关于变态贝塞尔函数$I_n(X)$和$K_n(X)$的计算及FORTRAN程序

成都电讯工程学院　　刘跃武

摘要：本文讨论整数阶变态贝塞尔函数$I_n(x)$和$K_n(x)$的计算方法，给出应用于微型机的FORTRAN程序。在不超出微型机浮点数溢出的范围，所得结果有10位有效数字以上精确度。

一、前　言

整数阶变态贝塞尔函数$I_n(x)$和$K_n(x)$是在应用物理中广泛使用的一类特殊函数。国际上多年来不断讨论它们的计算方法[1]-[5]，然而国内却很少见到这方面的文献和计算机程序。本文采用逆推和顺推相结合方式计算$I_n(x)$和$K_n(x)$，具有程序简单，运算速度快的优点。当x较小时，由逆推法计算$I_n(x)$，由此算出$K_0(x)$，再由Wronskion关系顺推得到$K_n(x)$ $(n=1，2\cdots\cdots，N)$。当x较大时，用$K_n(x)$的一个近似公式计算$K_0(x)$和$K_1(x)$，顺推得到$K_n(x)(n=2，3\cdots\cdots，N\cdots\cdots N')$。当$N'$是够大时，可认为$I_{N'}(x)\approx 0$，且由Wronskion关系求得$I_{N'-1}(x)$，最后由逆推得到$I_n(x)$ $(n=N'-2，N'-3，\cdots\cdots，N，\cdots\cdots，1，0)$。在$0.1\leqslant x\leqslant 80$范围，计算结果有10位有效数字精度。

二、计算方法

当n为正整数，x为实变数时，$I_n(x)$和$K_n(x)$满足以下递推关系：

$$f_{n+1}(x)+\frac{2n}{x}f_n(x)=f_{n-1}(x)\tag{1}$$

式中f_n代表I_n或$e^{n i \pi}K_n$。I_n和K_n的性质，决定了I_n采用逆递推算法，K_n采用顺递推算法是稳定的[1]。

式（1）的通解为[8]

$$i_n(x)=a\,I_n(x)+b\,e^{n\pi i}K_n(x)\tag{2}$$

式中a和b是任意常数。

设N为所求函数的阶数，M为远大于N或X的整数。只要M取得足够大，可认为

$$i_M(x)\approx 0$$

$$i_{M-1}(x)=\alpha \tag{3}$$

其中α为一任意小的正数。由此，式（2）成为

$$\frac{b}{a}=-\frac{I_M(x)}{e^{M\pi i}K_M(x)} \tag{4}$$

由$I_n(X)$和$K_n(X)$的级数展开式知，$n \gg \dfrac{X}{2}$时，有

$$\begin{aligned} I_n(x) &\to \left(\frac{2n}{x}\right)^{-n} \\ K_n(x) &\to \left(\frac{2n}{x}\right)^{n} \end{aligned} \qquad n \gg \frac{x}{2} \tag{5}$$

式（4）和（5）代入式（2），得

$$i_n(x)=aI_n(x)\left\{1-(-1)^{n-M}\frac{I_M(x)\,K_n(x)}{I_n(x)\,K_M(x)}\right\}\approx a\,I_n(x)$$

即 $$I_n(x)=i_n(x)/a \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N\cdots\cdots,\ M \tag{6}$$

由$I_n(X)$的加法定理

$$I_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k I_{2k}(x)=1 \tag{7}$$

求得式（6）中的常数

$$a=i_0(x)+2\sum_{k=1}^{[M/2]}(-1)^k i_{2k}(x) \tag{8}$$

式中$[M/2]$表示不超过$M/2$的最大整数。

由$Y_0(X)$与$J_n(X)$的关系[6]，可以得到

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\left[ln\left(\frac{x}{2}\right)+v\right]I_0(x)+2\sum_{k=1}^{[M/2]}\frac{1}{k}I_{2k}(x) \\ &= \left\{-\left[ln\left(\frac{x}{2}\right)+v\right]i_0(x)+2\sum_{k=1}^{[M/2]}\frac{1}{k}i_{2k}(x)\right\}/a \end{aligned} \tag{9}$$

