СБЕР УНИВЕРСИТЕТ

Школа Data analyst

Занятие 11

Статистический анализ

Тема 1

Disclaimer

Все формулировки далее нестрогие, за более строгими определениями обращайтесь к специализированной литературе

План занятия

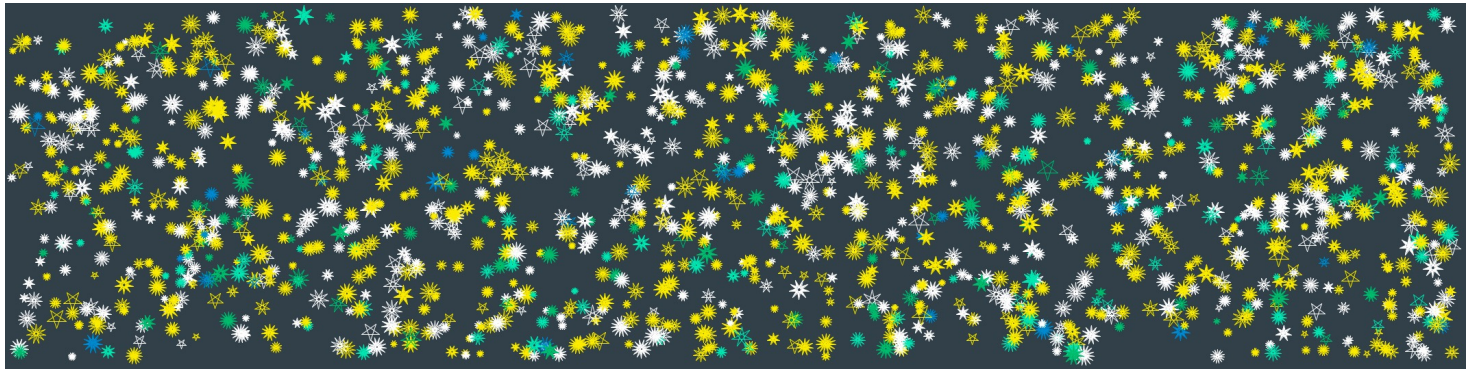
- Случайные величины и векторы
- Виды распределений

Вероятность и случайные величины

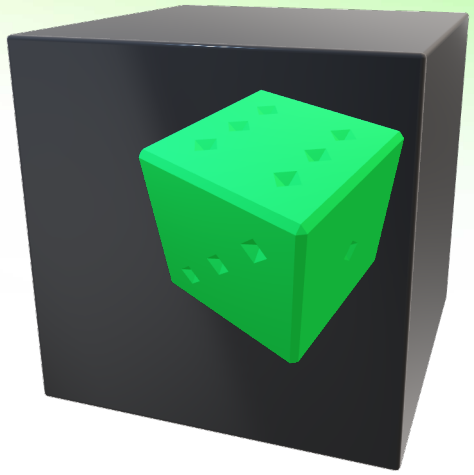
Случайность в теории вероятностей и статистике

Ввиду того, что окружающий мир сложен, очень часто невозможно описать то или иное явление простым детерминированным законом

Когда на результат эксперимента влияет множество случайных, трудно описываемых факторов на помощью приходит теория вероятностей и статистика



Пример случайной величины



Подбрасывание кубика.

Чёрный ящик, который по неизвестным законам возвращает нам числа от 1 до 6. Этот чёрный ящик – **случайная величина**. А числа, которые он нам возвращает (или генерируемые события) – **реализации случайной величины**. Набор реализаций случайной величины - **выборка**

Пример случайной величины

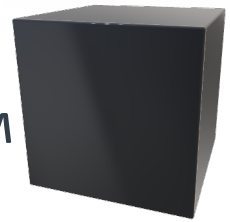
Подбрасывание кубика.

В каждое следующее подбрасывание мы не можем предугадать исход. Однако, если продолжать этот процесс достаточно долго, то мы можем обнаружить определенные закономерности. Например, что каждое число на кубике будет выпадать примерно одинаковое количество раз.

Если мы продолжим этот процесс до бесконечности, то каждому событию можно будет сопоставить его **вероятность*** – долю испытаний завершившихся соответствующей реализацией случайной величины.

*степень уверенности, возможность реализации, частота проявления…

Случайность в теории вероятностей и статистике



Теория вероятностей изучает модели случайных величин и свойства этих моделей, а также позволят выводы от какие события нас ожидают в будущем

Статистика и анализ данных пытаются по свойствам конечных выборок определить свойства случайной величины, чтобы понять, как эта случайная будет вести себя в будущем

Осуществить такой переход позволяет **закон больших чисел**: на большой выборке частота события хорошо приближает его вероятность.

Свойства вероятности

1) 0 <= P(A) <= 1, то есть вероятность любого события лежит на отрезке от нуля до единицы.

2) P(∅) = 0 — событие ∅, вероятность которого равна нулю, называется невозможным. **Но** если $\mathrm{P}(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$!!!

3) P($\bar{A}$) + P(A) = 1. Для события А всегда можно определить событие «не А», которое соответствует событию «А не произошло». Вероятности таких событий в сумме дают единицу.

Реализация в Python

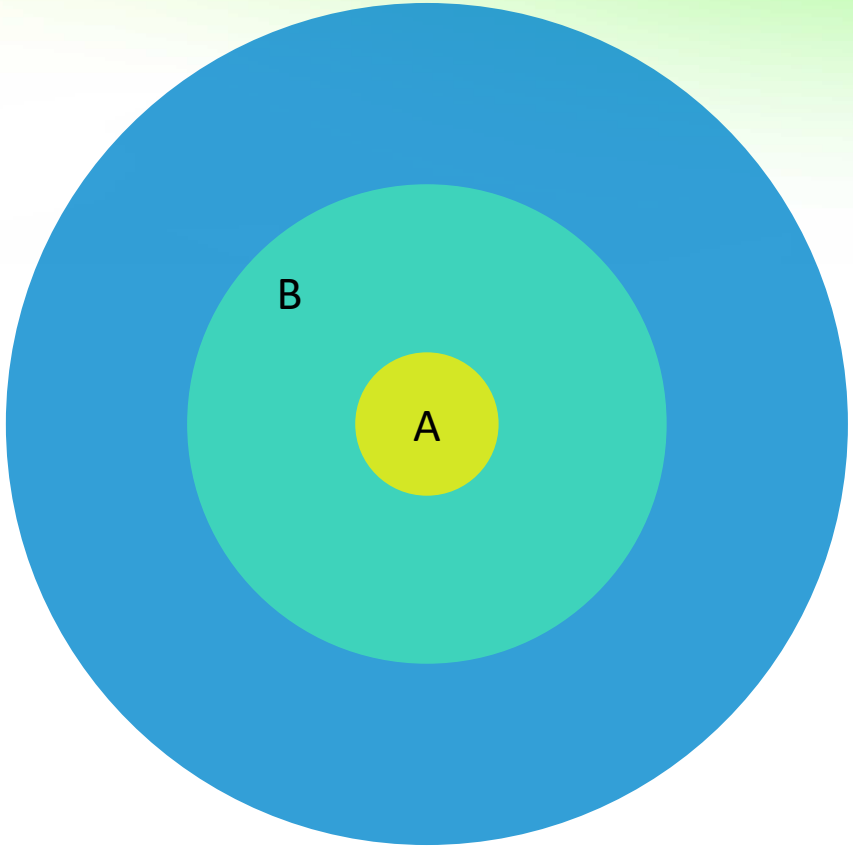
Random	Описание	Numpy
random.randrange (start, stop, step)	возвращает случайно выбранное число из последовательности	**numpy.random.randint** (*low*, *high=None*, *size=None*, *dtype=int*)
random.randint(A, B)	случайное целое число N, A ≤ N ≤ B	
random.choice(sequence)	случайный элемент непустой последовательности	**numpy.random.choice** (*a*, *size=None*, *replace=True*, *p=None*)
random.sample(population, k)	список длиной k из последовательности population	
random.shuffle(sequence, [rand])	перемешивает последовательность	**numpy.random.shuffle**(*x*)
random.random()	случайное число от 0 до 1	**numpy.random.sample**(*size=None*)

