Numerieke Modellering en Benadering
Practicum 2

2013–2014

1 Benaderen met veeltermen

In dit practicum willen we eerst enkele functies benaderen met behulp van veeltermen door interpolatie. We gebruiken hiertoe nulpunten van orthogonale veeltermen als interpolatiepunten.

1.1 De nulpunten van orthogonale veeltermen

Stel dat $\phi_n(x)$ een rij is van orthogonale veeltermen. Zij voldoen aan de drietermsrecursiebetrekking

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \lambda_0 \quad ; \quad \phi_1(x) = \lambda_1\,(x-\alpha_1)\,\phi_0(x) \\ \phi_k(x) &= \lambda_k(x-\alpha_k)\phi_{k-1}(x) - \beta_k\phi_{k-2}(x) \quad \text{voor} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

waarbij alle α_i, β_i en λ_i gepaste waarden aannemen. Zie ook §3.2.2-3.2.3 in de cursus.
De nulpunten van deze veeltermen komen precies overeen met de eigenwaarden van een tridiagonale $n \times n$ matrix A. Deze matrix wordt gedefinieerd als

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mu_1 & & & & & \\ \nu_1 & \alpha_2 & \mu_2 & & & & \\ & \nu_2 & \alpha_3 & \mu_3 & & & \\ & & \nu_3 & \alpha_4 & \mu_4 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \nu_{n-2} & \alpha_{n-1} & \mu_{n-1} \\ & & & & & \nu_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Hierin is $\nu_k = \beta_{k+1}/\lambda_{k+1}$ en $\mu_k = 1/\lambda_k$.
Voor een bepaalde rij van orthogonale veeltermen kan je alle nodige waarden dus afleiden uit de drietermsrecursiebetrekking. Een veelgebruikte klassieke familie van orthogonale veeltermen is deze van de Chebyshev-veeltermen $T_k(x)$. Deze veeltermen voldoen aan de betrekking

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Er geldt bovendien dat $T_0(x) = 1$ en $T_1(x) = x$.

1.2 Interpolatie met veeltermen

Met veeltermen van graad $n-1$ kan je een functie interpoleren in n punten. Noem de interpolatiepunten x_k, voor $k = 1, 2, \ldots, n$, en veronderstel dat $\psi_j(x)$ een rij is van veeltermen van graad j. We zoeken nu voor een gegeven functie $f(x)$ de veelterm $g(x)$ van graad $n-1$ zodat

$$g(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Als we de veelterm $g(x)$ voorstellen in de vorm $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\psi_k(x)$, dan leiden de interpolatievoorwaarden (1) tot een lineair stelsel

$$Mc = B$$

waarvan de oplossing uit de coëfficiënten c_k bestaat. Hierin is M een $n \times n$ matrix en B een vector met n elementen. Je kan eenvoudig nagaan dat de elementen M_{ij} van de matrix M op rij i en kolom j worden gegeven door

$$M_{ij} = \psi_j(x_i),$$

en dat de elementen B_i van het rechterlid worden gegeven door

$$B_i = f(x_i).$$

Het is zinvol om te interpoleren in de nulpunten van orthogonale veeltermen omdat dit aanleiding geeft tot een stabiele methode. Merk op dat het mogelijk is om voor ϕ_n en ψ_n dezelfde veeltermen te gebruiken, maar dit is niet noodzakelijk.

1.3 Opgaven

1. Schrijf een efficiënte Matlab-functie voor het berekenen van de nulpunten van een orthogonale veelterm gebaseerd op de waarden α_k, β_k en λ_k uit de recursiebetrekking. Voor het berekenen van de eigenwaarden van de matrix A kan je het Matlab-commando `eig` gebruiken.

   - `function x = poly_zeros(n, alpha, beta, lambda)`
     Deze functie krijgt als invoer de waarde n en de coëfficiënten van de drietermsrecursiebetrekking van een rij orthogonale veeltermen $\phi_k(x)$. De uitvoer is een kolomvector die de n nulpunten van $\phi_n(x)$ bevat.

2. Schrijf een efficiënte Matlab-functie voor het evalueren van de drietermsrecursiebetrekking.

   - `function M = eval_recursion(x, n, alpha, beta, lambda)`
     Deze functie krijgt als invoer een kolomvector x die de waarden bevat waarin de functies $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ geëvalueerd moeten worden, met n ook gegeven als invoer. Verder worden ook de coëfficiënten van de drietermsrecursiebetrekking van de rij orthogonale veeltermen $\phi_k(x)$ gegeven als invoer. De uitvoer is een matrix M met n kolommen waarbij de i-de kolom de functiewaarden van $\phi_{i-1}(x)$ bevat. Gebruik de recursiebetrekking efficiënt in deze functie.

   Toon de werking van de functie door enkele Chebyshev-veeltermen te evalueren in voldoende punten (in het interval $[-1, 1]$) en samen in een figuur weer te geven.