其中v为欧拉常数，a由式（8）决定。

$I_n(x)$和$K_0(x)$求得后，由Wronskion关系[7]

$$I_n(x)K_{n+1}(x)+I_{n+1}(x)K_n(x)=1/x \tag{10}$$

顺推得到K_1，$K_2\cdots\cdots$，K_N。

以上推导看出，确定M的取值是关键问题，而M通常是x和N的函数。文献〔5〕虽然给出确定M的方法，但相当复杂。本文用试探法得到以下经验公式

$$M(x)=2.5x+22 \qquad 0.1\leqslant x<10 \tag{11}$$

并保证在$0.1\leqslant x<10$范围，I_n和K_n有10位有效数字以上精确度。

原则上讲，以上方法适合于x为任何数值的情形。但是当x较小时，随着阶数n的增加，$I_n(x)$急剧减小，很可能超出计算机浮点数下限，为此本文$x\nless 0.1$。由于$M(x)$和x凭经验取值，当x增大时，不易保证$K_n(x)$的精度，且$I_n(x)$和$K_n(x)$也可能超过计算机浮点数范围。为提高计算精度和扩大x的范围，当$x\geqslant 10$时，利用$K_n(x)$的渐近发散级数表达式[9]

$$K_n(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)\cdots\cdots(4n^2-(2k-1)^2)}{k!(8x)^k}\right\} \tag{12}$$

计算K_0和K_1。由式（12）中级数的后项与前项之比

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{4n^2}{(k+1)8x}-\frac{(2k+1)^2}{(k+1)8x}\right|<\left|\frac{4n^2}{(k+1)8x}-\frac{4k+1}{8x}\right|$$

可知，$k\leqslant[2x]$的各项使该组数递减。

$n=0$，1时，式（12）成为

$$K_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left\{1+\sum_{k=1}^{M}\frac{(-1)^k1^2\cdot3^2\cdots\cdots(2k-1)^2}{k!(8x)^k}+R_M^{(0)}\right\} \tag{13}$$

$$K_1(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left\{1+\sum_{k=1}^{M}\frac{(4-1^2)(4-3^2)\cdots\cdots(4-(2k-1)^2)}{k!(8x)^k}+R_M^{(1)}\right\} \tag{14}$$

当$M\geqslant n-\frac{3}{2}$时，有$|R_M^{(i)}|<|a_M^{(i)}|$（$i=0$，1）[9]。只要$|a_M^{(i)}/a_0^{(i)}|<10^{-9}$（$i=0$，1），取式（13）和（14）中前M项之和（$M\leqslant[2x]$），可使$K_0$和$K_1$的相对误差小于$10^{-9}$。当$x=[x]$满足

$$e^{-[2x]}/\sqrt{\pi[x]}<10^{-9} \tag{15}$$

时，便能达到以上要求[1]。

将算出的K_0和K_1代入式（11），顺推得K_2，K_3……，K_N，……$K_{N'-1}$，$K_{N'}$，这里N为要计算的阶数，N'为满足式（15）精度时使$I_{N'}(x)\approx 0$的阶数。这样做，还能保证递推过程的相对误差小于10^{-9}[1]。将$I_{N'}(x)\approx 0$代入式（10），得

$$I_{N'-1}(x)=1/(xK_{N'}(x)) \tag{16}$$

再由式（1），逆推得$I_{N'-2}$，$I_{N'-3}$，……I_N，……I_1，I_0。在$10\leqslant x\leqslant 80$范围，本程序使$I_n$和$K_n$有10位有效数字以上精度。