Colab? Colab!

Вложенность событий

$A \subseteq B$ – событие A вложено в событие B.

$P(A) \leq P(B)$



Сумма и произведение событий

AB – произведение.

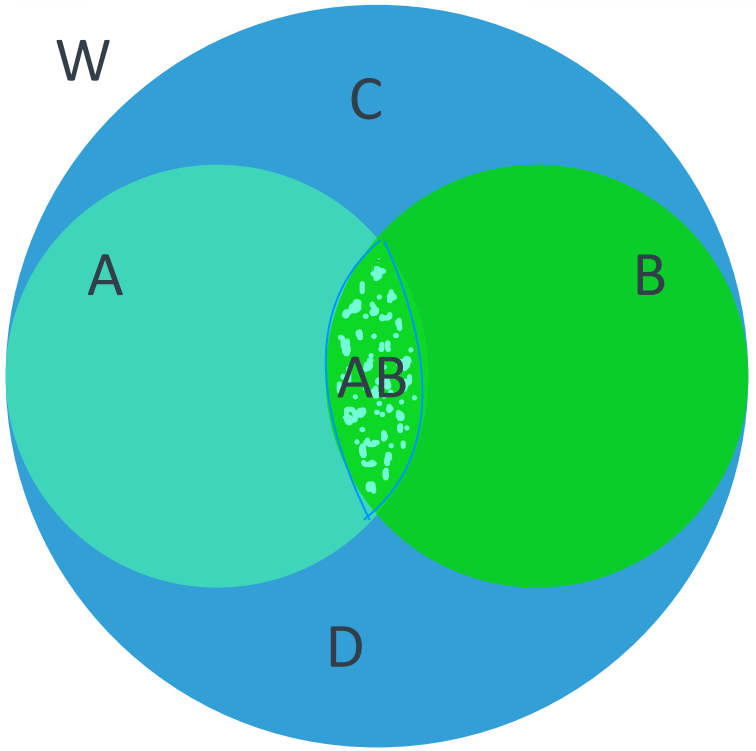
P(AB) = P(A) * P(B)

A + B – сумма.

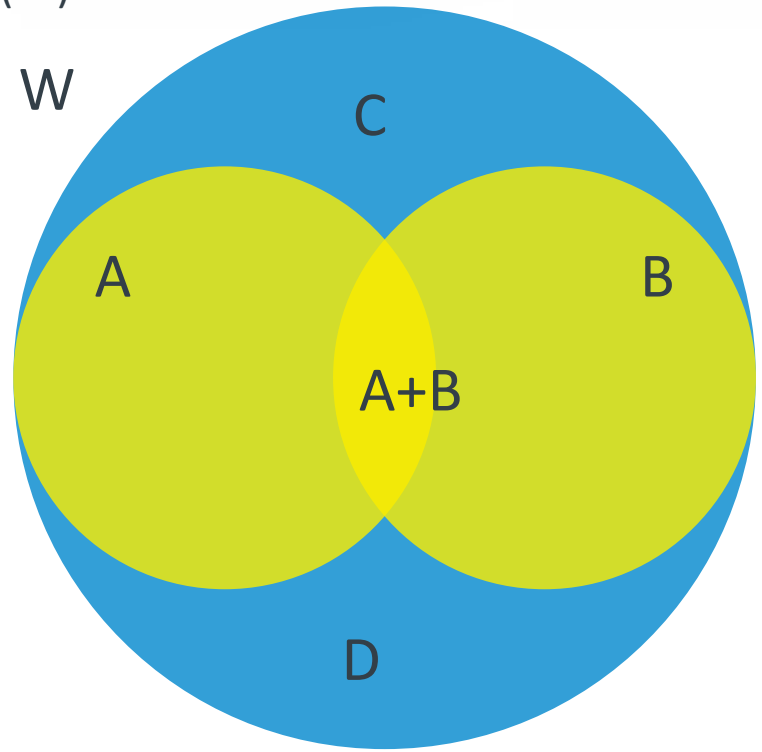
P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)

A	B
C	D

P(AB) = S(AB)/S(W)



P(A)+P(B)+P(C)+P(D) – P(AB) = 1



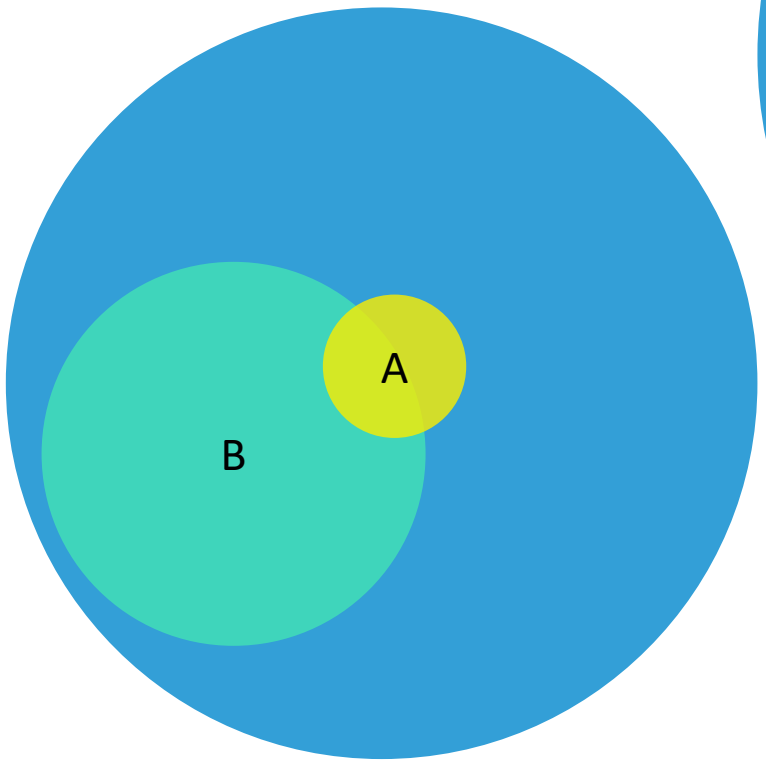
P(A) = S(A) / (S(A)+S(B)+S(C)+S(D)-S(AB))