3. Schrijf een efficiënte Matlab-functie voor het berekenen van de interpolerende veelterm van een functie f in n punten $\{x_k\}_{k=1}^n$ en het evalueren van deze veelterm in een stel punten t. Als basisfuncties $\psi_k(x)$ worden orthogonale veeltermen $\phi_k(x)$ gebruikt. Gebruik je functie `eval_recursion` uit het voorgaande puntje om deze veeltermen te evalueren.

   - `function y = interpolate(x, f, alpha, beta, lambda, t)`
     Deze functie krijgt als invoer een vector x met n interpolatiepunten en een vector f met de waarden van de functie f in deze punten. Verder worden ook weer de coëfficiënten van de drietermsrecursiebetrekking van de rij orthogonale veeltermen $\phi_k(x)$ gegeven als invoer. De functie berekent de waarden van de interpolerende veelterm in alle punten van de kolomvector t m.b.v. het *rekenschema van Smith* en geeft deze terug in de vector y.

4. Bereken de interpolerende veelterm van de functies $f_1(x) = \cos x$ en $f_2(x) = \frac{1}{1+6x^2}$ op het interval $[-1, 1]$. Gebruik als basisfuncties de orthogonale Chebyshev-veeltermen, $\psi_k(x) = T_k(x)$, en als interpolatiepunten achtereenvolgens n equidistant verdeelde punten op $[-1, 1]$ en de nulpunten van de Chebyshev-veelterm van graad n. Maak enkele grafieken van de interpolaties en van de interpolatiefout op het interval $[-1, 1]$. Maak voor elke familie van punten ook een grafiek van de maximale fout van de interpolatie in functie van de graad n. Daartoe mag je voor elke waarde van n de interpolaterende veelterm berekenen in een groot aantal punten t en het maximum van $|y(t) - f(t)|$ gebruiken als schatting voor de maximale fout. Bespreek bondig je resultaten.

5. Bereken voor elke familie van punten het conditiegetal van de matrix M als functie van n. Wat zie je? Wat betekent dit voor de nauwkeurigheid van de interpolerende veelterm?

2 Benaderen met trigonometrische veeltermen

Voor het benaderen van continue periodieke functies of gesloten krommen zijn klassieke veeltermen niet geschikt. We zullen hiervoor een andere functievoorstelling moeten aanwenden. In het tweede deel van dit practicum onderzoeken we daarom trigonometrische veeltermen.

2.1 Een andere interpretatie van de DFT-coëfficiënten

De discrete Fourier-transformatie wordt gebruikt om een discrete tijdsreeks $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ te ontbinden als een som van N basis-tijdsreeksen:

$$\{x_n\}_{n=0}^{N-1} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \{e^{-2\pi ikn/N}\}_{n=0}^{N-1} \,. \tag{2}$$

Wanneer de tijdsreeks uit reële getallen bestaat, met N even, dan geldt voor de coëfficiënten:

$$X_0 \in \mathbb{R}\ ;\ \ X_{N-k} = \overline{X_k}\ (k = 1, \ldots, N/2-1)\ ;\ \ X_{N/2} \in \mathbb{R}\,.$$

Het rechterlid van (2) kan in dat geval herschreven worden als

$$\frac{1}{N}\left(X_0\,\{1\}_{n=0}^{N-1} + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(\Re X_k\{\cos(\tfrac{2\pi nk}{N})\}_{n=0}^{N-1} + \Im X_k\{\sin(\tfrac{2\pi nk}{N})\}_{n=0}^{N-1}\right) + X_{N/2}\,\{\cos(\pi n)\}_{n=0}^{N-1}\right)$$

We veronderstellen nu dat de x_n-waarden afkomstig zijn van een opgemeten periodieke continue functie $x(t)$, bijvoorbeeld volgens $x_n = x(t_n)$, met $t_n = n/N$. De periode van $x(t)$ is gelijk aan 1. We kunnen dan schrijven

$$x(t_n) = \frac{1}{N}\left(X_0 + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(\Re X_k\cos(2\pi kt_n) + \Im X_k\sin(2\pi kt_n)\right) + X_{N/2}\,\cos(\pi Nt_n)\right)\,.$$

Het rechterlid kan gezien worden als een waarde van een continue functie $y(t)$, met

$$y(t) = \frac{1}{N}\left(X_0 + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(\Re X_k\cos(2\pi kt) + \Im X_k\sin(2\pi kt)\right) + X_{N/2}\,\cos(\pi Nt)\right)\,. \tag{3}$$

Een functie van deze vorm noemt men een *trigonometrische veelterm.*
Voor $y(t)$ geldt dat $y(t_n) = x(t_n)$. Het is dus een interpolerende periodieke benadering. De rij $\{y(t_n)\}_{n=0}^{N-1}$ wordt een kleinste-kwadratenbenadering voor $\{x(t_n)\}_{n=0}^{N-1}$ wanneer sommige van de coëfficiënten X_k in (2) aan nul worden gelijkgesteld. Opdat de functie nog steeds reëel zou zijn moet dan natuurlijk ook de corresponderende coëfficiënt X_{N-k} nul worden gesteld. De resulterende functie $y(t)$ is dan een benadering van de interpolerende trigonometrische veelterm.

