La pequeña ovejería

- Don Juan tiene 600 ovejas
- Cada oveja tiene asignado un número único
- El rebaño está dividido en 4 lotes de 150 ovejas c/u
- Para cada lote, sus números están registrados en una hoja
- Los números de un lote están en cualquier orden


TAIWAN
4160 T
4022 T
3117 m/T
3058 T
5193 S
2103 R
288 B
s/n T
3150 T
4254 m
5008 m/S
246 m
3094 T
2055 m
229 T
3003 T
6004 T
2140 m
263 m
2209 T
296 m
3091 m
2098 T
2125 B
4195 T
6106 m
6191 T
2006 m
267 m/n
2084 m/T
3031 T
2039 T
6063 m/n
s/n m/T
248 m
283 m
3137 m
2078 T
252 m
4083 m
2009 m
3014 T
2036 T
2241 m
6247 T
s/n T
2117 m
4177 m/T
268 m
3195 T
2199 M
6175 T
2181 T
293 T
274 T
5088 M
2063 T
4120 M
2021 T
269 m/n
625 T
251 R
6025 S
3108 T
s/n M
3197 M
3308 T
4163 R
6155 T
4058 M
2167 T
3032 T
6181 M/N
253 M
4114 T
6169 PARDA
6121 PARDA
4021 T
6222 T
2109 m
3180 m
6197 parda
237 B
4206 T
6055 p
s/n p
6154 p/n
3029 m/T

La pequeña ovejería

Don Juan suele encontrar algunas ovejas separadas de sus lotes

¿Cómo puede saber fácilmente a qué lote pertenece una oveja?

Secuencias ordenadas

Una secuencia de números $x_1, \cdots, x_n$ se dice **ordenada** (no decrecientemente) si cumple que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$

¿Qué es entonces **ordenar** una secuencia de números?

El algoritmo de ordenación de Don Juan

1. En la hoja original, encontrar el número más pequeño no tachado
2. Tacharlo
3. Escribirlo al final (en el primer espacio disponible) de la hoja nueva
4. Si quedan números sin tachar en la hoja original, volver al paso 1.

¿Es correcto el algoritmo de Don Juan?

Ahora … a trabajar ustedes

Demuestra que el algoritmo de Don Juan **es correcto**:

- termina en una cantidad finita de pasos
- cumple su propósito, es decir, **ordena** los datos

Termina en una cantidad finita de pasos

- La cantidad de números a ordenar es finita, digamos *n*

- En cada vuelta, tachamos un número en la hoja original y lo escribimos en la hoja nueva

- Después de *n* vueltas, todos los números en la hoja original están tachados y, debido al paso 4, el algoritmo termina

Cumple su propósito: ordena los datos

Demostración **por inducción**:

- **Caso base**. El primer número tachado en la hoja original y escrito en la hoja nueva es el menor de todos (criterio de selección) y está ordenado (único número en la hoja nueva): ✓

- **Hipótesis inductiva**. Los *k* primeros números tachados en la hoja original y escritos en la hoja nueva son los *k* números más chicos y están ordenados

- **Por demostrar** (usando la hipótesis inductiva). **…**

Por demostrar, usando la hipótesis inductiva

Los k+1 primeros números tachados en la hoja original y escritos en la hoja nueva son los k+1 números más chicos y están ordenados:

- los primeros k números en la hoja nueva son los k más chicos (por hipótesis inductiva) y están tachados en la hoja original (por paso 2); el siguiente número que pasa a la hoja nueva es el menor de los no tachados (por criterio de selección) → el k+1 más chico

- los primeros k números en la hoja nueva están ordenados (por hipótesis inductiva); el siguiente número que se escribe al final de la hoja nueva no es menor que ninguno de los k números que ya están en la hoja nueva (por criterio de selección) → queda ordenado

El algoritmo *selection sort*

Para la secuencia inicial de datos, A:

1. Definir una secuencia ordenada, B, inicialmente vacía
2. Buscar el menor dato x en A
3. Sacar x de A e insertarlo al final de B
4. Si quedan elementos en A, volver a 2.

