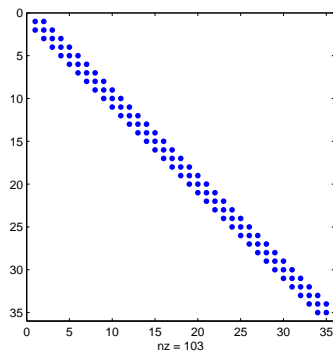
De oplossing van opgave 2. Zie figuur 1.

Opgave 4

In figuur 1 zien we de structuur van de matrix *mat1.txt* na reductie naar de Hessenberg vorm. Doordat de matrix niet perfect symmetrisch is, staan er nog waarden in de bovendriehoek die verschillend zijn van 0. Als we kijken naar de grootte van de waarden in die bovendriehoek dan zijn deze allemaal klein. Als we alle waarden die in absolute waarde kleiner dan 10^{-14} zijn gelijk aan 0 stellen dan verkrijgen we de vorm in figuur 2. Deze tridiagonale vorm is typisch voor reductie van een symmetrische matrix naar een Hessenberg vorm.



Figuur 1: Vorm van de matrix *mat1.txt* door reductie naar Hessenberg vorm



Figuur 2: Tridiagonale vorm van de matrix *mat1.txt* na reductie naar Hessenberg vorm en verwaarlozing van elementen $< 10^{-13}$

getal	cijfer	c	c
een	1	1	1
tien	10	10	10
honderd	100	100	100

Tabel 1: Een tabel

Indien de matrix niet gereduceerd zou worden naar Hessenberg vorm, moet in elke iteratie van het QR algoritme de factorisatie berekend worden van een volle matrix. Dit vergt $\mathcal{O}(m^3)$ flops. De convergentie naar machinenauwkeurigheid ϵ_{mach} gebeurt meestal in $\mathcal{O}(m)$ stappen wat het totale vereiste werk op $\mathcal{O}(m^4)$ flops brengt. Het rekenwerk van de QR factorisatie van een matrix in Hessenbergvorm bedraagt $\mathcal{O}(m^2)$ flops. Hierdoor komt het totale werk op $\mathcal{O}(m^3)$ flops. Aangezien de Hessenbergvorm van de matrix *mat1.txt* een tridiagonale vorm heeft zal er zelfs nog minder werk nodig zijn. Het rekenwerk voor een QR factorisatie van een tridiagonale matrix is immers $\mathcal{O}(m)$ flops waarmee het totale rekenwerk op $\mathcal{O}(m^2)$ flops komt.