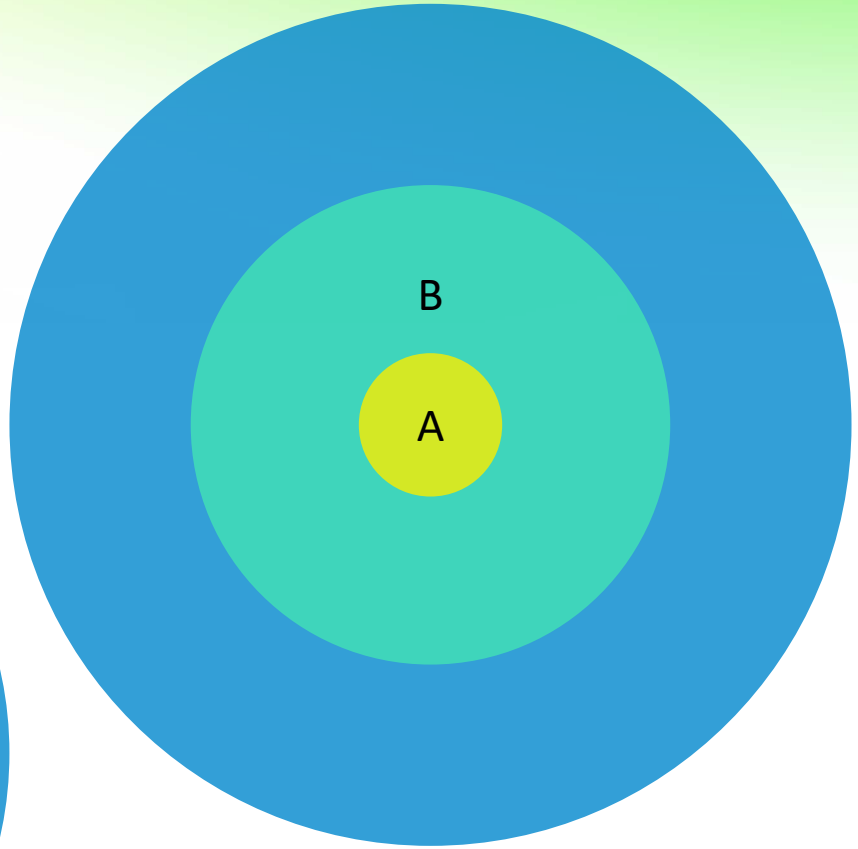
Дополнение

B \ A – происходит событие B,
но не происходит событие A

P(B \ A) = P(B) - P(AB)

Если A полностью содержится
в B, то P(B \ A) = P(B) - P(A)





Независимость

Если P(AB) = P(A)P(B)

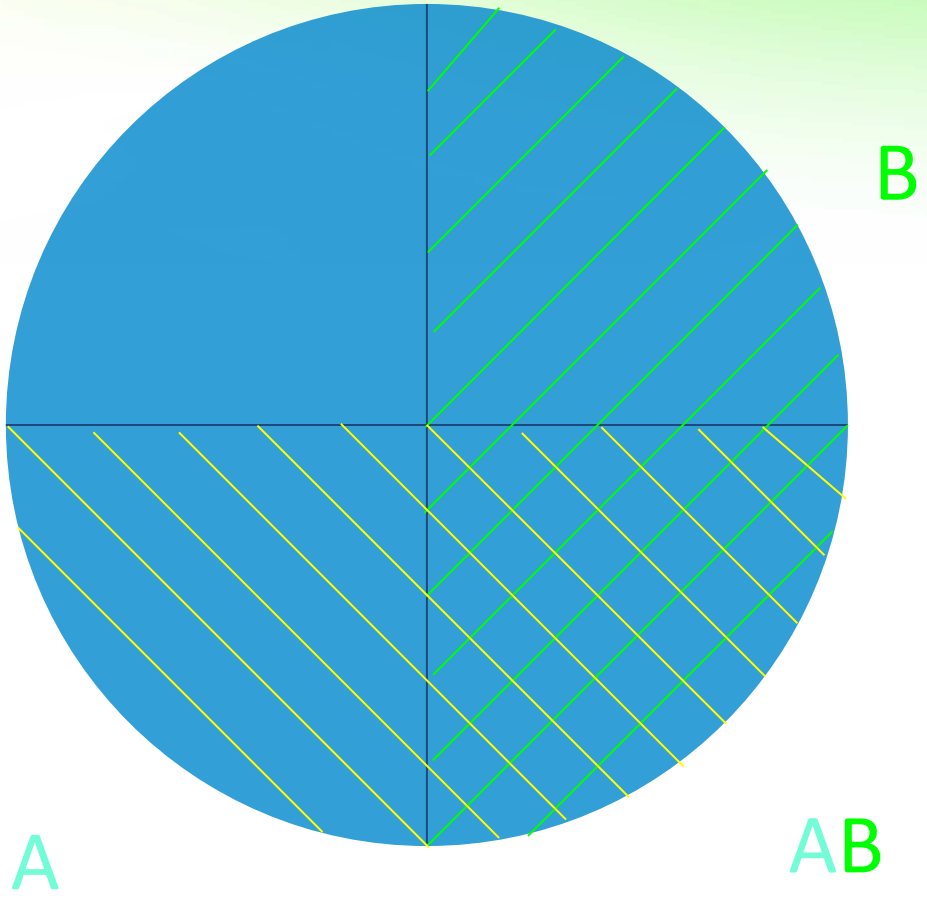
P(A) = 0.5

P(B) = 0.5

P(AB) = 0.25 = P(A)P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25 → P(AB) = P(A)P(B)
события независимы

P(A|B) = P(AB)/P(B) = P(A)*P(B)/P(B) = P(A)