应该指出，x的范围主要受计算机浮点数范围的限制。本文的程序在PDP-11/24和VAX-11/780机上均得到良好的结果。

三、FORTRAN程序

哑元说明：

X—双精度实变量，输入参数，自变量（0.1≤x≤80）。

N—整变量，输入参数，变态贝塞尔函数阶数。

BSI—双精度实变量，输出参数，表示$I_N(x)$。

BSK—双精度实变量，输出参数，表示$K_N(x)$。

```
      THIS IS THE SUBROUTINE OF MODIFIED BESSEL FUNCTIONS
      SUBROUTINE BIK(X,N,BSI,BSK)
      DOUBLE PRECISION X,Y1,Y2,Y3,R,RM,SGM,SGN,BM,BI,BK,BSI,BSK,
      SKO,SK1
      DIMENSION BI(0:300),BK(0:300)
      IF(X.GE.10,DO) GOTO 12
      M=2,5D0*×+22,D0
      GOTO 15
12    CALL ABF(X,SK0,SK1)
      BK(0)=SK0
      BK(1)=SK1
      DO 13 J1=1,300
      BK(J1+1)=2,D0*DFLDAT(J1)*BK(J1)/X+BK(J1-1)
      IF(X,GE,18,D0) GOTO 14
      IF(BK(N)/BK(J1+1).LE.1.D-9) GOTO 8
      GOTO 13
14    IF(BK(N)/BK(J1+1).LE.1.D-11) GOTO 8
13    CONTINUE
8     N2=J1+1
      BI(N2)=0,D0
      BI(N2-1)=1,D0/(×*BK(N2))
      DO 9 J2=J1-N2,J1-2
9     BI(J1-J2-2)=2,D0*DFLOAT(J1-J2-1)*BI (J1-J2-1)/× +BI(J1-J2)
      GOTO 30
15    SGM=0,D0
      SGN=0,D0
      DO 10 I=0,300
```

```
10   BI(I)=0,D0
     M1=M/2
     IF(M-2*M1) 16,17,16
16   K=1
     GOTO 18
17   K=0
18   Y1=0,D0
     Y2=1,D-12
19   RM=DFLOAT(M)
     Y3=2,DO*RM*Y2/X+Y1
     IF(M,LT,250) BI(M)=Y2
     M=M-1
     Y1=Y2
     Y2=Y3
     IF(K) 20,21, 20
21   SGN=SON+Y1/BFLOAT(M1)
     SGM=SGM+(-1)**M1*Y1
     M1=M1-1
     K=1
     GOTO 22
20   K=0
22   IF(M,GT,O) GOTO 19
     BI(0)=Y2
     BM=2,D0*SGM+Y2
     R=, 5772156649015328D0
     BK(0)=-(DLOG(X/2,D0)+R)*Y2+2,D0*SGN
     BK(0)=BK(0)/BM
     DO 23 I=0,250
23   BI(I)=BI(I)/BM
     DO 27 I=1,N
27   BK(I)=(1,D0/X-BK(I-1)*BI(I))/BI(I-1)
30   BSI=BI(N)
     BSK=BK(N)
     RETURN
     END

     SUBROUTINE ABF(X,SK0,SK1)
     DOUBLE PRECISION Y(0:40),Z(0:140),SUM1,SUM2,SK0,SK1,X, E,PI
```

```
      J=2.D0*×
      PI=3.1415926535897932D0
      SUM1=0.D0
      SUM2=0.D0
      Z(0)=1.D0
      Y(0)=1.D0
      DO 100 N=1,36
      E=DFLOAT(N)
      Y(N)=Y(N-1)*(2.D0*E-1.D0)**2/(B.D0*E*×)*(-1.D0)
      Z(N)=Z(N-1)*(4.D0-(2.D0*E-1.D0)**2)/(8.D0*E*X)
      IF(X.LT.18,D0,AND.N,EQ.I) GOTO 150
100   CONTINUE
150   DO 200 M=1,N
      SUM1=SUM1+Y(M)
200   SUM2=SUM2+Z(M)
      SK0=DSQRT(P1/(2.D0*X))*DEXP(-1.D0*X)*(1.D0+SUM1)
      SK1=DSQRT(PI/(2.D0*X))*DEYP(-1.D0*X)*(1.D0+SUM2)
      RETURN
      END
```

参　考　文　献

[1] M. A. Gatto and J. B. Seery, "Numerical evaluation of the modified Bessel function I and K," Comp. 82. Maths. with Appls. Vol. 7, pp. 203~209, 1981.

[2] N. M. Temme, "On the numerical eualuation of the modified Bessel function of the third Kind", J. Comput. Phys., Vol. 19, pp.324~337, 1975.

[3] Y. L. Luke, "Miniaturized tables of Bessel functions", Math. Comp., Vol. 25, pp.323~330, 1971.

[4] Y. L. Luke, "Miniaturized tables of Bessel functions", Math. Comp., Vol. 25, pp.789~795, 1971.

[5] H. C. Thacher, Jr., "New backward recurrences for Bessel functions," Math. Comp., Vol. 33, pp 744~764, 1979.

[6] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, Combridze, 1952.

[7] M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Appl. Math. Ser. SS, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1964.

[8] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，P. 406，科学出版社，1979.

[9] N. N. Lebeden, Special functions and their application, Revised English

edition, translated and edited by R. A. Silverman, Printed in the U. S. A, 1965.

Numerical Computation and FORTRAN Program on the Modified Bessel Functions I and K

Liu Yaowu
(Chengdu Institute of Radio Engineering)

Abstract: This paper has given a computation method on the modified Bessel functions $I_n(x)$ and $K_n(x)$ for positive real x and integer n, and a FORTRAN program used in microcomputer. In the range of the floating point figure of the microcomputer, $I_n(x)$ and $K_n(x)$ have accuracy of 10 digits.

关键词：变态贝塞尔函数，微型机

初稿收到日期：1985年10月15日。
定稿收到日期：1986年1月30日。