¿Cuál es la complejidad de *selection sort*?

Raciocinio para determinar la complejidad de *selection sort*

Buscar el menor dato en A significa revisar A entero: $O(n)$

Este proceso se hace una vez por cada dato: n veces

La complejidad es entonces $n \cdot O(n) = O(n^2)$

Otra forma de calcular la complejidad de *selection sort*

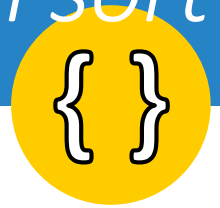
También se puede hacer de manera explícita:

Buscar el mínimo cuesta $n-1$, y el siguiente $n-2$, y así:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$T(n) \in O(n^2)$$

Complejidad de memoria de *selection sort*



Selection Sort se puede hacer en un solo **arreglo**, ya que $|A| + |B| = n$

Eso significa que no necesita memoria adicional (excepto …)

Los algoritmos que hacen esto se conocen como *in place*

Don Juan tiene ahora otro problema

Don Juan quiere cambiar 5 ovejas del lote A al lote B

Necesita actualizar el cambio en ambas hojas

¿Cómo lo hace para no tener que volver a ordenar todo?

Inserción en una lista ordenada

Insertar pocos elementos ordenadamente es … ¿barato?

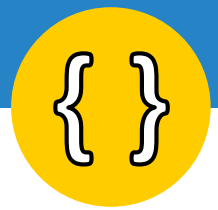
¿Cómo podemos usar este hecho para ordenar?

El algoritmo *insertion sort*

Para la secuencia inicial de datos, A:

1. Definir una secuencia ordenada, B, inicialmente vacía
2. Tomar el primer dato x de A y sacarlo de A
3. Insertar x en B de manera que B quede ordenado
4. Si quedan elementos en A, volver a 2.

¿Cómo se hace una inserción?



Depende de la estructura de datos usada para almacenar la lista

Se suele usar **arreglos**, pero también se puede usar **listas ligadas**

En cualquier caso, el algoritmo no necesita memoria adicional

Los dos pasos de la inserción

Primero, hay que buscar donde corresponde insertar el elemento

Luego, hay que llevar a cabo la inserción

¿Cuál es la complejidad usando **arreglos**?