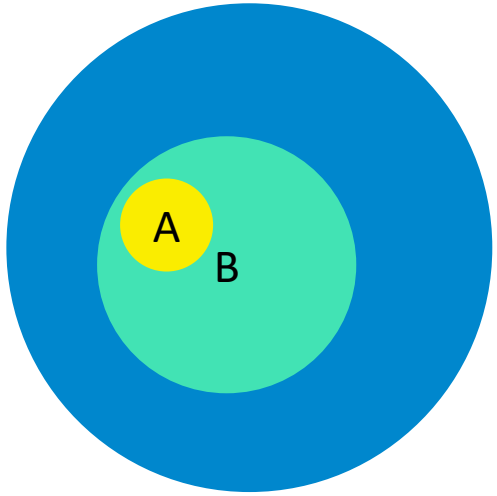
P(A|B) = P(AB)/P(B) = 0.25 / 0.5 = 0.5



Условная вероятность

Пусть событие A в примере с мишенью — это попадание в «десятку», событие B — попадание в любое место мишени. Если известно, что событие B произошло, то вероятность события A повышается.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$



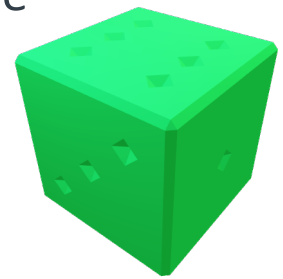
Пусть: P(A) = 0.05, P(B) = 0.4, P(AB) = P(A) = 0.05

Тогда: $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.4} = 0.125^{*}$

*По формуле ПВ: $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$

Формула полной вероятности

Если события B_1, B_2,..., B_n попарно несовместны ($B_iB_j = \emptyset$ — невозможное событие при любых $i \neq j$ их сумма является достоверным событием (B1+B2+ ⋯ + Bn = Ω), и A есть некое интересующее нас событие, то



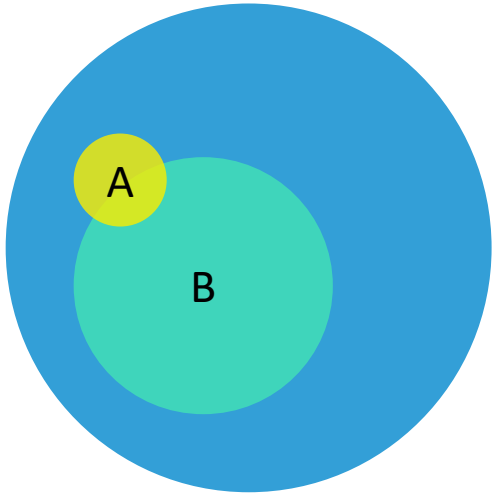
$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|Bk)$ - формула полной вероятности

Приведенные условия означают - из событий B_1, B_2,..., B_n может наступить ровно одно и какое-нибудь из них обязательно наступит.
Формула полной вероятности – модель, которая определяет вероятность если в каждом из n случаев (гипотез) известно, как вычислить вероятность любого события *A* (известны условные $P(A|Bk)$), то зная вероятности случаев (гипотез) B_k, можно вычислить вероятность события *A*.
Т.е. условные вероятности при различных гипотезах усредняются с весами, равными вероятностям этих гипотез.

Формула Байеса

Условные вероятности двух событий A и B связаны между собой формулой Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)*}{P(B)}$$



Пусть: $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.4$, $P(B|A) = 0.5$

Тогда: $P(A|B) = \frac{0.05*0.025}{0.4} = 0.0625$

*$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

Парадокс формулы Байеса

Имеется заболевание с вероятностью распространения 0,001 и метод диагностического обследования, с P(Б) = 0,9 выявляет больного, P(«Б»|З) = 0,01 ложноположительный результат. «Б» — событие, что обследование показало, что человек болен.
Найти вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.
P(«Б»| Б) = 0,9;P(«Б» | З)= 0,01;P(Б) = 0,001, значит P(З) = 0,999.Вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным равна условной вероятности:
P(З | «Б»).Чтобы её найти, вычислим сначала полную вероятность признания больным:
P(«Б») = 0,999 × 0,01 + 0,001 × 0,9 = 0,01089.
Вероятность, что человек здоров при результате «болен»:
P(З | «Б») = 0,999 × 0,01 / (0,999 × 0,01 + 0,001 × 0,9) ≈ 0,917.
Таким образом, 91,7 % людей, у которых обследование показало результат «болен», на самом деле здоровые люди. Причина этого в том, что по условию задачи вероятность ложноположительного результата хоть и мала, но на порядок больше доли больных в обследуемой группе людей.
Если ошибочные результаты обследования можно считать случайными, то повторное обследование того же человека будет давать независимый от первого результат. В этом случае для уменьшения доли ложноположительных результатов имеет смысл провести повторное обследование людей, получивших результат «болен». Вероятность того, что человек здоров после получения повторного результата «болен», также можно вычислить по формуле Байеса: P(З | «Б», «Б») = 0,999 × 0,01 × 0,01 / (0,999 × 0,01 × 0,01 + 0,001 × 0,9 × 0,9) ≈ 0,1098.

Закон распределения случайной величины

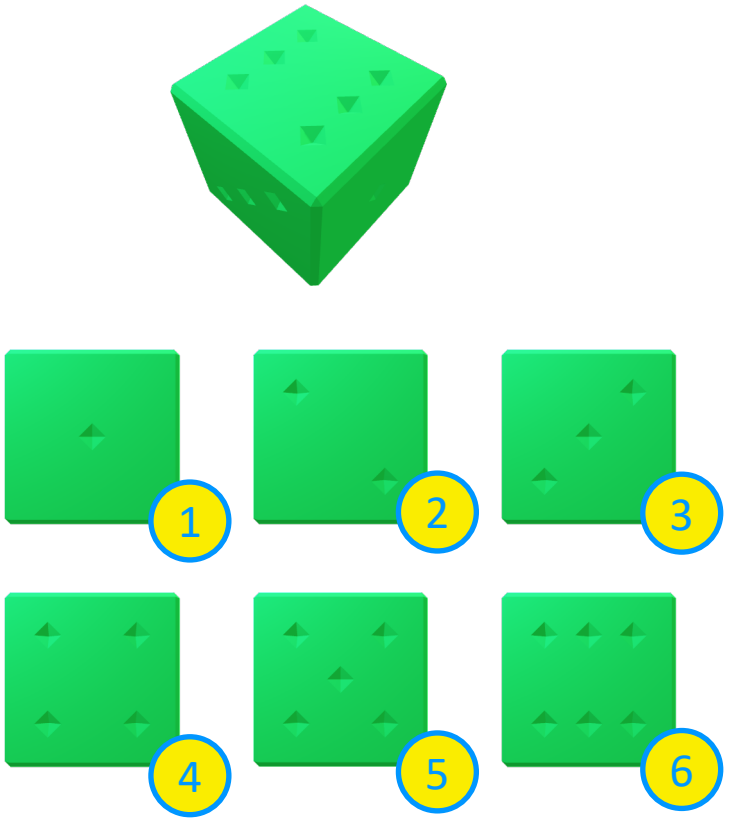
Есть случайная величина $X = X(\omega)$. Среди S чисел $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, могут быть одинаковые. Обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ все различные значения функции $X(\omega) \Rightarrow n \leq |\Omega|$.
Можно найти вероятность события $\{X = x_k\}$, $k=1, \ldots, n$. Событие $\{X=x_k\}$ *состоит из всех тех* ω из $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s\}$, для которых $X(\omega) = x_k$:

$$\{X = x_k\} = \{\omega: X(\omega) = x_k\}$$

Набор вероятностей это закон распределения случайной величины:

$$P\{X = x_k\} = \frac{|\{X = x_k\}|}{|\Omega|}, \; k=1, \ldots, n$$

Дискретные случайные величины



$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$$

$p_i > 0, \quad i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$

Дискретные случайные величины

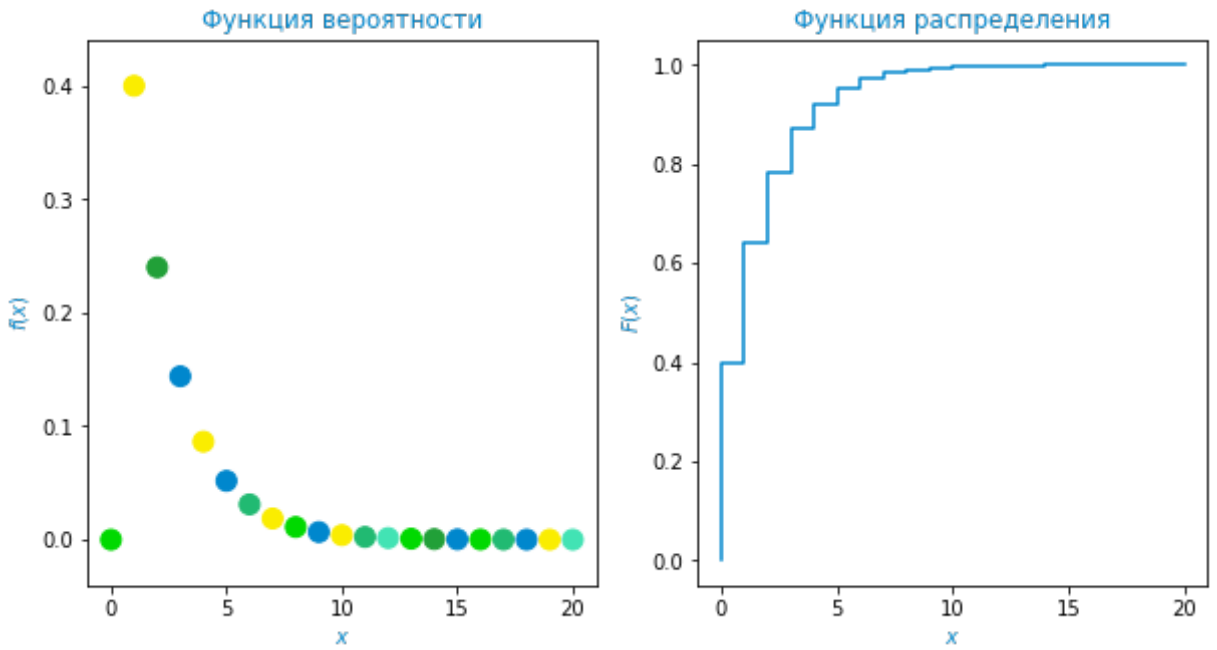
X принимает счётное множество* значений $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$, где

$$p_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

P(X = ω_i) = p_i – функция вероятности

F(x) = P (X ≤ x) – функция распределения



* множество, элементы которого можно перенумеровать

Распределение Бернулли

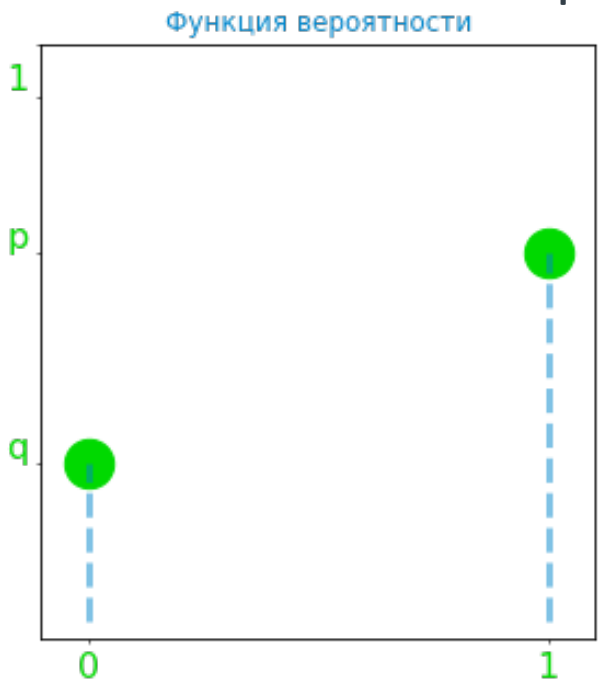
p = 0.7

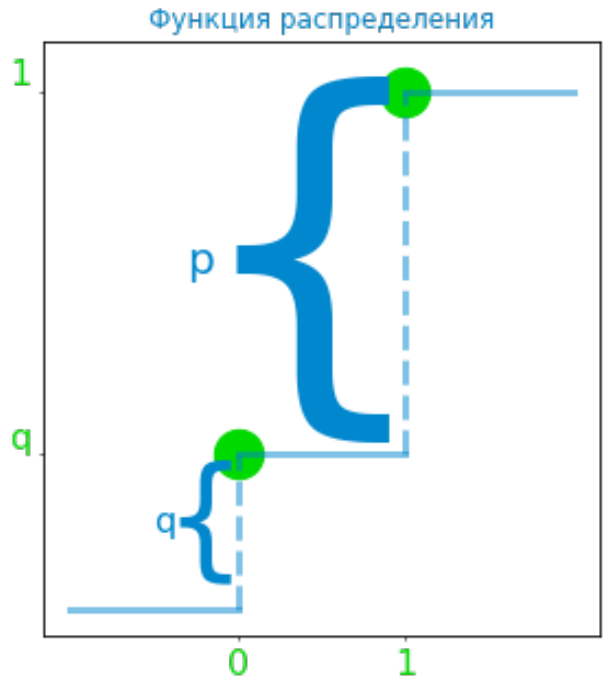
q = 0.3

0 1

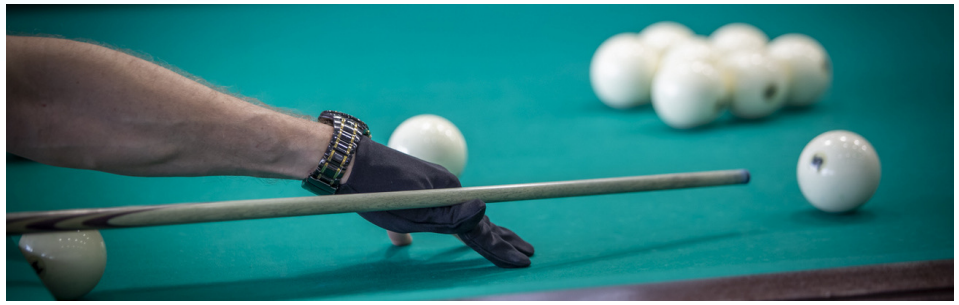
P(X = 1) = p,
P(X = 0) = 1 - p = q

X ~ Ber(p)

