

Compute the LU factorization

Anoine Recha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

Row operations

Initial Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 1R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - (-3)R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - (0)R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 / 3 \rightarrow R_2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$$P \times A = LU \quad \text{Verify}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 12 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-9) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 0 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 12 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-9) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 12 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{bmatrix} = LU$$