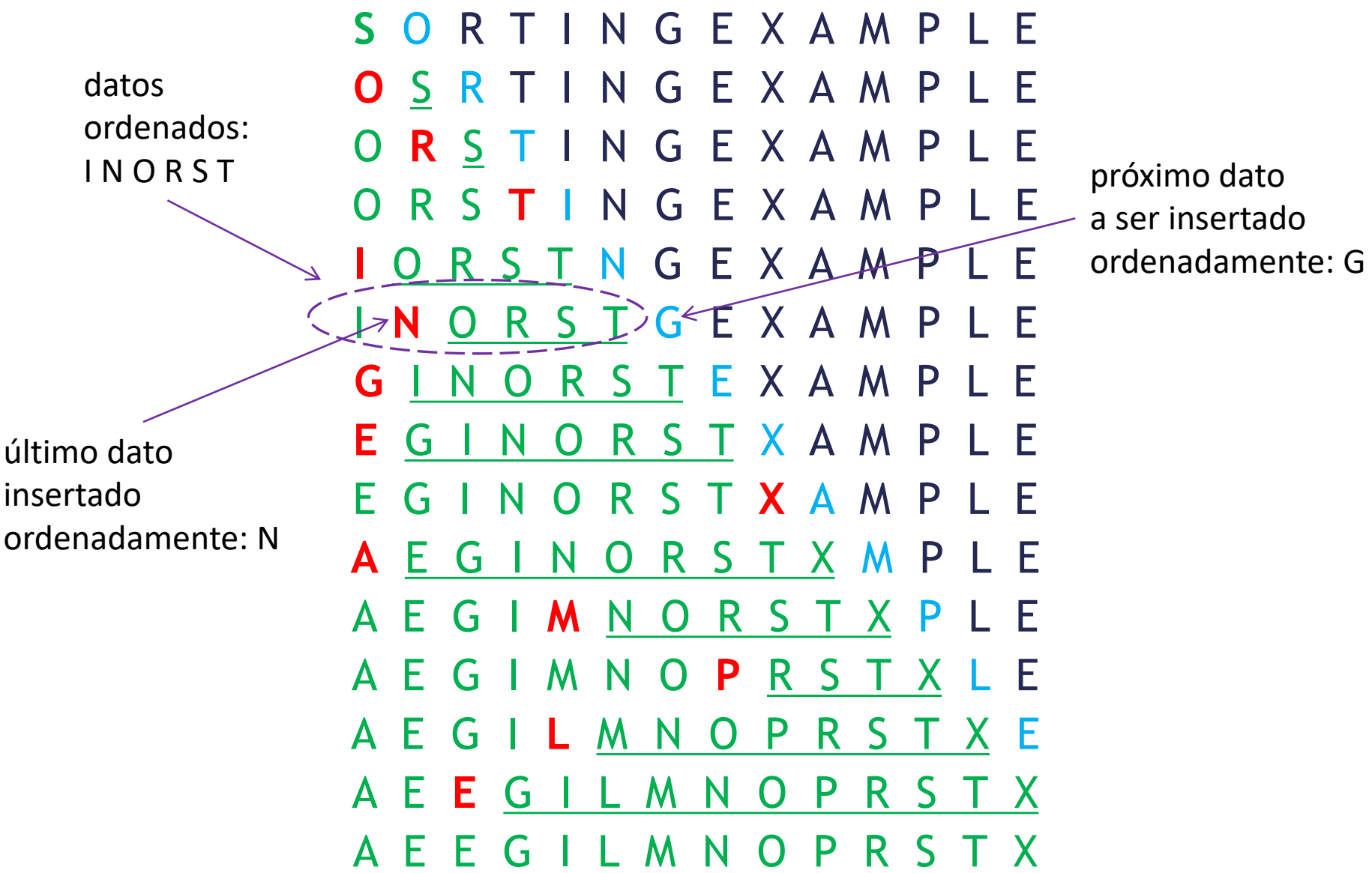
¿Y con **listas ligadas**?

Insertar en un arreglo

El primer paso podemos hacerlo en $O(\log n)$ con búsqueda binaria

Para insertar hay que desplazar todos los elementos, lo que es $O(n)$

Por lo tanto, en **arreglos**, **insertar** es $O(n)$


datos ordenados: I N O R S T
próximo dato a ser insertado ordenadamente: G
último dato insertado ordenadamente: N
S O R T I N G E X A M P L E
O S R T I N G E X A M P L E
O R S T I N G E X A M P L E
O R S T I N G E X A M P L E
I O R S T N G E X A M P L E
I N O R S T G E X A M P L E
G I N O R S T E X A M P L E
E G I N O R S T X A M P L E
E G I N O R S T X A M P L E
A E G I N O R S T X M P L E
A E G I M N O R S T X P L E
A E G I M N O P R S T X L E
A E G I L M N O P R S T X E
A E E G I L M N O P R S T X
A E E G I L M N O P R S T X

Insertar en una lista (doblemente) ligada

Para el primer paso es necesario revisar toda la lista: $O(n)$

Teniendo el nodo donde corresponde insertar, hacerlo es $O(1)$

Por lo tanto, en **listas ligadas**, **insertar** es $O(n)$

Complejidad de *insertion sort*

Es necesario realizar n inserciones

Cada una cuesta $O(n)$, independiente de la estructura

Por lo que la complejidad es $n \cdot O(n) = O(n^2)$

El algoritmo *insertion sort*

Para la secuencia inicial de datos, A:

1. Definir una secuencia ordenada, B, inicialmente vacía
2. Tomar el primer dato x de A y sacarlo de A
3. Insertar x en B de manera que B quede ordenado
4. Si quedan elementos en A, volver a 2.