2.2 Efficiënte evaluatie van een trigonometrische veelterm

De coëfficiënten X_k kunnen zeer efficiënt gevonden worden door toepassing van het FFT-algoritme op de tijdsreeks $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$. Omgekeerd, kan $y(t)$ zeer efficiënt geëvalueerd worden in de N punten t_n door toepassing van het inverse FFT-algoritme op $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$.
We wensen nu echter $y(t)$ te evalueren in een groter aantal punten, bijvoorbeeld om de benadering grafisch voor te stellen. Zij het aantal evaluatiepunten gelijk aan M, dan zoeken we de waarden $y(t_m)$ met $t_m = m/M$, voor $m = 0, ..., M-1$. Deze waarden worden gegeven door

$$y(t_m) = \frac{1}{N}\left(X_0 + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}\left(\Re X_k\cos(2\pi kt_m) + \Im X_k\sin(2\pi kt_m)\right) + X_{N/2}\,\cos(\pi Nt_m)\right)\,. \tag{4}$$

In deze vorm kunnen we het inverse FFT-algoritme echter niet gebruiken. Daartoe dienen we (4) te herschrijven als

$$y(t_m) = \frac{1}{M}\left(Y_0 + 2\sum_{k=1}^{M/2-1}\left(\Re Y_k \cos(2\pi k t_m) + \Im Y_k \sin(2\pi k t_m)\right) + Y_{M/2}\cos(\pi M t_m)\right).$$

Veronderstellen we $M > N$, met M even, dan vindt men voor de coëfficiënten Y_k dat

$$\begin{cases} Y_k = \frac{M}{N} X_k & k = 0, ..., N/2-1 \\ Y_k = \frac{M}{N} X_k/2 & k = N/2 \\ Y_k = 0 & k = N/2+1, ..., M/2 \end{cases}$$

De resterende Y_k, $k = M/2+1, ..., M-1$, worden gevonden steunend op de symmetrie $Y_k = \overline{Y}_{M-k}$. De abscissen $\{t_n\}$ zijn een deelverzameling van $\{t_m\}$ als M een geheel veelvoud van N is.
De rij van M functiewaarden $\{y_m\}_{m=0}^{M-1}$ vinden we dan op een zeer efficiënte manier door toepassing van het inverse FFT-algoritme op de rij van M coëfficiënten $\{Y_k\}_{k=0}^{M-1}$.

2.3 Opgaven

1. Schrijf een functie voor het evalueren van periodieke interpolerende en benaderende trigonometrische veeltermen. Voor de Fouriertransformaties mag je de in Matlab ingebouwde functies gebruiken.

   `function y = periotrig(x,K,M)`
   Deze functie krijgt als invoer een $(N \times d)$-matrix `x` met d sequenties van N getallen $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$, waarbij N even is. Met `K` wordt de indexwaarde K opgegeven van de laatste X_k-coëfficiënt in (3) die behouden blijft: als $K = N/2$ wordt geen enkele coëfficiënt op nul gezet. De parameter `M` geeft het aantal punten M waarin de trigonometrische veeltermen moeten worden geëvalueerd; M is even en groter dan of gelijk aan N. Als uitvoer geeft de functie de $(M \times d)$-matrix `y` terug met in elke kolom de waarden $\{y(t_m)\}_{m=0}^{M-1}$ voor de overeenkomstige kolom van `x`.

2. Illustreer en bespreek de invloed van de parameter K op de benadering van een periodieke functie.

3. Gebruik de code vervolgens om een gesloten kromme te benaderen. Teken een kromme met de functie `click` (zie oefenzitting 5). Dit levert twee sequenties van waarden op, de x- en de y-coördinaten van de ingegeven punten, die als invoer kunnen dienen voor de functie `periotrig`. Construeer op deze manier een benadering voor het teken ∞.

3 Praktiche schikkingen

- Het practicum wordt gemaakt in groepjes van twee.
- Het verslag kan je afgeven op mijn bureel of doorsturen via mail. De deadline is **vrijdag 23 mei 2014**.
- Voeg bij je verslag ook de code (de m-files) van de gevraagde functies (`poly_zeros`, `eval_recursion`, `interpolate` en `periotrig`).
- Bespreek je resultaten bondig en illustreer met verduidelijkende figuren. Probeer de lengte rond de 10 pagina's te houden.

Succes!

Ben Jeuris (200A 01.160)
`ben.jeuris@cs.kuleuven.be`