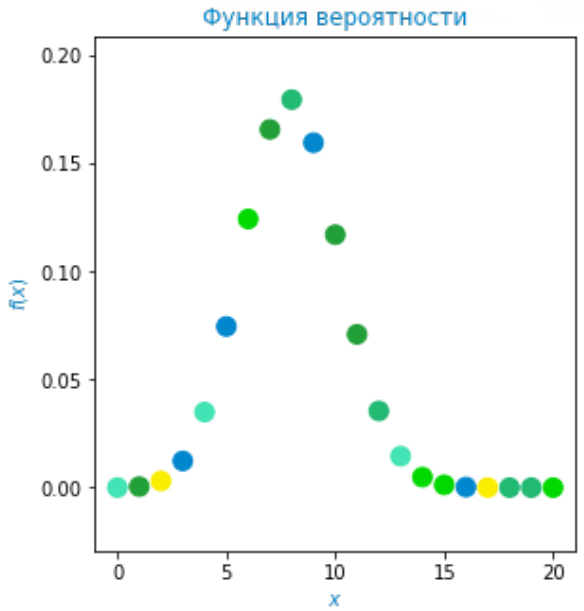


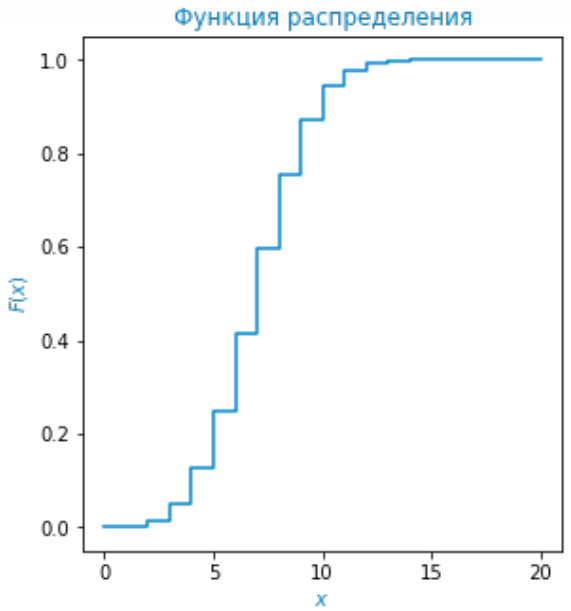


Биномиальное распределение



p = 0.4





p – вероятность попадания

n – число попыток

X – число попаданий

$P(X = n) = p^n$ - вероятность попасть n-раз

$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ * - вероятность попасть k-раз из n

$X \sim Binom(n, p)$

* Биноминальный коэффициент $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

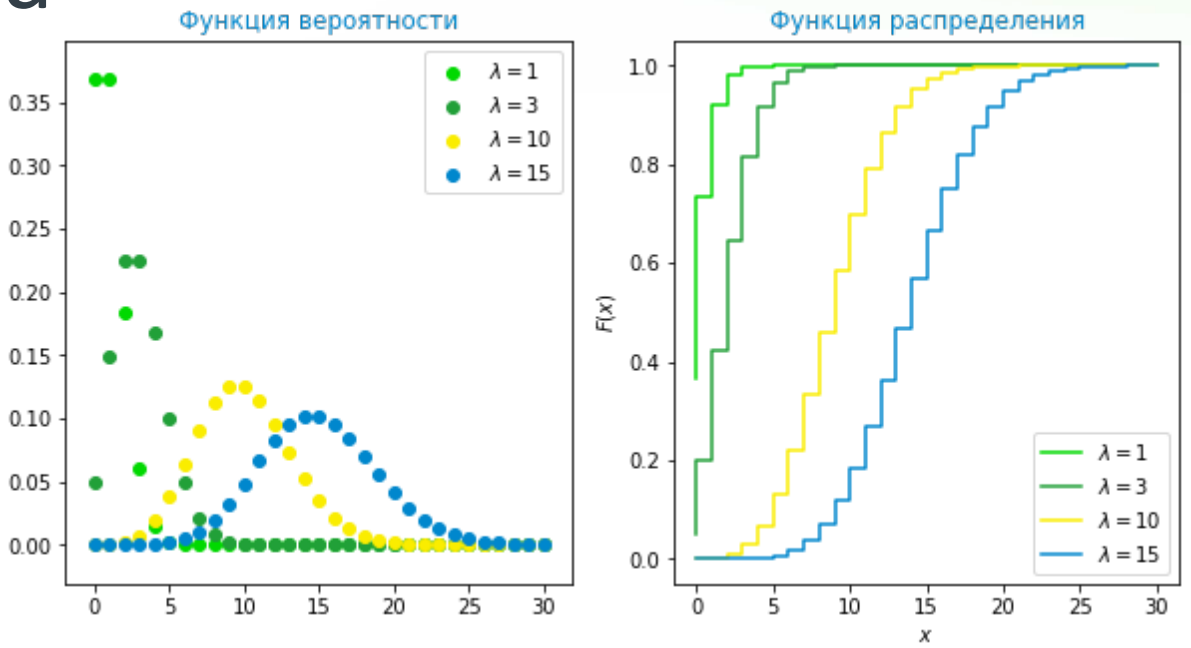
Распределение Пуассона

X – число попаданий

$$\mathbf{P(X = k)} = \frac{\boldsymbol{\lambda^{k} e^{-\lambda}}}{\mathbf{k!}}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