Demostración de finitud

En cada paso se saca un elemento de A y se inserta en B

Cuando no quedan elementos en A, el algoritmo termina

La inserción requiere como máximo recorrer todo B

Como A y B son finitos, el algoritmo termina en tiempo finito

Demostración, por inducción, de que cumple con su propósito

PD: Al terminar la n-ésima iteración, B se encuentra ordenada

Caso Base: Después de la primera iteración, B tiene un solo dato

$\rightarrow B$ está ordenada

Hipótesis Inductiva: Después de la i-ésima iteración**,** B está ordenada

Demostraremos que después de la iteración $i + 1$, B está ordenada

Extraemos el primer elemento de A, y lo insertamos ordenadamente en B. Termina el paso $i + 1$ y B tiene $i + 1$ elementos ordenados

En particular, al terminar el algoritmo después del paso n, B está ordenada.

Vimos que *insertion sort* es $O(n^2)$

Pero, ¿qué tiempo toma si los datos vienen ordenados?

A E E G I L M N O P R S T X

$\mathit{insertionSort}(A, n)$:

$\mathit{for}\ i = 1\,..\,n-1$:

$j = i$

$\mathit{while}\ (j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$:

Intercambiar $A[j]$ con $A[j-1]$

$j = j - 1$

Complejidad de *insertion sort*

Parecería que la complejidad de *insertion sort* depende de qué tan ordenados vienen los datos

¿Cómo podemos medir “qué tan ordenados vienen los datos”?

Inversiones

Sea A un arreglo con n números distintos de 1 a n

Si $i < j$ pero $A[i] > A[j]$, entonces se dice que el par ordenado (i, j) es una **inversión**

El número de inversiones es una métrica de **desorden**

Inversiones: ejemplo

P.ej., el arreglo

$$A = [\ 34\ \ 8\ \ 64\ \ 51\ \ 32\ \ 21\ ]$$

tiene 9 inversiones:

(34, 8), (34, 32), (34, 21), (64, 51), (64, 32), (64, 21),

(51, 32), (51, 21), (32, 21)

¿Cómo depende *insertion sort* del número de inversiones?

Tenemos un arreglo A de largo n que tiene k **inversiones**

¿Cuánto tiempo toma *insertion sort* en ordenar A?

¿Cuántas inversiones se arreglan con un intercambio?

$\mathit{insertionSort}(A, n)$:

$\mathit{for}\ i = 1\,..\,n-1$:

$j = i$

$\mathit{while}\ (j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$:

Intercambiar $A[j]$ con $A[j-1]$

$j = j - 1$

Antes de cada intercambio se hace una comparación

… y esos datos se intercambian sólo si el par de índices $(j-1, j)$ es una inversión

Por lo tanto, **cada intercambio de elementos adyacentes en el arreglo deshace exactamente una inversión**

Además, cada elemento se compara al menos una vez

Complejidad de *insertion sort*

La complejidad es entonces $O(n + k)$

cada dato se compara al menos una vez

número de inversiones

¿Qué valor tiene k en el mejor caso? ¿Y el en peor?

¿Qué hay del *caso promedio*?

El caso promedio

¿Cuál es el número promedio de inversiones en un arreglo con *n* elementos?

Suponemos que no hay elementos repetidos

… y que todas las permutaciones de los *n* elementos son igualmente probables

(podemos suponer que los *n* elementos son simplemente los *n* primeros números naturales: 1, 2, …, *n*)

Para cualquier permutación L, consideremos la permutación inversa Lr

Tomemos cualquier par de elementos (x, y) con $y \neq x$

En exactamente una de L y Lr el par ordenado (de los índices de x y y) representa una inversión

El número total de estos pares en L más Lr es $n(n-1)/2$

… por lo que una permutación promedio tiene la mitad de esta cantidad: $n(n-1)/4$

Complejidad de *insertion sort*

La cantidad de inversiones promedio es entonces $O(n^2)$

Eso significa que *insertion sort* es $O(n^2)$ en el caso promedio

Si un algoritmo sólo resuelve una inversión por intercambio, no puede ordenar más rápido que $O(n^2)$ en promedio y por lo tanto en el peor caso