

Ensembles, relations, combinatoire

1 Combinatoire élémentaire

1. Combien de nombres peut-on représenter sur k bits?
2. Quel est le nombre de bits pour représenter un entier positif n ?
3. De combien de façons peut-on partitionner un ensemble de taille n en p parties? Quel est le nombre de fonctions $f : A \rightarrow B$, si $|A| = a$ et $|B| = b$?
4. De combien de façons peut-on partager n bombons (identiques) à p enfants? On a le droit de laisser des enfants sans bombons...
5. Ecrire une relation de récurrence permettant de calculer $f(n)$, le nombre de façons de monter n marches sachant qu'on a le droit de les monter par une ou par deux.

2 Combinaisons et un brin d'algorithmique

1. Etablir la relation

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

2. De combien de façon peut-on ordonner (totalement) un ensemble de taille n ?
3. Etablir la relation

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4. En déduire un algorithme calculant $\binom{n}{k}$. Quelle est sa complexité ?
5. Mêmes questions à partir de la relation

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

pour tout $n > k > 1$.

3 Algorithmes pour des ensembles et relations

1. Ecrire un algorithme calculant l'intersection de deux ensembles A et B , donnés sous forme de listes. Quelle est sa complexité par rapport à $|A|$ et $|B|$?
2. Répondre aux mêmes questions en supposant que A et B sont des ensembles d'entiers et que les listes sont triées par ordre croissant.

3. Ecrire un algorithme de jointure entre deux relations R et P (la jointure se fait sur le premier champ). Quelle est sa complexité? Même question pour le cas où R et P sont données sous forme de listes triées, par ordre croissant, sur le premier champ.
4. Comparer vos algorithmes dans le cas trié et non trié lorsque les ensembles (ou relations) ont de l'ordre de 10 000 éléments. D'ailleurs, quelle est la complexité des meilleurs algorithmes de tri ?
5. Vous pouvez répondre aux mêmes questions en remplaçant l'intersection par l'union, la différence etc.

4 Relations – questions élémentaires

1. Donner la relation de divisibilité pour les entiers entre 2 et 8.
2. Soit G un graphe non orienté. Considérons la relation binaire sur l'ensemble de ses sommets, ou $R(x, y)$ s'il existe un chemin de x à y . Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?
3. On peut définir la même relation sur un graphe orienté. Est-ce encore une relation d'équivalence ?

5 Relations binaires et graphes

Dans les relations binaires, on a souvent des relations $R \subseteq X \times X$ entre éléments d'un même ensemble.

1. Comment représenter ces relations en mémoire?
2. Illustrer ces représentations sur la relation de précédence entre les tâches que vous avez rencontrée dans le TD sur les ordonnancements.
3. Proposer un algorithme calculant la fermeture transitive d'une relation R , où R est donné sous forme de liste, puis sous forme de graphe orienté.
4. Supposer que R est une relation sans circuit (par exemple la précédence entre tâches). Comment rendre l'algorithme de fermeture transitive plus efficace ?