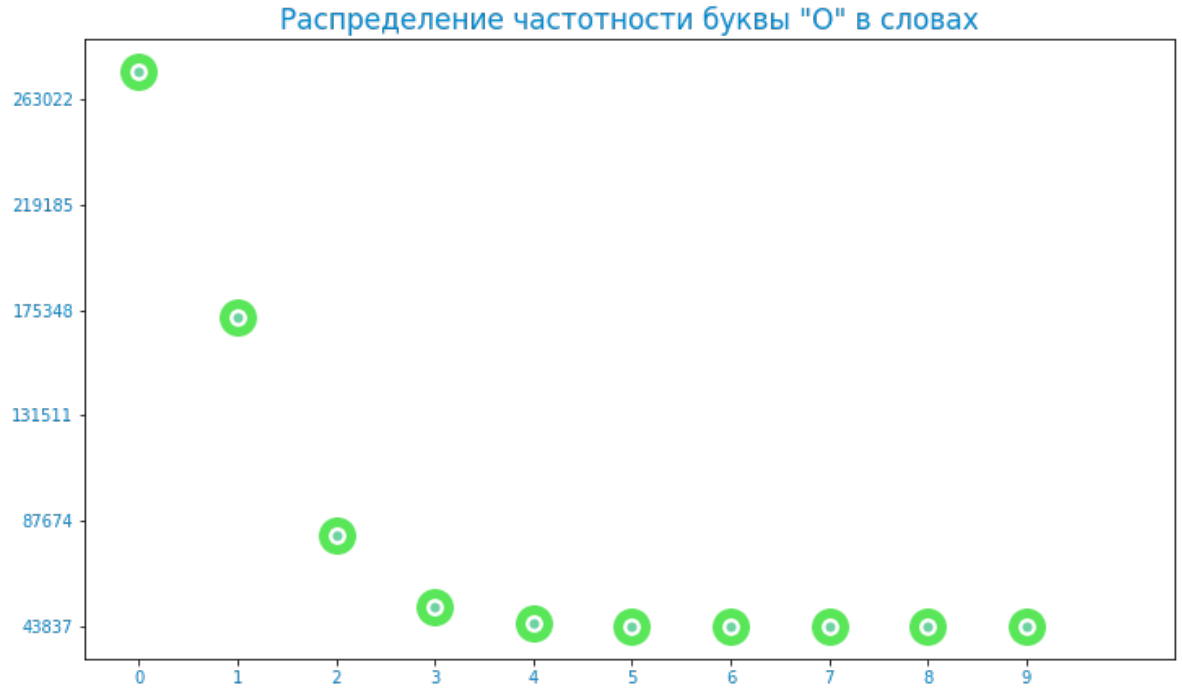
$X \sim \text{Pois}(\lambda)$ *

При больших λ $X \Longrightarrow N(\lambda, \lambda)$



* λ среднее количество событий за фиксированный промежуток времени

Распределение Пуассона



Colab? Colab!

Непрерывные случайные величины

$|\Omega| > \aleph 0 \Rightarrow \quad P(X = \omega) = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$

Множество значений Ω несчётное, вероятность события $P(X = \omega)$ нулевая

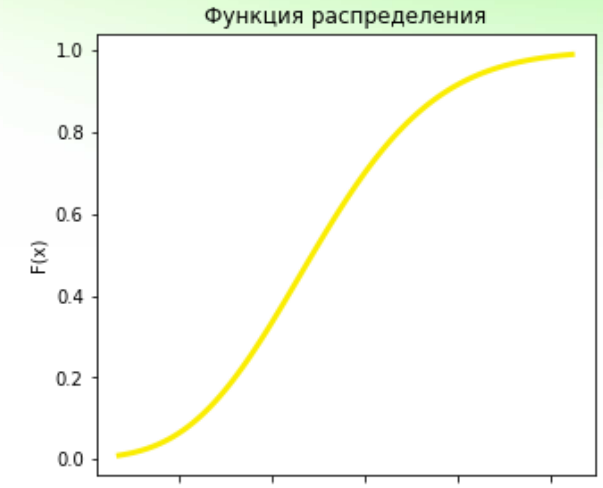
Способы определения:

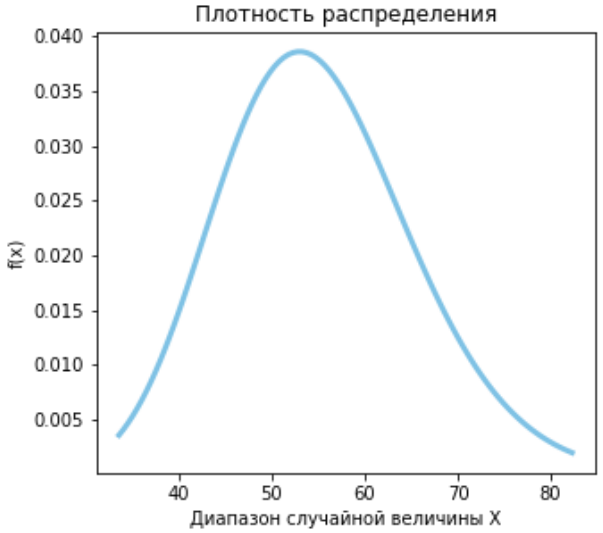
F(x) = P (X ≤ x) – функция распределения

f(x): $\int_a^b f(x)dx = P(a \le X \le b)$ - плотность распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = P(-\infty \le X \le +\infty) = 1$$



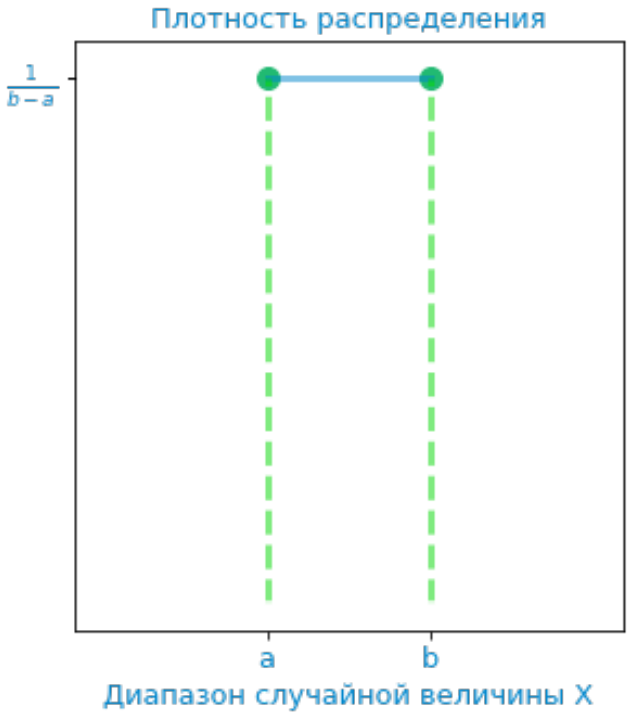


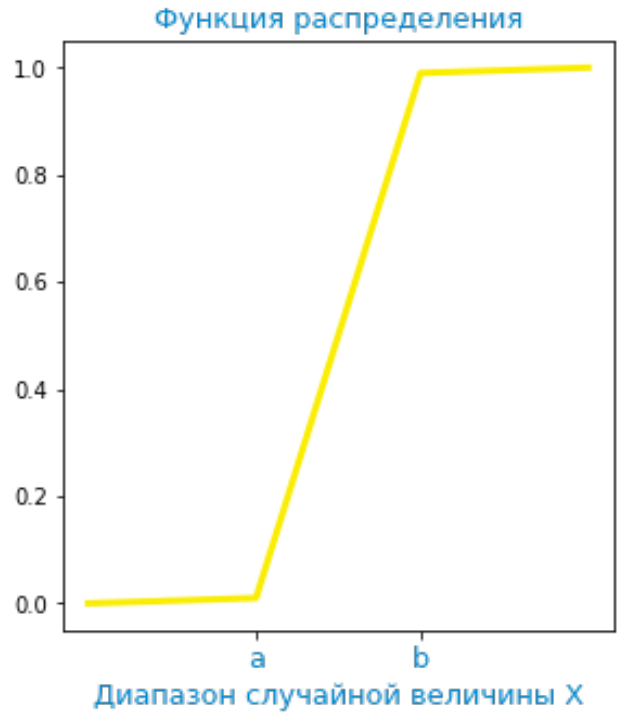
* множество, элементы которого не могут быть перенумерованы

Равномерное распределение

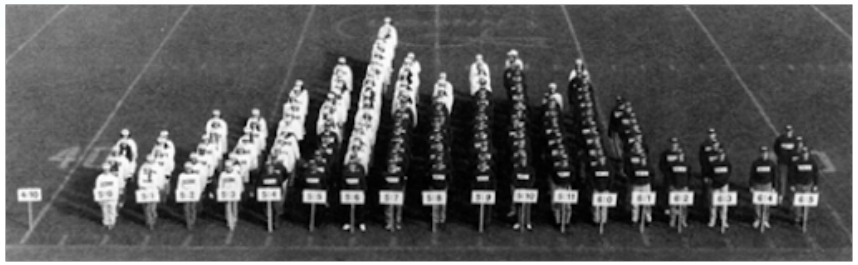
$$X \sim U\,(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b\ -a} & x\ \in [a, b] \\ \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



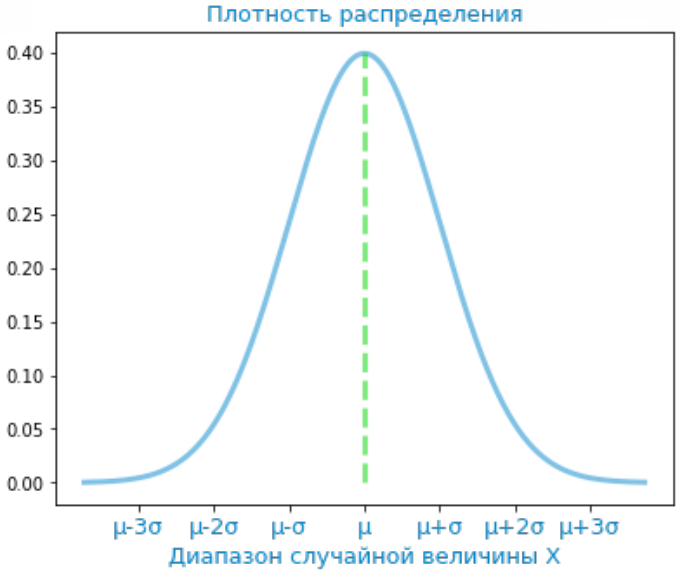


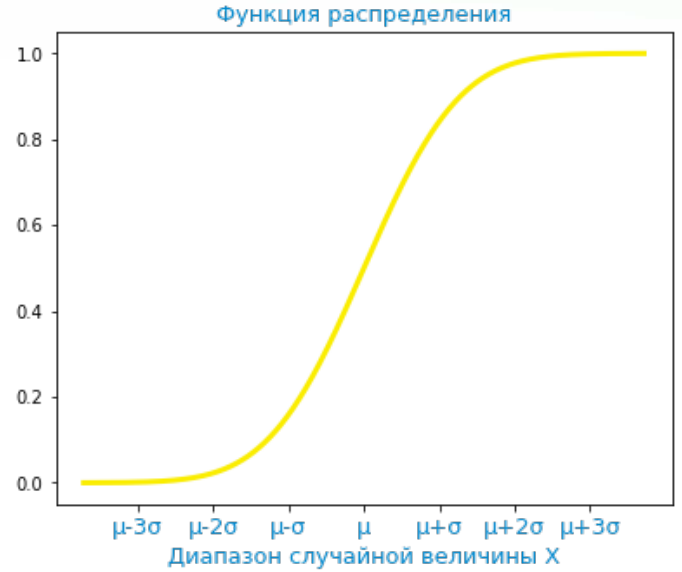
Нормальное распределение

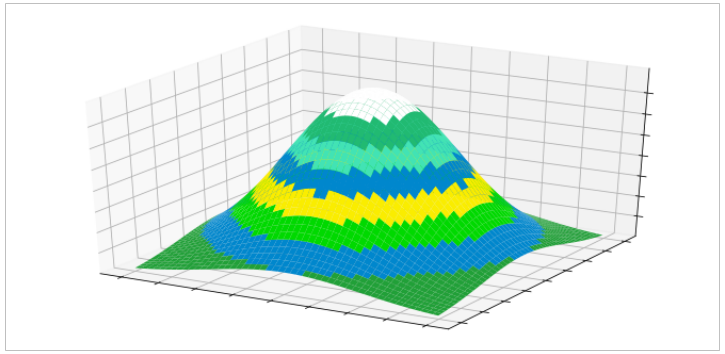


$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$







Colab? Colab!

Резюме

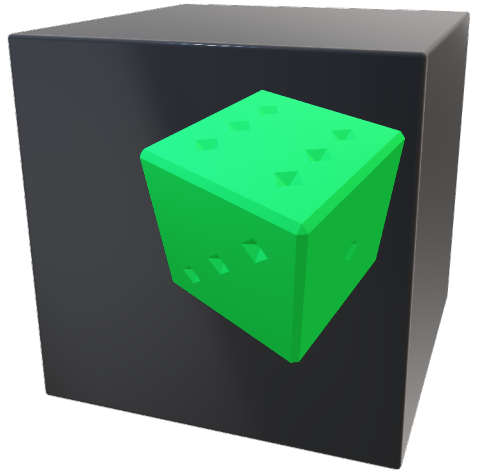
- Поговорили про теорию вероятностей и статистику
  - Рассмотрели основные понятия теории вероятностей
  - Порешали задачи
- Посмотрели что может предложить Python для работы со случайными величинами

Пояснения к заданию

- Решения задач «классическим» способом можно найти в интернете
- Ознакомление с этими решениями приветствуется

А что на практике?

Результаты исследований и испытаний – это не события
В результатах испытаний бывают ошибки
С помощью испытаний мы получаем вероятности определенного исхода



- Вспоминаем принцип «Черного ящика»
- Смоделируем условие задач на **Python**:
  Используем возможности библиотек **random, scipy, numpy** ….
- Сверяем полученные результаты с решениями из интернета ☺

Обратная связь

?

СБЕР

Спасибо за внимание!